ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

МОСКОВСКИЙ ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)

МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ В ЗАДАЧАХ КОНТРОЛЯ ЯДЕРНЫХ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ УСТАНОВОК

Учебное пособие

Рекомендовано УМО «Ядерные физика и технологии» в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений

Москва 2008

УДК 621.039.5 (075) ББК 31.46я7 М 54

Методы обработки статистической информации в задачах контроля ядерных энергетических установок: *Учебное пособие* / А.М. Загребаев, Н.А. Крицына, Ю.П. Кулябичев, В.А. Насонова, Н.В. Овсянникова. – М.: МИФИ, 2008.– 388 с.

Приведены основы теории вероятностей, математической статистики, теории случайных функций и теории оценивания. Представлено большое количество практических задач из области физики ядерных реакторов, решение которых основано на использовании статистических методов.

Предназначено для студентов, обучающихся по специальностям «Прикладная математика и информатика» и «Ядерные реакторы и энергетические установки», а также полезно инженерам и аспирантам, работающим в области математического обеспечения ядерно-энергетических систем.

Пособие подготовлено в рамках Инновационной образовательной программы МИФИ.

Рецензент канд. физ.-мат. наук, доц. В.И. Савандер

ISBN 978-5-7262-1001-8

© Московский инженерно-физический институт (государственный университет), 2008

ОГЛАВЛЕНИЕ

введен	ИЕ	6
Глава 1. ТЕОРИИ	ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ТЕОРЕМЫ I ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ	9
1.1.	Случайные величины и законы их распределения	9
1.2.	Статистические оценки параметров распределения	56
1.3.	Статистическая проверка статистических гипотез	79
1.4.	Примеры законов распределения в физике ядерных реакторов	92
	1.4.1. Закон радиоактивного распада	92
	1.4.2. Вероятность взаимодействия.	
	Макроскопические сечения взаимодействия	93
	1.4.3. Закон Пуассона. Регистрация частиц	94
-	1.4.4. Энергетические спектры нейтронов деления и замедления	96
Спис	сок литературы к главе 1	106
Глава 2.	СЛУЧАЙНЫЕ ФУНКЦИИ И ИХ ХАРАКТЕРИСТИКИ	107
2.1.	Общие свойства случайных функций	107
2.2.	Операции над случайными функциями	
	и их статистическими характеристиками	114
2.3.	Спектральное разложение стационарных случайных функций	118
2.4.	Стационарные случайные процессы в динамических системах	128
2.5.	Примеры применения теории случайных функций	
	в физике реакторов	132
	2.5.1. Результаты статистической обработки реальных данных	
	энергоблока с реактором РБМК (закон распределения,	
	корреляционная функция плотности потока нейтронов)	132
	2.5.2. Экспериментальное определение естественных функций	
	реактора и их связь с собственными функциями	137
	2.5.3. Вероятность образования локальных надкритических област	ей 154
Carry	в активной зоне ядерного реактора	154
Спис		100
1 лава э.	СТАТИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ ДАННЫХ	168
3.1.	Виды и формы моделей информационных процессов	171
	3.1.1. Основные математические модели объъектов	171
	3.1.2. Оптимальная настраиваемая модель	174
3.2.	Свойства оценок и критерии качества в задачах	1.77
	статистической обработки информации	177
	3.2.1. UBOUCTBA OLICHOK	1//
	5.2.2. критерии качества, функции потерь и штрафа	170
	в задачах Оценки	1/9

3.3.	Стати	стические методы обработки данных	
	при ис	пользовании полного объема информации	- 183
	3.3.1.	Метод наименьших квадратов	- 183
	3.3.2.	Метод наименьших квадратов для линейных объектов	- 184
	3 3 3	Рекуррентная форма метола наименьших квалратов	
		лля линейных регрессионных объектов	- 192
	334	Метол наименьших квалратов лля нелинейных объектов	- 197
	335	Линейные несмешенные оценки с минимальной лисперсией	- , ,
	0.0.0.	ошибки оценки (марковские оценки)	- 199
	336	Метол максимума правлополобия	- 201
	337	Метод максимума привденодеения	- 203
	338	Байесовские оценки	- 206
34	Pervni	рентные схолящиеся апторитмы при полной	200
5.1.	априо	рной информации о помехе	- 209
	3 4 1	Метол стохастической аппроксимации для решения	207
	5.1.1.	скалярных стохастических уравнений	- 209
	342	Обобщение метода стохастической аппроксимации	- 207
	5.4.2.	пля решения залан илентификации	- 214
	3/3	Асимптотинеская скорость сходимости	- 214
	5.4.5.		215
	311	Оптимании в рекуррентных алгоритми и преитификации	213
	3.4.4.	Оптимальные рекуррентные алгоритмы идентификации	217
	216	Азимитетическая матрине корорионий онибек снешки	- 223
	5.4.0.	но оптическая матрица ковариации ошиоок оценки	220
	2 1 7	при оптимальной функции потерь	- 229
	5.4.7. 2.4.9	Аосолютно оптимальные рекуррентные алгоритмы	- 231
	3.4.8.	пример использования ассолютно оптимальных	
		рекуррентных алгоритмов для идентификации параметров	224
25	H	линеиного регрессионного ооъекта	- 234
3.5.	испол	ьзование принципов игрового подхода	226
	в задач	чах идентификации	- 236
	3.5.1.	Априорная информация о помехах и классах распределении	- 236
	3.5.2.	Использование игрового подхода	2 4 0
	2 5 2	в задаче определения функции потерь	- 240
	3.5.3.	Свойства оптимальной функции потерь	•••
		при неполной информации о помехе	- 246
	3.5.4.	Преобразование вариационной задачи определения функции	
		потерь к задаче нелинейного математического	
		программирования	- 250
	3.5.5.	Определение функции потерь	
		для регрессионных объектов. Алгоритм Хубера	- 254
	3.5.6.	Идентификация параметров регрессионного объекта	
		при α-загрязненном нормальном распределении помехи	- 259
3.6.	Приме	енение методов оценивания параметров при обработке	
	реактс	рной информации	- 269
	3.6.1.	Метод максимума правдоподобия при аппроксимации	
		макрополей нейтронов	- 269
		4	

	3.6.2.	Определение постоянной времени графитовой кладки	
		в пассивном эксперименте	272
	3.6.3.	Прогноз изменения оперативного запаса реактивности	270
C		при работе реактора в переходных режимах	279
Спи	сок ли	тературы к главе 3	286
Глава 4 В ФИЗИ	. MET(1KE PE	ОД СТАТИСТИЧЕСКОГО ЭКСПЕРИМЕНТА ЕАКТОРОВ	288
4.1	Метот		
4.1.	c napu	цы моделирования случаиных величин	- 288
4 2	Молеі	померным законом распределения	200
1.2.	распр	елепения	- 293
4.3	Моле	пирование случайных величин с заланным вилом	-,,,
	koppe.	лянионной функции (метол формирующего фильтра)	295
4.4.	Приме	ер математического моделирования ядерного реактора	->0
	при сл	и ичайных возмушениях в свойствах размножающей среды	299
	4.4.1.	Математическая модель и статистические	
		исследования параметров ячейки реактора	300
	4.4.2.	Математическая модель плотности потока нейтронов	
		в реакторе с обратными связями и системой регулирования	305
	4.4.3.	Статистические исследования на математической модели	
		ядерного реактора	320
Спи	юк ли	тературы к главе 4	334
Frana 5		ала и полна и п	
глава э в ялгр	. АЛГС РНОМ І	РГИТМЫ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ФИЗИЧЕСКИХ ПОЛЕИ РГАКТОРГ ПО ЛИСКРЕТНЫМ ИЗМЕРЕНИЯМ	- 335
о идеі	nom	ЕАКТОГЕ ПО ДНСКГЕТНЫМ ИЗМЕГЕНИИМ	555
5.1.	Метод	цика и алгоритм восстановления полей энерговыделения	
	в ядер	ных реакторах типа ВВЭР	335
5.2.	Метод	цика и алгоритм восстановления полей	
	энерго	овыделения в ядерных реакторах типа РБМК	338
5.3.	Метод	цика и алгоритм восстановления полей	
	энерго	овыделения в реакторах типа CANDU	343
5.4.	Восст	ановление параметров при частично утраченной	
	измер	ительной информации	346
	5.4.1.	Оценка информационной избыточности системы	246
		контроля ядерного реактора	346
	5.4.2.	Определения расхода теплоносителя через топливный канал	252
	5 42	на основе информации об активности теплоносителя	353
	5.43.	Анализ информативности сигналов точечных	200
	5 4 4	и протяженных датчиков контроля физических полеи	360
	5.4.4.	информационный подход к оптимизации количества	264
	515	и расположения датчиков внугриреакторного контроля	364
	5.4.5.	в реактора DEMV при настина толя неитронов	
		в реакторе г билк при частичной потере	375
C	1001 111	измерительной информации	- 313
	ICOK JIN	торатуры к тлабо Ј	- 504

введение

Характерной чертой современного развития ядерной энергетики является повышение требований к безопасности ядерных энергетических реакторов. Повышение безопасности ядерной энергетики может осуществляться по нескольким направлениям: проектирование новых ядерных энергоблоков, обладающих свойствами внутренней самозащищенности, модернизация систем управления и защиты существующих энергоблоков и т.д. При этом существующие математические модели, как правило, описывают реактор как детерминированный объект. Вместе с тем, практика эксплуатации показывает, что отличительной особенностью реактора как объекта моделирования, контроля и управления является наличие большого числа пространственно распределенных возмущающих факторов, например, вибрация тепловыделяющих сборок, колебания органов управления, случайные колебания расхода теплоносителя и др. По этой причине решение ряда задач, связанных со случайными возмущениями параметров не может быть рассмотрено в рамках существующих детерминированных подходов. В этой связи актуальным представляется подход к реактору как к объекту со случайными параметрами и, в соответствии с этим подходом, разработка его математической модели, алгоритмов контроля и управления.

На начальной стадии развития ядерной энергетики вероятностный подход отражал тот факт, что процессы взаимодействия нейтронов с веществом имеют по своей природе стохастический характер. С этих позиций процессы в реакторе рассматриваются в теории шумов уже на протяжении почти пятидесяти лет. За это время разработаны экспериментальные методы определения параметров реактора, ставшие классическими (например, методы Росси, Фейнмана, Могильнера и др.). Эти методы применимы в основном для реактора нулевой мощности и в качестве причины статистических флюктуаций рассматривается различие в числе нейтронов, образующихся при делении ядра, и вероятностный характер взаимодействия нейтрона с ядром. Вместе с тем, отметим, что расчетные методы, в основе которых лежит случайный розыгрыш судьбы нейтрона (семейство методов Монте-Карло) с успехом применяются в настоящее время.

Следующим этапом развития вероятностного подхода можно считать его применение для анализа ситуаций, возникающих в активной зоне энергетического реактора вследствие случайностей, обусловленных технологическими неопределенностями при изготовлении тепловыделяющих сборок, графитовых колонн и т.д. На данном этапе решались задачи определения средней плотности потока нейтронов в неоднородной среде, возможности образования локальных критических зон при загрузке реактора и распределения энерговыделения по активной зоне. При этом элемент случайности здесь переносится на макроскопические сечения взаимодействия. Важным моментом здесь было осознание исследователями того факта, что в реальной ситуации нельзя, используя детерминированные математические модели, предсказать распределение энерговыделения в активной зоне физически большого реактора. Это обстоятельство нашло свое отражения в современных алгоритмах восстановления полей на основе данных внутриреакторного контроля.

Наконец, внедрение современной вычислительной техники обеспечило возможность накапливать и обрабатывать большие объемы расчетно-экспериментальной информации непосредственно в процессе работы реактора. Например, на энергоблоках с реакторами РБМК в штатном режиме работы информация о наиболее важных параметрах записывается с интервалом в несколько минут. Это обстоятельство позволяет применять стохастический подход при исследовании поведения важнейших пространственнораспределенных расчетно-экспериментальных параметров, считая их случайными величинами и случайными функциями.

Таким образом, актуальность и целесообразность изучения и использования методов обработки статистической информации для решения научно-практических задач не вызывает сомнений.

Вместе с тем, когда авторы начинали работу над этой книгой, возникали многочисленные споры: какой материал в ней излагать, в каком объеме, с какой степенью математической строгости, в какой последовательности, в каком стиле и др. Споры продолжались до тех пор, пока авторы не договорились о том, для кого, собственно, эта книга предназначена. По мнению авторов, эта книга будет полезна студентам-физикам, избравшим своей специальностью физику ядерных реакторов и студентам, избравшим своей специальностью математическое обеспечение ядерно-энергетических систем. Первым она будет полезна, потому что они смогут ознакомиться с методами решения физических задач, им до этого не известных – например, методами теории случайных функций, теории оценивания, методами цифровой фильтрации и др. Вторым она будет полезна, потому что они ознакомятся с конкретными физическими задачами, где применяются известные им методы. В качестве примеров конкретного использования методов статистической обработки информации авторы приводят, в основном, задачи из своей научной практики.

По поводу строгости и полноты изложения было решено, что авторы не будут приводить математические доказательства известных положений из теории вероятностей, теории случайных функций, теории оценивания и др. Интересующиеся найдут эти доказательства в литературе, список которой приводится в конце каждой главы. О стиле изложения пусть судят читатели, но мы старались, чтобы студенту были понятны основные идеи, изложенные в книге, с минимальными затратами их умственных способностей и времени.

ГЛАВА 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Статистические методы обработки информации имеют в своей основе теорию вероятностей [2, 4, 7, 8]. В этой связи необходимым представляется напомнить основные понятия, определения и теоремы теории вероятностей.

Теория вероятностей устанавливает законы в массовых случайных явлениях. Только при наличии массы наблюдений в одних и тех же условиях и есть возможность установить закономерность в случайных явлениях. Под случайностью понимают непредсказуемость, являющуюся результатом незнания, неосведомлённости и отсутствия необходимой информации.

1.1. Случайные величины и законы их распределения

Некоторые сведения из алгебры событий. Определим случайное событие как факт, который может либо произойти, либо не произойти.

Введем следующие обозначения.

1. $A \subset B$ – событие A включает событие B, т.е. если произошло событие A, то событие B тем более реализовалось.

2. A = B – равносильные события.

3. $C = A \cdot B$ – произведение событий. Событие C состоит в одновременном наступлении событий A и B.

4. *С* = *A* + *B* – сумма событий состоит в том, что наступает хотя бы одно из событий *A* или *B*.

5. $A \cdot B = V$ – события A и B называются несовместными, если они не могут реализоваться одновременно.

6. $A_1...A_n$ – события образуют полную группу событий, если хо-

тя бы одно из них непременно происходит: $\sum_{i=1}^{n} A_i = A_1 + ... + A_n$.

7. Два несовместных события A и \overline{A} , образующих полную группу, называются противоположными.

Классическое определение вероятности. Пусть имеется полная группа из *n* попарно несовместных и равновозможных элементарных событий (исходов). Если событие *A* может реализоваться *m* элементарными исходами, то вероятность события *A* вычисляется

как $P(A) = \frac{m}{n}$, где m – число исходов, благоприятствующих событию A, а n – общее число исходов.

Определим, например, вероятность события *A*, состоящего в том, что в результате бросания игральной кости выпадет четное число. Понятно, что такое событие может реализоваться тремя элементарными исходами: выпадает число 2, выпадает число 4, выпадает число 6. Таким образом, благоприятных элементарных

исходов 3, а общее число исходов 6. Поэтому $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Из данного определения вероятности, легко выводятся следствия:

1) вероятность достоверного события равна 1; если m = n, то P(A) = 1;

2) вероятность невозможного события равна 0; если m = 0, то P(A) = 0;

3) вероятность противоположного события равна $P(\overline{A}) = = 1 - P(A)$.

Геометрическое определение вероятности. Классическим определением вероятности легко пользоваться тогда, когда Вы можете посчитать число возможных исходов, а как быть, если это сделать невозможно, например, когда число исходов бесконечно? Например, Вы настолько плохой стрелок, что можете попасть только в квадрат мишени, причем в совершенно произвольное место. Пусть в мишени, как обычно, нарисованы концентрические круги, например, один из них радиусом $\frac{a}{4}$ (рис. 1.1). Какова вероятность того, что Вы попадете в круг?



Рис. 1.1. К понятию геометрической вероятности

Интуитивно понятно, что эта вероятность будет равна отноше-

нию площади круга к площади всей мишени, а именно $\frac{\pi \frac{a^2}{16}}{a^2} = \frac{\pi}{16}$.

Обобщая этот пример, скажем, что геометрической вероятностью будем называть отношение площади g, попадание в которую благоприятствует событию A, ко всей площади G, куда возможно по-

падание, т.е. $P(A) = \frac{g}{G}$.

Или, например, точка бросается наудачу на отрезок длиной L, внутри которого находится отрезок длиной $l \le L$. Какова вероятность попасть в отрезок длиной l? Понятно, что это будет величина $P(A) = \frac{l}{L}$. Отметим, что приведенное выше определение подразумевает, что и круг, и отрезок могут находиться в любом месте означенных фигур.

Статистическая оценка вероятности. И классическое, и геометрическое определение вероятности предполагают наличие «равновозможных» элементарных исходов. На практике зачастую трудно выделить равновозможные случаи. Предположим, перед Вами стоит задача оценки вероятности появления шести очков при бросании «неправильной» игральной кости, например, кости со сточенными гранями. Длительное наблюдение над появлением или непоявлением этого события при большом числе независимых испытаний, проводимых в одних и тех же условиях, показывает, что число появлений события A подчиняется устойчивым закономерностям. Если через m обозначить число появлений события A при nнезависимых испытаниях, то оказывается, что отношение m/n (частота события A) при достаточно больших n для большинства таких серий наблюдений сохраняет почти постоянную величину. Причем чем большее число независимых испытаний n будем проводить, тем реже будут наблюдаться большие отклонения от некоторой постоянной величины, которую будем принимать за вероятность события A.

Аксиоматическое определение вероятности. Данное определение вероятности включает как частные случаи классическое и статистическое определения вероятности и снимает недостатки каждого из них. Этот подход предложен А.Н. Колмогоровым и связывает теорию вероятностей с теорией множеств и метрической теорией функций. В силу задач, поставленных перед данной книгой, аксиоматический подход рассматривать не будем.

Приведем основные теоремы теории вероятностей, позволяющие достаточно просто посчитать вероятности сложных событий, не занимаясь перебором всех возможных вариантов.

Теоремы сложения и умножения вероятностей

Теорема сложения вероятностей несовместных событий

Теорема. Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A+B) = P(A) + P(B).$$
(1.1.1)

Для произвольного числа несовместных событий

$$P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = \sum_{i=1}^n P(A_i).$$

Если $A_1, ..., A_n$ образуют полную группу несовместных событий,

$$P(A_1 + ... + A_n) = 1$$
.

Если *А* и *В* совместны, то справедлива <u>теорема сложения веро-</u> <u>ятностей совместных событий.</u>

Теорема. Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B).$$
(1.1.2)

Теорема может быть обобщена на любое конечное число совместных событий. Например, для трех совместных событий

$$P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cdot B) - -P(A \cdot C) - P(B \cdot C) - P(A \cdot B \cdot C).$$

Теорема умножения вероятностей

Прежде, чем говорить о теореме умножения, введем понятие условной вероятности события.

Условной вероятностью события A относительно B называется вероятность события A, вычисленная при условии, что произошло событие B.

Теорему умножения вероятностей сформулируем следующим образом.

Теорема. Вероятность произведения двух событий равна вероятности одного из них на условную вероятность другого

$$P(A \cdot B) = P(B) \cdot P(A / B), \qquad (1.1.3)$$

или

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B / A) .$$

Можно показать, что для *n* событий теорема умножения вероятностей будет иметь вид:

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n) =$$

= $P(A_1) \cdot P(A_2 / A_1) \cdot P(A_3 / A_1 \cdot A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n / A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_{n-1}).$

Условие независимости событий выражается соотношением P(A | B) = P(A) или P(B | A) = P(B).

Если A не зависит от B, то и B не зависит от A.

Вероятность произведения двух независимых событий есть:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B) .$$

Для произвольного числа событий

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot \ldots \cdot P(A_n).$$

Теорема о полной вероятности. Теорема Байеса

Теорема о полной вероятности. Вероятность некоторого события A, которое может произойти вместе с одним из событий $H_1, ..., H_n$, которые образуют полную группу несовместных событий (гипотез), равна

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A / H_i).$$
(1.1.4)

Теорема Байесса. Пусть для полной группы несовместных гипотез $H_1, ..., H_n$ до опыта известны их вероятности $P(H_1), ..., P(H_n)$ и условные вероятности появления события A с каждой из этих гипотез $P(A/H_1), ..., P(A/H_n)$. Пусть в результате опыта <u>наблюдено</u> появление события A. Тогда вероятность гипотез следует переопределить следующим образом:

$$P(H_i / A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A / H_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A / H_i)}.$$
 (1.1.5)

Случайная величина, дискретные и непрерывные случайные величины

Случайная величина – величина, которая в результате опыта может принять то или иное значение, не известное заранее, какое именно.

Различают дискретные и непрерывные случайные величины.

Дискретной называют случайную величину, которая принимает отдельные, изолированные возможные значения с определенными вероятностями. Число возможных значений дискретной случайной величины образует счетное множество. Например, число атомов, распадающихся в единицу времени.

Непрерывной называют случайную величину, которая может принимать любое значение из некоторого конечного или бесконечного интервала. Число возможных значений непрерывной случайной величины бесконечно. Например, сила тока в электрической цепи.

Случайная величина считается полностью определённой с вероятностной точки зрения, если существует соотношение между значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями. Такое соотношение называется законом распределения случайной величины.

Законы распределения дискретной случайной величины

Закон распределения дискретной случайной величины X считается заданным, если известны все ее возможные значения $x_1, x_2, ..., x_n$ и вероятности их появления $P(x_1) = p_1$, $P(x_2) = p_2, ..., P(x_n) = p_n$. В дальнейшем прописными буквами будем обозначать случайную величину, а строчными – конкретные ее значения, которые могут появиться в результате опыта.

Так как эти события, т.е. появление конкретных значений, образуют полную группу несовместных событий (действительно, не может же одна случайная величина в одно и то же время иметь два значения!), то $\sum_{i=1}^{n} P(x_i) = 1$. Простейшей формой задания дискретной случайной величины является табл. 1.1 – ряд распределения.

Таблица 1.1

Значение случайной величины Х		<i>x</i> ₂	<i>x</i> ₃	 x_n
Вероятность Р появления значения		p_2	p_3	 p_n

Ряд распределения

Биномиальное распределение

Пусть производится *n* независимых опытов, в каждом из которых может появиться или не появиться некоторое событие *A*, пусть вероятность появления события в каждом опыте одинакова и равна *p*, а вероятность непоявления, соответственно, q = 1 - p. Требуется определить, какова вероятность появления события *A* в результате *n* опытов ровно *m* раз?

Ответ на этот вопрос дает формула Бернулли:

$$P_n(m) = C_n^m p^n q^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m}.$$
 (1.1.6)

Функция распределения и плотность распределения

Универсальной характеристикой, полностью описывающей любую случайную величину с вероятностной точки зрения, является функция распределения ее вероятности. Она определяется как вероятность того, что случайная величина X примет значение меньшее, чем x, т.е.

$$F(x) = P(X < x).$$
(1.1.7)

Функция распределения обладает следующими свойствами.

1. Значения F(x) принадлежат отрезку [0,1], т.е. $0 \le F(x) \le 1$.

2. F(x) — неубывающая функция, т.е. если $x_2 > x_1$, то $F(x_2) \ge F(x_1)$.

3. Вероятность того, что случайная величина примет значение из интервала [a, b) равна приращению функции распределения на этом интервале:

$$F(a) - F(b) = P(x_1 \le X < x_2). \tag{1.1.8}$$

4. Вероятность того, что непрерывная случайная величина примет определенное значение равна нулю.

5. $F(x = -\infty) = 0$; $F(x = +\infty) = 1$.

Плотность распределения вероятностей случайной величины

Пусть имеется непрерывная случайная величина X с функцией распределения F(x). Тогда вероятность попадания значения случайной величины в отрезок от x до $x + \Delta x$ есть

$$P(x \le X < x + \Delta x) = F(x + \Delta x) - F(x).$$
 (1.1.9)

При этом вероятность, приходящаяся на единицу длины отрезка Δx , есть отношение: $\frac{P(x \le X < x + \Delta x)}{\Delta x} = \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x}$.

Обозначим:

$$\frac{dF}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = f(x).$$
(1.1.10)

Функция f(x) называется плотностью распределения вероятностей или для краткости будем в дальнейшем говорить «плотность распределения» случайной величины X.

Смысл введения этой величины в том, что она характеризует «локальную» структуру функции распределения. Вероятность попадания случайной величины X в интервал (α , β) можно выразить через плотность распределения:

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx . \qquad (1.1.11)$$

Между плотностью распределения f(x) и функцией распределения F(x) существует связь:

$$F(x) = P(-\infty < X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt .$$
 (1.1.12)

1. Функция плотности распределения f(x) – неотрицательная функция $f(x) \ge 0$.

2.
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1.$$

Отметим еще одну деталь. Функция F(x) не имеет размерности, а функция f(x) имеет размерность, обратную размерности случайной величины.

Геометрическая интерпретация функции распределения и плотности распределения

На рис. 1.2 показана функция распределения F(x) для непрерывной случайной величины. Из рисунка видно, что функция неубывающая и стремится к нулю при $n \to -\infty$ и к единице при $n \to +\infty$. Для конкретного значения x значение функции F(x) есть вероятность того, что случайная величина X будет меньше заданного значения x.



Рис. 1.2. Функция распределения



Рис. 1.3. Плотность распределения

На рис. 1.3 показана плотность распределения. Заштрихованная площадь под кривой, ограниченная прямыми $x = \alpha$ и $x = \beta$, имеет

смысл вероятности того, что случайная величина примет значение из интервала $\alpha < X < \beta$. Площадь под кривой, ограниченная осью *ОХ* и прямой x = x, имеет смысл функции распределения, т.е. вероятности того, что случайная величина *X* будет меньше, чем *x*.

Числовые характеристики случайных величин

Ранее были рассмотрены различные формы закона распределения, каждая из которых полностью, с вероятностной точки зрения, характеризует случайную величину:

• <u>для дискретных случайных величин</u> – это ряд распределения P(x) и функция распределения F(x);

• <u>для непрерывных случайных величин</u> – это функция распределения F(x) и плотность распределения f(x).

Однако на практике зачастую интересуются не законом распределения случайной величины, а лишь частными особенностями ее поведения, например средним ее значением, степенью разбросанности и т.д.

Числовыми характеристиками случайных величин называют величины, позволяющие в сжатой форме выразить наиболее существенные особенности закона распределения случайной величины. При этом решить поставленную задачу можно иногда, лишь оперируя числовыми характеристиками.

Математическое ожидание, мода, медиана

Пусть имеется дискретная случайная величина *X*, которая в *n* опытах приняла следующие значения:

$$x_1 \rightarrow m_1$$
 pas, ..., $x_n \rightarrow m_n$ pas.

Тогда сумма всех значений, принятых случайной величиной *X* в *n* независимых опытах есть

 $x_1m_1 + ... + x_km_k$.

Найдем среднее значение величины Х:

$$\overline{x} = \frac{x_1 m_1 + \dots + x_k m_k}{n} = x_1 w_1 + \dots + x_k w_k , \qquad (1.1.13)$$

 $w_i = \frac{m_i}{n}$ – относительные частоты появления значений x_i .

Допустим, что число испытаний *n* велико, тогда относительные частоты будут по вероятности сходиться к вероятности появления соответствующих значений: $w_i \rightarrow p_i$. Следовательно,

$$\overline{x} \xrightarrow[\text{по вероятности}]{} P_1 x_1 + P_1 x_1 + \dots + P_k x_k .$$
(1.1.14)

Последовательность случайных величин X_n сходится по вероятности к A, если для любого $\varepsilon > 0$ вероятность неравенства $|X_n - A| \ge \varepsilon$ с увеличением *n* неограниченно приближается к нулю:

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - A| \ge \varepsilon) = 0.$$

Таким образом, математическое ожидание дискретной случайной величины есть

$$M[X] = m_X = \sum_{i=1}^{N} x_i P[X = x_i], \qquad (1.1.15)$$

где x_i – ее возможные значения.

Математическое ожидание непрерывной случайной величины определяется как

$$M[X] = m_X = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx. \qquad (1.1.16)$$

Математическое ожидание является неслучайной величиной.

Отметим одно важное обстоятельство. Выражение M[X] с одной стороны может обозначать число – математическое ожидание случайной величины, а с другой – операцию нахождения математического ожидания от случайной величины X. Здесь ситуация аналогичная производной функции. Действительно, с одной сторо-

ны, $\frac{df(x)}{dx}$ есть производная функции, т.е. некая функция, а с дру-

гой стороны, $\frac{df}{dx}$ понимается как операция нахождения производной от функции f(x).

Свойства математического ожидания

1. Математическое ожидание постоянной неслучайной величины равно самой этой величине:

$$M[c] = c$$
. (1.1.17)

2. Математическое ожидание от произведения постоянной величины *с* на случайную величину *X* равно произведению постоянной на математическое ожидание случайной величины:

$$M[cX] = cM[X]. \tag{1.1.18}$$

Модой дискретной случайной величины *X* называется ее наиболее вероятное значение – µ.

Модой непрерывной случайной величины X называется то её значение, при котором плотность вероятности максимальна – обозначается также – µ. Для непрерывной случайной величины нельзя говорить о наиболее вероятном значении, так как вероятность любого конкретного значения одинакова и равна нулю.

Медианой случайной величины X называется такое её значение, для которого выполняется равенство $P(X > \mu_e) = P(X < \mu_e)$, где μ_e – медиана, т.е. есть прямая $x = \mu_e$ делит площадь под кривой функции f(x) на две равные части.



 $\mu_e m \mu$

Рис. 1.4. Геометрическая иллюстрация числовых характеристик

Если многоугольник (плотность) распределения имеют один максимум, то такое распределение называется унимодальным, более одного – полимодальным. Если имеет один минимум, то антимодальным. Геометрический смысл числовых характеристик показан на рис. 1.4 для непрерывной случайной величины.

Моменты случайной величины

Начальным моментом k-го порядка дискретной случайной величины называется сумма

$$\alpha_k [X] = \sum_{i=1}^n x_i^k p_i . \qquad (1.1.19)$$

Начальным моментом k-го порядка непрерывной случайной величины называется интеграл

$$\alpha_k \left[X \right] = \int_{-\infty}^{+\infty} x_i^k f(x) dx \,. \tag{1.1.20}$$

Здесь возможные значения случайной величины возводятся в степень *k*.

Таким образом, введенная ранее величина — математическое ожидание — есть не что иное, как первый (k = 1) начальный момент случайной величины X.

Обобщая формулы (1.1.19) и (1.1.20), можно записать:

$$\alpha_k \left[X \right] = M \left[X^k \right]. \tag{1.1.21}$$

Центрированной случайной величиной называется случайная величина, представляющая собой отклонение от математического ожидания $\dot{X} = X - m_x = X - M[X]$.

Центрирование случайной величины означает перенос начала отсчета в точку с координатой, равной математическому ожиданию. Действительно, очевидны следующие соотношения как для дискретной, так и для непрерывной случайной величины:

$$M[\dot{X}] = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_x) p_i = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i - \sum_{i=1}^{n} m_x p_i = m_x - m_x \sum_{i=1}^{n} p_i = m_x - m_x = 0;$$

$$M[\dot{X}] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x) f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx - m_x \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = m_x - m_x = 0$$

Моменты центрированной случайной величины носят название центральных моментов. Центральный момент *k*-го порядка по определению есть:

$$\mu_k = M \Big[(X - m)^k \Big] = M \Big[(\dot{X})^k \Big].$$
(1.1.22)

Для дискретной случайной величины в явном виде

$$\mu_k = \sum_{i=1}^n (x_i - m)^k p_i . \qquad (1.1.23)$$

Для непрерывной случайной величины в явном виде

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^k f(x) dx . \qquad (1.1.24)$$

Наиболее важной характеристикой, наряду с математическим ожиданием, является второй центральный момент μ_2 , называемый дисперсией. Введем для этой величины специальное обозначение D_x или, понимая под символом D операцию нахождения дисперсии, D[X]. В явном виде эта величина имеет следующие выражения:

для дискретной случайной величины

$$D[X] = D_x = \mu_2 = \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2 p_i ; \qquad (1.1.25)$$

для непрерывной случайной величины

$$D[X] = D_x = \mu_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^2 f(x) dx. \qquad (1.1.26)$$

Дисперсия есть мера рассеянности, разбросанности случайной величины около ее математического ожидания.

Между центральными и начальными моментами существует однозначная связь. Например, для момента второго порядка – дисперсии – получим:

$$D_{x} = M[(X - m_{x})] = M[X^{2} - 2Xm_{x} + m_{x}^{2}] =$$
$$= M[X^{2}] - 2m_{x}m_{x} + m_{x}^{2} = \alpha_{2} - m_{x}^{2}. \qquad (1.1.27)$$

Дисперсия имеет размерность квадрата соответствующей случайной величины. Для наглядной характеристики рассеивания удобнее пользоваться величиной, размерность которой совпадает с размерностью случайной величины. Для этого из дисперсии извлекают квадратный корень. Полученная величина называет *средним квадратическим отклонением* случайной величины: $\sigma_x = \sqrt{D_x}$. На рис. 1.5 показан пример вида функции плотности распределения двух случайных величин, имеющих одно и то же математическое ожидание, но разные дисперсии и имеющих одну и ту же дисперсию, но различные математические ожидания.



Рис. 1.5. Графическая иллюстрация моментов случайной величины

Законы распределения случайной величины

Закон равномерной плотности

Если известно, что значение случайной величины находится в пределах некоторого интервала, а плотность вероятности распределения в пределах этого интервала постоянна, то говорят, что случайная величина подчинена закону равномерной плотности.

Закон равномерной плотности или равномерный закон распределения непрерывной случайной величины имеет функцию плотности распределения вида

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le \alpha; \\ c, & \alpha < x \le \beta; \\ 0, & x > \beta. \end{cases}$$
(1.1.28)

Из условия $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = 1$ следует, что $c = \frac{1}{\beta - \alpha}$. На

рис. 1.6 показана функция плотности распределения f(x), а на рис. 1.7 – функция распределения F(x) для закона равномерной плотности.



Рис. 1.6. Функция плотности распределения в законе равномерной плотности



Рис. 1.7. Функция распределения в законе равномерной плотности

Используя связь между плотностью распределения и функцией распределения, получим

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x) dx = \int_{\alpha}^{x} f(x) dx.$$

Тогда

$$F(x) = \begin{cases} \int_{\alpha}^{x} f(x) dx = \frac{x - \alpha}{\beta - \alpha}, & \alpha < x \le \beta; \\ \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{\beta - \alpha} dx = 1, & x > \beta. \end{cases}$$
(1.1.29)

Числовые характеристики равномерно распределенной случайной величины

Математическое ожидание

$$m_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} x \frac{1}{\beta - \alpha} dx = \frac{\beta + \alpha}{2}.$$
 (1.1.30)

Дисперсия

$$D_{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_{x})^{2} f(x) dx =$$

=
$$\int_{\alpha}^{\beta} \left(x - \frac{\beta + \alpha}{2} \right)^{2} \frac{1}{\beta - \alpha} dx = \frac{(\beta - \alpha)^{2}}{12}.$$
 (1.1.31)

В силу симметрии медиана совпадает с математическим ожиданием, а так как функция плотности распределения не имеет максимума, то мода отсутствует.

Для получения вероятности попадания случайной величины в интервал (a, b) можно воспользоваться явным видом функции распределения (1.29):

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a) = \frac{b - a}{\beta - \alpha}.$$
 (1.1.32)

Из выражения (1.1.32) видно, что вероятность попадания в интервал (a, b) равна отношению длины интервала ко всей длине участка (α, β) и не зависит от его месторасположения на этом участке.

Закон Пуассона

Частным случаем биномиального распределения является закон Пуассона (рис. 18). Можно показать, что если в биномиальном законе число испытаний увеличивать ($n \rightarrow \infty$), а вероятность события при этом уменьшать ($p \rightarrow 0$), но так, чтобы np = a, то биномиальный закон превращается в закон Пуассона:

$$P(m) = \frac{a^m l^{-a}}{m!} \,. \tag{1.1.33}$$



Рис. 1.8. Закон Пуассона

Параметр *а* в законе Пуассона есть математическое ожидание числа появлений редких (т.е. вероятность каждого отдельного события мала), но массовых (т.е. опытов может быть много) случайных событий. Оказывается, что дисперсия случайной величины тоже равна *a*:

$$D = \sum_{m=0}^{\infty} (m-\lambda)^2 P(m) = \sum_{m=0}^{\infty} (m-a)^2 \frac{a^m l^{-a}}{m!} = a. \quad (1.1.34)$$

Показательный закон распределения

Показательным называется закон распределения случайной величины, в данном случае обозначим ее *T*, имеющий плотность вероятности вида:

$$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, \ t \ge 0; \\ 0, \ t < 0. \end{cases}$$
(1.1.35)

Показательным распределением описывается довольно большой круг задач, начиная от задач надежности до задач ядерной физики.

$$M[T] = m_t = \int_{-\infty}^{+\infty} t \cdot f(t) dt = \int_{0}^{+\infty} t \cdot \lambda \cdot l^{-\lambda \cdot t} dt = \frac{1}{\lambda}.$$
 (1.1.36)

Легко показать, что дисперсия случайной величины Т есть

$$D[T] = \int_{0}^{\infty} (t - m_t)^2 f(t) dt = \frac{1}{\lambda^2}.$$
 (1.1.37)

Геометрическая интерпретация показательного закона распределения приведена на рис. 1.9.

Нормальный (гауссов) закон распределения случайных величин играет особую роль. Во-первых, это наиболее часто встречающийся на практике закон распределения. Это обстоятельство объясняется тем, что большинство случайных величин представляют собой сумму большого числа независимых случайных величин, влияние каждой из которых мало. Предельные теоремы теории вероятностей, о которых мы будем говорить ниже, доказывают, что вне зависимости от того, по какому закону распределено каждое из слагаемых, закон распределения суммы будет близок к нормальному. Это приводит, например, к тому, что ошибки измерения подчиняются нормальному закону



Рис. 1.9. Плотность распределения в показательном законе

Нормальный закон распределения

Нормальный закон распределения характеризуется функцией плотности распределения вида:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}.$$
 (1.1.38)

Можно показать, что m_x есть ни что иное, как математическое ожидание, а σ_x – среднее квадратическое отклонение случайной величины X.

Поведение плотности распределения в зависимости от параметров m_x и σ_x показано на рис. 1.10.

Изменение математического ожидания приводит к сдвигу максимума функции, а изменение дисперсии к ее «уширению» либо «сужению», соответственно, при росте или уменьшении о.



Рис. 1.10. Плотность распределения в нормальном законе

Функция распределения случайной величины *X*, распределенной по нормальному закону, есть

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x) dx = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} l^{-\frac{(x-m_x)}{2\sigma_x^2}} dx.$$
(1.1.39)

Найдем вероятность попадания случайной величины *X* на участок от α до β. Согласно формуле:

$$P(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha);$$

$$F(\alpha) - F(\beta) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\beta} l^{-\frac{(x-m_x)}{2\sigma_x^2}} dx - \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\alpha} l^{-\frac{(x-m_x)}{2\sigma_x^2}} dx = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} l^{-\frac{(x-m_x)}{2\sigma_x^2}} dx. \quad (1.1.40)$$

После замены переменных в выражении (1.1.40) $t = \frac{x - m_x}{\sigma_x \sqrt{2}}$ лег-

ко показать, что

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\frac{\alpha - m_x}{\sigma_x \sqrt{2}}}^{\frac{\beta - m_x}{\sigma_x \sqrt{2}}} l^{-t^2} dt = \frac{1}{2} \left\{ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\frac{\beta - m_x}{\sigma_x \sqrt{2}}} l^{-t^2} dt - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\frac{\alpha - m_x}{\sigma_x \sqrt{2}}} l^{-t^2} dt \right\}.$$
 (1.1.41)

Выражение (1.1.41) можно переписать короче, если ввести в рассмотрение так называемую функцию Лапласа

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{x} t^{-t^{2}} dt \,. \tag{1.1.42}$$

Вид функции Лапласа показан на рис. 1.11.



Рис. 1.11. Функция Лапласа

Из рисунка видно, что

$$\Phi(0) = 0; \ \Phi(-x) = -\Phi(x); \ \Phi(+\infty) = 1; \ \Phi(-\infty) = -1.$$

Вероятность попадания случайной величины в интервал (α, β) есть:

$$P(\alpha < X < \beta) = \frac{1}{2} \left\{ \Phi\left(\frac{\beta - m_x}{\sigma_x \sqrt{2}}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - m_x}{\sigma_x \sqrt{2}}\right) \right\}.$$
 (1.1.43)

На рис. 1.10 показан геометрический смысл этого выражения как площади под колоколообразной кривой, ограниченной прямыми $x = \alpha$ и $x = \beta$.

Вероятное отклонение. Правило 3 о

Часто требуется найти такой интервал *E* около математического ожидания, вероятность попадания в который равна заданной величине, например ε . Для нахождения этой вероятности воспользуемся соотношением (1.1.43), в котором положим $\alpha = m_x - E$; $\beta = m_x + E$. Тогда после несложных преобразований получим:

$$\varepsilon = \Phi\left(\frac{E}{\sigma_x \sqrt{2}}\right). \tag{1.1.44}$$

Для заданного є по таблицам значений функции Лапласа находим аргумент $\frac{E}{\sigma_x \sqrt{2}}$, при котором $\Phi\left(\frac{E}{\sigma_x \sqrt{2}}\right) = \varepsilon$. Допустим $\frac{E}{\sigma_x \sqrt{2}} = \gamma$, тогда $E = \gamma \sigma_x \sqrt{2}$. Например, пусть $\varepsilon = 0,5$, тогда по таблицам Лапласа находим $\gamma = 0,477$ и, следовательно, $E = 0,675\sigma_x$. Таким образом, с вероятностью 50 % значения случайной величины X, подчиненной нормальному закону, попадают в интервал $(m_x - 0,675\sigma_x, m_x + 0,675\sigma_x)$. Величина $E = 0,675\sigma_x$ при этом называется вероятным отклонением.

Поставим теперь задачу по-другому. Пусть требуется определить вероятность попадания в заданный интервал *E*, симметричный около математического ожидания. Будем измерять *E* в единицах среднего квадратического отклонения. Тогда получим:

$$E = \sigma_{x}; \ P(m_{x} - \sigma_{x} < X < m_{x} + \sigma_{x}) = \Phi\left(\frac{\sigma_{x}}{\sigma_{x}\sqrt{2}}\right) = \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0,677;$$

$$E = 2\sigma_{x}; \ P(m_{x} - 2\sigma_{x} < X < m_{x} + 2\sigma_{x}) = \Phi\left(\frac{2\sigma_{x}}{\sigma_{x}\sqrt{2}}\right) = \Phi\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right) = 0,953;$$

$$E = 3\sigma_{x}; \ P(m_{x} - 3\sigma_{x} < X < m_{x} + 3\sigma_{x}) = \Phi\left(\frac{3\sigma_{x}}{\sigma_{x}\sqrt{2}}\right) = \Phi\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right) = 0,997.(1.1.45)$$

Из выражения (1.1.45) видно, что с вероятностью, почти равной единице, значение случайной величины попадет в интервал $(m_x - 3\sigma_x, m_x + 3\sigma_x)$. Иначе говоря, при нормальном законе распределения почти все значения случайной величины не уклоняются от математического ожидания больше, чем на $3\sigma_x$. Отсюда следуют такие практические выводы.

1. Если известно, что случайная величина распределена по нормальному закону и дано некоторое множество ее значений, то σ_x приблизительно можно определить, разделив разницу между максимально удаленным значением и средним на 3, т.е. $\sigma_x \approx \frac{x_{\text{max}} - \overline{x}}{3}$.

2. По множеству значений случайной величины приближенно

находят
$$\sigma_x \approx \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{N} (x_i - \overline{x})^2}{N-1}}$$
, где $\overline{x} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} x_i}{N}$

Если самая удаленная точка отличается от среднего значения не более, чем на $3\sigma_x$, то закон распределения можно принять за нормальный (конечно, в дальнейшем следует провести дополнительные исследования).

Система случайных величин

На практике часто встречается необходимость описывать объекты, которые характеризуются не одной, а несколькими случайными величинами, образующими комплекс или систему. При этом связь между величинами носит стохастический характер. При этом свойства системы случайных величин не исчерпываются свойствами отдельных величин, её составляющих, помимо этого они включают также взаимные связи между случайными величинами.

Система двух (X, Y) или более $(X_1, ..., X_n)$ случайных величин может быть изображена случайной точкой, соответственно, в двухмерном или *n*-мерном пространстве.

Функция распределения системы двух случайных величин

Функцией распределения двух случайных величин называется вероятность совместного выполнения двух неравенств – X < x и Y < y:

$$F(x, y) = P((X < x)(Y < y)).$$
(1.1.46)

Свойства функции распределения следуют из ее геометрической интерпретации (рис. 1.12).



Рис. 1.12. Геометрическая интерпретация функции распределения системы двух случайных величин

Свойства функции F(x, y).

1. Функция распределения системы случайных величин – неубывающая функция. Это означает, что если $x_2 > x_1$, то $F(x_2, y) \ge F(x_1, y)$, если $y_2 > y_1$, то $F(x, y_2) \ge F(x, y_1)$.

2.
$$F(x, -\infty) = F(-\infty, y) = F(-\infty, -\infty) = 0$$

3.
$$F(x, +\infty) = F_1(x); F(+\infty, y) = F_2(y)$$
.

4. $F(+\infty, +\infty) = 1$.

Условимся событие, состоящее в том, что случайная точка попадет в область R, обозначать $(X, Y) \subset R$. Найдём вероятность попадания точки в область в виде прямоугольника со сторонами, параллельными координатным осям (рис. 1.13):

 $P((X,Y) \subset R) = F(\beta,\delta) - F(\alpha,\delta) - F(\beta,\gamma) + F(\alpha,\gamma). \quad (1.1.47)$

В выражение (1.1.47) последний член входит со знаком «плюс», потому что при вычитании $F(\alpha, \delta)$ и $F(\beta, \gamma)$ мы два раза вычитаем площадь $F(\alpha, \gamma)$.

Пусть теперь область *R* представляет собой элементарный прямоугольник с площадью $\Delta S = \Delta x \cdot \Delta y$ (см. рис. 1.13).



Рис. 1.13. Иллюстрация к выводу функции плотности распределения системы двух случайных величин

Вероятность попадания случайной точки в эту элементарную площадку есть

$$P((X,Y) \subset R) = F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x + \Delta x, y) - F(x, y + \Delta y) + F(x, y). \quad (1.1.48)$$

Для непрерывных случайных величин существует предел

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{P((X,Y) \subset R)}{\Delta x \Delta y} = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = f(x,y).$$
(1.1.49)

Функция f(x, y) называется плотностью распределения системы двух случайных величин. По своему смыслу f(x, y)dxdy есть

вероятность попадания случайной величины в элементарную площадку dS = dxdy. Понятно, что вероятность попадания случайной точки в произвольную область *R* есть

$$P((X,Y) \subset R) = \iint_{R} f(x,y) dx dy .$$
 (1.1.50)

Между функцией распределения и плотностью распределения существует простая связь:

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(x,y) dx dy.$$
 (1.1.51)

В справедливости этого выражения легко убедиться, если взять смешанную производную по переменному верхнему пределу. Тогда получим выражение (1.1.49).

Свойства функции плотности распределения f(x, y) вытекают из свойств функции распределения F(x, y):

1. Так как F(x, y) – неубывающая функция, а f(x, y) – ее производная, то $f(x, y) \ge 0$.

2. Так как $F(+\infty, +\infty) = 1$, то из выражения (1.1.51) следует $+\infty +\infty$ $\int \int f(x,y) dx dy = 1.$

Законы распределения случайных величин, входящих в систему. Условные законы распределения

Понятно, что должна существовать связь и между такими функциями как плотность распределения системы f(x, y) и плотностями распределения отдельных переменных $f_1(x)$ и $f_2(y)$.

Теорема. Пусть f(x, y) – плотность распределения системы случайных величин (X,Y), тогда плотность распределения отдельных величин есть $f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy$ и $f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx$
Данная теорема показывает, что, зная закон распределения системы величин, можно определить закон распределения каждой из них, но обратное утверждение, вообще говоря, неверно. Недостаточно знать закон распределения каждой величины, необходимо знать зависимость между величинами, входящими в систему. Эта зависимость может быть охарактеризована с помощью условных законов распределения.

Условным законом распределения случайной величины X, входящей в систему (X, Y) называется закон её распределения, вычисленный при условии, что случайная величина Y приняла определённое значение.

Теорема. Закон распределения системы случайных величин (X,Y) можно представить в виде

$$f(x, y) = f_1(x) \cdot f(y / x)$$
 или $f(x, y) = f_2(y) \cdot f(x / y)$. (1.1.52)

Определение. Случайные величины X и Y называются независимыми, если закон распределения каждой их них не зависит от того, какое значение приняла другая величина. Условие независимости записывается следующим образом:

 $f(x / y) = f_1(x)$ – случайная величина X не зависит от случайной величины Y;

 $f(y / x) = f_2(y)$ – случайная величина *Y* не зависит от случайной величины *X*.

Зависимость или независимость случайных величин всегда вза-имны.

Для независимых случайных величин плотность распределения системы равна произведению плотностей распределений отдельных величин:

$$f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y). \tag{1.1.53}$$

Числовые характеристики системы двух случайных величин

Важнейшими числовыми характеристиками системы двух случайных величин являются следующие: $m_x = M[X]$, $m_y = M[Y]$, $D_x = M[(\dot{X})^2]$, $D_y = M[(\dot{Y})^2]$. Смысл этих величин понятен и ни-

чем не отличается от смысла числовых величин, рассмотренных ранее для одной переменной. Но эти числовые характеристики никак не отражают того факта, что случайные величины X и Y образуют систему случайных величин (X,Y). Характеристикой именно системы случайных величин является ковариационный момент K_{xy} , который по определению есть

$$K_{xy} = M[(X - m_x)(Y - m_y)].$$
(1.1.54)

Ввиду особой важности этой характеристики приведем ее явный вид для дискретных и непрерывных величин:

Для дискретных случайных величин

$$K_{xy} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (x_i - m_x)(y_j - m_j) p_{ij} . \qquad (1.1.55)$$

Для непрерывных случайных величин

$$K_{xy} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)(y - m_y) f(x, y) dx dy.$$
 (1.1.56)



Рис. 1.14. Распределение точек на плоскости при различных значениях ковариационного момента: а) $K_{xy} > 0$; б) $K_{xy} > 0$

На рис. 1.14 показано распределение случайных точек на плоскости при различных значениях ковариационного момента. Из рисунка видно, что чем больше ковариационный момент между случайными величинами (X, Y), тем теснее располагаются точки друг к другу. Однако ковариационный момент характеризует не только степень «тесноты» зависимости между X и Y, но и их рассеяние. Действительно, если X мало отличается от m_x , то K_{xy} будет близок к нулю, хотя случайные величины X и Y могут быть и сильно связаны. Поэтому для характеристики именно степени связи между X и Y вводится безразмерная величина

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} \,. \tag{1.1.57}$$

Величина r_{xy} называется коэффициентом корреляции. Если $r_{xy} = 0$, то случайные величины называются некоррелированными. Отметим сразу, что некоррелированность в общем случае не означает независимости случайных величин. В тоже время из независимости некоррелированность следует. Действительно, если X и Y независимы, то $f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$, тогда

$$K_{xy} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)(y - m_y) f(x, y) dx dy =$$

=
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)(y - m_y) f_1(x) \cdot f_2(y) dx dy =$$

=
$$\int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x) f_1(x) dx \int_{-\infty}^{+\infty} (y - m_y) f_2(y) dy = 0.$$

Коэффициент корреляции характеризует степень тесноты линейной зависимости. Можно показать, что если между случайными величинами есть функциональная зависимость $Y = a \cdot X + b$, то $r_{xy} = +1$, если a > 0 и $r_{xy} = -1$, если a < 0. В общем случае, когда Xи Y связаны вероятностной зависимостью, то $-1 < r_{xy} < 1$.

Числовые характеристики системы n случайных величин

Система случайных величин (*X*₁, ..., *X*_n) может быть охарактеризована следующим минимальным числом характеристик:

1) *п* математических ожиданий $m_1, ..., m_n$;

2) *п* дисперсий;

3) $n \cdot (n-1)$ корреляционных моментов $K_{ij} = M[\dot{X}_i \dot{X}_j]$, где $i \neq j$.

Ковариционные моменты образуют симметричную положительно определенную матрицу

$$\hat{K} = \begin{pmatrix} K_{11} \dots K_{1n} \\ \dots \\ K_{n1} \dots K_{nn} \end{pmatrix}$$

Для некоррелированных случайных величин матрица \hat{K} диагональна. Два случайных вектора \vec{X} и \vec{Y} называются некоррелированными, если каждая из составляющих вектора \vec{X} некоррелирована с каждой из составляющих вектора \vec{Y} , т.е. $K_{ij} = 0$ для всех i = 1, ..., n и j = 1, ..., n.

Нормальный закон распределения системы двух случайных величин (нормальный закон на плоскости)

Из законов распределения случайных величин рассмотрим наиболее распространенный – нормальный. Для наглядности ограничимся случаем системы из двух случайных величин, поскольку она может представляться случайной точкой на плоскости. Функция плотности распределения системы в этом случае выражается формулой:

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x \sigma_y \sqrt{1-r^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}Q(x,y)\right\}, \quad (1.1.58)$$

где

$$Q(x,y) = \frac{1}{1-r^2} \left[\frac{(1-m_x)^2}{\sigma_x^2} - \frac{2r(x-m_x)(y-m_y)}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(1-m_y)^2}{\sigma_y^2} \right].$$
(1.1.59)

Функция распределения случайной величины Хесть

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} l \frac{(x - m_x)^2}{2\sigma_x^2}.$$
 (1.1.60)

Функция распределения случайной величины У есть

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \frac{1}{\sigma_y \sqrt{2\pi}} l^{-\frac{(y-m_y)^2}{2\sigma_y^2}}.$$
 (1.1.61)

Можно показать, что

$$K_{xy} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)(y - m_y) f(x, y) dx dy = r\sigma_x \sigma_y. \quad (1.1.62)$$

Нетрудно видеть, что при некоррелированных случайных величинах, т.е. при r = 0, выражение для плотности распределения системы имеет вид:

$$f(x,y) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} l^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}} \cdot \frac{1}{\sigma_y \sqrt{2\pi}} l^{-\frac{(y-m_y)^2}{2\sigma_y^2}} = f_1(x) \cdot f_2(y) . \quad (1.1.63)$$

Из формулы (1.1.63) видно, что при нормальном законе pacпределения случайных величин из некоррелированности следует их независимость.

Если случайные величины коррелированны ($r \neq 0$), то можно найти условные законы распределения:

$$f(y/x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)} = \frac{1}{\sigma_y \sqrt{2\pi}\sqrt{1-r^2}} l^{-\frac{1}{2(1-r^2)} \left(\frac{y-m_y}{\sigma_y} - r\frac{(x-m_x)}{\sigma_x}\right)^2}; \quad (1.1.64)$$

$$f(x \mid y) = \frac{f(x, y)}{f_2(y)} = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}\sqrt{1 - r^2}} l^{-\frac{1}{2(1 - r^2)} \left(\frac{(x - m_x)}{\sigma_x} - r\frac{y - m_y}{\sigma_y}\right)^2}.$$
 (1.1.65)

Формулу (1.1.64) можно привести к виду

$$f(y/x) = \frac{1}{\sigma_y \sqrt{2\pi}\sqrt{1-r^2}} l^{-\frac{1}{2(1-r^2)\sigma_y} \left[y - m_y - r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - m_x)\right]^2}.$$
 (1.1.66)

Легко видеть, что f(y/x) есть плотность распределения случайной величины, имеющей нормальный закон распределения, если положить

$$m_{y/x} = m_y + r \frac{\sigma_y}{\sigma_y} (x - m_x),$$
 (1.1.67)

$$\sigma_{y/x} = \sigma_y \sqrt{1 - r^2} . \qquad (1.1.68)$$

Из этих формул видно, что от *х* зависит только математическое ожидание, но не дисперсия. При этом $m_{y/x}$ есть условное математическое ожидание. В геометрическом плане выражение (1.1.67) представляет собой линию, которая называется линией регрессии случайной величины *Y* на *X*.

Числовые характеристики функций случайных величин

На практике часто возникает необходимость определять статистические характеристики функции от случайных величин. В математическом плане задача ставится следующим образом. Случайная величина Y есть неслучайная функция нескольких случайных величин Y = $\varphi(X_1, ..., X_n)$. Известны математические ожидания и дисперсии аргументов: $m_{x_1}, ..., m_{x_n}$ и $D_{x_1}, ..., D_{x_n}$. Требуется определить математическое ожидание и дисперсию функции

$$M[\varphi(X_1, ..., X_n)] = m_{\varphi} \quad \text{M} \quad D[\varphi(X_1, ..., X_n)] = D_{\varphi}. \quad (1.1.69)$$

Обобщая вышеприведенные формулы на функцию многих случайных аргументов, например, для непрерывных случайных величин получим:

$$M[\varphi(X_1,...,X_n)] = m_{\varphi} =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x_1, \dots, x_n) f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n ; \quad (1.1.70)$$
$$D[\varphi(X_1, \dots, X_n)] = D_{\varphi} =$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} [\varphi(x_1, \dots, x_n) - m_{\varphi}]^2 f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n . \quad (1.1.71)$$

Примечательным в приведенных выше выражениях является то, что *для определения числовых характеристик функций случайных аргументов достаточно знать только закон распределения аргументов*. Более того, если функция линейно зависит от своих аргументов, то знать закон их распределения тоже не обязательно. Для определения числовых характеристик в этом случае достаточно знать только числовые характеристики самих аргументов. Нетрудно показать справедливость следующих соотношений.

1. Математическое ожидание постоянной величины есть сама эта величина

$$M[c] = c \,. \tag{1.1.72}$$

2. Дисперсия неслучайной величины равна нулю

$$D[c] = 0. (1.1.73)$$

3. Неслучайная величина может быть вынесена за знак математического ожидания

$$M[cX] = cM[X]. (1.1.74)$$

4. Вынесение не случайной величины за знак дисперсии и среднего квадратического отклонения

$$D[cX] = c^2 D[X]; \ \ \sigma[cX] = |c| \cdot \sigma[X].$$
 (1.1.75)

5. Математическое ожидание суммы двух случайных величин равно сумме математических ожиданий:

$$M[X+Y] = M[X] + M[Y].$$
(1.1.76)

6. Математическое ожидание линейной функции от случайных аргументов равно линейной функции от математических ожиданий аргументов:

$$M[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b] = \sum_{i=1}^{n} a_i m_{x_i} + b.$$
 (1.1.77)

7. Дисперсия суммы случайных величин

$$D[X+Y] = D[X] + D[Y] + 2 \cdot K_{xy}. \qquad (1.1.78)$$

8. Дисперсия линейной функции

$$D\left[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b\right] = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 D[X_i] + 2 \cdot \sum_{i < j} a_i a_j K_{ij} . \quad (1.1.79)$$

для некоррелированных случайных величин

$$D\left[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b\right] = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 D[X_i].$$

Приведенные правила еще раз подчеркивают важное свойство математического ожидания как линейного оператора. Перечислим еще ряд полезных соотношений для нелинейной функции – произведения случайных величин:

математическое ожидание произведения случайных величин

$$M[X \cdot Y] = M[X] \cdot M[Y] + K_{xy}.$$
(1.1.80)

дисперсия произведения независимых случайных величин

$$D[XY] = D[X]D[Y] + m_x^2 D[Y] + m_y^2 D[X].$$
(1.1.81)

Метод линеаризации функции случайных аргументов

Рассмотренный ранее аппарат числовых характеристик позволяет определять числовые характеристики функций случайных аргументов, зная лишь числовые характеристики самих аргументов. В этом заключается его удобство. Однако применим этот аппарат, главным образом, к линейным функциям. Если исходная функция нелинейна, то выйти из положения можно следующим образом.

Допустим, что значения случайной величины X ограничены пределами α и β , а случайная величина Y связана со случайной величиной X функциональной зависимостью

$$Y = \varphi(X)$$
. (1.1.82)

Разложим функцию *Y* в ряд около точки *m_x* и ограничимся членами первого порядка малости:

$$Y \approx \varphi(m_x) + \frac{d\varphi}{dx}\Big|_{x = m_x} (X - m_x).$$
(1.1.83)

Чем меньше интервал (α , β), тем точнее выполняется соотношение (1.1.83). Так как теперь функция *Y* является линейной относительно аргумента *X*, то для нахождения ее математического ожидания и дисперсии можно применить аппарат числовых характеристик.

$$M[Y] = M[\varphi(m_x) + \frac{d\varphi}{dx}\Big|_{x = m_x} (X - m_x)] =$$
$$M[\varphi(m_x)] + \frac{d\varphi}{dx}\Big| \qquad M[(X - m_x)] = \varphi(m_x); \quad (1.1.8)$$

$$= M[\phi(m_x)] + \frac{d\phi}{dx}\Big|_{x = m_x} M[(X - m_x)] = \phi(m_x); \quad (1.1.84)$$

$$D[Y] = D[\phi(m_x)] + \left(\frac{d\phi}{dx}\Big|_{x=m_x}\right)^2 D[(X-m_x)] =$$
$$= \left(\frac{d\phi}{dx}\Big|_{x=m_x}\right)^2 D[X].$$

Этот подход легко обобщается, когда У является функцией многих переменных:

$$Y = \varphi(X_1, ..., X_n) . \tag{1.1.86}$$

(1.1.85)

Тогда функцию $Y = \phi(X_1, ..., X_n)$ также раскладывают в ряд и ограничиваются линейным членом:

$$Y \approx \varphi(m_{x_1}, ..., m_{x_n}) + \sum_{i=1}^{n} \varphi'_{x_i}(m_{x_1}, ..., m_{x_n})(X_i - m_{x_i}) . (1.1.87)$$

Применяя аппарат числовых характеристик, получим:

$$M[Y] = \varphi(m_{x_1}, ..., m_{x_n}); \qquad (1.1.88)$$

$$D[Y] = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{d\varphi}{dx_{i}}\right)^{2} D[X] + 2\sum_{i < j} \left(\frac{d\varphi}{dx_{i}}\right) \left(\frac{d\varphi}{dx_{j}}\right) K_{ij}, \quad (1.1.89)$$
где $\hat{K} = \begin{pmatrix} K_{11} \dots K_{1n} \\ \dots \\ K_{n1} \dots K_{nn} \end{pmatrix}$ – ковариционная матрица аргументов.

Если при разложении функции в ряд оставить еще одно слагаемое:

$$Y \approx \varphi(m_x) + \frac{d\varphi}{dx}\Big|_{x=m_x} (X - m_x) + \frac{1}{2} \frac{d^2\varphi}{dx^2}\Big|_{x=m_x} (X - m_x)^2, \quad (1.1.90)$$

то результаты линеаризации можно уточнить. Действительно, применяя к выражению (1.1.90) операцию нахождения математического ожидания, получим:

$$M[Y] = \varphi(m_x) + \frac{1}{2} \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \bigg|_{x = m_x} D[X].$$
 (1.1.91)

Поправка к дисперсии просто выглядит, когда случайная величина, распределенная по нормальному закону:

$$D[Y] = \left(\frac{d\varphi}{dx}\Big|_{x=m_x}\right)^2 D[X] + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}\Big|_{x=m_x}\right)^2 D^2[X].$$

Возможно, конечно, обобщение данных результатов на многомерный случай, однако формулы в этом случае выглядят очень громоздкими.

Закон распределения функций случайных аргументов

Рассмотренные выше способы получения статистических характеристик функции от случайных аргументов имеют недостатки. Вопервых, они справедливы лишь для линейных функций. Если же функция нелинейная и используется метод линеаризации, то трудно оценить ошибку определения числовых характеристик. Знание закона распределения функции решает все эти проблемы. Действительно, если задана функция $Y = \varphi(X)$ и известна плотность распределения случайной величины *Y*, которую мы обозначим g(y), то числовые характеристики функции $Y = \varphi(X)$ могут быть найдены из следующих соотношений:

$$M[Y] = m_y = \int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot g(y) dy; \qquad (1.1.92)$$

$$D[Y] = D_y = \int_{-\infty}^{+\infty} (y - m_y)^2 g(y) dy. \qquad (1.1.93)$$

Можно показать, что если плотность распределения аргумента есть функция f(x), то плотность распределения g(y) есть

$$g(y) = f(\psi(y)) \cdot \left| \frac{d\psi(y)}{dy} \right|, \qquad (1.1.95)$$

где $\psi(y)$ – функция обратная функции $y = \varphi(x)$.

Идею получения закона распределения для функции нескольких аргументов покажем на примере функции двух случайных величин.

Закон распределения функции двух случайных величин

Пусть имеется система двух случайных величин (X, Y) с плотностью распределения f(x, y) и случайная величина Z, связанная с (X, Y) функциональной зависимостью $Z = \varphi(X, Y)$. Требуется определить закон распределения случайной величины Z. На рис. 1.15 показана функция $Z = \varphi(X, Y)$. Плоскость Q, параллельная плоскости XOY, осуществляет сечение этой функции на высоте z. Область D есть проекция этого сечения на плоскость XOY.

Как следует из рисунка, если случайная точка (X, Y) попадает в область D, то $\varphi(X, Y) < z$. Таким образом, вероятность того, что значение случайной функции будет менее величины z, есть веро-

ятность попадания случайной точки в область D, т.е. функция распределения случайной величины $Z = \varphi(X, Y)$ есть

$$G(z) = P(Z < z) = P(\varphi(X, Y) < z) = P((X, Y) \subset D)$$

$$G(z) = P((X, Y) \subset D) = \int_{D(z)} \int f(x, y) \, dx \, dy \, .$$



Рис. 1.15. Иллюстрация к закону распределения двух случайных величин

Величина z в это выражение входит через предел интегрирования. Дифференцируя G(z) по z, получим плотность распределения случайной величины Z.

Закон распределения суммы двух случайных величин. Композиция законов распределения

Пусть имеется система двух случайных величин (X, Y) с плотностью распределения f(x, y). Требуется найти закон распределения случайной величины Z = X + Y. Поверхность z = x + y – плоскость, проходящая через начало координат (рис. 1.16). В заштрихованной области лежат те значения аргументов, при которых X + Y < z.



Из рис. 1.16 следует:

$$G(z) = \iint_{D} f(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{z-x} f(x, y) dy \right\} dx .$$
 (1.1.96)

Плотность распределения случайной величины Z есть

$$g(z) = \frac{dG}{dz} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z - x) dx .$$
 (1.1.97)

Исходя из соображений симметрии, можно получить:

$$g(z) = \frac{dG}{dz} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z - y, y) dy.$$
 (1.1.98)

Таким образом, если известен закон распределения системы f(x, y), то закон распределения суммы легко получить.

Если требуется найти закон распределения независимых случайных величин, то говорят о композиции законов распределения.

Рассмотрим случай композиции двух законов распределения. Пусть имеются две случайные величины X и Y, соответственно подчиненные $f_1(x)$ и $f_2(y)$. Требуется найти плотность распределения суммы этих двух независимых случайных величин. В силу независимости X и Y плотность распределения системы имеет вид $f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$, тогда

$$g(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z - x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) \cdot f_2(z - x) dx . \quad (1.1.99)$$

Операцию нахождения композиции двух законов распределения сокращенно записывают так:

$$g(z) = f_1(x) \cdot f_2(y) \,.$$

Композиция нормальных законов

Можно показать, что если имеется *n* случайных величин $X_1, ..., X_n$, подчиненных нормальному закону, то случайная величина $Z = \sum_{i=1}^n X_i$ также подчиняется нормальному закону с параметрами $m_z = \sum_{i=1}^n m_{x_i}$ и $D_z = \sum_{i=1}^n D_{x_i}$. Отметим тот факт, что даже если нормально распределенные случайные величины коррелированны, то их сумма все равно распределена по нормальному закону. Только выражение для дисперсии будет иметь вид $D_z = \sum_{i=1}^n D_{x_i} + 2\sum_{i < j} K_{x_i y_j}$. Таким образом, при композиции нормальных законов получается нормальный закон.

Нетрудно понять, что закон распределения линейной функции от нормально распределенных аргументов $Z = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b$ также будет нормальным с числовыми характеристиками

$$m_z = \sum_{i=1}^n a_i m_{x_i} + b \quad \text{M} \quad D_z = \sum_{i=1}^n a_i^2 D_{x_i} + 2\sum_{i < j} a_i a_j K_{x_i y_j} \quad (1.1.100)$$

Предельные теоремы теории вероятностей доказывают, что при композиции большого числа любых законов закон распределения композиции близок к нормальному закону.

Предельные теоремы теории вероятностей

Предельные теоремы теории вероятностей можно условно разделить на две группы. Первая группа предельных теорем объединяется под названием «закон больших чисел», а вторая под названием «центральная предельная теорема».

Предельные теоремы описывают свойство устойчивости массовых случайных явлений. Суть устойчивости в том, что конкретные особенности каждого отдельного случайного явления почти не сказываются на среднем результате массы таких явлений. В узком смысле под законом больших чисел понимается ряд теорем, в каждой из которых для тех или иных условий установлен факт приближения средних характеристик большого числа опытов к некоторым определенным постоянным. Например, теорема Бернулли утверждает, что при большом числе опытов, если вероятность события не изменяется от опыта к опыту, частота события сходится по вероятности к вероятности появления этого события. Тогда теорема Бернулли утверждает, что lim $P(|X_n - A| < \varepsilon) = 1$.

Центральные предельные теоремы касаются уже не средних величин массовых случайных явлений, а предельных законов распределения. Приведем смысл наиболее важных из них.

Неравенство Чебышева. Пусть имеется случайная величина X с числовыми характеристиками m_x и D_x . Тогда для любого $\varepsilon > 0$ вероятность того, что случайная величина X отклонится от своего математического ожидания больше, чем на ε , ограничена сверху

величиной
$$\frac{D_x}{\varepsilon^2}$$
, т.е. $P(|X - m_x| \ge \varepsilon) \le \frac{D_x}{\varepsilon^2}$

Теорема Чебышева. При достаточно большом числе независимых опытов среднее арифметическое значение случайной величины X сходится по вероятности к ее математическому ожиданию m_x .

Если x₁,..., x_n – значения случайной величины X в n опытах, то

 $Y_n = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}, \ M[X] = m_x, \ D[X] = D_x.$ Тогда теорема Чебышева говорит о том, что при любом сколь угодно малом $\varepsilon > 0$ и при числе

опытов $n \to \infty$ вероятность того, что $|Y_n - m_x| < \varepsilon$ стремится к 1.

Обобщенная теорема Чебышева. Если $X_1, ..., X_n$ – независимые случайные величины с $m_{x_1}, ..., m_{x_n}$ и $D_{x_1}, ..., D_{x_n}$ и, возможно, разными законами распределения и если все $D_{x_i} < \alpha$, $i = \overline{1, n}$, то при $n \to \infty$ среднее арифметическое наблюдаемых значений величин $X_1, ..., X_n$ сходится по вероятности к среднему арифметическому их математических ожиданий, т.е.

$$\forall \underset{\delta>0}{\varepsilon > 0} \quad \exists N : \forall n > N \implies P\left(\left|\frac{\sum x_i}{n} - \frac{\sum m_{x_i}}{n}\right| < \varepsilon\right) > 1 - \delta$$

Если случайные величины $X_1, ..., X_n$ зависимы, то по теореме Маркова можно найти условие, при котором среднее арифметическое наблюдаемых значений сходится по вероятности к среднему арифметическому их математических ожиданий.

Теорема Маркова. Если имеются зависимые случайные величины $X_1, ..., X_n$ и при $n \to \infty$ $\frac{D[\sum x_i]}{n^2} \to 0$, то среднее арифметическое наблюдаемых значений случайных величин $X_1, ..., X_n$ сходится по вероятности к среднему арифметическому их математических ожиданий.

Теорема Ляпунова (Центральная предельная теорема). Закон распределения суммы независимых случайных приближается к нормальному закону, если все величины имеют конечные m_x и D_x , и ни одна из величин по своему значению резко не отличается от остальных.

Элементы теории информации

В качестве меры априорной неопределенности системы в теории информации применяется характеристика, называемая энтропией. Если, например, система может находиться в состояниях $x_1, ..., x_n$ с вероятностями, соответственно, $p_1, ..., p_n$, то энтропией системы называют величину:

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i.$$
(1.1.101)

Понятно, что самой простой системой с точки зрения неопределенности является система, которая может находиться лишь в двух состояниях. При равновероятности состояний значение энтропии будет равно 1, если логарифм взять по основанию 2. Эта величина принимается обычно за единицу измерения информации и обозначается «бит». Если система может находиться в n равновозможных состояниях, то

$$H(X) = -n\frac{1}{n}\log n = \log n \,.$$

Если известно, что система находится в состоянии j, то понятно, что $p_j = 1$, а $p_i = 0$ при $i \neq j$. В этом случае из формулы (1) получим, что H(X) = 0. То есть если состояние системы известно, то энтропия системы равна нулю. Таким образом, энтропия обращается в нуль, когда одно из состояний системы достоверно, а остальные невозможны. Энтропия растет с ростом числа возможных состояний и максимальна, если все состояния равновероятны.

Пусть рассматривается сложная система, являющаяся объединением, например, двух систем – системы X, которая может находиться в состояниях $x_1, ..., x_n$ и имеет энтропию H(X) и системы Y, которая может находиться в состояниях $y_1, ..., y_m$ и имеет энтропию H(Y). Число возможных состояний объединенной системы равно $n \cdot m$ и вероятность находиться системе в состоянии (x_i, y_j) есть p_{ij} . Тогда энтропия сложной системы будет равна:

$$H(X,Y) = -\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p_{ij} \log p_{ij} . \qquad (1.1.102)$$

Если системы независимы, т.е. $p_{ij} = p_i p_j$, то из выражения (1.1.102) следует, что

$$H(X,Y) = H(X) + H(Y).$$

Для произвольного числа независимых систем имеем:

$$H(X_1, ..., X_s) = \sum_{k=1}^{s} H(X_k)$$

Если системы зависимы, то вводится понятие условной энтропии

$$H(Y / x_i) = -\sum_{i=1}^{n} p(y_i / x_i) \log p(y_i / x_i),$$

где $H(Y | x_i)$ – энтропия системы Y при условии, что система X находится в состоянии x_i . Средняя энтропия системы Y, определенная с учетом того, что система X может находиться в любом из своих состояний, есть

$$H(Y \mid X) = \sum_{i=1}^{n} p_i H(Y \mid x_i) = -\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p_{ij} \log p(y_i \mid x_i).$$

Можно показать, что если две системы объединяются в одну, то энтропия объединенной системы есть

$$H(X,Y) = H(X) + H(Y / X).$$

Для любого числа объединяемых систем:

$$H(X_1, ..., X_s) = H(X_1) + H(X_2 / X_1, X_2) + ... + H(X_s / X_1, ..., X_{s-1}).$$

Энтропия каждой следующей системы вычисляется при условии, что состояние всех предыдущих известно.

Если над системой X производится наблюдение и состояние системы становится известным, тогда энтропия системы становится равной нулю. Таким образом, информация, получаемая при полном выяснении состояния системы, есть:

$$I_X = H(X) = -\sum_{i=1}^n p_i \log p_i$$
. (1.1.103)

Если в формуле (1.1.103) выражение $-\log p_i$ рассматривать как частную информацию о системе, получаемую от отдельного сообщения о том, что система находится в состоянии x_i с вероятностью p_i и обозначить $I_{x_i} = -\log p_i$, то I_X имеет смысл средней (пол-

ной) информации о системе, получаемой от всех возможных сообщений с учетом их вероятностей. Наибольшую информацию несут сообщения о тех событиях, которые наименее вероятны.

Рассмотрим случай, когда состояние системы X непосредственно не наблюдается, а может наблюдаться состояние системы Y, связанной с ней. Предположим, что измеряется плотность потока нейтронов некоторым датчиком. Тогда результатом измерения является сигнал на выходе датчика, представляющий собой преобразованное истинное значение плотности потока нейтронов f(X) в сочетании с ошибкой измерения Z.

$$Y = f(X) + Z$$
.

Возникает вопрос: какое количество информации о системе *X* дает наблюдение над системой *Y*?

Это количество информации может быть оценено как уменьшение энтропии системы X в результате получения сведений о системе Y.

$$I_{Y \to X} = H(X) - H(X / Y)$$
.

Можно показать, что $I_{Y\to X} = I_{X\to Y} = I_{X\to Y}$. Величина $I_{X\leftrightarrow Y}$ называется полной взаимной информацией. Если системы X и Y независимы, то $I_{X\leftrightarrow Y} = 0$. Если состояние одной системы полностью определяет состояние другой и наоборот, то $I_{Y\leftrightarrow X} = I_X = I_Y = H(X) = H(Y)$. Пусть теперь состояние одной из систем полностью определяется состояние другой. Тогда первая система называется подчиненной. Если из двух систем X и Y подчиненной является система X, то условная энтропия системы X, если система Y находится в известном состоянии, есть H(X/Y) = 0. Следовательно, $I_{Y\to X} = H(X)$. Полная взаимная информация, содержащаяся в двух системах, равна сумме энтропий составляющих систем минус энтропия объединенной системы $I_{Y\leftrightarrow Y} = H(X) - H(X, Y)$.

Можно показать, что для непрерывных систем полная взаимная информация может быть вычислена по формуле:

$$I_{Y \leftrightarrow X} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \log \frac{f(x, y)}{f_1(x) \cdot f_2(y)} \, dx \, dy \,, \quad (1.1.104)$$

где f(x, y) – плотность распределения объединенной системы (X, Y); $f_1(x)$, $f_2(y)$ – плотности распределения систем X и Y, соответственно.

Полная взаимная информация есть неотрицательная величина и для независимых систем $I_{X \leftrightarrow Y} = 0$.

1.2. Статистические оценки параметров распределения

Оценка параметров распределения [3] является одной из целей математической статистики – науки создания методов сбора и обработки статистических данных для получения научных и практических выводов. Первая задача математической статистики – указать методы сбора статистических сведений. Вторая задача – разработать методы анализа статистического материала в зависимости от поставленных целей. Помимо указанной ранее, в качестве целей обычно рассматриваются следующие: оценка неизвестной вероятности события, оценка неизвестной функции распределения, оценка степени зависимости одной случайной величины от другой и многие другие.

Основные понятия математической статистики

Генеральная и выборочная совокупности

Генеральная совокупность – совокупность объектов, из которой производится выборка. Каждый объект характеризуется некоторым количеством признаков, значение которых может меняться от объекта к объекту.

Выборочная совокупность (выборка) – совокупность <u>случайно</u> отобранных объектов.

Объем совокупности – число объектов данной совокупности.

Повторная выборка – совокупность, при которой отобранный объект возвращается в генеральную совокупность перед выбором следующего объекта.

Бесповторная выборка – совокупность, при которой отобранный объект не возвращается в генеральную совокупность перед выбором следующего объекта. Если выборка правильно отражает пропорцию генеральной совокупности, то она называется *представительной или репрезентативной*. Выборка будет представительной, если ее осуществить случайно и если при этом все объекты имеют одинаковую вероятность попасть в эту выборку.

Две интерпретации выборки

1. Практический вариант. Под $x_1, ..., x_n$ понимаются <u>фактиче-</u> <u>ски наблюдаемые</u> в конкретном эксперименте значения исследуемой случайной величины X, т.е. $x_1, ..., x_n$ – конкретные числа.

2. Гипотетический вариант. Под $X_1, ..., X_n$ понимается лишь обозначение тех *n* значений, которые мы могли бы получить. В такой интерпретации $X_1, ..., X_n$ – случайный вектор. Причем закон распределения каждой его компоненты один и тот же и совпадает с законом распределения случайной величины X, т.е. $f(x_1) = f(x_2) = ... = f(x_n) = f(x)$.

Статистическое распределение выборки

Для вычисления теоретических значений характеристик генеральной совокупности необходимо знать закон распределения случайной величины в генеральной совокупности, однако на практике его заменяют эмпирическим законом (выборочным), вычисленным только на основе имеющихся в нашем распоряжении выборочных данных. В уменьшенной модели исследуемой генеральной совокупности наблюдаемые, т.е. практически реализованные, значения $x_1, ..., x_n$ интерпретируются как возможные, а вероятности появления этих возможных значений приписываются равными зарегистрированным относительным частотам их появления, т.е. если $x_1, ..., x_n$ различны, то эта вероятность равна $\frac{1}{n}$. Если среди них есть совпадения, т.е. x_i наблюдается n_i раз, то вероятность их появления приравнивается к относительной частоте $w_i = \frac{n_i}{n}$. Наблюдаемые значения x_i называются *вариантами*, а последовательность вариантов, записанная по возрастанию, – вариационным рядом.

Наиболее простой задачей математической статистики является определение числовых характеристик рассматриваемой совокупности, характеризующих среднее значение и разброс.

Генеральная и выборочная средние

Генеральная средняя – среднее арифметическое значение признака объекта в генеральной совокупности.

$$\overline{x}_{\Gamma} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}.$$
(1.2.1)

Пусть генеральная совокупность объема N содержит объекты с различными значениями признака X и из этой совокупности наудачу извлечен объект x_i . Вероятность извлечения объекта с признаком x_i равна $\frac{1}{N}$. С этой же вероятностью может быть извлечен и любой другой объект. Будем рассматривать величину признака X как случайную величину, возможные значения которой имеют, соответственно, величины $x_1, ..., x_N$ и одинаковые вероятности $\frac{1}{N}$. Тогда математическое ожидание этой величины X есть

$$M[X] = \sum_{i=1}^{N} x_i p_i = x_1 \frac{1}{N} + \dots + x_N \frac{1}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}.$$
 (1.2.2)

Из сравнения выражений (1.2.1) и (1.2.2) видно, что генеральная средняя совпадает с математическим ожиданием $M[X] = \overline{x}_{r}$. Это справедливо и в том случае, если в генеральной выборке есть объекты с совпадающими значениями признака.

Выборочная средняя. Выборочной средней называется величина

$$\overline{x}_{\rm B} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \,. \tag{1.2.3}$$

Заметим, что выборочные значения $x_1, ..., x_n$ признака X, полученные в итоге независимых наблюдений, можно рассматривать как реализацию случайных величин $X_1, ..., X_n$, имеющих то же распределение и те же числовые характеристики, что и сама случайная величина X. Выборочная средняя является случайной величиной, обладающей соответствующим законом распределения и его числовыми характеристиками. Действительно, поскольку выбор объектов случаен, то при следующем эксперименте можем получить другие значения $x_1, ..., x_n$, а следовательно, и другое среднее.

Генеральная и выборочная дисперсии

Под генеральной дисперсией понимается величина

$$D_{\Gamma} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \overline{x}_{\Gamma})^2 . \qquad (1.2.4)$$

Соответственно, среднее квадратическое отклонение $\sigma_{\Gamma} = \sqrt{D_{\Gamma}}$. Аналогично для выборочной дисперсии:

$$D_{\rm B} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x}_{\rm B})^2 . \qquad (1.2.5)$$

И среднее квадратическое отклонение есть $\sigma_{\rm B} = \sqrt{D_{\rm B}}$.

Приведем полезную формулу для определения дисперсии, связывающую квадрат средней величины $(\overline{x})^2$ и средний квадрат случайной величины $\overline{x^2}$.

Формула для вычисления дисперсии

$$D = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i^2 - 2x_i \overline{x} + \overline{x}^2)}{n} =$$
$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - 2\overline{x} \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} + (\overline{x})^2 = \overline{x^2} - (\overline{x})^2.$$
(1.2.6)

Статистические оценки параметров распределения

Пусть требуется определить числовые характеристики случайной величины из некоторой генеральной совокупности по данным конкретной выборки. При этом, конечно, полученное значение может отличаться от истинного. Иными словами, мы нашли некоторую <u>оценку</u> случайной величины. Отметим сразу, что <u>под термином</u> «оценка» понимается не только само полученное численное значение, но и формула, которая использовалась для ее получения. Например, среднее значение можно получить как по формуле

 $\overline{x}_{\rm B} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{2}$, так и из выражения $\frac{x_{\rm max} + x_{\rm min}}{2}$, где $x_{\rm max}$, $x_{\rm min}$ – максимальное и минимальное значение в выбранной совокупности соответственно. Возникает вопрос о наилучшем выборе формулы для получения оценки интересующего нас параметра по выборке. В общем плане задача ставится следующим образом. Пусть Х – случайная величина, имеющая плотность распределения $f(x, \vec{\theta})$, где $\vec{\theta}$ – вектор параметров, значения и статистические свойства которых неизвестны. Исследовать все элементы генеральной совокупности для определения $\vec{\theta}$ не представляется возможным, поэтому о векторе параметров $\vec{\theta}$ судят о выборке из генеральной совокупности. Функцию результатов наблюдений, с помощью которой судят о значении вектора параметров $\vec{\theta}$, называют статистической оценкой вектора параметров $\vec{\theta}$. Для простоты в дальнейшем будем говорить об оценке одного параметра θ . Рассмотрим некоторое множество выборок объемом *n* каждая. Выборочную оценку параметра θ по *i*-й выборке будем обозначать θ_i^* . Так как состав каждой выборки заранее неизвестен, то θ_i^* является случайной величиной. Таким образом, оценка параметра является случайной величиной.

Свойства оценок

Состоятельность. Оценка $\theta^*(X_1, ..., X_n)$ называется состоятельной, если по мере роста объема выборки *n* она сходится по вероятности к истинному значению параметра:

$$\theta^*(X_1, ..., X_n) \xrightarrow[n \to \infty]{n \to \infty} \theta$$
.

Требование состоятельности отражает здравый смысл. Действительно, увеличение объема выборки есть не что иное, как увеличение информации о генеральной совокупности, поэтому оценка по выборке должна приближаться к истинному значению параметра. Это свойство оценки необходимо проверить в первую очередь. С другой стороны, свойство состоятельности – это асимптотическое свойство, т.е. оно может проявляться лишь при больших объемах выборки. Вместе с тем, как правило, можно предложить несколько состоятельных оценок одной и той же величины, которые при конечном объеме выборки будут давать различные результаты. Следовательно, только требования состоятельности недостаточно. Свойство оценки при конечном объеме выборки характеризует <u>несмещенность.</u>

Оценка $\theta^*(X_1, ..., X_n)$ называется *несмещенной*, если при любом объеме выборки *n* результат ее усреднения по всем возможным выборкам данного объема приводит к истинному значению оцениваемого параметра, т.е. $M[\theta^*] = \theta$. В отличие от состоятельности, несмещенность оценки характеризует ее доасимптотические свойства, т.е. хорошие или плохие свойства при конечном объеме выборки. Удовлетворение требованию несмещенности устраняет систематическую погрешность оценивания, которая зависит от объема выборки. Оценка может быть состоятельной, но смещенной, т.е. хорошей при $n \to \infty$, но плохой при конечном *n*.

Эффективность. Оценка $\theta^*(X_1, ..., X_n)$ называется эффективной, если она при заданном объеме выборки имеет минимальную дисперсию. На рис. 1.17 показана такая ситуация.



Рис. 1.17. Иллюстрация эффективности оценки

Отметим, что на практике стремятся, чтобы выбранная оценка удовлетворяла всем вышеперечисленным свойствам: состоятельности, несмещенности и эффективности.

Свойства средней выборочной. Пусть из генеральной совокупности в результате независимых наблюдений извлечена повторная выборка $x_1, ..., x_n$. Пусть генеральная средняя неизвестна и требуется ее оценить по данной выборке. Докажем, что если в качестве оценки выбрать среднюю выборочную $x_{\rm B}$, то эта оценка является несмещенной оценкой генеральной совокупности $\overline{x}_{\rm r}$.

Рассмотрим выборку в гипотетическом варианте, т.е. $\overline{x}_{\rm B}$ как случайную величину $\overline{X}_{\rm B}$, а $x_1, ..., x_n$ как $X_1, ..., X_n$ – соответствующие независимые одинаково распределенные случайные величины. Так как эти величины имеют один и тот же закон распределения, совпадающий с законом распределения случайной величины X, то они имеют одинаковые числовые характеристики, в том числе математические ожидания.

$$M[X] = M[X_1] = \dots = M[X_n] = a;$$

$$M[X_B] = \frac{M[X_1 + X_2 + \dots + X_n]}{n} = \frac{1}{n}M[X + X + \dots + X] = \frac{1}{n}na.$$

Таким образом, математическое ожидание средней выборочной совпадает с математическим ожиданием генеральной совокупности, т.е. оценка является несмещенной. В соответствии с предельной теоремой Чебышева эта оценка является и состоятельной. Действительно, по теореме Чебышева, при $n \to \infty$ среднее арифметическое величин $x_1, ..., x_n$ стремится к математическому ожиданию M[X] = a, т.е. оценка является состоятельной. Можно показать, что если *X* подчиняется нормальному закону, то оценка является и эффективной.

Свойство выборочной дисперсии. Пусть из генеральной совокупности в результате n независимых наблюдений над количественным признаком X извлечена повторная выборка объемом n. По данной выборке необходимо оценить неизвестную генеральную дисперсию. Казалось бы, что в качестве оценки следует взять выражение

$$D_{\rm B} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x}_{\rm B})^2$$
, где $\overline{x}_{\rm B} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$,

однако эта оценка является смещенной. Действительно, переходя к гипотетическому толкованию выборки, получим:

$$M[D_{\rm B}] = M\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X}_{\rm B})^2\right].$$

Учтем, что $M[X_i] = M[X_B] = m_x$, тогда $\dot{X}_i = X - m_x$, $\dot{X}_B = \overline{X}_B - m_x$, $(X_i - \overline{X}_B)^2 = (\dot{X}_i - \dot{X}_B)^2$, $D_B = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X}_B)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\dot{X}_i - \dot{X}_B)^2 =$ $= \frac{1}{n} \left\{ \sum_{i=1}^n \dot{X}_i^2 - 2\dot{X}_B \sum_{i=1}^n \dot{X}_i + n\dot{X}_B^2 \right\} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \dot{X}_i^2 - 2\dot{X}_B \frac{\sum_{i=1}^n \dot{X}_i}{n} + \dot{X}_B$, $M[D_B] = \frac{1}{n} M \left[\sum_{i=1}^n \dot{X}_i^2 \right] - M[\dot{X}_B^2] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n D[X_i] - D[X_B] =$ $= \frac{1}{n} n D_\Gamma - \frac{D_\Gamma}{n} = \frac{n-1}{n} D_\Gamma$.

Таким образом, несмещенная оценка для генеральной средней будет

$$D_{\Gamma} = \frac{n}{n-1} D_{\rm B} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x}_{\rm B})^2 = s^2 . \qquad (1.2.7)$$

Величина s^2 носит название исправленной выборочной. Легко видеть, что исправленная выборочная дисперсия является состоятельной оценкой генеральной дисперсии.

Асимптотические свойства оценки. Всякая оценка $\theta^*(X_1, ..., X_n)$ как функция от «гипотетических» результатов наблюдения является случайной величиной и, следовательно, ее свойства определяются функцией распределения. Причем, закон распределения оценки θ^* зависит от объема выборки *n*. Получение закона распределения оценки для данного объема выборки *n* является очень сложной задачей, поэтому обычно пользуются асимптотическим законом распределения оценок, т.е. при $n \to \infty$. В этом случае говорят об асимптотической несмещенности и асимптотической эффективности оценки.

Из асимптотической несмещенности оценки не следует ее несмещенность в обычном смысле и наоборот. На практике асимптотическая дисперсия оценки обычно оказывается меньше, чем дисперсия в обычном смысле.

Если есть θ_1^* и θ_2^* – две различные, асимптотически несмещенные, оценки параметров θ , то оценка θ_1^* называется более эффективной, чем θ_2^* , если $D_1 < D_2$.

Метод максимального правдоподобия. Определение неизвестных параметров нормального закона распределения

Пусть из генеральной совокупности извлечена выборка объемом *n*. Известно, что закон распределения наблюдаемой случайной величины X описывается плотностью распределения $f(x, \theta)$, где θ – параметр распределения. Если рассматривать выборку в гипотетическом смысле, то $X_1, ..., X_n$ – независимые одинаково распределенные случайные величины. Тогда для любого реализованного значения выборки $x_1, ..., x_n$ плотность распределения есть $L(x_1, ..., x_n; \theta) = f(x_1, \theta) \cdot f(x_2, \theta) \cdot ... \cdot f(x_n, \theta)$. Таким образом, $L(x_1, ..., x_n; \theta)$ задает вероятность получения при извлечении выборки объема *n* именно наблюдений $x_1, ..., x_n$. Поэтому, чем больше *L*, тем правдоподобнее выборка $x_1, ..., x_n$. Потребуем подобрать неизвестный параметр распределения θ так, чтобы <u>реализованная</u> выборка <u>была наиболее правдоподобной</u>, т.е. чтобы функция правдободобия *L*, достигала максимального значения: найдем

$$\max_{\theta} L(x_1, ..., x_2; \theta).$$
(1.2.8)

Если $L(x_1, ..., x_n; \theta)$ – дифференцируемая функция, то условие максимума есть

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial \theta^2} < 0.$$
 (1.2.9)

Пример 1.1. Пусть случайная величина X распределена в генеральной совокупности по нормальному закону. Оценить по данным выборки $x_1, ..., x_n$ математическое ожидание и дисперсию, т.е. не-известные параметры нормального закона.

$$f(x,\vec{\theta}) = f(x,\theta_1,\theta_2) = f(x,m_x,\sigma_x^2) = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} l^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}$$

Построим функцию правдоподобия:

$$L(x_1, ..., x_n; \vec{\theta}) = f(x_1, \vec{\theta}) \cdot f(x_2, \vec{\theta}) \cdot ... \cdot f(x_n, \vec{\theta}); \quad (1.2.10)$$

$$L(x_1, ..., x_n; m_x; \sigma_x^2) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} l^{-\frac{(x_1 - m_x)^2}{2\sigma_x^2}} \times ... \times \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} l^{-\frac{(x_n - m_x)^2}{2\sigma_x^2}} =$$

$$= \frac{1}{(\sigma_x \sqrt{2\pi})^n} l^{-\sum_{i=1}^n \frac{(x_i - m_x)^2}{2\sigma_x^2}}.$$

Учитывая, что соотношения $\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$ и $\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = 0$ равносильны, а корни последнего уравнения найти проще, получим:

$$\ln L = \ln \left(\frac{1}{\left(\sigma_x \sqrt{2\pi}\right)^n}\right) - \frac{1}{2\sigma_x^2} \sum_{i=1}^n \frac{\left(x_i - m_x\right)^2}{2\sigma_x^2}.$$

Оценки для математического ожидания и дисперсии находятся из соотношений:

$$\begin{cases} \frac{\partial \ln L}{\partial m_x} = 0; \\ \frac{\partial \ln L}{\partial \sigma_x^2} = 0. \end{cases}$$
(1.2.11)

Раскрывая выражения (1.2.11) в явном виде, получим:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial m_x} = \frac{1}{\sigma_x^2} \sum_{i=1}^n (x_i - m_x) = 0$$

Из этого выражения следует формула для оценки математического ожидания:

$$m_x = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \, .$$

Легко показать, что $\frac{\partial^2 \ln L}{\partial m_x^2} = -\frac{n}{\sigma_x^2} < 0$, т.е. находится действи-

тельно максимум функции. Для оценки дисперсии получим $\sigma_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - m_x)^2$.

Таким образом, для математического ожидания мы получили эффективную, состоятельную, несмещенную оценку, а для дисперсии – смещенную оценку.

Пример 1.2. Пусть известно, что случайная величина *X* подчинена закону Пуассона, $P(X = x) = \frac{\lambda^x l^{-\lambda}}{x!}$. Пусть на практике получен следующий результат: в первой серии, состоящей из *n* наблюдений событие *A*, произошло x_1 раз, во второй серии – x_2 раз и

т.д., в *n*-й серии – x_n раз. Требуется по выборке $x_1, ..., x_n$ оценить параметр закона распределения, т.е. λ :

$$L(x_1, \dots, x_2; \theta) = P(x_1) \cdot P(x_2) \times \dots \times P(x_n) = \frac{\lambda^{x_1} l^{-\lambda}}{x_1!} \cdot \frac{\lambda^{x_2} l^{-\lambda}}{x_2!} \cdot \dots \cdot \frac{\lambda^{x_n} l^{-\lambda}}{x_n!}$$

Возьмем натуральный логарифм от функции правдоподобия:

$$\ln L = \ln \frac{\lambda_{i=1}^{n} l^{-\lambda_{n}}}{x_{i}! \dots x_{n}!} = \ln \lambda_{i=1}^{n} l^{-\lambda_{n}} - \ln x_{i}! \dots x_{n}! = \sum_{i=1}^{n} x_{i} \ln \lambda - \lambda_{n} - \sum_{i=1}^{n} \ln(x_{i}!).$$

Из условия нахождения экстремума $\frac{\partial \ln L}{\partial \lambda} = 0$, получим

$$\lambda = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \,. \tag{1.2.12}$$

Выражение (1.2.12) показывает смысл постоянной в законе Пуассона (λ – математическое ожидание).

Метод моментов. Примеры оценки по методу моментов

Суть данного метода заключается в приравнивании определенного количества выборочных моментов к соответствующим теоретическим. Количество приравниваемых моментов равно числу неизвестных параметров закона распределения. В качестве моментов могут рассматриваться как начальные, так и центральные моменты.

Математическая формулировка такова:

$$\int x^{(l)} f(x, \vec{\Theta}) dx = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^{(l)} . \qquad (1.2.13)$$

Пример 1.3. По выборке $x_1, ..., x_n$ требуется найти оценку неизвестного параметра λ показательного распределения $f(x) = \lambda l^{-\lambda x}$ $(x \ge 0)$. Так как требуется найти только один параметр, то необходимо одно уравнение для моментов (l = 1):

$$\int_{0}^{\infty} x\lambda l^{-\lambda x} dx = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_{i}$$
.
Можно показать, что $\int_{0}^{\infty} x\lambda l^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}$, таким образом
$$\frac{1}{\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_{i}}{n} = \overline{x}_{B}.$$
 (1.2.14)

Пример 1.4. По выборке $x_1, ..., x_n$ найти методом моментов для нормального закона распределения m_x и σ_x^2 .

1. Так как по определению математическое ожидание является первым моментом, получим:

$$m_{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x, m_{x}, \sigma_{x}^{2}) dx = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_{i} = \overline{x}_{B}.$$
 (1.2.15)

2. По определению дисперсии

$$D_x = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^2 f(x, m_x, \sigma_x^2) dx = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - x_B)^2 = D_B. \quad (1.2.16)$$

Из вышеприведенных примеров видно, что оценки по методу моментов получить достаточно просто и выражаются они через эмпирические моменты, что упрощает исследование статистических свойств оценок. Однако, эффективность оценок, полученных по методу моментов иногда ниже, чем полученных, исходя из принципа максимального правдоподобия. Зачастую оценки по методу моментов используют для определения начальных, приближенных оценок, которые в дальнейшем уточняются другими методами.

Интервальное оценивание

Рассмотренные ранее методы оценивания неизвестного параметра θ позволили нам получить оценку, выраженную одним числом – как говорят, «точечную» оценку. При этом, вычисляя оценку θ^* на основании имеющейся выборки $x_1, ..., x_n$, понимаем, что такая оценка является лишь приближением к истинной величине параметра θ . Так как оценка θ^* случайна, возникает вопрос, насколько она отличается от истинного значения θ . Можно ли указать такую величину Δ , которая с практической достоверностью гарантировала бы выполнение неравенства $|\theta - \theta^*| < \Delta$. Иначе говоря, нель-

зя ли указать такой интервал вокруг θ^* , который с заданной вероятностью накрывал бы истинное значение θ (рис. 1.18)?





При этом вероятность, заранее выбираемая исследователем, с которой интервал ($\theta^* - \Delta, \theta^* + \Delta$) накрывает истинное значение θ называется *доверительной вероятностью* и обозначается β , а сам интервал ($\theta^* - \Delta, \theta^* + \Delta$) – *доверительным* интервалом.

Математически требование того, чтобы истинное значение оцениваемого параметра находилось с вероятностью β внутри доверительного интервала, выражается так:

$$P(\left|\theta^* - \theta\right| < \Delta) = \beta. \qquad (1.2.17)$$

Интервал ($\theta^* - \Delta, \theta^* + \Delta$) случаен по своей природе как по своему расположению на числовой оси, так и по своей длине, поскольку θ^* и Δ находятся на основании выборочных случайных значений $x_1, ..., x_n$. Ширина доверительного интервала зависит от объема выборки: при увеличении объема выборки ($n \to \infty$) величина доверительного интервала уменьшается ($\Delta \to 0$). Величина интервала зависит также и от доверительной вероятности β : при $\beta \to 1$ $\Delta \to \infty$. Интервальным оцениванием пользуются при небольших объемах выборки. Если оценивается не один параметр, то говорят о доверительной области. Решение задачи о нахождении доверительного интервала по заданной доверительной вероятности не представляла бы трудностей, если был известен закон распределения оценки, например, в форме плотности распределения $f(\theta^*)$. Действительно, в этом случае из решения уравнения

$$\int_{\theta^*-\Delta}^{\theta^*+\Delta} f(\theta^*) d\theta^* = \beta$$

можно было бы найти Δ или, наоборот, при заданном Δ найти вероятность β попадания истинного значения параметра в интервал ($\theta^* - \Delta, \theta^* + \Delta$). К сожалению, функция плотности распределения оценки, как правило, не известна. Из положения выходят следующим образом. Формируют некоторую функцию от оценки θ^* , т.е. производный параметр, распределение которого хорошо известно. Находят для него доверительный интервал, а затем делают обратное преобразование и находят доверительный интервал для искомой оценки. При этом часто используются, например, законы распределения Стьюдента и Пирсона.

Распределение Стьюдента. Если случайная величина X распределена в генеральной совокупности по нормальному закону с параметрами m_x и σ_x^2 , то в гипотетическом варианте каждая из случайных величин $X_1, ..., X_n$, подчиняется нормальному закону с теми же параметрами, следовательно, и их линейная функция

 $\bar{X}_{\rm B} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$ также распределена по нормальному закону с матема-

тическим ожиданием m_x и дисперсией $\frac{D_x}{n}$. Действительно, используя теоремы о числовых характеристиках, получим:

$$M[\bar{X}_{\rm B}] = M \left[\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \right] = \frac{\sum_{i=1}^{n} M[X_i]}{n} = \frac{n \cdot m_x}{n} = m_x; \quad (1.2.18)$$

$$D[\bar{X}_{\rm B}] = \frac{1}{n^2} D\left[\sum_{i=1}^n M[X_i]\right] = \frac{1}{n^2} n D[X] = \frac{D_x}{n}.$$
 (1.2.19)

Сформируем случайную величину, равную отношению $\frac{\overline{X}_{\rm B} - m_x}{(\sigma_x / \sqrt{n})}$. Если σ_x – известная величина, то сформированная ве-

личина также подчиняется нормальному закону распределения с параметрами

$$M\left[\frac{\overline{X}_{B} - m_{x}}{(\sigma_{x} / \sqrt{n})}\right] = \frac{1}{(\sigma_{x} / \sqrt{n})}M[\overline{X}_{B} - m_{x}] = 0,$$
$$D\left[\frac{\overline{X}_{B} - m_{x}}{(\sigma_{x} / \sqrt{n})}\right] = \frac{1}{(\sigma_{x}^{2} / n)}D[\overline{X}_{B}] = \frac{n}{\sigma_{x}^{2}n}D_{x} = 1.$$

Однако дисперсия генеральной совокупности σ_x^2 почти никогда не известна. Поэтому практический интерес представляет собой распределение статистики:

$$t = \frac{\overline{X}_{\rm B} - m_x}{S} \sqrt{n} , \qquad (1.2.20)$$

где $S^2 = \frac{n}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \frac{(\bar{X}_i - \bar{X}_B)^2}{n}$ – исправленная выборочная дисперсия

в гипотетическом варианте.

Можно показать, что функция плотности распределения статистики *t* зависит только от объема выборки *n* и при $n \to \infty$ стремится к функции плотности распределения нормального закона (рис. 1.19).



Распределение Пирсона. Рассмотрим *n* одинаково распределенных величин $X_1, ..., X_n$ с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией

$$(M[X_1] = ... = M[X_n] = 0; D[X_1] = ... = D[X_n] = 1)$$

и функцию от них:

$$\chi^2 = X_1^2 + \dots + X_n^2. \tag{1.2.21}$$

Плотность распределения случайной величины χ^2 носит название «распределение Пирсона» или « χ^2 распределение». На рис. 1.20 показано распределение Пирсона для различного объема выборки *n*. Можно показать, что при $n \to \infty$ распределение асимптотически нормальное с центром в точке $\chi^2 = n$ и дисперсией 2*n*.



Рис. 1.20. Распределение Пирсона

При $n \to \infty$ распределение асимптотически нормальное с центром в точке $\chi^2 = n$ и дисперсией 2n.

Легко показать, что исправленная выборочная дисперсия $S^{2} = \frac{n}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \frac{(\bar{X}_{i} - \bar{X}_{B})^{2}}{n}$ связана с величиной χ^{2} соотношением $\chi^{2} = \frac{S^{2}(n-1)}{\sigma_{*}^{2}}.$ (1.2.22)
Доверительный интервал для математического ожидания и дисперсии

Существует два подхода к построению доверительных интервалов при нахождении оценок параметров. Первый из них приводит к построению «точных» доверительных интервалов и основан на переходе от закона распределения оценки θ^* , которая зависит от самого неизвестного параметра θ , к какой-нибудь другой функции от наблюдаемых величин $X_1, ..., X_n$, которая уже не зависит от неизвестных параметров. Второй способ – приближенный. Продемонстрируем применение этих подходов на следующих примерах.

Пусть получена выборка $x_1, ..., x_n$ из нормальной генеральной совокупности с неизвестными параметрами m_x и D_x . По этим

данным получены оценки параметров $\overline{x}_{\rm B} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n}$ и

 $s^{2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_{i} - \overline{x}_{B})^{2}}{n-1}$. Требуется построить доверительный интервал для оценок этих параметров.

Доверительный интервал для математического ожидания. В соответствии с постановкой задачи необходимо найти такое Δ , чтобы выполнялось соотношение $P(|\overline{x}_{\rm B} - m_x| < \Delta) = \beta$, т.е. найти такой доверительный интервал около среднего выборочного, который с заданной вероятностью β «накрывал» бы истинное значение математического ожидания. Умножим неравенство $|\overline{x}_{\rm B} - m_x| < \Delta$ на по-

ложительную величину
$$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{s^2}}$$
, тогда получим $\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{s^2}} |\overline{x}_{\rm B} - m_x| < \frac{\Delta}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}}$.

Обозначив
$$t = \frac{\sqrt{n}(\overline{x}_{B} - m_{x})}{s}$$
, получим $|t| < \frac{\Delta}{\sqrt{\frac{s^{2}}{n}}}$.

Таким образом, исходная постановка задачи трансформировалась в следующую: найти такое Δ , чтобы с заданной вероятностью β выполнялось неравенство $|t| < t_{\beta}$, где $t_{\beta} = \frac{\Delta}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}}$, т.е. выполнялось

равенство $P(|t| < t_{\beta}) = \beta$.

В этом соотношении t – статистика, подчиненная закону Стьюдента, т.е. случайная величина с известной плотностью распределения f(t). С учетом четности функции плотности распределения f(t), условие $P(|t| < t_{\beta}) = \beta$ равносильно следующему:

$$\beta = 2\int_{0}^{t_{\beta}} f(t)dt$$

По таблице Стьюдента (см. пример 1.5) зависимости t_{β} от числа степеней свободы k = n - 1 и заданной вероятности β находим t_{β} , а затем Δ :

$$\Delta = t_{\beta} \sqrt{\frac{s^2}{n}} \,.$$

Пример 1.5. Пусть произведено пять независимых опытов со случайной величиной X, распределенной нормально с неизвестными параметрами m_x и σ_x . Результаты опытов приведены в таблице:

x_1	<i>x</i> ₂	<i>x</i> ₃	x_4	x_5
-2,5	3,4	-2,0	1,0	2,1

Найти оценку математического ожидания и построить вокруг него 90 % доверительный интервал, т.е. доверительный интервал, соответствующий вероятности β = 0,9:

$$m^* = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = 0,4; \quad s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - m^*)^2 = 6,445.$$

Число степеней свободы k = n - 1 = 4. По таблице Стьюдента

t_{β}	β					
1	0,1	0,2	0,3		0,9	
2						
3						
4					2,13	
5						

для данного числа степеней свободы и доверительной вероятности определяем $t_{\beta} = 2,13$ и величину $\Delta = t_{\beta} \sqrt{\frac{s^2}{n}} = 2,42$, следовательно, истинное значение математического ожидания с вероятностью 90 % находится в интервале (-2,02; 2,82) (рис. 1.21).

Рис. 1.21. Интервальное оценивание математического ожидания



Доверительный интервал для дисперсии. Несмещенной оценкой дисперсии является величина $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x}_B)^2$. Известно,

что величина $\frac{1}{\sigma_x^2}(n-1)s^2 = \chi^2$ подчинена закону χ^2 .



Рис. 1.22. Расположение доверительного интервала

На рис. 1.22 показана функция плотности распределения с указанием расположения интервала I_{β} . Интервал I_{β} можно выбрать так, чтобы вероятность уклонения случайной величины χ^2 влево и вправо за интервал была одинаковой и равна величине $\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\beta}{2}$, где β – доверительная вероятность. Действительно, так как функция плотности распределения $f(\chi^2)$ при заданном числе степеней свободы k = n - 1 известна, то вероятность того, что случайная величина χ^2 выйдет за правую границу интервала χ_1^2 есть площадь под кривой

$$\int_{\chi_1^2}^{+\infty} f(\chi^2) d\chi^2 = \frac{\alpha}{2}.$$
 (1.2.23)

Вероятность того, что случайная величина χ^2 будет правее точки χ_1^2 , есть площадь под кривой правее точки χ_1^2 . Эту площадь можно определить следующим образом. Из всей площади под кривой (которая равна единице) вычесть площадь под кривой между точками 0 и χ_2^2 , которая равна $\frac{\alpha}{2}$, т.е. $1 - \frac{\alpha}{2}$. Таким образом, левая граница интервала I_{β} находится из решения уравнения

$$\int_{\chi_2^2}^{+\infty} f(\chi^2) d\chi^2 = 1 - \frac{\alpha}{2}.$$
 (1.2.24)

Решение уравнений (1.2.23) и (1.2.24) возможно либо численно, либо уже затабулировано в соответствующих таблицах.

Теперь считая χ_1^2 и χ_2^2 известными, найдем по I_{β} искомый интервал для оценки дисперсии, который накрывает точку σ_x^2 (истинное значение) с вероятностью β . Из условия $P(\chi_2^2 < \chi^2 < \chi_1^2) = \beta$ следует, что $\frac{1}{\sigma_x^2}(n-1)s^2 < \chi_1^2$ и $\frac{1}{\sigma_x^2}(n-1)s^2 > \chi_2^2$. Это означает, что

$$\frac{1}{\chi_1^2}(n-1)s^2 < \sigma_x^2 < \frac{1}{\chi_2^2}(n-1)s^2$$

Таким образом, получен доверительный интервал для оценки дисперсии, внутри которого лежит истинное значение дисперсии с заданной доверительной вероятностью, т.е.

$$P\left(\frac{1}{\chi_1^2}(n-1)s^2 < D_x < \frac{1}{\chi_2^2}(n-1)s^2\right) = \beta.$$
 (1.2.25)

Приближенное определение доверительных интервалов. В основе подхода к приближенному определению доверительных интервалов лежит возможность применения предельных теорем теории вероятности при достаточно больших объемах выборки. Например, как установлено практикой, при объеме выборки n > 20 закон распределения суммы случайных величин можно считать нормальным. Рассмотрим несколько примеров приближенного определения доверительных интервалов.

Пример построения доверительного интервала для математического ожидания и дисперсии

Пусть имеется выборка $x_1, ..., x_n$, причем математическое ожидание и дисперсия неизвестны. Для них получены оценки:

$$m^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$
, $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - m^*)^2$.

Построим доверительный интервал I_{β} для математического ожидания при заданной вероятности β . Воспользуемся тем, что m^* – сумма независимых случайных величин с одним и тем же законом распределения. Тогда, согласно предельной теореме, закон распределения суммы можно считать нормальным при $n \to \infty$. Предположим, что и при данном, конкретном, конечном *n* сумма $\sum_{i=1}^{n} x_i$ будет подчинена нормальному закону распределения. Следо-

вательно, оценка $m^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$ также будет подчинена нормальному

закону с математическим ожиданием m_x и дисперсией $\tilde{D}_x = \frac{D_x}{n}$. Предположим, что D_x известна и найдем такую величину Δ , для которой будет выполняться неравенство $P(|m^* - m| < \Delta) = \beta$. Так как закон распределения оценки m^* – нормальный, то эту вероятность можно выразить через функцию Лапласа, т.е.

$$P(\left|m^*-m\right|<\Delta) = \Phi\left(\frac{\Delta}{\tilde{\sigma}_x\sqrt{2}}\right), \quad \text{где} \quad \tilde{\sigma}_x = \sqrt{\tilde{D}_x}.$$

Тогда $\Delta = \Phi^{-1}(\beta)\sqrt{2}\tilde{\sigma}_x$, причем $\tilde{\sigma}_x = \sqrt{\frac{\tilde{D}_x}{n}}$ определяется тоже по данным выборки.

Таким образом, доверительный интервал для математического ожидания есть $I_{\beta} = (m^* - \Delta, m^* + \Delta)$, где величина $\Phi^{-1}(\beta)\sqrt{2}$ затабулирована в таблицах или находится численно.

Пример построения приближенного доверительного интервала для дисперсии

Оценка дисперсии $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - m^*)^2$ представляет собой сумму величин вида: $\frac{(x_i - m^*)^2}{n-1}$. Эти величины не являются независимыми, так как в любую из них входит оценка математического

ожидания m^* . Однако при достаточно большом *n* закон распределения суммы приближается к нормальному. Предположим, что это так, и найдем характеристики этого закона. Так как оценка дисперсии является несмещенной, то выполняется соотношение $M[S^2] = D_r$.

Можно показать, что

$$D[S^{2}] = \frac{1}{n}\mu_{4} - \frac{n-3}{n(n-1)}D_{x}^{2}, \qquad (1.2.26)$$

где $\mu_4 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^4 f(x) dx$ – четвертый момент случайной вели-

чины Х.

Заменим в выражении (1.2.26) истинные значения D_x и μ_4 их оценками, полученными по конечной выборке объема *n*:

$$s^{2} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_{i} - m^{*})^{2} ,$$
$$\mu_{4}^{*} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_{i} - m^{*})^{4}}{n} .$$

Можно показать, что $D[s^2] = \frac{2}{n-1}s^2$, откуда $\tilde{\sigma}_D = s\sqrt{\frac{2}{n-1}}$.

Затем доверительный интервал $I_{\beta} = (s^2 - \Delta, s^2 + \Delta)$ строится так же, как для математического ожидания, где $\Delta = \Phi^{-1}(\beta)\sqrt{2}\tilde{\sigma}_D$.

1.3. Статистическая проверка статистических гипотез

Статистическая гипотеза – предположение относительно вида закона распределения или величины неизвестных параметров известного закона распределения [1, 3].

Выдвинутая гипотеза называется нулевой и обозначается H_0 . Наряду с этой гипотезой рассматривают конкурирующую или альтернативную ей гипотезу H_1 .

Если исследуются параметры известного распределения, то в этом случае постановка задачи может выглядеть, например, так:

 $H_0: M[X] = 1$ (математическое ожидание случайной величины *X* равно 1); H_1 : $M[X] \neq 1$ (математическое ожидание случайной величины X не равно 1).

Цель статистической проверки статистических гипотез – установления факта: не противоречит ли выдвинутая гипотеза имеющимся выборочным данным $x_1, ..., x_n$.

Статистическая проверка гипотез – процедура обоснованного сопоставления (с помощью того или иного критерия) высказанной гипотезы *H*₀ и экспериментальных выборочных данных.

При проверке выдвинутой гипотезы возможны ошибки двух видов – ошибки первого и второго рода.

Ошибка первого рода – непринятие верной статистической гипотезы.

Ошибка второго рода – принятие неверной статистической гипотезы.

Для наглядности в табл. 1.2 показаны введенные выше определения ошибок при проверке гипотез.

Таблица 1.2

Виды ошибок при проверке статистических гипотез

Гипотеза <i>H</i> ₀	Верна	Неверна
Отвергается	Ошибка 1-го рода	Правильное решение
Принимается	Правильное решение	Ошибка 2-го рода

Из табл. 1.2 видно, что ошибка первого рода – когда отвергается истина, а ошибка второго рода – когда принимается ложь.

Неотрицательный результат статистической проверки статистических гипотез не означает, что высказанное предположение абсолютно верно, просто оно не противоречит выборочным данным – так и необходимо рассматривать результат проверки гипотезы H_0 .

Вероятность совершить ошибку первого рода обозначают α и называют *уровнем значимости*, а вероятность совершить ошибку второго рода обозначают β.

Общая логическая схема проверки статистических гипотез.

1. Формулируется нулевая и альтернативная гипотезы.

Н₀: предположение.

*H*₁: альтернативное предположение

2. Формируется некоторая функция $k = f_n(X_1, ..., X_n)$ от результатов наблюдения. Эта функция называется критерием. Так как величины $X_1, ..., X_n$ – случайные, то k является случайной величиной. Обязательным является, чтобы закон распределения f(k) был хорошо изучен и затабулирован в предположении справедливости H_0 .

Принцип построения критерия k: величиной критерия определяется мера расхождения имеющихся в распоряжении выборочных данных с высказанной гипотезой *H*₀.

3. Задается величина уровня значимости α . Величина априорного значения α зависит от тех потерь, которые мы понесем, отвергнув правильную гипотезу. Чем больше потери, тем меньше величина α . Обычно значения α выбираются из следующего ряда:

0,1 0,05 0,025 0,005 0,001.

4. Из таблиц, где затабулирована f(k) – плотность распределения k, при заданном уровне значимости находим точки, разделяющие всю область мыслимых значений k в зависимости от выбранной альтернативной гипотезы на три или две части (рис. 1.23).



5. В функцию $k = f_n(x_1, ..., x_n)$ подставляем выборочные значения $x_1, ..., x_n$. Если окажется, что число $k = f_n(x_1, ..., x_n)$ попадает во вторую область, то считают, что гипотеза H_0 не противоречит экспериментальным данным. Если же в первую или третью область, то, скорее всего, случайная величина k не подчиняется из-

вестному закону f(k) и это несоответствие объясняется неверностью гипотезы H_0 , и мы от нее отказываемся.

Критические области. Мощность критерия

Критическая область – совокупность значений критерия, при котором отвергается гипотеза H_0 .

Мощность критерия – вероятность принятия альтернативной гипотезы H_1 , если она верна, или вероятность попадания критерия в критическую область при условии правильности гипотезы H_1 , т.е. мощность критерия – вероятность того, что H_0 отвергнута, если H_1 верна. Если β – вероятность совершить ошибку второго рода, т.е. события «принята нулевая гипотеза, причем справедлива конкурирующая», то мощность критерия $1 - \beta$.

Таким образом, чем больше мощность критерия, тем меньше вероятность совершить ошибку второго рода.

Проверка гипотезы о равенстве центров распределения двух нормальных генеральных совокупностей при известном σ

Пусть две случайные величины X и Y подчинены нормальному закону. Имеется две независимые выборки n и m. Необходимо проверить нулевую гипотезу о том, что статистическое ожидание этих двух генеральных совокупностей совпадают относительно альтернативной гипотезы – математические ожидания не равны.

В соответствии с общей логической схемой статистической проверки статистических гипотез, реализуем следующие шаги.

1. Выдвигаем гипотезу H_0 и альтернативную ей гипотезу H_1 .

$$H_0: M[X] = M[Y].$$

$$H_1: |M[X] - M[Y]| > 0.$$

2. Задаемся критерием проверки выдвинутой гипотезы H_0 :

$$Z = \frac{X - Y}{\sigma \left[\overline{X} - \overline{Y} \right]}, \quad \text{где} \quad \overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i, \quad \overline{Y} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \overline{Y}_i.$$

Ясно, что $M\left[\overline{X}\right] = M\left[X\right], M\left[\overline{Y}\right] = M\left[Y\right]$, причем величины \overline{X} и \overline{Y} распределены нормально.

Понятно, что

$$\sigma\left[\overline{X} - \overline{Y}\right] = \sqrt{D\left[\overline{X} - \overline{Y}\right]} = \sqrt{D\left[\overline{X}\right] + D\left[\overline{Y}\right]} = \sqrt{\frac{D\left[X\right]}{n} + \frac{D\left[Y\right]}{m}}$$

Если справедлива H_0 , т.е. если $M[\overline{Y}] = M[\overline{Y}]$, то величина Z распределена по нормальному закону с параметрами: M[Z] = 0 и

$$\sigma[Z] = 1$$
, t.e. $f(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} l^{-\frac{Z^2}{2}}$

3. Задаемся величиной уровня значимости α , т.е. вероятностью отвергнуть истинную гипотезу, если она верна, что в геометрическом плане означает попасть в критическую область $\alpha = P(|Z| > Z_k)$ (рис. 1.24).



Рис. 1.24. Иллюстрация к проверке гипотезы о равенстве центров распределения двух генеральных совокупностей

4. Из таблиц, где затабулирована f(z) – плотность распределения z, находим точки, разделяющие всю область мыслимых значений критерия на три части.

В силу симметрии нормального закона распределения имеем

$$P(0 < Z < Z_k) = \frac{1}{2}.$$

Эта вероятность есть сумма вероятности того, что случайная величина Z попадет в области $0 < Z < Z_k$ и $Z_k < Z < \infty$, т.е.

$$\frac{1}{2} = P(0 < Z < Z_k) + P(Z_k < Z < \infty).$$

С другой стороны, это соотношение можно записать, используя функцию Лапласа, определяющую вероятность попадания нормированной случайной величины Z в интервал ($0 < Z < Z_k$):

$$\frac{1}{2} = P(0 < Z < Z_k) + P(Z_k < Z < \infty) = \Phi(Z_k) + \frac{\alpha}{2},$$

откуда $\Phi(Z_k) = \frac{1-\alpha}{2}$. Обратным интерполированием по таблицам функции Лапласа определяем величину Z_k , т.е. критическую область $Z_k = \Phi^{-1}\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)$.

5. По экспериментальным данным вычислим:

$$Z_{_{\mathcal{H}CII}} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} y_i}{\sqrt{\frac{D[x]}{n} + \frac{D[y]}{m}}}$$

Если $Z_{\text{набл}}$ попадает в критическую область, то гипотезу о равенстве центров распределения следует отвергнуть. В противном случае можем сказать, что H_0 не противоречит имеющимся экспериментальным данным.

Рассмотрим случай, когда выдвигается другая альтернативная гипотеза.

- 1. $H_0: M[X] = M[Y],$ $H_1: M[X] > M[Y].$
- 2. Критерий выберем тот же самый: $Z = \frac{\overline{X} \overline{Y}}{\sigma \left[\overline{X} \overline{Y}\right]}$.

3. Выбор альтернативной гипотезы определяет форму математической записи $P(Z - Z_k) = \alpha$.

4. Выбор критической области при этом находится из условия

$$P(0 < Z < Z_k) + P(Z_k < Z < \infty) = \frac{1}{2}$$

ИЛИ

$$\frac{1}{2} = P(0 < Z < Z_k) + P(Z_k < Z < \infty) = \Phi(Z_k) + \alpha,$$

откуда получим $\Phi(Z_k) = \frac{1-2\alpha}{2}$, тогда $Z_k = \Phi^{-1}\left(\frac{1-2\alpha}{2}\right)$.

5. Если
$$Z_{_{3KC\Pi}} = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sigma \left[\overline{X} - \overline{Y}\right]} > Z_k$$
, то H_0 отвергаем.

Проверка гипотезы о равенстве центров распределения двух нормальных генеральных совокупностей при неизвестном, но одинаковым о

Пусть *X* и *Y* подчинены нормальному закону. Будем считать, что дисперсии этих случайных величин неизвестны, но одинаковы $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma^2$. Пусть *n* и *m* – объемы выборок из генеральных совокупностей *X* и *Y* соответственно. Необходимо проверить нулевую гипотезу о равенстве математических ожиданий:

 $H_0: M[X] = M[Y]$

относительно альтернативной

$$H_1: \quad M[X] \neq M[Y],$$

$$\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \quad \overline{Y} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \overline{Y}_i.$$

В качестве оценки для дисперсии выберем несмещенную оценку:

$$S_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2 , \quad S_y^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (Y_i - \overline{Y})^2 .$$

Так как по условию $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma^2$, то для оценки σ^2 целесообразно использовать эту информацию и в качестве оценки дисперсии взять взвешенное значение от обеих выборок:

$$S^{2} = \frac{S_{x}^{2}(n-1) + S_{y}^{2}(m-1)}{n+m-2}.$$

Если гипотеза H_0 справедлива, то случайная величина $\overline{X} - \overline{Y}$ подчинена нормальному закону с параметрами $M[\overline{X} - \overline{Y}] = 0$,

$$D[\overline{X} - \overline{Y}] = \sigma^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right).$$

Действительно,

$$M[\overline{X} - \overline{Y}] = M[\overline{X}] - M[\overline{Y}] = 0,$$

$$D[\overline{X} - \overline{Y}] = D[\overline{X}] + D[\overline{Y}] = \frac{D[X]}{n} + \frac{D[Y]}{m} = D\left[\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right] = \sigma^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right],$$

величина σ^2 неизвестна. Понятно, что в этом случае оценка дисперсии разности средних значений может быть выражена формулой:

$$S_{\bar{X}-\bar{Y}}^{2} = \left[\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right]S^{2} = \left[\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right]\frac{S_{x}^{2}(n-1) + S_{y}^{2}(m-1)}{n+m-2}$$

При этом легко показать, что

$$M[S_{\overline{X}-\overline{Y}}^2] = \sigma^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right] = D[\overline{X} - \overline{Y}].$$

Известно, что, если величина $\overline{X} - \overline{Y}$ подчинена нормальному закону, то статистика

$$t = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{S_{\bar{X} - \bar{Y}}} = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\left[\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right]\frac{S_x^2(n-1) + S_y^2(m-1)}{n+m-2}}}$$

подчиняется распределению Стьюдента с числом степеней свободыk=n+m-2 .

При заданном а по таблицам функции Стьюдента находим $t_{\rm kp}$, такое, что $P(|t| > t_{\rm kp}) = \alpha$. Далее вычисляем по экспериментальным данным $T_{_{\rm ЭКСП}} = \frac{\overline{x} - \overline{y}}{\sqrt{(n-1)s_x^2 + (m-1)s_y^2}} \sqrt{\frac{nm(n+m-2)}{n+m}}$, и если его мо-

дуль больше $t_{\kappa p}$, то гипотеза H_0 отвергается, в противном случае она принимается.

Сравнение двух дисперсий нормальных генеральных совокупностей

Пусть генеральные совокупности X и Y распределены нормально и по независимым выборкам из этих совокупностей, соответственно, объемом n и m получены исправленные выборочные дисперсии s_x и s_Y . Понятно, что в силу ограниченности выборок значения этих величин могут не совпадать, даже если дисперсии генеральных совокупностей одинаковы. Возникает вопрос: случайно это расхождение, значимо ли оно? Иначе говоря, требуется при заданном уровне значимости α проверить нулевую гипотезу о том, что дисперсии генеральных совокупностей совпадают.

Так как
$$S_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2$$
 и $S_y^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (Y_i - \overline{Y})^2$ являются,

соответственно, несмещенными оценками дисперсий генеральных совокупностей *X* и *Y*, то выполняются соотношения:

$$M[S_X^2] = D_X$$
 и $M[S_Y^2] = D_Y$.

Тогда нулевую гипотезу о равенстве дисперсий генеральных совокупностей *X* и *Y* можно записать следующим образом:

 $H_0: \quad M[S_X^2] = M[S_Y^2],$

или

 $H_0: D_X = D_Y.$

В качестве критерия в данном случае выбирают отношение большей дисперсии к меньшей $F = \frac{S_6^2}{S_4^2}$. Показано, что при спра-

ведливости нулевой гипотезы величина F подчиняется распределению Фишера – Снедекора со степенями свободы $k_1 = n_1 - 1$ и $k_2 = n_2 - 1$. При этом n_1 – объем выборки, по которой вычислена большая исправленная дисперсия, а n_2 – меньшая. Оказывается, что распределение Фишера – Снедекора зависит только от числа степеней свободы k_1 и k_2 и не зависит от других параметров.

Распределение Фишера – Снедекора. Если U и V – независимые случайные величины, распределенные по закону χ^2 со степенями свободы k_1 и k_2 , то величина

$$F = \frac{U / k_1}{V / k_2}$$
(1.3.1)

имеет распределение, называемое *F*-распределением, или распределением Фишера – Снедекора (рис. 1.25). Плотность распределения Фишера – Снедекора определяется выражением:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0; \\ C_0 \frac{x^{(k_1 - 2)/2}}{(k_2 + k_1 x)^{(k_1 + k_2)/2}} & \text{при } x > 0, \end{cases}$$
(1.3.2)

где $C_0 = \frac{\Gamma\left(\frac{k_1 + k_2}{2}\right) k_1^{k_1/2} k_2^{k_2/2}}{\Gamma(k_1/2) \Gamma(k_2/2)}$; Γ – гамма функция.



х

Рис. 1.25. Плотность распределения Фишера – Снедекора

Критическая область строится, исходя из вида конкурирующей гипотезы.

Рассмотрим пример. Пусть

 $H_1: D[X] > D[Y].$

Необходимо вычислить отношение большей исправленной дисперсии к меньшей, т.е.

$$F_{\rm эксп} = \frac{s_{\rm \tilde{6}}^2}{s_{\rm M}^2} \,.$$

Затем по таблице критических точек распределения Фишера – Снедекора по заданному уровню значимости α и числам степеней свободы k_1 и k_2 (k_1 – число степеней свободы большей исправленной дисперсии) найти критическую точку $F_{\rm kp}$, исходя из условия:

$$P(F > F_{\rm KD}) = \alpha$$
.

Если $F_{_{ЭКСП}} > F_{_{KD}}$, то гипотезу H_0 отвергаем.

При данной конкурирующей гипотезе критическая область – односторонняя.

Проверка гипотезы о законе распределения. Критерий Пирсона

Ранее рассматривались способы проверки гипотез о различных параметрах закона распределения, причем сам закон распределения считался известным. Однако во многих задачах именно сам закон распределения неизвестен, и предположение о его виде является гипотезой, требующей проверки. Пусть высказывается предположение, что ряд наблюдений $X_1, ..., X_n$ образует случайную выборку, извлеченную из генеральной совокупности, имеющей плотность распределения вида $f(x; \theta_1, ..., \theta_s)$, где параметры $\theta_1, ..., \theta_s$ неизвестны. В этом случае для проверки гипотезы о том, что плотность распределения случайной величины X есть $f(x; \theta_1, ..., \theta_s)$, применяется критерий Пирсона.

Критерий Пирсона. Суть состоит в том, что сравниваются эмпирические и теоретические (в предположении справедливости ги-

потезы H_0 : $f = f(x; \theta_1, ..., \theta_s)$) частоты. Например, получены следующие данные:

Эмпирические частоты	6	13	38	74	106	85	30	10	4
Теоретические частоты	3	14	42	82	99	76	37	11	2

Возникает вопрос: случайно ли расхождение частот? С одной стороны, расхождение частот может быть случайным и объясняется малым числом измерений и ошибками при измерении. С другой стороны, возможно, что закон распределения, который мы выбрали для описания случайной величины и на основании которого рассчитаны теоретические частоты, не соответствует действительности. На эти вопросы и отвечает критерий распределения Пирсона. Для применения критерия Пирсона сделаем следующие шаги.

1. Разобьем область изменения случайной величины X на l интервалов $\Delta_1, ..., \Delta_l$ и подсчитаем по экспериментальным данным количество попаданий случайной величины в каждый из этих интервалов m_i . При этом обычно разбиение на интервалы подчиняет следующим условиям:

общее количество интервалов l должно быть не менее восьми (предполагается, что число неизвестных параметров распределения s не превосходит семи (на практике $s \le 3$));

в каждый интервал группировки должно попасть не менее 7 – 10 выборочных значений *x_i*.

2. На основании выборочных данных $x_1, ..., x_n$ строятся оценки неизвестных параметров $\theta_1^*, ..., \theta_s^*$.

3. Вычислим вероятности событий, что значение случайной величины X попадет в Δ_i интервал:

$$P_{i} = F_{M}(x_{i}; \theta_{1}^{*}, ..., \theta_{s}^{*}) - F_{M}(x_{i-1}; \theta_{1}^{*}, ..., \theta_{s}^{*}),$$

где x_i и x_{i-1} – правый и левый концы интервала Δ_i .

Строим таблицу, при этом $m_1 + ... + m_l = n$; $p_1 + ... + p_l = 1$:

Интервалы	Δ_1	Δ_2	 Δ_l
Эмпирическая частота	m_1	<i>m</i> ₂	 m_l
Теоретическая частота	$n \cdot p_1$	$n \cdot p_2$	 $n \cdot p_l$

Критерием является выражение $\chi^2 = \sum_{i=1}^{l} \frac{(m_i - np_i)^2}{np_i}$. Из этого

выражения видно, что чем меньше отличие эмпирической и теоретической частоты, тем меньше значения критерия.

Можно доказать, что при $n \to \infty$ этот критерий распределен по закону χ^2 с числом степеней свободы k = l - s - 1. Если предполагаемое распределение нормальное, то оно полностью характеризуется двумя параметрами – математическим ожиданием и средним квадратическим отклонением, следовательно, s = 2 и число степеней свободы k = l - 3.

4. Зададимся уровнем значимости α.

По таблицам находим такие критические точки χ^2_{1kp} и χ^2_{2kp} , чтобы выполнялись соотношения:

$$P(\chi^2 > \chi^2_{2\kappa p}) = \frac{\alpha}{2}$$
 и $P(\chi^2 > \chi^2_{1\kappa p}) = 1 - \frac{\alpha}{2}$.

По экспериментальным данным и по теоретическим частотам вычислим конкретное значение величины $\chi^2_{\text{набл}} = \sum_{i=1}^{l} \frac{(m_i - np_i)^2}{np_i}$.

Если полученное значение $\chi^2_{\text{набл}}$ таково, что выполняется условие $\chi^2_{1\text{кр}} < \chi^2_{\text{набл}} < \chi^2_{2\text{кр}}$, то нет оснований для отвержения гипотезы H_0 . В противном случае гипотеза отвергается. Интересно отметить тот факт, что нулевая гипотеза отвергается как при слишком большом различии между экспериментальными и теоретическими частотами, так и при слишком малом отличии. Последнее обстоятель-

ство может возникнуть, если неудачно выбран закон распределения или нарушена корректность и объективность эксперимента.

1.4. Примеры законов распределения в физике ядерных реакторов

1.4.1. Закон радиоактивного распада

Закон радиоактивного распада является одним из основных законов ядерной физики [5, 6]. Суть его заключается в том, ядра могут самопроизвольно распадаться и при этом вероятность распада ядра в какой-то момент времени не зависит от того, сколько времени ядро существовало до этого момента. Математическая модель закона радиоактивного распада может быть получена следующим образом.

Пусть λ – вероятность того, что ядро распадется за единицу времени. Определим вероятность того, что ядро распадется в интервале времени от t до t + dt. Обозначим этот факт как событие C. Следуя алгебре событий, можем сказать, что событие C является произведением двух событий $C = A \cdot B$, где событие A заключается в том, что ядро не распалось до момента времени t, а событие B заключается в том, что ядро распалось за время dt после момента времени t. Таким образом, если P(t) есть вероятность ядру не распасться до момента времени t, то по теореме умножения вероятностей получим: вероятность того, что оно распадется в интервале от t до t + dt есть $P(t) \cdot \lambda \cdot dt$. Понятно, что вероятность ядру не распасться к моменту времени t + dt, т.е. P(t + dt) будет равна:

$$P(t+dt) = P(t) - P(t)\lambda dt$$
. (1.4.1)

Из уравнения (1.4.1) получим:

$$\frac{dP}{dt} = -P(t)\lambda; P(0) = 1.$$
 (1.4.2)

Решение этого уравнения есть $P(t) = \exp(-\lambda \cdot t)$.

Выражение (1.4.2), представленное в виде $dP = -P\lambda \cdot dt$, показывает вероятность того, что случайная величина *t* лежит в интер-

вале от *t* до t + dt. Следовательно, P(t) есть функция распределения случайной величины *t*, т.е. P(t) = F(t), а $P\lambda$ есть плотность распределения случайной величины *t*, т.е.

$$f(t) = P(t)\lambda = \lambda \cdot \exp(-\lambda \cdot t)$$
.

Математическое ожидание в соответствии с (1.1.16) есть:

$$m_t = \int_0^{+\infty} \lambda \cdot t \exp(-\lambda \cdot t) dt = \frac{1}{\lambda} = T. \qquad (1.4.3)$$

Физики называют *T* средним временем жизни ядра. Таким образом, закон радиоактивного распада характеризуется следующей плотностью распределения:

$$f(t) = \frac{1}{T} \exp\left(-\frac{t}{T}\right), \quad t \ge 0.$$

1.4.2. Вероятность взаимодействия. Макроскопические сечения взаимодействия

Используя рассуждения, аналогичные предыдущему, можно получить выражение для плотности вероятности взаимодействия нейтрона с веществом. Действительно, пусть Σ – вероятность нейтрону испытать взаимодействие с ядрами среды на единице длины пути. Тогда событие, заключающееся в том, что нейтрон испытает столкновение с ядром на отрезке пути от x до x + dx есть событие $C = A \cdot B$, где событие A заключается в том, что нейтрон не испытал взаимодействия, пройдя путь x, а событие B заключается в том, что нейтрон столкнулся с ядром на пути dx. Таким образом, если P(x) есть вероятность нейтрону не испытать взаимодействия, пройдя путь x, то по теореме умножения вероятностей получим: вероятность того, что он испытает взаимодействие на пути от x до x + dx есть $P(x) \cdot \Sigma \cdot dx$. Изменение вероятности избежать взаимодействия есть

$$P(x+dx) - P(x) = -P(x)\Sigma dx.$$

Таким образом, снова приходим к уравнению, аналогичному (1.4.2), решение которого есть $P(x) = \exp(-\Sigma \cdot x)$, и плотность вероятности взаимодействия на пути от *x* до x + dx есть

$$f(x) = \Sigma \exp(-\Sigma \cdot x). \qquad (1.4.4)$$

Понятно, что математическое ожидание пути (средний путь), который проходит нейтрон до взаимодействия, есть

$$m_x = \int_0^{+\infty} \Sigma \cdot \exp(-\Sigma \cdot x) dx = \frac{1}{\Sigma} = l, \qquad (1.4.5)$$

l – средняя длина свободного пробега.

1.4.3. Закон Пуассона. Регистрация частиц

Закон Пуассона иногда называют законом редких явлений. Как было сказано выше, математически этот закон можно получить из

биномиального закона $P_n(m) = C_n^m p^n q^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m}$, если

предположить, что вероятность события p очень мала, а количество независимых опытов n очень велико. В этом случае вероятность того, что будет наблюдено m событий, есть

$$P(m) = \frac{a^m}{m!} \exp(-a) ,$$

где a = pn, m = 0, 1, ...

Из рис. 1.8 видно, что при увеличении параметра *а* распределение Пуассона становится внешне близким к нормальному распределению, хотя и не совсем нормальным, хотя бы потому, что аргумент меняется, начиная от 0, а не от $-\infty$. Пояснить этот факт можно следующим образом.

Представим себе, что на очень тонкую пластину с поверхностной плотностью ядер вещества $N[1/m^2]$ перпендикулярно падает поток нейтронов (рис. 1.26).



Рис. 1.26. Иллюстрация к закону Пуассона

При плотности нейтронов в пучке $n [1/M^3]$ и скорости нейтронов υ [м/с], через 1 м² пластины за 1 с должно пройти количество нейтронов, равное $n \cdot v$ (эта величина называется плотностью потока нейтронов $\phi = n \cdot v$). Если в результате этого произошло *R* реакций данного типа, то понятно, что число реакций должно быть пропорционально произведению N · ϕ . Коэффициент пропорциональности σ в соотношении $R = \sigma \cdot N \cdot \phi$ имеет смысл микроскопического сечения взаимодействия. Величина $\Sigma = \sigma \cdot N$ называется макроскопическим сечением взаимодействия и имеет смысл вероятности нейтрону испытать взаимодействие с ядром на единичной длине пути. Для реакций деления, радиационного захвата и рассеяния микроскопические сечения обозначаются, соответственно: σ_f , σ_c , σ_s , а макроскопические сечения, соответственно: Σ_f , Σ_c , Σ_s . Если концентрация нейтронов равна n, и они движутся со скоростью v, то суммарный путь, пройденный нейтронами за 1 с, будет равен *n* · *v* . Тогда $\frac{nv}{l} = \Sigma \phi$ – скорость реакций в единице объема.

Вероятность того, что нейтрон испытает взаимодействие с ядром, очень мала и эта вероятность не зависит от того, произошло ли взаимодействие другого нейтрона с другим ядром. При этом число нейтронов в пучке достаточно велико. Тогда эта ситуация фактически означает повторение опытов, в каждом из которых событие (взаимодействие) может произойти с некоторой малой веро-ятностью, но число опытов очень велико. Рассмотрим отрезок времени Δt , в течение которого происходит регистрация событий.

Обозначим математическое ожидание событий, регистрируемых в единицу времени через λ. Тогда математическое ожидание событий, регистрируемых за время Δt , есть $\lambda \cdot \Delta t = a$. Вероятность зарегистрировать за это время *m* событий подчиняется закону Пуассона. Физически понятно, что интервал времени измерения Δt целесообразно выбирать таким, чтобы в среднем произошла хотя бы одна регистрация, т.е. $a \ge 1$. На самом деле, конечно, время измерения должно быть существенно больше. Пусть, например, $T = k \cdot \Delta t$. Тогда, если в интервалах Δt_i зарегистрировано, соответственно, *m*_i событий, то количество событий за время *T* будет $\sum_{i=1}^{k} m_i$. В каждом интервале времени вероятность регистрации подчиняется закону Пуассона, но по предельной теореме закон распределения суммы уже будет приближаться к нормальному закону. Практически при $a \ge 10$ можно считать закон распределения нормальным в том смысле, что вероятность попадания случайной величины в интервал $(a - \sqrt{a}, a + \sqrt{a})$ такая же, как и при нормальном законе распределения.

1.4.4. Энергетические спектры нейтронов деления и замедления

Спектр нейтронов деления

В физической литературе, в том числе по физике ядерных реакторов, широко используется понятие спектра. Например, если идет речь об энергетическом спектре, т.е. о распределении нейтронов по энергиям, то под спектром понимается доля нейтронов, приходящаяся на единичный интервал энергии около энергии *E*. С точки зрения теории вероятности это есть не что иное, как плотность распределения вероятности того, что энергия нейтрона имеет значение *E*. Например, в силу квантово-механических законов энергия нейтронов, вылетающих при делении ядра, является случайной величиной. Экспериментально установлено, что плотность распределения этой величины подчиняется соотношению:

$$f(E) = \frac{a}{v} \sqrt{E} \cdot \exp\left(-\frac{E}{T}\right), \qquad (1.4.6)$$

где *T* – параметр распределения, выраженный, как и энергия нейтронов *E*; *a* – константа, нормирующая распределение на число нейтронов деления v. Параметры распределений определяются экспериментально. Например, для ²³⁵ U параметры имеют следующие значения: *a* = 1,872 MэB^{-3/2}, *T* = 1,29 MэB.

Это распределение вероятности носит название спектра Уатта – спектра нейтронов деления (рис. 1.27).



Рис. 1.27. Спектр нейтронов деления

Используя выражение (1.4.6), легко получить математическое ожидание (среднее значение) энергии нейтрона, возникающего при делении ядра:

$$m_E = \int_{0}^{+\infty} E \cdot f(E) dE = \int_{0}^{\infty} \frac{a}{v} \sqrt{E} \cdot \exp\left(-\frac{E}{T}\right) dE = \overline{E} . \quad (1.4.7)$$

Это значение составляет величину порядка 2 МэВ.

Вероятность того, что энергия нейтронов деления будет превышать заданное пороговое значение $E_{\rm n}$, можно определить из выражения

$$\eta(E_{\Pi}) = \int_{E_{\Pi}}^{\infty} \frac{a}{v} \sqrt{E} \cdot \exp\left(-\frac{E}{T}\right) dE . \qquad (1.4.8)$$

Активация теплоносителя быстрыми нейтронами. Водный теплоноситель в активной зоне реактора активируется быстрыми нейтронами. При этом протекают реакции ${}^{16}O(n, p){}^{16}N_7$, ${}^{17}O(n, p){}^{17}N_7$, первая из которых

$${}^{16}\text{O}_8 + {}^1n_0 \rightarrow {}^{16}\text{N}_7 + {}^1p_1$$

вносит наибольший вклад в наведенную активность. Эта реакция протекает на нейтронах с энергией более 9,638 МэВ с образованием радионуклида ¹⁶N ($T_{1/2} = 7,11$ с). Сечение активации, усредненное по спектру деления, при этом есть

$$\overline{\sigma}_a = \int_{E_{\Pi}}^{\infty} \frac{a}{v} \sqrt{E} \cdot \exp\left(-\frac{E}{T}\right) dE \qquad (1.4.9)$$

и составляет величину $0,019 \cdot 10^{-31}$ м². Радионуклид ¹⁶N испускает гамма-кванты с энергиями 6,13 - 7,11 и 2,75 МэВ:

$${}^{16}N_7 \rightarrow {}^{16}O_8 + \beta + \gamma$$

Понятно, что наведенная активность зависит от величины плотности потока быстрых нейтронов, а следовательно, от мощности, а в точке измерения активности – от времени доставки, т.е. при известном расстоянии – от расхода теплоносителя. Таким образом, величина азотной активности теплоносителя несет в себе информацию и о мощности, и о расходе. Это обстоятельство может быть использовано как дополнительный информационный канал для определения расхода теплоносителя в реакторах типа РБМК.

Спектр нейтронов замедления. Средняя энергия, при которой появляются нейтроны в результате деления ядра, составляет величину ≈ 2 МэВ. Изменить свою энергию нейтрон может только в результате реакции рассеяния. Поскольку реакция неупругого рассеяния имеет пороговый характер ($E_{\rm m} \approx 0,1$ МэВ), то в пределах широкой энергетической области, от $E_{\rm m}$ до тепловых энергий, замедление нейтронов происходит за счет реакции упругого рассеяния (рис. 1.28).



Рис. 1.28. Схема упругого рассеяния

При абсолютно упругом ударе выполняются законы сохранения: импульса

$$1 \cdot \vec{v}_0 = 1 \cdot \vec{v} + A \cdot \vec{V} ;$$

энергии

$$\frac{1 \cdot \nu_0^2}{2} = \frac{1 \cdot \nu^2}{2} + \frac{A \cdot V^2}{2}, \qquad (1.4.10)$$

где $\upsilon_0 = |\vec{\upsilon}_0|$, $\upsilon = |\vec{\upsilon}|$ – модуль скорости нейтрона до и после столкновения, соответственно; $V = |\vec{V}|$ – модуль скорости ядра после столкновения; A – масса ядра (в атомных единицах массы); 1 – масса нейтрона.

Решая систему (1.4.10), нетрудно получить соотношение между скоростью нейтрона до и после соударения:

$$\upsilon = \upsilon_0 \cdot \frac{A-1}{A+1} \, .$$

Отношение кинетической энергии нейтрона после столкновения к энергии до столкновения есть:

$$\frac{E}{E_0} = \left(\frac{A-1}{A+1}\right)^2 = \varepsilon \,.$$

В результате акта взаимодействия нейтрон и ядро разлетаются под углом ψ (см. рис. 1.28), при этом потеря энергии зависит от угла рассеяния. Экспериментально и теоретически показано, что рассеяние сферически симметрично в системе центра инерции. При этом нейтрон после столкновения с равной вероятностью будет иметь энергию в интервале от E_0 до $\varepsilon \cdot E_0$, т.е. энергия нейтрона после рассеяния на ядре будет подчиняться закону равномерной плотности:

$$f(E) = \begin{cases} 0, & E \le \varepsilon E_0; \\ \frac{1}{E_0(1-\varepsilon)}, & \varepsilon E_0 < E \le E_0; \\ 0, & E > E_0. \end{cases}$$
(1.4.11)

Величина $E_0 \cdot (1-\varepsilon)$ называется ступенькой замедления. При этом средняя потеря энергии нейтрона есть

$$\overline{E_0 - E} = \int_{\varepsilon E_0}^{E_0} (E_0 - E) f(E) dE = \frac{1 - \varepsilon}{2} \cdot E_0$$

т.е. нейтрон при столкновении в среднем теряет одну и ту же долю первоначальной энергии. Обычно рассматривают такую величину как среднюю потерю логарифма энергии:

$$\xi = \overline{\Delta \ln E} = 1 + \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} \cdot \ln \varepsilon \; .$$

Удобство введения этой величины обусловлено тем, что ξ зависит лишь от массового числа ядра. Используя величину ξ , можно легко рассчитать среднее число столкновений нейтрона с ядрами, которые приводят к замедлению от энергии E_0 до энергии E. Например, среднее число столкновений, необходимых нейтрону, чтобы замедлиться от энергии деления $E_0 = 2$ МэВ до тепловой энергии $E_{\rm T} = 0,025$ эВ, есть

$$N = \frac{\ln \frac{E_0}{E_{\rm T}}}{\xi} = \frac{18,2}{\xi}.$$

Из табл. 1.3 видно, какое количество столкновений в среднем необходимо нейтрону, чтобы замедлиться из быстрой области энергий в тепловую.

Однако выбирать тип замедлителя, исходя только из величины ξ , было бы опрометчиво, важны еще вероятность рассеяния на данном веществе и величина его сечения поглощения. Вышеперечисленные факторы учитывает комплекс $K = \frac{\xi \cdot \sum_{S}}{\sum_{\alpha}}$ – коэффициент замедления, где $\xi \cdot \sum_{S}$ называется замедляющей способностью, а \sum_{S} и \sum_{a} – макроскопическими сечениями рассеяния и поглощения соответственно. Чем больше *K*, тем лучше замедлитель. С точки зрения нейтронно-физических процессов наилучшим замедлителем является тяжелая вода, затем следует графит и, наконец, обычная вода.

Таблица 1.3

Нуклид	A	ىرى	Ν
Водород	1	1,000	18
Дейтерий	2	0,725	25
Углерод	12	0,158	114
Кислород	16	0,120	150
Уран	238	0,0084	2170

Константы, характеризующие замедление нейтронов

Рассмотрим теперь, как формируется спектр нейтронов (т.е. распределение замедляющихся нейтронов по энергиям) при замедлении на водороде (это самый простой случай).

Пусть в единице объема в единицу времени рождается Q_0 нейтронов с энергией E_0 . Рассмотрим баланс нейтронов в интервале dE около энергии $E(E < E_0)$ (рис. 1.29).

Число нейтронов, прибывающих в единицу времени в этот интервал, складывается из двух составляющих:

прибыль за счет однократного рассеяния нейтронов источника при энергии E_0 ;

прибыль за счет рассеяния нейтронов в интервалах типа dE', лежащих выше энергии E, но ниже E_0 (т.е. $E < E' < E_0$).

Если Q_0 – число нейтронов, испускаемых источником при энергии E_0 , то ясно, что раньше или позже они испытают соударения с ядрами среды (так как по условию среда бесконечна, следовательно, утечки нейтронов за ее пределы нет). Однако не каждое соударение приводит к реакции рассеяния. При наличии поглощения вероятность нейтрону испытать именно рассеяние равна отношению





Рис. 1.29. Энергетический баланс нейтронов

Следовательно, число нейтронов источника, испытавших рассеяние в результате первого столкновения, есть величина

$$\frac{Q_0 \cdot \Sigma_S(E_0)}{\Sigma_S(E_0) + \Sigma_a(E_0)}$$

Обозначим $\Sigma(E) = \Sigma_S(E) + \Sigma_a(E)$.

Вероятность того, что в результате первого рассеяния нейтроны попадут в интервал энергий dE около E, есть $\frac{dE}{E_0}$, так как при рассеянии на водороде (A = 1) нейтроны с равной вероятностью приобретают энергию в пределах ступеньки замедления $E_0 \div 0$. Таким образом, за счет однократного рассеяния нейтронов источника в интервал dE около E каждую секунду будет попадать число нейтронов, равное

$$\frac{Q_0 \cdot dE}{E_0} \cdot \frac{\sum_S(E_0)}{\sum(E_0)}.$$

Из интервала dE' около E' за счет рассеяния ежесекундно уходит $\sum_{S} (E') \cdot \varphi(E') dE'$ нейтронов. Поскольку в результате рассеяния нейтроны будут иметь энергию в интервале $E' \div 0$ с равной вероятностью, то вероятность попасть в интервал dE будет $\frac{dE}{E'}$. Значит, в результате многократного рассеяния нейтронов выше энергии E' в интервал попадет dE число нейтронов, равное

$$\int_{E}^{E_0} \frac{\sum_{S}(E') \cdot \varphi(E')}{E'} dE' dE \, .$$

Если ввести обозначение $F(E) = [\sum_{S} (E) + \sum_{a} (E)] \cdot \varphi(E)$, то это выражение можно привести к виду:

$$\int_{E}^{E_0} \frac{\sum_{S}(E') \cdot F(E')}{\sum(E')} \cdot \frac{dE'}{E'} dE.$$

Таким образом, общая прибыль нейтронов в интервал dE около E составляет величину

$$\int_{E}^{E_0} \frac{\sum_{S}(E') \cdot F(E')}{\sum(E')} \cdot \frac{dE'}{E'} dE + \frac{Q_0}{E_0} \cdot \frac{\sum_{S}(E_0)}{\sum(E_0)}$$

Убыль нейтронов из интервала dE около E осуществляется за счет поглощения $\sum_{a}(E) \cdot \varphi(E) dE$ и рассеяния $\sum_{S}(E) \cdot \varphi(E) dE$. Поскольку рассматривается равновесный процесс замедления, то скорость убыли должна равняться скорости прибыли:

$$F(E) = \int_{E}^{E_0} \frac{\sum_{S} (E') \cdot F(E')}{\sum(E')} \cdot \frac{dE'}{E'} + \frac{Q_0}{E_0} \cdot \frac{\sum_{S} (E_0)}{\sum(E_0)}.$$
 (1.4.12)

Уравнение (1.4.12) носит название уравнения замедления. Его решение легко получить аналитически, если продифференцировать по *E* левую и правую части:

$$\frac{dF}{dE} = -\frac{\sum_{S}(E) \cdot F(E)}{\sum(E) \cdot E}; \quad \frac{dF}{F} = -\frac{\sum_{S}(E)dE}{\sum(E) \cdot E};$$

$$F(E) = F(E_0) \cdot \exp\left[\int_{E}^{E_0} \frac{\sum_{S}(E')}{\sum(E')} \cdot \frac{dE'}{E'}\right]$$

Из выражения (1.4.12) получим

$$F(E_0) = \frac{Q_0}{E_0} \cdot \frac{\sum_S(E_0)}{\sum(E_0)}$$

Если учесть, что $\frac{\sum_{S}}{\sum} = 1 - \frac{\sum_{a}}{\sum}$ в показателе экспоненты, то

$$\exp\left[\int_{E}^{E_{0}} \frac{\sum_{S}(E')}{\sum(E')} \cdot \frac{dE'}{E'}\right] = \exp\left[-\int_{E}^{E_{0}} \frac{\sum_{a}}{\sum} \cdot \frac{dE'}{E'}\right] \cdot \exp\left[\int_{E}^{E_{0}} \frac{dE'}{E'}\right] = \\ = \exp\left[-\int_{E}^{E_{0}} \frac{\sum_{a}}{\sum} \cdot \frac{dE'}{E'}\right] \cdot \frac{E_{0}}{E}.$$

Окончательно получим:

$$F(E) = \frac{Q_0}{E} \cdot \frac{\sum_S(E_0)}{\sum(E_0)} \cdot \exp\left[-\int_E^{E_0} \frac{\sum_a}{\sum} \cdot \frac{dE'}{E'}\right]. \quad (1.4.13)$$

Если поглощение мало ($\Sigma_a << \Sigma_S$), то выражение (1.4.13) принимает вид

$$F(E) = \frac{Q_0}{E}.$$

Таким образом, энергетическое распределение нейтронов при замедлении на водороде имеет вид:

без поглощения -

$$\varphi(E) = \frac{Q_0}{\sum_S \cdot E}$$
 (спектр Ферми);

с поглощением -

$$\varphi(E) = \frac{Q_0}{\sum_S \cdot E} \cdot \exp\left[-\int_E^{E_0} \frac{\sum_a(E')}{\sum(E')} \cdot \frac{dE'}{E'}\right].$$

Из сравнения этих двух формул понятно, что сомножитель $\exp\left[-\int_{E}^{E_0} \frac{\sum_a(E')}{\sum(E')} \cdot \frac{dE'}{E'}\right]$ имеет смысл вероятности избежать погло-

щения при замедлении.

Если замедление происходит на произвольных ядрах среды, то можно показать, что спектр нейтронов описывается выражением

$$\varphi(E) = \frac{Q_0}{\xi \cdot \sum_S \cdot E} \cdot \exp\left[-\int_E^{E_0} \frac{\sum_a}{\sum_S + \sum_a} \cdot \frac{dE}{\xi \cdot E}\right]$$

Поскольку в области замедления сечения захвата малы, за исключением резонансного поглощения на ядрах топлива, то величина

$$p = \exp\left[-\int_{E}^{E_{0}} \frac{\sum_{a}}{\sum_{S} + \sum_{a}} \cdot \frac{dE}{\xi \cdot E}\right]$$

носит название вероятности избежать резонансного захвата.

Приведенные выше энергетические спектры связаны с плотностью распределения вероятности следующим образом:

$$f(E) = \frac{\varphi(E)}{\sum_{E_c} \varphi(E) dE},$$

где E_c – уровень энергии, разграничивающий область замедления и область тепловых энергий.

Используя функцию f(E), находят средние значения взаимодействия в области замедления:

$$\overline{\sigma} = \frac{\int\limits_{E_c}^{E_0} \sigma(E) \phi(E) dE}{\int\limits_{E_c}^{E_0} \phi(E) dE} .$$
(1.4.14)

Спектр тепловых нейтронов. В тепловой области энергий спектр нейтронов описывается распределением Максвелла вида

$$\varphi(E) = \frac{2 \cdot \pi \sqrt{E}}{\left(\pi k T_n\right)^{3/2}} \exp\left(-\frac{E}{k T_n}\right),$$

где *k* – постоянная Больцмана; *T_n* – температура нейтронного газа, зависящая от температуры замедлителя и его поглощающих и замедляющих свойств. Тогда

$$T_n = T\left(1+1, 5\frac{\Sigma_a}{\xi \Sigma_s}\right),$$

где Т-температура среды.

Средние сечения в тепловой области находятся по следующей формуле:

$$\overline{\sigma} = \frac{\int_{0}^{\infty} \sigma(E)\phi(E)dE}{\int_{0}^{\infty} \phi(E)dE}.$$

Список литературы к главе 1

1. Айвазян С.А. и др. Прикладная статистика: Основы моделирования и первичная обработка данных: Справочное издание / С.А. Айвазян, И.С. Енюков, Л.Д. Мешалкин. – М.: Финансы и статистика, 1983. – 471 с.

2. Ветцель Е.С. Теория вероятностей. Учебник для вузов. – М.: Физматгиз, 1969.

3. Гмурман Е.В. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебное пособие для вузов. – Изд. 7-е, стер. – М.: Высшая школа, 2001. – 479 с.

4. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей: Учебник. – Изд. 6-е, перераб. и доп. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1988. – 448 с.

5. Загребаев А.М., Овсянникова Н.В. Автоматизированная обучающая система по физике реакторов: Учебное пособие. М.: МИФИ, 2002. – 160 с.

6. Климов А.Н. Ядерная физика и ядерные реакторы: Учебник для вузов. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Энергоатомиздат, 2002. – 464 с.

7. Королюк В.С., Портенко Н.И., Скороход А.В. и др. Справочник по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1985. – 640 с.

8. Пугачев В.С. Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб. пособие. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: Физматлит, 2002. – 496 с.

ГЛАВА 2. СЛУЧАЙНЫЕ ФУНКЦИИ И ИХ ХАРАКТЕРИСТИКИ

2.1. Общие свойства случайных функций

Функция X(t) называется случайной функцией (рис. 2.1), если её значение при любом аргументе является случайной величиной [11, 12]. Аргумент t будем считать величиной неслучайной. Различают два случая:

1) аргумент функции может принимать любые значения в заданном интервале;

2) аргумент функции может принимать только дискретные значения.

В первом случае *X*(*t*) называют случайным процессом, во втором – случайной последовательностью.

Пусть проведено *n* независимых измерений функции. При каждом измерении она примет конкретный вид, который называется реализацией случайной функции. Для фиксированного значения аргумента *t* функция X(t) превращается в случайную величину. Эта случайная величина называется сечением случайной функции. Для полной вероятностной характеристики случайной функции необходимо задать ее закон распределения, например F(x, t). Такой закон называется одномерным.



Рис. 2.1. Иллюстрация к понятию случайной функции

Одномерный закон распределения является достаточной характеристикой случайной функции только тогда, когда значения случайной функции при различных значениях аргумента рассматриваются изолированно друг от друга. Если этого условия нет, то необходимо рассматривать совместный закон распределения случайной функции при t_1 и t_2 . Закон распределения совокупности значений случайной функции при произвольных $t_1, ..., t_n$ называют *n*мерным законом распределения. Зная его, можно получить закон меньшей размерности.

$$f_m(x_1, ..., x_m; t_1, ..., t_m) = \int_{-\infty}^{+\infty} ... \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x_1, ..., x_n; t_1, ..., t_n) dx_{m+1} ... dx_n .(2.1.1)$$

Если значения случайной функции X(t) при любых значениях аргумента $t_1, ..., t_n$ являются независимыми, то

$$f_n(x_1, \dots, x_m; t_1, \dots, t_m) = f_1(x_1, t_1) \cdot f_1(x_2, t_2) \cdot \dots \cdot f_1(x_n, t_n) . \quad (2.1.2)$$

T.e. исчерпывающей характеристикой случайной функции с независимыми значениями является ее одномерный закон распределения.

Примером случайных величин, исчерпывающей характеристикой которых является двумерный закон распределения, являются марковские случайные процессы. Марковским случайным процессом (или процессом без последействия) называется функция скалярной переменной X(t) (при $t_1 < t_2 < ... < t_h < ... < t_n$), если условный закон распределения случайной величины $X(t_h)$ зависит только от случайной величины $X(t_{h-1})$ и не зависит от случайных величин $X(t_1), ..., X(t_{h-2})$.

Рассмотренный случай определения случайных функций на практике не всегда удобен. В большинстве случаев ограничиваются заданием числовых параметров этих законов, подобно тому, как случайная величина может быть иногда с достаточной для практики точностью охарактеризована своими числовыми характеристиками. Отличие заключается лишь в том, что эти числовые характеристики представляют собой не числа, а функции. Из бесконечного числа моментов случайной функции наиболее важными являются моменты первого и второго порядков.
Момент первого порядка определяется выражением

$$m_x(t) = M[X(t)],$$
 (2.1.3)

где $m_x(t)$ – математическое ожидание случайной функции – есть неслучайная функция, значение которой при каждом значении аргумента равно математическому ожиданию сечения. Через одномерную плотность вероятности математическое ожидание выражается следующим образом:

$$m_x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_1(x, t) dx . \qquad (2.1.4)$$

Наиболее часто используются центральные моменты:

$$D[X(t)] = M[\{X(t) - m_x(t)\}^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} \{x(t) - m_x(t)\}^2 f_1(x, t) dx; \quad (2.1.5)$$

$$K(t_1, t_2) = M[\{X(t_1) - m_x(t_1)\} \cdot \{X(t_2) - m_x(t_2)\}] =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \{x(t_1) - m_x(t_1)\} \cdot \{x(t_2) - m_x(t_2)\} f_2(x_1, x_2, t_1, t_2) dx_1 dx_2, (2.1.6)$$

где $D[X(t)] = D_x(t)$ – дисперсия случайной функции; $K(t_1, t_2) = K_x(t_1, t_2)$ – корреляционная функция случайной функции X(t).

Из сравнения выражений (2.1.5) и (2.1.6) видно, что дисперсия является лишь «срезом» корреляционной функции при $t_1 = t_2 = t$. На рис. 2.2 показан качественный смысл введенных характеристик.



Рис. 2.2. Реализация случайной функции $D_x^{(1)} = D_x^{(2)}$; $m_x^{(1)} = m_x^{(2)}$: *a* – слабая корреляция; *б* – сильная корреляция

Из рис. 2.2 видно, что хотя математические ожидания и дисперсии двух случайных функций $X_1(t)$ и $X_2(t)$ совпадают, их характер совершенно различен. В первом случае зависимость между значениями случайной функции при различных аргументах гораздо слабее, чем во втором. Степень изменчивости функций характеризует корреляционная функция.

Если рассматриваются две случайные функции X(t) и Y(s), то вводится понятие взаимной корреляционной функции:

$$K_{xy} = M[\dot{X}(t) \cdot \dot{Y}(s)] = M[(X(t) - m_x) \cdot (Y(s) - m_y)]. \quad (2.1.7)$$

Часто удобно использовать нормированные корреляционные и взаимные корреляционные функции:

$$r(t,t') = \frac{K(t,t')}{\sqrt{K(t,t)K(t',t')}};$$
(2.1.8)

$$r_{xy}(t,s) = \frac{K_{xy}(t,s)}{\sqrt{K_x(t,t)K_y(s,s)}} .$$
(2.1.9)

Отметим, что понятие случайной функции обобщается и на комплексные случайные функции. При этом случайная функция представляется в виде: X(t) = U(t) + iV(t), где U(t) и V(t) – вещественные случайные функции, ординаты которых могут быть как независимыми, так и зависимыми случайными величинами. В дальнейшем комплексную случайную функцию будем обозначать следующим образом $\overline{X(t)}$. Отметим, что ниже в основном будут рассматриваться вещественные случайные случайные функции.

Классификация случайных функций

Стационарные и нестационарные случайные функции

Различают стационарные и нестационарные случайные функции. Для стационарной случайной функции ее свойства не зависят от выбора начала отсчета, т.е. многомерные законы распределения зависят только от взаимного расположения моментов времени, но не от самих значений:

$$f_n(x_1, ..., x_n; t_1, ..., t_n) = f_n(x_1, ..., x_n; t_1 + t_0, ..., t_n + t_0), \quad (2.1.10)$$

где t₀ – любое число.

В частном случае при n = 1, n = 2 и при $t_0 = -t_1$ получим:

$$f_{1'}(x,t_1) = f_{1'}(x,t_1-t_1) = f_1(x); \qquad (2.1.11)$$

$$f_{2'}(x_1,x_2,t_1,t_2) = f_{2'}(x_1,x_2,0,t_2-t_1) =$$

$$= f_{1'}(x,t_1-t_1) = f_{2'}(x_1,x_2,t_2-t_1). \qquad (2.1.12)$$

Из определения математического ожидания и приведенных формул (2.1.11) и (2.1.12) следует:

$$m_x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_1(x, t) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_1(x) dx = \text{const}; \qquad (2.1.13)$$

$$D_x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \{x(t) - m_x(t)\}^2 f_1(x, t) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^2 f_1(x) dx = \text{const}; (2.1.14)$$

$$K(t_1, t_2) = \int_{-\infty - \infty}^{+\infty + \infty} \int_{-\infty - \infty}^{+\infty + \infty} (x_1 - m_x) \cdot (x_2 - m_x) f_2(x_1, x_2, t_2 - t_1, t) dx_1 dx_2 = K(t_2 - t_1). \quad (2.1.15)$$

Таким образом, если случайная функция стационарна, то ее математическое ожидание и дисперсия постоянны, а корреляционная функция зависит только от разности аргументов. Но это условие является необходимым условием, так как для n > 2 условие (2.1.10) может нарушаться. Поэтому говорят, что при выполнении условий (2.1.14) – (2.1.15) случайная функция стационарна в широком смысле.

Нормальные и ненормальные случайные функции

Случайные функции различают также в зависимости от законов распределения ординат случайных функций. Если многомерные законы распределения являются нормальными, то такие случайные функции называются нормальными. Это класс случайных функций наиболее часто встречается. Остальные функции называются ненормальными. Если нормальная функция стационарна в широком смысле, то она стационарна и в узком смысле.

Свойства корреляционных функций.

1.
$$K(t_1, t_2) = K(t_2, t_1)$$
.
2. $|K(t_1, t_2)| \le \sqrt{K(t_1, t_1) \cdot K(t_2, t_2)}$.
3. $\int_{aa}^{bb} \eta(t_1)\eta(t_2)K(t_1, t_2)dt_1dt_2 \ge 0$, где $\eta(t)$ – произвольная неслу-

чайная функция; (*a*, *b*) – произвольный интервал интегрирования.

Если случайная функция стационарна, то эти свойства записываются следующим образом.

1. $K(\tau) = K(-\tau)$. 2. $K(0) = D \ge K(\tau)$. 3. $\iint_{0}^{bb} \eta(t_1)\eta(t_2)K(t_2 - t_1)dt_1dt_2 \ge 0$, где $\tau = t_2 - t_1$.

На рис. 2.3 показан вид корреляционной функции от двух аргументов.



Рис. 2.3. Пример корреляционной функции двух аргументов

Наиболее часто в качестве стационарных случайных функций рассматриваются следующие:

$$K(\tau) = \sigma^2 \exp(-\alpha |\tau|);$$

$$K(\tau) = \sigma^2 \exp(-\alpha \tau^2);$$

$$K(\tau) = \sigma^2 \exp(-\alpha |\tau|) \cos\beta\tau;$$

$$K(\tau) = \sigma^2 \exp(-\alpha\tau^2) \cos\beta\tau.$$

Непрерывность, дифференцируемость и интегрируемость случайных функций

Непрерывность. Случайная функция X(t) называется непрерывной в точке t, если при любом $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что при $|t'-t| < \delta$ выполняется неравенство $M[|X(t') - X(t)|^2] < \varepsilon$.

Можно доказать, что если X(t) – непрерывная функция, то $m_x(t)$ и K(t, t') – также непрерывные функции. Справедливо и обратное утверждение. Отметим, что непрерывная случайная функция может иметь разрывные реализации. Непрерывность случайной функции – более общий тип непрерывности, чем для неслучайной функции.

Дифференцируемость. Случайная функция X(t) дифференцируема, если существует такая случайная функция Y(t), что

$$\lim_{\Delta t \to 0} M \left[\left| \frac{X(t + \Delta t) - X(t)}{\Delta t} - Y(t) \right|^2 \right] = 0.$$

Случайная функция Y(t) называется производной случайной функции и обозначается $\frac{dX}{dt} = Y$ или X'(t).

Можно доказать, что если случайная функция дифференцируема, т.е. $Y = \frac{dX}{dt}$, то

$$m_y = \frac{dm_x}{dt}; \qquad (2.1.16)$$

$$K_{y} = \frac{\partial K_{x}(t, t')}{\partial t' \partial t}.$$
(2.1.17)

Верно и обратное утверждение.

Интегрируемость. Случайную функцию X(t) называют интегрируемой на области T с весом g(s,t), если существует такая случайная функция Y(s), что

$$\lim_{\max \Delta t_k \to 0} M\left[\left| \sum_k g(s, t_k) X(t_k) \Delta t_k - Y(t) \right|^2 \right] = 0$$

независимо от выбора точек t_k соответствующих участков Δt_k , на которые разбита область T.

Случайная функция *Y*(*s*) называется интегралом.

Можно доказать, что если X(t) – интегрируемая функция, то

$$m_{y}(s) = \int_{T} g(s, t)m_{x}(t)dt$$
; (2.1.18)

$$K_{y}(s,s') = \iint_{T} g(s,t) \overline{g(s,t)} K_{x}(t,t') dt dt'. \qquad (2.1.19)$$

Справедливо и обратное утверждение.

Из приведенных выше определений дифференцируемости и интегрируемости случайных функций следует, что эти операции можно менять местами с операцией нахождения математического ожидания.

2.2. Операции над случайными функциями и их статистическими характеристиками

Действие линейного оператора на случайную функцию

Пусть X(t) случайная функция с математическим ожиданием $m_x(t)$ и корреляционной функцией $K_x(t,t')$. Тогда, если на эту функцию действует линейный оператор \hat{L} , то числовые характеристики функции $Y = \hat{L}X$ есть:

$$M[Y(t)] = M\hat{L}_t X(t) = \hat{L}_t M[X(t)] = \hat{L}_t m_x(t); \qquad (2.2.1)$$

$$K_{y}(t,t') = \hat{L}_{t}\hat{L}_{t'}K_{x}(t,t'). \qquad (2.2.2)$$

Операторы \hat{L}_t и $\hat{L}_{t'}$ действуют, соответственно, на переменные t и t', а оператор математического ожидания M производит усреднение ординат случайной функции при фиксированных значениях t и t' по всему множеству возможных значений случайных вели-

чин X(t) и X(t') соответственно, поэтому порядок этих операций можно менять местами.

Белый шум. Белым шумом называется случайная функция со следующими свойствами:

$$m_x(t) \equiv 0;$$
 $K_x(t,t') = G(t)\delta(t-t'),$

где $\delta(t - t')$ – дельта-функция Дирака; G(t) – интенсивность белого шума.

Если функция X(t) представляет собой белый шум, то для функции $Y(s) = \int_{T} g(s, t)X(t)dt$ ее корреляционная функция имеет вид

$$K_{y}(s,s') = \int_{0}^{T} \overline{g(s',t)}g(s,t)G(t)dt.$$
 (2.2.3)

Физический смысл понятия «белый шум» будет показан в разделе, посвященным стационарным случайным функциям.

Каноническое разложение случайной функции

Каноническим разложением случайной функции называется функция вида

$$X(t) = m_x(t) + \sum_{i=1}^{m} V_i \cdot \varphi_i(t), \qquad (2.2.4)$$

где $\varphi_i(t)$ – неслучайные функции; V_i – случайные некоррелированные между собой величины с нулевыми математическими ожиданиями, т.е. $M[V_i] = 0$ и $M[V_iV_j] = 0$ при $i \neq j$.

Иногда используют так называемое интегральное каноническое представление случайной функции:

$$X(t) = m_x(t) + \int_{\lambda} V(\lambda) \cdot \varphi(t, \lambda) d\lambda, \qquad (2.2.5)$$

где $V(\lambda)$ – белый шум параметра λ ; $\varphi(t, \lambda)$ – неслучайная функция.

Идея метода состоит в том, что применение линейного оператора к случайной функции сводится к его действию на известную неслучайную функцию. Это обстоятельство существенно упрощает нахождение статистических характеристик линейных систем. Действительно, пусть требуется найти математическое ожидание и корреляционную функцию результата действия оператора \hat{L} на функцию X(t):

$$Y = \hat{L}X(t) = \hat{L}\{m_x(t) + \sum_{i=1}^m V_i \cdot \varphi_i(t)\} =$$

= $\hat{L}m_x(t) + \sum_{i=1}^m V_i \cdot \hat{L}\varphi_i(t) = m_y(t) + \sum_{i=1}^m V_i \cdot \psi_i(t);$ (2.2.6)

$$m_y(t) = \hat{L}m_x(t);$$
 (2.2.7)

$$K_{y}(t,t') = M\left[\left(\sum_{i=1}^{m} V_{i} \cdot \psi_{i}(t)\right)\left(\sum_{j=1}^{m} V_{j} \cdot \psi_{j}(t')\right)\right] =$$
$$= \sum_{i=1}^{m} D_{i} \cdot \psi_{i}(t')\psi_{i}(t).$$
(2.2.8)

Если в выражении (2.2.7) положить t = t', получим простое выражение для дисперсии функции:

$$D_{y}(t) = \sum_{i=1}^{m} D_{i} \cdot \psi_{i}^{2}(t) . \qquad (2.2.9)$$

В дальнейшем будем рассматривать центрированную случайную функцию $\dot{X}(t) = X(t) - m_x(t)$.

Способ получения приближенного канонического разложения случайной функции

На практике часто удается приближенно представить случайную функцию в виде линейной комбинации известных функций со случайными коэффициентами:

$$X(t) = \sum_{i=1}^{m} A_i \varphi_i(t), \qquad (2.2.10)$$

где $\varphi_i(t)$ – не случайные функции; A_i — случайные коэффициенты, причем в общем случае коррелированные. Требуется привести случайную функцию X(t) к каноническому виду.

Математическое ожидание случайной функции X(t) есть

$$m_X(t) = \sum_{i=1}^m m_{A_i} \varphi_i(t) \, .$$

Перейдем от случайных величин A_i к таким случайным величинам V_i , чтобы

$$M\left[V_i V_j\right] = 0 \quad \text{при} \quad i \neq j \quad \text{и} \quad M\left[V_i\right] = 0$$

Сделать это можно, например, следующим образом. Положим

$$\begin{cases}
A_{1} - m_{A_{1}} = V_{1}; \\
A_{2} - m_{A_{2}} = a_{21}V_{1} + V; \\
A_{3} - m_{A_{3}} = a_{31}V_{1} + a_{32}V_{2} + V_{3}; \\
...; \\
A_{m} - m_{A_{m}} = a_{m1}V_{1} + a_{m2}V_{2} + ... + a_{m,m-1}V_{m-1} + V_{m}.
\end{cases}$$
(2.2.11)

Определим введенные нами коэффициенты a_{ij} так, чтобы $M[V_i V_j] = 0$ при $i \neq j$. Очевидно, что $D[A_1] = D[V_1]$.

Умножим почленно второе уравнение системы (2.2.11) на первое и возъмем математическое ожидание:

$$M\Big[\Big(A_2 - m_{A_2}\Big)\Big(A_1 - m_{A_1}\Big)\Big] = M\Big[\Big(a_{21}V_1 + V_2\Big)V_1\Big];$$

$$K_{21} = a_{21}D[V_1] + M[V_2V_1].$$

Полагая $M[V_1V_2] = 0$, получим

$$a_{21} = \frac{K_{21}}{D[V_1]} = \frac{K_{21}}{D[A_1]}.$$

Определим теперь дисперсию (второе уравнение)

$$D[A_{2} - M_{A_{2}}] = D[a_{21}V_{1} + V_{2}];$$

$$K_{22} = |a_{21}|^{2} D[V_{1}] + D[V_{2}],$$

и отсюда определим $D[V_2]$.

Далее умножаем почленно третье уравнение системы (2.2.11) на первое и второе, выполняем операцию математического ожидания и определяем a_{31} и a_{32} , исходя из условия, чтобы $M[V_1V_3] = 0$ и $M[V_2V_3] = 0$, и т.д.

В результате получаем выражения для $A_1, ..., A_m$ в виде линейных комбинаций некоррелированных случайных величин $V_1, ..., V_m$:

$$A_1 = m_{A_1} + V_1; \quad \dots; \quad A_m = m_{A_m} + \sum_{i=1}^{m-1} a_{mi}V_i + V_m.$$
 (2.2.12)

Подставим эти значения в исходное выражение (2.2.10), и после перегруппировки получим:

$$X \cong m_X(t) + \sum_{i=1}^m V_i \psi_i(t)$$
, (2.2.13)

где $\psi_i(t) = \varphi_i(t) + \sum_{k=i+1}^m a_{ki} \varphi_k(t), \quad i = 1, ..., k-1.$

Таким образом, получено приближенное представление исходной функции как функции канонического разложения. При этом использовалась информация о статистических свойствах функции в форме ковариационных моментов амплитуд исходного представления. Новые неслучайные функции разложения $\psi_i(t)$, которые носят название координатных функций, являются линейными комбинациями исходного набора $\{\phi_i(t)\}$.

2.3. Спектральное разложение стационарных случайных функций

Характеристики стационарной случайной функции

Рассмотрим случайную функцию X(t) – стационарную в широком смысле. По определению стационарности в широком смысле X(t) имеет постоянное математическое ожидание и корреляционную функцию, зависящую только от разности аргументов t и t', т.е. $K(t,t') = K(\tau)$, где $\tau = t - t'$.

В этом случае дисперсия стационарной случайной функции

$$D[X(t)] = K(t,t) = K(0).$$

Нормированная корреляционная функция стационарной случайной функции есть

$$r(\tau) = \frac{K(\tau)}{K(0)}.$$
(2.3.1)

На основании свойства симметрии корреляционной функции можно записать:

$$K(t'-t) = \overline{K(t-t')}$$

ИЛИ

$$K(-\tau)=\overline{K(\tau)}.$$

Для действительной случайной функции $K(-\tau) = K(\tau)$.

Второе свойство корреляционной функции:

$$\left|K(t,t')\right| \le \sqrt{K(t',t)K(t,t')}$$

записывается в виде

 $|K(\tau)| \leq K(0)$.

Наконец, корреляционная функция для производной от стационарной случайной функции Y = dX/dt

$$K_Y(t,t') = \frac{\partial^2 K(t,t')}{\partial t \, \partial t'} = \frac{\partial^2 K(\tau)}{\partial t \, \partial t'} = \frac{\partial^2 K(\tau)}{\partial \tau^2} \frac{\partial \tau}{\partial t} \frac{\partial \tau}{\partial t'} = \frac{\partial^2 K(\tau)}{\partial \tau^2}$$
$$m_X = \text{const}, \quad m_Y = 0 = \text{const}.$$

Таким образом, производная случайной функции Y = dX/dt является также стационарной случайной функцией.

Пример 2.1. Случайная функция *X*(*t*) задана каноническим разложением:

$$X(t) = t + V_1 \cos \omega t + V_2 \sin \omega t ,$$

где $M[V_1V_2] = 0$, $M[V_1] = M[V_2] = 0$, $D_1 = D_2 = 2$.

Определить, является ли стационарной случайная функция X(t).

Решение:

$$m_x(t) = t;$$

$$K(t, t') = 2(\cos \omega t \cos \omega t' + \sin \omega t \sin \omega t') = 2\cos \omega (t - t').$$

Так как $m_x(t) \neq \text{const}$, то функция X(t) является нестационарной, однако ее легко можно привести к стационарной путем центрирования $\overset{\circ}{X} = X(t) - t$. Эта функция уже будет стационарной.

Спектральное разложение случайной функции

Спектральным разложением случайной функции интервале от 0 до *T* называется ее представление в виде

$$X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(W_k \cos \omega_k t + V_k \sin \omega_k t \right), \qquad (2.3.2)$$

где $\omega_k = \frac{k\pi}{T}$, W_k и V_k – некоррелированные случайные величины с одинаковыми дисперсиями $D[W_k] = D[V_k] = D_k$.

Легко показать, что корреляционная функция при этом имеет вид:

$$K(t,t') = \sum_{k=0}^{\infty} \left(D_k \cos \omega_k t' \cos \omega_k t + D_k \sin \omega_k t' \sin \omega_k t \right) = \sum_{k=0}^{\infty} D_k \cos \omega_k \tau \,,$$

где коэффициенты *D_k* задаются формулами:

$$D_0 = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} K(\tau) d\tau;$$
$$D_k = \frac{1}{T} \int_{-T}^{T} K(\tau) \cos \omega_k \tau d\tau \quad \text{при} \quad k \neq 0.$$

Дисперсия случайной функции имеет вид:

$$D[X(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\cos^2 \omega_k t + \sin^2 \omega_k t\right) D_k = \sum_{k=0}^{\infty} D_k$$

Этот же результат можно получить проще, положив в спектральном разложении корреляционной функции $\tau = 0$.

Таким образом, дисперсия случайной функции равна сумме дисперсий всех гармоник ее канонического разложения.

На бесконечном участке времени спектральное разложение случайной функции проводится через интеграл Фурье. При этом четную корреляционную функцию с помощью интеграла Фурье записывают следующим образом:

$$K(\tau) = \int_{0}^{\infty} S(\omega) \cos \omega \tau d\omega, \qquad (2.3.3)$$

где $S(\omega)$ называется спектральной плотностью стационарной случайной функции. При $\tau = 0$ получим:

$$K(0) = D = \int_{0}^{\infty} S(\omega) d\omega. \qquad (2.3.4)$$

Таким образом, спектральная плотность есть не что иное, как разложение дисперсии на сумму элементарных слагаемых $S(\omega)d\omega$, т.е. спектральная плотность есть разложение дисперсии по частотам. При известной корреляционной функции спектральная плотность получается из соотношения

$$S(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\infty} K(\tau) \cos \omega \tau d\tau. \qquad (2.3.5)$$

На практике вместо спектральной плотности часто пользуются нормированной спектральной плотностью

$$s(\omega) = \frac{S(\omega)}{D}.$$
 (2.3.6)

Нетрудно видеть, что нормированная корреляционная функция и нормированная случайная плотность связаны соотношениями:

$$\rho(\tau) = \int_{0}^{\infty} s(\omega) \cos \omega \tau \, d\omega \,; \qquad (2.3.7)$$

$$s(\tau) = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\infty} \rho(\tau) \cos \omega \tau \, d\tau \,. \tag{2.3.8}$$

Комплексная форма спектрального разложения на конечном интервале имеет вид:

$$\overset{\circ}{X}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} U_k \exp(i\omega_k t); \qquad (2.3.9)$$

$$K(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} D_k^* \exp(i\omega_k \tau) ; \qquad (2.3.10)$$

$$D_k^* = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} K(\tau) \exp(-i\omega_k \tau) d\tau.$$
 (2.3.11)

На бесконечном интервале спектральное разложение в комплексной форме имеет вид:

$$\overset{\circ}{X}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} V(\omega) \exp(i\omega t) d\omega, \qquad (2.3.12)$$

где $V(\omega)$ – белый шум переменной ω , интенсивность которого равна спектральной плотности $S^*(\omega)$:

$$S^*(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} K(\tau) \exp(-i\omega_k \tau) d\tau. \qquad (2.3.13)$$

При этом корреляционная функция выражается через спектральную плотность следующим образом:

$$K(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S^*(\omega) \exp(i\omega_k \tau) d\omega. \qquad (2.3.14)$$

Свойства спектральной плотности.

1. $S(\omega) ≥ 0$ при любом ω .

2. $\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega < \infty$. При росте $|\omega| \quad S(\omega) \to 0$.

3. Для вещественных случайных процессов $S(\omega) = S(-\omega)$, т.е спектральная функция – четная функция.

Использование спектрального разложения является эффективным подходом при исследовании стационарных случайных процессов.

Примеры вычисления спектральной плотности стационарного случайного процесса.

Пример 2.2. Найти спектральную плотность стационарного процесса, имеющего нормированную корреляционную функцию (рис. 2.4) вида

$$r(\tau) = \exp(-\alpha |\tau|).$$

Решение:

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} K_X(\tau) \exp(-i\omega\tau) d\tau = \frac{\sigma^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\omega\tau - \alpha|\tau|) d\tau =$$
$$= \frac{\sigma^2}{2\pi} \left\{ \int_{-\infty}^{0} \exp(\alpha\tau - i\omega\tau) d\tau + \int_{0}^{+\infty} \exp(-i\omega\tau - \alpha\tau) d\tau \right\} =$$
$$= \frac{\sigma^2}{2\pi} \left\{ \int_{-\infty}^{0} \exp((\alpha - i\omega)\tau) d\tau + \int_{0}^{+\infty} \exp(-(i\omega + \alpha)\tau) d\tau \right\} =$$
$$= \frac{\sigma^2}{2\pi} \left\{ \frac{1}{\alpha - i\omega} \left[\exp((\alpha - i\omega)\tau) \right]_{-\infty}^{0} + \left(-\frac{1}{\alpha + i\omega} \right) \left[\exp(-(\alpha + i\omega)\tau) \right]_{0}^{+\infty} \right\} =$$
$$= \frac{\sigma^2}{2\pi} \left\{ \frac{1}{\alpha - i\omega} \left[\exp((\alpha - i\omega)\tau) \right]_{-\infty}^{0} + \left(-\frac{1}{\alpha + i\omega} \right) \left[\exp(-(\alpha + i\omega)\tau) \right]_{0}^{+\infty} \right\} =$$
$$= \frac{\sigma^2}{2\pi} \left\{ \frac{1}{\alpha - i\omega} \left[\exp((\alpha - i\omega)\tau) \right]_{-\infty}^{0} + \left(-\frac{1}{\alpha + i\omega} \right) \left[\exp(-(\alpha + i\omega)\tau) \right]_{0}^{+\infty} \right\} =$$

При увеличении α корреляционная функция спадает быстрее, характер колебаний случайной функции становится резким и более беспорядочным.

При увеличении α функция спектральной плотности $S(\omega)$ становится более пологой, т.е. все больший вклад дают большие частоты (рис. 2.5).

При $\alpha \rightarrow \infty$ – белый шум.



Рис. 2.4. Нормированная корреляционная функция



Рис. 2.5. Нормированная спектральная плотность

Пример 2.3. Найти нормированную спектральную плотность случайной функции X(t), если ее нормированная корреляционная функция имеет вид

$$r(\tau) = \exp(-\alpha |\tau|) \cos \beta \tau$$

Решение. Представим $r(\tau)$ в комплексной форме:

$$r(\tau) = \exp(-\alpha|\tau|) \frac{\exp(i\beta t) + \exp(-i\beta t)}{2};$$

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} r(\tau) \exp(-i\omega\tau) d\tau =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-i\omega\tau) \exp(-\alpha|\tau|) \frac{\exp(i\beta t) + \exp(-i\beta t)}{2} d\tau =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \left\{ \int_{-\infty}^{0} \exp(-i\omega\tau) \exp(\alpha\tau) (\exp(i\beta t) + \exp(-i\beta t)) d\tau + \right\}$$

$$+ \int_{-0}^{+\infty} \exp(-i\omega\tau) \exp(-\alpha\tau) (\exp(i\beta t) + \exp(-i\beta t)) d\tau \right\} =$$

$$= \dots = \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{\alpha}{\alpha^{2} + (\beta + \omega)^{2}} + \frac{\alpha}{\alpha^{2} + (\omega - \beta)^{2}} \right\}.$$
 (2.3.16)

Вид графика спектральной плотности зависит от соотношения параметров α и β , т.е. от того, что преобладает в корреляционной функции – убывание по закону $\exp(-\alpha |\tau|)$ или колебания по закону $\exp(\cos\beta\tau)$ (рис. 2.6).

Очевидно, что при малых α преобладает колебание, при сравнительно больших α – убывание (рис. 2.7). В первом случае случайная функция близка к периодическим колебаниям частоты β со случайной амплитудой и фазой. Соответственно в спектре случайной функции преобладают частоты, близкие к β . Во втором случае спектральный состав случайной функции более равномерен, преобладания тех или иных частот не наблюдается. В пределе при $\alpha \to \infty\,$ спектр случайной функции приближается к «белому» спектру.



Рис. 2.6. Нормированная корреляционная функция



Рис. 2.7. Нормированная спектральная плотность 126

Пример 2.4. Найти корреляционную функцию стационарной случайной функции, спектральная плотность которой постоянна:

$$s(\omega) = s_0$$

Решение:

$$\rho(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s_X(\omega) \exp(i\omega\tau) d\omega = s_0 \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\omega\tau) d\omega = 2\pi s_0 \delta(\tau) .$$

Таким образом, стационарная случайная функция с постоянной спектральной функцией представляет собой белый шум. Физически это означает, что дисперсия белого шума равномерно распределена по частотам.

Пример 2.5. Спектральная плотность (рис. 2.8) стационарной случайной функции X(t) на участке от $-\omega_1$ до $+\omega_1$ постоянна, а вне его равна нулю:

$$S(\omega) = \begin{cases} a & \operatorname{прu} |\omega| < \omega_1; \\ 0 & \operatorname{пpu} |\omega| > \omega_1. \end{cases}$$
(2.3.17)

Найти корреляционную функцию.



Рис. 2.8 Спектральная плотность

Решение:

$$K(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \exp(i\omega\tau) d\omega = 2a \int_{0}^{\omega_{1}} \cos(\omega\tau) d\omega = \frac{2a \sin(\omega_{1}\tau)}{\tau}; (2.3.18)$$
$$D = K(0) = 2a\omega_{1}.$$

2.4. Стационарные случайные процессы в динамических системах

Задача ставится следующим образом: требуется исследовать точность работы системы, описываемой дифференциальным уравнением

$$a_{n}\frac{d^{n}Y}{dt^{n}} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}Y}{dt^{n-1}} + \dots + a_{0}Y =$$

= $b_{m}\frac{d^{m}X}{dt^{mn}} + b_{m-1}\frac{d^{m-1}X}{dt^{m-1}} + \dots + b_{0}X(t)$, (2.4.1)

где на вход системы подается стационарная случайная функция X(t) (рис. 2.9) с известными свойствами (спектральным составом).



Рис. 2.9. Преобразование случайной функции линейной системой

Напомним некоторые понятия из теории автоматического регулирования.

Решение или общий интеграл уравнения

$$\left(a_n\frac{d^n}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \dots + a_0\right)Y = \left(b_m\frac{d^m}{dt^{m-1}} + b_{m-1}\frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} + \dots + b_0\right)X(t),$$

если *X* – неслучайная величина, состоит из двух частей – из общего интеграла однородного уравнения

$$a_n \frac{d^n Y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} Y}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 Y = 0$$

удовлетворяющего соответствующим начальным условиям, и частного решения неоднородного уравнения (т.е. такой функции, которая при подстановке в левую часть дает тождество).

Решение однородного уравнения ищем в виде:

$$Y(t) = \exp(\lambda t)$$

При подстановке этого выражения в однородное уравнение получим:

$$\left(a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0\right)\exp(\lambda \cdot t) = 0,$$

т.е. выражение $Y(t) = \exp(\lambda t)$ есть решение уравнения, если λ является корнем уравнения

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_0 = 0$$
.

Это уравнение имеет *n* корней: $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$. Если $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ различны, то

$$Y(t) = C_1 \exp(\lambda_1 t) + \dots + C_n \exp(\lambda_n t),$$

где $C_1, C_2, ..., C_n$ определяются из начальных условий, при $\text{Re}\lambda_i < 0$

$$\lim_{t\to\infty}Y(t)=0\,,$$

т.е. свободные колебания системы затухают с течением времени.

Найдем теперь частное решение уравнения для случая, когда воздействие на входе системы представляет собой гармоническую функцию времени, например, следующего вида:

$$X(t) = f_0 \cos \omega t \; .$$

X(t) можно представить в комплексной форме:

$$X(t) = \frac{f_0}{2} \exp(i\omega t) + \frac{f_0}{2} \exp(-i\omega t) \,.$$

Найдем эффект, создаваемый каждым из слагаемых. Начнем со слагаемого $X_1 = \frac{f_0}{2} \exp(i\omega t)$. Будем искать решение уравнения в виде

$$Y_1 = \frac{f_0}{2} Y(i\omega) \exp(i\omega t)$$
.

Подставляя это выражение в левую и правую часть исходного уравнения, получим:

$$\frac{f_0}{2} \left(a_n (i\omega)^n + a_{n-1} (i\omega)^{n-1} + \dots + a_0 \right) Y(i\omega) \exp(i\omega t) =$$

$$=\frac{f_0}{2}\left(b_m(i\omega)^m+b_{m-1}(i\omega)^{m-1}+\ldots+b_0\right)\exp(i\omega t),$$

откуда

$$Y(i\omega) = \frac{b_m(i\omega)^m + b_{m-1}(i\omega)^{m-1} + ... + b_0}{a_n(i\omega)^n + a_{n-1}(i\omega)^{n-1} + ... + a_0}.$$

Функция $Y(i\omega)$ называется передаточной функцией динамической системы. Отделяя в числителе и знаменателе действительную и мнимую части:

$$Y(i\omega) = \frac{a(\omega) + ib(\omega)}{c(\omega) + id(\omega)},$$

где

$$\begin{aligned} a(\omega) &= b_0 - b_2 \omega^2 + b_4 \omega^4 - \dots; \\ b(\omega) &= b_1 \omega - b_3 \omega^3 + b_5 \omega^5 - \dots; \\ c(\omega) &= a_0 - a_2 \omega^2 + a_4 \omega^4 - \dots; \\ d(\omega) &= a_1 \omega - a_3 \omega^3 + a_5 \omega^5 - \dots \end{aligned}$$

ИЛИ

$$Y(i\omega) = P(\omega) + iQ(\omega) = A(\omega)\exp(i\varphi(\omega)),$$

где

$$P(\omega) = \frac{a(\omega)c(\omega) + b(\omega)d(\omega)}{c^{2}(\omega) + d^{2}(\omega)};$$
$$Q(\omega) = \frac{b(\omega)c(\omega) - a(\omega)d(\omega)}{c^{2}(\omega) + d^{2}(\omega)};$$
$$A = +\sqrt{\frac{a^{2}(\omega) + b^{2}(\omega)}{c^{2}(\omega) + d^{2}(\omega)}};$$
$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{b(\omega)c(\omega) - a(\omega)d(\omega)}{a(\omega)c(\omega) + b(\omega)d(\omega)}.$$

Подставляя явный вид Y(iw), получим

$$Y_1 = \frac{f_0}{2} A(\omega) \exp(i [\omega t + \varphi(\omega)]).$$

Аналогичным образом для входного воздействия $X_2 = = \frac{f_0}{2} \exp(-i\omega t)$ найдем

$$Y_2 = \frac{f_0}{2} A(\omega) \exp\left(-i\left[\omega t + \varphi(\omega)\right]\right).$$

Складывая Y_1 и Y_2 , получим следующий результат:

$$Y = Y_1 + Y_2 = \frac{f_0}{2} A(\omega) \left[\exp(i\omega t) \exp(i\varphi(\omega)) + \exp(-i\omega t) \exp(-i\varphi(\omega)) \right] =$$
$$= \frac{f_0}{2} A(\omega) \cos\left[\omega t + \varphi(\omega)\right].$$

Это выражение показывает, что вынужденные колебания, вызываемые в линейной динамической системе гармоническим воздействием, являются также гармонической функцией времени, отличающейся от входного воздействия лишь амплитудой и фазой (но с той же частотой).

Функция $A(\omega)$ называется амплитудной частотной характеристикой, $\varphi(\omega)$ – фазовой частотной характеристикой. $P(\omega)$ – вещественная частотная характеристика, $Q(\omega)$ – мнимая частотная характеристика.

Перейдем теперь к случаю, когда X(t) – случайная функция на интервале $(0 \div T)$, т.е.

$$\overset{\circ}{X}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} W_k \exp(i\omega_k t) \,.$$

Рассмотрим отдельное слагаемое этой суммы

 $X_k(t) = W_k \exp(i\omega_k t)$.

Реакция системы на это воздействие будет

$$Y_k(t) = W_k Y(i\omega_k) \exp(i\omega_k t)$$
.

Так как рассматриваем линейную систему, то согласно принципу суперпозиции реакция системы на сумму воздействий равна сумме реакций на каждое воздействие, т.е.

$$\stackrel{\circ}{Y}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} W_k Y(i\omega_k) \exp(i\omega_k t) .$$

Или, обозначая $W_k Y(i\omega_k) = U_k$, получим:

$$\stackrel{\circ}{Y}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} U_k \exp(i\omega_k t) ,$$

где U_k – некоррелированные случайные величины с математическими ожиданиями, равными нулю.

Определим спектр этого разложения. Для этого найдем $D[U_k]$:

$$D[U_k] = M[U_k\overline{U_k}] = M[|W_kY(i\omega_k)|^2] = M[|W_k|^2|Y(i\omega_k)|^2] =$$
$$= |Y(i\omega_k)|^2 M[|W_k|^2] = |Y(i\omega_k)|^2 D_k.$$

Таким образом, при преобразовании стационарной случайной функции X(t), заданной на интервале от 0 до T линейной системой, каждая из ординат ее спектра умножается на квадрат модуля передаточной функции системы при данной частоте. Таким образом, при прохождении стационарной случайной функции через линейную стационарную систему ее частотный состав изменяется: некоторые частоты могут усиливаться, а некоторые – ослабляться (фильтроваться).

2.5. Примеры применения теории случайных функций в физике реакторов

2.5.1. Результаты статистической обработки реальных данных энергоблока с реактором РБМК (закон распределения, корреляционная функция плотности потока нейтронов)

С целью обеспечения данными системы мониторинга параметров безопасности энергоблоков с реакторами РБМК-1000 в Кризисном центре концерна «Росэнергоатом» и в Локальном кризис-

ном центре Курской АЭС внедрено математическое обеспечение системы подготовки и передачи данных о состоянии реакторных установок.

Созданное программное обеспечение позволяет, помимо решения своих «штатных» задач, решать и задачи научного, перспективного характера, поскольку предоставляет исследователю детальную информацию о поведении в пространстве и времени важнейших параметров ядерного реактора. Поскольку решение задач идентификации часто требует знание законов распределения и моментных функций исследуемых параметров, то представляет интерес получения этих данных в реальном режиме эксплуатации реактора.

Приведенные ниже результаты получены при статистической обработке суточного файла состояния первого энергоблока Курской АЭС. Информация о параметрах снималась с периодичностью 2 – 3 мин. Целью статистической обработки было получение законов распределения, временных и пространственно-временных корреляционных функций [7].

Законы распределения поканальной мощности и расхода теплоносителя

На рис. 2.10 и 2.11 в качестве примера показаны гистограммы распределения мощности для каналов в центре активной зоны и на краю соответственно.

Как видно из рис. 2.10 и 2.11, закон распределения мощностей различен. Анализ результатов обработки данных для всех каналов активной зоны выявил следующие закономерности.

Закон распределения поканальной мощности наиболее близок к нормальному в средней части активной зоны.

На нормальность закона распределения мощности в канале влияют расположенные рядом поглотители: закон распределения мощности близок к нормальному только в каналах, рядом с которыми расположены дополнительные поглотители (датчики, регулирующие стержни).

На краях активной зоны практически нет каналов с нормальным законом распределения мощности.

Анализ гистограмм распределения поканальных расходов показал, что в целом распределение поканального расхода теплоносителя во времени нельзя считать нормальным (гипотеза о нормальности закона распределения проверялась во всех случаях по критерию Пирсона при уровне значимости 0.05). Это характерно как для каналов, расположенных в центре активной зоны, так и для каналов, расположенных по краям. Однако так же, как и для поканальной мощности, существуют каналы, в которых закон распределения расхода теплоносителя близок к нормальному. Установлены следующие факты.



Рис. 2.10. Гистограмма распределения мощности в канале в центре активной зоны



Рис. 2.11. Гистограмма распределения мощности в канале на периферии активной зоны

На нормальность закона распределения расхода теплоносителя в канале влияют расположенные рядом поглотители: закон распределения расхода теплоносителя близок к нормальному только в каналах, рядом с которыми расположены поглотители (датчики, регулирующие стержни).

Закон распределения расхода теплоносителя в канале существенно не зависит от закона распределения мощности.

Распределение поканального расхода теплоносителя с большей степенью вероятности можно считать нормальным, нежели закон распределения поканальной мощности.

На погрешность определения закона распределения поканальной мощности и поканального расхода теплоносителя наибольшее влияние оказывают погрешности определения статистической оценки математического ожидания и дисперсии при выравнивании

статистических рядов. Были рассчитаны погрешности определения статистической оценки математического ожидания и дисперсии, которые как для поканальной мощности, так и для поканального расхода составили 4 %.

Определение временных автокорреляционных функций поканальной мощности и расхода

На рис. 2.12 и 2.13 показаны нормированные автокорреляционные функции поканальной мощности реактора и расхода через канал соответственно.





Рис. 2.13. Нормированная корреляционная функция расхода теплоносителя через канал

На рис. 2.12 присутствует ярко выраженный пик, соответствующий времени порядка 10 ч и, по-видимому, отражает факт обратной связи по ксенону.

Представленная на рис. 2.13 временная автокорреляционная функция расхода теплоносителя не имеет каких-либо ярко выраженных пиков при данной скважности измерений (примерно 2 мин). Погрешность при определении автокорреляционной функции поканальной мощности и поканального расхода составила 8 %.

Определение пространственных корреляционных функций и областей сильной и слабой коррелированности в активной зоне

Пространственная автокорреляционная функция поканальной мощности реактора для каналов с законом распределения мощности близким к нормальному закону показана на рис. 2.14 и 2.15.



Рис. 2.14. Автокорреляционная функция мощности для канала в центре активной зоны

Рис. 2.15. Автокорреляционная функция мощности для канала на периферии активной зоны

Из анализа полученных в результате эксперимента графиков автокорреляционных функций, а также графика распределения дисперсии мощности по активной зоне, можно сделать вывод, что области коррелированности в активной зоне реактора качественно совпадают с областями перекоса поля нейтронов.

На рис. 2.16 показана пространственная автокорреляционная функция поканального расхода теплоносителя для каналов с законом распределения мощности, близким к нормальному закону.

На основе полученных в результате эксперимента данных можно сделать вывод, что области коррелированности для поканального расхода теплоносителя качественно совпадают с областями коррелированности для поканальной мощности, но степень коррелированности на порядок меньше.

Погрешности при определении автокорреляционной функции поканальной мощности и поканального расхода составили 9 %.



Автокорреляционная функция расхода для канала;36

Рис. 2.16. Автокорреляционная функция расхода для канала в центре активной зоны

2.5.2. Экспериментальное определение естественных функций реактора и их связь с собственными функциями

Опишем методику построения приближенного канонического разложения случайной функции плотности потока нейтронов в реакторе [3, 4, 5, 10]. Пусть в моменты времени $t_1, ..., t_j, ..., t_M$ в N точках по объему активной зоны с координатами $\vec{r}_1, ..., \vec{r}_N$ известны показания внутриреакторных датчиков $C_1(t), ..., C_N(t)$. Тогда в каждый момент времени по показаниям датчиков можно восстановить очередную реализацию плотности потока нейтронов, пользу-

ясь, например, методом наименьших квадратов. При этом, задавшись некоторым набором координатных функций $\Psi_i(\vec{r})$ (например, для высотного распределения принято использовать гармонические функции $\Psi_i(z) = \sin \frac{i\pi}{H} z$), будем искать оценку функции $\varphi(\vec{r}, t)$ в следующем виде:

$$\hat{\varphi}(\vec{r},t) = \sum_{i=1}^{n} A_i(t) \cdot \Psi_i(\vec{r}) = \vec{A}^T(t) \vec{\Psi}(\vec{r}).$$
(2.5.1)

Сведем полученные коэффициенты аппроксимации в следующую таблицу:

Момент времени	Значения амплитуд		
t	$A_1,, A_n$		
t_1	$A_1(t_1)$		$A_n(t_1)$
t_j	$A_1(t_j)$		$A_n(t_i)$
t_M	$A_1(t_M)$		$A_n(t_M)$
Среднее по времени	$\overline{A}_{1} = \frac{\sum_{j=1}^{M} A_{1}(t_{j})}{M}$	•••	$\overline{A}_n = \frac{\sum_{j=1}^M A_n(t_j)}{M}$

Если теперь обработать данные таблицы на предмет определения корреляционных моментов между амплитудами, т.е. расчета величин

$$\hat{K}_{ij} = \frac{\sum_{p=1}^{M} \left(A_i \left(t_p \right) - \overline{A}_i \right) \left(A_j \left(t_p \right) - \overline{A}_j \right)}{M},$$

то оказывается, что корреляционная матрица амплитуд

$$K = \begin{pmatrix} K_{11} & \cdots & K_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ K_{n1} & \cdots & K_{nn} \end{pmatrix}$$

может существенно отличаться от диагональной. Иными словами, коэффициенты при выбранных координатных функциях оказыва-

ются коррелированными. Интуитивно понятно, что этот факт означает неудачный выбор системы координатных функций. Если проводить аналогию с разложением функции в обычном математическом анализе, то это говорило бы о том, что выбранная система функций не является линейно независимой. Рассуждая с информационных позиций, можно представить себе, что информация о величине, например, первой гармоники, содержится не только в амплитуде первой гармоники, но и в остальных амплитудах. В теории случайных функций известна процедура перехода от вектора \vec{A} с коррелированными составляющими к вектору $\vec{\tilde{A}}$ с некоррелированными составляющими [11]. Названная процедура аналогична процедуре ортогонализации Грама – Шмидта, в ней исходный вектор \vec{A} представляется в виде:

$$\vec{A} = \vec{m}_A + \Lambda \cdot \vec{\tilde{A}} , \qquad (2.5.2)$$

а элементы треугольной матрицы перехода А как раз и находятся из условия некоррелированности его координат. Если составить систему уравнений следующего вида:

$$K\left(\tilde{A}_{i}, \tilde{A}_{j}\right) = 0, \quad i, j = \overline{1, n}, \quad i < j, \qquad (2.5.3)$$

то, решив ее, можно получить рекуррентные выражения для вычисления элементов матрицы Λ :

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{21} & 1 & 0 & & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 1 & 0 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn-1} & 1 \end{bmatrix},$$
(2.5.4)

$$\begin{cases} a_{i1} = \frac{K(A_{1}, A_{i})}{D_{A_{1}}}, \ i = \overline{2, n}; \\ D_{\tilde{A}_{j}} = D_{A_{j}} - \sum_{k=1}^{j-1} a_{jk}^{2} \cdot D_{A_{k}}, \ j = \overline{1, n}; \\ a_{ij} = \frac{1}{D_{\tilde{A}_{j}}} \cdot \left[K(A_{i}, A_{j}) - \sum_{k=1}^{j-1} a_{ik} \cdot a_{jk} \cdot D_{\tilde{A}_{k}} \right], \ i = \overline{3, n}, \ j = \overline{2, i-1}. \end{cases}$$

$$(2.5.5)$$

Из приведенных соотношений видно, что матрица перехода Λ определяется статистическими характеристиками вектора \vec{A} (а именно, его математическим ожиданием и корреляционной матрицей), оценки которых могут быть найдены по результатам описанного выше статистического эксперимента (то есть по набору реализаций вектора амплитуд \vec{A}).

Подставив (2.5.4) в (2.5.2), получим:

$$\hat{\varphi}(\vec{r}) = \vec{A}^T \cdot \vec{\Psi}(\vec{r}) = \left(\vec{m}_A + \Lambda \cdot \vec{\tilde{A}}\right)^T \cdot \vec{\Psi}(\vec{r}) = \vec{m}_A^T \cdot \vec{\Psi}(\vec{r}) + \vec{\tilde{A}}^T \cdot \left(\Lambda^T \cdot \vec{\Psi}(\vec{r})\right) = = \vec{m}_A^T \cdot \vec{\Psi}(\vec{r}) + \vec{\tilde{A}}^T \cdot \vec{\tilde{\Psi}}(\vec{r}) = = \tilde{\Psi}_0(\vec{r}) + \tilde{A}_1 \cdot \tilde{\Psi}_1(\vec{r}) + \tilde{A}_2 \cdot \tilde{\Psi}_2(\vec{r}) + \dots + \tilde{A}_n \cdot \tilde{\Psi}_n(\vec{r}), \quad (2.5.6)$$

где

$$\begin{cases} \tilde{\Psi}_{0}(\vec{r}) = \vec{m}_{A}^{T} \cdot \vec{\Psi}(\vec{r}); \\ \tilde{\Psi}_{1}(\vec{r}) = \Psi_{1}(\vec{r}) + a_{21} \cdot \Psi_{2}(\vec{r}) + ... + a_{n1} \cdot \Psi_{n}(\vec{r}); \\ \tilde{\Psi}_{2}(\vec{r}) = \Psi_{2}(\vec{r}) + a_{32} \cdot \Psi_{3}(\vec{r}) + ... + a_{n2} \cdot \Psi_{n}(\vec{r}); \\ \vdots \\ \tilde{\Psi}_{n-1}(\vec{r}) = \Psi_{n-1}(\vec{r}) + a_{nn-1} \cdot \Psi_{n}(\vec{r}); \\ \tilde{\Psi}_{n}(\vec{r}) = \Psi_{n}(\vec{r}). \end{cases}$$
(2.5.7)

Из выражения (2.5.6) видно, что коэффициентами аппроксимации реализации случайной функции $\varphi(\vec{r})$ набором функций $\{\tilde{\Psi}_k(\vec{r})\}$ являются координаты вектора \vec{A} с некоррелированными составляющими. Это означает, что функции $\{\tilde{\Psi}_k(\vec{r})\}$, определяе-

где

мые по формулам (2.5.7), представляют собой каноническое разложение случайной функции $\phi(\vec{r})$.

Заметим, что каждая из построенных функций представляет собой линейную комбинацию выбранных «базисных» функций $\{\Psi_k(\vec{r})\}$, коэффициенты которой (элементы матрицы Λ) определяются вероятностными характеристиками вектора \vec{A} . Поскольку последние на практике заменяются их статистическими оценками, можно вести речь лишь о построении приближенного канонического разложения по описанной методике.

Таким образом, задача построения приближенного канонического разложения случайной функции $\phi(\vec{r})$ по результатам статистического эксперимента разбивается на следующие этапы:

1) выбирается набор координатных функций $\{\Psi_k(\vec{r})\};$

2) для M реализаций случайной функции $\phi(\vec{r})$ методом наименьших квадратов производится аппроксимация показаний датчиков выбранным набором функций:

$$\hat{\varphi}\left(\vec{r},t_{j}\right) = \vec{A}^{T}\left(t_{j}\right)\vec{\Psi}\left(\vec{r}\right), \quad j = \overline{1,M} ;$$

3) по набранному таким образом архиву реализаций случайного вектора \vec{A} находятся оценки его вероятностных характеристик – математического ожидания и корреляционной матрицы;

4) по рекуррентным соотношениям (2.5.5) рассчитываются элементы треугольной матрицы Λ ;

5) в соответствии с выражениями (2.5.7) строятся функции приближенного канонического разложения $\{\tilde{\Psi}_{k}(\vec{r})\}$.

Теоретическое обоснование связи собственных функций невозмущенного реактора с оптимальными координатными функциями канонического разложения

Рассмотрим реактор в одногрупповом диффузионном приближении с нулевыми граничными условиями, в котором случайным образом флюктуируют свойства среды:

$$\Delta \varphi(\vec{r}) + \left(\mathfrak{w}_0^2(\vec{r}) + \varepsilon(\vec{r}) + \Theta \right) \varphi(\vec{r}) = 0, \qquad (2.5.8)$$

где $\phi(\vec{r})$ – плотность потока нейтронов, нейтр./(м² · c); $\epsilon(\vec{r})$ – случайное возмущение в свойствах среды, 1/м²; Θ – параметр, обеспечивающий критичность реактора, 1/м².

В дальнейшем для краткости функцию координат $\mathfrak{w}_0^2(\vec{r})$ будем называть материальным параметром.

Представим плотность потока нейтронов и материальный параметр в виде суммы детерминированной и случайной составляющих:

$$\varphi(\vec{r}) = \varphi_0(\vec{r}) + \delta\varphi(\vec{r});$$

$$\varpi^2(\vec{r}) = \varpi_0^2(\vec{r}) + \varepsilon(\vec{r}), \qquad (2.5.9)$$

где $\delta \phi(\vec{r})$, $\varepsilon(\vec{r})$ – случайные составляющие; $\phi_0(\vec{r})$, $\varpi_0^2(\vec{r})$ – детерминированные функции координат.

Подставляя выражения (2.5.9) в уравнение (2.5.8) и пренебрегая членами второго порядка малости, т.е. произведениями $\delta \varphi(\vec{r}) \cdot \varepsilon(\vec{r})$ и $\Theta \cdot \delta \varphi(\vec{r})$, получим:

$$\Delta \phi_0(\vec{r}) + \varpi_0^2(\vec{r}) \phi_0(\vec{r}) + \Delta \delta \phi(\vec{r}) + \varpi_0^2(\vec{r}) \delta \phi(\vec{r}) + + (\varepsilon(\vec{r}) + \Theta) \phi_0(\vec{r}) = 0. \qquad (2.5.10)$$

Применяя к этому уравнению линейную операцию нахождения математического ожидания, будем иметь:

$$\Delta \varphi_0(\vec{r}) + \varpi_0^2(\vec{r})\varphi_0(\vec{r}) + \Delta M \left[\delta \varphi(\vec{r})\right] + \\ + \varpi_0^2(\vec{r})M \left[\delta \varphi(\vec{r})\right] + M \left[\varepsilon(\vec{r}) + \Theta\right]\varphi_0(\vec{r}) = 0.$$
(2.5.11)

Предполагая, что математические ожидания возмущений имеют нулевые значения, т.е.

$$M[\varepsilon(\vec{r})] = M[\Theta] = M[\delta\varphi(\vec{r})] = 0, \qquad (2.5.12)$$

получим, что $M[\phi(\vec{r})] = \phi_0(\vec{r})$, и математическое ожидание плотности потока нейтронов подчиняется уравнению

$$\Delta \varphi_0(\vec{r}) + \varpi_0^2(\vec{r}) \varphi_0(\vec{r}) = 0, \qquad (2.5.13)$$

а конкретная реализация случайного отклонения плотности потока нейтронов от математического ожидания – уравнению

$$\Delta\delta\varphi(\vec{r}) + \varpi_0^2(\vec{r})\delta\varphi(\vec{r}) + (\varepsilon(\vec{r}) + \Theta)\varphi_0(\vec{r}) = 0. \qquad (2.5.14)$$

Умножая уравнение (3.6) на $\delta \varphi(\vec{r})$, а уравнение (2.5.14) – на $\varphi_0(\vec{r})$, интегрируя их по объему реактора с учетом граничных условий, получим выражение для конкретной реализации параметра Θ :

$$\Theta = -\frac{\int_{V} \varepsilon(\vec{r}) \varphi_0^2(\vec{r}) d\vec{r}}{\int_{V} \varphi_0^2(\vec{r}) d\vec{r}}.$$
(2.5.15)

Пусть $G(\vec{r}, \vec{r_0})$ – функция Грина невозмущенного реактора с нулевыми условиями на экстраполированной границе:

$$\Delta G(\vec{r}, \vec{r}_0) + \mathfrak{a}_0^2(\vec{r}) G(\vec{r}, \vec{r}_0) = \delta(\vec{r}, \vec{r}_0). \qquad (2.5.16)$$

Выразим решение уравнения (2.5.14) через функцию Грина:

$$\delta \varphi(\vec{r}) = -\int_{V} G(\vec{r}, \vec{r}_{0}) \Big[\varepsilon(\vec{r}) + \Theta \Big] \varphi_{0}(\vec{r}) d\vec{r}_{0} . \qquad (2.5.17)$$

Тогда корреляционная функция плотности потока нейтронов будет иметь вид:

$$K_{\varphi}(\vec{r},\vec{r}') = M \lfloor \delta\varphi(\vec{r}) \cdot \delta\varphi(\vec{r}') \rfloor =$$

$$= \iint_{VV} G(\vec{r},\vec{r}_0) \cdot G(\vec{r}',\vec{r}_1) \cdot M \Big[(\varepsilon(\vec{r}_0) + \Theta) (\varepsilon(\vec{r}_1) + \Theta) \Big] \varphi_0(\vec{r}_0) \varphi_0(\vec{r}_1) d\vec{r}_0 d\vec{r}_1 .$$
(2.5.18)

Явный вид выражения $M[(\varepsilon(\vec{r}_0) + \Theta)(\varepsilon(\vec{r}_0) + \Theta)]$ получим, подставив вместо Θ выражение (2.5.15):

$$M\left[\left(\varepsilon(\vec{r}_{0}) - \frac{\int \varepsilon(\vec{s})\phi_{0}^{2}(\vec{s})d\vec{s}}{\int V \phi_{0}^{2}(\vec{s})d\vec{s}}\right) \cdot \left(\varepsilon(\vec{r}_{1}) - \frac{\int \varepsilon(\vec{p})\phi_{0}^{2}(\vec{p})d\vec{p}}{\int V \phi_{0}^{2}(\vec{p})d\vec{p}}\right)\right] =$$

$$= M \Big[\varepsilon(\vec{r}_{0}) \varepsilon(\vec{r}_{1}) \Big] - \frac{1}{\int_{V} \varphi_{0}^{2}(\vec{r}) d\vec{r}} \begin{cases} \int_{V} \varphi_{0}^{2}(\vec{s}) \cdot M \Big[\varepsilon(\vec{s}) \cdot \varepsilon(\vec{r}_{1}) \Big] d\vec{s} + \\ + \int_{V} \varphi_{0}^{2}(\vec{p}) \cdot M \Big[\varepsilon(\vec{p}) \cdot \varepsilon(\vec{r}_{0}) \Big] d\vec{p} \\ \end{cases} + \frac{\int_{V} \int_{V} \varphi_{0}^{2}(\vec{p}) \varphi_{0}^{2}(\vec{s}) M \Big[\varepsilon(\vec{p}) \varepsilon(\vec{s}) \Big] d\vec{p} d\vec{s} \\ + \frac{\int_{V} \int_{V} \varphi_{0}^{2}(\vec{p}) \varphi_{0}^{2}(\vec{s}) M \Big[\varepsilon(\vec{p}) \varepsilon(\vec{s}) \Big] d\vec{p} d\vec{s} \\ \Big[\int_{V} \varphi_{0}^{2}(\vec{r}) d\vec{r} \Big]^{2} \end{cases}$$
(2.5.19)

Таким образом, корреляционная функция плотности потока нейтронов есть

$$K_{\varphi}(\vec{r}, \vec{r}') = \iint_{VV} G(\vec{r}, \vec{r}_{0}) G(\vec{r}', \vec{r}_{1}) \varphi_{0}(\vec{r}_{0}) \varphi_{0}(\vec{r}_{1}) \cdot \{K_{\varepsilon}(\vec{r}_{0}, \vec{r}_{1}) - \frac{1}{\int_{V} \varphi_{0}^{2}(\vec{r}) d\vec{r}} \left(\int_{V} \varphi_{0}^{2}(\vec{s}) K_{\varepsilon}(\vec{s}, \vec{r}_{1}) d\vec{s} + \int_{V} \varphi_{0}^{2}(\vec{p}) K_{\varepsilon}(\vec{p}, \vec{r}_{0}) d\vec{p} \right) + \frac{\int_{V} \varphi_{0}^{2}(\vec{p}) \varphi_{0}^{2}(\vec{s}) K_{\varepsilon}(\vec{p}, \vec{s}) d\vec{p} d\vec{s}}{\left[\int_{V} \varphi_{0}^{2}(\vec{r}) d\vec{r} \right]^{2}} d\vec{r}_{0} d\vec{r}_{1}.$$
(2.5.20)

Выражение (2.5.20) существенно упрощается, если учесть, что оператор $\hat{L} = \Delta + \alpha_0^2(\vec{r})$ является самосопряженным. Тогда выполняется условие ортогональности:

$$\int_{V} G(\vec{r}, \vec{r_{1}}) \cdot \phi_{0}(\vec{r_{1}}) d\vec{r_{1}} = 0$$
(2.5.21)

и выражение для корреляционной функции принимает вид:

$$K_{\varphi}(\vec{r},\vec{r}') = \iint_{VV} G(\vec{r},\vec{r}_{0}) \cdot G(\vec{r}',\vec{r}_{1}) \cdot \varphi_{0}(\vec{r}_{0}) \cdot \varphi_{0}(\vec{r}_{1}) \cdot K_{\varepsilon}(\vec{r}_{0},\vec{r}_{1}) d\vec{r}_{0} d\vec{r}_{1} . \quad (2.5.22)$$
Известно, что функция Грина для самосопряженного оператора имеет вид:

$$G\left(\vec{r},\vec{\xi}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda'_k} \cdot \frac{\varphi_k\left(\vec{r}\right) \cdot \varphi_k\left(\vec{\xi}\right)}{\int\limits_V \varphi_k^2\left(\vec{r}\right) d\vec{r}},$$
 (2.5.23)

где $\varphi_k(\vec{r})$ – собственные функции краевой задачи:

$$\begin{cases} \Delta \varphi_k \left(\vec{r} \right) + \varpi_0^2 \varphi_k^2 \left(\vec{r} \right) = \lambda'_k \varphi_k \left(\vec{r} \right); \\ \varphi_k \left(\vec{r} \right) \Big|_S = 0. \end{cases}$$
(2.5.24)

где *S* – экстраполированная граница реактора.

Таким образом, корреляционная функция реактора выражается через его собственные функции.

С другой стороны, координатные функции оптимального канонического разложения являются собственными функциями интегрального уравнения Фредгольма второго рода, где ядром является корреляционная функция:

$$\lambda_k \cdot \Psi(\vec{r}) = \int_V K(\vec{r}, \vec{\xi}) \cdot \Psi(\vec{\xi}) d\vec{\xi} . \qquad (2.5.25)$$

Подставляя выражение (2.5.23) в формулу (2.5.22), а затем в (2.5.25), получим связь между собственными функциями реактора и координатными функциями оптимального канонического разложения:

$$\lambda_{k} \cdot \Psi\left(\vec{r}\right) = \int_{V} \int_{V} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda'_{k} \lambda'_{m}} \times \frac{\varphi_{k}\left(\vec{r}\right)\varphi_{k}\left(\vec{r}_{0}\right)\varphi_{m}\left(\vec{r}_{1}\right)\varphi_{m}\left(\vec{\xi}\right)\varphi_{0}\left(\vec{r}_{0}\right)\varphi_{0}\left(\vec{r}_{1}\right)K_{\varepsilon}\left(\vec{r}_{0},\vec{r}_{1}\right) \cdot \Psi\left(\vec{\xi}\right)}{\int_{V} \varphi_{k}^{2}\left(\vec{p}\right)d\vec{p} \cdot \int_{V} \varphi_{m}^{2}\left(\vec{p}\right)d\vec{p}} d\vec{r}_{1}d\vec{\xi}d\vec{r}.$$

$$(2.5.26)$$

Как видно из этого выражения, зависимость между собственными функциями невозмущенной задачи и координатными функциями оптимального канонического разложения определяется корреляционной функцией флюктуаций в свойствах среды $K_{\varepsilon}(\vec{r_0},\vec{r_1})$. Если флуктуации в свойствах среды представляют собой белый шум, т.е. $K_{\varepsilon}(\vec{r}_0, \vec{r}_1) = D_{\varepsilon}\delta(\vec{r}_0, \vec{r}_1)$, то корреляционная функция будет иметь вид:

$$K_{\varphi}(\vec{r},\vec{r}') = D_{\varepsilon} \cdot \int_{V} G(\vec{r},\vec{r}_{0}) G(\vec{r}_{0},\vec{r}') \varphi_{0}^{2}(\vec{r}_{0}) d\vec{r}_{0} = D_{\varepsilon} \cdot G_{\alpha}(\vec{r},\vec{r}'). \quad (2.5.27)$$

Поставим следующую задачу на собственные функции и собственные значения для интегрального уравнения:

$$\lambda \Psi(\vec{r}) = \int_{V} \Psi(\vec{\xi}) G(\vec{r}, \vec{\xi}) \varphi_0^2(\vec{\xi}) d\vec{\xi} . \qquad (2.5.28)$$

Умножив левую и правую части этого уравнения на функцию $G(\vec{r}, \vec{r}') \cdot \varphi_0^2(\vec{r})$ и проинтегрировав по переменной \vec{r} , получим:

$$\lambda \int_{V} \Psi(\vec{r}) \varphi_{0}^{2}(\vec{r}) G(\vec{r}, \vec{r}') d\vec{r} = \int_{VV} G(\vec{r}, \vec{r}') \varphi_{0}^{2}(\vec{r}) G(\vec{r}, \vec{\xi}) \Psi(\vec{\xi}) \varphi_{0}^{2}(\vec{\xi}) d\vec{r} d\vec{\xi} = \\ = \int_{V} \int_{V} G(\vec{r}, \vec{r}') G(\vec{r}, \vec{\xi}) \varphi_{0}^{2}(\vec{r}) d\vec{r} \cdot \varphi_{0}^{2}(\vec{\xi}) \Psi(\vec{\xi}) d\vec{\xi}, \quad (2.5.29)$$

откуда следует, что собственные функции задачи (2.5.28) являются собственными функциями следующей задачи:

$$\lambda^2 \Psi(\vec{r}') = \int_V G_\alpha(\vec{\xi}, \vec{r}') \varphi_0^2(\vec{\xi}) \Psi(\vec{\xi}) d\vec{\xi}, \qquad (2.5.30)$$

т.е. оптимальными координатными функциями канонического разложения, так как $G_{\alpha}(\vec{\xi}, \vec{r}')$ в соответствии с (2.5.27) является корреляционной функцией.

С другой стороны, интегральное уравнение (2.5.28) эквивалентно следующей краевой задаче:

$$\begin{cases} \Delta \Psi(\vec{r}) + \varpi_0^2(\vec{r}) \Psi(\vec{r}) = \lambda \varphi_0^2(\vec{r}) \Psi(\vec{r}); \\ \Psi(\vec{r}) \Big|_S = 0. \end{cases}$$
(2.5.31)

Таким образом, если возмущение представляет собой белый шум, то корреляционная функция плотности потока нейтронов является повторной функцией Грина невозмущенной задачи, а оптимальные координатные функции канонического разложения – собственными функциями оператора $\hat{L}_1 = \frac{1}{\varphi_0^2(\vec{r})}\hat{L}$.

Нетрудно показать также, что в этом случае взаимная корреляционная функция плотности потока нейтронов и возмущений среды имеет вид

$$K_{\varepsilon,\delta\varphi} = D_{\varepsilon}\varphi_0(\vec{r}_0) \cdot G(\vec{r},\vec{r}_0) \,.$$

Каноническое представление плотности потока нейтронов в реакторе в форме бесконечной плоской пластины

Рассмотрение реактора в форме бесконечной плоской пластины может позволить не только более наглядно представить полученные выше результаты, но имеет и практическое приложение, например, для анализа высотных полей. В этом случае уравнение (2.5.8) примет вид

$$\begin{cases} \frac{d^2\varphi(z)}{dz^2} + \varpi_0^2(z)\varphi(z) + \varepsilon(\vec{r})\varphi(z) + \Theta \cdot \varphi(z) = 0;\\ \varphi(0) = \varphi(H) = 0, \end{cases}$$
(2.5.32)

где Н – экстраполированный размер реактора.

Для удобства введем замену переменных $x = \frac{z}{H}$, тогда $x \in [0, 1]$. Уравнение для собственных функций невозмущенного реактора будет иметь вид:

$$\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} + \varpi_0^2(x)H^2\varphi(x) = \mu H^2\varphi(x), \qquad (2.5.33)$$

а уравнение для оптимальных координатных функций канонического разложения в соответствии с выражением (2.5.31) – следующий вид:

$$\frac{d^2\Psi(x)}{dx^2} + \alpha_0^2 H^2\Psi(x) = \lambda \phi_0^2(x)\Psi(x)H^2. \qquad (2.5.34)$$

При этом предполагается, что возмущения представляют собой белый шум.

Для сравнения оптимальных координатных и собственных функций невозмущенного реактора рассмотрим реактор с зоной «плато». Распределение материального параметра и плотности потока нейтронов в этом случае показаны на рис. 2.17.



Рис. 2.17. Распределение материального параметра (a) и плотности потока нейтронов (δ) в трехзонном реакторе

Активная зона реактора представляет собой компоновку из трех зон. В периферийных зонах значения материального параметра одинаковы и равны величине $\left(\frac{\pi}{2\delta}\right)^2$, где δ – ширина периферийной зоны. Степень уплощения поля нейтронов будем характеризовать величиной параметра $p = \frac{1-2\delta}{1} = 1-2\delta$. При p = 0 реактор представляет собой пластину с однородными свойствами, при p = 1 – бесконечный реактор. Математическое ожидание распределения материального параметра и плотности потока нейтронов в таком реакторе имеют следующие зависимости:

$$\mathfrak{x}_{0}^{2}(x) \cdot H^{2} = \begin{cases} \left(\frac{\pi}{1-p}\right)^{2}, 0 \le x \le \frac{1-p}{2}; \\ 0, \frac{1-p}{2} < x < \frac{1+p}{2}; \\ \left(\frac{\pi}{1-p}\right)^{2}, \frac{1+p}{2} \le x \le 1; \end{cases}$$
(2.5.35)

$$\varphi_{0}(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi x}{1-p}\right), 0 \le x \le \frac{1-p}{2}; \\ 1, \frac{1-p}{2} < x < \frac{1+p}{2}; \\ \cos\left(\frac{\pi(2x-p-1)}{2(1-p)}\right), \frac{1+p}{2} \le x \le 1. \end{cases}$$
(2.5.36)

Введем обозначения: $\mathfrak{w}_0^2 \cdot H^2 = \mathfrak{w}^2$, $\lambda \cdot H^2 = \hat{\lambda}$, $\mu \cdot H^2 = \hat{\mu}$. Тогда уравнения для собственных функций и функций оптимального канонического разложения, соответственно, примут вид:

$$\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} + \omega^2(x)\cdot\varphi(x) = \hat{\mu}\cdot\varphi(x), \qquad (2.5.37)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{\varphi_0^2(x)} \left[\frac{d^2 \Psi(x)}{dx^2} + \alpha^2(x) \Psi(x) \right] = \hat{\lambda} \cdot \Psi(x); \\ \Psi(0) = \Psi(1) = 0. \end{cases}$$
(2.5.38)

Решение задач (2.5.37) и (2.5.38) будем искать методом Галеркина. Для этого представим функции $\varphi(x)$ и $\Psi(x)$ в виде суперпозиций по собственным функциям однородного плоского реактора:

$$\Psi(x) = \sum_{i=1}^{K} A_i \cdot \sin(\pi i x); \qquad (2.5.39)$$

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{K} B_i \cdot \sin(\pi i x). \qquad (2.5.40)$$

Подставляя эти выражения, соответственно, в уравнения (2.5.37) и (2.5.38), умножая обе части уравнения на $sin(\pi j x)$ и интегрируя по объему, получим задачи линейной алгебры на собственные значения и собственные векторы:

$$\widehat{M} \cdot \overrightarrow{B} = \widehat{\mu} \cdot \overrightarrow{B}; \qquad (2.5.41)$$

$$\widehat{R} \cdot \vec{A} = \widehat{\lambda} \cdot \vec{A}, \qquad (2.5.42)$$

где \hat{R} и \hat{M} – квадратные матрицы размера $(k \times k)$.

Оптимальные координатные функции канонического разложения находятся при этом из соотношения $\psi_i(x) = \sum_{k=1}^{10} A_{ki} \sin(\pi \cdot i \cdot x)$, а

собственные функции – из соотношения $\varphi_i(x) = \sum_{k=1}^{10} B_{ki} \sin(\pi \cdot i \cdot x)$.

На рис. 2.18 показаны первые пять собственных функций однородного реактора и первые пять функций оптимального канонического разложения.







Рис. 2.18. Окончание

Из рис. 2.18 видно, что качественный вид функций совпадает, а различие растет с возрастанием собственных чисел задачи. В табл. 2.1 показана относительная норма разности собственных функций невозмущенного реактора и оптимальных координатных функций канонического разложения в зависимости от степени уплощения (p) и номера функции. При этом относительная норма разности определялась по соотношению:

$$\|\delta\| = \sqrt{\frac{\int_{0}^{h} (\phi_{k} - \psi_{k})^{2} dx}{\int_{0}^{h} \phi_{k}^{2} dx}} 100\%.$$

Таблица 2.1

Относительная норма разности собственных функций φ_n и функций оптимального канонического разложения ψ_n в зависимости от степени уплощения *p*, %

n	р					
	0	0,2	0,4	0,6	0,8	
1	1,35	0,0004	0,0003	0,0002	0,00001	
2	6,86	0,94	0,64	0,28	0,14	
3	37,53	8,91	4,68	1,56	0,09	
4	59,50	23,16	14,42	4,34	1,43	
5	83,03	40,59	29,63	10,05	1,98	
6	105,36	57,56	46,08	19,92	5,08	
7	100,11	72,86	61,22	32,93	7,44	
8	108,54	81,44	76,35	49,13	15,11	
9	61,61	92,62	96,06	65,24	23,98	
10	64,83	78,61	78,37	76,16	36,55	

Из табл. 2.1 видно, что с увеличением зоны «плато» различие между собственными функциями и функциями оптимального канонического разложения уменьшаются. В бесконечном реакторе с некоррелированным шумом собственные функции будут совпадать с оптимальными координатными функциями канонического разложения. Этот вывод следует также из анализа уравнений (2.5.37) и (2.5.38), которые совпадают при $\varphi_0 = \text{const}$ (бесконечный реактор).

Проводились исследования функций оптимального канонического разложения, если возмущения носят коррелированный характер. Рассматривался гомогенный одномерный реактор, в котором корреляционная функция шума имела структуру вида $K_{\varepsilon} = D_{\varepsilon} \exp(-\beta |x - x'|)$. В этом случае в соответствии с выражением (2.5.22) корреляционная функция имеет вид

$$K_{\varphi}(x, x') = \iint_{VV} G(x, x_0) \cdot G(x', x_1) \cdot \varphi_0(x_0) \cdot \varphi_0(x_1) \times$$
$$\times D_{\varepsilon} \exp(-\beta |x_0 - x_1|) dx_0 dx_1,$$

где функция Грина есть:

$$G(x, x_0) = \sum_{k=2} \frac{\sin \pi kx \cdot \sin \pi kx_0}{(\mu_k - \mu_1) \int_0^H \sin^2 \pi kx dx}$$

Функции оптимального канонического разложения находились при решении методом Галеркина интегрального уравнения

$$\lambda \psi(x) = \int_0^H K_{\varphi}(x, x') \varphi_0(x') \psi(x') dx'.$$

Результаты расчетов показали, что чем сильнее коррелированы возмущения, тем ближе функции оптимального канонического разложения к собственным функциям реактора.

В табл. 2.2 представлены результаты расчетов относительной нормы разности $\|\delta\|$ собственных функций и функций оптимального канонического разложения в зависимости от степени коррелированности шумов.

Из табл. 2.2 видно, что при $\beta > 50$ коррелированный шум по своему воздействию практически равноценен белому шуму. Физически это означает, что если корреляция между возмущающими

воздействиями уменьшается на расстоянии $\frac{1}{50}$ характерного размера реактора в *е* раз (например, для реактора типа РБМК отношение шага решетки к диаметру активной зоны как раз порядка $\frac{1}{50}$), то для расчетов можно использовать приближение белого шума.

Таблица 2.2

п	β					
	0,05	0,5	5,0	50,0	500,0	5000,0
1	0,05	0,08	0,42	1,30	1.35	1,35
2	0,67	0,68	1,33	4,31	4.60	4,61
3	23,10	23,49	27,06	36,46	37,51	37,52
4	28,91	28,99	32,29	46,98	49,08	49,11
5	53,15	53,78	59,52	80,56	84,12	84,16
6	61,87	61,87	61,87	61,87	61,87	67,87
7	80,87	81,49	87,40	110,84	115,11	115,17
8	91,24	91,35	95,36	117,72	122,18	122,24
9	77,14	77,14	79,07	84,77	87,75	85,76
10	79,81	79,81	80,91	86,18	87,24	87,26

Относительная норма ||δ|| разности собственных функций φ_n и функций оптимального канонического разложения ψ_n в зависимости от степени корреляции возмущений β, %

2.5.3. Вероятность образования локальных надкритических областей в активной зоне ядерного реактора

Как отмечалось ранее, в процессе эксплуатации ядерных энергетических реакторов в активной зоне возникают случайные возмущения размножающих свойств среды. Принципиально это может привести к тому, что в некоторой области активной зоны реактора возникнет флюктуация коэффициента размножения такой величины, что данная область становится надкритической (рис. 2.19) [1, 2, 6].



Рис. 2.19. Случайный выброс избытка коэффициента размножения

При наличии положительных обратных связей такая ситуация может стать опасной. В связи с этим возникает задача оценки вероятности образования локальных надкритических зон при флюктуации размножающих свойств среды.

Известно решение задачи по определению вероятного отклонения среднего избытка коэффициента размножения $\delta k_{\infty} = k_{\infty} - 1$ в области заданного размера *S*, содержащей *N* ячеек периодичности. При этом полагается, что δk_{∞} в отдельных ячейках реактора меняется независимо в пространстве и времени. Понятно, что в реакторе, охваченном пространственно распределенными обратными связями, такое приближение не отражает реальной ситуации, и флюктуация коэффициента размножения представляет собой случайную функцию пространства и времени. В теории случайных функций известно решение «задачи о выбросах», позволяющее определить среднее число выбросов нормально распределенной стационарной случайной функции за данный уровень и параметры выброса [12].

Используя методику решения указанной задачи, определим вначале вероятность и среднюю длительность выброса избытка коэффициента размножения за некоторый уровень *c* без учета пространственной составляющей (рассматривается реактор в «точечном» приближении или одна ячейка периодичности).

Предположим, что избыток коэффициента размножения δk_{∞} флюктуирует около своего математического ожидания $k_{\infty 0}$. Причем для $\delta k_{\infty}(t)$ как случайной функции времени известен закон ее распределения.

Определим вероятность того, что на бесконечно малом временном интервале dt за моментом времени t произойдет выброс коэффициента размножения за уровень c. Для этого необходимо, чтобы имели место два события:

1) $\delta k_{\infty}(t) < c$ в момент времени *t*;

2) $\delta k_{\infty}(t+dt) > c$ в момент времени t + dt т.е. вероятность выброса за уровень c есть $P(\delta k_{\infty}(t) < c, \delta k_{\infty}(t+dt) > c)$.

Предполагая, что функция $\delta k_{\infty}(t)$ непрерывна, с точностью до бесконечно малых второго порядка, можно считать, что

$$\delta k_{\infty}(k+dk) = \delta k_{\infty}(t) + V(t)dt ,$$

где $V(t) = \frac{d\delta k_{\infty}}{dt}$. Таким образом, условие $\delta k_{\infty}(t+dt) > c$ равносильно условию $\delta k_{\infty}(t) > c - V(t)dt$. Тогда вместо двух условий выброса коэффициента размножения за уровень *с* можно использовать одно условие:

$$c - V(t)dt < \delta k_{\infty}(t) < c$$
 при $V(t) > 0$.

Для определения вероятности выполнения этого неравенства введем в рассмотрение двумерный закон распределения ординаты случайной функции δk_{∞} и ее производной в один и тот же момент времени $f(\delta k_{\infty}, V | t)$. Тогда для искомой вероятности выброса коэффициента размножения за уровень *с* получим:

$$P(c-Vdt < \delta k_{\infty} < c) = \int_{0}^{\infty} \int_{c-Vdt}^{c} f(\delta k_{\infty}, V|t) d\delta k_{\infty} dV.$$

Так как пределы внутреннего интеграла отличаются на бесконечно малую величину *Vdt*, то по теореме о среднем будем иметь:

$$\int_{c-Vdt}^{c} f(\delta k_{\infty}, V \mid t) d\delta k_{\infty} \approx dt \cdot V \cdot f(c, V \mid t)$$

Тогда

$$P(c-Vdt < \delta k_{\infty} < c) = dt \int_{0}^{\infty} f(c, V \mid t) V dV .$$

Обозначим $P(c | t) = \int_{0}^{\infty} f(c, V | t) V dV$ – вероятность выброса в по-

ложительную область в единицу времени. Аналогичным образом можно получить и вероятность пересечения уровня $\delta k_{\infty} = c$ сверху вниз:

$$P'(c \mid t) = -\int_{-\infty}^{0} f(c, V \mid t) V dV.$$

Пользуясь полученными выражениями, можно найти для любого промежутка времени *T* среднее время нахождения коэффициента размножения выше уровня *c*. Действительно, разобьем временной интервал *T* на *n* равных частей dt_j , каждый их интервалов dt_j расположен вблизи координаты t_j (j = 1, ..., n). Вероятность того, что ордината случайной функции $\delta k_{\infty} > c$ равна

$$P(\delta k_{\infty}(x_j) > c) = \int_{c}^{\infty} f(c \mid t_j) d\delta k_{\infty}.$$

Будем считать интервалы dt_j настолько малыми, чтобы можно было пренебречь случаями, когда внутри dt_j функция $\delta k_{\infty}(t)$ меняет знак. Введем в рассмотрение систему случайных величин Δj , каждая из которых равна соответствующему интервалу dt_j или 0 в зависимости от того, будет ли в этом интервале $\delta k_{\infty} > c$ или $\delta k_{\infty} < c$. Очевидно, что общее время пребывания избытка коэффициента размножения выше заданного уровня $\delta k_{\infty} > c$, равно сумме $T = \sum_{j=1}^{n} \Delta j$. Для определения среднего суммарного времени \overline{T} , в пределах которого $\delta k_{\infty} > c$, найдем математическое ожидание от обеих частей равенства

$$\overline{T} = \sum_{j=1}^{n} M[\Delta j].$$
 (2.5.43)

Поскольку случайная величина Δj может принимать только лишь два значения – dt_i или 0, то

$$M[\Delta_j] = dt_j \int_0^\infty f(\delta k_\infty \,|\, t_j) d\delta k_\infty.$$
(2.5.44)

Подставляя выражение (2.4.44) в (2.4.43) и переходя к пределу при $n\!\to\!\infty$, получаем

$$\overline{T} = \int_{0}^{T} \int_{0}^{\infty} f(\delta k_{\infty} \mid t) d\delta k_{\infty} dt . \qquad (2.5.45)$$

Для определения среднего времени превышения уровня c в течение одного выброса необходимо разделить \overline{T} на среднее число выбросов \overline{N} . Найдем среднее число выбросов \overline{N} . Для этого, как и прежде, разобьем размер T на n равных интервалов dt_j и введем вспомогательные случайные величины N_j . Величина $N_j = 0$, если в пределах dt_j не было выброса, и $N_j = 1$, если выброс был. Полное число выбросов в течение времени T равно:

$$N = \sum_{j=1}^{n} N_j.$$

Применяя операцию математического ожидания к обеим частям равенства, получаем:

$$N = \sum_{j=1}^{n} P(c, t_j) dt_j.$$

Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, находим:

$$\overline{N} = \int_{0}^{T} \int_{0}^{\infty} V f(c, V \mid t) dV dt .$$

Окончательно средний размер области с положительным выбросом материального параметра

$$\overline{\tau} = \frac{\overline{T}}{\overline{N}} = \frac{\int_{0}^{T} \int_{0}^{\infty} f(\delta k_{\infty} \mid t) d\delta k_{\infty} dt}{\int_{0}^{T} \int_{0}^{\infty} V f(c, V \mid t) dV dt}.$$
(2.5.46)

Для нормального процесса двумерная плотность распределения $f(\delta k_{\infty}, V)$ распадается на произведение нормальных плотностей распределения для δk_{∞} и V:

$$f(\delta k_{\infty}, V) = \frac{1}{\sigma_{\delta k} \sqrt{2\pi}} e^{\frac{\delta k^2_{\infty}}{2\sigma_{\delta k}^2}} \frac{1}{\sigma_V \sqrt{2\pi}} e^{\frac{V^2}{2\sigma_V^2}}$$

где $\sigma_{\delta k}^2 = K(0)$; $\sigma_V^2 = -\frac{d^2}{dz^2} K(z) \Big|_0$; $K(\tau)$ – корреляционная функция

случайной функции δk_{∞} ; $\tau = |t - t'|$ – расстояние между моментами времени *t* и *t'*.

На практике на небольших интервалах τ корреляционная функция $K(\tau)$ может быть аппроксимирована экспоненциальной структурой вида

$$K(\tau) = D \exp\left[-\alpha^2 \tau^2\right],$$

где параметр α характеризует степень корреляции; D – разброс параметра. При этом выражения для средней длительности выброса и среднего числа выбросов в единицу времени будут иметь вид

$$\overline{\tau} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \frac{1}{\alpha} l^{\frac{a^2}{2}} \cdot [1 - \Phi(a)], \qquad (2.5.47)$$

$$\bar{N} = \frac{\alpha}{\pi\sqrt{2}} l^{-\frac{a^2}{2}},$$
(2.5.48)

где математическое ожидание числа выбросов в течение рассматриваемого промежутка T будет равно $\overline{n} = \overline{N} \cdot T$. Если последова-

тельное появление выбросов считать независимыми редкими событиями, то, используя закон Пуассона, можно оценить вероятность появления *m* выбросов в рассматриваемый промежуток времени:

 $P_m = \frac{\overline{n}^m}{m!} l^{-\overline{n}} \cdot$

На рис. 2.20 и 2.21 приведены номограммы для определения приведенных средних значений числа выбросов и длительности выброса от уровня выброса, позволяющие при известном α определить данные величины.







Оценим вероятность выброса избытка коэффициента размножения за уровень $\beta = 0,0065$ при случайных 5 % независимых возмущениях в температуре топлива, плотности теплоносителя и температуре воды для ячейки реактора РБМК на свежем топливе.

Расчеты показывают, что $\frac{k_{\infty \max} - k_{\infty \min}}{\overline{k}_{\infty}} = 0,635\%$. Считая закон распределения δk_{∞} близким к нормальному, относительное среднее квадратическое отклонение можно оценить как $\frac{1}{3} \frac{k_{\infty \max} - k_{\infty \min}}{\overline{k}_{\infty}} = 0,00212$. Тогда $a = \frac{\beta}{\sigma_{\delta k}} \approx 3,0$, и при $\alpha = 1$ для

этого относительного значения выброса получим: $\overline{N} = 5,75 \cdot 10^{-3} \frac{1}{2}$; $\overline{\tau} = 0,29c$. Если рассмотреть интервал времени T = 100c, то $\overline{n} = 0.58$. Вероятности появления выбросов приведены в табл. 2.3.

Таблина 2.3

Вероятности выброса избытка коэффициента размножения за уровень β при различном числе выбросов

Число выбросов за время 100 с	m = 0	m = 1	<i>m</i> > 1
Вероятность выброса	0,56	0,32	0,12

Нетрудно показать, что среднее значение избытка коэффициента размножения в области выброса есть $\Delta \delta k_{\infty} = \frac{\sigma_{\delta k}}{2\sqrt{2\pi}} = 0,00024$, т.е. $\rho = \beta + \Delta \delta k_{\infty} = 0,00674$, тогда, с учетом того, что размножение идет уже на мгновенных нейтронах, получим, что за время существования выброса первоначальная мощность увеличится в $l^{\frac{p\overline{\tau}}{l}} = l^2$.

где $l \approx 10^{-3}$ с – время жизни мгновенных нейтронов.

Полученная таким образом оценка является оценкой сверху, так как полагается, что во всех ячейках активной зоны избыток коэффициента размножения одновременно оказался выше заданного уровня. Для получения оценки вероятности образования надкритического состояния снизу рассмотрим предельный случай независимых ячеек. Из теории выбросов известно, что среднее число случаев одновременного выброса траекторий *т* независимых стационарных процессов за уровень а есть

$$N^+ = m \cdot (\overline{\tau})^{m-1} (a) \cdot (\overline{N})^m .$$

Например, для рассмотренного выше уровня $a = \frac{\beta}{\sigma_{3k}} \approx 3,0$ среднее

число совпадений выбросов в единицу времени для различного числа ячеек приведено в табл. 2.4.

Среднее число совпадений выбросов в единицу времени в *m* ячейках

Количество ячеек, т	1	4	9
Среднее число выбросов в единицу времени, N ⁺	$5,75 \cdot 10^{-3}$	1,11·10 ⁻¹⁰	3,45·10 ⁻²⁴

$$(\overline{N} = 5,75 \cdot 10^{-3} \frac{1}{c}, \overline{\tau} = 0,29c)$$

Таким образом, если бы активная зона состояла из независимых ячеек, то выброс реактивности за уровень β в макроячейке из четырех каналов был бы раз в 10 лет, а в макроячейке из девяти каналов – раз в миллиард лет.

Однако между ячейками активной зоны есть пространственновременная корреляция, поэтому приведенная выше оценка является оценкой снизу. Более реальная оценка вероятности образования надкритических зон может быть получена, если рассматривать выброс в фазовом пространстве.

Предположим, что $\delta k_{\infty}(x,t)$ является нормальной стационарной функцией своих параметров. В теории случайных выбросов показано, что среднее число выбросов на единицу фазового объема и средняя площадь выброса определяется, соответственно, выражениями:

$$\overline{N}(a) = \frac{a}{2\pi\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{K_{22}K_{33} - K_{23}^2}}{K_{11}\sqrt{K_{11}}} e^{-\frac{a^2}{2k_{11}}}, \qquad (2.5.49)$$

$$\overline{S}(a) = \frac{1 - F_{\delta k}(a)}{\overline{N}(a)}; \qquad (2.5.50)$$

 $F_{\delta k}$ – значение функции распределения при заданном уровне выброса;

$$K_{11} = K(0,0); \quad K_{23} = K_{32} = -\frac{\partial^2 K}{\partial x \partial t}\Big|_0;$$

$$K_{22} = \frac{\partial^2 K}{\partial x^2} \bigg|_0; \quad K_{33} = \frac{\partial^2 K}{\partial t^2} \bigg|_0;$$

K(*x*, *t*) – двумерная корреляционная функция коэффициента размножения.

Пусть корреляционная функция аппроксимируется структурой:

$$K(x,t) = D_{\chi} \cdot \exp\left[-\gamma^2 \left(\frac{x}{M}\right)^2\right] \exp\left[-\alpha^2 \left(\frac{t}{\tau}\right)^2\right], \qquad (2.5.51)$$

где константы M и τ имеют смысл длины миграции и среднего времени жизни поколения нейтронов, величины γ и α характеризуют степень корреляционной зависимости, соответственно по пространству и времени. Если, например, $\alpha = \gamma = 1$, то корреляция коэффициента размножения ослабляется в *е* раз на расстоянии длины миграции и за время одного поколения нейтронов. Назовем величину $d\omega = M \cdot \tau$ характерным фазовым объемом. (Для реактора типа РБМК эта величина порядка 0,02 м · с). Тогда с учетом явного вида корреляционной функции выражения (2.5.49), (2.5.50) примут вид

$$N_p = \frac{\overline{N}(a) \cdot d\omega}{\gamma \cdot \alpha} = \frac{a}{\pi \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{a^2}{2}\right]; \qquad (2.5.52)$$

$$S_p = \frac{\overline{S}(a) \cdot \gamma \cdot \alpha}{d\omega} = \frac{\sqrt{\pi^3}}{a\sqrt{2}} \left(1 - \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^a \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt \right) \exp\left(\frac{a^2}{2}\right). \quad (2.5.53)$$

Назовем величины N_p и S_p соответственно приведенным средним числом выбросов и приведенной средней площадью выброса. Смысл этих величин заключается в том, что они зависят только от относительного уровня выброса. Поэтому по их номограммам для конкретного значения характерного фазового объема $d\omega$ и степеней корреляции можно определить величины \overline{N} и \overline{S} . На рис. 2.22 и 2.23 показаны соответствующие номограммы.



Рис. 2.22. Зависимость приведенного среднего числа выбросов от относительной величины выброса



Рис. 2.23. Зависимость приведенной средней площади выброса от относительной величины выброса

Среднее число выбросов и средняя площадь выброса теперь могут быть оценены по выражениям:

$$\overline{N} = \frac{N_p \cdot \gamma \cdot \alpha}{d\omega}; \qquad (2.5.54)$$

$$\overline{S} = \frac{S_p d\omega}{\gamma \cdot \alpha}.$$
(2.5.55)

Из выражения (2.5.54) следует, что число выбросов будет тем больше, чем менее коррелированны размножающие свойства. Площадь выброса при этом уменьшается. Из физических соображений понятно, что спад корреляционной функции на длине миграции ($\gamma = 1$) и за время жизни поколения нейтронов ($\alpha = 1$) практически означает отсутствие корреляции в размножающих свойствах. Более реальным представляется ситуация, когда за счет обратных связей и системы регулирования эти параметры будут иметь, соответственно, такой порядок: $\gamma \approx 0.1$, $\alpha \approx 0.01$. Тогда, например, для относительного уровня выброса a = 3 (что означает выброс получим коэффициента размножения за уровень B) $\overline{N} = 2,15 \cdot 10^{-4} \frac{1}{MC}$ и $\overline{S} = 6,34$ м · с. Последний результат следует понимать таким образом: при длительности выброса, положим, две секунды средний размер выброса – около трех метров. Оценим вероятность выброса в фазовой плоскости размером $\omega = 1000 \text{ м} \cdot \text{с}$. Тогда $\overline{n} = 0.215$, и вероятности различного числа выбросов представлены в табл. 2.5.

Таблица 2.5

Вероятности выброса избытка коэффициента размножения
в фазовом пространстве за уровень β при различном числе
выбросов

Число выбросов в фазовой плоскости ω= 1000 м · с	m = 0	<i>m</i> = 1	<i>m</i> > 1
Вероятность выброса	0,806	0173	0,021

По поводу приведенных оценок сделаем следующие замечания. Во-первых, уровень выброса, соответствующий a = 3, означает выброс за уровень β только для $\sigma_{\delta k} = 0,00212$, для других значений среднеквадратических отклонений выброс за уровень β будет определяться соотношением $a = \frac{\beta}{\sigma_{\delta k}}$. Во-вторых, если вместо вре-

менной координаты рассматривать вторую пространственную, тогда можно оценить вероятность одномоментного выброса в плане реактора. И наконец, в-третьих, надкритическая зона образуется не обязательно, при выбросе за уровень β , при соответствующих граничных условиях она образуется и при малых уровнях выброса.

Таким образом, проведенное исследование позволяет сделать следующие выводы.

Для приближенного определения вероятности выброса коэффициента размножения за заданный уровень достаточно знать корреляционную функцию избытка размножения.

Наличие пространственно-временной корреляции размножающих свойств на порядки увеличивает вероятность самопроизвольного образования локальных надкритических областей.

Более корректные результаты можно получить, если статистические характеристики рассчитать по трехмерной программе с учетом системы регулирования, однако и приведенные оценки показывают принципиальную возможность самопроизвольного образования областей с критичностью на мгновенных нейтронах.

Список литературы к главе 2

1. Загребаев А.М. Вероятность образования локальных надкритических зон при случайных возмущениях материального параметра среды // Нейтронно-физические проблемы безопасности ядерно-энергетических установок. Тезисы докладов 6 Всесоюзного семинара по проблемам физики реакторов, Москва, 4 – 8 сентября, 1989 г., ЦНИИ АТОМИНФОРМ.

2. Загребаев А.М. Об оценке вероятности выброса избытка коэффициента размножения нейтронов в фазовом объеме. Труды X международного научно-технического семинара «Современные технологии в задачах управления, автоматизации и обработки информации», 2001 г.

3. Загребаев А.М. О возможности экспериментального определения собственных функций реактора. Современные технологии в задачах управления, автоматики и обработки информации: Сборник трудов XIV научно-технического семинара. Сентябрь 2005 г. Алушта-Самара: Самарский государственный аэрокосмический университет, 2005.

4. Загребаев А.М. О связи собственных функций реактора и функций канонического разложения. Препринт № 004-2005. – М.: МИФИ, 2005.

5. Загребаев А.М. О связи физических и статистических характеристик поля нейтронов при случайных возмущениях свойств среды // Инженерная физика. – 2005. – № 4. – С. 7 – 11.

6. Загребаев А.М. Оценка вероятности образования локальных надкритических зон при случайных возмущениях свойств среды // Алгоритмы обработки информации в сложных системах. – М.: Энергоатомиздат, 1991.

7. Загребаев А.М., Козьмин Л.А. Крайко М.А. Математическое обеспечение для определения статистических характеристик технологических параметров реактора РБМК – 1000. Научная сессия МИФИ-2004. Сборник научных трудов. – Т.8. Нетрадиционная энергетика. Ядерная энергетика. – М.: МИФИ, 2004.

8. Загребаев А.М., Крайко М.А. Корреляционная функция плотности потока нейтронов в бесконечной поглощающей среде. Научная сессия МИФИ-2004. Сборник научных трудов. – Т.8. Нетрадиционная энергетика. Ядерная энергетика. – М.: МИФИ, 2004.

9. Загребаев А.М., Крайко М.А. О связи собственных функций реактора и канонического разложения корреляционной функции. Научная сессия МИФИ-2004. Сборник научных трудов. – Т.8. Нетрадиционная энергетика. Ядерная энергетика. – М.: МИФИ, 2004.

10. Загребаев А.М., Крайко М.А., Крицына Н.А. Построение «естественного» базиса для аппроксимации макрохода поля нейтронов в активной зоне реактора. Научная сессия МИФИ-2000. Сборник научных трудов. – Т.8. – М.: МИФИ, 2000.

11. Пугачев В.С. Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления. – Изд. 2-е, перераб. и доп. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1960.

12. Свешников А.А. Прикладные методы теории случайных функций. – 2-е изд. перераб. и доп. М.: Наука, Главная редакция физикоматематической литературы, 1968.

ГЛАВА 3. СТАТИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ ДАННЫХ

В гл. 1 были приведены элементарные сведения по теории оценивания на примере оценивания параметров распределения. На самом деле проблематика теории оценивания много шире и заключается в оценке (идентификации) состояния и параметров объекта управления по наблюдениям за входом и выходом.

В целом задачи, решаемые с помощью теории оценивания, можно свести к следующим:

1) построение моделей объекта по экспериментальным данным;

2) интерпретация прошлого поведения объекта и обобщение имеющихся знаний об объекте (задача сглаживания);

3) предсказание будущего поведения, включая прогнозирование, определение тенденций;

4) накопление старых и новых знаний, когда модель, основанная на априорной информации, обновляется и улучшается с использованием новых измерений;

5) оценивание величин, которые не поддаются измерениям, по данным текущих и прошлых измерений;

6) получение таких знаний о процессе или системе, которые необходимы для автоматического управления ими.

В зависимости от объема априорной информации о системе различают задачи идентификации в широком и узком смысле.

При решении задач идентификации в широком смысле априорная информация о системе либо незначительна, либо вообще отсутствует. Система представляется в виде «черного ящика», и для ее идентификации необходимо решение ряда дополнительных задач, связанных с выбором класса моделей, оценкой стационарности, линейности и др. Следует отметить, что в настоящее время теория идентификации в широком смысле не получила еще достаточного развития и находится в стадии становления. При решении задач идентификации в узком смысле считается, что известны структура системы и класс моделей, к которому она относится, априорная информация о системе достаточно обширна. Такая постановка задачи идентификации наиболее соответствует реальным условиям проектирования и поэтому широко используется в инженерной практике.

В настоящее время можно выделить два принципа организации процесса идентификации параметров объекта:

идентификация на основе накопленной информации (дополнительная информация в систему не поступает);

идентификация на основе новой поступающей информации, (идентификация в режиме нормальной работы).

В первом случае функциональная схема процесса идентификации может быть представлена в виде, изображенном на рис. 3.1.



Рис. 3.1. Функциональная схема процесса идентификации по полной информации о входах и выходах объекта

В момент времени t_i (в дальнейшем просто в момент времени i) на вход объекта поступает известное воздействие – вектор управлений $\overline{u}(i)$, i = 1, 2, ..., N и вектор случайных воздействий (помех) – $\overline{\eta}(i)$. На выходе объекта - отклик $\overline{y}(i)$, i = 1, 2, ..., N, который поступает в блок накопления данных. Алгоритм идентификации обрабатывает одновременно все накопленные к моменту N данные с целью построения математической модели объекта – определение вектора параметров модели \tilde{c} .

Функциональная структурная схема, соответствующая второму принципу организации процесса идентификации, изображена на рис. 3.2.



Рис. 3.2. Функциональная схема рекуррентного процесса идентификации

В этом случае информация, снимаемая в каждый момент времени с входов $\overline{u}(i)$ и выходов $\overline{y}(i)$ объекта, а также невязка $\overline{\varepsilon}(i) = \overline{y}(i) - \overline{y}(i)$ между выходом объекта $\overline{y}(i)$ и выходом модели $\widetilde{\overline{y}}(i)$, используется для настройки параметров модели. Алгоритмы идентификации, построенные по принципу коррекции параметров модели на основе поступившей информации, получили название рекуррентных алгоритмов идентификации.

3.1. Виды и формы моделей информационных процессов

3.1.1. Основные математические модели объектов

При решении задач идентификации создается математическая модель реального объекта. Отметим, что структура модели, как правило, определяется физической природой объекта и строится на основе априорных теоретических исследований. Однако, в зависимости от вида решаемой задачи одна и та же реальная система может представляться различными априорными математическими моделями. При этом процесс идентификации может заключается как в определении параметров априорной математической модели, так и корректировки ее структуры. Наиболее распространенные априорные математические модели имеют вид, показанный ниже.

1. Статическая модель «вход-выход» [14]:

$$\overline{y}(t) = \overline{\psi}(\overline{u}(t), t, \overline{c}, \overline{\eta}(t)).$$
(3.1.1)

Данная модель является вероятностной, причем вектор \overline{c} и случайная вектор-функция $\overline{\eta}(t)$ входят в эту модель (в общем случае) в виде мультипликативных составляющих. Часто используется более простая нелинейная форма

$$\overline{y}(t) = \overline{\psi}(\overline{u}(t), \overline{c}) + \overline{\eta}(t) ,$$

где $\overline{y}(t)$ – вектор выходов объекта, \overline{c} – параметры объекта. Для объектов с одним выходом

$$y(t) = \psi(\overline{u}(t), \overline{c}) + \eta(t). \qquad (3.1.2)$$

Частными случаями такой модели являются детерминированные линейные модели «вход-выход»

$$\overline{y}(t) = \overline{b}_0(t) + B_1(t)\overline{u}(t), \qquad (3.1.3)$$

и вероятностные

$$\overline{y}(t) = \overline{b}_0(t) + B_1(t)\overline{u}(t) + \overline{\eta}(t). \qquad (3.1.4)$$

Здесь $\overline{b}_0(t)$ – столбец свободных членов; $B_1(t)$ – матрица коэффициентов модели.

Если перейти от непрерывного времени к дискретным его моментам $t_1, ..., t_N$, то уравнение (3.1.4) для этих моментов времени будет иметь вид:

$$\overline{y}(t_i) = \overline{b}_0(t_i) + B_1(t_i)\overline{u}(t_i) + \overline{\eta}(t_i).$$

В дальнейшем для простоты вместо аргумента t_i будем писать просто *i*. Тогда, например, статическая линейная модель с постоянными коэффициентами и одним выходом имеет вид:

$$y(i) = b_0 + b_1 u_1(i) + \dots + b_m u_m(i) + \eta(i)$$
(3.1.5)

или то же самое в векторной форме

$$y(i) = \overline{u}^{\mathrm{T}}(i)\overline{b} + \eta(i), \qquad (3.1.5a)$$

где $\overline{u}^{T}(i)$ – вектор входа в *i*-й момент времени (*i* = 1, ..., *N*); \overline{b} – вектор параметров.

$$\overline{b}^{\mathrm{T}} = (b_0, b_1, ..., b_m), \quad \overline{u}^{\mathrm{T}}(i) = (1, u_1(i), ..., u_m(i)).$$

В дальнейшем изложении будет широко использоваться также векторно-матричная форма записи уравнения (3.1.5):

$$\overline{y} = U\overline{b} + \overline{\eta}, \qquad (3.1.6)$$

где

$$\overline{b}^{\mathrm{T}} = (b_0, b_1, ..., b_m); \quad \overline{y}^{\mathrm{T}} = (y(1), ..., y(N));$$

$$U = \begin{bmatrix} 1 & u_1(1) & ... & u_m(1) \\ . & & & \\ . & & & \\ . & & & \\ 1 & u_1(N) & ... & u_m(N) \end{bmatrix}; \quad \overline{\eta}^{\mathrm{T}} = (\eta(1), ..., \eta(N)).$$

2. Динамическая модель «вход-выход».

В непрерывной форме динамическая модель может быть записана в виде:

$$\frac{d^{n}y(t)}{dt^{n}} + a_{n-1}^{*}\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_{0}^{*}y(t) = b_{m}^{*}\frac{d^{m}u(t)}{dt^{m}} + \dots + a_{$$

$$+b_0^*u(t) + d_m^* \frac{d^m \eta(t)}{dt^m} + \dots + d_0^* \eta(t), \quad m < n, \qquad (3.1.7)$$

или в дискретно-разностной форме

$$y(i) + \sum_{j=1}^{n} a_j y(i-j) = \sum_{r=0}^{m} b_r u(i-r) + \sum_{l=0}^{m} d_l \eta(i-l), \quad (3.1.8)$$

где $a_j = \frac{a_j^*}{a_0^*}; \ b_r = \frac{b_r^*}{a_0^*}; \ d_l = \frac{d_l^*}{a_0^*}.$

Очевидно, форма (3.1.5) является частным случаем (3.1.8) при

$$a_j = 0$$
, $j = \overline{1, n}$; $d_l = 0$, $l = \overline{1, m}$

Объекты, для которых справедливо последнее условие, называются регрессионными (Р-объекты):

$$y(i) = \sum_{r=0}^{m} b_r u(i-r) + \eta(i).$$

Объекты называются авторегрессионными (АР-объекты), если выполняется условие: $b_r = 0$, $r = \overline{1, m}$.

$$y(i) + \sum_{j=1}^{n} a_j y(i-j) = \sum_{l=0}^{m} d_l \eta(i-l).$$

В общем случае, когда справедливо описание (3.1.8), объекты называются регрессионными-авторегрессионными (РАР-объекты).

В случае нелинейного динамического объекта описывающее его уравнение «вход-выход» в общем случае может быть записано в виде:

$$y(i) = \psi(\bar{z}(i), \bar{c}) + \eta(i),$$
 (3.1.9)

где вектор $\overline{z}(i)$ включает в себя предысторию входов и выходов.

3. Линейная модель, представленная в пространстве состояний, имеет вид:

$$\dot{\overline{x}}(t) = A(t)\overline{x}(t) + B(t)\overline{u}(t) + G(t)\overline{\xi}(t); \qquad (3.1.10)$$

$$\overline{y}(t) = H(t)\overline{x}(t) + \overline{w}(t). \qquad (3.1.11)$$

Здесь $\bar{x}(t) - n$ -мерный вектор состояния, $\bar{u}(t) - m$ -мерный вектор управления, $\bar{\xi}(t) - p$ -мерный вектор возмущений, $\bar{y}(t) - r$ -мерный вектор измерений, $\bar{w}(t) - r$ -мерный сектор шумов измерений, A(t), B(t), G(t), H(t) – матрицы соответствующих размерностей.

Уравнение (3.1.10) называется уравнением состояния, а уравнение (3.1.11) – уравнением измерений.

Типы математических моделей, приведенные выше, являются вероятностными. Они, как правило, используются для имитациионного моделирования работы объекта. В дальнейшем эти уравнения будем называть уравнениями объекта.

3.1.2. Оптимальная настраиваемая модель

При решении задачи идентификации в первую очередь возникает вопрос о выборе модели объекта. Очевидно, модель должна формироваться на основе той априорной информации, которая нам известна об объекте. К этой информации относятся порядок уравнений объекта, точка приложения помехи и т.д.

Для целей идентификации используются детерминированные модели, которые не включают в себя случайных факторов. Будем использовать следующие обозначения [12]:

 a_{i} , b_{i} , d_{r} – истинные значения параметров объекта;

 $\overline{x}(k)$ – истинные значения параметров состояния;

 $\overline{y}(k)$ – истинные значения параметров измерений;

 \tilde{a}_j , \tilde{b}_j , \tilde{d}_r , $\tilde{\bar{x}}(k)$, $\tilde{\bar{y}}(k)$ – оценки соответствующих параметров; \hat{a}_j , \hat{b}_j , \hat{d}_r , $\hat{\bar{x}}(k)$, $\hat{\bar{y}}(k)$ – оптимальные в некотором смысле оценки параметров.

Предположим, что имеется объект под воздействием случайных факторов $\eta(i)$ – шумов и входов – управлений u(i), описываемый в конечно-разностной форме линейным уравнением (3.1.8), но в несколько измененной форме:

$$y(i) + \sum_{j=1}^{n} a_j y(i-j) = \sum_{j=1}^{m} b_j u(i-j) + \sum_{j=1}^{m} d_j \eta(i-j); \quad (3.1.12)$$

$$M\{\eta(i)\} = 0, \quad \operatorname{cov}\{\eta(i)\eta(j)\} = \sigma_{\eta}^2 \delta_{\kappa}(i-j),$$

 δ_{κ} – символ Кронекера.

Данному объекту (3.1.12), выходом которого является истинное измеренное значение y(i), можно сопоставить несколько детерминированных моделей, отражающих структуру данного объекта. Отметим, что модели при этом будут давать некоторую оценку $\tilde{y}(i)$ истинного значения. Казалось бы разумно использовать, например, следующую модель:

$$\widetilde{y}(i) + \sum_{j=1}^{n} \widetilde{a}_{j} \widetilde{y}(i-j) = \sum_{j=1}^{m} \widetilde{b}_{j} u(i-j).$$

Данная модель отличается от уравнения объекта только отсутствием шумов.

Можно показать, что использование данной модели для идентификации коэффициентов a_j и b_j приведет к систематической погрешности оценки этих параметров [4]. Дело заключается в том, что решение уравнения (3.1.12), по сути, интегрирует шумы, благодаря чему оно систематически будет отличаться от решения уравнения

$$\widetilde{y}(i) + \sum_{j=1}^{n} \widetilde{a}_{j} \widetilde{y}(i-j) = \sum_{j=1}^{m} \widetilde{b}_{j} u(i-j).$$

Иначе говоря, математическая модель, построенная на использовании результатов измерений выходов реального объекта (3.1.12) должна отличаться от исходной модели объекта без шумов.

Близость настраиваемой модели к объекту будем характеризовать математическим ожиданием квадрата невязки:

$$M\{\varepsilon^{2}(i)\} = M\{[y(i) - \tilde{y}(i)]^{2}\}.$$
 (3.1.13))

Под оптимальной настраиваемой моделью будем понимать такую, для которой $M\{\epsilon^2\}$ – минимально возможное.

Пусть корреляционная функция помехи

$$M\{\eta(i)\eta(i-j)\} = \begin{cases} \sigma_{\eta}^2, & j = 0; \\ 0, & j \neq 0. \end{cases}$$

Тогда оптимальная настраиваемая модель будет иметь вид:

$$\hat{y}(i) = -\sum_{j=1}^{n} \hat{a}_{j} y(i-j) + \sum_{r=0}^{m} \hat{b}_{r} u(i-r) + \sum_{l=1}^{m} \hat{d}_{l} / \hat{d}_{0} [y(i-l) - \hat{y}(i-l)].$$
(3.1.14)

Отсюда следует, что дисперсия невязки при наилучших оценках равна произведению дисперсии помехи σ_n^2 на d_0^2 .

Для удобства дальнейшего изложения запишем полученную оптимальную настраиваемую модель в общепринятом виде. Для этого введем вектор наблюдений

$$\overline{z}^{\mathsf{T}}(i) = (-y(i-1), ..., -y(i-n), u(i), ..., u(i-m), y(i-1) - \hat{y}(i-1), ..., y(i-m) - \hat{y}(i-m))$$
(3.1.15)

и вектор параметров

$$\tilde{\vec{c}}^{\mathrm{T}} = \left(\tilde{a}_{1}, ..., \tilde{a}_{n}, \tilde{b}_{0}, ..., \tilde{b}_{m}, \frac{\tilde{d}_{1}}{\tilde{d}_{0}}, ..., \frac{\tilde{d}_{m}}{\tilde{d}_{0}}\right).$$
(3.1.16)

Тогда уравнение (3.1.14)) можно переписать в векторном виде:

$$\widetilde{y}(i) = \psi(\overline{z}(i), \widetilde{\overline{c}}) = \overline{z}^{\mathrm{T}}(i)\widetilde{\overline{c}}.$$
(3.1.17)

Очевидно, для регрессионных объектов модель (3.1.17) примет вид

$$\widetilde{y}(i) = \overline{u}^{\mathrm{T}}(i)\widetilde{\overline{b}}. \qquad (3.1.18)$$

При $\tilde{c} = \bar{c}$ невязка между выходом настраиваемой модели и выходом объекта равна произведению помехи $\eta(i)$ на d_0 [13]:

$$\varepsilon(i) = y(i) - \hat{y}(i) = d_0 \eta(i) . \qquad (3.1.19)$$

Отсюда следует, что дисперсия невязки между выходом настраиваемой модели и выходом объекта, вызванная только структурой настраиваемой модели равна произведению дисперсии помехи σ_n^2 и d_0^2 .

$$\sigma_{\varepsilon}^2 = d_0^2 \, \sigma_{\eta}^2$$

Очевидно, что при $d_0 = 1$ и $\tilde{c} = \bar{c}$ невязка между настраиваемой моделью и объектом в каждый *i*-й момент времени равна помехе $\eta(i)$.

3.2. Свойства оценок и критерии качества в задачах статистической обработки информации

3.2.1. Свойства оценок

Выше неоднократно использовались такие термины, как оценка, алгоритм вычисления оценки.

Под оценкой будем понимать некоторое правило, согласно которому вычисляются частные значения \tilde{c} , соответствующие частным выборкам вектора наблюдений $\bar{z} = \bar{\alpha}$. Другими словами, оценка есть некоторая случайная величина, которая характеризуется плотностью распределения вероятностей $p(\tilde{c},t)^*$ или $p(\tilde{c},k)$, где *t* и *k* характеризуют момент наблюдения. (Чтобы упростить запись (здесь и далее) не делаем различия в обозначениях случайных величин или процессов и принимаемых ими конкретных значений. Условимся также не вводить специальных обозначений для различных плотностей распределения; плотности распределения при различных аргументах различны, если не оговорено обратное. Такое соглашение в последнее время становится общеупотребительным.)

Плотность распределения $p(\tilde{c},k)$ или $p(\tilde{c},t)$ является наиболее полной характеристикой оценки. Однако, учитывая большие трудности нахождения $p(\tilde{c},k)$ или $p(\tilde{c},t)$, используют математическое ожидание оценки $M\{\tilde{c}\}$ и ковариационную матрицу оценки.

Из желаемых свойств оценок можно выделить следующие пять [14]:

1) линейность оценки;

2) несмещенность оценки;

3) минимум дисперсии в классе несмещенных оценок;

4) состоятельность или сходимость оценки (состоятельность и сходимость в среднем квадратичном);

5) эффективность, асимптотическая эффективность, оптимальность в классе асимптотически нормальных оценок.

Рассмотрим подробно эти желаемые свойства оценок.

1. *Определение*. Оценка называется линейной, если она является линейной формой выхода:

$$\widetilde{\overline{c}}_L = Q\overline{Y} + \overline{\gamma}$$
 или $\widetilde{\overline{c}}_L = A\overline{y}(i) + \overline{\gamma}$, (3.2.1)

где Q – некоторая матрица, \overline{y} – вектор выходных параметров по N измерениям.

$$\overline{y}^{\mathrm{T}} = (y(1), ..., y(N)).$$
 (3.2.2)

2. Определение. Оценка называется несмещенной, если выполняется условие

$$M\{\widetilde{\overline{c}}\} = M\{\overline{c}\}.$$
 (3.2.3)

3. Определение. Оценка называется условно несмещенной, если

$$M\{\overline{\widetilde{c}}/\overline{c}\} = \overline{c} . \tag{3.2.4}$$

Покажем, что необходимым условием несмещенности (условной несмещенности) линейной оценки для объекта вида (3.1.6) является условие

$$QU = I , \qquad (3.2.5)$$

где *U* – матрица выходов.

Подставим в формулу для линейной оценки (3.2.1) значение выхода объекта, определяемое формулой (3.1.6)

$$\widetilde{\overline{c}}_L = Q(U\overline{c} + \overline{\eta}), \qquad (3.2.6)$$

и применим операцию нахождения математического ожидания к обеим частям полученного выражения

$$M\{\widetilde{\overline{c}}_L\} = M\{Q(U\overline{c} + \overline{\eta})\}.$$
(3.2.7)

Так как U и Q детерминированные матрицы входных воздействий и коэффициентов усиления, то можно записать:

$$M\{\overline{\tilde{c}}_L\} = QUM\{\overline{c}\} + QM\{\overline{\eta}\}.$$
(3.2.8)

Очевидно, будем иметь несмещенную оценку только в том случае, если:

1)
$$QU = I;$$
 2) $M\{\overline{\eta}\} = 0,$ (3.2.9)

что и требовалось показать, т.е. условие (3.2.4) является необходимым условием несмещенности линейной оценки. 4. Определение. Оценка \bar{c}_{MV} называется несмещенной оценкой минимальной дисперсии, если она не смещена, и, кроме того, для нее справедливо соотношение:

$$\operatorname{var}\{\overline{\widehat{c}}_{MV} - \overline{c}\} \le \operatorname{var}\{\overline{\widetilde{c}} - \overline{c}\}, \qquad (3.2.10)$$

где $\tilde{\overline{c}}$ – любая другая несмещенная оценка.

5. Определение. Говорят, что оценка сходится к оцениваемой величине, если ее точность возрастает с увеличением объема выборки. Введем обозначение $\tilde{c}(N)$ для оценки параметра по выборке объема *N*. Оценка называется состоятельной, если для любого $\delta > 0$

$$\lim_{N \to \infty} P(\left| \widetilde{c}(N) - \overline{c} \right| < \delta) = 1.$$
(3.2.11)

В этом случае говорят, что оценка сходится по вероятности.

6. Определение. Оценка называется состоятельной в среднем квадратичном (сходится в среднем квадратичном), если

$$\lim_{N \to \infty} \operatorname{var}(\widetilde{\overline{c}}(N) - \overline{c}) = 0.$$
 (3.2.12)

Согласно (3.2.9), для того чтобы оценка была состоятельной, необходимо и достаточно выполнения двух условий: оценка должна быть несмещенной и

$$\lim_{N\to\infty} \operatorname{var}(\widetilde{\overline{c}}(N) - \overline{c}) = 0.$$

7. Определение. Оценка $\tilde{\overline{c}}_{\mathfrak{I}}(N)$, состоятельная в среднем квадратичном, называется эффективной, если справедливо соотношение:

$$M\{(\tilde{\overline{c}}_{\mathfrak{I}}(N) - \overline{c})(\tilde{\overline{c}}_{\mathfrak{I}}(N) - \overline{c})^{\mathsf{T}}\} \le M\{(\tilde{\overline{c}}(N) - \overline{c})(\tilde{\overline{c}}(N) - \overline{c})^{\mathsf{T}}\}, (3.2.13)$$

где $\vec{c}(N)$ — любая другая состоятельная оценка, причем равенство достигается при $\tilde{\vec{c}}(N) = \tilde{\vec{c}}_{2}(N)$.

3.2.2. Критерии качества, функции потерь и штрафа в задачах оценки

Как уже отмечалось, критерий качества оценки наряду с математической моделью является основой при построении оценок параметров. До недавнего времени не существовало каких-либо теоретически обоснованных методов выбора функций качества. Предпочтение того или иного критерия другим определялось простотой решения задачи, доступной априорной информацией и практической целесообразностью.

Критерий качества оценки $J(\tilde{c})$ в общем случае представляет собой математическое ожидание некоторой функции потерь $F(\varepsilon)$ или штрафа $\varphi(\bar{c} - \bar{c})$, которые являются положительными четными функциями своих аргументов, т.е.

$$J(\tilde{\overline{c}}) = M\{F(\varepsilon(i,\tilde{\overline{c}}))\}$$
(3.2.13)

или

$$J(\widetilde{\overline{c}}) = M\left\{\phi(\overline{c} - \widetilde{\overline{c}})\Big|_{\overline{y} = \overline{\alpha}}\right\},$$
(3.2.14)

где $\varepsilon(i, \tilde{\vec{c}})$ – невязка между выходами объекта и модели;

 $\varepsilon(i, \tilde{\overline{c}}) = y(i) - \psi(i, \tilde{\overline{c}})$

i – момент времени, $\overline{\alpha}$ – конкретная реализация выхода \overline{y} . Оптимальным значением оценки параметра \overline{c} является решение уравнения:

$$\frac{\partial J(\tilde{c})}{\partial \tilde{c}}\Big|_{\tilde{c}=\hat{c}} = \nabla M \left\{ F(\varepsilon(i,\tilde{c})) \right\} \Big|_{\tilde{c}=\hat{c}} = 0$$
(3.2.15a)

или

$$\frac{\partial J(\tilde{\vec{c}})}{\partial \tilde{\vec{c}}} \bigg|_{\tilde{\vec{c}}=\hat{\vec{c}}} = \nabla M \left\{ \varphi(\bar{c}-\tilde{\vec{c}}) \bigg|_{\bar{y}=\bar{\alpha}} \right\} \bigg|_{\tilde{\vec{c}}=\hat{\vec{c}}} = 0.$$
(3.2.156)

Во многих литературных источниках функция $\phi(\overline{c} - \widetilde{c})$ также называется функцией потерь, но во избежание недоразумений будем называть ее функцией штрафа.

Оценки, которые обеспечивают минимум функции (3.2.14), называются байесовскими оценками, а функция (3.2.14) – байесовской функцией риска.

На практике, как правило, не представляется возможным определить критерий (3.2.13). Однако для эргодических процессов оценка $M\{F(\varepsilon(i, \tilde{c}))\}$ может быть заменена эмпирическими усредненными по времени потерями, вычисленными по одной реализа-
ции, т.е. как среднее арифметическое функций потерь по *N* измерениям:

$$J(\widetilde{c}) = M\{F(\varepsilon(i,\widetilde{c}))\} \cong \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} F(\varepsilon(i,\widetilde{c})) = J_N(\widetilde{c}) . \quad (3.2.16)$$

Оптимальной выборочной оценкой $\hat{c}(N)$ является решение уравнения:

$$\frac{\partial J_N(\tilde{c})}{\partial \tilde{c}} \bigg|_{\tilde{c}=\hat{c}(N)} = 0.$$
 (3.2.17)

В дальнейшем, если этого не требует решение задачи, будем опускать индекс *N* при написании выборочной оценки.

3.2.3. Инвариантность оптимального решения относительно четных функций потерь (для линейного объекта)

Естественно принять допущение, что оптимальным решением уравнения (3.2.15а) является истинное значение параметра \bar{c} . Тогда условие минимума (3.2.15а) средних потерь (3.2.13), определяющее оптимальное решение $\hat{c} = \bar{c}$, можно записать в виде равенства нулю градиента средних потерь:

$$\nabla J(\tilde{\vec{c}})\Big|_{\tilde{\vec{c}}=\bar{\vec{c}}} = M\{\nabla F[\varepsilon(i,\tilde{\vec{c}})]\}\Big|_{\tilde{\vec{c}}=\bar{\vec{c}}} = M\{F'[\varepsilon(i,\bar{\vec{c}})]\nabla\varepsilon(i,\tilde{\vec{c}})\}\Big|_{\tilde{\vec{c}}=\bar{\vec{c}}} = 0.$$
(3.2.18)

и положительной определенности матрицы Гессе – матрицы вторых производных:

$$\nabla^2 J(\tilde{\overline{c}}) = M\{\nabla^2 F[\varepsilon(i,\tilde{\overline{c}})]\}\Big|_{\tilde{\overline{c}}=\overline{c}} > 0.$$
(3.2.19)

Учитывая, что при $\tilde{c} = \bar{c}$ невязка $\varepsilon(i, \bar{c})$ между выходом объекта y(i) и выходом оптимальной настраиваемой модели $\tilde{y}(i)$ в *i*-й момент времени равна возмущению $\eta(i)$, можно записать

$$\nabla J(\tilde{c})\Big|_{\tilde{c}=\bar{c}} = M\left\{F'[\eta(i)]\nabla\varepsilon(i,\tilde{c})\Big|_{\tilde{c}=\bar{c}}\right\} = 0.$$
(3.2.20)

Обратим внимание, что $\eta(i)$ и $\nabla \varepsilon(i, \tilde{\vec{c}})\Big|_{\tilde{\vec{c}}=\bar{\vec{c}}}$ статистически независимы.

Тогда

$$\nabla J(\tilde{c})\Big|_{\tilde{c}=\bar{c}} = M\{F' [\eta(i)]\nabla \ \varepsilon(i,\bar{c})\} =$$
$$= M\{F' [\eta(i)]\}M\{\nabla \ \varepsilon(i,\bar{c})\} = 0.$$
(3.2.21)

Тривиальное решение уравнения (3.2.21) будет при условии

$$M\{F'[\eta(i)]\}=0,$$

или

$$\int_{-\infty}^{\infty} F'[\eta] p(\eta) d\eta = 0.$$
 (3.2.22)

Так как $p(\eta)$, как правило, четная функция η , то для выполнения тождества (3.2.22) необходимо и достаточно, чтобы $F'(\eta)$ была нечетной функцией η или $F(\eta)$ – четной функцией η .

Таким образом, условие оптимальности (3.2.21) при $\tilde{c} = \bar{c}$ выполняется для любой четной функции потерь. Иначе говоря, оптимальное решение инвариантно относительно четных функций потерь, причем оптимальное решение совпадает с истинным значением оцениваемого параметра.

Однако на практике, как уже отмечалось, вместо математических ожиданий используются эмпирические средние, вычисляемые по наблюдаемым данным. В результате можно находить лишь те или иные оценки $\hat{c}(N)$ истинного параметра \bar{c} . Причем даже если полученные оценки состоятельны, то их асимптотические свойства (скорость стремления оценки к истинному значению) существенно зависят от вида используемой функции потерь. В результате выше-изложенного возникает задача нахождения такой функции потерь $F * (\varepsilon(\tilde{c}))$, при которой оценка $\hat{c}(N)$ обладает максимально возможной скоростью сходимости к истинному значению параметра \bar{c} .

Особенно большое значение приобретает этот вопрос при разработке робастных (стабильных, гарантирующих) методов оценивания параметров. Вопросы, связанные с определением оптимальных функций потерь, рассматриваются в последующих разделах настоящего пособия.

Рассмотрим наиболее часто используемые в настоящее время в теории оценивания функции потерь и штрафа:

1) квадратичные:

$$\varphi(\overline{c} - \tilde{\overline{c}}) = (\overline{c} - \tilde{\overline{c}})^{\mathrm{T}} R(\overline{c} - \tilde{\overline{c}}); \qquad (3.2.23)$$

$$F(\varepsilon(i,\tilde{c})) = r(i)(y(i) - \tilde{y}(i,\tilde{c}))^2; \qquad (3.2.24)$$

где *R* – положительно-определенная симметричная матрица весовых коэффициентов;

2) модульные:

$$\varphi(\overline{c} - \widetilde{c}) = \left\| \overline{c} - \widetilde{c} \right\|; \qquad (3.2.25)$$

$$F(\varepsilon(i,\tilde{c})) = r(i) |y(i) - \tilde{y}(i,\tilde{c})|; \qquad (3.2.26)$$
$$i = 0, 1, 2, \dots;$$

3) простые:

$$\varphi(\overline{c} - \widetilde{c}) = \begin{cases} 0, & \left\|\overline{c} - \widetilde{c}\right\| < \delta / 2; \\ 1 / \delta, & \left\|\overline{c} - \widetilde{c}\right\| \ge \delta / 2; \end{cases}$$
(3.2.27)

$$F(\varepsilon(i,\tilde{c})) = \begin{cases} 0, & |y(i) - \tilde{y}(i)| < \delta/2; \\ 1/\delta, & |y(i) - \tilde{y}(i)| \ge \delta/2. \end{cases}$$
(3.2.28)

Можно предложить и другие функции потерь и штрафа.

3.3. Статистические методы обработки данных при использовании полного объема информации

3.3.1. Метод наименьших квадратов

Метод наименьших квадратов нашел наиболее широкое распространение в практике оценивания, так как для реализации этого метода требуется только знание структуры модели.

Функция потерь, критерий качества оценки

Как уже отмечалось, методу наименьших квадратов соответствует квадратичная функция потерь. Для объекта с одним выходом эта функция имеет вид:

$$F(\varepsilon(i,\tilde{\overline{c}})) = r(i)(y(i) - \psi(i,\tilde{\overline{c}}))^2.$$
(3.3.1)

Критерий качества имеет вид:

$$J(\tilde{c}) = M\{r(i)(y(i) - \psi(i, \tilde{c}))^2\}$$

Для эргодических процессов в качестве критерия качества используются средние потери:

$$J(\tilde{\overline{c}}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} r(i) (y(i) - \psi(i, \tilde{\overline{c}}))^2 .$$

Так как N представляет собой некоторое число, показывающее количество используемых для оценки значений выходов объекта и модели и независящее от оценки \tilde{c} , то функцию $J(\tilde{c})$ можно переписать в виде:

$$J(\tilde{c}) = \sum_{i=1}^{N} r(i)(y(i) - \psi(i, \tilde{c}))^{2}, \qquad (3.3.2)$$

или в векторной форме:

$$J(\tilde{\overline{c}}) = (\overline{y} - \overline{\psi}(\tilde{c}))^{\mathrm{T}} R(\overline{y} - \overline{\psi}(\tilde{c})) . \qquad (3.3.2a)$$

Оценка \hat{c}_{is} обеспечивает минимальное значение критерия (3.3.2), т.е.

$$\hat{\overline{c}}_{ls} = \arg\min_{\widetilde{c}} \left\{ \sum_{i=1}^{N} (y(i) - \psi(i, \widetilde{\overline{c}}))^2 r(i) \right\}$$
(3.3.3)

и является решением уравнения:

$$\frac{\partial J(\tilde{c})}{\partial \tilde{c}}\Big|_{\tilde{c}=\hat{c}_{ls}} = 0.$$
(3.3.4)

В общем случае, когда правая часть модели представляет собой нелинейную функцию $\psi(u(i), \tilde{c})$, задача минимизации критерия (3.3.2) как правило, не может быть решена в явном виде и требует использования методов нелинейного программирования. В случае линейной модели вида (3.1.18) получены явные формулы оценки.

3.3.2. Метод наименьших квадратов для линейных регрессионных объектов

Как уже отмечалось в разд. 3.1.1, регрессионный объект и соответствующая ему модель имеют вид:

$$y(i) = b_1 u_1(i) + b_2 u_2(i) + \dots + b_m u_m(i) + \eta(i); \qquad (3.3.5)$$

$$\tilde{y}(i) = \tilde{b}_1 u_1(i) + \tilde{b}_2 u_2(i) + \dots + \tilde{b}_m u_m(i).$$
(3.3.6)

Запишем уравнения объекта и модели в векторно-матричной форме:

$$\overline{y} = U\overline{b} + \overline{\eta}; \qquad (3.3.7)$$

$$\widetilde{\overline{y}} = U\overline{b} , \qquad (3.3.8)$$

где \overline{y} , $\overline{\tilde{y}} - N$ -мерные вектора выходов объекта и модели, соответственно, U – матрица входов размерности $N \times m$, $\overline{\eta} - N$ -мерный вектор шума измерений.

Представим критерий качества (3.3.2) также в векторной форме:

$$J(\widetilde{\overline{b}}) = (\overline{y} - \widetilde{\overline{y}}(\widetilde{\overline{b}}))^{\mathrm{T}} R(\overline{y} - \widetilde{\overline{y}}(\widetilde{\overline{b}})), \qquad (3.3.9)$$

R – диагональная матрица весовых коэффициентов.

Подставляя уравнение модели (3.3.8) в выражение (3.3.9), получим явную зависимость критерия качества от оценки $\tilde{\vec{b}}$:

$$J(\tilde{\overline{b}}) = (\overline{y} - U\tilde{\overline{b}})^{\mathrm{T}} R(\overline{y} - U\tilde{\overline{b}}).$$
(3.3.10)

Как уже отмечалось, $\hat{\overline{b}}_{is}$ является корнем уравнения:

$$\frac{\partial J(\tilde{\vec{b}})}{\partial \tilde{\vec{b}}} \bigg|_{\tilde{\vec{b}} = \hat{\vec{b}}_{ls}} = 0$$

Преобразуем выражение (3.3.10) к виду, удобному для дифференцирования. Для этого произведем указанные действия

$$J(\widetilde{\overline{b}}) = \overline{y}^{\mathrm{T}} R \overline{y} + 2 \widetilde{\overline{b}}^{\mathrm{T}} U^{\mathrm{T}} R \overline{y} + \widetilde{\overline{b}}^{\mathrm{T}} U^{\mathrm{T}} R U \widetilde{\overline{b}}^{\mathrm{T}}.$$
 (3.3.11)

Дифференцируя (3.3.11) и приравнивая полученное выражение нулю, запишем:

$$-U^{\mathrm{T}}R\overline{y} + U^{\mathrm{T}}RU\hat{\overline{b}}_{LS} = 0$$

ИЛИ

$$U^{\mathrm{T}}RU\hat{\overline{b}}_{ls} = U^{\mathrm{T}}R\overline{y}. \qquad (3.3.12)$$

Разрешая (3.3.12) относительно $\hat{\bar{b}}_{ls}$, получаем искомую оценку наименьших квадратов

$$\hat{\overline{b}}_{ls} = (U^{\mathrm{T}}RU)^{-1}U^{\mathrm{T}}R\overline{y}. \qquad (3.3.13)$$

В том случае, когда *N* велико, а параметры входов имеют большие значения, удобно перейти к центрированной форме. Центрированная форма удобна и в том случае, если в уравнениях (3.3.5) и (3.3.6) присутствует свободный член, т.е.

$$y(i) = b_0 + b_1 u_1(i) + \dots + b_m u_m(i) + \eta(i), \quad i = 1, N; \quad (3.3.14)$$

$$\widetilde{y}(i) = \widetilde{b_0} + b_1 u_1(i) + \dots + \widetilde{b_m} u_m(i). \quad (3.3.15)$$

Получим центрированную форму на примере использования объекта (3.3.5). Для объектов типа (3.3.14) решение задачи приведено в конце данного раздела. Просуммируем поэлементно уравнения (3.3.14) по всем $i = \overline{1, N}$:

$$\sum_{i=1}^{N} y(i) = b_1 \sum_{i=1}^{N} u_1(i) + \dots + b_m \sum_{i=1}^{N} u_m(i) + \sum_{i=1}^{N} \eta(i) .$$

Разделив последнее выражение на *N*, получим уравнение объекта, записанное относительно средних значений входов и выхода:

$$\overline{y}^{cp} = b_1 u_1^{cp} + \dots + b_m u_m^{cp} + \eta^{cp}$$
. (3.3.16)

Вычитая из (3.3.5) (3.3.16), получим уравнение объекта относительно центрированных входов и выходов:

$$y^{o}(i) = b_{1}u_{1}^{o}(i) + ... + b_{m}u_{m}^{o}(i) + \eta^{o}(i);$$

$$y^{o}(i) = y(i) - y^{cp}(i), u_{j}^{o}(i) = u_{j}(i) - u_{j}^{cp}, j = \overline{1, m}, i = \overline{1, N}.$$
 (3.3.17)

Модель, соответствующая (3.3.17), будет иметь вид:

$$\widetilde{y}^{\circ}(i) = \widetilde{b}_{1}u_{1}^{\circ}(i) + ... + \widetilde{b}_{m}u_{m}^{\circ}(i)$$
. (3.3.18)

Тогда оценку $\hat{\overline{b}}_{ls}$ можно записать как

$$\hat{\overline{b}}_{ls} = (U^{\text{OT}} R U^{\text{O}})^{-1} U^{\text{OT}} R \overline{y},$$
 (3.3.19)

где

 $U^{\mathbf{o}} = U - U^{\mathbf{cp}}; \quad \overline{y}^{\mathbf{o}} = \overline{y} - \overline{y}^{\mathbf{cp}}.$

Очевидно, уравнения (3.3.13) и (3.3.19) совершенно эквивалентны. Условием единственности решения этих уравнений является условие невырожденности матрицы ($U^{T}RU$), или, что эквивалентно, ($U^{OT}RU^{O}$), т.е.:

$$\operatorname{rank}(U^{\mathrm{T}}RU) = \operatorname{rank}(U^{\mathrm{OT}}RU^{\mathrm{O}}) = m$$
,

где *т* – число оцениваемых параметров.

Как известно, ранг матрицы, являющейся результатом произведения двух матриц, меньше или равен минимальному рангу матриц, входящих в произведение. Таким образом, если количество измерений N меньше m, то матрица ($U^{T}RU$) оказывается вырожденной. В том случае, если N = m – оценивание по достаточному числу измерений. В этом случае уравнение (3.3.13) (или (3.3.19)) может быть преобразовано к тривиальной форме:

$$\hat{\overline{b}}_{ls} = U^{-1}\overline{y} \tag{3.3.20a}$$

или

$$\hat{\overline{b}}_{ls} = U^{o^{-1}}\overline{y}$$
. (3.3.206)

Задача. Найти оценку наименьших квадратов для линейного объекта

$$y(i) = b_0 + b_1 u_1(i) + \dots + b_m u_m(i) + \eta(i)$$
.

После операции центрирования уравнение модели объекта имеет вид:

$$y^{\circ}(i) = \widetilde{b}_{1}u_{1}^{\circ}(i) + \ldots + \widetilde{b}_{m}u_{m}^{\circ}(i).$$

Как видно, в последнем уравнении отсутствует свободный член \tilde{b}_0 . Оценку параметров \tilde{b}_1 , \tilde{b}_2 ,..., \tilde{b}_m найдем по формуле (3.3.19):

$$\hat{\overline{b}}'_{ls} = (U^{\text{OT}} R U^{\text{O}})^{-1} U^{\text{OT}} R \overline{y}^{\text{O}},$$

где $\hat{\overline{b}}_{ls}'$ – вектор оценок без \hat{b}_0 .

Для нахождения оценки \hat{b}_0 и ошибки оценки $b_0 - \hat{b}_0$ воспользуемся записью объекта и модели объекта относительно средних значений входов и выхода

$$y^{\rm cp} = b_0 + b_1 u_1^{\rm cp} + \dots + b_m u_m^{\rm cp} + \eta^{\rm cp};$$
$$\widetilde{y}^{\rm cp} = \widetilde{b_0} + \widetilde{b_1} u_1^{\rm cp} + \dots + \widetilde{b_m} u_m^{\rm cp}.$$

Тогда оценка и ошибка оценки параметра *b*₀ могут быть определены по формулам:

$$\hat{b}_0 = y^{\rm cp} - \hat{b}_1 u_1^{\rm cp} - \dots - \hat{b}_m u_m^{\rm cp},$$

$$b_0 - \hat{b}_0 = (b_1 - \hat{b}_1)u_1^{\text{cp}} + \dots + (b_m - \hat{b}_m)u_m^{\text{cp}} + \eta^{\text{cp}}.$$

Как видно из последней формулы, ошибка оценки b_0 включает в себя ошибки оценок других параметров, а также среднестатистическое значение шума измерений. Как правило, оценка параметра b_0 оказывается наиболее неточной.

Необходимо отметить, что использование обычной процедуры оценивания, без операции центрирования, приводит к совершенно аналогичным результатам.

Ковариационная матрица ошибки оценки

Найдем ковариационную матрицу ошибок оценки, при этом будем считать, что оценка $\hat{\vec{b}}_{LS}$ – несмещенная, т.е. $M\{\hat{\vec{b}}_{LS}\} = M\{\bar{b}\}$.

$$\operatorname{var}\{\widehat{\overline{b}}_{LS} - \overline{b}\} = M\left\{(\widehat{\overline{b}}_{LS} - \overline{b})(\widehat{\overline{b}}_{LS} - \overline{b})^{\mathrm{T}}\right\}$$

Воспользуемся формулой для оценки (3.3.13), тогда

 $\operatorname{var}\{\widehat{\overline{b}}_{LS} - \overline{b}\} = M\{(QU\overline{b} + Q\overline{\eta} - \overline{b})(QU\overline{b} + Q\overline{\eta} - \overline{b})^{\mathsf{T}}\}, (3.3.21)$ где $Q = (U^{\mathsf{T}}RU)^{-1}U^{\mathsf{T}}R.$

Для конкретных N реализаций матрица входа U является детерминированной величиной, кроме того, учитывая, что QU = I, получим

$$\operatorname{var}(\hat{\overline{b}}_{LS} - \overline{b}) = QM\{\overline{\eta}\overline{\eta}^{\mathrm{T}}\}Q^{\mathrm{T}}.$$
(3.3.22)

Но $M{\{\overline{\eta}\,\overline{\eta}^{\mathrm{T}}\}}$ – ковариационная матрица помехи $\overline{\eta}$.

Таким образом, имеем

$$\operatorname{var}(\hat{\overline{b}}_{LS} - \overline{b}) = (U^{\mathrm{T}}RU)^{-1}U^{\mathrm{T}}RD_{\eta}RU^{\mathrm{T}}(U^{\mathrm{T}}RU)^{-1}. \quad (3.3.23)$$

Выражение (3.3.23) определяет ковариационную матрицу ошибок несмещенных оценок наименьших квадратов при линейном уравнении объекта.

Если измерения некоррелированы и равноточны $(D_{\eta} = \sigma_{\eta}^2 I)$, то в качестве матрицы весов *R* можно принять единичную матрицу, т.е. R = I.

В этом случае выражение (3.3.23) существенно упрощается:

$$\operatorname{var}(\hat{\overline{b}}_{LS} - b) = (U^{\mathrm{T}}U)^{-1}\sigma_{\eta}^{2}.$$
 (3.3.24)

Нетрудно заметить, что если в формулу для ковариационной матрицы (3.3.21) вместо выражения (3.3.13) подставить эквивалентное ему выражение (3.3.20), то получим выражение для ковариационной матрицы ошибки оценки, записанное относительно центрированных входов и выходов:

$$\operatorname{var}\{\hat{\overline{b}}_{LS} - \overline{b}\} = \left(U^{o^{\mathrm{T}}}RU^{o}\right)^{-1} U^{o^{\mathrm{T}}}RD_{\eta}RU^{o}\left(U^{o^{\mathrm{T}}}RU^{o}\right). \quad (3.3.25)$$

Или для некоррелированных равноточных измерений и R = I:

$$\operatorname{var}\{\widehat{\overline{b}}_{LS} - \overline{b}\} = \left(U^{o^{\mathrm{T}}}U^{o}\right)^{-1} \sigma_{\eta}^{2}.$$
(3.3.26)

Очевидно, выражения (3.3.23) и (3.3.25), а также (3.3.24) и (3.3.26) совершенно эквивалентны. В дальнейшем, в зависимости от решаемой задачи, мы будем использовать то или иное выражение для ковариационной матрицы ошибки оценки.

Свойства оценки наименьших квадратов в случае линейных регрессионных объектов

1. Линейность. Очевидно, оценка (3.3.13) (или эквивалентная ей оценка 1.3.19) линейны.

2. Несмещенность. Найдем математическое ожидание оценки. Для этого воспользуемся формулой (3.3.13):

$$M\{\overline{b}_{LS}\} = M\{(U^{\mathrm{T}}RU)^{-1}U^{\mathrm{T}}R\overline{y}\}$$

Подставим вместо \bar{y} его выражение (3.3.7):

$$M\{\widehat{\overline{b}}_{LS}\} = M\{(U^{\mathsf{T}}RU)^{-1}U^{\mathsf{T}}R(U\overline{b}+\overline{\eta})\} =$$
$$= M\{\overline{b}\} + (U^{\mathsf{T}}RU)^{-1}U^{\mathsf{T}}RM\{\overline{\eta}\}.$$
(3.3.27)

Очевидно, что оценка \bar{b}_{LS} – несмещенная, если $M\{\bar{\eta}\}=0$. В противном случае оценка будет смещена на величину

$$\overline{\delta} = (U^{\mathsf{T}} R U)^{-1} U^{\mathsf{T}} R M \{\overline{\eta}\}.$$
(3.3.28)

3. Состоятельность. Покажем, что оценка наименьших квадратов состоятельна, Воспользуемся формулой (3.3.26) для ковариационной матрицы ошибки оценки при некоррелированных равноточных измерениях. Констатируем факт, что оценка получена по *N* измерениям:

$$\operatorname{var}\{\widehat{\overline{b}}_{LS}(N) - \overline{b}\} = \left(U^{o^{\mathrm{T}}}U^{o}\right)^{-1} \sigma_{\eta}^{2}.$$

Возьмем предел при $N \to \infty$ от правой и левой частей последнего выражения:

$$\lim_{N \to \infty} \operatorname{var} \{ \hat{\overline{b}}_{LS}(N) - \overline{b} \} = \lim_{N \to \infty} \left\{ \left(U^{\circ^{\mathrm{T}}} U^{\circ} \right)^{-1} \right\} \sigma_{\eta}^{2}.$$
Представим матрицу $\left(U^{\circ^{\mathrm{T}}} U^{\circ} \right)$ в поэлементной форме:
 $\left(U^{\circ^{\mathrm{T}}} U^{\circ} \right) =$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N} (u_{1}(i) - \mu_{u_{1}})^{2} & \sum_{i=1}^{N} (u_{1}(i) - \mu_{u_{1}})(u_{2}(i) - \mu_{u_{2}}) & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \sum_{i=1}^{N} (u_{m}(i) - \mu_{u_{m}})(u_{1}(i) - \mu_{u_{1}}) & \dots & \sum_{i=1}^{N} (u_{m}(i) - \mu_{u_{m}})^{2} \end{bmatrix}$$

Нетрудно заметить, что эта матрица представляет собой оценку ковариационной матрицы входов, умноженную на число измерений N, т.е.:

$$\left(U^{\text{ot}}U^{\text{o}}\right) \cong D_u N \,. \tag{3.3.29}$$

Учитывая, что элементы матрицы D_u ограничены, получим:

$$\lim_{N \to \infty} \left(U^{\text{ot}} U^{\text{ot}} \right)^{-1} \sigma_{\eta}^2 = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} D_u \sigma_{\eta}^2 = 0$$

Последнее соотношение эквивалентно условию состоятельности оценки. Используя приближенное равенство (3.3.29), можно записать оценочную формулу для ковариационной матрицы ошибки оценки:

$$\operatorname{var}\{\hat{\overline{b}}_{LS}(N) - \overline{b}\} = \frac{1}{N} \sigma_{\eta}^2 D_u^{-1}.$$
 (3.3.30)

Последнее выражение показывает, что чем больше «разброс» входных параметров, тем точнее оценку мы можем получить. С другой стороны, чем больше дисперсия шума измерений, тем менее точную оценку мы получаем.

Пример. Рассмотрим идентификацию параметров линейного регрессионного объекта с тремя входами и одним выходом:

$$y(i) = b_0 + b_1 u_1(i) + b_2 u_2(i) + b_3 u_3(i) + \eta(i)$$

Для моделирования данного объекта были приняты следующие истинные значения параметров:

$$b_0 = 3.0; \quad b_1 = -4.0; \quad b_2 = -5.0; \quad b_3 = -6.0.$$

Входные воздействия $u_1(i)$, $u_2(i)$, $u_3(i)$, а также шум $\eta(i)$ моделировались с помощью генератора нормально распределенных псевдослучайных чисел.

Для идентификации параметров b_0 , b_1 , b_2 , b_3 и исследования влияния дисперсии входных потоков и дисперсии шума на точность оценки было проведено 10 групп измерений по 50 измерений в каждой группе. В качестве характеристики точности оценивания использовалось вычисляемое средне квадратичное отклонение оценки от истинного значения параметра:

$$S = \left[\sum_{j=1}^{10} \left(\left(b_0 - \hat{b}_{0j} \right)^2 + \left(b_1 - \hat{b}_{1j} \right)^2 + \left(b_2 - \hat{b}_{2j} \right)^2 + \left(b_3 - \hat{b}_{3j} \right)^2 \right) \right] / 10,$$

которое представляет собой приближение следа ковариационной матрицы ошибки оценки, т.е.

$$tr\left[M\left\{(\overline{b}-\widehat{\overline{b}}_{LS})(\overline{b}-\widehat{\overline{b}}_{LS})^{\mathrm{T}}\right\}\right] \cong S.$$

На рис. 3.3 приведены зависимости параметра точности *S* от дисперсий входных потоков при различных значениях дисперсии шума измерений. Полученные графические зависимости полностью согласуются с теоретическими выводами (3.3.30), а именно:

увеличение дисперсии входных потоков приводит к увеличению точности оценивания;

увеличение дисперсии шума измерений приводит к уменьшению точности оценивания.



Рис. 3.3. Зависимость точности оценки от дисперсии входных потоков и дисперсии шума измерений: a) $\delta_u = 50; \, \text{б}) \, \delta_u = 1$

Проверка адекватности модели и объекта по критерию Фишера [5] показала, что во всех расчетных случаях, кроме $\sigma_u^2 = 1$, $\sigma_\eta^2 = 50$, наблюдается адекватность модели объекту.

3.3.3. Рекуррентная форма метода наименьших квадратов для линейных регрессионных объектов

При решении практических инженерных задач оценивания на управляющих цифровых вычислительных машинах необходимо решение задач оценивания в реальном масштабе времени, что требует сокращения времени вычислений и объема обрабатываемой информации. Это может быть достигнуто как за счет совершенствования вычислительной техники, так и за счет модернизации алгоритмов оценивания в смысле уменьшения объема вычислений. Особенно трудоемкими операциями при использовании явных методов идентификации являются операции перемножения и обращения матриц большой размерности.

Учитывая это, можно заключить, что разработка методов оценивания, позволяющих снизить объем запоминаемой информации и уменьшить время вычислений, является актуальной задачей.

Во многих случаях, когда составляющие вектора измерений поступают последовательно с течением времени, возможно находить оценку $\hat{c}(i+1)$ на (i+1)-м шаге измерительного процесса в виде коррекции оценки $\hat{c}(i)$ на *i*-м шаге. Эта коррекция представляет собой взвешенную невязку между векторами выходов объекта $\bar{y}'(i+1)$ и модели $\bar{\psi}'(U'(i+1)\hat{c}(i))$, полученными на интервале времени $[t_i;t_{i+1}]$. Такие алгоритмы последовательной обработки данных называются рекуррентными (последовательными) алгоритмами и имеют вид:

$$\hat{\overline{c}}(i+1) = \hat{\overline{c}}(i) + K(i+1)(\overline{y}'(i+1) - \overline{\psi}'(U'(i+1),\hat{\overline{c}}(i))),$$

 $\bar{y}'(i+1)$ – вектор поступивших на интервале $[t_i;t_{i+1})$ измерений выхода размерности p; U'(i+1) – матрица входов, размерности $p \times m$. Такой процесс получения последовательно уточняемых оценок называется рекуррентным оцениванием.

В том случае, когда вся измерительная информация распадается на взаимно некоррелированные группы (*р* измерений в группе), для линейного регрессионного объекта вида

$$\overline{y}'(i+1) = U'(i+1)b + \overline{\eta}'(i+1),$$
 (3.3.31)

можно сформировать рекуррентный алгоритм оценивания [4], при этом основные рекуррентные формулы для оценки параметров имеют вид:

$$\hat{\overline{b}}_{LS}(i+1) = \hat{\overline{b}}_{LS}(i) + K(i+1)(\overline{y}'(i+1) - U'(i+1)\hat{\overline{b}}_{LS}(i)) . (3.3.32)$$

$$P(i+1) = P(i) - K(i+1)U'(i+1)P(i) . (3.3.33)$$

Коэффициент усиления K(i+1) может быть рассчитан по формуле

$$K(i+1) = P(i)U^{\prime \tau}(i+1) \left(R^{\prime -1}(i+1) + U^{\prime}(i+1)P(i)U^{\prime \tau}(i+1) \right)^{-1}.$$
 (3.3.34)

Часто в приложениях используется другая формула расчета коэффициента усиления K(i+1):

$$K(i+1) = P(i+1)U'(i+1)R'(i+1), \qquad (3.3.35a)$$

где R'(i+1) – диагональная матрица весов размерности $p \times p$.

Для инициализации рекуррентного процесса необходимо задать начальные приближения $\hat{\bar{b}}_{LS}(0)$ и P(0). Можно предложить два способа задания начальных приближений:

первый способ заключается в использовании выборок U(0), $\bar{y}(0)$ достаточного объема и последующем расчете начальных приближений по формулам [4]:

 $\hat{b}_{LS}(0) = (U(0))^{-1} \bar{y}(0)$, $P(0) = (U^{T}(0)R(0)U(0))^{-1}$; (3.3.356) **второй способ** используется, если никаких предварительных выборок не производится. В этом случае можно предложить следующее правило: чем хуже начальные приближения $\hat{b}_{LS}(0)$, тем больше должна быть матрица P(0). Можно показать, что матрица P(0) отражает матрицу ошибки оценки. Поэтому, чем хуже начальное приближение $\hat{b}_{LS}(0)$, тем больше дисперсия ошибки оценки, и тем больше должна быть матрица P(0). Вообще, матрицу P(0) можно задать в виде:

$$P(0) = \lambda I$$
, (3.3.36)

где λ – большое число, при этом $\hat{\overline{b}}_{LS}(0)$ – любой вектор, размерности *m*.

Запишем полученные рекуррентные соотношения при одном измерении в группе для РАР-объекта, модель которого может быть представлена в виде:

$$\widetilde{y}(i) = \overline{z}^{\mathrm{T}}(i)\widetilde{\overline{c}},$$

где $\bar{z}(i)$, \tilde{c} определяются формулами (3.1.15), (3.1.16). В этом случае оценка $\hat{c}_{LS}(i+1)$, матрица усиления K(i+1) и матрица P(i+1) рассчитываются по формулам:

$$\hat{\bar{c}}_{LS}(i+1) = \hat{\bar{c}}_{LS}(i) + K(i+1)(y(i) - \bar{z}^{T}(i)\hat{\bar{c}}_{LS}(i)), \quad (3.3.37)$$
$$K(i+1) = P(i)\bar{z}(i)\frac{1}{\left(\frac{1}{r(i)} + \bar{z}^{T}(i)P(i)\bar{z}(i)\right)}, \quad (3.3.38a)$$

ИЛИ

$$K(i+1) = r(i)(P(i+1)\overline{z}(i)), \qquad (3.3.386)$$

$$P(i+1) = P(i) - \frac{1}{\left(\frac{1}{r(i)} + \bar{z}^{\mathrm{T}}(i)P(i)\bar{z}(i)\right)} P(i)\bar{z}(i)\bar{z}^{\mathrm{T}}(i)P(i) . \quad (3.3.39)$$

При равноточных измерениях не имеет смысла использовать различные r(i), i = 1, 2, ... Тогда, введя обозначение $H(i) = r \cdot P(i)$, можно переписать формулы (3.3.38a), (3.3.38b), (3.3.39) в виде:

$$K(i+1) = H(i)\bar{z}(i) \frac{1}{(1+\bar{z}^{\mathrm{T}}(i)H(i)\bar{z}(i))}$$
(3.3.40a)

ИЛИ

$$K(i+1) = H(i+1)\overline{z}(i)$$
, (3.3.406)

$$H(i+1) = H(i) - \frac{1}{(1+\bar{z}^{\mathrm{T}}(i)H(i)\bar{z}(i))} \cdot H(i)\bar{z}(i)\bar{z}^{\mathrm{T}}(i)H(i). \quad (3.3.41)$$

Начальные приближения $\hat{c}(0)$, H(0) определяются так же, как было рассмотрено выше.

Пример. Как показывает опыт использования рекуррентных соотношений (3.3.37) – (3.3.39), большое влияние на точность оценки и на скорость сходимости алгоритма оказывают начальные приближения оценки $\hat{c}(0)$ и матрицы P(0).

Для исследования влияния этих факторов проводилась идентификация параметров линейного регрессионного объекта вида:

$$y(i) = b_0 + b_1 U_1(i) + b_2 U_2(i) + b_3 U_3(i) + \eta(i)$$

При моделировании использовались следующие параметры объекта

 $b_0 = 1.0; \quad b_1 = 2.0; \quad b_2 = 3.0; \quad b_3 = 4.0.$

Входные потоки $U_j(i)$; $i = \overline{1,50}$; $j = \overline{1,3}$, а также шум измерений $\eta(i)$ моделировались с помощью генератора нормально распределенных случайных чисел с параметрами распределений:

$$\begin{split} &M\{U_1\}=1,0\;;\quad \sigma^2_{U_1}=10,0\;;\\ &M\{U_2\}=2,0\;;\quad \sigma^2_{U_2}=10,0\;; \end{split}$$

$$M\{U_3\} = 3,0; \quad \sigma_{U_3}^2 = 10,0;$$
$$M\{\eta\} = 0,0; \quad \sigma_{\eta}^2 = 10,0.$$

В качестве оценки точности определения параметров исследуемого объекта использовалась сглаженная по 10 реализациям ошибка

$$\Delta(i) = \left\{ \frac{1}{10} \left[\sum_{i=0}^{10} \sum_{j=0}^{3} (\hat{b}_j (i-l) - b_j)^2 \right] \right\}^{1/2}$$

На рис.3.2а и 3.2б приведены зависимости $\Delta(i)$ от номера измерений для различных начальных приближений H(0) при начальных значениях оценки $\hat{c}(0)$ близких к истинным значениям параметров (см. рис.3.4а) и плохих начальных приближениях $\hat{c}(0)$ (см. рис.3.4б). Приведенные графические зависимости полностью согласуются с теоретическими выводами.



Рис. 3.4а. График зависимости сглаженной ошибки оценки от номера измерений при $\overline{b}(0) = [1,2; 2,0; 3,1; 3,9]$ и начальных приближениях матрицы H(0): a) H[0] = 1xI; б) H[0] = 10xI; в) H[0] = 100xI



Рис.3.46. График зависимости сглаженной ошибки оценки от номера измерений при $\overline{b}(0) = [0; 0; 0; 0]$ и начальных приближениях матрицы H[0]: a) H[0] = 10хI; б) H[0] = 1000хI; в) H[0] = 1000хI

3.3.4. Метод наименьших квадратов для нелинейных объектов

Рассмотрим нелинейный статический объект

$$y(i) = \Psi(\overline{u}(i), \overline{c}) + \eta(i), \quad i = \overline{1, N}$$

Соответствующая ему модель представлена в виде

$$\widetilde{y}(i) = \Psi(\overline{u}(i), \widetilde{\overline{c}}), \quad i = \overline{1, N}.$$
 (3.3.42)

Оптимизируемый критерий соответствует методу наименьших квадратов:

$$J(\tilde{\overline{c}}) = \sum_{i=1}^{N} [y(i) - \Psi(\overline{u}(i), \tilde{\overline{c}})]^2 r(i):$$

$$\hat{\overline{c}}_{LS} = \arg\min_{\tilde{\overline{c}}} J(\tilde{\overline{c}}). \qquad (3.3.43)$$

Задача минимизации критерия (3.3.43) при нелинейной функции (3.3.42) может быть решена каким-либо методом нелинейного программирования. Эти методы достаточно хорошо разработаны и описаны в соответствующей литературе. В настоящем пособии приведен метод оптимизации, предназначенный для нахождения экстремума функции вида (3.3.43). Получаемая в результате итерационная последовательность соответствует методу Ньютона – Гаусса [14].

Пусть на j-м шаге итерационного процесса имеется некоторая оценка параметра $\hat{c}(j)$, достаточно близкая к истинному значению параметра. Для каждого i-го момента времени ($i \in [i, N]$) разложим функцию $\Psi(\overline{u}(i), \hat{c}(j))$ в ряд Тейлора относительно оценки $\hat{c}(j)$ до второго члена малости:

$$\Psi(\overline{u}(i),\overline{\widetilde{c}}) \cong \Psi(\overline{u}(i),\overline{\widetilde{c}}(j)) + \frac{\partial \Psi(\overline{u}(i),\overline{\widetilde{c}})}{\partial \widetilde{\widetilde{c}}^{\mathrm{T}}} \bigg|_{\widetilde{c}=\overline{c}(j)} (\widetilde{c} - \overline{c}(j)) . (3.3.44)$$

Подставим последнее выражение в формулу критерия (3.3.43): $J(\tilde{c}) =$

$$=\sum_{i=1}^{N} \left[y(i) - \Psi(\overline{u}(i), \hat{\overline{c}}(j)) - \left(\frac{\partial \Psi(\overline{u}(i), \hat{\overline{c}})}{\partial \tilde{\overline{c}}} \right)^{\mathrm{T}} \right|_{\tilde{\overline{c}} = \hat{\overline{c}}(j)} (\tilde{\overline{c}} - \hat{\overline{c}}(j)) \right]^{2} r(i) . (3.3.45)$$

Введем обозначения:

$$\widetilde{\overline{\beta}}(j) = \widetilde{\overline{c}} - \widehat{\overline{c}}(j), \quad \overline{e}(j) = \begin{bmatrix} y(1) - \Psi(\overline{u}(1), \widehat{\overline{c}}(j)) \\ \dots \\ y(N) - \Psi(\overline{u}(N), \widehat{\overline{c}}(j)) \end{bmatrix}, \\ \Phi(j) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Psi(\overline{u}(1), \widetilde{\overline{c}})}{\partial \widetilde{c}_1} & \dots & \frac{\partial \Psi(\overline{u}(1), \widetilde{\overline{c}})}{\partial \widetilde{c}_m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \Psi(\overline{u}(N), \widetilde{\overline{c}})}{\partial \widetilde{c}_1} & \dots & \frac{\partial \Psi(\overline{u}(N), \widetilde{\overline{c}})}{\partial \widetilde{c}_m} \end{bmatrix}_{\widetilde{c} = \widetilde{\overline{c}}(j)}$$
(3.3.46)

С учетом введенных обозначений, функция (3.3.45) принимает вид:

$$J(\widetilde{\overline{c}}) = (\overline{e}(j) - \Phi(j)\widetilde{\overline{\beta}}(j))^{\mathrm{T}} R(\overline{e}(j) - \Phi(j)\widetilde{\overline{\beta}}(j)). \quad (3.3.47)$$

Последнее выражение, с точностью до обозначений, имеет тот же вид, что и критерий (3.3.10). Минимизация критерия (3.3.47) по $\tilde{\vec{\beta}}(j)$ приводит к итерационной последовательности:

 $\hat{\bar{c}}(j+1) = \hat{\bar{c}}(j) + (\Phi^{\mathsf{T}}(j)R\Phi(j))^{-1}\Phi^{\mathsf{T}}(j)R(\bar{y} - \Psi(\hat{\bar{c}}(j))). \quad (3.3.48)$

Необходимо отметить, что данный метод очень чувствителен к выбору начального приближения $\hat{c}(0)$.

Это объясняется тем, что в основе метода лежит линеаризация функции $\Psi(\overline{u}(i), \widetilde{\overline{c}})$ относительно оценки $\hat{\overline{c}}(j)$ на *j*-м шаге итерационного процесса.

Признаком окончания итерационного процесса (3.3.48) может служить выполнение условия:

$$\frac{\left|J(\hat{\bar{c}}(j+1)) - J(\hat{\bar{c}}(j))\right|}{J(\hat{\bar{c}}(j+1))} \le \delta, \qquad (3.3.49)$$

где δ – заданное малое число.

В заключение данного раздела сравним рекуррентную формулу (3.3.37) и итерационную (3.3.48). Несмотря на то, что эти формулы имеют схожий вид, они отражают два совершенно различных подхода к идентификации.

Рекуррентная формула (3.3.37) построена по принципу коррекции оценки на основе новых наблюдений.

Итерационная формула (3.3.48) обеспечивает движение к минимуму функции (3.3.43) по направлению антиградиента в точке $\hat{c}(j)$, при этом никаких новых наблюдений не поступает.

3.3.5. Линейные несмещенные оценки с минимальной дисперсией ошибки оценки (марковские оценки)

В случае, когда известна ковариационная матрица ошибки измерений $D_{\eta} = \text{var}(\overline{\eta})$, то рационально в качестве матрицы весов *R* в методе наименьших квадратов использовать обратную ковариационную матрицу ошибок измерений, т.е.

$$R = D_{\eta}^{-1}$$

Тогда критерий, соответствующий методу наименьших квадратов, для нахождения оценок линейного регрессионного объекта будет иметь вид:

$$J(\tilde{\overline{b}}) = (\overline{y} - \tilde{\overline{y}}(\tilde{\overline{b}}))^{\mathrm{T}} D_{\eta}^{-1} (\overline{y} - \overline{y}(\tilde{\overline{b}})) . \qquad (3.3.50)$$

Подставляя $R = D_{\eta}^{-1}$ в формулу оценки (3.3.13) и ошибки оценки (3.3.23) для линейного регрессионного объекта, получим

$$\hat{\overline{b}}_{MV} = \left(U^{\mathrm{T}} D_{\eta}^{-1} U\right)^{-1} U^{\mathrm{T}} D_{\eta}^{-1} \overline{y} ; \qquad (3.3.51)$$

$$\operatorname{var}(\hat{\overline{b}}_{MV} - \overline{b}) = \left(U^{\mathrm{T}} D_{\eta}^{-1} U\right)^{-1}.$$
 (3.3.52)

Покажем, что оценка $\hat{\overline{b}}_{MV}$ является оценкой минимальной дисперсии в классе линейных оценок (теорема Маркова – Гаусса), т.е. покажем, что

$$\operatorname{var}(\hat{\overline{b}}_{L}-\overline{b}) \geq \operatorname{var}(\hat{\overline{b}}_{MV}-\overline{b}),$$

где $\hat{\overline{b}}_L$ – любая линейная несмещенная оценка.

Запишем дисперсию оценки $\hat{ar{b}}_L$:

$$\operatorname{var}(\overline{\overline{b}}_{L} - \overline{b}) = M\{(Q\overline{y} - \overline{b})(Q\overline{y} - \overline{b})^{\mathrm{T}}\} =$$
$$= M\{(QU\overline{b} + Q\overline{\eta} - \overline{b})(QU\overline{b} + Q\overline{\eta} - \overline{b})^{\mathrm{T}}\}.$$

Учитывая, что для несмещенных оценок QU = I, получаем

$$\operatorname{var}(\overline{b}_{L} - \overline{b}) = QD_{\eta}Q^{\mathrm{T}}, \qquad (3.3.53)$$

где D_{η} — ковариационная матрица помехи.

Рассмотрим два матричных выражения:

$$A = D_{\eta}^{-1/2} U \quad \text{if} \quad B^{\mathrm{T}} = Q D_{\eta}^{1/2},$$

где

$$D_{\eta} = D_{\eta}^{1/2} \left(D_{\eta}^{1/2} \right)^{\mathrm{T}}.$$
 (3.3.54)

Воспользуемся неравенством Шварца [14] для матриц. Согласно этому неравенству:

$$QD_{\eta}^{1/2} \left(D_{\eta}^{1/2} \right)^{\mathrm{T}} Q^{\mathrm{T}} = QD_{\eta}Q^{\mathrm{T}} \ge$$

$$\geq [QD_{\eta}^{1/2}D_{\eta}^{-1/2}U] \times \left[U^{\mathrm{T}}\left(D_{\eta}^{-1/2}\right)^{\mathrm{T}}\left(D_{\eta}^{-1/2\mathrm{T}}\right)U\right]^{-1} \times \left[U^{\mathrm{T}}\left(D_{\eta}^{-1/2}\right)^{\mathrm{T}}\left(D_{\eta}^{1/2}\right)^{\mathrm{T}}Q^{\mathrm{T}}\right] = QU\left[U^{\mathrm{T}}\left(D_{\eta}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}U\right]^{-1}U^{\mathrm{T}}Q^{\mathrm{T}}.$$

Так как QU = I, то можем записать

$$QD_{\eta}Q^{\mathrm{T}} \ge \left[U^{\mathrm{T}}D_{\eta}^{-1}U\right]^{-1}.$$

Учитывая (3.3.43) и (3.3.53), можем записать

$$\operatorname{var}(\hat{\overline{b}}_{L}-\overline{b}) \geq \operatorname{var}(\hat{\overline{b}}_{MV}-\overline{b}),$$

что и требовалось показать. Очевидно, линейная оценка минимальной дисперсии (3.3.51) обладает, кроме доказанного свойства минимальности дисперсии, теми же свойствами, что и оценка наименьших квадратов.

3.3.6. Метод максимума правдоподобия

В том случае, если известна $p(\overline{y}/\overline{c} = \widetilde{c})$, т.е. плотность распределения вероятности выхода \overline{y} (\overline{y} – конкретная реализация выхода) при условии, что оцениваемый параметр $\overline{c} = \widetilde{c}$, естественно попытаться найти такую оценку \hat{c}_{MP} , которая максимизирует эту плотность вероятности. Такие оценки получили название – оценки максимального правдоподобия, а метод – максимума правдоподобия.

Таким образом,

$$J(\tilde{\overline{c}}) = p(\overline{y}/\tilde{\overline{c}}), \qquad (3.3.55)$$

или, что эквивалентно

$$J(\widetilde{c}) = -\ln(p(\overline{y}/\widetilde{c})). \qquad (3.3.56)$$

Функция $\ln(p(\bar{y}/\tilde{c}))$ называется функцией правдоподобия. Таким образом, \hat{c}_{MP} является корнем уравнения:

$$\frac{\partial p(\bar{y} / \tilde{c})}{\partial \tilde{c}} \bigg|_{\tilde{c} = \hat{c}_{MP}} = 0, \qquad (3.3.57)$$

или

$$\frac{\partial \ln p(\overline{y} / \tilde{c})}{\partial \tilde{c}} \bigg|_{\tilde{c} = \hat{c}_{MP}} = 0$$
(3.3.58)

Если выход объекта в каждый *i*-й момент времени является аддитивной функцией возмущений $\eta(i)$, т.е.

$$y(i) = \Psi(\overline{z}(i), \overline{c}) + \eta(i), \qquad (3.3.59)$$

где $\bar{z}(i)$ – вектор наблюдений, и известна функция распределения шума $\eta - f(\eta(i))$, то нетрудно заметить, что

$$p(y(i) / \overline{c} = \widetilde{c}) = f(\eta(i)) \Big|_{\eta(i) = y(i) - \Psi(\overline{z}(i), \widetilde{c}) = \varepsilon(i)}$$

Если измерения некоррелированны, то для N взаимно некоррелированных измерений можно записать

$$p(\overline{y} / \overline{c} = \widetilde{c}) = \prod_{i=1}^{N} p(y(i) / \overline{c} = \widetilde{c}) = \prod_{i=1}^{N} f(\eta(i)) \Big|_{\eta(i) = \varepsilon(i)}.$$
 (3.3.60)

В том случае, когда измерения коррелированны, плотность распределения $p(\overline{y}/\overline{c} = \widetilde{c})$ не может быть представлена в виде произведения (3.3.60), и необходимо использовать формулу

$$p(\overline{y}/\tilde{c}) = f(\tilde{\eta} = \overline{\epsilon}(\tilde{c})), \qquad (3.3.61)$$

где $\overline{\varepsilon}$ – вектор невязок, сформированный по *N* измерениям.

Рассмотрим частный случай решения задачи максимального правдоподобия при нормальном законе распределения вероятности ошибок измерений

$$f(\bar{\eta}) = \frac{1}{(2\pi)^{N/L} (\det D_{\eta})^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\bar{\eta}^{\mathrm{T}} D_{\eta}^{-1} \bar{\eta}\right). \quad (3.3.62)$$

Согласно (3.3.56), (3.3.61) и (3.3.62), критерий качества будет иметь вид:

$$J(\tilde{c}) = \ln[(2\pi)^{N/2} (\det D_{\eta})^{1/2}] + \frac{1}{2} \Big[\overline{\varepsilon}^{\mathrm{T}}(\tilde{c}) D_{\eta}^{-1} \overline{\varepsilon}(\tilde{c}) \Big].$$

Так как первое слагаемое последнего выражения от $\tilde{\vec{c}}$ не зависит то можно записать:

$$J(\tilde{\overline{c}}) = \overline{\varepsilon}^{\mathrm{T}}(\tilde{\overline{c}}) D_{\eta}^{-1} \overline{\varepsilon}(\tilde{\overline{c}}),$$

или, подставляя вместо $\overline{\epsilon}(\widetilde{\overline{c}})$ его выражение, получим:

$$J(\tilde{\overline{c}}) = (\overline{y} - \overline{\Psi}(\tilde{\overline{c}}))^{\mathrm{T}} D_{\eta}^{-1} (\overline{y} - \Psi(\tilde{\overline{c}})). \qquad (3.3.63)$$

Как видно, последнее выражение соответствует критерию качества метода наименьших квадратов при $R = D_n^{-1}$.

3.3.7. Метод максимума апостериорной вероятности

Пусть наряду с плотностью распределения $p(\overline{y}/\widetilde{\overline{c}})$ известна априорная плотность распределения вероятности $p(\overline{c} = \widetilde{\overline{c}})$.

Тогда, используя формулу Байеса, можно записать апостериорную плотность распределения $p(\overline{c} = \widetilde{c} / \overline{y})$:

$$p(\overline{c} = \widetilde{c} / \overline{y}) = \frac{p(\overline{y} / \widetilde{c}) P(\overline{c} = \widetilde{c})}{p(y)}.$$
 (3.3.64)

Оценка \hat{c}_{MAP} , обеспечивающая максимальное значение апостериорной плотности распределения $p(\overline{c} = \widetilde{c} / \overline{y})$, называется оценкой максимального правдоподобия.

Таким образом, в качестве критерия в методе максимума апостериорной вероятности может быть использована функция:

$$J(\tilde{\vec{c}}) = -\ln p(\tilde{\vec{c}} / \bar{y}). \qquad (3.3.65)$$

Подставляя в (3.3.65) формулу Байеса, и принимая во внимание, что $p(\bar{y})$ не зависит от \tilde{c} , можно критерий записать в виде:

$$J(\tilde{\overline{c}}) = (-\ln P(\bar{y}/\tilde{\overline{c}}) - \ln P(\tilde{\overline{c}})). \qquad (3.3.66)$$

Таким образом, \hat{c}_{MAP} является корнем уравнения

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{c}} \left(-\ln p(\overline{y} / \tilde{c}) - \ln p(\tilde{c}) \right) \Big|_{\tilde{c} = \hat{c}_{MAP}} = 0.$$
(3.3.67)

В общем случае, решение задачи (3.3.67) не может быть получено в явном виде.

Рассмотрим решение этой задачи для линейной системы (3.1.6) при нормальном законе распределения ошибок измерений $\overline{\eta}$ и нормальном законе априорной плотности распределения $p(\overline{b})$:

$$f(\bar{\eta}) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2} (\det D_{\eta})^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\bar{\eta}^{\mathrm{T}} D_{\eta}^{-1} \bar{\eta}\right), \qquad (3.3.68)$$

$$p(\overline{b}) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2} (\det D_b)^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\overline{b}^{\mathrm{T}} - \overline{\mu}_b)D_b^{-1}(\overline{b} - \overline{\mu}_b)\right). (3.3.69)$$

Принимая во внимание, что при линейном объекте и аддитивной помехе $p(\overline{y} / \overline{b}) = f(\overline{\eta})|_{\overline{\eta} = \overline{y} - U\overline{b}}$, можно записать

$$-\ln p(\bar{y}/\tilde{b}) - \ln p(\tilde{b}) = \ln \left[(2\pi)^{\frac{N+m}{2}} \left(\det D_{\eta}^{1/2} \det D_{b} \right)^{1/2} \right] + \left[\frac{1}{2} (\bar{y} - U\tilde{b})^{\mathrm{T}} D_{\eta}^{-1} (y - U\tilde{b}) + \frac{1}{2} (\tilde{b} - \bar{\mu}_{b})^{\mathrm{T}} D_{b}^{-1} (\tilde{b} - \bar{\mu}_{b}) \right]. (3.3.70)$$

Подставляя (3.3.70) в (3.3.67) и учитывая, что D_{η} и D_b не зависят от оценки, получаем

$$\frac{\partial}{\partial \overline{b}} \left[\frac{1}{2} (\overline{y} - U\tilde{\overline{b}})^{\mathrm{T}} D_{\eta}^{-1} (\overline{y} - U\tilde{\overline{b}}) + \frac{1}{2} (\tilde{\overline{b}} - \overline{\mu}_{b})^{\mathrm{T}} D_{b}^{-1} (\tilde{\overline{b}} - \overline{\mu}_{b}) \right]_{\tilde{\overline{b}} - \hat{\overline{b}}_{MAP}} = 0. (3.3.71)$$

Введем следующие обозначения:

$$U^* = \begin{bmatrix} U \\ I_m \end{bmatrix}; \quad \overline{y}^* = \begin{bmatrix} \overline{y} \\ \overline{\mu}_b \end{bmatrix}; \quad R^* = \begin{bmatrix} D_{\eta}^{-1} & 0 \\ 0 & D_b^{-1} \end{bmatrix}, \quad (3.3.72)$$

где I_m – единичная матрица размера $m \times m$.

Используя обозначение (3.3.72), выражение (3.3.71) можно переписать в виде:

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{\overline{b}}} \left[(\overline{y}^* - U^* \tilde{\overline{b}})^{\mathrm{T}} R^* (\overline{y}^* - U^* \tilde{\overline{b}}) \right]_{\tilde{\overline{b}} = \hat{\overline{b}}_{MAP}} = 0.$$

Производя дифференцирование и разрешая полученное матричное уравнение относительно $\hat{\vec{b}}_{MAP}$, найдем

$$\hat{\overline{b}}_{MAP} = \left(U^{*^{\mathrm{T}}} R^{*} U^{*}\right)^{-1} U^{*^{\mathrm{T}}} R \overline{y}^{*}. \qquad (3.3.73)$$

Нетрудно заметить, что форма уравнения (3.3.73) совпадает с формой уравнения (3.3.13), однако в данном случае используется расширенная матрица входа U* и расширенный вектор измерений \overline{y}^* , причем вектор математического ожидания $\overline{\mu}_b$ рассматриваются как дополнительные измерения. Подставляя (3.3.72) в (3.3.73), запишем формулу для оценки в ином виде:

$$\hat{\overline{b}}_{MAP} = \left(D_b^{-1} + U^{\mathrm{T}} D_{\eta}^{-1} U \right) \left(U^{\mathrm{T}} D_{\eta}^{-1} \overline{y} + D_b^{-1} \overline{\mu}_b \right).$$
(3.3.74)

Нетрудно заметить, что $R^* = \begin{bmatrix} D_{\eta}^{-1} & 0 \\ 0 & D_b^{-1} \end{bmatrix}$, можно трактовать

как матрицу дисперсий объединенного вектора ошибок измерений $\overline{\eta}^* = \begin{bmatrix} \overline{\eta} \\ \overline{b} - \overline{\mu}_b \end{bmatrix}$. Тогда оценка (3.3.73) является оценкой минималь-

ной дисперсии по отношению к линейному объекту вида:

$$\overline{y}^* = U^* \overline{b} + \overline{\eta}^*.$$

Ковариационная матрица ошибок оценки, согласно формуле (3.3.55), может быть записана следующим образом

$$\operatorname{var}\left(\hat{\overline{b}}_{MAP}-\overline{b}\right)=\left(U^{*^{\mathrm{T}}}R^{*}U^{*}\right)^{-1},$$

или, подставив обозначения (3.3.75) и произведя несложные преобразования, получим

var
$$(\hat{\overline{b}}_{MAP} - \overline{b}) = (D_b^{-1} + U^{\mathrm{T}} D_{\eta}^{-1} U)^{-1}$$

Отметим, что в случае отсутствия априорной информации о параметре, дисперсия оцениваемого параметра $D_b = \infty$. Тогда

$$\hat{\overline{b}}_{MAP} = \lim_{D_b \to \infty} \left(D_b^{-1} + U^{\mathrm{T}} D_{\eta}^{-1} U \right)^{-1} \left(U^{\mathrm{T}} D_{\eta}^{-1} \overline{y} + D_b^{-1} \overline{\mu}_b \right) = \\ = \left(U^{\mathrm{T}} D_{\eta}^{-1} U \right)^{-1} U^{\mathrm{T}} D_{\eta}^{-1} \overline{y} = \hat{\overline{b}}_{LS} \,.$$

Наоборот, при достоверном знании значения параметра \overline{b} , $D_n = 0$.

$$\hat{\overline{b}}_{MAP} = \lim_{D_b \to 0} \left(D_b^{-1} + U^{\mathrm{T}} D_{\eta}^{-1} U \right)^{-1} \left(U^{\mathrm{T}} D_{\eta}^{-1} \overline{y} + \overline{D}_b^{-1} \overline{\mu}_b \right) = \overline{\mu}_b \,. \quad (3.3.75)$$

3.3.8. Байесовские оценки

Можно заметить, что методы оценивания, описанные ранее, представлены в порядке возрастания априорной информации, необходимой для их реализации. Так, для использования метода наименьших квадратов не требуется никаких дополнительных сведений ни о статистических характеристиках шумов измерений или помех, ни о плотности распределения самого оцениваемого параметра. Конечно, статистические свойства полученной оценки зависят от этих характеристик. Для реализации метода максимума правдоподобия требуется знание плотности распределения $p(\bar{y}/\tilde{c})$, а для метода максимума апостериорной вероятности наряду с $p(\bar{y}/\tilde{c})$.

Для получения байесовских оценок, кроме функций распределения $p(\bar{y}/\tilde{c}), p(\tilde{c}), p(\bar{y}),$ необходимо знание и некоторой функции штрафа $\varphi(\bar{c} - \tilde{c});$ при этом байесовская оценка минимизирует условное математическое ожидание функции штрафа $M\{\varphi(\bar{c} - \tilde{c})/\bar{y}\}$ при конкретной реализации выхода \bar{y} . Так как

$$M\{\varphi(\overline{c}-\widetilde{c})/\overline{y}\} = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\overline{c}-\widetilde{c})p(\overline{c}/\overline{y})d\overline{c}, \qquad (3.3.76)$$

то байесовская оценка

$$\hat{\overline{c}}_B = \arg\min_{\overline{\widetilde{c}}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\overline{c} - \widetilde{\overline{c}}) p(\overline{c} / \overline{y}) d\overline{c} . \qquad (3.3.77)$$

При квадратичной функции штрафа (3.2.23) функционал (байе-совский риск) принимает вид:

$$J(\widetilde{\overline{c}}) = \int_{-\infty}^{\infty} (\overline{c} - \widetilde{\overline{c}})^{\mathrm{T}} R(\overline{c} - \widetilde{\overline{c}}) p(\overline{c} / \overline{y}) d\overline{c} . \qquad (3.3.78)$$

Оценка \hat{c}_B , обеспечивающая минимум критерия (3.3.78), по сути, является оценкой с минимальной среднеквадратической ошиб-

кой при данной выборке \overline{y} . Ее можно найти, приравняв к нулю градиент $J(\tilde{\overline{c}})$ по переменной $\tilde{\overline{c}}$ и решив уравнение

$$\frac{\partial J(\tilde{c})}{\partial \tilde{c}}\Big|_{\tilde{c}=\hat{c}_B} = 2\int_{-\infty}^{\infty} R(\bar{c}-\hat{c}_{MV})P(\bar{c}/\bar{y})d\bar{c} = 0 \qquad (3.3.79)$$

относительно $\hat{\bar{c}}_{B}$. Равенство (3.3.79) можно переписать в виде:

$$\hat{\overline{c}}_B \int_{-\infty}^{\infty} P(\overline{c} / \overline{y}) d\overline{c} = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{c} P(\overline{c} / \overline{y}) d\overline{c}$$

Учитывая теперь, что функция $P(\overline{c} / \overline{y})$ является плотностью распределения и, следовательно, $\int_{-\infty}^{\infty} P(\overline{c} / \overline{y}) d\overline{c} = 1$, получаем форму-

лу для оценки

$$\hat{\overline{c}}_B = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{c} P(\overline{c} / y) d\overline{c} = M\{\overline{c} / \overline{y}\}.$$
(3.3.80)

Нетрудно показать [14], что рассмотренная процедура минимизации действительно приводит к минимально возможному значению байесовского риска (3.2.23). Очевидно, выражение (3.3.80) представляет собой условное математическое ожидание $M\{\overline{c}/\overline{y}\}$ параметра \overline{c} при конкретной реализации выхода \overline{y} , т.е. оценка \hat{c}_B совпадает с апостериорным средним значением параметра \overline{c} .

Рассмотрим более подробно задачу нахождения байесовской оценки параметров линейного регрессионного объекта (3.1.6) при нормальных законах распределения $f(\overline{\eta})$ и $p(\overline{b})$, которые описываются формулами (3.3.68) и (3.3.69). В качестве функции штрафа будем использовать квадратичный критерий (3.3.78). Как было показано, в этом случае $\hat{\overline{b}}_B$ представляет собой апостериорное среднее (3.3.80), т.е.

$$\hat{\overline{b}}_{B} = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\overline{b}} p(\overline{b} / \overline{y}) d\overline{\overline{b}} = M\{\overline{b} / \overline{y}\}.$$
(3.3.81)

Апостериорная плотность распределения $p(\overline{b} / \overline{y})$ может быть определена по формуле Байеса:

$$p(\overline{b}/\overline{y}) = \frac{(p(\overline{y}/b)p(b))}{p(\overline{y})}.$$
(3.3.82)

В этой формуле $p(\overline{b})$ (априорная плотность распределения оцениваемого параметра) имеет, по условию, нормальный закон распределения, $p(\overline{y}/\overline{b}) = f(\overline{\eta})|_{\eta=\overline{y}-U\overline{b}}$ – также представляет собой нормальный закон распределения. Кроме того, учитывая, что объект линейный относительно параметра \overline{b} и шума $\overline{\eta}$, и исходя из свойств нормального закона распределения [5], можно заключить, что $P(\overline{y})$ – нормальный закон распределения с параметрами:

$$M\{\overline{y}\} = M\{U\overline{b} + \overline{\eta}\} = U\overline{\mu}_b; \quad \operatorname{var}\{\overline{y}\} = UD_b U^{\mathrm{T}} + D_{\eta}.$$

Таким образом:

$$p(\overline{y}) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2} \det(UD_b U^{\mathrm{T}} + D_{\eta})^{1/2}} \times \exp\left[-\frac{1}{2}(\overline{y} - U\overline{\mu}_b)^{\mathrm{T}} \times (UD_b U^{\mathrm{T}} + D_{\eta})^{-1}(\overline{y} - U\overline{\mu}_b)\right]. \quad (3.3.83)$$

Подставляя в (3.3.82) выражение для $p(\overline{y}/\overline{b})$, $p(\overline{b})$, $p(\overline{y})$, определяемые формулами (3.3.68), (3.3.69) и (3.3.83), получим:

$$p(\overline{b} / \overline{y}) = \frac{\left[\det(UD_bU^{\mathrm{T}} + D_\eta)\right]^{1/2}}{(2\pi)^{m/2} \left[\det D_b \cdot \det D_\eta\right]^{1/2}} \times \\ \times \exp\left[-\frac{1}{2}(\overline{y} - U\overline{b})^{\mathrm{T}} D_\eta^{-1}(\overline{y} - U\overline{b}) - (\overline{b} - \overline{\mu}_b)^{\mathrm{T}} D_b^{-1}(b - \overline{\mu}_b) + (\overline{y} - U\overline{\mu}_b)^{\mathrm{T}} (UD_bU^{\mathrm{T}} - D_\eta)^{-1} (\overline{y} - U\overline{\mu}_b)\right].$$

Раскрывая скобки в показателе экспоненты и приводя подобные члены, можно записать:

$$p(\overline{b} / \overline{y}) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \left[\frac{\det D_b \cdot \det D_\eta}{\det(UD_b U^{\mathrm{T}} + D_\eta)} \right]^{\frac{1}{2}} \times \exp\left[-\frac{1}{2} (\overline{b} - \overline{\xi})^{\mathrm{T}} G^{\mathrm{T}} (\overline{b} - \overline{\xi}) \right], \qquad (3.3.84)$$

где введены следующие обозначения:

$$\overline{\xi} = \left(D_b^{-1} + U^{\mathrm{T}} D_{\eta}^{-1} U \right)^{-1} \left(U^{\mathrm{T}} D_{\eta}^{-1} \overline{y} + D_b^{-1} \overline{\mu}_b \right); \qquad (3.3.85)$$

$$G = \left(D_b^{-1} + U^{\mathrm{T}} D_{\eta}^{-1} U\right).$$
 (3.3.86)

Как и следовало ожидать, $p(\overline{b} / \overline{y})$ имеет нормальный закон распределения с параметрами:

$$M\{\overline{b} / \overline{y}\} = \overline{\xi}; \quad \operatorname{var}\{\overline{b} / \overline{y}\} = G^{-1}.$$

Таким образом, учитывая (3.3.81), можно заключить:

$$\hat{\overline{b}}_{B} = M\{\overline{b} / \overline{y}\} = \\ = \left(D_{b}^{-1} + U^{\mathrm{T}} D_{\eta}^{-1} U\right)^{-1} \left(U^{\mathrm{T}} D_{\eta}^{-1} \overline{y} + D_{b}^{-1} \overline{\mu}_{b}\right); \qquad (3.3.87)$$

var
$$\{\overline{b}_{MV} - \overline{b}\} = D_b^{-1} + U^{\mathrm{T}} D_{\eta}^{-1} U$$
. (3.3.88)

Сравнивая последние выражения с оценкой максимума апостериорной вероятности для линейного объекта при нормальных законах распределения \overline{b} и $\overline{\eta}$, можно заметить, что эти оценки полностью совпадают.

3.4. Рекуррентные сходящиеся алгоритмы при полной априорной информации о помехе

3.4.1. Метод стохастической аппроксимации для решения скалярных стохастических уравнений

Метод стохастической аппроксимации был предложен в 1951 г. Робинсоном и Монро [14] для решения скалярных стохастических уравнений вида

$$\psi(c,\eta(i)) - y(i) = 0, \quad i = 1,2,...,$$
 (3.4.1)

где *с* – искомый параметр; $\eta(i)$ – случайная последовательность с характеристиками

$$M\{\eta(i)\} = 0, \quad \cos\{\eta(i), \eta(j)\} = \sigma_{\eta}^2 \delta_k(i-j).$$

Для нахождения корня стохастического уравнения (3.4.1) было предложено использовать рекуррентную последовательность

$$\hat{c}_{i+1} = \hat{c}_i - \gamma_{i+1}(\psi(\hat{c}_i) - y(i+1)).$$
(3.4.2)

Задача состоит в подборе такого коэффициента γ_{i+1} , который обеспечивал бы состоятельность оценки в среднеквадратичном, а именно:

$$\lim_{i \to \infty} M\{(\hat{c}_i - c)^2\} = 0.$$
 (3.4.3)

Запишем математическое ожидание квадрата ошибки оценки на (i + 1)-м шаге через математическое ожидание квадрата ошибки оценки на *i*-м шаге:

$$M\{(\hat{c}_{i+1} - c)^2\} = M\{[\hat{c}_i - \gamma_{i+1}(\psi(\hat{c}_i) - y(i+1)) - c]^2\} =$$

= $M\{(\hat{c}_i - c)^2\} + M\{\gamma_{i+1}^2(\psi(\hat{c}_i) - y(i+1))^2\} -$
 $-2M\{\gamma_{i+1}(\hat{c}_i - c)(\psi(\hat{c}_i) - y(i+1))\}\}.$ (3.4.4)

Введем обозначения:

$$\xi_{i+1} = M\{(\hat{c}_{i+1} - c)^2\}; \qquad (3.4.5a)$$

$$\xi_i = M\{(\hat{c}_i - c)^2\}; \qquad (3.4.5a)$$

$$e_i = M\{[\psi(\hat{c}_i) - y(i+1)]^2\};$$
 (3.4.56)

$$d_i = M\{(\hat{c}_i - c)(\psi(\hat{c}_i) - y(i+1))\}.$$
 (3.4.5b)

Используя эти обозначения, запишем (3.4.4) в виде:

$$\xi_{i+1} = \xi_i + \gamma_{i+1}^2 e_i - 2\gamma_{i+1} d_i. \qquad (3.4.6)$$

Так как ξ_i , ξ_{i+1} , e_i больше нуля, то для того, чтобы ошибка оценки на каждом шаге в принципе могла уменьшаться, необходимо выполнение условия:

$$\gamma_{i+1}d_i > 0$$
. (3.4.7)

В противном случае, математическое ожидание квадрата ошибки оценки будет монотонно увеличиваться.

Условие (3.4.7) будет выполняться, если d_i и γ_{i+1} имеют одинаковые знаки, т.е.:

$$\begin{cases} \gamma_{i+1} > 0 & при \quad d_i > 0; \\ \gamma_{i+1} < 0 & при \quad d_i < 0. \end{cases}$$

Анализируя выражение (3.4.5в), можно заключить, что $d_i > 0$ при монотонно возрастающих функциях $\psi(\tilde{c})$ и $d_i < 0$ при монотонно убывающих $\psi(\tilde{c})$.

Таким образом, учитывая вышесказанное, функция $\psi(\tilde{c})$ должна быть монотонной, по крайней мере на отрезке $[\bar{c}_i, c]$, в противном случае может наблюдаться расходимость метода.

Выражение (3.4.6) можно представить в виде сумм:

$$\xi_{i+1} = \xi_0 + \sum_{k=1}^{i+1} \gamma_k^2 e_{k-1} - 2 \sum_{k=1}^{i+1} \gamma_k d_{k-1} .$$

Перепишем последнее выражение в ином виде:

$$\sum_{k=1}^{i+1} \gamma_k d_{k-1} = \frac{1}{2} \left(\xi_0 - \xi_{i+1} + \sum_{k=1}^{i+1} \gamma_k^2 e_{k-1} \right).$$

Так как $\xi_{i+1} > 0$, то справедливо неравенство:

$$\sum_{k=1}^{i+1} \gamma_k d_{k-1} < \frac{1}{2} \left(\xi_0 + \sum_{k=1}^{i+1} \gamma_k^2 e_{k-1} \right).$$

Возьмем предел по і от правой и левой частей неравенства:

$$\lim_{k \to \infty} \sum_{k=1}^{i+1} \gamma_k d_{k-1} < \frac{1}{2} \bigg(\xi_0 + \lim_{k \to \infty} \sum_{k=1}^{i+1} \gamma_k^2 e_{k-1} \bigg).$$
(3.4.8)

Наложим на последовательность γ_k условие

$$\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k^2 < \infty \,. \tag{3.4.9}$$

Тогда, при допущении, что e_{k-1} – конечна, по признаку Абеля [11] сумма ряда $\gamma_k^2 e_{k-1}$ – ограничена, т.е.

$$\lim_{i\to\infty}\sum_{k=1}^{i+1}\gamma_k^2 e_{k-1} < \infty \; .$$

Следовательно, справедливо неравенство

$$\lim_{i \to \infty} \sum_{k=1}^{i+1} \gamma_k d_{k-1} < \infty , \qquad (3.4.10)$$

Если теперь на γ_k наложим еще одно условие, а именно:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k = \infty , \qquad (3.4.11)$$

то, на основании признака Дирихле [11], необходимым и достаточным условием сходимости ряда (3.4.10) будет условие

$$\lim_{k\to\infty}d_k=0.$$

Таким образом, если γ_k будет удовлетворять трем условиям:

1) $\gamma_k > 0$ при монотонно возрастающей $\psi(\tilde{c})$, $\gamma_k < 0$ при монотонно убывающей $\psi(\tilde{c})$; 2) $\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k^2 < \infty$; 3) $\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k = \infty$, (3.4.12)

то

$$\lim_{k \to \infty} d_k = 0. \tag{3.4.13}$$

Покажем, что выражение (3.4.13) эквивалентно условию состоятельности в среднем квадратичном. Для этого подставим вместо d_k выражение (3.4.5в). Тогда

$$\lim_{k \to \infty} M\{(\psi(\hat{c}_k) - y(k+1))(\hat{c}_k - c)\} = 0.$$
 (3.4.14)

Разложим $\psi(\hat{c}_k)$ в ряд Тейлора относительно истинного значения параметра, пренебрегая членами высшего порядка малости:

$$\psi(\hat{c}_k) = \psi(c) + \frac{\partial \psi(\tilde{c})}{\partial \tilde{c}} \Big|_{\tilde{c}=c} (\hat{c}_k - c) \, .$$

Подставив последнее выражение в (3.4.14), получим:

$$\lim_{k \to \infty} M\left\{ \left[\psi(c) + \frac{d\psi(\widetilde{c})}{d\widetilde{c}} \Big|_{\widetilde{c}=c} (\widehat{c}_k - c) - y(k+1) \right] [\widehat{c}_k - c] \right\} = 0.$$

С точностью до случайного возмущения $\eta(i)$ можно считать, что $\psi(c) \cong y(k+1)$, тогда

$$\lim_{k \to \infty} M \left\{ \frac{d\psi(\tilde{c})}{d\tilde{c}} \Big|_{\tilde{c}=c} (\hat{c}_k - c)^2 \right\} = 0.$$
 (3.4.15)

Для монотонных функций $\frac{\partial \psi(\tilde{c})}{\partial \tilde{c}} \neq 0$, и, следовательно, соотношение (3.4.15) эквивалентно выражению

$$\lim_{k \to \infty} M\{(\hat{c}_k - c)^2\} = 0.$$
 (3.4.16)

Последнее соотношение совпадает с условием состоятельности оценки в среднем квадратичном. Таким образом условие (3.4.13) эквивалентно состоятельности в среднеквадратичном с точностью до введенных упрощений (отбросили члены высшего порядка малости при разложении в ряд Тейлора и ввели допущение о монотонности $\psi(\tilde{c})$).

Подводя итог вышесказанному, можно заключить, что оценка, вычисляемая с помощью рекуррентной последовательности

$$\hat{c}_{i+1} = \hat{c}_i - \gamma_{i+1}(\psi(\hat{c}_i) - y(i+1))$$
(3.4.17)

будет состоятельной, коэффициент γ_i удовлетворяет трем условиям:

Очевидно, можно подобрать бесконечное количество последовательностей γ_i , удовлетворяющих условиям (3.4.1 8). Возможным видом такой последовательности является ряд

$$\gamma_i = \frac{b}{i}, \qquad (3.4.19)$$

где *b* – любое положительное число.

Рассмотренная рекуррентная процедура (3.4.17) позволяет найти состоятельную оценку скалярного параметра c. Для состоятельной оценки векторного параметра \overline{c} была впоследствии предложена модификация метода стохастической аппроксимации, которая легла в основу рекуррентных методов идентификации параметров объектов.

3.4.2. Обобщение метода стохастической аппроксимации для решения задач идентификации

Рассмотрим, в общем случае, нелинейный объект, описание которого представлено в форме «вход-выход»:

$$y(i) = \psi(\bar{u}(i), \bar{c}) + \eta(i),$$
 (3.4.20)

$$M\{\eta(i)\} = 0, \quad \operatorname{cov}\{\eta(i), \eta(j)\} = \sigma_{\eta}^2 \delta_k(i-j),$$

соответствующее уравнение модели имеет вид

$$\widetilde{y}(i) = \psi(\overline{u}(i), \widetilde{c})$$
. (3.4.21)

Рассмотрим четную функцию $F(\psi(\overline{u}(i), \widetilde{c}) + \eta(i) - y(i))$ – аналог функции потерь, которая достигает минимума при $\widetilde{c} = \overline{c}$.

Тогда \overline{c} является корнем стохастического векторного уравнения:

$$\frac{\partial F(\psi(\overline{u}(i),\widetilde{c}) + \eta(i) - y(i))}{\partial \widetilde{c}} \bigg|_{\widetilde{c} = \overline{c}} = \overline{0}.$$
(3.4.22)

Принципиально векторное уравнение (3.4.22) ничем не отличается от стохастического скалярного уравнения (3.4.1). Причем, по крайней мере для линейных систем, уравнение (3.4.22) – монотонно возрастающее.

По аналогии с решением скалярных уравнений, составим рекуррентную последовательность для решения стохастического векторного уравнения (3.4.22):

$$\hat{\overline{c}}_{i+1} = \hat{\overline{c}}_i - \Gamma_{i+1} \left(\frac{\partial F(\psi(u(i+1), \widetilde{\overline{c}}) - y(i+1))}{\partial \widetilde{\overline{c}}} \bigg|_{\widetilde{\overline{c}} = \hat{\overline{c}}_i} \right). \quad (3.4.23)$$

Так как выражение $\psi(u(i+1), \overline{c}) - y(i+1))$ представляет собой невязку $\varepsilon(i+1, \overline{c})$ между выходом модели и объекта, то можно записать:

$$\hat{\overline{c}}_{i+1} = \hat{\overline{c}}_i - \Gamma_{i+1} \left(\frac{\partial F(\varepsilon(i+1,\widetilde{\overline{c}})}{\partial \widetilde{\overline{c}}} \bigg|_{\widetilde{\overline{c}} = \hat{\overline{c}}_i} \right), \quad (3.4.24)$$

где Γ_{i+1} – матрица коэффициентов усиления, диагональные элементы которой удовлетворяют условиям:

1)
$$\gamma_{j,i+1} > 0, \ j = \overline{1, m};$$

2) $\sum_{i=1}^{\infty} \gamma_{j,i+1}^{2} < \infty, \ j = \overline{1, m};$
3) $\sum_{i=1}^{\infty} \gamma_{j,i+1} = \infty, \ j = \overline{1, m}.$
(3.4.25)

Одним из возможных видов матричной последовательности Г_{*i*+1}, удовлетворяющей условию (3.4.2 4), является матричный ряд

$$\Gamma_{i+1} = \frac{B}{i+1},$$
 (3.4.26)

где В – некоторая положительно определенная матрица.

3.4.3. Асимптотическая скорость сходимости рекуррентных алгоритмов

Рассмотрим след ковариационной матрицы ошибки оценки на *i*-м шаге рекуррентного процесса оценивания:

tr var
$$\{\hat{\overline{c}}_i - \overline{c}\} = \text{tr } M\{(\hat{\overline{c}}_i - \overline{c})(\hat{\overline{c}}_i - \overline{c})^{\mathrm{T}}\}$$

В предыдущем разделе было показано, что при правильно выбранной матрице Γ_i оценка будет состоятельной:

$$\lim_{i\to\infty} \operatorname{tr} \operatorname{var} \{ \hat{\overline{c}}_i - \overline{c} \} = 0.$$

При этом могут быть различные способы задания матрицы Γ_{i+1} . Кроме того, не накладывалось никаких дополнительных условий

(кроме условия четности) на функцию потерь $F(\varepsilon(i, \tilde{c}))$. Однако различные способы задания матрицы Γ_{i+1} и различные функции потерь $F(\varepsilon(i, \tilde{c}))$ будут давать различные скорости сходимости оценок к истинным значениям параметра.

В качестве меры скорости сходимости алгоритмов в теории оценивания принято использовать асимптотическую матрицу ковариаций ошибок оценки (АМКО) [13]:

$$V = \lim_{i \to \infty} i \operatorname{var} \{ \hat{\overline{c}}_i - \overline{c} \} =$$
$$= \lim_{i \to \infty} i M \left\{ (\hat{\overline{c}}_i - \overline{c}) (\hat{\overline{c}}_i - \overline{c})^{\mathrm{T}} \right\}. \qquad (3.4.27)$$

Очевидно, чем меньше АМКО, тем выше скорость сходимости алгоритма. Так как \hat{c}_i функционально зависит от вида функции потерь $F(\varepsilon)$ и от вида матрицы Γ_i , то и АМКО является функционалом $F(\varepsilon)$ и Γ_i .

В дальнейшем несколько упростим задачу и будем задавать Γ_i в виде

$$\Gamma_i = \frac{\mathrm{B}}{i}, \qquad (3.4.28)$$

где B, как указывалось ранее, некоторая положительно определенная матрица. Тогда рекуррентный процесс нахождения векторного параметра \overline{c} может быть представлен формулой:

$$\hat{\overline{c}}_{i+1} = \hat{\overline{c}}_i - \frac{\mathrm{B}}{i+1} \left(\frac{\partial F(\varepsilon(i+1,\overline{\widetilde{c}}))}{\partial \overline{\widetilde{c}}} \Big|_{\widetilde{\overline{c}} = \hat{\overline{c}}_i} \right), \qquad (3.4.29)$$

где $\varepsilon(i+1) = \psi(u(i+1), \overline{\widetilde{c}}) - y(i+1))$

Поставим себе целью найти такую матрицу В* и такую функцию потерь $F^*(\varepsilon)$, которые обеспечивают минимум АМКО. При этом будем считать, что известна плотность распределения помехи $f(\eta)$. Вначале найдем оптимальную матрицу В*, такие алгоритмы будем называть «оптимальными» [13]. Затем найдем оптимальную функцию потерь $F^*(\varepsilon)$ – «абсолютно оптимальные» алгоритмы.
Можно показать [4], что асимптотическая ковариационная матрица ошибки оценки V, матрица B и функция потерь $F(\varepsilon)$ связаны следующим матричным уравнением:

$$\begin{bmatrix} BM\{F''(\eta)\}A(\overline{c},\sigma_{\eta}^{2})-\frac{1}{2}I \end{bmatrix} V + V \begin{bmatrix} M\{F''(\eta)\}A(\overline{c},\sigma_{\eta}^{2})B^{T}-\frac{1}{2}I \end{bmatrix} = BM\{F'^{2}(\eta)\}A(\overline{c},\sigma_{\eta}^{2})B^{T}.$$
(3.4.30)

Полученное матричное уравнение представляет собой сложную функциональную зависимость АМКО от матрицы В и функции потерь $F(\varepsilon)$. В общем случае невозможно в явном виде разрешить это уравнение относительно АМКО.

3.4.4. Оптимальные рекуррентные алгоритмы идентификации

Как уже отмечалось в предыдущем разделе, «оптимальными» рекуррентными алгоритмами будем называть алгоритмы, которые используют матрицу В* – оптимальную в смысле минимума AM-КО при заданной функции потерь $F(\varepsilon)$.

Представим матрицу В в виде:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}^* + \lambda \delta \mathbf{B}, \qquad (3.4.31)$$

где B* – искомая оптимальная матрица, δB – вариация матрицы B, λ – параметр.

Обозначим:

$$\Phi(\lambda) = V(B^* + \lambda \delta B), \qquad (3.4.32)$$

$$\mathbf{G} = M\left\{F''(\mathbf{\eta})\right\} \mathbf{A}\left(\overline{c}, \sigma_{\mathbf{\eta}}^{2}\right). \tag{3.4.33}$$

Тогда уравнение (3.4.30) для АМКО запишется в виде

$$\begin{bmatrix} (\mathbf{B}^* + \lambda \delta \mathbf{B})\mathbf{G} - \frac{1}{2}\mathbf{I} \end{bmatrix} \Phi(\lambda) + \Phi(\lambda) \begin{bmatrix} \mathbf{G}^{\mathrm{T}} \left(\mathbf{B}^{*\mathrm{T}} + \lambda \delta \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\right) - \frac{1}{2}\mathbf{I} \end{bmatrix} = \\ = (\mathbf{B}^* + \lambda \delta \mathbf{B})M \left\{ F'^2(\eta) \right\} \mathbf{A} \left(\overline{c}, \sigma_{\eta}^2\right) \left(\mathbf{B}^{*\mathrm{T}} + \lambda \delta \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\right). \quad (3.4.34)$$

Условие минимума АМКО можно представить в виде

$$\frac{d\Phi(\lambda)}{d\lambda}\Big|_{\lambda=0} = 0, \quad \forall \delta B.$$

Дифференцируя обе части уравнения (3.4.34) по λ и затем полагая $\lambda = 0$, получим:

$$\delta \mathbf{B} \Big[\mathbf{G} \Phi(0) - M \Big\{ F'^{2}(\eta) \Big\} \mathbf{A} \Big(\overline{c}, \sigma_{\eta}^{2} \Big) \mathbf{B}^{*\mathrm{T}} \Big] + \\ + \Big[\Phi(0) \mathbf{G}^{\mathrm{T}} - \mathbf{B}^{*} M \Big\{ F'^{2}(\eta) \Big\} \mathbf{A} \Big(\overline{c}, \sigma_{\eta}^{2} \Big) \Big] \delta \mathbf{B}^{\mathrm{T}} = \mathbf{0}.$$

Нетрудно видеть, что последнее условие будет выполняться для любых δB только при обращении в нуль выражений, стоящих в квадратных скобках, т.е.

$$\mathbf{G}\Phi(0) - M\left\{ F'^{2}(\eta) \right\} \mathbf{A}\left(\overline{c}, \sigma_{\eta}^{2}\right) \mathbf{B}^{*\mathsf{T}} = \mathbf{0}.$$

Подставляя выражение (3.4.33) для G и учитывая, что $\Phi(0) = V^*$, получим:

$$M\left\{F''(\eta)\right\} \mathbf{A}\left(\overline{c},\sigma_{\eta}^{2}\right)\mathbf{V}^{*}-M\left\{F'^{2}(\eta)\right\} \mathbf{A}\left(\overline{c},\sigma_{\eta}^{2}\right)\mathbf{B}^{*^{\mathrm{T}}}=\mathbf{0}.$$

Разрешим полученное уравнение относительно V*, тогда будем иметь:

$$V^* = \frac{M\left\{F'^2(\eta)\right\}}{M\left\{F''(\eta)\right\}} B^{*^{T}}.$$
 (3.4.35)

Для нахождения оптимальной матрицы В* подставим полученное выражение для V* в уравнение АМКО (3.4.30); тогда после несложных преобразований получим:

$$B^{*} = \frac{1}{M\{F''(\eta)\}} A^{-1}(\overline{c}, \sigma_{\eta}^{2}), \qquad (3.4.36)$$

или, раскрывая операцию математического ожидания, будем иметь:

$$B^* = \frac{1}{\int_{-\infty}^{\infty} F''(\eta) f(\eta) d\eta} A^{-1} \left(\overline{c}, \sigma_{\eta}^2\right).$$

Используя формулу интегрирования по частям, можно записать

$$\int_{-\infty}^{\infty} F''(\eta) f(\eta) d\eta = -\int_{-\infty}^{\infty} F'(\eta) f'(\eta) d\eta. \qquad (3.4.37)$$

Тогда последнее выражение перепишем в виде

$$B^* = \frac{1}{-\int\limits_{-\infty}^{\infty} F'(\eta) f'(\eta) d\eta} A^{-1}(\overline{c}, \sigma_{\eta}^2).$$
(3.4.38)

Для нахождения «оптимальной» АМКО подставим (3.4.36) в (3.4.35) и получим:

$$V(B^*) = \frac{M\left\{F'^2(\eta)\right\}}{\left[M\left\{F''(\eta)\right\}\right]^2} A^{-1}\left(\bar{c}, \sigma_{\eta}^2\right)$$
(3.4.39)

или

$$V(B^*) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} F'^2(\eta) f(\eta) d\eta}{\left[\int_{-\infty}^{\infty} F''(\eta) f(\eta) d\eta\right]^2} A^{-1}(\overline{c}, \sigma_{\eta}^2).$$

Используя замену (3.4.37), запишем эквивалентную формулу для АМКО:

$$V(B^*) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} F'^2(\eta) f(\eta) d\eta}{\left[\int_{-\infty}^{\infty} F'(\eta) f'(\eta) d\eta\right]^2} A^{-1}(\overline{c}, \sigma_{\eta}^2).$$

Как видно, полученная АМКО является функционалом от функции потерь $F(\varepsilon)$ и плотности распределения $f(\eta)$. В дальнейшем АМКО, оптимальную только относительно матрицы В, будем обозначать V(F, f), т.е.

$$V(F,f) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} F'^{2}(\eta) f(\eta) d\eta}{\left[\int_{-\infty}^{\infty} F'(\eta) f'(\eta) d\eta\right]^{2}} A^{-1}\left(\overline{c}, \sigma_{\eta}^{2}\right) d\eta . \quad (3.4.40)$$

Подставляя матрицу В* в рекуррентный алгоритм (3.4.29), получим:

$$\hat{\overline{c}}_{i} = \hat{\overline{c}}_{i-1} - \frac{1}{i} \frac{1}{-\int\limits_{-\infty}^{\infty} F'(\eta) f'(\eta) d\eta} \mathbf{A}^{-1} \left(\overline{c}, \sigma_{\eta}^{2}\right) \left. \frac{\partial F(\varepsilon(i, \tilde{\overline{c}}))}{\partial \tilde{\overline{c}}} \right|_{\tilde{\overline{c}} = \hat{\overline{c}}_{i-1}}.$$

Очевидно, полученный алгоритм невозможно реализовать, так как в формулу для нормированной информационной матрицы вхо-

дит оцениваемый параметр \overline{c} . Эту трудность можно обойти, использовав вместо \overline{c} оценку параметра на (i-1)-м шаге. Таким образом, реализуемый рекуррентный алгоритм будет иметь вид:

$$\hat{\overline{c}}_{i} = \hat{\overline{c}}_{i-1} + \frac{1}{i} \frac{1}{-\int_{-\infty}^{\infty} F'(\eta) f'(\eta) d\eta} A^{-1} \left(\hat{\overline{c}}_{i-1}, \sigma_{\eta}^{2} \right) \left. \frac{dF(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon = y(i) - \psi(i, \hat{\overline{c}}_{i-1})} \times \frac{\partial \psi(i, \tilde{\overline{c}})}{\partial \tilde{\overline{c}}} \right|_{\tilde{\overline{c}} = \hat{\overline{c}}_{i-1}}.$$
(3.4.41)

Полученная рекуррентная формула является наиболее общей и может быть использована для идентификации параметров нелинейного объекта при произвольной функции потерь $F(\varepsilon)$.

Существенным недостатком данного алгоритма является необходимость рассчитывать, а затем обращать матрицу $A(\bar{c}, \sigma_{\eta}^2)$. Предлагаемая ниже процедура [13] позволяет обойти эти трудности.

Заменим матрицу $A(\overline{c}, \sigma_{\eta}^2)$ ее выборочной или эмпирической оценкой:

$$\mathbf{A}\left(\overline{c},\sigma_{\eta}^{2}\right) \cong \mathbf{A}\left(\overline{\tilde{c}},\sigma_{\eta}^{2}\right)\Big|_{\widetilde{c}=\widehat{c}_{i-1}} = \frac{1}{i}\sum_{j=1}^{i} \left(\frac{\partial\psi(j,\widetilde{c})}{\partial\widetilde{c}}\frac{\partial^{\mathsf{T}}\psi(j,\widetilde{c})}{\partial\widetilde{c}}\right)\Big|_{\widetilde{c}=\widehat{c}_{j}}$$

Тогда матрица коэффициентов усиления Г(i) примет вид:

$$\Gamma(i) = \frac{1}{i\left(-\int\limits_{-\infty}^{\infty} F'(\eta)f'(\eta)d\eta\right)} \left[\frac{1}{i}\sum_{j=1}^{i} \left(\frac{\partial\psi(j,\tilde{c})}{\partial\tilde{c}}\frac{\partial^{\mathrm{T}}\psi(j,\tilde{c})}{\partial\tilde{c}}\right)\right|_{\tilde{c}=\hat{c}_{j}}\right]^{-1} = \\ = \left[-\int\limits_{-\infty}^{\infty} F'(\eta)f'(\eta)d\eta\sum_{j=1}^{i} \left(\frac{\partial\psi(j,\tilde{c})}{\partial\tilde{c}}\frac{\partial^{\mathrm{T}}\psi(j,\tilde{c})}{\partial\tilde{c}}\right|_{\tilde{c}=\tilde{c}_{j}}\right]^{-1}.$$

Воспользуемся леммой об обращении квадратных матриц, которая формулируется следующим образом:

Пусть квадратная матрица Т(*i*) имеет вид

$$\mathbf{T}(i) = \left[\kappa \sum_{j=1}^{i} \overline{t}(j) \overline{t}^{\mathrm{T}}(j) + \mathbf{U}\right]^{-1},$$

где κ – скаляр; $\overline{t}(j)$ – вектор; U – постоянная симметричная матрица той же размерности, то справедливо следующее рекуррентное соотношение:

$$T(i) = T(i-1) - \frac{T(i-1)\bar{t}(i)\bar{t}^{T}(i)T(i-1)}{\kappa^{-1} + \bar{t}^{T}(i)T(i-1)t(i)},$$

$$T(0) = U^{-1}.$$

Полагая

$$T(i) = \Gamma(i); T(i-1) = \Gamma(i-1);$$

$$\kappa = -\int_{-\infty}^{\infty} F'(\eta) f'(\eta) d\eta;$$

$$\overline{t}(i) = \frac{\partial \psi(j, \overline{c})}{\partial \overline{c}} \Big|_{\overline{c} = \overline{c}_{i-1}}; \qquad U = 0,$$

получим для коэффициента усиления $\Gamma(i)$ следующее рекуррентное выражение :

$$\Gamma(l) = \Gamma(l-1) - \Gamma(l-1) - \frac{\Gamma(l-1) - \Gamma(l-1)}{\partial \tilde{c}} \Big|_{\tilde{c} = \hat{c}_{l-1}} \frac{\partial^{\mathrm{T}} \psi(i, \tilde{c})}{\partial \tilde{c}} \Big|_{\tilde{c} = \hat{c}_{l-1}} \Gamma(l-1) - \frac{\Gamma(l-1) - \Gamma(l-1)}{\left(-\int_{-\infty}^{\infty} F'(\eta) f'(\eta) d\eta \right)^{-1} + \frac{\partial^{\mathrm{T}} \psi(i, \tilde{c})}{\partial \tilde{c}} \Big|_{\tilde{c} = \hat{c}_{l-1}} \Gamma(l-1) \frac{\partial \psi(i, \tilde{c})}{\partial \tilde{c}} \Big|_{\tilde{c} = \hat{c}_{l-1}}} (3.4.42)$$

В качестве начального приближения принимают матрицу $\Gamma(0) = \nu I , \qquad (3.4.43)$

где v – большое число.

Таким образом, оптимальный рекуррентный алгоритм будет состоять из двух вычисляемых формул

$$\hat{\overline{c}}_{i} = \hat{\overline{c}}_{i-1} + \Gamma(i)F'(\varepsilon(i,\hat{\overline{c}}_{i-1})))\frac{\partial\psi(i,\tilde{\overline{c}})}{\partial\tilde{\overline{c}}}\Big|_{\tilde{\overline{c}}=\hat{\overline{c}}_{i-1}}, \qquad (3.4.44)$$

где $\Gamma(i)$ вычисляется на каждом шаге рекуррентного процесса по формуле (3.4.42) при начальных условиях (3.4.43). Начальное приближение \hat{c}_0 может быть задано любым вектором соответствующей размерности.

В заключение данного раздела запишем рекуррентный оптимальный алгоритм для линейного динамического объекта

$$y(i) = -\sum_{j=1}^{n} a_j y(i-j) + \sum_{k=0}^{n} b_k u(i-k) + \sum_{l=0}^{n} d_l \eta(i-l)$$

Как известно, оптимальная настраиваемая модель, соответствующая данному объекту, имеет вид:

$$\begin{split} \tilde{y}(i) &= -\sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{j} y(i-j) + \sum_{k=0}^{n} \tilde{b}_{k} u(i-k) + \\ &+ \sum_{l=1}^{n} \frac{\tilde{d}_{l}}{\tilde{d}_{0}} (\tilde{y}(i-l) - y(i-l)) \,, \end{split}$$

или, используя введенные в разд. 3.1.1 обозначения,

$$\widetilde{y}(i) = \overline{z}(i)^{\mathrm{T}} \widetilde{\overline{c}}$$

Тогда

$$\frac{\partial \psi(i, \widetilde{c})}{\partial \widetilde{c}} = \overline{z}(i) . \qquad (3.4.45)$$

Подставляя (3.4.45) в рекуррентные соотношения (3.4.42), (3.4.44), получим:

$$\hat{\overline{c}}(i) = \hat{\overline{c}}(i-1) + \Gamma(i)F'(\varepsilon(i,\hat{\overline{c}}(i-1)))\overline{z}(i); \qquad (3.4.46a)$$

$$\Gamma(i) = \Gamma(i-1) - \frac{\Gamma(i-1)\overline{z}(i)\overline{z}^{\mathrm{T}}(i)\Gamma(i-1)}{\left(-\int\limits_{-\infty}^{\infty} F'(\eta)f'(\eta)d\eta\right)^{-1} + \overline{z}^{\mathrm{T}}(i)\Gamma(i-1)\overline{z}(i)},$$

$$\varepsilon(i,\tilde{\overline{c}}(i-1)) = y(i) - \overline{z}^{\mathrm{T}}(i)\hat{\overline{c}}(i-1), \qquad (3.4.466)$$

где $\hat{\overline{c}}(0)$ – любой вектор; $\Gamma(0) = \lambda I$; λ – большое число.

3.4.5. Оптимальная функция потерь

В предыдущем разделе была получена формула, которая отражает зависимость АМКО от функции потерь $F(\eta)$ и плотности распределения шумов $f(\eta)$ при оптимальном (в смысле минимума АМКО) выборе матрицы *В*

$$\mathbf{V}(F,f) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} F'^{2}(\eta) f(\eta) d\eta}{\left[\int_{-\infty}^{\infty} F'(\eta) f'(\eta) d\eta\right]^{2}} \mathbf{A}^{-1}\left(\overline{c},\sigma_{\eta}^{2}\right).$$

Будем считать, что плотность распределения ошибок измерений известна. Тогда поставим задачу подобрать такую функцию потерь $F^*(\varepsilon)$, которая обеспечит минимальное значение АМКО.

Для решения этой задачи отметим, что любую функцию потерь можно представить в виде суммы $F^*(\varepsilon) + \lambda \delta F(\varepsilon)$, где $\delta F(\varepsilon)$ – малая вариация функции потерь, λ – скалярный множитель. Тогда АМКО будет функцией скалярного параметра λ и плотности распределения $f(\eta)$. Учитывая, что $f(\eta)$ определена природой шума, АМКО будет функцией только одного параметра λ :

$$\varphi(\lambda) = \mathbf{V}(F^*(\varepsilon) + \lambda \delta F(\varepsilon), f)$$

В этом случае условие экстремума АМКО имеет вид:

$$\varphi'(\lambda)\Big|_{\lambda=0} = 0$$
.

Рассмотрим, что представляет собой матрица $\varphi(\lambda)$: $\varphi(\lambda) = V(F^* + \lambda \delta F, f) =$

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} f(\eta)F^{*'^{2}}(\eta)d\eta + 2\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(\eta)F^{*'}(\eta)\delta F'(\eta)d\eta + \lambda^{2} \int_{-\infty}^{\infty} f(\eta)\delta F'^{2}(\eta)d\eta \end{cases} \times \\ \times \left\{ \left[\int_{-\infty}^{\infty} f'(\eta)F^{*'}(\eta)d\eta \right]^{2} + 2\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f'(\eta)F^{*'}(\eta)d\eta \int_{-\infty}^{\infty} f'(\eta)\delta F'(\eta)d\eta + \right. \\ \left. + \lambda^{2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f'(\eta)\delta F'(\eta)d\eta \right]^{2} \right\}^{-1} \times A^{-1}\left(\overline{c},\sigma_{\eta}^{2}\right). \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{split} \varphi'(\lambda)\Big|_{\lambda=0} &= \left\{ 2\int_{-\infty}^{\infty} f(\eta)F^{*'}(\eta)\delta F'(\eta)d\eta \left[\int_{-\infty}^{\infty} f'(\eta)F^{*'}(\eta)d\eta\right]^2 - \right. \\ &\left. -2\int_{-\infty}^{\infty} f'(\eta)F^{*'}(\eta)d\eta \int_{-\infty}^{\infty} f'(\eta)\delta F'(\eta) \int_{-\infty}^{\infty} f(\eta)F^{*'^2}(\eta)d\eta \right\} \times \\ &\left. \times \left\{ \left[\int_{-\infty}^{\infty} f'(\eta)F^{*'}(\eta)d\eta\right]^4 \right\}^{-1} \times A^{-1}(\overline{c},\sigma_{\eta}^2) = 0 \, . \end{split}$$

Принимая во внимание, что $A^{-1}(\overline{c}, \sigma_{\eta}^2)$ не нулевая матрица, и допуская, что $\int_{-\infty}^{\infty} f'(\eta)F^{*'}(\eta)d\eta \neq 0$, получим $\int_{-\infty}^{\infty} f(\eta)F^{*'}(\eta)\delta F'(\eta)d\eta \int_{-\infty}^{\infty} f'(\eta)F^{*'}(\eta)d\eta =$ $= \int_{-\infty}^{\infty} f'(\eta)\delta F'(\eta)d\eta \int_{-\infty}^{\infty} f(\eta)F^{*'^2}(\eta)d\eta$.

Преобразуя последнее выражение, можно записать:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\eta)F^{*'}(\eta)\delta F'(\eta)d\eta - \int_{-\infty}^{\infty} f'(\eta)\delta F'(\eta)d\eta = 0.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\eta)F^{*'^{2}}(\eta)d\eta - \int_{-\infty}^{\infty} f'(\eta)F_{0}^{*'}(\eta)d\eta = 0.$$

Внесем интегралы, стоящие в знаменателях, под интегралы числителей, тогда получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\eta)F^{*'}(\eta)\delta F'(\eta)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(\eta)F^{*'^{2}}(\eta)d\eta} d\eta = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f'(\eta)\delta F'(\eta)}{\int_{-\infty}^{\infty} f'(\eta)F^{*'}(\eta)d\eta} d\eta$$

Так как $\delta F'(\eta)$ может быть любой функцией, то

$$\frac{f(\eta)F^{*'}(\eta)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(\eta)F^{*'^{2}}(\eta)d\eta} = \frac{f'(\eta)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty}f'(\eta)F^{*'}(\eta)d\eta},$$
(3.4.47)

или, после умножения обеих частей (3.4.47) на $F^{*'}(\eta)$, получим

$$\frac{f(\eta)F^{*'^{2}}(\eta)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(\eta)F^{*'^{2}}(\eta)d\eta} = \frac{f'(\eta)F^{*'}(\eta)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty}f'(\eta)F^{*'}(\eta)d\eta}.$$
(3.4.48)

Нетрудно заметить, что последнее выражение представляет собой равенство нормированных функций. Это равенство справедливо только в том случае, если сами функции пропорциональны. Таким образом, получаем

$$f(\eta)F^{*'^2}(\eta) = k_1 f'(\eta)F^{*'}(\eta),$$

где k₁ – коэффициент пропорциональности. Отсюда следует, что

$$F^{*'}(\eta) = k_1 \frac{f'(\eta)}{f(\eta)},$$

т.е.

$$F^{*'}(\eta) = k_1 \frac{f'(\eta)}{f(\eta)} = k_1 \{\ln f(\eta)\}'.$$

И, следовательно, оптимальная функция потерь определяется соотношением:

$$F^*(\varepsilon) = k_1 \ln f(\eta) \Big|_{\eta=\varepsilon} + k_2.$$

В последнем выражении неопределенными оказываются коэффициенты k_1 и k_2 . Для их определения рассмотрим графики типовых плотности распределения шума η и логарифма от плотности распределения (рис. 3.5).

Как правило, плотность распределения $f(\eta)$ является четной функцией, а логарифм плотности распределения – четная убывающая функция, имеющая максимальное значение при $\eta = 0$. Таким

образом, для того, чтобы $F'^*(\varepsilon) = k_1 \frac{f'(\eta)}{f(\eta)}$ имела смысл функции потерь, т.е. имела минимум при $\varepsilon = 0$ (что эквивалентно $\eta = 0$), необходимо условие $k_1 < 0$ (рис. 3.6).



Рис. 3.5. Типичный вид плотности распределения (*a*) и логарифма плотности распределения шума η (*б*)



Рис.3.6. График зависимости функции потерь от невязок ε при $k_1 < 0$ и $k_2 > 0$

Что же касается параметра k_2 , то он определяет минимальное значение $F^*(0)$. При $k_2 > k_1 \ln f(0)$ всегда выполняется неравенство $F^*(\varepsilon) > 0$.

Таким образом, оптимальная функция потерь не единственна, а зависит от параметров k_1 и k_2 . Этот факт является следствием того, что АМКО зависит не от $F(\varepsilon)$, а от $F'(\varepsilon)$. Для задач идентификации конкретные значения этих параметров несущественны. Удобно принять $k_1 = -1$, а $k_2 = 0$. Таким образом, оптимальная функция потерь равна логарифму плотности распределения помех с обратным знаком:

$$F^{*}(\varepsilon) = -\ln f(\eta) \Big|_{\eta = \varepsilon} . \qquad (3.4.49)$$

Сравнивая полученный результат с оптимизируемым критерием в методе максимума правдоподобия при аддитивной помехе можно сделать вывод об их полной идентичности.

Приведем примеры оптимальных функций потерь и их производных.

1. Нормальная плотность распределения помех (плотность распределения Гаусса) при условии взаимной некоррелированности измерений

$$f(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_{\eta}(i)} \exp\left[-\eta^2 / 2\sigma_{\eta}^2(i)\right] = N(0, \sigma_{\eta}(i)).$$

Функция потерь, согласно (3.4.49), будет иметь вид:

$$F^{*}(\varepsilon) = \varepsilon^{2} / 2\sigma_{\eta}^{2}(i) + \ln \sqrt{2\pi}\sigma_{\eta}(i),$$

$$F^{*'}(\varepsilon) = \varepsilon / \sigma_{\eta}^{2}(i). \qquad (3.4.50)$$

Поскольку положение экстремума не зависит от постоянного слагаемого $\ln \sqrt{2\pi} \sigma_{\eta}(i)$, то можно записать следующий оптимизируемый критерий:

$$J(\tilde{c}) = \sum_{i=1}^{N} (y(i) - \tilde{y}(i))^2 (1/\sigma_{\eta}(i))$$

или в векторной форме: $J(\tilde{\overline{c}}) = (\overline{y} - \tilde{\overline{y}})^{\mathrm{T}} D_{\eta}(\overline{y} - \tilde{\overline{y}})$.

Таким образом, при нормальном законе распределения использование оптимальной функции потерь эквивалентно применению метода наименьших квадратов.

2. Экспоненциальная плотность распределения помех (плотность распределения Лапласа) при условии взаимной некоррелированности измерений

$$f(\eta) = \frac{1}{2\alpha(i)} \exp[-|\eta| / \alpha(i)] = L(0,\alpha(i)).$$



Оптимальные функции потерь и их производные

Для функции потерь получаем:

$$F^{*}(\varepsilon) = |\varepsilon| / \alpha(i) + \ln 2\alpha(I), \quad F^{*'}(\varepsilon) = \operatorname{sign} \varepsilon / \alpha(i). \quad (3.4.51)$$

В данном случае получили модульную функцию потерь. Использование метода наименьших квадратов дает худшие асимптотические свойства оценок.

3. Дробная плотность распределения помех (плотность распределения Коши) при условии взаимной некоррелированности измерений

$$f(\eta) = \frac{1}{\pi \alpha(i)} \left(\frac{1}{1 + (\eta / \alpha(i))^2} \right) = C(0, \alpha(i)).$$

В этом случае имеем:

$$F^{*}(\varepsilon) = \ln(\alpha(i)^{2} + \varepsilon^{2}) + \ln \pi / \alpha(i),$$

$$F^{*'}(\varepsilon) = 2\varepsilon / (\alpha(i)^{2} + \varepsilon^{2}). \qquad (3.4.52)$$

Эти и некоторые другие виды функций потерь и их производные приведены в табл.3.1 [13].

3.4.6. Асимптотическая матрица ковариаций ошибок оценки при оптимальной функции потерь

Найдем, чему равна асимптотическая матрица ковариаций при оптимально выбранной функции потерь, т.е.

$$F^{*}(\varepsilon) = -\ln f(\eta) \Big|_{\eta = \varepsilon} . \qquad (3.4.53)$$

Подставив выражение (3.4.53) для оптимальной функции потерь в формулу для АМКО (3.4.40), получим:

$$V(F^*, f) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f(\eta)F^{*'^2}(\eta)d\eta}{\left[\int_{-\infty}^{\infty} f'(\eta)F^{*'}(\eta)d\eta\right]^2} A^{-1}(\overline{c}, \sigma_{\eta}^2) =$$
$$= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f(\eta)[(-\ln f(\eta))']^2 d\eta}{\left[\int_{-\infty}^{\infty} f'(\eta)(-\ln f(\eta))'d\eta\right]^2} A^{-1}(\overline{c}, \sigma_{\eta}^2) =$$

$$= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f(\eta) [f'(\eta) / f(\eta)]^2 d\eta}{\int_{-\infty}^{\infty} f'(\eta) [-f'(\eta) / f(\eta)] d\eta} \mathbf{A}^{-1} (\overline{c}, \sigma_{\eta}^2).$$

Приводя подобные члены, окончательно получаем:

$$\mathbf{V}(F^*, f) = \mathbf{V}(f) = \frac{\mathbf{A}^{-1}(\overline{c}, \sigma_{\eta}^2)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} [f'(\eta)]^2 / f(\eta) d\eta}.$$
 (3.4.54)

Выражение, стоящее в знаменателе (3.4.54), называется информацией Фишера и обозначается $I_F(f(\eta))$, т.е.:

$$I_F(f(\eta)) = \int_{-\infty}^{\infty} [f'(\eta)]^2 / f(\eta) d\eta. \qquad (3.4.55)$$

Очевидно, справедливо следующее неравенство:

$$V(F, f) \ge V(F^*, f),$$
 (3.4.56a)

где $F(\eta)$ – любая функция потерь, $F^*(\eta) = -\ln f(\eta)$. Или, раскрывая V(F, f) и $V(F^*, f)$, получим:

$$\frac{-\int_{-\infty}^{\infty} F'^{2}(\eta)f(\eta)d\eta}{\left[\int_{-\infty}^{\infty} F'(\eta)f'(\eta)d\eta\right]^{2}} \mathbf{A}^{-1}\left(\overline{c},\sigma_{\eta}^{2}\right) \ge \frac{1}{\int_{-\infty}^{\infty} f'^{2}(\eta)/f(\eta)d\eta} \mathbf{A}^{-1}\left(\overline{c},\sigma_{\eta}^{2}\right).(3.4.566)$$

Важно отметить, что, если нормированная асимптотическая матрица не зависит от параметра \bar{c} и дисперсии шума σ_{η}^2 (линейный регрессионный объект), то неравенство (3.4.56б) можно упростить:

$$\frac{\int_{-\infty}^{\infty} F'^{2}(\eta) f(\eta) d\eta}{\left[\int_{-\infty}^{\infty} F'(\eta) f'(\eta) d\eta\right]} \ge \frac{1}{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f'^{2}(\eta)}{f(\eta)} d\eta}.$$
(3.4.57)

Таким образом, знание плотности распределения помехи $f(\eta)$ позволяет определить оптимальную функцию потерь. При этом

оценка $\hat{c}(i)$ обладает максимальной асимптотической скоростью сходимости.

3.4.7. Абсолютно оптимальные рекуррентные алгоритмы

Запишем абсолютно оптимальный рекуррентный алгоритм для нелинейного объекта

 $y(i) = \psi(i, \widetilde{\overline{c}}) + \eta(i)$.

Для этого подставим в рекуррентные соотношения (3.4.42), (3.4.44) оптимальную функцию потерь (3.4.49), а именно:

$$F^*(\varepsilon) = -\ln f(\eta)\big|_{\eta=\varepsilon}.$$
 (3.4.58)

Тогда получим:

$$\hat{\overline{c}}(i) = \hat{\overline{c}}(i-1) + \Gamma(i) \left(\frac{-1}{f(\eta)} f'(\eta) \right) \Big|_{\eta = \varepsilon(i, \widetilde{\overline{c}}(i-1))} \frac{\partial \psi(i, \widetilde{\overline{c}})}{\partial \widetilde{\overline{c}}} \Big|_{\widetilde{\overline{c}} = \widetilde{\overline{c}}(i-1)},$$
(3.4.59a)

$$\Gamma(i) = \Gamma(i-1) - \frac{\Gamma(i-1) \frac{\partial \Psi(i,\tilde{c})}{\partial \tilde{c}}}{\left|_{\tilde{c}=\hat{c}(i-1)} \frac{\partial^{\mathrm{T}} \Psi(i,\tilde{c})}{\partial \tilde{c}}\right|_{\tilde{c}=\hat{c}(i-1)}}{\Gamma(i-1) \frac{\partial \Psi(i,\tilde{c})}{\partial \tilde{c}}} \bigg|_{\tilde{c}=\hat{c}(i-1)}, \qquad (3.4.596)$$

 $\hat{c}(0) = \hat{c}_0$, $\Gamma(0) = \lambda I$, $\lambda >> 1$, \hat{c}_0 – любой вектор соответствующей размерности, I_F – фишеровская информация, рассчитываемая по формуле:

$$I_F = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(f'(\eta))^2}{f(\eta)} \, d\eta \,.$$
 (3.4.60)

В табл. 3.2 приведены значения фишеровской информации для наиболее распространенных распределений [13].

Таблица 3.2

Фишеровская информация

№	Распределение	Фишеровская информация
1	Нормальное	$\left(\sigma_{\eta}^{2}\right)^{-1}$
2	Лапласа	$(s_{\eta}^2)^{-1}$
3	Коши	$\left(2s_{\eta}^{2}\right)^{-1}$

В случае линейного РАР объекта $\frac{\partial \psi(i, \overline{c})}{\partial \overline{c}}$ определяется форму-

лой (3.4.45), а именно:
$$\frac{\partial \psi(i, \tilde{c})}{\partial \tilde{c}} = \overline{z}(i)$$
.

Тогда, подставляя последнее выражение в рекуррентные соотношения (3.4.59а) и (3.4.59б), получим:

$$\begin{split} \hat{\overline{c}}(i) &= \hat{\overline{c}}(i-1) + \Gamma(i) \left(\frac{-1}{f(\eta)} f'(\eta) \right) \bigg|_{\eta = \varepsilon(i, \tilde{\overline{c}}(i-1))} \overline{\overline{z}}(i) , \quad (3.4.61a) \\ \Gamma(i) &= \Gamma(i-1) - \frac{\Gamma(i-1)\overline{z}(i)\overline{z}^{\mathsf{T}}(i)\Gamma(i-1)}{(I_F)^{-1} + \overline{z}^{\mathsf{T}}(i)\Gamma(i-1)\overline{z}(i)} , \quad (3.4.616) \\ \hat{\overline{c}}(0) &= \overline{c}_0 , \quad \Gamma(0) = \lambda I , \quad \lambda >> 1 . \end{split}$$

В заключение настоящего раздела запишем оптимальные рекуррентные алгоритмы для различных плотностей распределения, приведенных в табл. 3.2.

1. Нормальная плотность распределения помехи:

$$f(\eta) = \frac{1}{\left(2\pi\sigma_{\eta}^{2}(i)\right)^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_{\eta}^{2}(i)}\eta^{2}\right).$$

Введем обозначения: $H(i) = \Gamma(i) / \sigma_{\eta}^{2}(i)$.

Тогда в новых обозначениях рекуррентный алгоритм для нормального распределения запишем в виде

$$\hat{\overline{c}}(i) = \hat{\overline{c}}(i-1) + H(i)\overline{z}(i) \Big(y(i) - \overline{z}^{\mathsf{T}}(i)\hat{\overline{c}}(i-1) \Big), \quad (3.4.62a)$$

$$\hat{\overline{c}}(0) = \overline{c}_0;$$

$$H(i) = H(i-1) - \frac{H(i-1)\overline{z}(i)\overline{z}^{\mathrm{T}}(i)H(i-1)}{1+\overline{z}^{\mathrm{T}}(i)H(i-1)\overline{z}(i)}, \quad (3.4.626)$$

$$H(i) = \lambda I, \quad \lambda >> 1.$$

Сравнивая (3.4.62а) и (3.4.62б) с рекуррентной формой метода наименьших квадратов (разд. 3.3.3) можно сделать вывод, что рекуррентная форма метода наименьших квадратов полностью совпадает с абсолютно оптимальным алгоритмом для нормального распределения помехи.

Алгоритм (3.4.62а) называется линейным алгоритмом. Как видим, линейный оптимальный алгоритм не зависит от дисперсии помехи.

2. Лапласова плотность распределения помехи. Принимая во внимание значение плотности распределения Лапласа и соответствующую фишеровскую информацию (см. табл.3.2), оптимальный рекуррентный алгоритм (3.4.61a, б) запишем в виде:

$$\hat{\overline{c}}(i) = \hat{\overline{c}}(i-1) + H(i)\overline{z}(i)\text{sign}\left[y(i) - \overline{z}^{\mathsf{T}}(i)\hat{\overline{c}}(i-1)\right], (3.4.63a)$$

$$\hat{\overline{c}}(0) = \overline{c}_{0};$$

$$H(i) = H(i-1) - \frac{H(i-1)\overline{z}(i)\overline{z}^{\mathsf{T}}(i)H(i-1)}{s_{\eta}^{2}(i) + \overline{z}^{\mathsf{T}}(i)H(i-1)\overline{z}(i)}, \quad (3.4.636)$$

$$H(0) = \lambda I, \quad \lambda \gg 1, \quad H(i-1) = \frac{\Gamma(i-1)}{s_{\eta}(i)}.$$

Данный алгоритм называется релейным.

3. Плотность распределения помехи Коши. В этом случае, подставляя в формулы (3.4.61а) и (3.4.61б) плотность распределения и фишеровскую информацию (см. табл.3.2), соответствующие распределению Коши, получим нелинейный оптимальный алгоритм:

$$c(i) = c(i-1) + 4H(i)\overline{z}(i) \frac{y(i) - \overline{z}^{T}(i)\overline{c}(i-1)}{s_{\eta}^{2}(i) + \left[y(i) - \overline{z}^{T}(i)\overline{c}(i-1)\right]^{2}}, \quad (3.4.64a)$$
$$\hat{c}(0) = \overline{c}_{0};$$
$$H(i) = H(i-1) - \frac{H(i-1)\overline{z}(i)\overline{z}^{T}(i)H(i-1)}{s_{\eta}^{2}(i) + \overline{z}^{T}(i)H(i-1)\overline{z}(i)}, \quad (3.4.646)$$

$$\mathrm{H}(0) = \lambda I, \quad \lambda >> 1, \quad \mathrm{H}(i) = \frac{\mathrm{G}(i)}{2}.$$

Приведенные абсолютно оптимальные алгоритмы идентификации PAP-объектов с простой помехой, как было показано в предыдущем разделе, обладают предельно возможной скоростью сходимости. Их АМКО равна:

$$V(F,f) = \frac{1}{I_F(f)} A^{-1}(\bar{c}, \sigma_{\eta}^2), \qquad (3.4.65)$$

где $I_F(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f'^2(\eta)}{f(\eta)} d\eta$ – фишеровская информация, $A(\overline{c}, \sigma_{\eta}^2) =$

 $= M\left\{ \overline{z}, \overline{z}^{\mathrm{T}} \right\}$ – нормированная информационная матрица системы.

3.4.8. Пример использования абсолютно оптимальных рекуррентных алгоритмов для идентификации параметров линейного регрессионного объекта

Для оценки эффективности использования абсолютно оптимальных алгоритмов рассмотрим задачу идентификации параметров линейного регрессионного объекта вида

$$y(i) = 0,6 + 1,1u(i) + 2,1u(i) + 4,2u(i) + \eta(i).$$
 (3.4.66)

Шум измерений $\eta(i)$ имеет распределение Коши:

$$f(\eta) = \frac{1}{\pi s} \cdot \frac{1}{(1 + (2/s)^2)}.$$

Для оценки эффективности абсолютно оптимальных рекуррентных алгоритмов проводилось сравнение нелинейного (абсолютно оптимального алгоритма) и линейного алгоритмов для идентификации линейного регрессионного объекта вида (3.4.66) при различных значениях параметра распределения Коши – *s*.

На рис .3.7, 3.8 приведены графики интегральной скользящей ошибки оценки, вычисляемой по формуле:

$$\Delta_{\rm ck}(i) = \frac{\sum_{j=0}^{10} \sum_{k=0}^{n} \left(\tilde{a}_k(i-j) - a_k \right)}{10}; \quad i = 10, 11, \dots$$

в зависимости от номера измерений і.



Рис. 3.7. График зависимости сглаженной ошибки оценки от номера измерений при использовании линейного (*a*) и абсолютно оптимального (*б*) алгоритмов при *s* = 2



Рис. 3.8. График зависимости сглаженной ошибки оценки от номера измерений при использовании линейного (*a*) и абсолютно оптимального (*б*) алгоритмов при *s* = 7

Из рисунков видно, что использование абсолютно оптимального алгоритма обеспечивает существенно меньшую ошибку оценки даже при больших значениях параметра распределения – *s*.

3.5. Использование принципов игрового подхода в задачах идентификации

3.5.1. Априорная информация о помехах и классах распределений

Опыт практического применения оптимальных методов оценивания показывает, что они весьма чувствительны к обычно имеющимся на практике нарушениям условий их оптимальности и вследствие этого оказываются малоэффективными. Задачей теории робастности является разработка таких статистических процедур, которые лишь незначительно уступают в эффективности классическим оптимальным процедурам при точном выполнении условий их оптимальности и сохраняют высокую эффективность при нарушении этих условий.

Термин «робастный» (*robust* – сильный, крепкий) в указанном выше смысле был введен в употребление Боксом в 1953 г. Методы, разработанные теорией робастности, имеют важное практическое значение для повышения эффективности статистических процедур при решении задач идентификации, фильтрации, обнаружения, распознавания образов и других.

Особые трудности при реализации классических оптимальных методов связаны с предположением о том, какому закону распределения подчиняются случайные помехи. Как правило, плотность распределения помех $f(\eta)$ полностью неизвестна. Однако могут быть известны какие-либо сведения о $f(\eta)$, которые определяют тот или иной уровень априорной информации. Каждому уровню априорной информации о помехах соответствует определенный класс распределений Φ , к которому принадлежит не известная нам истинная плотность распределения $f(\eta)$. Чем ниже уровень априорной информации о помехах, тем шире соответствующий класс распределений.

Далее будем рассматривать только симметричные непрерывные унимодальные плотности распределения $f(\eta) = f(-\eta)$, имеющие конечную фишеровскую информацию (см. (3.4.56)):

$$I_F(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f'^2(\eta)}{f(\eta)} \, d\eta \,.$$
 (3.5.1)

Естественно, все плотности распределения удовлетворяют условиям:

$$f(\eta) \ge 0; \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(\eta) d\eta = 1.$$
 (3.5.2)

Приведем примеры типовых классов распределений, которые представляются наиболее естественными и удобными для описания априорной информации о помехах.

Ф₁ – класс невырожденных распределений:

$$\Phi_1 = \left\{ f(\eta) : f(0) \ge \frac{1}{2s_1} > 0 \right\}.$$
(3.5.3)

Этот класс распределений наиболее широкий. В него входят все плотности распределения, для которых значение в нуле отлично от нуля. Условие принадлежности плотности распределения этому классу: $f(\eta) \in \Phi_1$ – по существу, близко к полному отсутствию априорной информации о помехах.

Ф₂ – класс распределений с ограниченной дисперсией:

$$\Phi_2 = \left\{ f(\eta) : \int_{-\infty}^{\infty} \eta^2 f(\eta) d\eta = \sigma_{\eta}^2 \le \sigma_1^2 \right\}.$$
 (3.5.4)

Ф₃ – класс приближенно нормальных распределений:

$$\Phi_3 = \left\{ f(\eta): f(\eta) = (1 - \alpha) f_N(\eta) + \alpha g(\eta) \right\}.$$
(3.5.5)

Плотности распределения, входящие в этот класс, представляют собой смесь нормальной или гауссовой плотности распределения $f_N(\eta) = N(0, \sigma_N^2)$ с нулевым средним и дисперсией σ_N^2 и произвольной плотностью распределения. Параметр α , $0 \le \alpha \le 1$ характеризует степень «засорения» нормальной плотности распределения.

Ф₄ – класс приближенно экспоненциальных распределений:

$$\Phi_4 = \{f(\eta)f(\eta) = (1-\alpha)f_N(\eta) + \alpha g(\eta)\}.$$

Плотности распределения этого класса представляют собой смесь двойной экспоненциальной, или плотности распределения Лапласа $f_L(\eta) = L(0, s_L)$ с нулевым средним и параметром масштаба s_L и произвольной неизвестной плотности распределения $g(\eta)$. Параметр α , $0 \le \alpha \le 1$ характеризует степень близости $f(\eta)$ к экспоненциальной плотности распределения $f_L(\eta)$.

Ф₅ – класс приближенно равномерных распределений:

 $\Phi_5 = \{f(\eta): f(\eta) = (1-\alpha)f_R(\eta) + \alpha g(\eta)\}.$

Входящие в этот класс распределения представляют собой смесь равномерной плотности распределения $f_R(\eta) = R(0, l_R)$ (см. табл. 3.1) с нулевым средним и параметром финитности l_R и про-извольной неизвестной плотности распределения $g(\eta)$. Параметр α удовлетворяет условию $0 \le \alpha \le 1$.

Ф₆ – класс финитных распределений:

$$\Phi_6 = \left\{ f(\eta) : \int_{-l}^{l} f(\eta) d\eta = 1 \right\}.$$

Этот класс соответствует ограниченности по абсолютной величине помехи η. При этом какие-либо дополнительные сведения о плотности распределения помехи отсутствуют.

Ф₇ – класс приближенно финитных распределений:

$$\Phi_7 = \left\{ f(\eta) : \int_{-l}^{l} f(\eta) d\eta = 1 - \beta \right\}.$$

Параметр β , $0 \le \beta \le 1$ характеризует степень приближения $f(\eta)$ к финитной плотности распределения. Условие, определяющее этот класс, означает, что с вероятностью $1 - \beta$ имеет место неравенство $|\eta| \le l$. Очевидно, что класс финитных плотностей распределения Φ_6 является частным случаем класса Φ_7 .

Наряду с этими основными классами распределений введены более узкие классы, которые получаются из основных введением дополнительных ограничений снизу или сверху на дисперсии. Эти классы достаточно подробно описаны в работе [13]. Приведенные классы распределений хотя и не исчерпывают все возможности, но они достаточно типичны и соответствуют широ-кому диапазону уровней априорной информации о помехах.

Каждому классу Φ распределения помехи соответствует класс Q функций потерь. Причем, учитывая результаты предыдущей главы, класс Q будем формировать следующим образом:

$$Q = \left\{ F(\varepsilon) : F(\varepsilon) = -\ln f(\eta) \Big|_{\eta = \varepsilon}, \ f(\eta) \in \Phi \right\} .$$
 (3.5.6)

Тогда множество АМКО (3.4.40), сформированных на основе класса Φ , можно представить в виде

$$V(\widetilde{F}(\eta) = -\ln \widetilde{f}(\eta), f(\eta)) =$$

$$= V(\widetilde{f}, f) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\widetilde{f}'(\eta)}{\widetilde{f}(\eta)}\right)^2 f(\eta) d\eta}{\left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\widetilde{f}'(\eta)}{\widetilde{f}(\eta)} f'(\eta) d\eta\right]^2} A\left(\overline{c}, \sigma_{\eta}^2\right)$$
(3.5.7)

для $\forall (f(\eta) \ \mathsf{и} \ \widetilde{f}(\eta)) \in \Phi$.

В том случае, когда $\tilde{f}(\eta)$ совпадает с $f(\eta)$, АМКО принимает вид

$$V(F(\eta) = \ln f(\eta), f(\eta)) = V(f(\eta)) = \frac{1}{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f'^2(\eta)}{f(\eta)} d\eta} A(\overline{c}, \sigma_{\eta}^2). \quad (3.5.8)$$

Причем, как было ранее, обязательно выполняется неравенство $\mathbf{V}(\widetilde{f},f) \geq \mathbf{V}(f) \tag{3.5.9a}$

или, раскрывая $V(\tilde{f}, f)$ и V(f), можно записать:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\tilde{f}'(\eta)}{\tilde{f}(\eta)}\right)^2 f(\eta) d\eta$$
$$\left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{f}'(\eta)}{\tilde{f}(\eta)} f'(\eta) d\eta\right]^2 \mathbf{A}^{-1} \left(\overline{c}, \sigma_{\eta}^2\right) \ge \frac{1}{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f'^2(\eta)}{f(\eta)} d\eta} \mathbf{A}^{-1} \left(\overline{c}, \sigma_{\eta}^2\right) (3.5.96)$$

для любых $f(\eta)$ и $\tilde{f}(\eta)$, принадлежащих классу Φ .

3.5.2. Использование игрового подхода в задаче определения функции потерь

В предыдущей главе мы рассмотрели задачу определения оптимальной функции потерь. Эта задача легко решается при известной плотности распределения помехи, при этом $F(\varepsilon) = -\ln f(\eta)|_{\eta=\varepsilon}$.

В случае, когда плотность распределения неизвестна, а известен только класс распределения Φ , которому принадлежит эта плотность распределения ($f(\eta) \in \Phi$), функция потерь уже не может быть найдена по формуле $F(\varepsilon) = -\ln f(\eta)|_{\eta=\varepsilon}$. В этом случае для нахождения функции потерь предлагается использовать игровой подход [13].

Прежде чем переходить непосредственно к решению задачи нахождения функции потерь, рассмотрим простую матричную игру двух соперников, заключающуюся в том, что игрок A теряет очки и его задача — как можно меньше потерять; игрок B приобретает очки, его задача — как можно больше приобрести. Сколько очков теряет игрок A, столько очков приобретает игрок B. При этом действия A сводятся к выбору какой-либо стратегии из допустимых m_A стратегий $(a_1, a_2, ..., a_{m_A})$, а действия B сводятся к выбору стратегии из допустимых m_B стратегий $(b_1, b_2, ..., b_{m_B})$. Для нашей задачи будем считать $m_A = m_B$, хотя в общем случае это необязательно.

Положим для определенности $m_B = m_A = m = 4$, тогда можно составить некоторую платежную матрицу $V(a_i, b_j)$, например, такую (табл. 3.3). Матрица составлена совершенно произвольно только для иллюстрации игрового подхода к решению задач идентификации.

В клетках матрицы записаны проигрыши игрока A (выигрыши игрока B). Так, если A выбирает стратегию a_1 , а B – стратегию b_4 , то A проиграет 4,5 очка, а B, соответственно, 4,5 выиграет.

Возникает вопрос, как должен вести себя игрок A, чтобы проиграть не слишком много и как должен вести себя игрок B, чтобы выиграть не слишком мало?

Таблица 3.3

	В					
A	b_1	b_2	b_3	b_4	$\max_{b_j} V(a_i, b_j)$	
a_1	3	5	2,6	4,5	5	
<i>a</i> ₂	8,1	5,6	2	7,1	8,1	
<i>a</i> ₃	8	2,2	1,5	9,3	9,3	
a_4	4,2	6,8	7,4	4	7,4	
$\min_{a_i} \mathbf{V}(a_i, b_j)$	3	2,2	1,5	4	_	

Пример платежной матрицы

Рассмотрим вначале действия игрока A. Если он выберет стратегию a_1 , то его возможный максимальный проигрыш составит 5 очков; запишем этот максимальный проигрыш в последнем столбце табл. 3.3. Для стратегии a_2 максимальный проигрыш – 8,1; и т.д. Максимальные проигрыши по всем стратегиям игрока A записаны в последнем столбце табл. 3.3. Очевидно, если A выбирает стратегию a_1 (именно этой стратегии соответствует минимальный элемент последнего столбца), то вне зависимости от того, какую стратегию выбирает B, он (игрок A) больше 5 очков не проиграет; меньше он проиграть может, но больше – никогда. Математически действия игрока A можно записать следующим образом:

$$a^* = \arg\min_{a_i} \max_{b_j} V(a_i, b_j); \qquad (3.5.10)$$

$$V_A^* = \min_{a_i} \max_{b_j} V(a_i, b_j),$$
 (3.5.11)

где V^{*}_A – максимальный гарантированный проигрыш игрока А. Очевидно,

$$V(a^*, b_j) \le V_A^*, \quad b_j \in [b_1, ..., b_4].$$
 (3.5.12)

Для игрока *В* рассуждения обратные. Если он выбирает стратегию b_1 , то его возможный минимальный выигрыш — 3 очка; записываем это значение в последней строке табл.3.5.1. Для b_2 – 2,2 очка и т.д. Минимальные выигрыши записаны в последней строке. Максимальный элемент этой строки — 4 соответствует стратегии b_4 . Таким образом, если *В* будет выбирать стратегию b_4 , то вне зависимости от действий игрока *A*, он выиграет не меньше четырех очков; больше он выиграть может, но меньше – никогда.

Запишем алгоритм действий игрока В в математической форме:

$$b^{*} = \arg \max_{b_{j}} \min_{a_{i}} V(a_{i}, b_{j}); \qquad (3.5.13)$$
$$V_{B}^{*} = \max_{b_{i}} \min_{a_{i}} V(a_{i}, b_{j}), \qquad (3.5.14)$$

 V_B^* – минимальный выигрыш игрока *B*:

$$V(a_i, b^*) \ge V_B^*, \quad a_j = [a_1, ..., a_4].$$
 (3.5.15)

В общем случае $V_A^* \neq V_B^*$. Причем, если игроки *A* и *B* будут использовать свои оптимальные стратегии, то можно на основании (3.5.12), (3.5.5) записать неравенство:

$$V_B^* \le V(a^*, b^*) \le V_A^*.$$
 (3.5.16)

Рассмотрим теперь другую платежную матрицу (табл. 3.4).

Таблица 3.4

	В					
A	b_1	b_2	b_3	b_4	$\max_{b_i} V(a_i, b_j)$	
a_1	5	2,6	4,5	3,8	5	
<i>a</i> ₂	8,1	5,6	2	7,0	8,1	
<i>a</i> ₃	8	2,2	1,5	9,3	9,3	
a_4	6,2	6,8	7,4	4	7,4	
$\min_{a_i} \mathbf{V}(a_i, b_j)$	5	2,2	2	3,8	_	

Пример платежной матрицы

В этом случае, рассуждая аналогичным образом и определяя V_A^* и V_B^* по формулам (3.5.11) и (3.5.14), а также a^* и b^* по формулам (3.5.10), (3.5.13), получим:

$$\mathbf{V}_A^* = \min_{a_i} \max_{b_j} \mathbf{V}(a_i, b_j) =$$

$$= V_B^* == \max_{b_j} \min_{a_i} V(a_i, b_j) =$$

= V(a^*, b^*) = V^*.

Объединяя неравенства (3.5.12) и (3.5.15), получим:

$$V(a^*, b_j) \le (V^* = V(a^*, b^*)) \le V(a_i, b^*).$$
(3.5.17)

Неравенство (3.5.17) является условием седловой точки, а точка (*a**,*b* *) называется – седловой.

Рассмотрим теперь задачу определения функции потерь, если известно, что плотность распределения помехи принадлежит некоторому классу Φ , содержащему m = 4 возможных плотностей распределения $f_1(\eta), f_2(\eta), f_3(\eta)$ и $f_4(\eta)$, т.е.

 $\Phi = \{ f(\eta) \colon f(\eta) = [f_1(\eta) \cup f_2(\eta) \cup f_3(\eta) \cup f_4(\eta)] \}.$ (3.5.18)

Соответствующий класс функций потерь будет содержать m = 4 возможных функции потерь:

$$Q = \left\{ F(\varepsilon): F(\varepsilon) = \left[-\ln f_1(\eta) \Big|_{\eta=\varepsilon} \cup -\ln f_2(\eta) \Big|_{\eta=\varepsilon} \dots \cup -\ln f_4(\eta) \Big|_{\eta=\varepsilon} \right] \right\}.$$
(3.5.19)

В зависимости от выбранной функции потерь $F(\varepsilon) \in Q$ и реализовавшейся плотности распределения $f(\eta) \in \Phi$ могут возникнуть m^2 различных АМКО, которые рассчитываются по формулам (3.4.49) или (3.5.8), а именно:

$$\mathbf{V}_{ij} = \mathbf{V}(F(\mathbf{\eta}) = -\ln f_i(\mathbf{\eta}), f_j(\mathbf{\eta})) =$$

$$= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (-\ln f_{i}(\eta)')^{2} f_{j}(\eta) d\eta}{\left[\int_{-\infty}^{\infty} (-\ln f_{i}(\eta))' f_{j}'(\eta) d\eta\right]^{2}} A^{-1}(c, \sigma_{\eta}^{2}), \quad i, j = 1, ..., m; \quad i \neq j . (3.5.20)$$

$$V_{jj} = V(F(\eta) = -\ln f_{j}(\eta), f_{j}(\eta)) =$$

$$= \frac{1}{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_{j}'^{2}(\eta)}{f_{j}(\eta)} d\eta} A^{-1}(\overline{c}, \sigma_{\eta}^{2}), \quad j = 1, ..., m. \quad (3.5.21)$$

Причем, как было показано в разд. 2.1.6, справедливо неравенство:

$$V_{ij} \ge V_{jj}; \quad i, j = 1, 2, ..., m.$$
 (3.5.22)

Учитывая вышесказанное, можно составить платежную матрицу рассматриваемой задачи. Элементами этой матрицы являются АМКО, рассчитанные по формулам (3.5.20), (3.5.21). Возможный вариант такой матрицы приведен в табл. 3.5, для наглядности в ячейках матрицы стоят следы АМКО.

Таблица 3.5

$\mathbf{F}(\cdot)$	$f_j(\eta)$					
$F_i(\eta)$	$f_1(\eta)$	$f_2(\eta)$	$f_3(\eta)$	$f_4(\eta)$	$\max_{f_0(\eta)} V(F_i, f_j)$	
$F_1(\eta) = -\ln f_1(\eta)$	0,6	0,9	2,7	1,8	2,7	
$F_2(\eta) = -\ln f_2(\eta)$	2,2	0,1	1,2	3,0	3,0	
$F_3(\eta) = -\ln f_3(\eta)$	0,9	2,8	0,8	2,3	2,8	
$F_4(\eta) = -\ln f_4(\eta)$	1,6	2,3	1,4	1,2	1,6	
$\min_{F_i(\eta)} V(F_i, f_j)$	0,6	0,1	0,8	1,2	-	

Пример платежной матрицы

1,6 = min max $V(F_i, f_j)$; **1,2** = max min $V(F_i, f_j)$.

Как видим, согласно неравенству (3.5.22), диагональные элементы этой табл. 3.5 являются минимальными по столбцу.

Используем методику выбора гарантирующей стратегии, описанную в начале данного раздела, найдем функцию потерь $F_{rap}(\eta)$, которая обеспечит минимальную гарантирующую АМКО:

$$F_{\text{rap}}(\eta) = \arg\min_{F_i(\eta)} \max_{f_j(\eta)} V(F_i, f_j); \qquad (3.5.23)$$

$$\mathbf{V}_{\text{rap}} = \min_{F_i(\eta)} \max_{f_j(\eta)} \mathbf{V}(F_i, f_j).$$
(3.5.24)

$$F_i(\varepsilon) \in Q; f_j(\eta) \in \Phi$$
.

Очевидно, справедливо неравенство:

$$\mathbf{V}(F_{\mathrm{rap}}(\mathbf{\eta}), f_j(\mathbf{\eta})) \le \mathbf{V}_{\mathrm{rap}}.$$
(3.5.25)

Таким образом, если в качестве функции потерь принимается $F_{rap}(\eta)$: $F(\eta) = F_{rap}(\eta)$, то при любых $f(\eta) \in \Phi$ АМКО не будет больше V_{rap} .

Отметим важный факт – $\max_{f_j(\eta) F_i(\eta)} V(F_i, f_j)$ обязательно является

максимальным диагональным элементом таблицы, т.е.

$$\max_{j} V(F_{j}, f_{j}) = \max_{f_{j}} \min_{F_{i}} V(F_{i}, f_{j}), \qquad (3.5.26)$$

где $F_j = -\ln f_j$, j = 1, ..., m.

Попытаемся теперь перестроить платежную матрицу таким образом, чтобы появилась седловая точка, т.е. в этом случае должно выполняться условие $\max_{f_j} \min_{F_i} V(F_i, f_j) = \min_{F_i} \max_{f_j} V(F_i, f_j)$,

или, учитывая (4.26), эквивалентное условие

$$\max_{j} (F_j, f_j) = \min_{F_i} \max_{f_j} V(F_i, f_j).$$

Последнее условие означает, что найдется строка *i* * , для которой справедливо соотношение:

$$\mathbf{V}(F_{i^*}, f_{i^*}) \ge \mathbf{V}(F^*, f_j)$$
для $\forall f_j(\eta) \in \Phi$.

Пример такой матрицы приведен в табл. 3.6.

Таблица 3.6

	$f_j(\eta)$					
$F_i(\eta)$	$f_1(\eta)$	$f_2(\eta)$	$f_3(\eta)$	$f_4(\eta)$	$\max_{f_j(\eta)} V(F_i, f_j)$	
$F_1(\eta) = -\ln f_1(\eta)$	0,6	0,9	2,7	1,8	2,7	
$F_2(\eta) = -\ln f_2(\eta)$	2,2	0,1	1,2	3,0	3,0	
$F_3(\eta) = -\ln f_3(\eta)$	0,9	2,8	0,8	2,3	2,8	
$F_4(\eta) = -\ln f_4(\eta)$	0,8	1,1	1,0	1,2	1,2	
$\min_{F_i(\eta)} V(F_i, f_j)$	0,6	0,1	0,8	1,2	_	

Пример платежной матрицы с седловой точкой

 $V_{I,2} - \min_{F_i} \max_{f_j} V(F_i, f_j); V_{I,2} - \max_{f_j} \min_{F_i} V(F_i, f_j).$

Для последней таблицы справедливо равенство:

$$\max_{f_j} \min_{F_i} V(F_i, f_j) = \min_{F_i} \max_{f_j} V(F_i, f_j) = \\ = \max_i V(F_j, f_j) = V^*.$$
(3.5.27)

Перейдем теперь непосредственно к решению задачи идентификации при неполной информации о помехе. При изучении последующего раздела рекомендуется иллюстрировать свойства оптимальной функции потерь на табл. 3.5 и 3.6.

3.5.3. Свойства оптимальной функции потерь при неполной информации о помехе

Как правило, при неполной информации о помехе можно выделить тот или иной класс распределений (см. разд. 3.5.1), которому принадлежит плотность распределения помехи $f(\eta) \in \Phi$. При этом можно сформировать соответствующий класс функций потерь Q:

$$F(\eta) \in Q$$
,

где $F(\eta) = -\ln f(\eta)$.

Как уже отмечалось в предыдущем разделе, при нахождении требуемой функции потерь используется игровой подход. Причем в качестве «платы» рассматривается АМКО.

В общем случае (см. табл. 3.5), искомая функция потерь, гарантирующая некоторую максимальную АМКО, является решением задачи:

$$F_{\text{rap}}(\eta) = \arg\left\{\min_{F(\eta)\in Q} \max_{f(\eta)\in \Phi}\left\{V(F(\eta), f(\eta))\right\}\right\}, \quad (3.5.28)$$

где

$$V(F(\eta), f(\eta)) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} F'^{2}(\eta) f(\eta) d\eta}{\left[\int_{-\infty}^{\infty} F(\eta) f'(\eta) d\eta\right]^{2}} A\left(\overline{c}, \sigma_{\eta}^{2}\right), \quad (3.5.29)$$
$$F(\eta) \in Q, \quad f(\eta) \in \Phi. \quad (3.5.30)$$

Данная задача является сложной вариационной задачей с ограничениями (3.5.30). В настоящее время не существует каких-либо разработанных методов решения поставленной задачи в явном виде. Можно представить только численное решение, которое из-за наличия двойного процесса оптимизации очень громоздко.

Существенное упрощение задачи достигается, если существует так называемая оптимальная функция потерь:

$$F^*(\eta) = -\ln f^*(\eta), \quad f^*(\eta) \in \Phi.$$

Определение. Функция потерь $F^*(\eta) = -\ln f^*(\eta)$, где $f^*(\eta) \in \Phi$, существует и называется оптимальной на классе Φ , если для нее выполняется условие:

$$V(F^{*}(\eta), f(\eta)) \leq V(F^{*}(\eta), f^{*}(\eta)), \qquad (3.5.31)$$
для $\forall f(\eta) \in \Phi,$ и $f^{*}(\eta) \in \Phi$.

Если условие (3.5.31) не выполняется ни для одной $f(\eta) \in \Phi$, то говорят, что оптимальной функции потерь не существует.

Рассмотрим свойства оптимальной на классе функции потерь.

Свойство 1. Оптимальная на классе плотность распределения $f^*(\eta)$ и соответствующая ей функция потерь $F^*(\eta)$ определяют седловую точку.

Покажем это. Запишем АМКО в общем случае и при соответствии функции потерь плотности распределения (см. формулы (3.5.7), (3.5.8)):

$$V(\tilde{F}(\eta) = -\ln \tilde{f}(\eta), f(\eta)) = V(\tilde{f}, f) =$$

$$= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (-\ln \tilde{f}(\eta))'^2 f(\eta) d\eta}{\left[\int_{-\infty}^{\infty} (-\ln \tilde{f}(\eta))' f'(\eta) d\eta\right]^2} A^{-1}(\bar{c}, \sigma_{\eta}^2); \qquad (3.5.32)$$

$$V(F(\eta) = -\ln f(\eta), f(\eta)) = V(f) =$$

$$= \frac{1}{\int_{-\infty}^{\infty} f'^2(\eta) / f(\eta) d\eta} A^{-1}(\bar{c}, \sigma_{\eta}^2). \qquad (3.5.33)$$

Как уже неоднократно упоминалось,

$$\mathbf{V}(\tilde{f}, f) \ge \mathbf{V}(f). \tag{3.5.34}$$

Так как (3.5.34) справедливо для любых $(\tilde{f}(\eta) \ u \ f(\eta)) \in \Phi$, то оно справедливо и для $f(\eta) = f^*(\eta)$,т.е.

$$V(f^*) \le V(\tilde{f}, f^*)$$
. (3.5.35)

Объединяя неравенства (3.5.35) и (3.5.31), получим:

$$\mathbb{V}(F^*, f) \le \mathbb{V}(f^*) \le \mathbb{V}(\widetilde{F}, f^*) \tag{3.5.36}$$

для $\forall (f(\eta) \in \Phi; \tilde{f}(\eta) \in \Phi); f^*(\eta) \in \Phi$.

Последнее неравенство, как известно, является условием седловой точки, которое можно записать в ином виде:

$$\min_{\tilde{F}(\eta)} \max_{f(\eta)} V(\tilde{F}(\eta), f(\eta)) =$$

=
$$\max_{f(\eta)} \min_{\tilde{F}(\eta)} V(\tilde{F}(\eta), f(\eta)) = V(f^*), \qquad (3.5.36a)$$

где

$$\tilde{F}(\eta) = -\ln \tilde{f}(\eta), \quad (\tilde{f}(\eta), f(\eta)) \in \Phi, \quad f^*(\eta) \in \Phi.$$

Свойство 2. Оптимальная на классе плотность распределения является наименее благоприятной плотностью распределения.

Рассмотрим опять неравенство (3.5.34):

$$\mathrm{V}(\tilde{f},f) \ge \mathrm{V}(f)$$
.

Как уже отмечалось, оно справедливо при любых \tilde{f} и f, принадлежащих классу Φ , в том числе и при $\tilde{f}(\eta) = f^*(\eta)$. Таким образом, можно записать:

$$V(f^*, f) \ge V(f)$$
. (3.5.37)

Объединяя неравенства (3.5.31) и (3.5.37), можно записать $V(f) \le V(f^*, f) \le V(f^*)$. (3.5.38)

Очевидно, из последнего неравенства следует:

$$V(f) \le V(f^*)$$
 (3.5.39)

для $\forall f \in \Phi$.

В развернутой форме неравенство (3.5.39) имеет вид:

$$\frac{1}{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f'^{2}(\eta)}{f(\eta)} d\eta} \mathbf{A}\left(\overline{c}, \sigma_{\eta}^{2}\right) \leq \frac{1}{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f^{*'^{2}}(\eta)}{f^{*}(\eta)} d\eta} \mathbf{A}^{-1}\left(\overline{c}, \sigma_{\eta}^{2}\right) \quad \text{для } \forall f(\eta) \in \Phi.$$
(3.5.39a)

Таким образом, оптимальной на классе плотности распределения соответствует максимальная из абсолютно оптимальных АМКО.

Не трудно убедиться, что свойство 1 является необходимым и достаточным условием существования оптимальной на классе плотности распределений Ф функции потерь, тогда как свойство 2 – только необходимое условие.

Свойство 2 позволяет существенно упростить задачу (3.5.28) – определения гарантирующей функции потерь. Действительно, если заранее известно, что оптимальная функция потерь существует, то на основании свойства 1

$$\min_{F(\eta)\in Q} \max_{f(\eta)\in F} V(\tilde{F}, f) = V(f^*),$$

где, на основании свойства 2,

$$\mathbf{V}(f^*) = \max_{f \in \mathbf{F}} \mathbf{V}(f) \, .$$

Таким образом, задача (3.5.28) эквивалентна задаче: $F^*(\eta) = -\ln f^*(\eta)$;

$$f^*(\eta) = \arg \max_{f(\eta) \in F} V(f(\eta)), \qquad (3.5.40)$$

где

$$\mathbf{V}(f(\eta)) = \frac{1}{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f'^2(\eta)}{f(\eta)} d\eta} \mathbf{A}^{-1}(\overline{c}, \sigma_{\eta}^2).$$
(3.5.41)

Последнюю задачу можно упростить, если принять во внимание, что для целей идентификации важна не сама АМКО, а ее диагональные элементы. Учитывая это, рационально перейти к рассмотрению следа АМКО. Тогда задача (3.5.41) примет вид

$$J(f(\eta)) = \operatorname{tr}\{V(f(\eta))\},\$$

или, подставляя выражение $V(f(\eta))$, определяемое формулой (3.5.41), получим следующее выражение критерия оптимизации

$$J(f(\eta)) = \frac{1}{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f'^2(\eta)}{f(\eta)} d\eta} \operatorname{tr} A^{-1}(\overline{c}, \sigma_{\eta}^2). \quad (3.5.42)$$

Переходя от задачи максимизации к более привычной задаче минимизации, окончательно получим:

$$J(f(\eta)) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f'^2(\eta)}{f(\eta)} d\eta \frac{1}{\operatorname{tr} A^{-1}(\overline{c}, \sigma_{\eta}^2)}, \quad f(\eta) \in \Phi.$$
(3.5.43)

Несмотря на существенное упрощение, задача (3.5.43) является сложной вариационной задачей с нелинейными ограничениями, которая имеет явное решение только в частных случаях, которые будут рассмотрены ниже. В общем виде эта задача может быть решена только численно путем сведения ее к многомерной задаче нелинейного математического программирования, чему посвящен следующий параграф.

3.5.4. Преобразование вариационной задачи определения функции потерь к задаче нелинейного математического программирования

Преобразование задачи (3.5.43) к задаче многомерного нелинейного математического программирования осуществляется за счет аппроксимации непрерывной $f(\eta) \in \Phi$ кусочно-постоянной финитной функцией $f^{\pi}(\eta)$. Причем, так как $f(\eta)$ – четная функция, то можно проводить аппроксимацию только для положительных η :

$$f^{\pi}(\eta) = \begin{cases} f_0, & 0 \le \eta < \Delta; \\ f_j, & \Delta \le \eta < 2\Delta; \\ \dots & \\ f_k, & (k-1)\Delta \le \eta < k\Delta \end{cases}$$

Примерный вид такой функции приведен на рис. 3.9.

При такой аппроксимации интегралы в выражении (3.5.43) заменяются суммами, а производные – разностями.

Минимизация функционал (3.5.43) по функции $f(\eta)$ преобразуется к минимизации функции многих переменных вида:

$$J(f_0, ..., f_k) =$$

$$= \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(f_{j+1} - f_j)^2}{f_j \Delta} \cdot \frac{1}{\operatorname{tr} \left(A^{-1} \left(\hat{\overline{c}}(f_0, ..., f_k), \sigma_{\eta}^2 \right) \right)}; \quad (3.5.44)$$

$$\sigma_{\eta}^2 = 2 \sum_{j=0}^k f_j (\Delta \cdot j)^2 \Delta,$$
 (3.5.45)

где Δ – интервал разбиения.



Рис. 3.9. Преобразование непрерывной плотности распределения к кусочно-постоянной плотности распределения

Ограничения, накладываемые на $f_0, ..., f_k$, определяются классом Φ , причем одним из ограничений обязательно является условие:

$$2\sum_{j=0}^{k} f_j \Delta = 1, \qquad (3.5.46)$$

которое представляет собой дискретный аналог условия (3.5.2).

В настоящее время разработано большое число методов поиска экстремума функций многих переменных при наличии ограничений.

Характерной особенностью задачи минимизации функции (3.5.44) является необходимость определения $\hat{\overline{c}}(f_0, ..., f_k)$ на каждом шаге итерационного процесса минимизации.

Для нахождения $\hat{c}(f_0, ..., f_k)$ могут быть использованы абсолютно оптимальные рекуррентные алгоритмы (2.1.72), рассмотренные в предыдущей главе; с учетом кусочно-постоянного характера функции $f^{\pi}(\eta)$ эти алгоритмы можно записать в виде:

$$\begin{split} \hat{\overline{c}}(i) &= \hat{\overline{c}}(i-1) + \Gamma(i) \Biggl[-\frac{f_l - f_{l-1}}{\Delta \cdot f_l} \Biggr] \cdot \frac{\partial \psi(i, \tilde{\overline{c}})}{\partial \tilde{\overline{c}}} \Biggr|_{\tilde{\overline{c}} = \hat{\overline{c}}(i-1)}, \quad (3.5.47a) \\ &\Gamma(i) = \Gamma(i-1) - \\ -\frac{\Gamma(i-1) \Biggl[\frac{\partial \psi(i, \tilde{\overline{c}})}{\partial \tilde{\overline{c}}} \cdot \frac{\partial^{\mathrm{T}} \psi(i, \tilde{\overline{c}})}{\partial \tilde{\overline{c}}} \Biggr] \Biggr|_{\tilde{\overline{c}} = \tilde{\overline{c}}(i-1)} \Gamma(i-1) \\ -\frac{\Gamma(i-1) \Biggl[\frac{\partial \psi(i, \tilde{\overline{c}})}{\partial \tilde{\overline{c}}} \cdot \frac{\partial^{\mathrm{T}} \psi(i, \tilde{\overline{c}})}{\partial \tilde{\overline{c}}} \Biggr] \Biggr|_{\tilde{\overline{c}} = \tilde{\overline{c}}(i-1)} \Gamma(i-1) \\ I_F^{-1}(f_0, \dots, f_k) + \frac{\partial^{\mathrm{T}} \psi(i, \tilde{\overline{c}})}{\partial \tilde{\overline{c}}} \Biggr|_{\tilde{\overline{c}} = \hat{\overline{c}}(i-1)} \Gamma(i-1) \frac{\partial \psi(i, \tilde{\overline{c}})}{\partial \tilde{\overline{c}}} \Biggr|_{\tilde{\overline{c}} = \hat{\overline{c}}(i-1)}, \quad (3.5.476) \\ I_F(f_0, \dots, f_k) \cong 2 \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(f_{j+1} - f_j)^2}{f_j \cdot \Delta}, \quad (3.5.47B) \\ \hat{\overline{c}}(0) = \hat{\overline{c}}_0, \quad \Gamma(0) = \lambda I, \quad \lambda >> 1. \end{split}$$

Число *l* в формуле (3.5.47а) определяется номером интервала, в который попадает невязка $\varepsilon(i, \hat{\overline{c}}(i-1))$ на *i*-м шаге рекуррентного процесса идентификации:

$$l = \operatorname{int}\left[\frac{\varepsilon(i,\hat{\overline{c}}(i-1))}{\Delta}\right] + 1.$$
 (3.5.47r)

Параметр i изменяется от 1 до N, где N – число измерений входов и выхода объекта, используемых при определении оптимальной плотности распределения.

Общая схема процесса нахождения оптимальной функции плотности распределения (функции потерь) может быть представлена последовательностью действий.

1. Задаем начальные приближения:

$$\hat{\overline{c}}(0) = \hat{\overline{c}}_{0}; \quad \Gamma(0) = \lambda I, \quad \lambda \gg 1;$$

$$f^{\pi^{0}}(\eta) = \begin{cases} f_{0}^{0}, \quad 0 \le \eta < \Delta; \\ f_{L}^{0}, \quad \Delta \le \eta < 2\Delta; \\ \cdots \\ f_{k}^{0}, \quad (k-1)\Delta \le \eta < k\Delta, \end{cases}$$

где $f^{\pi^0}(\eta)$ удовлетворяет условию (3.5.46), $f^{\pi^0}(\eta) \in \Phi$; l = 0, l -номер итерации в процессе минимизация функции (3.5.44).
2. Используя рекуррентные формулы (3.5.47), находим оценку параметра \hat{c}^l при допущении, что $f(\eta) = f^{\pi^l}(\eta)$.

3. Вычисляем значение минимизируемой функции по формуле (3.5.44):

$$J^{l} = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(f_{j+1}^{l} - f_{j}^{l})^{2}}{f_{j}^{l}\Delta} \frac{1}{\operatorname{tr}\left[A^{-1}\left(\hat{c}^{l}, \left(\sigma_{\eta}^{2}\right)^{l}\right)\right]};$$
$$\left(\sigma_{\eta}^{2}\right)^{l} = 2\sum_{j=0}^{k} f_{j}^{l}(\Delta j)^{2}\Delta.$$

4. Рассчитываем новое значение плотности распределения $(f^{\pi})^{l+1}$:

$$(f^{\pi})^{l+1}(\eta) = \begin{cases} f_0^l + \Delta_0; & 0 \le \eta \le \Delta; \\ \dots \\ f_k^l + \Delta_k; & (k-1)\Delta \le \eta \le k\Delta, \end{cases}$$

Тогда $\Delta_0, ..., \Delta_k$ определяются выбранным методом поиска экстремума функции многих переменных (3.5.44) при ограничениях:

$$(f^{\pi})^{l+1}(\eta) \in \Phi$$
, $2\sum_{j=0}^{k} f_{j}^{l+1} \Delta = 1$.

5. Рассчитываем новое значение критерия:

$$J^{l+1} = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{f_{j+1}^{l+1} - f_j^{l+1}}{f_j^{l+1}\Delta} \frac{1}{\operatorname{tr}\left[A^{-1}\left(\hat{c}^l, \left(\sigma_{\eta}^2\right)^{l+1}\right)\right]},$$
$$\left(\sigma_{\eta}^2\right)^{l+1} = 2\sum_{j=0}^k f_j^{l+1} (\Delta \cdot j)^2 \Delta.$$

6. Проверяем условие окончания итерационного процесса:

$$\frac{\left|J^{l+1} - J^{l}\right|}{J^{l+1}} \le \delta \,, \quad \delta << 1 \,.$$

Если условие выполняется, то процесс поиска оптимальной плотности распределения заканчивается; в противном случае переходим к п. 2 итерационного процесса, присвоив l = l + 1. Необходимо отметить, что минимизируемая функция (3.5.44) является чаще всего многоэкстремальной, что приводит к опасности нахождения локального минимума. Это необходимо иметь в виду при решении задач подобного типа.

3.5.5. Определение функции потерь для регрессионных объектов. Алгоритм Хубера

Как уже отмечалось выше, задача определения функции потерь в общем случае не может быть решена в явном виде. Однако для некоторых классов при идентификации линейного регрессионного объекта вида

$$y(i) = b_1 u_1(i) + \dots + b_n u_n(i) + \eta(i)$$
(3.5.48)

эта задача может быть получена в явном виде. Это связано с тем, что нормированная информационная матрица для линейных регрессионных объектов не зависит ни от оцениваемых параметров, ни от дисперсии помехи.

Учитывая это, минимизируемый функционал (3.5.43), а именно:

$$J(f(\eta)) = V(f(\eta)) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f'^2(\eta)}{f(\eta)} d\eta \frac{1}{\operatorname{tr}\left(A^{-1}(\overline{c}, \sigma_{\eta}^2)\right)},$$
$$f(\eta) \in \Phi$$

может быть заменен более простым функционалом

$$J(f(\eta)) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f'^2(\eta)}{f(\eta)} d\eta , \quad f(\eta) \in \Phi , \qquad (3.5.49)$$

который представляет собой информацию Фишера.

В том случае, когда помеха η имеет распределение, принадлежащее классу α -загрязненных распределений (см. классы Φ_3 , Φ_4 , Φ_5 в разд. 3.2.1), для нахождения оптимальной плотности распределения может быть использован минимаксный подход Хубера.

Как уже отмечали, оптимальной на классе плотностью распределения для Р-объектов является плотность распределения, которой соответствует минимальная фишеровская информация.

Интересно отметить, что работы Хубера в истории развития робастных оценок были пионерскими. Ему удалось обосновать принцип минимакса, опираясь только на выводы теории вероятностей и математической статистики (в основном на центральную предельную теорему и ее следствия).

Итак, рассмотрим задачу идентификации коэффициентов линейного регрессионного объекта (3.5.48) в предположении, что распределение $f(\eta)$ помех принадлежит классу α -загрязненных распределений:

$$\Phi = \{ f(\eta) : f(\eta) = (1 - \alpha)h(\eta) + \alpha g(\mu) \}, \qquad (3.5.50)$$

где $h(\alpha)$ – известная плотность распределения; $g(\eta)$ – произвольная неизвестная плотность распределения; α – вероятность появления «выброса» с распределением $g(\eta)$, α удовлетворяет условию

$$0 \le \alpha \le 1$$
.

Результат, полученный Хубером, получил название «Теорема Хубера».

Теорема Хубера. Пусть $h(\eta) - дважды непрерывно дифферен$ $цируемая плотность распределения, такая, что <math>(-\ln h(\eta)) - выпук$ лая вниз функция. Тогда АМКО линейных регрессионных объектов – V(F, f) имеет седловую точку, т.е. существует плотность $распределения <math>f^*(\eta) = (1-\alpha)h(\eta) + \alpha g^*(\eta)$ и функция $F^*(\eta) =$ $= -\ln f^*(\eta)$, такие, что

$$V(F^*, f) \le V(F^*, f^*) \le V(F, f^*)$$
. (3.5.51)

Далее, пусть η_0 и η_1 ($\eta_0 < \eta_1$) – концы интервала (один или оба конца могут быть бесконечными), где

$$\left|\frac{h'(\eta)}{h(\eta)}\right| \le k, \quad \eta \in [\eta_0, \eta], \tag{3.5.52}$$

и k, α , η_0 и η_1 связаны соотношением:

$$(1-\alpha)^{-1} = \int_{\eta_0}^{\eta_1} h(\eta) d\eta + \frac{h(\eta_0) + h(\eta_1)}{k} .$$
 (3.5.53)

Тогда плотность $f^*(\eta)$ имеет вид:

$$f^{*}(\eta) = \begin{cases} (1-\alpha)h(\eta_{0})\exp(k(\eta-\eta_{0})), & \eta \leq \eta_{0}; \\ (1-\alpha)h(\eta), & \eta_{0} \leq \eta \leq \eta_{1}; \\ (1-\alpha)h(\eta_{1})\exp(-k(\eta-\eta_{1})), & \eta \geq \eta_{1}. \end{cases}$$
(3.5.54)

Вначале покажем, что $f^*(\eta)$, определяемая формулой (3.5.54), удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к плотности распределения, и принадлежит классу (3.5.50). Затем докажем, что эта плотность $f^*(\eta)$ действительно является оптимальной на классе (3.5.50).

Итак, рассмотрим условия второй части теоремы. Прежде покажем, что $f^*(\eta)$ удовлетворяет условию полноты интеграла:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^{*}(\eta) d\eta = \int_{-\infty}^{\eta_{0}} (1-\alpha)h(\eta_{0})e^{k(\eta-\eta_{0})} + \int_{\eta_{0}}^{\eta_{1}} (1-\alpha)h(\eta)d\eta + \\ + \int_{\eta_{1}}^{\infty} (1-\alpha)h(\eta_{1})e^{-k(\eta-\eta_{1})}d\eta = \\ = (1-\alpha)h(\eta_{0})\frac{1}{k} + (1-\alpha)\int_{\eta_{0}}^{\eta_{1}} h(\eta)d\eta + (1-\alpha)h(\eta_{1})\frac{1}{k} = \\ = (1-\alpha)\left[\int_{\eta_{0}}^{\eta_{1}} h(\eta)d\eta + \frac{h(\eta_{0}) + h(\eta_{1})}{k}\right].$$

По условию теоремы (3.5.53) выражение, стоящее в квадратных скобках, равно $(1-\alpha)^{-1}$, и, следовательно, получаем $\int_{-\infty}^{\infty} f^*(\eta) d\eta = 1$, т.е. $f^*(\eta)$ удовлетворяет условию полноты инте-

грала.

Покажем теперь, что и $g^*(\eta)$, соответствующая $f^*(\eta)$, также удовлетворяет условию полноты интеграла, а именно:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g^{*}(\eta) d\eta = 1.$$
 (3.5.55)

Используя формулы (3.5.50) и (3.5.54), найдем выражения для $g^*(\eta)$:

$$g^{*}(\eta) = \begin{cases} \frac{(1-\alpha)}{\alpha} \Big[h(\eta_{0}) e^{k(\eta-\eta_{0})} - h(\eta) \Big], & \eta \leq \eta_{0}; \\ 0, & \eta_{0} \leq \eta \leq \eta_{1}; \\ \frac{1-\alpha}{\alpha} \Big[h(\eta_{1}) e^{-k(\eta-\eta_{1})} - h(\eta) \Big], & \eta \geq \eta_{1}. \end{cases}$$

Интегрируя (3.5.56) на бесконечных пределах, нетрудно убедиться в справедливости выражения (3.5.55). Покажем, в заключение, что $g^*(\eta)$ неотрицательная функция. Докажем это для $\eta < \eta_0$ (при $\eta > \eta_1$ доказательство аналогичное).



Рис. 3.10. График функции $-\ln(f(\eta))$

По условию теоремы $-\ln(h(\eta))$ – выпуклая вниз функция. Следовательно, график этой функции лежит выше касательной, проведенной в любой точке, в том числе и в точке η_0 (рис. 3.10).

Как известно, наклон касательной определяется производной функции в данной точке. Таким образом, учитывая условие выпуклости вниз функции $-\ln h(\eta)$, можно записать:

$$-\ln h(\eta) \ge -\ln h(\eta_0) + (-\ln h(\eta))' \Big|_{\eta=\eta_0} (\eta - \eta_0) =$$

= $-\ln h(\eta_0) - \frac{h'(\eta_0)}{h(\eta_0)} (\eta - \eta_0),$ (3.5.57)
 $\eta \le \eta_0.$

По условию теоремы (3.5.52)

$$\left|\frac{h'(\eta)}{h(\eta)}\right| \leq k , \quad \eta \in [\eta_0, \eta].$$

Учитывая, что $h(\eta)$ – дважды непрерывно дифференцируемая плотность распределения, можно заключить: $\frac{h'(\eta_0)}{h(\eta_0)} = k$ Тогда, подставляя последнее равенство в формулу (3.5.57), получим:

$$-\ln h(\eta) \ge -\ln h(\eta_0) - k(\eta - \eta_0),$$

или

$$\ln h(\eta_0) + k(\eta - \eta_0) - \ln h'(\eta) \ge 0.$$

Последнее неравенство эквивалентно выражению

$$h(\eta_0)e^{k(\eta-\eta_0)} - h(\eta) > 0$$
. (3.5.58)

Согласно формуле (3.5.56)

$$\frac{1-\alpha}{\alpha}\Big(h(\eta_0)e^{h(\eta-\eta_0)}-h(\eta)\Big)=g^*(\eta).$$

Сравнивая это выражение с неравенством (3.5.58), и так как $0 \le \alpha \le 1$, то нетрудно заключить, что $g^*(\eta) \ge 0$ при $\eta \le \eta_0$, что и требовалось показать.

Таким образом, $g^*(\eta)$ определена «вполне корректно» соотношениями (3.5.56) в смысле требований, которым должна удовлетворять плотность распределения.

Покажем теперь, что $f^*(\eta)$ и соответствующая ей функция потерь $F^*(\eta) = -\ln f^*(\eta)$ действительно определяют седловую точку, т.е. удовлетворяют неравенству

$$\begin{split} \mathrm{V}(F^{*}(\eta),f(\eta)) \leq \mathrm{V}(f^{*}(\eta)) \leq \mathrm{V}(\tilde{F}(\eta),f^{*}(\eta)) \quad (3.5.59) \\ \text{для } \forall \ f(\eta), \ \widetilde{f}(\eta) \in \Phi \ , \ \widetilde{F}(\eta) = -\ln \widetilde{f}(\eta) \ . \end{split}$$

Правое неравенство выражения (3.5.59), очевидно, вытекает из свойств АМКО. Таким образом, необходимо доказать, что

$$V(F^{*}(\eta), f(\eta)) \le V(f^{*}(\eta))$$
 (3.5.60)

для $\forall f(\eta) \in \Phi$.

Учитывая, что нормированная информационная матрица не зависит от σ_{η}^2 и \bar{c} , последнее неравенство можно переписать следующим образом:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f^{*'^2}(\eta)}{f^*(\eta)} d\eta \leq \frac{\left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f^{*'}(\eta)}{f^*(\eta)} f'(\eta) d\eta\right]^2}{\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{f^{*'}(\eta)}{f^*(\eta)}\right)^2 f(\eta) d\eta}.$$
(3.5.61)

Подробное доказательство этого неравенства приведено в работе [4].

Таким образом, показали, что оптимальная на классе (3.5.50) плотность распределения существует и определяется по правилу (3.5.54).

Запишем соответствующую ей оптимальную функцию потерь:

$$F^{*}(\varepsilon) = \begin{cases} -\ln[(1-\alpha)h(\eta_{0})] - k(\varepsilon - \eta_{0}), & \varepsilon \leq \eta_{0}; \\ -\ln[(1-\alpha)h(\eta_{0})], & \eta_{0} \leq \varepsilon \leq \eta_{1}; \\ -\ln[(1-\alpha)h(\eta_{0})] + k(\varepsilon - \eta_{1}), & \varepsilon \geq \eta_{1}. \end{cases}$$
(3.5.62)

3.5.6. Идентификация параметров регрессионного объекта при Q-загрязненном нормальном распределении помехи

Пусть известно, что помеха принадлежит классу Φ_3 – приближенно нормальных распределений:

$$f(\eta) = (1 - \alpha) f_N(\eta) + \alpha g(\eta),$$
 (3.5.63)

где *f_N* – нормальное распределение;

$$f_N = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\eta^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_\eta^2}\eta^2\right), \qquad (3.5.64)$$

 α – вероятность появления «выброса» с распределением $g(\eta)$.

Примерный вид α-загрязненных шумов изображен на рис. 3.11.



Рис. 3.11. Примерный вид α-загрязненных шумов

Учитывая результат, полученный в предыдущем разделе, запишем оптимальную на классе плотность распределения:

r

$$f^{*}(\eta) = \begin{cases} (1-\alpha)\frac{1}{\left(2\pi\sigma_{\eta}^{2}\right)^{1/2}}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma_{\eta}^{2}}\eta_{0}^{2}\right]\exp[k(\eta-\eta_{0})], \ \eta < \eta_{0}; \\ 1-\alpha)\frac{1}{\left(2\pi\sigma_{\eta}^{2}\right)^{1/2}}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma_{\eta}^{2}}\eta^{2}\right], \ \eta_{0} \le \eta \le \eta_{1}; \\ (1-\alpha)\frac{1}{\left(2\pi\sigma_{\eta}^{2}\right)^{1/2}}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma_{\eta}^{2}}\eta_{1}^{2}\right]\exp[-k(\eta-\eta_{1})], \ \eta > \eta_{1}. \end{cases}$$
(3.5.65)

Соответствующая функция потерь будет иметь вид

$$F^{*}(\varepsilon) = \begin{cases} -\ln\left[(1-\alpha)\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{\eta}^{2}}}\right] + \frac{1}{2\sigma_{\eta}^{2}}\eta_{0}^{2} - k(\varepsilon-\eta_{0}), & \varepsilon \leq \eta_{0}; \\ -\ln\left[(1-\alpha)\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{\eta}^{2}}}\right] + \frac{1}{2}\sigma_{\eta}^{2}\varepsilon^{2}, & \eta_{0} \leq \varepsilon \leq \eta_{1}; \\ -\ln\left[(1-\alpha)\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{\eta}^{2}}}\right] + \frac{1}{2}\sigma_{\eta}^{2}\eta_{1}^{2} + k(\varepsilon-\eta_{1}), & \varepsilon \geq \eta_{1}. \end{cases}$$

Очевидно, записанная функция потерь будет эквивалентна более простой функции потерь:

$$F^{*}(\varepsilon) = \begin{cases} \frac{1}{2\sigma_{\eta}^{2}}\eta_{0}^{2} - k(\varepsilon - \eta_{0}), & \varepsilon \leq \eta_{0}; \\ \frac{1}{2\sigma_{\eta}^{2}}\varepsilon^{2}, & \eta_{0} \leq \varepsilon \leq \eta_{1}; \\ \frac{1}{2\sigma_{\eta}^{2}}\eta_{1}^{2} + k(\varepsilon - \eta_{1}), & \varepsilon \geq \eta_{1}. \end{cases}$$
(3.5.66)

На рис. 3.12 приведен примерный вид функции потерь (3.5.66). Видно, что на отрезке [η₀,η₁] функция потерь квадратичная (метод наименьших квадратов), а на участках $(-\infty, \eta_0)$, (η_1, ∞) – модульная (метод наименьших модулей).



Для определения η_0 , η_1 и *k* в формуле (3.5.66) воспользуемся условиями теоремы Хубера (3.5.52) и (3.5.53). Запишем их для приближенно нормального распределения помехи:

$$\frac{1}{1-\alpha} = \frac{1}{\left(2\pi\sigma_{\eta}^{2}\right)^{1/2}} \times \left[\int_{\eta_{0}}^{\eta_{1}} e^{-\eta^{2}/2\sigma^{2}} d\eta + \frac{e^{\frac{-\eta_{0}^{2}}{2\sigma_{\eta}^{2}}} + e^{\frac{-\eta_{1}^{2}}{2\sigma_{\eta}^{2}}}}{k} \right], \qquad (3.5.67)$$
$$\left| \frac{\eta}{2\sigma_{\eta}^{2}} \right| \le k \quad \text{или} \quad k\sigma_{\eta}^{2} \ge |\eta| \quad \text{при}$$

$$\eta_0 \le \eta \le \eta_1. \tag{3.5.68}$$

Из условия (3.5.68) получаем значения η_0 и η_1 :

$$\eta_0 = -\eta_1 = -\Delta = -k\sigma_\eta^2$$
 или $k = \Delta / \sigma_\eta^2$. (3.5.69)

2

Подставим (3.5.69) в условие (3.5.67):

$$\frac{1}{1-\alpha} = \int_{-\Delta}^{\Delta} \frac{1}{\left(2\pi\sigma_{\eta}^{2}\right)^{1/2}} e^{-\frac{\eta^{2}}{2\sigma_{\eta}^{2}}} d\eta +$$

$$+\frac{2\sigma_{\eta}^{2}}{\left(2\pi\sigma_{\eta}^{2}\right)^{1/2}\Delta}e^{-\frac{\Delta^{2}}{2\sigma_{\eta}^{2}}}.$$
(3.5.70)

Введем обозначения:

$$x = \frac{2}{\sigma_{\eta}}; \quad \xi = \Delta / \sigma_{\eta}. \tag{3.5.71}$$

Тогда уравнение (3.5.70) можно преобразовать к виду

$$\frac{1}{1-\alpha} = \int_{-\xi}^{\xi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx + \frac{2}{\sqrt{2\pi\xi}} e^{-\frac{1}{2}\xi^2} .$$
 (3.5.72)

Достоинством последней записи является то, что она не зависит от параметра σ_n^2 .

Полученное уравнение не может быть решено аналитически и решается численно. Результаты решения, соответствующие различным α , приведены в табл. 3.7.

Таблица 3.7

Результаты решения для различных α

α	0	0,01	0,02	0,03	0,1	0,3	0,5
ٹی	8	2,0	1,7	1,1	1,1	0,9	0,4

Преобразуем выражение (3.5.65) и (3.5.66), используя обозначения (3.5.69):

$$f^{*}(\eta) = \begin{cases} (1-\alpha)\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{\eta}}}e^{\frac{\Delta}{\sigma_{\eta}^{2}}}\left(\eta + \frac{\Delta}{2}\right), & \eta \leq -\Delta; \\ (1-\alpha)\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{\eta}}}e^{-\frac{1}{2\sigma_{\eta}^{2}}\eta^{2}}, & |\eta| \leq \Delta; \\ (1-\alpha)\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{\eta}}}e^{-\frac{\Delta}{\sigma_{\eta}^{2}}}\left(\eta - \frac{\Delta}{2}\right), & \eta \geq \Delta; \end{cases}$$
(3.5.73)

$$F^{*}(\varepsilon) = \begin{cases} -\frac{\Delta}{\sigma_{\eta}^{2}} \varepsilon - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{2}}{\sigma_{\eta}^{2}}, & \varepsilon < -\Delta; \\ \frac{1}{2\sigma_{\eta}^{2}} \varepsilon^{2}, & |\varepsilon| < \Delta; \\ \frac{\Delta}{\sigma_{\eta}^{2}} \varepsilon - \frac{1}{2} \frac{\Delta^{2}}{\sigma_{\eta}^{2}}, & \varepsilon > \Delta, \end{cases}$$
(3.5.74)

где $\Delta = \xi \cdot \sigma_{\eta}$.

Запишем теперь рекуррентный алгоритм, соответствующий этой функции потерь для идентификации параметров линейного регрессионного объекта. Для этого воспользуемся абсолютно оптимальным рекуррентным алгоритмом, полученным в предыдущем разделе (см. формулы (3.4.61a) и (3.4.61б)), подставив в качестве $f(\eta)$ оптимальную на классе плотность распределения $f^*(\eta)$, определяемую соотношениями (3.5.73). Произведя несложные преобразования, получим:

r

$$\hat{\overline{b}}(i) = \hat{\overline{b}}(i-1) + \Gamma(i)d(\varepsilon(i,\hat{\overline{b}}(i-1)))\overline{u}(i), \quad (3.5.75a)$$

$$\Gamma(i) = \Gamma(i-1) - \frac{\Gamma(i-1)\overline{u}(i)\overline{u}^{\mathsf{T}}(i)\Gamma(i-1)}{\left(I_F^*\right)^{-1} + \overline{u}^{\mathsf{T}}(i)\Gamma(i-1)\overline{u}(i)}, \quad (3.5.756)$$

$$\Gamma(0) = \lambda I, \quad \lambda >> 1, \quad \hat{\overline{b}}(0) = \hat{\overline{b}}_0,$$

ī.

где

$$d(\varepsilon(i,\hat{\overline{b}}(i-1))) = \frac{dF * (\varepsilon(i,\overline{\overline{b}}(i-1)))}{d\varepsilon} \bigg|_{\varepsilon = \varepsilon(i,\hat{\overline{b}}(i-1))} = \begin{cases} -\Delta, & \varepsilon(i) \le -\Delta; \\ \varepsilon(i,\hat{\overline{b}}(i-1)), & -\Delta \le |\varepsilon(i)| \le \Delta; \\ \Delta, & \varepsilon(i) \ge \Delta, \end{cases}$$
(3.5.76)

 I_F^* – фишеровская информация, соответствующая оптимальной на классе плотности распределения $f^*(\eta)$ (3.5.73), которая определяется формулой [4].

$$I_F^* = 2(1-\alpha)\frac{1}{\sigma_{\eta}^2}\Phi\left(\frac{\Delta}{\sigma_{\eta}}\right), \qquad (3.5.77)$$

где $\Phi\left(\frac{\Delta}{\sigma_{\eta}}\right)$ – интеграл вероятности Лапласа [5].

Подставляя полученное выражение для фишеровской информации в рекуррентные соотношения (3.5.79), запишем окончательную форму рекуррентного алгоритма для оценивания параметров регрессионного объекта при условии, что на систему действует случайная помеха, имеющая приближенно нормальный закон распределения:

$$\hat{\overline{b}}(i) = \hat{\overline{b}}(i-1) + \Gamma(i)d(\varepsilon(i,\hat{\overline{b}}(i-1)))\overline{u}(i); \qquad (3.5.78a)$$

$$\Gamma(i) = \Gamma(i-1) - - - \Gamma(i-1)\overline{u}(i)\overline{u}^{\mathrm{T}}(i)\Gamma(i-1) - \Gamma(i-1)\overline{u}(i)\overline{u}^{\mathrm{T}}(i)\Gamma(i-1) - \Gamma(i-1)\overline{u}(i) - \Gamma($$

Параметр $d(\varepsilon(i, \hat{\vec{b}}(i-1)))$ определяется по формуле (3.5.76).

Для инициализации рекуррентного процесса используются начальные приближения оцениваемого параметра $\hat{b}(0)$ и матрицы $\Gamma(0)$. Окончание рекуррентного процесса связано с прекращением нормального функционирования объекта идентификации, в частности, с получением достоверной информации от датчиков.

Для тестового примера был выбран регрессионный объект

$$y(i) = b_1 u_1(i) + b_2 u_2(i) + b_3 u_3(i) + \eta(i)$$

с параметрами

$$b_1 = 4; \quad b_2 = 6,5; \quad b_3 = 8.$$

Входные воздействия $u_1(i)$, $u_2(i)$, $u_3(i)$ имели нормальный закон распределения: $M_{u_1} = 2$, $\sigma_{u_1}^2 = 100$; $M_{u_2} = 4,5$, $\sigma_{u_2}^2 = 100$; $M_{u_3} = 6$, $\sigma_{u_3}^2 = 100$. Шум, действующий в объекте $\eta(i)$, имел приближенно нормальный закон распределения: $f(\eta) = (1-\alpha)f_N(\eta) + \alpha g(\eta)$, где $f_N(\eta)$ – нормальный закон распределения:

$$f_N(\eta) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}\sigma_{\eta}} e^{-\frac{1}{2\sigma_{\eta}^2}\eta^2},$$

а $g(\eta)$ – также нормальный закон распределения

$$g(\eta) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2} \sigma_{\eta \text{ выбр}}} e^{-\frac{1}{2\sigma_{\eta \text{ выбр}}^2} \eta^2}$$

Оценка эффективности алгоритма Хубера по сравнению с обычным рекуррентным алгоритмом с квадратичной функцией потерь проводилась при следующих статистических характеристиках распределений:

1.
$$\sigma_{\eta} = 0.5$$
; $\alpha = 0.1$; $\sigma_{\eta \text{ BbI}\delta p} = 10$;
2. $\sigma_{\eta} = 0.5$; $\alpha = 0.1$; $\sigma_{\eta \text{ BbI}\delta p} = 50$;
3. $\sigma_{\eta} = 0.5$; $\alpha = 0.1$; $\sigma_{\eta \text{ BbI}\delta p} = 100$;
4. $\sigma_{\eta} = 0.5$; $\alpha = 0.3$; $\sigma_{\eta \text{ BbI}\delta p} = 10$;
5. $\sigma_{\eta} = 0.5$; $\alpha = 0.3$; $\sigma_{\eta \text{ BbI}\delta p} = 50$;
6. $\sigma_{\eta} = 0.5$; $\alpha = 0.3$; $\sigma_{\eta \text{ BbI}\delta p} = 100$.

На рис.2.2.5 представлены графики сходимости сглаженной ошибки оценки по двум алгоритмам: алгоритм с использованием теоремы Хубера и рекуррентный алгоритм, соответствующий методу наименьших квадратов.

Из графиков видно, что эффективность использования рекуррентного алгоритма с использованием теоремы Хубера возрастает с увеличением вероятности выброса α и с увеличением интенсивности выброса. При больших α и $\sigma_{\eta выбр}$ (рис. 3.13) обычный рекуррентный алгоритм практически неработоспособен, тогда как алгоритм Хубера обеспечивает достаточно хорошую сходимость оценок к истинным значениям параметров.



 $\alpha = 0,1, \ \sigma_{\eta} = 0,5, \ \sigma_{\eta \text{ выбр}} = 10: a$ – линейный алгоритм; δ – алгоритм Хубера

a)



 $\alpha = 0,1, \ \sigma_{\eta} = 0,5, \ \sigma_{\eta \text{ выбр}} = 50: a$ – линейный алгоритм; δ – алгоритм Хубера

б)

Рис. 3.13. Зависимость сглаженной ошибки оценки от номера измерений (см. также с. 267 – 268)



 $\alpha = 0,1, \ \sigma_{\eta} = 0,5, \ \sigma_{\eta \text{ выбр}} = 100: a$ – линейный алгоритм; δ – алгоритм Хубера

в)



 $\alpha = 0,3, \ \sigma_{\eta} = 0,5, \ \sigma_{\eta \text{ выбр}} = 10: a$ – линейный алгоритм; δ – алгоритм Хубера

г)

Рис. 3.13. Продолжение



 α = 0,3, ~ σ_{η} = 0,5, ~ $\sigma_{\eta \text{ выбр}}$ = 50: а – линейный алгоритм; б – алгоритм Хубера





 α = 0,3, ~ σ_{η} = 0,5, ~ $\sigma_{\eta \text{ выбр}}$ = 100: a – линейный алгоритм; $~\delta$ – алгоритм Хубера

e)

Рис. 3.13. Окончание

3.6. Применение методов оценивания параметров при обработке реакторной информации

3.6.1. Метод максимума правдоподобия при аппроксимации макрополей нейтронов

Многоточечная информация о плотности потока нейтронов, снимаемая N внутриреакторными датчиками, расположенными в точках с координатами $\vec{r_1}, ..., \vec{r_N}$, обрабатывается с целью представления поля нейтронов [10] в виде:

$$\varphi(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{k} A_i \psi_i(\vec{r}), \qquad (3.6.1)$$

где $\{\psi_i(\vec{r})\}$ – набор известных линейно независимых функций; $\{A_i\}$ – набор коэффициентов, подлежащих определению.

Отметим, что согласно теоретическим и экспериментальным исследованиям представление (3.6.1) справедливо не для самого поля нейтронов, а лишь для его отклонения от какого-либо начального или заданного распределения, т.е. достаточно хорошо линейным набором функций $\{\psi_i(\vec{r})\}$ можно описать лишь функцию

$$\delta \varphi(\vec{r},t) = \varphi(\vec{r},\tau+t) - \varphi(\vec{r},t) = \sum_{i=1}^{k} A_i \psi_i(\vec{r}) ,$$

что и необходимо при исследовании динамических свойств объекта и системы регулирования. Подразумевая это обстоятельство, в дальнейшем будем говорить о восстановлении поля нейтронов.

Итак, требуется определить неизвестный вектор \vec{A} , если набор функций $\{\psi_i(\vec{r})\}$ известен и выбран таким образом, чтобы линейная комбинация функций $\psi_i(\vec{r})$ давала возможность описать любое распределение плотности потока нейтронов, встречающееся при эксплуатации реактора. Отметим, что специфика внутриреакторной информации состоит в том, что вектор показаний датчиков \vec{C} носит, вообще говоря, случайный характер. Задача сводится к нахождению оценки вектора \vec{A} по однократной реализации случайного вектора \vec{C} . Плотность вероятности этого случайного вектора в предположении, что он имеет нормальный закон распределения при данном значении параметра \vec{A} , есть

$$f\left(\vec{C}/\vec{A}\right) = \frac{1}{\sqrt{\left(2\pi\right)^{N}\left|\hat{K}\right|}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\vec{C}-\vec{\mu}\right)^{*}\hat{K}^{-1}\left(\vec{C}-\vec{\mu}\right)\right),$$

где $\vec{\mu} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{k} A_{i}\psi_{i}(\vec{r}_{1}) \\ \dots \\ \sum_{i=1}^{k} A_{i}\psi_{i}(\vec{r}_{N}) \end{bmatrix}$ – вектор математического ожидания, компонен-

тами которого являются математические ожидания плотности потока

нейтронов в соответствующих точках; $\hat{K} = \begin{bmatrix} K_{11} & \dots & K_{1N} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & K_{NN} \end{bmatrix}$ – сим-

метричная корреляционная матрица измерений; $|\hat{K}|$ – определитель корреляционной матрицы.

Следуя принципу максимума правдоподобия, необходимо подобрать вектор $\vec{\mu}$ так, чтобы плотность вероятности наблюдаемой совокупности значений $c_1, ..., c_n$ была максимальной, т.е.

$$\frac{\partial}{\partial A_p} \ln f\left(\vec{C}/\vec{A}\right) = 0, \quad p = 1, ..., k.$$

Отсюда получается система линейных уравнений максимума правдоподобия

$$\frac{\partial}{\partial A_p} \ln \left[\left(\vec{C} - \vec{\mu} \right)^* \hat{K}^{-1} \left(\vec{C} - \vec{\mu} \right) \right] = 0, \quad p = 1, \dots, k.$$

Для получения системы уравнений относительно вектора \vec{A} представим билинейную форму $(\vec{C} - \vec{\mu})^* \hat{K}^{-1} (\vec{C} - \vec{\mu})$.

В виде скалярного произведения двух векторов:

$$\left(\left(\vec{C}-\vec{\mu}\right)^*,\hat{K}^{-1}\left(\vec{C}-\vec{\mu}\right)\right).$$

Возможность такого представления опирается на симметричность матрицы \hat{K} и \hat{K}^{-1} .

Условие минимальности скалярного произведения

$$\frac{\partial}{\partial A_p} \left(\left(\vec{C} - \hat{S}\vec{A} \right), \ \hat{K}^{-1} \left(\vec{C} - \hat{S}\vec{A} \right) \right) = 0$$

можно представить в виде:

$$-\left(\hat{S}\vec{l}_{p},\hat{K}^{-1}\left(\vec{C}-\hat{S}\vec{A}\right)\right)-\left(\left(\vec{C}-\hat{S}\vec{A}\right),\hat{K}^{-1}\hat{S}\vec{l}_{p}\right)=0,$$

где \vec{l}_p – вектор, у которого все координаты равны нулю, а *p*-я – единице. Симметричность скалярного произведения относительно перемножаемых векторов позволяет получить

$$\left(\left(\vec{C}-\hat{S}\vec{A}\right),\,\hat{K}^{-1}\hat{S}\vec{l}_{p}\right)=0$$

или

$$\left(S^{*}\hat{K}^{-1}\left(\vec{C}-\hat{S}\vec{A}\right),\vec{l}_{p}\right)=0$$

Из этого соотношения следует, что p-я компонента первого вектора в скалярном произведении равна нулю, а так как p пробегает все значения от 1 до k, то система линейных уравнений для определения компонент вектора будет иметь вид:

$$S^*\hat{K}^{-1}\left(\vec{C}-\hat{S}\vec{A}\right)=0$$

или

$$\hat{M}\vec{A} = \hat{L}\vec{C} ,$$

где введены обозначения:

$$\hat{M} = \hat{S}^* \hat{K}^{-1} \hat{S}, \quad \hat{L} = \hat{S}^* \hat{K}^{-1}.$$

Решением системы будет вектор

$$\vec{A} = \hat{M}^{-1}\hat{L}\vec{C} = \hat{R}\vec{C}.$$

Таким образом, процедура определения неизвестного вектора \vec{A} свелась к умножению матрицы \hat{R} на вектор показаний \vec{C} . Существенным здесь является то, что матрица не зависит от показаний датчиков, а определяется видом выбранных пробных функций $\{\psi_i(\vec{r})\}$ и координатами датчиков \vec{r}_i , i = 1, ..., N. Именно это об-

стоятельство и позволяет использовать данный метод в оперативном режиме, поскольку матрица \hat{R} может быть рассчитана заранее.

3.6.2. Определение постоянной времени графитовой кладки в пассивном эксперименте

Одной из важнейших характеристик активной зоны реактора является постоянная времени графитовой кладки τ_{rp} [1, 6, 7]. Знание этой величины необходимо при решении задач, связанных с анализом устойчивости работы аппарата и прогнозированием запаса реактивности. В данной работе предлагается методика определения τ_{rp} , основанная на идентификации неизвестных параметров математической модели.

В качестве исходной математической модели выступает линейное уравнение, описывающее изменение средней по ячейке АЗ температуры графитовой кладки:

$$\frac{\partial \Theta(\bar{r},\tau)}{\partial \tau} + \lambda \Theta(\bar{r},\tau) = \lambda w(\bar{r},\tau) + \alpha_{\upsilon} \frac{\partial^2 \Theta(\bar{r},\tau)}{\partial z^2}, \qquad (3.6.2)$$

где $\lambda = 1/\tau_{rp}$ – неизвестный параметр; α_{υ} – коэффициент теплопроводности графита; τ – время; z – вертикальная составляющая декартовой системы координат; Θ – температурный напор, нормированный на среднее по объему реактора значение температурного напора:

$$\Theta(\bar{r},\tau) = \frac{T_{\rm rp}(\bar{r},\tau) - t_S}{\overline{T_{\rm rp} - t_S}};$$

 $T_{\rm rp}$ – температура графита; t_S – температура насыщения воды; w – энерговыделение, нормированное на среднее по объему реактора значение энерговыделения:

$$w(\bar{r},\tau) = \frac{\Sigma_f(r)\phi(\bar{r},\tau)}{\overline{\Sigma_f}\phi};$$

где Σ_f – макроскопическое сечение деления; φ – плотность потока нейтронов.

В силу действия многочисленных случайных факторов даже в стационарном режиме работы аппарата имеются флуктуации значений Θ и *w* относительно среднего уровня, т.е. Θ и *w* фактически являются случайными процессами. Отразим этот факт, представив их значения в виде суммы математического ожидания и некоторой случайной составляющей:

$$\Theta = \overline{\Theta} + \delta\Theta; \qquad \overline{\Theta} = M[\Theta]; w = \overline{w} + \delta w; \qquad \overline{w} = M[w].$$

Здесь M – оператор усреднения по времени или взятия математического ожидания. Исходное уравнение (4.2.1), справедливое для функций Θ и w, будет также справедливо и для их случайных составляющих

$$\frac{\partial \delta \Theta(\bar{r},\tau)}{\partial \tau} + \lambda \delta \Theta(\bar{r},\tau) = \lambda \delta w(\bar{r},\tau) + \alpha_{\upsilon} \frac{\partial^2 \delta \Theta(\bar{r},\tau)}{\partial z^2}.$$
 (3.6.3)

Будем рассматривать все процессы в таких конкретных точках $\vec{r_i}$, где утечкой тепла по высоте можно пренебречь (геометрически эти точки расположены в середине АЗ). Тогда уравнение (3.6.3) упростится

$$\frac{\partial \delta \Theta(\tau)}{\partial \tau} + \lambda \delta \Theta(\tau) = \lambda \delta \varphi(\bar{r}, \tau). \tag{3.6.4}$$

Уравнение (3.6.2.3) легко решается в общем виде

$$\delta\Theta(\tau) = e^{-\lambda\tau} \int_{0}^{\tau} \lambda \delta w(t) e^{\lambda t} dt + \delta\Theta_{0}^{-\lambda\tau}.$$
 (3.6.5)

В выражении (3.6.5) при достаточно большом времени наблюдения $\tau \rightarrow \infty$ начальными условиями можно пренебречь

$$\delta\Theta(\tau) = e^{-\lambda\tau} \int_{0}^{\tau} \lambda \delta w(t) e^{\lambda t} dt. \qquad (3.6.6)$$

Для получения экспериментальной информации о значениях $\delta\Theta$ и δw выберем близко расположенные датчики, считая, что их пространственные координаты фактически совпадают. Потребуем, чтобы параметр λ удовлетворял условию минимума функционала, представляющего собой математическое ожидание квадрата откло-

нений экспериментальных значений $\delta \Theta_9$ от рассчитанных по формуле (3.6.6)

$$F = \min_{\substack{\lambda \\ \tau \to \infty}} \lim_{k \to \infty} M \left[\left(\delta \Theta_{\mathfrak{H}}(\tau) - e^{-\lambda \tau} \int_{0}^{\tau} \lambda \delta w_{\mathfrak{H}}(t) e^{\lambda t} dt \right)^{2} \right].$$

Раскрыв оператор математического ожидания, получим для функционала *F* следующее выражение:

$$F = \lim_{\tau \to \infty} M \Big[\delta^2 \Theta_{\mathfrak{I}}(\tau) \Big] +$$
$$+ \lim_{\tau \to \infty} \Big(\lambda^2 e^{-2\lambda\tau} \int_{0}^{\tau} \int_{0}^{\tau} M \Big[\delta w(t) \delta \varphi(s) \Big] e^{\lambda(t+s)} dt ds -$$
$$-2\lambda e^{-\lambda\tau} \int_{0}^{\tau} M \Big[\delta w(t) \delta \Theta(\tau) \Big] e^{\lambda t} dt \Big].$$

Выражение $\lim_{\tau \to \infty} M \Big[\delta^2 \Theta_{\mathfrak{I}}(\tau) \Big]$ представляет собой дисперсию ве-

личины Θ . Заметим также, что под знаком интеграла стоят величины $M[\delta w(t)\delta \Theta(\tau)] = K_{w\Theta}(t,\tau); M[\delta \varphi(t)\delta \varphi(s)] = K_{ww}(t,s)$ – корреляционные функции соответствующих процессов. Если теперь рассчитать эти корреляционные функции на основе экспериментальной информации, аппроксимировать их простейшими экспоненциальными зависимостями:

$$K_{ww}(t,s) = K_{ww}(|t-s|) = a e^{-\alpha|t-s|};$$

$$K_{w\Theta}(t,\tau) = K_{w\Theta}(|t-\tau|) = b e^{-\beta|t-\tau|};$$

и подставить в выражение для функционала

$$F = D_{\Theta} + \lim_{\tau \to \infty} \left\{ \lambda^2 e^{-2\lambda\tau} \int_{0}^{\tau} \int_{0}^{\tau} K_{ww}(t,s) e^{\lambda(t+s)} dt ds - -2\lambda e^{-\lambda\tau} \int_{0}^{\tau} K_{w\Theta}(t,\tau) e^{\lambda t} dt \right\},$$

то после вычисления интегралов и предельных выражений можно получить следующую формулу для функционала:

$$F = D_{\Theta} + \frac{a\lambda}{\lambda + \alpha} + \frac{2b\lambda}{\lambda + \beta}.$$
 (3.6.7)

Из необходимого условия минимума функционала $\frac{\partial F}{\partial \lambda} = 0$ получим алгебраическое уравнение второй степени для определения λ , а тем самым и τ_{rp} :

$$\frac{a\alpha}{\left(\lambda+\alpha\right)^2} - \frac{2b\beta}{\left(\lambda+\beta\right)^2} = 0.$$
(3.6.8)

Отметим преимущества изложенной методики. Существующие на практике методы определения τ_{rp} предполагают, как правило, наличие изменения мощности реактора и определение τ_{rp} как промежутка времени, в течение которого температура графита уменьшается в *e* раз. Предлагаемая же методика предполагает определение τ_{rp} в «пассивном» эксперименте путем сбора и последующей обработки информации с аппарата, работающего в номинальном режиме.

Так как τ_{rp} зависит от коэффициентов теплопередачи от графита к окружающим каналам (соответственно, от состава и распределения газовой смеси), то ее значение может быть разным по активной зоне. Если этот факт имеет место, то при анализе динамических процессов это обстоятельство следует учитывать. Ниже приведены результаты определения постоянной времени графитовой кладки в пассивном эксперименте.

Практическая реализация методики на реальных данных первого энергоблока Курской АЭС

Для определения постоянной времени графитовой кладки по вышеизложенной методике были приняты следующие допущения.

1. Нормированное значение энерговыделения *w* в канале было принято как показание третьей с верху секции датчика ДКЭВ, нормированное на среднее по каналу показание датчика:

$$w_k = \frac{I_3}{\sum_{i=1}^{4} I_i},$$
 (3.6.9)

где w_k – относительное значение энерговыделения в канале k.

2. Значение температурного напора Θ в канале было принято равным показанию средней секции датчика температуры графита (ТЭТ), нормированной на среднее по каналу показание датчика:

$$\Theta_k = \frac{\Theta_2}{\sum\limits_{i=1}^3 \Theta_i},$$
(3.6.10)

где Θ_k – значение температурного напора в канале k.

Далее по технической документации были найдены координаты каналов, ближайших к датчикам ТЭТ. Координаты датчиков приведены в табл. 3.8.

Таблица 3.8

№ п/п	Координаты ТЭТ	Координаты ДКЭ(в)
0	(31; 37)	(31; 40)
1	(45; 37)	(43; 36)
2	(37; 15)	(43; 16)
3	(37; 21)	(35; 20)
4	(37; 31)	(41; 30)
5	(37; 45)	(37; 46)
6	(37; 55)	(33; 56)
7	(37; 61)	(41; 60)

Координаты датчиков, используемых в расчетах

Потом для выбранных датчиков были рассчитаны соответствующие корреляционные функции (рис. 3.14 и 3.15). Погрешность расчета составила 16 %.



Рис. 3.14. Автокорреляционная функция мощности для третьей секции датчика



Рис. 3.15. Взаимная корреляционная функция мощности и температурного напора

Затем методом наименьших квадратов они были аппроксимированы экспоненциальными зависимостями. Исходя из анализа графиков, очевидно, что экспоненциальная аппроксимация полученной кривой практически полностью укладывается в границы погрешности расчета корреляционных функций. Результаты аппроксимации приведены в табл. 3.9.

Таблица 3.9

№ п/п	Координаты ТЭТ	а, отн. ед.	α , c^{-1}	<i>b</i> , отн. ед	β , c ⁻¹
0	(31; 37)	1.7559	-0.0151	1.8661	-0.0293
1	(45; 37)	1.6022	-0.0194	1.6639	-0.0150
2	(37; 15)	1.5492	-0.0183	1.7194	-0.0159
3	(37; 21)	1.1334	-0.0095	1.3137	-0.0065
4	(37; 31)	1.7821	-0.0090	1.2094	-0.0080
5	(37; 45)	1.7978	-0.0167	1.6349	-0.0198
6	(37; 55)	1.6158	-0.0175	1.4354	-0.0100
7	(37; 61)	1.7913	-0.0150	1.4014	-0.0100

Параметры корреляционных функций

На основе полученных данных при помощи уравнения (3.6.8) было рассчитано τ_{rp} . Результаты расчетов приведены в табл. 3.10. Для упрощения анализа результатов в таблице приведена краткая информация о каналах, используемых при расчетах.

Таблица 3.10

№ п/п	Координа- ты	Средняя мощность, МВт	Средняя энерго- выработка, МВт · сут	Средний расход теп- лоносителя, м ³ /ч	Значение т _{гр} , мин
0	(31;37)	1.68	2090.19	29.25	51
1	(45; 37)	2.57	432.29	37.98	57
2	(37; 15)	1.70	2462.59	26.59	41
3	(37; 21)	1.99	2570.01	28.90	47
4	(37; 31)	2.06	2440.97	26.59	52
5	(37; 45)	2.07	931.72	31.52	56
6	(37; 55)	2.11	1304.33	29.24	73
7	(37; 61)	2.70	1065.34	37.1	79

Значение постоянной времени графитовой кладки

Как видно из табл. 3.10, значения постоянной времени графитовой кладки изменяются практически в два раза, поэтому возникает вопрос о погрешности полученных результатов. Оценка погрешности проводилась следующим образом.

Выразим λ из формулы (3.6.8) в явном виде.

$$\lambda_{1,2} = \frac{\alpha\beta(a-2b)}{a\alpha-2b\beta} \pm \frac{\sqrt{ab\alpha\beta|\alpha-\beta|}}{a\alpha-2b\beta}.$$
 (3.6.11)

Представим λ как функцию четырех аргументов:

$$\lambda = f(\alpha, \beta, a, b) \tag{3.6.12}$$

Абсолютную погрешность λ можно оценить по формуле:

$$\Delta\lambda = \frac{\partial f}{\partial \alpha} \Delta\alpha + \frac{\partial f}{\partial \beta} \Delta\beta + \frac{\partial f}{\partial a} \Delta a + \frac{\partial f}{\partial b} \Delta b , \qquad (3.6.13)$$

где $\Delta \alpha$, $\Delta \beta$, Δa , Δb – абсолютные погрешности аргументов, которые можно найти по методу наименьших квадратов.

Можно показать, что итоговая относительная погрешность определения λ будет составлять 40 %. Тогда, исходя из полученных данных видно, что постоянная времени графитовой кладки зависит от координаты, что в свою очередь может служить признаком качества охлаждения кладки газовой смесью. В целом, полученные результаты свидетельствуют о принципиальной возможности контроля параметров кладки в пассивном эксперименте.

3.6.3. Прогноз изменения оперативного запаса реактивности при работе реактора в переходных режимах

В приведенных выше разделах рассматривались задачи по определению оптимального уровня снижения мощности реактора при работе в переменном графике нагрузки. Понятно, что это требует резервирования оперативного запаса реактивности. Так как оперативный запас реактивности меняется в процессе эксплуатации реактора, возникает задача прогноза изменения оперативного запаса реактивности при изменении мощности реактора [3, 9]. Поскольку только зная прогноз по изменению оперативного запаса реактивности, можно ответить на вопрос можно ли практически реализовать данный режим снижения. Отметим, что поставленная задача имеет и самостоятельный интерес вообще для любого переходного режима, например для режима кратковременной остановки реактора.

Основными причинами, влияющими на изменение значения и распределения запаса реактивности по объему активной зоны реактора, являются эффекты реактивности по пару, температуре топлива, температуре замедлителя, ксенону и самарию. В общем виде формулу прогноза запаса реактивности можно представить сле-

дующим образом:
$$\rho(\vec{r}, t_{i+1}) = \rho(\vec{r}, t_i) + \sum_{j=1}^{n} \Delta \rho_j(\vec{r}, \Delta t)$$
, где $\rho(\vec{r}, t_i)$ –

исходное распределение запаса реактивности в момент времени t_i ; $\rho(\vec{r}, t_{i+1})$ – прогнозируемое на момент времени t_{i+1} распределение запаса реактивности; $\Delta \rho_j(\vec{r}, \Delta t)$ – изменение реактивности за время $\Delta t = t_{I+1} - t_i$, обусловленное действием *j*-го эффекта реактивности.

Вклад в изменение реактивности быстрых эффектов по пару и температуре топлива можно учитывать через мощностной коэффициент реактивности α_N как интегральный для реактора

$$\Delta \rho_N(t) = \alpha_N \cdot \Delta W(t).$$

Мощностной коэффициент реактивности α_N определяется экспериментально и является функцией многих физических параметров. Будем считать, что эта зависимость известна, а изменение интегральной мощности реактора с достаточной степенью точности отслеживает суммарный ток ДКЭ(р) (датчик контроля энерговыделения по радиусу).

При описании изменения реактивности за счет медленных эффектов необходимо учитывать пространственные зависимости. Наибольший вклад в изменение запаса реактивности при осуществлении переходных режимов вносит нестационарное ксеноновое отравление. Уравнения, описывающие процесс отравления реактора ксеноном, имеют вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{I}(\vec{r},t)}{\partial t} = \sigma_{\mathrm{Xe}} \varphi(\vec{r},t) - \lambda_{\mathrm{I}} \mathbf{I}(\vec{r},t); \\ \frac{\partial \mathrm{Xe}(\vec{r},t)}{\partial t} = \lambda_{\mathrm{I}} \mathbf{I}(\vec{r},t) - (\sigma_{\mathrm{Xe}} \varphi(\vec{r},t) + \lambda_{\mathrm{Xe}}) \mathrm{Xe}(\vec{r},t), \end{cases}$$
(3.6.14)

где λ_1, λ_{Xe} – константы распада йода и ксенона, с⁻¹; σ_{Xe} – микроскопическое сечение поглощения ксенона, см²; $I(\vec{r},t), Xe(\vec{r},t)$ – концентрации йода и ксенона, нормированные на равновесную концентрацию ксенона при бесконечно большой плотности потока нейтронов.

Очевидно, что для того, чтобы воспользоваться этой системой уравнений для определения концентраций йода и ксенона, необходимо иметь информацию о плотности потока нейтронов $\varphi(\vec{r},t)$.

Плотность потока нейтронов $\varphi(\vec{r},t)$ рассчитывается периодически после окончания очередного опроса датчиков энерговыделения с заданным периодом *T* и представляется в виде разложения по известным функциям $\psi_i(\vec{r})$ следующим образом:

$$\varphi(\vec{r},t) = k \sum_{i=1}^{n} A_i(t) \psi_i(\vec{r}) \quad , \qquad (3.6.15)$$

где *k* – константа размерности; *A_i* – неизвестные коэффициенты разложения, которые определяются методом наименьших квадратов при аппроксимации показаний датчиков энерговыделения из следующего соотношения:

$$\vec{A} = \hat{R} \cdot \vec{c}$$
,

где \vec{c} – вектор показаний ДКЭ(р) или ДКЭ(в) (датчик контроля энерговыделения по высоте); \hat{R} – расчетная матрица.

Расчетная матрица \hat{R} зависит только от выбора функций разложения $\phi_i(\vec{r})$ и координат размещения соответствующих датчиков. Поэтому операцию по ее расчету, которая требует больших объемов машинной памяти и времени расчета, можно производить заранее и на внешней ЭВМ. Такой прием (использование предварительного расчета) оказался очень эффективным. Он значительно экономит время расчета, тем самым позволяя сократить период обработки показаний датчиков Т, что в итоге способствует повышению точности расчета концентрации йода и ксенона. Отметим, что при реализации этого метода на Экспериментально Измерительном Комплексе ЛАЭС пришлось решать целый ряд дополнительных задач, таких, например, как восстановление показаний неисправных датчиков энерговыделения по показаниям датчиков, окружающих неисправный; использование при восстановлении макро-

поля нейтронов информации как от ДКЭ(в), так и ДКЭ(р); использование в разрабатываемых программах предварительных расчетов, произведенных на внешней ЭВМ, и др.

Дискретный по времени опрос датчиков ВРК требует применения временной интерполяции плотности потока нейтронов в интервалах между опросами датчиков. Решение системы уравнений (3.6.14) в случае применения приближения линейной временной интерполяции для плотности потока нейтронов можно представить в виде рекуррентных соотношений:

$$\begin{cases} I(\vec{r},t) = \exp(-\lambda_{\rm I}T)[I(\vec{r},t) + \sigma_{\rm Xe}T\phi(\vec{r},t)];\\ Xe(\vec{r},t) = \exp(-T(\lambda_{\rm Xe} + \sigma_{\rm Xe}\phi(\vec{r},t)))[Xe(\vec{r},t) + \lambda_{\rm I}TI(\vec{r},t)], \end{cases}$$
(3.6.16)

где Т – период обработки показаний датчиков ВРК.

Таким образом, для расчета концентраций йода и ксенона в произвольный момент времени необходимо знать концентрации йода и ксенона, рассчитанные в предыдущий момент времени, и значение плотности потока нейтронов в момент опроса датчиков. Начальные условия для $I(\vec{r},t)$ и $Xe(\vec{r},t)$ можно выбирать произвольно. Вклад начальных условий в значения рассчитываемых концентраций экспоненциально убывает со временем и оказывается несущественным при достаточно продолжительных, порядка примерно 50 – 70 ч, временах периодического расчета концентраций. Используя соотношения (3.6.15) и решая систему уравнений (3.6.16), можно рассчитать значения концентраций йода и ксенона в любых точках активной зоны реактора. Для представления полученных таким образом концентраций в более удобном и компактном виде, например, в виде разложения

$$Xe(\vec{r},t) = \sum_{i=1}^{n} B_i(t) \psi_i(\vec{r}), \qquad (3.6.17)$$

где $\psi_i(\vec{r})$ – известные функции; $B_i(t)$ – неизвестные коэффициенты разложения, определяемые методом наименьших квадратов, необходимо рассчитать значения концентраций ксенона в большом числе точек активной зоне реактора, а затем аппроксимировать их методом наименьших квадратов

$$\min_{B} \left(\operatorname{Xe}_{j} - \mu_{j} \right)^{*} \left(\operatorname{Xe}_{j} - \mu_{j} \right), \qquad (3.6.18)$$

где Xe_j – рассчитанное значение концентрации ксенона в *j*-й точке; μ_j – аппроксимированное значение концентрации ксенона в *j*-й точке; * – операция транспонирования.

Для оценки реактивности, вносимой изменением концентрации ксенона, можно применить известный математический прием. Записывая уравнения диффузии, отвечающие состояниям реактора в моменты времени t_i и t_{i+1} , в одногрупповом приближении и умножая их соответственно на $\varphi(\vec{r}, t_{i+1})$ и $\varphi(\vec{r}, t_i)$, далее вычитая и интегрируя по объему активной зоны реактора, можно легко вывести формулу для оценки изменения реактивности за счет изменения концентрации ксенона в произвольном объеме активной зоны V_i :

$$\Delta p_{\rm Xe}(V_j, \Delta t) = \frac{\int_{V_j} \frac{\Delta \Sigma_{\rm Xe}(\vec{r}, \Delta t)}{\Sigma_0(\vec{r})} \varphi(\vec{r}, t_i) \varphi(\vec{r}, t_{i+1}) dV}{\int_{V_{\rm A3}} K_{\infty}(\vec{r}) \varphi(\vec{r}, t_i) \varphi(\vec{r}, t_{i+1}) dV}, \quad (3.6.19)$$

где $\Delta \Sigma_{Xe} = \sigma_{Xe} \left(Xe(\vec{r}, t_{i+1}) - Xe(\vec{r}, t_i) \right)$ – изменение макроскопического сечения поглощения нейтронов ксеноном, см⁻¹; $\Sigma_0(\vec{r})$ – макроскопическое сечение поглощения реактора, см⁻¹; $K_{\infty}(\vec{r})$ – коэффициент размножения реактора; $\varphi(\vec{r}, t_i)$ – исходное распределения плотности потока нейтронов, нейтр./(см² · с); $\varphi(\vec{r}, t_{i+1})$ – плотность потока нейтронов в момент времени t_{i+1} (должна быть задана).

При прогнозе будем полагать, что распределение по пространству макрополя нейтронов, пока не исчерпан оперативный запас реактивности на управление, остается неизменным, меняясь только по значению, т.е.

$$\varphi(\vec{r}, t_{i+1}) = \alpha(t_{i+1})\varphi(\vec{r}, t_i),$$

где $\alpha(t)$ – временной закон изменения мощности реактора.

Значительно меньший вклад в изменение реактивности вносит нестационарное отравление самарием, но тем не менее при больших временах прогноза необходимо учитывать и этот эффект реактивности. Как и в случае с ксеноном, для концентраций прометия и самария можно получить рекуррентные соотношения, описывающие процесс отравления и аналогичные системе уравнений (3.6.16). Представляя далее распределение концентрации самария в виде

$$Sm(\vec{r},t) = \sum_{i=1}^{n} D_i(t) \psi_i(\vec{r}), \qquad (3.6.20)$$

где $\psi_i(\vec{r})$ – известные функции разложения; $D_i(t)$ – неизвестные коэффициенты, и действуя по той же схеме, что и в случае с ксеноном, получим изменение реактивности, вносимое нестационарным самариевым отравлением, записанное аналогично уравнению (3.6.19):

$$\Delta p_{\rm Sm}(V_j, \Delta t) = \frac{\int_{V_j} \frac{\Delta \Sigma_{\rm Sm}(\vec{r}, \Delta t)}{\Sigma_0(\vec{r})} \alpha(t_{i+1}) \varphi^2(\vec{r}, t_i) dV}{\int_{V_{\rm A3}} K_{\infty}(\vec{r}) \alpha(t_{i+1}) \varphi^2(\vec{r}, t_i) dV}, \quad (3.6.21)$$

где $\Delta \Sigma_{\text{Sm}} = \sigma_{\text{Sm}} \left(\text{Sm}(\vec{r}, t_{i+1}) - \text{Sm}(\vec{r}, t_i) \right)$ – изменение макроскопического сечения поглощения нейтронов самарием, см⁻¹.

Остановимся теперь на прогнозе изменения запаса реактивности за счет изменения температуры замедлителя

$$\Delta \rho_{T_{\rm rp}}(\vec{r},t) = \alpha_{\rm rp} \Delta T_{\rm rp}(\vec{r},t) , \qquad (3.6.22)$$

где $\alpha_{rp}(\vec{r},t)$ – коэффициент реактивности по температуре графита – известная функция; $\Delta T_{rp}(\vec{r},t)$ – изменение температуры графитовой кладки по активной зоне реактора.

При использовании формулы (3.6.22) задача прогнозирования изменения запаса реактивности за счет эффекта по температуре замедлителя сводится к задаче прогнозирования изменения температуры графитовой кладки при работе реактора в переходных режимах. При описании поведения макрополя изменений температуры графитовой кладки в активной зоне реактора РБМК примем следующую математическую модель

$$C_{V} \frac{\partial \Delta T_{\rm rp}(\vec{r},t)}{\partial t} = -\frac{1}{\tau_{\rm rp}} \Delta T_{\rm rp}(\vec{r},t) + A \Sigma_{f} \Delta \varphi(\vec{r},t);$$

$$\Delta T_{\rm rp}(\vec{r},0) = 0,$$
 (3.6.23)

где $\Delta T_{\rm rp}(\vec{r},t)$ – макрополе изменений температуры графитовой кладки; C_V – теплоемкость графита; $\Sigma_f(\vec{r})$ – макроскопическое сечение деления; $\tau_{\rm rp}$ – постоянная времени графитовой кладки; A – коэффициент пропорциональности между изменением энерговыделения и изменением температуры графитовой кладки; $\Delta \varphi(\vec{r},t) = \varphi(\vec{r},t) - \varphi(\vec{r},0)$ – отклонение распределения плотности потока нейтронов в момент времени *t* от начального.

Решение задачи (3.6.23) не представляет никаких трудностей, если известны τ_{rp} и константа *A*. Параметр τ_{rp} может быть функцией координат и существенно зависит от условий эксплуатации, в частности, от состава газовой смеси охлаждения графитовой кладки. Предположим, что постоянная времени τ_{rp} не зависит от координат. В реальных условиях эксплуатации она определяется экспериментально. Наличие показаний термопар, установленных в графитовой кладке реактора, наряду с показаниями датчиков энерговыделения, позволяет определить переводной коэффициент *A*. Таким образом, вычисляя по уравнению (3.6.23) величину ΔT_{rp} и пользуясь соотношением (3.6.22), можно сделать прогноз изменения запаса реактивности за счет изменения температуры графитовой кладки.

Теперь с учетом соотношений (3.6.19), (3.6.21), (3.6.22) формула прогноза реактивности в выделенной области активной зоны V_j представляется в виде

$$\rho(V_j, t_{i+1}) = \rho(V_j, t_i) + \alpha_N \Delta W(\Delta t) \frac{V_j}{V_{A3}} + \rho_{Xe}(V_j, \Delta t) + \rho_{Sm}(V_j, \Delta t) + \frac{1}{V_{A3}} \int_{V_j} \alpha_{rp} \Delta T_{rp} dV$$

Первый член суммы в этой формуле $\rho(V_j, t_i)$ – запас реактивности на момент начала прогноза, определяемый положением органов регулирования. Эту величину можно определить благодаря наличию показаний датчиков положения стержней СУЗ и информации о макрополе нейтронов.

Приведенный выше алгоритм прогноза запаса реактивности в РБМК может быть положен в основу разработок математического обеспечения для прогноза запаса реактивности. В свое время были успешно апробированы алгоритмы по восстановлению макрополя нейтронов и по расчету трехмерного распределения концентраций йода и ксенона по активной зоне реактора на ЭИК Ленинградской АЭС.

Список литературы к главе 3

1. Определение постоянной времени графитовой кладки методом корреляционного анализа / А.А. Бербушенко, А.В. Ведерников, В.Г. Иваненко, А.М. Загребаев, В.Н. Саманчук // Математическое обеспечение многомерных систем с мини-ЭВМ. – М.: Энергоатомиздат, 1986.

2. Болсунов А.А., Загребаев А.М. Разработка специального математического обеспечения АСВТ М-6000 для оперативной обработки внутриреакторной информации с реактора РБМК // Математическое обеспечение систем с мини-ЭВМ и микропроцессорами. – М.: Энергоатомиздат, 1984.

3. Алгоритм прогноза изменения реактивности реактора РБМК в переходных режимах эксплуатации на основе использования информации ВРК / А.А. Болсунов, А.М. Загребаев, Л.Н. Юрова, В.И. Наумов // Методы и алгоритмы в исследованиях физики ядерных реакторов. – М.: Энергоатомиздат, 1987.

4. Вероятностно-статистические методы обработки данных в информационных системах / Ю.В. Бородакий, Н.А. Крицына, Ю.П. Кулябичев, Ю.Ю. Шумилов. – М.: Радио и связь, 2003.

5. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. Учебник для вузов. – М.: Физматгиз, 1969.

6. Загребаев А.М. Определение постоянной времени графитовой кладки реактора РБМК-1000 в пассивном эксперименте // Инженерная физика. – 2005. – № 4. – С. 6 – 7.

7. Загребаев А.М., Козьмин Л.А., Крайко М.А. Математическое обеспечение для определения постоянной времени графитовой кладки реактора РБМК-1000 в пассивном эксперименте. Труды XIII международного научно-технического семинара «Современные технологии в задачах управления, автоматики и обработки информации». – М. Изд-во МГУ, 2004.

8. Загребаев А.М., Клименко И.А., Копытин А.Л. О корреляционном подходе к адаптации динамической модели реактора с распределенными обратными связями // Цифровая обработка измерительной информации. – М.: Энергоатомиздат, 1987.

9. Загребаев А.М., Наумов В.И. Расчет отравления реактора по показаниям датчиков внутриреакторного контроля при работе в переменном режиме нагрузок // Физика ядерных реакторов. – М.: Атомиздат, 1981. – Вып. 9.

10. Компактное представление внутриреакторной информации о потоке нейтронов / А.М. Загребаев, В.И. Наумов, В.И. Савандер, Л.Н. Юрова // Физика ядерных реакторов. – М.: Атомиздат, 1975. – Вып. 4.

11. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1968.

12. Сейдж Э., Мелс Дж. Теория оценивания и ее применение в связи и управлении. – М.: Связь, 1976.

13. Цыпкин Я.З. Основы информационной теории идентификации. – М.: Наука, 1984.

14. Эйкхофф У. Основы идентификации систем управления. – М.: Мир, 1975.

ГЛАВА 4. МЕТОД СТАТИСТИЧЕСКОГО ЭКСПЕРИМЕНТА В ФИЗИКЕ РЕАКТОРОВ

В связи с бурным развитием вычислительной техники большое распространение среди методов математического моделирования ядерного реактора получил метод статистического эксперимента (метод Монте-Карло) [3]. Дело в том, что зачастую только с помощью этого метода можно провести прецизионные расчеты реакторных систем сложной формы и состава. В основе методов лежит случайный розыгрыш судьбы нейтрона, обусловленный вероятностным характером взаимодействия нейтрона с ядром.

Однако перечень задач, где используется метод Монте-Карло, не исчерпывается только проектированием реактора. Ниже будут приведены задачи, связанные с исследованием статистических свойств поля нейтронов при случайных возмущениях технологических параметров в процессе эксплуатации.

4.1. Методы моделирования случайных величин с равномерным законом распределения

В основе многих методов получения случайных величин, подчиненных какому-либо закону распределения, лежит генерация случайных чисел, равномерно распределенных в интервале (0,1). Математическое ожидание m_r и дисперсия D_r такой последовательности, состоящей из *n* случайных чисел r_i , должны быть следующими (если это действительно равномерно распределенные случайные числа в интервале от 0 до 1):

$$m_r = \frac{\sum_{i=1}^n r_i}{n} = 0,5, \qquad (4.1.1)$$
$$D_r = \frac{\sum_{i=1}^{n} (r_i - m_r)^2}{n} = \frac{1}{12}.$$
 (4.1.2)

Если требуется, чтобы случайное число x_i находилось в интервале (a, b), отличном от (0, 1), то нужно воспользоваться формулой $x_i = a + (b - a) \cdot r_i$. За одно обращение такой генератор возвращает одно случайное число.

Генераторы случайных чисел (ГСЧ) по способу получения чисел делятся на физические, табличные и алгоритмические.

Примером физических ГСЧ могут служить: монета («орел» – 1, «решка» – 0), игральные кости, поделенный на секторы с цифрами барабан со стрелкой или аппаратурный генератор шума, в качестве которого используют шумящее устройство, например, транзистор.

Табличные ГСЧ в качестве источника случайных чисел используют специальным образом составленные таблицы, содержащие проверенные некоррелированные, то есть никак не зависящие друг от друга, числа. Достоинство данного метода в том, что он дает действительно случайные числа, так как таблица содержит проверенные некоррелированные цифры. Недостатки метода: большой требуемый объем памяти для хранения большого количества цифр, большие трудности порождения и проверки такого рода таблиц, повторы при использовании таблицы уже не гарантируют случайности числовой последовательности, а значит, и надежности результата.

Наиболее распространенными являются алгоритмические генераторы случайных чисел. Числа, генерируемые с помощью этих генераторов, всегда являются псевдослучайными, то есть каждое последующее сгенерированное число зависит от предыдущего: $r_{i+1} = f(r_i)$. Кроме того, в последовательности псевдослучайных чисел присутствует период повторяемости. Но достоинством данных ГСЧ является быстродействие и то, что генераторы практически не требуют ресурсов памяти.

Рассмотрим несколько алгоритмических методов получения ГСЧ.

Метод серединных квадратов. Пусть имеется некоторое четырехзначное число *R*0. Это число возводится в квадрат и заносится в *R*1. Далее из *R*1 берется середина (четыре средних цифры) – новое случайное число – и записывается в R0. Затем процедура повторяется (рис. 4.1). Отметим, что в качестве случайного числа необходимо брать не последовательность ghij, a 0.ghij – с приписанным слева нулем и десятичной точкой.



Рис. 4.1. Схема метода серединных квадратов

Недостатки метода:

1) если на некоторой итерации число R0 станет равным нулю, то генератор вырождается, поэтому важен правильный выбор начального значения R0;

2) генератор будет повторять последовательность через M^N шагов (в лучшем случае), где N – разрядность числа R0; M – основание системы счисления. Если, например, случайное число R0 будет представлено в двоичной системе счисления, то последовательность псевдослучайных чисел повторится через $2^4 = 16$ шагов. Заметим, что повторение последовательности может произойти и раньше, если начальное число будет выбрано неудачно.

Описанный выше способ был предложен Джоном фон Нейманом и относится к 1946 г. Поскольку этот способ оказался ненадежным, от него очень быстро отказались.

Метод серединных произведений. Метод серединных квадратов заключается в следующем. Число R0 умножается на R1, из полученного результата R2 извлекается середина $R2^*$ (это очередное случайное число) и умножается на R1. По этой схеме вычисляются все последующие случайные числа (рис.4.2).

Линейный конгруэнтный метод. Линейный конгруэнтный метод является одной из простейших и наиболее употребительных в настоящее время процедур, имитирующих случайные числа. В этом методе используется операция mod(x, y), возвращающая остаток от деления первого аргумента на второй. Каждое последующее случайное число рассчитывается на основе предыдущего случайного числа по следующей формуле:

$$r_{i+1} = \text{mod}(k \cdot r_i + b, M),$$
 (4.1.3)

где M – модуль (M > 0); k – множитель (0 < k < M); b – приращение (0 < b < M); r_0 – начальное значение ($0 < r_0 < M$).



Рис. 4.2. Схема метода серединных произведений

Последовательность случайных чисел, полученных с помощью данной формулы, называется линейной конгруэнтной последовательностью. Многие авторы называют линейную конгруэнтную последовательность при b = 0 мультипликативным конгруэнтным методом, а при $b \neq 0$ смешанным конгруэнтным методом.

Для качественного генератора требуется подобрать подходящие коэффициенты. Необходимо, чтобы число M было довольно большим, так как период не может иметь больше, чем M элементов.

Встроенный генератор случайных чисел. На практике для моделирования случайных величин часто пользуются встроенными в среду разработки генераторами случайных чисел. Например, встроенный в Borland C++ Builder 5.0. датчик случайных чисел генерирует случайные числа с равномерным законом распределения. Ниже приведены результаты работы этого датчика при формирова-

нии случайной последовательности из 10000 чисел. На рис. 4.3 приведена гистограмма распределения, а в табл. 4.1 – ряд распределения.



Рис. 4.3. Гистограмма распределения случайных чисел, полученных с помощью датчика случайных чисел

Таблица 4.1

Сравнительная таблица попаданий случайной величины
в заданный интервал и значения <i>m_i</i>

Интервал <i>I</i> _i	0-0,1	0,1-0,2	0,2-0,3	0,3-0,4	0,4-0,5
m_i	1018	1018	1023	993	974
$p_i n$	1000	1000	1000	1000	1000

Окончание табл. 4.1

Интервал <i>I</i> _i	0,5-0,6	0,6-0,7	0,7-0,8	0,8 - 0,9	0,9 – 1
m_i	977	1005	1029	1021	942
p _i n	1000	1000	1000	1000	1000

В таблице $p_i^* = \frac{m_i}{n}$, m_i – число значений, попавших в *i*-й ин-

тервал, n — общее число испытаний, p_i — теоретическая вероятность попадания в i-й интервал.

Определим значение меры расхождения:

$$\chi^{2} = n \sum_{i=1}^{k} \frac{(p_{i}^{*} - p_{i})^{2}}{p_{i}} = \sum_{i=1}^{k} \frac{(m_{i} - np_{i})^{2}}{np_{i}}.$$
 (4.1.1)

Исходя из данных табл. 4.1, получим $\chi^2 = 7,102$. Число степеней свободы 7, тогда из таблицы значений χ^2 получаем при уровне значимости 5 % интервал (1,56 – 16,62). Рассчитанное значение критерия попадает в указанный интервал, таким образом, гипотеза о виде закона распределения не противоречит опытным данным.

4.2. Моделирование случайных величин с нормальным законом распределения

Для моделирования случайных величин с нормальным законом распределения используется центральная предельная теорема: сумма большого числа как угодно распределенных независимых случайных величин распределена асимптотически нормально, если только слагаемые вносят равномерно малый вклад в сумму. Это значит, что чем больше независимых слагаемых в сумме, тем ближе закон ее распределения к нормальному. На практике можно использовать центральную придельную теорему при достаточно небольшом количестве слагаемых. Опыт показывает, что для суммы даже десяти и менее слагаемых закон их распределения можно заменить нормальным.

Алгоритм вычисления можно представить следующим образом. Берется датчик случайной величины, которая имеет равномерную плотность распределения вероятности в интервале от 0 до 1. При этом математическое ожидание случайной величины равно 0.5, а ее дисперсия равна 1/12. Если просуммировать порядка 8 – 10 независимых реализаций СВ, то результатом суммирования будет случайная величина с плотностью распределения вероятности, очень близкой к нормальному закону.

$$x = \sum_{i=1}^{N} y_i , \qquad (4.2.1)$$

где y_i – случайные величины с равномерной плотностью распределения вероятности в интервале от 0 до 1. Математическое ожидание и дисперсия величины х соответственно равны:

$$M[Y] = \frac{N}{2}; D[Y] = \frac{N}{12}.$$

Ниже приведены результаты, полученные при использовании формулы (4.2.1) при N = 10. Гистограмма распределения, получившаяся при моделировании последовательности из 10000 случайных чисел, показана на рис. 4.4.



Рис.4.4. Гистограмма распределения при генерации случайных чисел по нормальному закону

Рассчитанное значение критерия $\chi^2 = 14,996$. Число интервалов равно 16, при уровне значимости 5 % получим интервал (4,76 – 25,5), т.е. гипотеза не противоречит опытным данным.

4.3. Моделирование случайных величин с заданным видом корреляционной функции (метод формирующего фильтра)

Если корреляционная функция достаточно гладкая, то для моделирования случайных величин можно использовать метод формирующего фильтра. Уравнение для фильтра запишем следующим образом:

$$a_2 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_0 x(t) = b_1 \frac{d\xi(t)}{dt} + b_0 \xi(t), \qquad (4.3.1)$$

где x(t) – случайная величина с заданной корреляционной функцией; $\xi(t)$ – белый шум.

Для такого вида уравнений формирующего фильтра аналитически известен вид корреляционной функции. Если корни характеристического уравнения действительные, то

$$K(\tau) = \left\{ \left[\lambda_2 a_2^2 \left(b_0^2 + b_1^2 \frac{a_0}{a_2} \right) + b_1 a_0^2 a_1 \right] \exp(\lambda_1 \tau) - \left[\lambda_1 a_2^2 \left(b_0^2 + b_1^2 \frac{a_0}{a_2} \right) + b_1 a_0^2 a_1 \right] \exp(\lambda_2 \tau) \right\} \frac{\Delta t}{2a_0 a_1 a_2^2 (\lambda_2 - \lambda_1)};$$

$$\tau = m \Delta t. \qquad (4.3.2)$$

Коэффициенты уравнения формирующего фильтра находятся с помощью метода наискорейшего спуска из условия минимизации критерия

$$J(\vec{a}, \vec{b}) = \sum_{j=1}^{N} (K(t_j) - \tilde{K}(t_j)) dt, \qquad (4.3.3)$$

где K(t) – корреляционная функция формирующего фильтра, определяемая исходя из формулы (4.3.2), $\tilde{K}(t)$ – заданная корреляционная функция.

Эмпирическая корреляционная функция рассчитывается по формуле:

$$K(\tau) = K(m\Delta t) = \frac{1}{N-m} \sum_{i=0}^{N-m-1} \dot{x}(i) \dot{x}(i+m).$$
(4.3.4)

Например, для значений коэффициентов: $a_2 = 1$; $a_1 = 3$; $a_0 = 2$; $b_1 = 0$; $b_0 = 1$ результаты моделирования представлены на рис. 4.5, на котором приведены графики теоретической корреляционной функции, рассчитанной по формуле (4.3.2), и эмпирической корреляционной функции, рассчитанной по формуле (4.3.4), исходя из значений случайной величины, полученных при решении уравнения (4.3.1) методом Эйлера.

Ошибка, рассчитанная по формуле

$$\delta = \sqrt{\frac{\left(\sum_{j=1}^{N} (K(t_j) - \tilde{K}(t_j))\right)^2}{\left(\sum_{j=1}^{N} K(t_j)\right)^2}} \cdot 100\%, \qquad (4.3.5)$$



Рис. 4.5. Эмпирическая и теоретическая корреляционные функции

Экспоненциальная корреляционная функция. Если корреляционная функция задана в виде:

$$K(\tau) = D \exp(-\alpha \tau); \quad \tau = m\Delta t , \quad (4.3.6)$$

то случайную величину можно рассчитывать по следующей формуле:

$$x(t_n) = x(n\Delta t) = x(n) = k_1 e(n) + k_2 x(n-1); \qquad (4.3.7)$$

$$k_1 = \sqrt{D(1 - k_2^2)}; \quad k_2 = \exp(-\alpha \Delta t),$$
 (4.3.8)

где e(n) – дискретный белый гауссов шум с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией.

Например, при D=1, $\alpha = 0.05$, $\Delta = 1$ графики эмпирической и теоретической корреляционных функций представлены на рис. 4.6.



Рис. 4.6. Корреляционные функции

Погрешность, рассчитанная исходя из формулы (4.3.5) составляет ≈ 3 %.

Если корреляционная функция имеет вид:

$$K(\tau) = D \exp(-a^2 \tau^2); \quad \tau = m \Delta t,$$
 (4.3.9)

то последовательность этапов моделирования следующая.

1. Необходимо получить реализацию дискретного белого шума длительностью N (где N достаточно большое – порядка 1000 и более отсчетов) с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией. Для получения данной реализации необходимо N раз обратиться к датчику, выдающему независимые случайные числа, распределенные по нормальному закону. Эту реализацию в дальнейшем будем обозначать e(n).

2. Далее выполняются следующие преобразования:

$$x(n) = \sum_{k=-P}^{P} C(k)e(n-k); \quad C(k) = \left(\frac{\sqrt{2D\alpha}}{\sqrt[4]{\pi}}\right)\exp(-2\alpha^{2}k^{2}). \quad (4.3.10)$$

Здесь неопределенным остается предел суммирования P, и для его определения может служить рекомендация: P – целая часть от деления 2 на α ($\alpha < 1$, иначе моделирование не имело бы смысла). После этого в получившейся реализации необходимо отбросить первые и последние P отсчетов и оставить только N - 2P отсчетов. Дело в том, что стационарным фрагментом моделируемого случайного процесса (с постоянной дисперсией) является именно центральная часть. Таким образом, длительность реализации равна N = N - 2P.

На рис. 4.7 показан пример расчета при D = 1, $\alpha = 0,05$, $\Delta = 1$.



Рис. 4.7. Корреляционная функция

Погрешность, рассчитанная по формуле (4.3.5), составляет 1,603 %.

4.4. Пример математического моделирования ядерного реактора при случайных возмущениях в свойствах размножающей среды

В процессе эксплуатации ядерного реактора в силу воздействия большого количества случайных факторов (например, колебаний расхода теплоносителя, перемещения органов регулирования, флюктуаций паросодержания и др.), нейтронно-физические свойства имеют случайный характер, что приводит к необходимости в ряде задач контроля и управления рассматривать реактор как объект со случайными параметрами.

В этой связи важной и актуальной проблемой является математическое моделирование ядерного реактора при случайных возмущениях в технологических параметрах, получение на основе математической модели статистических характеристик параметров ядерного реактора, их исследование и использование при решении задач контроля, управления и диагностики.

В качестве основы для создания математической модели с флюктуирующими параметрами был принят подход Шефа и Альбрехта, использующий для получения статистических характеристик плотности потока нейтронов стохастические уравнения. Ниже приводятся стохастические уравнения пространственной динамики, включая обратные связи по температуре топлива, теплоносителя, замедлителя, паросодержания (для кипящего реактора), ксенонового отравления и системы регулирования [2 – 4]. Источником случайных возмущений при этом считается флюктуация в размножающих свойствах среды.

Для исследования статистических свойств источника шума в стохастических уравнениях исследуются статистические характеристик макросечений и коэффициента размножения ячейки реактора. Так как набор представительной статистики требует тысяч и десятков тысяч вариантных расчетов, то расчет проводился методом вероятности первых столкновений, оперативно дающим принципиально правильные результаты. Входными случайными возмущениями являлись флюктуации температуры топлива и теплоносителя и плотности теплоносителя.

4.4.1. Математическая модель и статистические исследования параметров ячейки реактора

Для исследования статистических характеристик ячейки реактора использовалась классическая модель нейтронно-физического расчета ячейки тепловых реакторов, основанная на следующих предположениях. В резонансной области энергии – это приближение плоского потока и эффективных резонансных интегралов. В области тепловых нейтронов энергетическая зависимость описывалась распределением Максвелла с рассчитываемой температурой нейтронного «газа». Пространственное распределение тепловых нейтронов рассчитывалось по методу вероятностей первых столкновений.

Схема проведения статистических исследований выглядит следующим образом: задаются характерные для данного типа реактора геометрические параметры ячейки и изотопный состав, номинальные значения плотности теплоносителя, температуры топлива и температуры теплоносителя. Затем с помощью генератора случайных чисел разыгрываются отклонения от номинальных значений по заданному закону распределения, и для этих значений параметров производится расчет нейтронно-физических параметров ячейки. Результаты расчетов подвергаются статистической обработке на предмет получения закона распределения, его числовых характеристик, максимальных и минимальных отклонений параметров. На рис. 4.8 схематично представлена логика исследования.



Рис. 4.8. Схема статистических исследований ячейки

Ниже приведены результаты статистических исследований для ячеек реактора типа РБМК. В табл. 4.2 – 4.3 показаны значения коэффициента размножения (k_{∞}) , одногрупповых макросечений $(\Sigma_c, \Sigma_f, \Sigma_a)$, возраста (τ), длины миграции (M^2) и длины диффузии (L^2) для свежего топлива и для топлива большой глубины выгорания (2000) $\frac{\text{MBT} \times \text{сут}}{\text{т}}$). Значения технологических параметров – температуры топлива, теплоносителя и плотности теплоносителя разыгрывались по нормальному закону с относительным среднеквадратическим отклонением 10 %.

Таблица 4.2

	Свежее топливо (Pt = 0)										
р	$p(\overline{x})$	\overline{p}	$\frac{\overline{p}-p(\overline{x})}{\overline{p}},\%$	$p_{\rm max}$	p_{\min}	$\frac{p_{\max} - p_{\min}}{\overline{p}}$, %					
K_{∞}	1,35511	1,35397	-0,084	1,36698	1,32827	2,847					
Σ_c	0,0015146	0,001514	-0,039	0,001593	0,00143	10,794					
Σ_f	0,00248519	0,002478	-0,614	0,002486	0,00241	2,713					
Σ_a	0,00399979	0,003993	-0,245	0,004031	0,00388	3,684					
Σ_s	0,423943	0,423989	0,010	0,434937	0,41524	4,644					
τ	132,071	132,3393	-0,280	155,138	111,216	33,189					
L^2	194,741	195,1006	0,184	204,738	189,276	7,925					
M^2	326,812	327,440	0,191	359,876	300,492	18,136					

Результаты статистических расчетов ячейки реактора РБМК с урановым топливом на начальном изотопном составе (статистика – 1000 реализаций)

Номинальные значения были приняты следующими: температура топлива $T_T = 800 \text{ K}$, температура теплоносителя $T_B = 543 \text{ K}$, плотность теплоносителя $\rho = 0,78013 4 \frac{\Gamma}{\text{см}^3}$. Как видно из приведенных данных, расчет на средних константах $P(\bar{x})$ не совпадает со средним значением \overline{P} (оценкой математического ожидания). Хотя это отличие и невелико, но носит систематический характер,

причем расчет на средних константах занижает значения k_{∞} и макросечений. Более существенным является то обстоятельство, что диапазон разброса k_{∞} составляет величину, сравнимую с долей запаздывающих нейтронов ($\beta = 0,0065$). Из таблиц также видно, что относительный разброс в параметрах увеличивается с ростом глубины выгорания.

Таблица 4.3

Результаты статистических расчетов ячейки реактора РБМК с урановым топливом при глубине выгорания 20000 MBT×сут т

	Выгоревшее топливо (Pt = $20000 \text{ MBt} \cdot \text{сут/т}$ урана)								
р	$p(\overline{x})$	\overline{p}	$\frac{\overline{p}-p(\overline{x})}{\overline{p}}, \%$	$p_{\rm max}$	p_{\min}	$\frac{p_{\max} - p_{\min}}{\overline{p}}, \%$			
K_{∞}	0,850652	0,85041	-0,028	0,870354	0,811896	6.847			
Σ_c	0,00205094	0,002049	-0,534	0,002141	0,001963	8,687			
Σ_f	0,00112123	0,001121	-0,107	0,001163	0,001096	5,982			
Σ_a	0,00317216	0,00317	-0,068	0,003304	0,003058	7,760			
Σ_s	0,425873	0,425722	-0,035	0,437717	0,416829	4,906			
τ	132,049	132,6896	0,005	153,663	110,649	32,4171			
L^2	244,918	245,2674	0,142	259,586	228,778	12,561			
M^2	376,967	377,957	0,262	413,249	339,427	19,531			

(статистика – 1000 реализаций)

В табл. 4.4 приведены данные по разбросу k_{∞} для свежего топлива, если случайным образом разыгрывались значения как сразу всех технологических параметров, так и по отдельности, как по нормальному закону, так и по закону равномерной плотности. Относительное среднеквадратическое отклонение параметров составляет 5 %.

Из табл. 4.4 видно, что даже при равномерном законе распределения диапазон изменения коэффициента размножения составляет около 0,5β.

Разброс коэффициента размножения ячейки РБМК при различных законах распределения случайных флюктуаций технологических параметров

Относительное средне- квадратическое откло- нение, %		ередне- откло-	Закон равномерной плотности	Нормальный закон
ρ	T _B	T_T	$\frac{k_{\infty \max} - k_{\infty \min}}{\bar{k}_{\infty}}, \%$	$\frac{k_{\infty\max}-k_{\infty\min}}{\bar{k}_{\infty}},\%$
5	0	0	0,073	0,120
0	5	0	0,019	0,160
0	0	5	0,283	0,476
5	5	5	0,343	0,635

На рис. 4.9 показана величина разброса в зависимости от относительного среднеквадратического отклонения всех параметров, распределенных по нормальному закону.



Относительное среднее квадратическое отклонение параметров, %

Рис. 4.9. Зависимость максимального разброса коэффициента размножения от относительного среднеквадратического отклонения технологических параметров

Исследования показывают, что увеличение числа реализаций до 10000 и увеличение диапазона случайных воздействий не меняет качественно масштаба эффекта. Что касается законов распределения параметров ячейки, то оказывается, что проверка по критерию Пирсона при уровне значимости 0,005 не дает основания считать их нормальными. В качестве примера на рис. 4.10 и 4.11 приведены гистограммы распределения коэффициента размножения на свежем и выгоревшем топливе соответственно.







т

Таким образом, проведенное исследование позволяет сделать следующие выводы:

1) случайные возмущения технологических параметров в их совокупности могут приводить к значительным (в несколько десятых долей β) выбросам коэффициента размножения;

2) наиболее чувствительным к возмущениям является макросечение захвата;

3) закон распределения рассчитываемых параметров ячейки отличается от нормального.

4.4.2. Математическая модель плотности потока нейтронов в реакторе с обратными связями и системой регулирования

Математическая модель для расчета и исследования статистических характеристик параметров реактора включает следующие компоненты.

1. Стохастическое уравнение для плотности потока нейтронов – уравнение реактора в одногрупповом диффузионном приближении с флюктуирующим параметром, обратными связями и управлением (локальным и интегральным).

$$\frac{1}{v}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \nabla D(\vec{r})\nabla\varphi(\vec{r},t)) + [(1-\beta)K_{\infty}(\vec{r},t)-1] \times \\ \times (\Sigma_{a}(\vec{r}) + \xi(\vec{r},t))\varphi(\vec{r},t) + \lambda C(\vec{r},t) - \\ -\sigma_{Xe}Xe(\vec{r},t)\varphi(\vec{r},t) - \sigma_{Sm}Sm(\vec{r},t)\varphi(\vec{r},t) - \Sigma_{P}(\vec{r},t)\varphi(\vec{r},t); \\ \varphi|_{S}(0) = 0, \qquad (4.4.1)$$

где $\varphi(\vec{r},t)$ – плотность потока нейтронов в точке с координатой \vec{r} в момент времени t; $D(\vec{r})$ – коэффициент диффузии нейтронов; $\Sigma_a(\vec{r})$ – макроскопическое сечение поглощения нейтронов; $k_{\infty}(\vec{r},t)$ – коэффициент размножения; β – доля запаздывающих нейтронов; λ – постоянная распада ядер предшественников запаздывающих нейтронов; λ – постоянная распада ядер предшественников запаздывающих нейтронов; $C(\vec{r},t)$ – концентрация ядер предшественников запаздывающих нейтронов; $\Sigma_P(\vec{r},t)$ – макроскопическое сечение поглощения органов регулирования; $\xi(\vec{r},t)$ – флюктуирующий параметр, отражающий случайные изменения размножающих свойств среды; $Xe(\vec{r},t)$, $Sm(\vec{r},t)$ – концентрации ксенона и самария соответственно; S – экстраполированная граница реактора.

2. Уравнения обратных связей –

• уравнение для концентрации ядер предшественников запаздывающих нейтронов

$$\frac{\partial C(\vec{r},t)}{\partial t} = \beta K_{\infty}(\vec{r},t) \Sigma_a(\vec{r},t) \varphi(\vec{r},t) - \lambda C(\vec{r},t); \qquad (4.4.2)$$

уравнения отравления ксеноном

$$\frac{\partial \mathbf{I}(\vec{r},t)}{\partial t} = \gamma_{\mathrm{I}} \Sigma_{f}(\vec{r},t) \varphi(\vec{r},t) - \lambda_{\mathrm{I}} \mathbf{I}(\vec{r},t) ,$$

$$\frac{\partial \mathrm{Xe}(\vec{r},t)}{\partial t} = \lambda_{\mathrm{I}} \mathbf{I}(\vec{r},t) - \lambda_{\mathrm{Xe}} \mathrm{Xe}(\vec{r},t) - \sigma_{\mathrm{Xe}} \mathrm{Xe}(\vec{r},t) \varphi(\vec{r},t) , \qquad (4.4.3)$$

где I – концентрация ядер йода; Xe – концентрация ядер ксенона; λ_{I} – постоянная распада ядер йода; λ_{Xe} – постоянная распада ядер ксенона; σ_{Xe} – микроскопическое сечение захвата ксенона; γ_{I} – выход йода;

• уравнения отравления самарием

$$\frac{\partial \mathrm{Pm}(\vec{r},t)}{\partial t} = \gamma_{\mathrm{Pm}} \Sigma_f(\vec{r},t) \varphi(\vec{r},t) - \lambda_{\mathrm{Pm}} \mathrm{Pm}(\vec{r},t),$$
$$\frac{\partial \mathrm{Sm}(\vec{r},t)}{\partial t} = \lambda_{\mathrm{Pm}} \mathrm{Pm}(\vec{r},t) - \sigma_{\mathrm{Sm}} \mathrm{Sm}(\vec{r},t) \varphi(\vec{r},t), \qquad (4.4.4)$$

где Pm – концентрация ядер прометия; Sm – концентрация ядер самария; λ_{Pm} – постоянная распада ядер прометия; σ_{Sm} – микроскопическое сечение поглощения нейтронов ядрами самария; γ_{Pm} – выход прометия;

• уравнение для температуры топлива:

$$\frac{\partial T_{\rm T}(\vec{r},t)}{\partial t} = \frac{E_f \Sigma_f(\vec{r},t) \varphi(\vec{r},t)}{c_{\rm T} \rho_{\rm Tl}} - \frac{T_{\rm T}(\vec{r},t) - T_{\rm TH}(\vec{r},t)}{\tau_{\rm T}}, \quad (4.4.5)$$

где $T_{\rm T}$ – температура топлива; $T_{\rm TH}$ – температура теплоносителя; E_f – энергия на один акт деления; $c_{\rm T}$ – удельная массовая теплоемкость топлива; $\rho_{\rm T}$ – плотность топлива; $\tau_{\rm T}$ – постоянная времени топлива; • уравнение для температуры теплоносителя:

экономайзерный участок

$$\frac{\partial T_{\rm TH}(\vec{r},t)}{\partial t} = \frac{T_{\rm T}(\vec{r},t) - T_{\rm TH}(\vec{r},t)}{\tau_{\rm T}} - Gc_P H_k \frac{\partial T_{\rm TH}(\vec{r},t)}{\partial z}, \quad (4.4.6)$$

где G – расход теплоносителя; H_k – высота активной зоны; c_P – теплоемкость воды,

испарительный участок

$$T_{\rm TH} = T_{\rm H} ,$$

где *T*_н – температура насыщения;

• уравнение для температуры замедлителя (для реактора типа РБМК)

$$\frac{\partial T_{\Gamma}(\vec{r},t)}{\partial t} = \frac{\gamma E_f \Sigma_f(\vec{r},t) \varphi(\vec{r},t)}{c_{\Gamma} \rho_{\Gamma}} - \frac{T_{\Gamma}(\vec{r},t) - T_{TH}(\vec{r},t)}{\tau_{\Gamma}}, \quad (4.4.7)$$

где c_{Γ} – удельная массовая теплоемкость графита; ρ_{Γ} – плотность графита; τ_{Γ} – постоянная время графита; γ – доля тепла, выделенного в графите;

• уравнение образования пара (для реактора типа РБМК)

$$\frac{\partial \tilde{x}(\vec{r},t)}{\partial z} = \frac{q(\vec{r},t)}{Gr}; \qquad (4.4.8)$$

$$\eta = \left[1 + \frac{\rho''}{\rho'} \frac{(1 - \tilde{x})}{\tilde{x}}\right]^{-1}, \qquad (4.4.9)$$

где \tilde{x} – массовое паросодержание; η – объемное паросодержание; q – линейная нагрузка; r – удельная теплота парообразования; ρ'' – плотность пара; ρ' – плотность воды на линии насыщения.

3. Связь коэффициента размножения с изменением теплофизических параметров (замыкание системы уравнений через коэффициенты реактивности). Связь коэффициента размножения с изменением теплофизических параметров активной зоны описывается следующим образом:

$$K_{\infty}(\vec{r},t) = K_{\infty0}(\vec{r}) + \alpha_{\rm T}\delta T_{\rm T} + \alpha_{\rm TH}\delta T_{\rm TH} + \alpha_{\rm T}\delta T_{\rm T} + \alpha_{\eta}\delta\eta =$$

= $\frac{v_f \Sigma_f(\vec{r})}{\Sigma_a(\vec{r})} + \alpha_{\rm T}(T_{\rm T}(\vec{r}) - T_{\rm T0}(\vec{r})) + \alpha_{\rm TH}(T_{\rm TH}(\vec{r}) - T_{\rm TH0}(\vec{r})) +$

+
$$\alpha_{\Gamma}(T_{\Gamma}(\vec{r}) - T_{\Gamma 0}(\vec{r})) + \alpha_{\eta}(\eta(\vec{r}) - \eta_{0}(\vec{r})),$$
 (4.4.10)

где $K_{\infty 0} = \frac{v_f \Sigma_f}{\Sigma_a}$ – коэффициент размножения, обусловленный

данной конфигурацией загрузки; $\alpha_{\rm T}, \alpha_{\rm TH}, \alpha_{\rm \Gamma}, \alpha_{\eta}$ – коэффициенты реактивности по температуре топлива, температуре теплоносителя, температуре графита, паросодержанию соответственно; $\delta T_{\rm T}, \delta T_{\rm TH}, \delta T_{\rm F}, \delta\eta$ – отклонения температуры топлива, температуры теплоносителя, температуры графита и объемного паросодержания от стационарного состояния соответственно.

4. Математическая модель системы регулирования. Система регулирования моделируется изменением сечения поглощения. Регулятор имеет зону нечувствительности. Возможно регулирование интегральной мощности (поддержание критичности) и локальное изменение мощности.

В случае регулирования интегральной мощности изменение сечения поглощения происходит во всех точках активной зоны на одну и ту же величину, рассчитанную исходя из соотношений:

$$\Sigma_{a \text{ доп}} = 0 \quad \text{при} \quad \left| \frac{W(t) - W_0}{W_0} \right| < y_0; \qquad (4.4.11)$$
$$\frac{d \Sigma_{a \text{ доп}}}{dt} + \Sigma_{a \text{ доп}} = k \frac{W(t) - W_0}{W_0} \quad \text{при} \quad \left| \frac{W(t) - W_0}{W_0} \right| \ge y_0,$$

где $\Sigma_{a \text{ доп}}$ – дополнительное поглощение, вносимое при перемещении стержней регулирования; W_0 – планируемое значение мощности реактора; W(t) – текущее значение мощности; k – коэффициент усиления; y_0 – пороговое значение, при достижении которого включается регулятор.

Локальная система регулирования отслеживает отклонения плотности потока нейтронов за пределы допустимых значений и вводит стержни, обеспечивающие дополнительное поглощение не во всю зону, а только в область, в которой произошло отклонение. Математические соотношения аналогичны (4.4.11):

$$\begin{split} \Sigma_{a\,\text{доп}}(\vec{r}) &= 0 \quad \text{при} \quad \left| \frac{\phi(t,\vec{r}) - \phi_0(\vec{r})}{\phi_0(\vec{r})} \right| < c_0 \;; \qquad (4.4.12) \\ \frac{d\,\Sigma_{a\,\text{доп}}}{dt} + \Sigma_{A\,\text{доп}} &= k_1 \frac{\phi(t,\vec{r}) - \phi_0(\vec{r})}{\phi_0(\vec{r})} \quad \text{при} \quad \left| \frac{\phi(t,\vec{r}) - \phi_0(\vec{r})}{\phi_0(\vec{r})} \right| \ge c_0 \;, \end{split}$$

где $\Sigma_{a \text{ доп}}$ – дополнительное поглощение, вносимое при перемещении стержней регулирования в точку с координатой \vec{r} ; $\varphi_0(\vec{r})$ – планируемое значение плотности потока нейтронов; $\varphi(\vec{r},t)$ – текущее значение плотности потока нейтронов; k_1 – коэффициент усиления; c_0 – пороговое значение, при достижении которого включается регулятор.

Для моделирования случайных величин с заданной корреляционной функцией использовался метод формирующего фильтра.

Таким образом, математическая модель для исследования статистических свойств параметров реактора (в первую очередь плотности потока нейтронов) содержит все основные уравнения, отражающие физические процессы, проходящие в активной зоне реактора, систему регулирования и генератор реакторного шума.

Уравнения, описывающие распределение плотности потока нейтронов и обратные связи, характерны для реакторов на тепловых нейтронах и пригодны для решения задач контроля и управления. Отметим, что флюктуирующий параметр в уравнении для плотности потока нейтронов включен в комбинацию с макроскопическим сечением поглощения. Это не является принципиальным моментом. Можно было бы переписать уравнение (4.4.1) в приближении

мгновенного скачка $\left(\frac{1}{v} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0\right)$ в другой форме, например так:

$$\Delta \varphi(\vec{r},t)) + \frac{\varphi(\vec{r},t)}{M^2} \left[(1-\beta)K_{\infty}(\vec{r},t) - 1 + \frac{\lambda C(\vec{r},t)}{\Sigma_a} - \frac{\sigma_{\text{Xe}} \text{Xe}(\vec{r},t) - \sigma_{\text{Sm}} \text{Sm}(\vec{r},t) - \Sigma_P(\vec{r},t)}{\Sigma_a} \right] + \xi(\vec{r},t)\varphi(\vec{r},t) = 0;$$

$$\varphi|_{S}(0) = 0,$$
 (4.4.13)

где *M*² – квадрат длины миграции;

В этом случае видно, что $\xi(\vec{r},t)$ есть случайные флюктуации локального материального параметра, определяемого как $a^2 = \frac{K_{\infty}(\vec{r},t)-1}{M^2}$. Таким образом, в любом случае наличие в уравнении члена $\xi(\vec{r},t)$ отражает факт возмущения в размножающих свойствах среды.

Уравнения для описания регуляторов отражают реальный факт наличия системы автоматического регулирования мощности и системы локального регулирования распределения энерговыделения. Что касается генератора случайного реакторного шума, то используется известный подход генерации случайной величины с заданной корреляционной функцией – формирующий фильтр.

Редукция математической модели к одномерному случаю. Методы численной реализации модели

Для проведения численных исследований система уравнений (4.4.1) – (4.4.12) редуцировалась к одномерному случаю. Обусловлено это обстоятельство несколькими причинами.

1. Одномерное приближение позволяет получить результаты принципиального характера, поскольку отражает все существенные стороны физических процессов, протекающих в активной зоне ядерного реактора (в прикладном плане результаты, полученные на одномерной модели, описывают реальные статистические свойства высотного распределения поля нейтронов в реакторе).

2. Поскольку статистические исследования предполагают проведение массовых вариантных расчетов, то целесообразно ограничиться математической моделью, при численной реализации которой время счета минимально. (Практика расчетов показывает, что увеличение пространственной размерности реакторной задачи на одно измерение увеличивает время счета на порядок.)

3. Получаемые на одномерной задаче результаты обладают большей наглядностью и обозримостью, что немаловажно при их физической интерпретации. После редукции система уравнений принимает вид

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} (D(x) \frac{d}{dx} \varphi(x,t)) + [(1-\beta)K_{\infty}(x,t) - 1](\Sigma_{a}(x) + \xi(x,t))\varphi(x,t) + \\ +\lambda C(x,t) - \sigma_{Xe} Xe(x,t)\varphi(x,t) - \sigma_{Sm} Sm(x,t)\varphi(x,t) - \\ -\Sigma_{P}(x,t)\varphi(x,t) = 0; \\ \frac{\partial C}{\partial t} = \beta K_{\infty} \Sigma_{a} \varphi - \lambda C; \\ \frac{\partial I}{\partial t} = \gamma_{1} \Sigma_{f} \varphi - \lambda_{1} I; \\ \frac{\partial Xe(x,t)}{\partial t} = \lambda_{1} I - \lambda_{Xe} Xe - \sigma_{Xe} Xe\varphi; \\ \frac{\partial Pm}{\partial t} = \gamma_{Pm} \Sigma_{f} \varphi - \lambda_{Pm} Pm; \\ \frac{\partial Sm}{\partial t} = \lambda_{Pm} Pm - \sigma_{Sm} Sm\varphi; \\ \frac{\partial T_{r}}{\partial t} = \frac{E_{f} \Sigma_{f} \varphi}{c_{1} \rho_{1}} - \frac{T_{r} - T_{rH}}{\tau_{1}}; \\ \frac{\partial T_{r}}{\partial t} = \frac{\gamma E_{f} \Sigma_{f} \varphi}{c_{4} \rho_{4}} - \frac{T_{r} - T_{rH}}{\tau_{4}}; \\ \eta = \left[1 + \frac{\rho'}{\rho'} \frac{(1-\tilde{x})}{\tilde{x}}\right]^{-1}. \end{cases}$$

$$(4.4.14)$$

Последнее уравнение системы для определения паросодержания выводится, исходя из следующих соотношений:

$$T_{\rm TH}(z) = T_{\rm BX} + \frac{1}{G(x)C_P} \int_0^z q_l(\tau, x) d\tau \quad \text{для} \quad z < z_{\rm H};$$

$$T_{\rm TH}(z) = 284 \,^{\circ}\text{C} \quad \text{для} \quad z \ge z_{\rm H};$$

$$q_l = \text{const}; \quad z_{\rm H}(x) = \frac{H_{\rm K}(T_{\rm H} - T_{\rm BX})G(x)C_P}{W(x)}; \qquad (4.4.15)$$

$$W(x) = \int_0^{H_{\rm K}} q_l(\tau, x) d\tau;$$

311



Рис. 4.12. Схема проведения расчетов

$$T_{\rm TH}(x,t) = \frac{\int_{0}^{H_{\rm K}} T(z)dz}{H_{\rm K}}$$

$$\tilde{x}(z) = \frac{1}{Gr} \int_{z_{\rm H}}^{z} q_{I}(\tau, x)d\tau;$$

$$\tilde{x}(x,t) = \frac{\int_{0}^{H_{\rm K}} x(z)dz}{H_{\rm K}};$$

$$\eta = \left[1 + \frac{\rho''}{\rho'} \frac{(1-\tilde{x})}{\tilde{x}}\right]^{-1}.$$
(4.4.16)

По существу, данная система уравнений описывает плоский одномерный реактор.

Для расчета реактор разбивается на пространственные зоны, в каждой из которых флюктуируют макросечения взаимодействия около своих математических ожиданий (либо независимо, либо в соответствии с задаваемой корреляционной функцией). Общая логика расчетов приведена на рис. 4.12.

Численная реализация математической модели для проведения статистических исследований

Так как статистические исследования подразумевают проведение многовариантных расчетов (причем при небольших возмущениях), то целесообразно выбрать или модифицировать такие методы расчета, которые с приемлемой точностью давали бы результат в ограниченное время. В качестве таких методов в данной работе рассматривались конечно-разностный метод и метод Галеркина.

Решение системы уравнений методом конечных разностей. При решении системы уравнений методом конечных разностей был выбран шаблон, представленный на рис. 4.13.

Тогда аппроксимация производных по времени и пространству есть:

$$u_t' = \frac{u_n^{m+1} - u_n^m}{\tau} + O(\tau); \qquad (4.4.17)$$

$$u_x'' = \frac{u_{n+1}^{m+1} - 2u_n^{m+1} + u_{n-1}^{m+1}}{h^2} + O(h^2), \qquad (4.4.18)$$

где τ – шаг по оси времени; h – шаг по оси координат.



Рис. 4.13. Применяемый шаблон

Таким образом, уравнение для плотности потока нейтронов в конечно разностной форме примет вид:

 $A_n \phi_{n-1}^{m+1} + B_n \phi_n^{m+1} + C_n \phi_{n+1}^{m+1} = q_n(\phi_n^m), n = 1, ..., N-1,$ (4.4.19) а обыкновенные дифференциальные уравнения для обратных связей, соответственно, вид:

$$u_n^{m+1} = u_n^m + \tau \cdot \tilde{q}_n(\varphi_n^m) .$$
 (4.4.20)

На каждом временном шаге уравнение относительно плотности потока нейтронов решается методом прогонки. Для инициализации процесса расчета задаются начальные условия и нулевые граничные условия на экстраполированной границе реактора.

Начальное (невозмущенное) распределение плотности потока нейтронов для заданной загрузки реактора определяется при решении уравнения:

$$\frac{d}{dx}\left(D(x)\frac{d}{dx}\varphi_{0}(x)\right) + \left[\frac{(v_{f}\Sigma_{f})(x)}{K_{2\phi}} - 1\right]\Sigma_{a}(x)\varphi_{0}(x) - \sigma_{Xe}Xe_{0}(x)\varphi_{0}(x) - \sigma_{Sm}Sm_{0}(x)\varphi_{0}(x) - \Sigma_{p0}\varphi_{0}(x) = 0; \qquad (4.4.21)$$
$$\varphi_{0}(0) = \varphi_{0}(H) = 0,$$

где $Xe_0(x)$, $Sm_0(x)$ – равновесные концентрации ксенона и самария соответственно; $K_{9\phi}$ – эффективный коэффициент размножения.

Данная задача на собственные функции и собственные значения решается методом итерации источников. Для этого уравнение (4.4.21) записывается в виде:

$$A\phi_0 = \left(\frac{1}{K_{9\phi}}F + U\right)\phi_0; \qquad (4.4.22)$$
$$A = -D\frac{d^2}{dx^2} + \Sigma_a(x); \quad F = (1-\beta)(v_f \Sigma_f)(x);$$
$$U = -\sigma_{Xe} Xe_0(x) - \sigma_{Sm} Sm_0(x).$$

Обозначим

$$IST = \left(\frac{1}{K_{9\phi}}F + U\right)\phi_0.$$
(4.4.23)

Итерационный процесс выглядит следующим образом:

$$IST^{(j)} = \left(\frac{1}{K_{9\phi}^{(j-1)}}F + U\right) \varphi_0^{(j-1)};$$

$$A\varphi_0^{(j)} = IST^{(j)};$$

$$S^{(j)} = F\varphi^{(j-1)};$$

$$K_{9\phi}^{(j)} = \frac{\int_{H}^{H} S^{(j)}(x) dx}{\int_{H}^{H} S^{(j-1)}(x) dx}.$$

(4.4.24)

Итерационный процесс сходится к решению, окончание итерационного процесса обычно задается условием:

$$K^{(j)} = \left| \frac{K_{9\phi}^{(j)} - K_{9\phi}^{(j-1)}}{K_{9\phi}^{(j)}} \right| < \varepsilon , \qquad (4.4.25)$$

где ε – заданная величина (как правило, $\varepsilon \approx 10^{-5}$).

Решение системы уравнений методом Галеркина. При решении системы уравнений (4.4.14) методом Галеркина плотность потока нейтронов представляется в виде

$$\varphi(x,t) = \varphi_0(x,t) + \delta\varphi(x,t); \varphi_0(x,t) = A_0(t)\psi_0(x),$$
(4.4.26)

где $\psi_0(x)$ – стационарное распределение плотности потока нейтронов в гомогенном реакторе; $A_0(t)$ – поведение во времени интегральной мощности реактора, посчитанное по точечной нелинейной модели с обратными связями; $\delta \varphi(x, t)$ – отклонения поля нейтронов от стационарного в переходном процессе.

Предполагается, что $\delta \varphi(x, t)$ носят плавный характер и могут быть представлены в виде суперпозиции по некоторому априорно выбранному набору пробных функций, т.е.

$$\delta \varphi(x,t) = \sum_{k=1}^{m} A_K(t) \psi_K(x) , \qquad (4.4.27)$$

где $\psi_K(x)$ – известные функции; $A_K(t)$ – неизвестные коэффициенты.

Функции обратных связей также представляются в виде отклонений:

$$\begin{split} \varphi(x,t) &= \varphi_{0}(x) + \delta\varphi(x,t); \\ C(x,t) &= C_{0}(x) + \delta C(x,t); \\ Xe(x,t) &= Xe_{0}(x) + \delta Xe(x,t); \\ Sm(x,t) &= Sm_{0}(x) + \delta Sm(x,t); \\ \Sigma_{P}(x,t) &= \Sigma_{P0}(x) + \delta\Sigma_{P}(x,t); \\ T_{T}(x,t) &= T_{T0}(x) + \delta T_{T}(x,t); \\ T_{TH}(x,t) &= T_{T0}(x) + \delta T_{TH}(x,t); \\ T_{\Gamma}(x,t) &= T_{\Gamma0}(x) + \delta T_{\Gamma}(x,t); \\ \eta(x,t) &= \eta_{0}(x) + \delta\eta(x,t). \end{split}$$
(4.4.28)

Тогда система уравнений в отклонениях в линейном приближении имеет вид

$$\begin{split} M^{2} \frac{\partial^{2} \delta \varphi}{\partial x^{2}} \varphi + & \left((1 - \beta) K_{xc0}(x) - 1 - \frac{\sigma_{Xe} X e_{0} + \sigma_{Sm} S m_{0} + \Sigma_{P0}}{\Sigma_{a}} \right) \delta \varphi + \\ & + \frac{\lambda}{\Sigma_{a}} \delta C + (1 - \beta) (\alpha_{T} \delta T_{T} + \alpha_{Tn} \delta T_{Tn} + \alpha_{T} \delta T_{T} + \alpha_{\eta} \delta \eta) \varphi_{0} - \\ & - \frac{\sigma_{Xe} \delta X e + \sigma_{Sm} \delta S m + \delta \Sigma_{P}}{\Sigma_{a}} \varphi_{0} = 0; \\ & \frac{\partial \delta C}{\partial t} = \beta K_{\infty 0} \Sigma_{a} \delta \varphi - \lambda \delta C; \\ & \frac{\partial \delta T_{T}}{\partial t} = \frac{E_{f} \Sigma_{f} \delta \varphi}{c_{1} \rho_{1}} - \frac{\delta T_{T} - \delta T_{Tn}}{\tau_{1}}; \quad (4.4.29) \\ & \frac{\partial \delta T_{Tn}}{\partial t} = \frac{\delta T_{T} - \delta T_{Tn}}{\tau_{23}} + \frac{\delta T_{T} - \delta T_{Tn}}{\tau_{43}} - \nu \frac{\delta T_{Tn} W}{HS \rho' C_{P}}; \\ & \frac{\partial \delta I}{\partial t} = \gamma_{I} \Sigma_{f} \delta \varphi - \lambda_{I} \delta I; \\ & \frac{\partial \delta X e}{\partial t} = \lambda_{1} \delta I - \lambda_{Xe} \delta X e - \sigma_{Xe} X e_{0} \delta \varphi - \sigma_{Xe} \delta X e \varphi_{0}; \\ & \frac{\partial \delta P m}{\partial t} = \gamma_{Pm} \Sigma_{f} \delta \varphi - \lambda_{Pm} \delta P m; \\ & \frac{\partial \delta S m}{\partial t} = \lambda_{Pm} \delta P m - \sigma_{Sm} S m_{0} \delta \varphi - \sigma_{Sm} \delta S m \varphi_{0}; \\ & \delta \eta = U(\varphi_{0}) \delta \varphi; \\ & U = \left[1 + \frac{\rho''}{\rho'} \left(\frac{1}{\frac{W_{0}}{G_{T}} - \frac{(T_{n} - T_{nx})C_{P}}{r}} - 1 \right) \right]^{-2} \times \end{split}$$

$$\times \frac{\rho''}{\rho'} \left(\frac{1}{\frac{W_0}{Gr} - \frac{(T_{\rm H} - T_{\rm BX})C_P}{r}} \right)^2 \frac{1}{Gr} (SHE_f \Sigma_f).$$

Уравнение, описывающее динамику на нулевой моде, есть:

$$D\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2} + (1 - \beta) K_{\infty 0}(x) \Sigma_a \varphi_0 - \Sigma_a \varphi_0 + \lambda C_0 - \sigma_{Xe} Xe_0 \varphi_0 - \sigma_{Sm} Sm_0 \varphi_0 - \Sigma_{P0} \varphi_0 = 0.$$
(4.4.30)

Отклонения параметров представляются в виде

$$\delta \varphi(x,t) = \sum_{i=1}^{m} A_i(t) \psi_i(x); \quad \delta C(x,t) = \sum_{i=1}^{m} B_i(t) \psi_i(x);$$

$$\delta Y(x,t) = \sum_{i=1}^{m} Y_i(t) \psi_i(x); \quad \delta Xe(x,t) = \sum_{i=1}^{m} Xe_i(t) \psi_i(x);$$

$$\delta Pm(x,t) = \sum_{i=1}^{m} Pm_i(t) \psi_i(x);$$

$$\delta Sm(x,t) = \sum_{i=1}^{m} Sm_i(t) \psi_i(x); \quad (4.4.31)$$

$$\delta T_{\rm T}(x,t) = \sum_{i=1}^{m} E_i(t) \psi_i(x); \quad \delta T_{\rm TH}(x,t) = \sum_{i=1}^{m} F_i(t) \psi_i(x);$$

$$\delta T_{\Gamma}(x,t) = \sum_{i=1}^{m} L_i(t) \psi_i(x); \quad \delta \eta(x,t) = \sum_{i=1}^{m} N_i(t) \psi_i(x).$$

В качестве известных координатных функций используются собственные функции «голого» гомогенного реактора $\psi_j = \sin\left(\frac{i \cdot \pi \cdot x}{H}\right).$

После применения к каждому из уравнений процедуры Галеркина получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для определения амплитуд отклонений искомых функций.

Сравнение метода Галеркина и сеточного метода

Сравнение двух методов проводилось для однородного гомогенного реактора. При этом значение расхождения оценивалось по выражению:

$$\delta = \sqrt{\frac{\int_{0}^{H} (\phi_{\Gamma} - \phi_{c})^{2} dx}{\int_{0}^{H} \phi_{c} dx}} \cdot 100\%, \qquad (4.4.32)$$

где ϕ_{Γ} – решение по методу Галеркина; ϕ_{c} – решение сеточным методом.

На рис. 4.14 показано значение расхождения в зависимости от уровня шума при различном числе гармоник, использованном при расчете методом Галеркина. На рис. 4.15 показана зависимость погрешности решения методом Галеркина от числа гармоник.



Рис. 4.14. Зависимость погрешности от уровня шума



Рис. 4.15. Зависимость погрешности от числа гармоник

Из рисунков следует, что использование метода Галеркина целесообразно при шуме в макросечениях менее 1 %, при этом вполне достаточно использовать разложение по 5 – 9 гармоникам.

Исследования показали, что решение задачи с помощью метода конечных разностей требуют более чем на три порядка больше машинного времени и дискового пространства, поэтому для статистических исследований предпочтительно использовать гармоническую модель в случае небольшой дисперсии случайных возмущений.

4.4.3. Статистические исследования на математической модели ядерного реактора

Статистические исследования в отсутствии обратных связей. Статистические исследования в реакторе с однородной загрузкой и отсутствием обратных связей имеют целью проявить основные тенденции, появляющиеся при внесении возмущений различного уровня, при различных физических размерах активной зоны и разном способе внесения возмущений. При этом исследовались закон распределения плотности потока нейтронов и его моментные функции: математическое ожидание, дисперсия и корреляционная функция.

На рис. 4.16 и 4.17 показаны нормированные математическое ожидание и дисперсия в зависимости от относительной координаты в активной зоне при различных ее размерах.

Нормировка проведена для того, чтобы выделить пространственное поведение функций. Сравнение по абсолютной величине приведено в табл. 4.5.



Рис. 4.16. Математическое ожидание плотности потока нейтронов при различном размере активной зоны, выраженном в длинах миграции

Из рисунков и табл. 4.5 следует, что при возрастании размера активной зоны и математическое ожидание и дисперсия меняют свою форму, причем численное значение дисперсии возрастает на порядок. Приведенные данные получены при относительном уровне шума в макросечении поглощения в 4 %.



Рис. 4.17. Дисперсия плотности потока нейтронов при различном размере активной зоны

Таблица 4.5

Относительное значение величины дисперсии плотности потока нейтронов в зависимости от размера реактора

H/M	25	50	100	150
$\frac{\int\limits_{0}^{H} D(x)dx}{\int\limits_{0}^{25M} D(x)dx}$	1,00	5,25	15,78	26,74

Зависимости исследуемых характеристик от уровня шума при фиксированном размере активной зоны реактора $\frac{H}{M} = 50$ представлены на рис. 4.18 и 4.19.



Рис. 4.18. Математическое ожидание плотности потока нейтронов при различном уровне шума. Размер реактора $\frac{H}{M} = 50$, число зон 20



Рис. 4.19. Дисперсия плотности потока нейтронов при различном уровне шума

$\frac{\delta\Sigma_a}{\Sigma_a} \cdot 100 \%$	0,5	1,0	1,5	2,0	4,0	5,0
$\frac{[D]}{[D]_{0,5}}$	1,0	12,7	35,0	58,7	150,8	189,7

Относительное значение величины дисперсии плотности потока нейтронов в зависимости от уровня шума

Из приведенных данных видно, что при увеличении уровня шума происходит отклонение математического ожидания от решения для невозмущенного реактора и происходит численное увеличение дисперсии поля (табл. 4.6). При этом крайние пики раздвигаются от центра к краям, что соответствует теоретическим расчетам. Но при дальнейшем увеличении шума форма поля все меньше изменяется и лишь численно увеличивается значение дисперсии.



Рис. 4.20. Математическое ожидание плотности потока нейтронов при различном количестве зон


Рис. 4.21. Дисперсия плотности потока нейтронов при различном количестве зон

На рис. 4.20, 4.21 показаны математическое ожидание и дисперсия при фиксированном размере $\frac{H}{M} = 50$ и уровне шума $\frac{\delta \Sigma_a}{\Sigma_a} [\%]$.

Менялось количество зон, в которые независимо вносится шум.

На рис. 4.20 по оси ординат отложено математическое ожидание, разделенное на площадь под графиком математического ожидания. Площадь одинакова при любом количестве зон, так как в каждой реализации амплитуда рассчитывалась исходя из одинаковой мощности реактора, и в каждый момент времени реактор был критическим. Видно, что количество зон, в которые вносятся возмущения, существенно влияет на вид математического ожидания. При увеличении количества зон график сглаживается, исчезают пики, являющиеся центрами зон. Но при этом график далек от синусоиды, что является стандартным приближением для математического ожидания. Сглаживание возникает из-за того, что при малом количестве зон, их размер достаточно большой, и при случайном разбросе параметров получается резкий пик в одной из зон и практически нулевая плотность потока нейтронов в остальных, пример приведен на рис. 4.22. При увеличении числа зон их размер уменьшается, при этом каждая конкретная зона вносит меньший вклад в форму поля, поэтому вид поля становиться более гладким и отклонения формы поля от начальной носят незначительный характер, пример приведен на рис. 4.23.



Рис. 4.22. Плотность потока нейтронов при 10 зонах



Рис. 4.23. Плотность потока нейтронов при 40 зонах

Из рисунков видно, что при небольшом числе зон, когда математическое ожидание еще имеет пики, дисперсия также имеет эти пики, и ее численное значение увеличивается, при этом крайние пики по сравнению с центральными более ярко выражены. В дальнейшем, так как идет сглаживание математического ожидания и приближение его к синусоиде, то дисперсия также становится глад-кой и ее численное значение начинает уменьшаться.

В целом, из приведенных результатов видно, что вид математического ожидания и дисперсии определяется совокупностью значений уровня шума, размера реактора и числа зон. Поэтому при дальнейшем исследовании влияния обратных связей на их вид необходимо учитывать влияние этих факторов.

Исследование статистических свойств реактора с обратными связями

Опыт эксплуатации больших энергетических реакторов показывает, что распределение энерговыделения по объему активной зоны может быть нестабильным. Причиной нестабильности является наличие пространственно-распределенных обратных связей. Ниже приведены результаты моделирования реактора с обратными связями и системой регулирования. Рассматривался реактор со следующими характеристиками. Ширина 10 м, число зон 40, шум 0,1 %, суммарный мощностной коэффициент реактивности (по топливу и по пару) $1,1 \cdot 10^{-5}$, коэффициент реактивности по замедлителю 5,4 $\cdot 10^{-5}$, возмущения вносятся раз в 1 с.

Как показали результаты расчетов, математическое ожидание плотности потока нейтронов и избытка коэффициента размножения практически не зависит от наличия обратных связей, а дисперсия растет (рис. 4.24 и 4.25).

Временной характер влияния обратных связей иллюстрирует рис. 4.26, на котором показана автокорреляционная функция плотности потока нейтронов при наличии обратных связей. Из рисунка видно, что корреляционная функция отслеживает наличие обратных связей, в частности по ксенону.

Далее приведем относительные гистограммы распределения плотности потока нейтронов (рис. 4.27 – 4.30) и избытка коэффициента размножения (рис. 4.31 – 4.33) для точки с координатой

 $x = \frac{H}{4}$ в зависимости от наличия той или иной обратной связи.

Расчет проводился по 100 000 реализаций, уставка по ЛАР 10 %. Из представленных гистограмм видно, что законы распределения «отслеживают» наличие обратных связей.



Рис. 4.24. Распределение дисперсии плотности потока нейтронов по размеру активной зоны. Уставка по ЛАР в 10 %. Возмущения вносятся раз в 10 с



Рис. 4.25. Распределение дисперсии по размеру активной зоны при действии обратных связей



Рис. 4.26. Автокорреляционная функция плотности потока нейтронов во времени

























Рис. 4.33. Гистограмма избытка коэффициента реактивности (обратная связь по запаздывающим нейтронам, топливу, замедлителю и ксенону)



Рис. 4.34. Зависимость дисперсии плотности потока нейтронов от уровня мощности

Интересный результат наблюдается при моделировании ксеноновых колебаний. Для тех же параметров реактора, что и ранее, при внесении возмущений раз в 15 мин, оказывается, что дисперсия плотности потока нейтронов в выбранной пространственной точке $\frac{H}{4}$ зависит от величины отрицательного мощностного коэффициента реактивности (рис. 4.34). На представленных дальше рисунках прослеживается момент зарождения ксеноновых колебаний и зависимость дисперсии плотности потока нейтронов от величины отрицательной обратной связи.

Видно, что при значении потока $\phi_0 = 2,56 \cdot 10^{17}$ характер поведения плотности потока резко меняется, и дисперсия начинает резко возрастать – это значение соответствует точке, начиная с которой в системе присутствуют ксеноновые колебания.



Рис. 4.35. Зависимость дисперсии плотности потока нейтронов от мощностного коэффициента реактивности

Зафиксируем уровень мощности $\phi_0 = 2,92 \cdot 10^{17}$ и введем в систему обратную связь по температуре топлива с отрицательным коэффициентом реактивности. На рис. 4.35 представлена зависимость дисперсии плотности потока нейтронов в точке *H*/4 от модуля коэффициента реактивности. Из рисунка видно, что характер поведе-

ния дисперсии резко меняется в точке, где заканчиваются ксеноновые колебания. Зависимость дисперсии плотности потока нейтронов от коэффициента реактивности означает принципиальную возможность определения мощностного коэффициента реактивности в пассивном эксперименте.

Введение локального автоматического регулятора в описанную выше систему уменьшает дисперсию колебаний. На рис. 4.36 приведен график зависимости дисперсии от процента уставки ЛАР.



Рис. 4.36. Зависимость дисперсии плотности потока нейтронов от уставки ЛАР

Из рис. 4.36 видно, что введение ЛАР помогает устранить ксеноновые колебания, если процент уставки маленький, или уменьшить их размах, если процент уставки большой.

На рис. 4.37 представлены зависимости дисперсии плотности потока нейтронов в точке H/4 от модуля коэффициента реактивности при различных уставках ЛАР.

Как видно из рис. 4.37, при уставке ЛАР менее 20 % определить коэффициент реактивности по значению дисперсии плотности потока нейтронов затруднительно. Однако отметим, что на практике в силу конструктивных особенностей системы регулирования – «высотный» ЛАР отсутствует – ксеноновые колебания по высоте активной зоны существуют. Таким образом, существует принципиальная возможность определения в пассивном эксперименте мощностного коэффициента реактивности по дисперсии плотности потока нейтронов.



Рис. 4.37. Зависимость дисперсии плотности потока нейтронов от коэффициента реактивности

Список литературы к главе 4

1. Бусленко Н.П. Моделирование сложных систем. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1968.

2. Загребаев А.М., Козьмин Л.А. Разработка математической модели реактора и исследование его статистических характеристик. Сборник трудов XI международного научно-технического семинара. – М.: МГАПИ, 2002.

3. Загребаев А.М., Насонова В.А. Разработка математической модели реактора для проведения статистических исследований. Научная сессия МИФИ. Сборник научных трудов. – Т. 6. Ядерная энергетика. – М.: МИФИ, 2005.

4. Загребаев А.М., Насонова В.А. Математическое моделирование и исследование статистических характеристик плотности потока нейтронов в ядерном реакторе при случайных возмущениях. Препринт МИФИ 002-2008. – М.: МИФИ, 2008.

ГЛАВА 5. АЛГОРИТМЫ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ФИЗИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ В ЯДЕРНОМ РЕАКТОРЕ ПО ДИСКРЕТНЫМ ИЗМЕРЕНИЯМ

5.1. Методика и алгоритм восстановления полей энерговыделения в ядерных реакторах типа ВВЭР

Современная система внутриреакторного контроля реакторов типа ВВЭР обеспечивает безопасную и эффективную эксплуатацию реакторной установки за счет точности, надежности и оперативности контроля наиболее важных параметров активной зоны и первого контура [2, 3, 4, 24, 25, 27]. Система контроля имеет двухуровневую структуру, и текущая информация от датчиков обрабатывается последовательно на нижнем (оперативном) и верхнем уровнях. Для контроля распределения поля энерговыделения используются родиевые датчики прямой зарядки (ДПЗ), размещенные в специальных измерительных каналах внутри топливных кассет. Каждый измерительный канал состоит их семи датчиков по высоте. Измерительные каналы равномерно распределены в активной зоне в 64 топливных сборках.

На нижнем уровне определяется линейная мощность максимально напряженных твэлов каждой из 163 ТВС в семи слоях по высоте активной зоны. Это позволяет своевременно, с запаздыванием не более двух секунд, обнаружить превышение допустимых пределов локальными параметрами при «самоходе» органов регулирования системы управления и защиты (ОР СУЗ) или при ошибочных действиях оперативного персонала в управлении ОР СУЗ и выдать сигнал автоматической защиты.

На верхнем уровне с погрешностью не более 2,5 % проводятся расчёты текущего распределения объемного поля энерговыделения и его функционалов в пространстве 163×16,

При этом процедура восстановления поля энерговыделения использует алгоритмы и программы, отличающиеся от алгоритмов и программ проектных расчетов топливных загрузок, для исключения ошибки по общей причине (принцип защиты в глубину).

Цикл измерения токов ДПЗ составляет не более 0,2 с. Цикл передачи информации от нижнего уровня к верхнему составляет не более 1 с. Отметим, что инерционность ДПЗ устраняется корректирующим фильтром.

Восстановление поля ЭВ. Восстановление поля ЭВ (\vec{q}) основано на математической модели, включающей в себя совместное решение естественного уравнения связи результатов измерения \vec{Q} (показания датчиков) с искомым полем ЭВ \vec{q} и уравнения диффузии нейтронов, записанного в разностном виде:

$$\vec{Q} = \vec{M}\vec{q} + \vec{\delta}_M \,, \tag{5.1.1}$$

$$\hat{L}\vec{q} = \vec{\delta}_L \,, \tag{5.1.2}$$

где \vec{M} – оператор связи поля ЭВ с результатом измерения; $\vec{\delta}_M$ – погрешность измерения; \hat{L} – матрица разностной схемы уравнения диффузии; $\vec{\delta}_I$ – невязки уравнения.

Система уравнений избыточна по отношению \vec{q} . Для ее решения используется метод наименьших квадратов. Оптимальная оценка \vec{q} доставляет минимум функционалу

$$\varphi = \vec{\delta}_M^* \hat{D}_M \vec{\delta}_M + \vec{\delta}_L^* \hat{D}_L \vec{\delta}_L , \qquad (5.1.3)$$

где * – символ сопряжения; \hat{D}_M – дисперсионная матрица погрешностей $\vec{\delta}_M$; \hat{D}_L – дисперсионная матрица невязок $\vec{\delta}_I$.

В качестве уравнения диффузии нейтронного потока используется уравнение Гельмгольца:

$$\Delta \varphi + \mu^2 \varphi = 0 , \qquad (5.1.4)$$

где μ – материальный параметр, $\mu = [K_{\infty} - 1] / M^2$.

Для получения максимальной точности интерполяции используется уравнение диффузии замедляющихся нейтронов. Плотность замедляющихся нейтронов является наиболее гладкой функцией в пространстве уран-водной решетки активной зоны реакторов ВВЭР, что обеспечивает наибольшую точность решения задачи интерполяции поля энерговыделения.

Для уменьшения расхождения между нейтронно-физической моделью (5.1.4) и показаниями датчиков (5.1.2) вводятся поправки в параметры μ^2 и Σ^f в виде

$$\mu^{2} = \mu_{0}^{2} + \sum_{m=1}^{N_{\alpha}} \alpha_{m} \hat{\chi}^{m}; \qquad (5.1.5)$$

$$\Sigma^{f} = \Sigma_{0}^{f} \left(\hat{E}^{f} + \sum_{n=1}^{N_{\beta}} \beta_{n} \hat{\gamma}^{n} \right), \qquad (5.1.6)$$

где μ_0^2 – материальный параметр; Σ_0^f – сечение деления; \hat{E}^f – единичная матрица; α_m , β_n – неизвестные коэффициенты адаптации; $\hat{\chi}^m$, $\hat{\gamma}^n$ – диагональные матрицы, содержащие физические величины и факторы адаптации; N_{α} , N_{β} – число поправок адаптации α_m , β_n .

Коэффициенты адаптации α_m и β_n определяются из условия минимума функционала (5.1.3).

При этом оператор \hat{L} представлен в виде

$$\hat{L} = \hat{L}_0 + \sum_{m=1}^{N_{\alpha}} \frac{\partial \hat{L}}{\partial \alpha_m} \delta \alpha_m + \sum_{n=1}^{N_{\beta}} \frac{\partial \hat{L}}{\partial \beta_n} \delta \beta_n ,$$

где $\delta \alpha_m$, $\delta \beta_n$ – поправки адаптации α_m и β_n ; \hat{L}_0 – значение \hat{L} до пересчета α_m и β_n .

Кроме того, учитывается утечка эпитепловых нейтронов на стадии до превращения их в тепловые.

Величина погрешности восстановления поля энерговыделения зависит от множества факторов:

 от отклонения геометрических размеров и состава применяемых материалов в конструкции ДПЗ от соответствующих номинальных значений;

• смещения ДПЗ от проектных мест размещения;

• от локальных нейтронно-физических характеристик активной зоны (отклонение от номинальных значений размеров таблеток, обогащений и т.п.).

Первые два фактора определяют систематическую погрешность, которая выявляется и устраняется на стадии монтажа и пусконаладочных работ. Последний фактор носит случайный характер, однако, учитывая изотропность нейтронного потока в активной зоне ВВЭР-1000, вносит малый вклад в погрешность восстановления поля.

Метрологический анализ данной методики показывает, без учета погрешности перехода от тока ДПЗ к энерговыделению, погрешность восстановления поля ЭВ имеет величину:

1. в ТВС в месте размещения достоверных ДПЗ до 0,5 %;

2. в ТВС без ДПЗ до 1÷ 2% в начале кампании и до 1,5 ÷ 2,5 % в конце кампании.

В целом, современная система внутриреакторного контроля реакторов ВВЭР, включающая в себя датчики, кабельные трассы, измерительную аппаратуру, вычислительную технику и программное обеспечение, способна выполнить управляющие, защитные, информационные, диагностические функции и обеспечить повышение качества, надежности и безопасности эксплуатации энергоблоков АЭС.

5.2. Методика и алгоритм восстановления полей энерговыделения в ядерных реакторах типа РБМК

Восстановление поля энерговыделения в реакторах типа РБМК обладает рядом существенных особенностей, обусловленных конструкцией реактора, в частности, режимом непрерывных перегрузок топлива [26, 28]. Поэтому в активной зоне реактора РБМК в процессе его эксплуатации могут находиться ТВС разной глубины энерговыработки – от «свежих», только что загруженных ТВС, до выгоревших, подлежащих выгрузке.

Современная система ВРК в реакторе РБМК основана на показаниях датчиков контроля энерговыделения по радиусу (ДКЭР) и по высоте (ДКЭВ) активной зоны.

Современные программы физического расчета реактора РБМК отражают все основные физические закономерности протекающих

процессов и позволяют рассчитать поле энерговыделения в некоторый конкретный момент времени. Однако получение поля энерговыделения в реально действующем реакторе только на основе этих моделей может привести к существенным ошибкам. Дело в том, что поле энерговыделения в реакторе не является детерминированной функцией, поскольку в процессе работы реактора на поле энерговыделения влияет большое количество таких случайных факторов, как вибрация ТВС и органов СУЗ, случайные изменения условий теплообмена (изменение расхода теплоносителя и температуры) и др. Поэтому поле энерговыделения, вообще говоря, является случайной функцией пространства и времени. Принято поле энерговыделения в конкретный момент времени представлять в виде двух составляющих:

$$W(\vec{r}) = \overline{W}(\vec{r}) + \delta W(\vec{r}) \,,$$

где $\overline{W}(\vec{r})$ – математическое ожидание (детерминированная составляющая); $\delta W(\vec{r})$ – случайная составляющая распределения энерговыделения. Предположим, что $\overline{W}(\vec{r})$ – известная функция, а случайная составляющая $\delta W(\vec{r})$ известна лишь в дискретном числе точек как результат измерения внутриреакторными датчиками, т.е. известна величина

$$\delta I(\vec{r}) = \delta W(\vec{r}) + x(\vec{r}),$$

где $x(\vec{r})$ – погрешность измерения.

Допустим, что известны статистические свойства функций δW , δI и x, а именно: корреляционные моменты: $K_{\delta W}(\delta W_i, \delta W_k)$, $K_{\delta I}(\delta I_i, \delta I_k)$, $K_x(x_i, x_k)$ и взаимные корреляционные моменты для δW и δI . Полагаем также, что M[x] = 0 и ошибка измерения не коррелирована с измеряемой величиной.

Задача восстановления поля энерговыделения по показаниям датчиков может быть поставлена следующим образом. Найти такой оператор \hat{L} преобразования сигналов датчиков, чтобы погрешность восстановления поля энерговыделения была минимальна, т.е.

$$D\left\{\hat{L}\left[\delta I(\vec{r}) + x(\vec{r})\right] - \delta W(\vec{r})\right\} = \min, \qquad (5.2.1)$$

где *D* – символ оператора дисперсии.

Если такой оператор \hat{L} найден, то искомое восстановленное поле определяется из выражения

$$W(\vec{r}) = \overline{W}(\vec{r}) + \hat{L} \big[\delta I(\vec{r}) + x(\vec{r}) \big].$$

Из теории оптимальных динамических систем следует, что искомый оператор \hat{L} является линейным преобразованием. Будем искать \hat{L} в классе *m*-мерных векторов-функций:

$$\hat{L} = \begin{bmatrix} l_1(\vec{r}) \\ \dots \\ l_m(\vec{r}) \end{bmatrix},$$

где m – число детекторов, расположенных вблизи точки \vec{r} , где требуется восстановить поле энерговыделения. С учетом линейности оператора \hat{L} выражение (5.2.1) имеет вид:

$$D\left\{\hat{L}\left[\delta I(\vec{r}) + x(\vec{r})\right] - \delta W(\vec{r})\right\} = D\left\{\hat{L}\delta I(\vec{r}) + \hat{L}x(\vec{r}) - \delta W(\vec{r})\right\} =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} l_i(\vec{r}) l_k(\vec{r}) K_{\delta I}(\delta I_i, \delta I_k) - 2\sum_{i=1}^{m} l_i(\vec{r}) K_{\delta W,\delta I}(\delta I_i, \delta W(\vec{r})) +$$

$$+ \sigma_{\delta W}^2(\vec{r}) + \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} l_i(\vec{r}) l_k(\vec{r}) K_x(x_i, x_k) = \sigma^2.$$

Дифференцируя это выражение по компонентам $l_j(\vec{r})$ вектора \hat{L} и приравнивая нулю частные производные, получаем систему из *m* уравнений с *m* неизвестными. Решая эту систему уравнений, определяем *m* компонент преобразования $\hat{L}(\vec{r})$, для которого $\sigma^2 = \min$. Таким образом, восстановленное поле энерговыделения будет определяться выражением

$$W(\vec{r}) = \overline{W}(\vec{r}) + \sum_{j=1}^{m} l_j(\vec{r}) \Big(\delta I_j + x_j \Big).$$

Отметим важный момент: коэффициенты $l_j(\vec{r})$ зависят только от вышеперечисленных корреляционных моментов, координат датчиков и координаты точки, где необходимо определить поле энерговыделения, но не зависят от показаний детекторов.

Применительно к восстановлению поля энерговыделения в реакторе РБМК-1000 этот общий подход конкретизируется следующим образом. Так как в состав системы ВРК реактора РБМК входят датчики двух типов – контроля энерговыделения по радиусу активной зоны (ДКЭР) и по высоте (ДКЭВ), то алгоритм восстановления поля энерговыделения можно разбить на два этапа.

На первом этапе на внешней ЭВМ проводится физический расчет реактора, учитывающий состав загрузки на данный момент времени. Причем при проведении физического расчета с помощью задания положения органов регулирования стараются смоделировать макроход поля энерговыделения такой, какой обычно встречается при эксплуатации реактора. Затем результаты этого физического расчета корректируются на реальное положение органов регулирования в реакторе на данный момент времени. Таким образом, определяют так называемое расчетное распределение энерговыделения $W_p(\vec{r})$ во всех ТВС. С другой стороны, в данный момент времени известных коэффициентов, учитывающих выгорание датчика, выгорание ТВС и другие факторов, переводят в значения энерговыделения в местах расположения датчиков, т.е.

$$W_{\mathrm{II}}(\vec{r}_j) = k_j I_j \,,$$

где I_j – ток *j*-го датчика, МкА; k_j – переводной коэффициент, МВт/мкА.

Для всех ДКЭР рассчитывается отношение

$$V_{j}^{\pi} = \frac{W_{\pi}(\vec{r}_{j})}{W_{p}(\vec{r}_{j})}, \quad j = 1, ..., N.$$

Таким образом, в рассмотрение введена новая величина V_j^{A} . Очевидно, что введение этой величины обусловлено стремлением «регуляризировать» восстанавливаемую величину, т.е. сгладить функцию перед интерполяцией. Действительно, поскольку в реакторе РБМК идет процесс непрерывных перегрузок топлива, то в активной зоне одновременно находятся как «свежие», так и сильно выгоревшие ТВС, и мощности их могут отличаться на 200 – 300 %. Интерполировать такую резко меняющуюся функцию трудно. В то же время распределение, полученное по физическому расчету, отражает основные закономерности, связанные с различной глубиной выгорания топлива, поэтому V_j^{π} будет гладкой функцией. Отношение V_j^{π} аппроксимируется на все ТВС с помощью метода наименьших квадратов зависимостью вида

$$\tilde{V}(\vec{r}) = a_1 r_j^3 + a_2 r_j^2 + a_3 + a_4 (r_j + a_5 r_j^2) \sin \varphi_j + a_6 (r_j + a_7 r_j^2) \cos \varphi_j.$$

Функция $\tilde{V}(\vec{r})$ является, по существу, математическим ожиданием отношения V_j^{π} . Тогда величина отклонения от математического ожидания, нормированная на его величину, является случайной величиной, т.е.

$$\overset{\circ}{V}_{\pi} = rac{V_{j}^{\pi} - \tilde{V}(\vec{r}_{j})}{\tilde{V}(\vec{r}_{j})} -$$
случайная величина.

Величина $V_{\rm d}$ известна в местах расположения датчиков, для интерполяции ее на ТВС, не содержащих датчики, используется алгоритм оптимальной статистической интерполяции:

$$\overset{\circ}{V_j} = \sum_{m=1}^4 dm_j \, V_m^{\scriptscriptstyle \Pi} \, ,$$

где V_m^{Λ} берутся для четырех ближайших ТВС и ДКЭР, а коэффициенты dm_j определены заранее, исходя из требований минимальной дисперсии ошибки восстановления поля. Коэффициенты dm_j зависят только от статистических свойств \mathring{V}_j , а не от самой этой величины. Мощность *j*-й ТВС в итоге рассчитывается по формуле:

$$W\left(\vec{r}_{j}\right) = \left\{ \left(\sum_{m=1}^{4} dm_{j} V_{m}^{\mathrm{A}}\right) \tilde{V}_{j} + \tilde{V}_{j} \right\} W_{p}\left(\vec{r}_{j}\right).$$

Определенная таким образом мощность тепловыделяющей сборки используется в дальнейшем для расчета важных технологических параметров, например таких, как энерговыработки TBC, запаса до кризиса теплообмена и др.

Помимо знания мощности TBC, существенный интерес представляет собой информация о распределении поля энерговыделения по высоте реактора, так как это позволяет определить линейную нагрузку, являющуюся одним из лимитирующих параметров. С этой целью в активной зоне реактора РБМК устанавливаются датчики контроля энерговыделения по высоте (ДКЭВ). ДКЭВ представляет собой протяженный датчик, длина которого равна высоте активной зоны, состоящий из четырех секций. Каждая из секций дает сигнал, пропорциональный интегральному значению плотности потока нейтронов в месте расположения секции. Современная система контроля ректора РБМК состоит из двух комплектов ДКЭВ, по 72 датчика в каждом.

На втором этапе проводится восстановление аксиального распределения энерговыделения для каждой ТВС, которое принципиально сводится к аппроксимации показаний датчиков функцией вида

$$\varphi(z) = \sum_{k=1}^{n_a} B_k \sin \frac{\pi z k}{H}, \qquad (5.2.2)$$

где n_a – количество гармоник, выбор которого зависит от числа работоспособных секций ДКЭВ. Коэффициенты аппроксимации определяются по методу наименьших квадратов.

Погрешность восстановления поля энерговыделения в реакторах РБМК составляет величину ~ 4 %.

5.3. Методика и алгоритм восстановления полей энерговыделения в реакторах типа CANDU

Система контроля энерговыделения реактора CANDU-600 содержит около 100 ванадиевых и 28 платиновых детекторов. Сигнал ванадиевых детекторов образует входной массив данных для программы восстановления нейтронного поля, которая выполняется каждые две минуты на ЭВМ, работающей в режиме on-line. Результаты программы восстановления поля используют частично для калибровки 28 безынерционных платиновых детекторов, сигналы от которых в свою очередь поступают в ЭВМ для вычисления управляющих сигналов 14 ЛАР, регулирующих мощность и нейтронное поле. Теоретической предпосылкой методики восстановления поля является предположение о том, что плотность потока нейтронов в произвольной точке **r** активной зоны может быть выражена как линейная комбинация действительных форм плотности потока, возникающих при эксплуатации реактора (так называемые «гармоники потока»):

$$\Phi(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^{s} A_j \Phi_j(\mathbf{r}), \qquad (5.3.1)$$

где $\Phi_j(\mathbf{r})$ – значение плотности потока в точке **r** для гармоники Φ_j .

В местах расположения детекторов

$$\Phi(\mathbf{r}_{\mathrm{I}}) = \sum_{j=1}^{s} A_{j} \Phi_{j}(\mathbf{r}_{\mathrm{I}}).$$
(5.3.2)

Уравнение (21.2) можно записать в виде

$$\begin{cases} D_1 = M_{11}A_1 + \dots + M_{1S}A_S; \\ \dots; \\ D_R = M_{R1}A_1 + \dots + M_{RS}A_S, \end{cases}$$
(5.3.3)

где $D_d (1 \le d \le R)$ – плотность потока, измеряемая детектором К; M_{Kj} – ожидаемое показание детектора К для $\Phi_j (\Phi_j, 1 \le j \le S, -$ гармоника потока); A_j – неизвестные коэффициенты.

Для технологических каналов, в которых требуется восстановление поля, можно записать:

$$\begin{pmatrix} F_1 = N_{11}A_1 + \dots + N_{1S}A_S; \\ \dots; \\ F_m = N_{m1}A_1 + \dots + N_{mS}A_S, \end{cases}$$
(5.3.4)

где F_i ($1 \le i \le m$) – плотность потока в *i*-м ТК; N_{ij} – значение плотности потока, ожидаемое в *i*-м ТК для гармоники Φ_j .

В матричной форме уравнения (5.3.3) и (5.3.4) имеют вид

$$D = MA; \qquad (5.3.5)$$

$$F = NA . \tag{5.3.6}$$

В системе (5.3.5) уравнений больше, чем неизвестных, так как детекторов больше, чем гармоник плотности потока (R > S).

Найдем неизвестные коэффициенты А по МНК:

$$A = \left(M^{\mathrm{T}}M\right)^{-1} M^{\mathrm{T}}D.$$
 (5.3.7)

Тогда искомый вектор плотности потока нейтронов

$$F = N \left(M^{\mathrm{T}} M \right)^{-1} M^{\mathrm{T}} D = NHD.$$
 (5.3.8)

Элементы матриц *M* и *N*, называемые коэффициентами связи, так как они выражают степень связи между различными гармониками плотности потока и координатами детекторов и ТК, определяются заранее при моделировании ожидаемых действительных гармоник плотности потока.

Восстановленная плотность в технологическом канале определяется как

$$F_{i} = \sum_{j} N_{ij} A_{j} = \sum_{j} N_{ij} \left[\sum_{k} \left(M^{\mathrm{T}} M \right)_{ik}^{-1} M_{ki}^{\mathrm{T}} D_{k} \right] = \sum_{k} Y_{ij} D_{k}, \quad (5.3.9)$$

где

$$Y_{ik} = \sum_{j} N_{ij} \left(M^{\mathrm{T}} M \right)_{ik}^{-1} M_{ki}^{\mathrm{T}}.$$
 (5.3.10)

Отсюда погрешность σ_i в вычислении F_i выражается следующей формулой:

$$\sigma_i = \left[\sum_k \left(Y_{ik}^2 \sigma_k^2 + D_k \sigma_{Y_{ik}}^2\right)\right]^{1/2}.$$
(5.3.11)

Таким образом, погрешность σ_i зависит от погрешности детектора σ_k и от разброса $\sigma_{Y_{ik}}$ в элементах матрицы Y_{ik} , которая, в свою очередь, зависит от точности, с которой моделируются гармоники плотности потока.

На практике основной вклад в погрешность определяется членом $\sum_{k} Y_{ik}^2 \sigma_k^2$, который может быть уменьшен соответствующим

выбором матрицы $H = \left(M^{T}M\right)_{ik}^{-1}M_{ki}^{T}$, учитывающей конкретное положение регулирующих органов.

5.4. Восстановление параметров при частично утраченной измерительной информации

5.4.1. Оценка информационной избыточности системы контроля ядерного реактора

Современные системы контроля сложных технических систем характеризуются наличием большого числа подсистем, решающих свои конкретные задачи. Например, в ядерном реакторе типа РБМК существуют системы физического контроля за распределением энерговыделения (СФКРЭ), температурой графитовой кладки, расходом теплоносителя через каналы, система контроля за целостностью технологических каналов, система контроля герметичности оболочек тепловыделяющих элементов (система КГО) и др. Вместе с тем, параметры реактора, контролируемые этими системами, связаны друг с другом, поскольку описывают один и тот же объект. Например, распределение энерговыделения по активной зоне и расходы теплоносителя через каналы в значительной степени определяют температуру графитовой кладки. Другой пример – система КГО, которая помимо решения своей основной задачи – фиксации активности теплоносителя, обусловленной продуктами деления, вышедшими при разгерметизации тепловыделяющего элемента, дает возможность определить наведенную активность теплоносителя за счет активации ядер кислорода быстрыми нейтронами. Уровень этой активности зависит от мощности топливного канала и расхода теплоносителя через него.

Таким образом, существует некоторая информационная избыточность, которую можно количественно оценить и определить возможные пути ее использования.

Рассмотрим один из возможных подходов к решению этой задачи на примере трех систем: системы контроля за мощностью топливного канала, системы контроля за расходом теплоносителя и системы КГО. Поскольку последняя система играет в рассмотрении особую роль, вкратце опишем ее работу [14].

Проходя через активную зону, водный теплоноситель активируется быстрыми нейтронами. При этом протекают реакции

 16 O(*n*, *p*) 16 N₇, 17 O(*n*, *p*) 17 N₇, первая из которых вносит наибольший вклад в наведенную активность.

Эта реакция протекает на быстрых нейтронах с энергией более 9,638 МэВ с образованием радионуклида ¹⁶ N ($T_{1/2} = 7,11$ с), испускающего гамма-кванты с энергиями 6,13; 7,11 и 2,75 МэВ:

$$^{16}_{7}$$
N $\rightarrow ^{16}_{8}$ O + β + γ

Сечение активации, усредненное по спектру деления, составляет 0,019·10⁻³¹ м². Сечение при энергии E = 14,5 МэВ, соответственно, $4,0\cdot10^{-30}$ м².

Принципиальная схема детектирования изображена на рис. 5.1.

Рис. 5.1. Принципиальная схема системы поканальной КГО: *I* – пароводяная коммуникация; *2* – сдвоенные детекторы



Пароводяные коммуникации (ПВК) после выхода из реактора группируются в так называемые нитки, каждая из которых содержит по 115 ПВК, всего таких ниток 16. Нитки расположены параллельно друг другу. Восемь сдвоенных коллиматоров с блоками детектирования устанавливаются на тележках и передвигаются в коробах вдоль вертикально расположенных рядов ПВК. При движении детекторы регистрируют у-кванты от трубопровода, напротив которого находится в данный момент коллимационное отверстие. Сигналы по кабелям подаются на сигнально-измерительную аппаратуру. Тележка может передвигаться с быстрой и медленной скоростью. При быстром проезде тележки нитка сканируется за время около 5 мин, а при медленном за 30 мин. Можно остановить тележку на постоянный контроль около ПВК нужного канала. Понятно, что наведенная активность зависит от величины плотности потока быстрых нейтронов, следовательно, от мощности, а в точке измерения активности - от времени доставки, т.е. при известном расстоянии - от расхода теплоносителя.

Располагая информацией о мощности каждого канала (W), расходе через него (G) и наведенной активности (N), можно определить следующие плотности распределения: f(N, P) – совместные плотности распределения азотной активности и какого-либо из двух параметров (расхода при P = G или мощности канала при P = W); $f_1(N)$ – плотность распределения азотной активности; $f_2(P)$ – плотность распределения соответствующего параметра.

Тогда оценку взаимной информации можно произвести, используя меру Шеннона, по следующей формуле:

$$I_{N\leftrightarrow P} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(N,P) \log_2 \frac{f(N,P)}{f_1(N)f_2(P)} dNdP =$$

=
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(N,P) \log_2 \frac{f(P|N)}{f_2(P)} dNdP,$$
 (5.4.1)

где f(P|N) – условная плотность распределения параметра P.

В случае нормальных законов распределения можно записать, что

$$f(P|N) = \frac{1}{\sigma_P \sqrt{1 - r_{NP}^2} \sqrt{2\pi}} \exp^{-\frac{1}{2(1 - r_{NP}^2)} \left(\frac{P - m_P}{\sigma_P} - r_{NP} \frac{N - m_N}{\sigma_N}\right)_2}; (5.4.2)$$

$$f_2(P) = \frac{1}{\sigma_P \sqrt{2\pi}} \exp^{-\left(\frac{P-m_P}{\sigma_P \sqrt{2}}\right)_2}.$$
 (5.4.3)

Используя формулы (5.4.1) – (5.4.3), нетрудно получить

$$I_{N\leftrightarrow P} = \log_2 \frac{1}{\sqrt{1 - r_{NP}^2}},$$
 (5.4.4)

где r_{NP} – коэффициент корреляции между азотной активностью и соответствующим параметром (мощностью либо расходом).

Таким образом, в случае нормальных законов распределения исследуемых параметров для оценки взаимной информации достаточно знать соответствующие коэффициенты корреляции.

Для практической проверки данного подхода авторы располагали результатами сканирования азотной активности реактора РБМК- 1000 на Курской АЭС и РБМК-1500 на Игналинской АЭС, а также соответствующими файлами состояния, содержащими значения поканальных мощностей и расходов для каждой из ниток. На рис. 5.4.2 и 5.4.3 показаны гистограммы распределения, соответствующие плотностям распределения f(G), f(W).



Рис. 5.2. Гистограмма распределения расхода



Рис. 5.3. Гистограмма распределения мощности 349

Оценки показывают, что при уровне значимости $\alpha = 0,05$ законы распределения можно считать нормальными.

В табл. 5.1 приведены результаты расчета взаимной информации азотной активности и теплотехнических параметров канала (поканальной мощности и расхода) при различных уровнях мощности работы реактора и при различных временных срезах.

Таблица 5.1

<i>I_{NP}</i> , бит	КАЭС, <i>W</i> _P = 3200 MBт		ИАЭС			
			$W_{\rm P} =$	$W_{\rm P} =$	$W_{\rm P} =$	$W_{\rm P} =$
			= 3850 МВт	= 2347 МВт	= 2000 МВт	= 1000 МВт
	03.04.00	14.04.00	28.04.95	16.05.95		
I_{NG}	0,124	0,105	0,269	0,472	0,457	0,713
I_{NW}	0,083	0,063	0,083	0,409	0,349	0,602

Количество информации в азотной активности относительно мощности канала и расхода теплоносителя через него

Анализируя данные табл. 5.1 для Игналинской АЭС, видно, что с ростом мощности реактора информативность азотной активности о мощности и расходе падает. Зависимость количества информации от мощности канала, рассчитанная по данным четвертого блока Курской АЭС, приведена на рис. 5.4.

Приведенные оценки позволяют сделать лишь общие выводы о возможности использования избыточности информации для определения значения того или иного параметра в различных режимах работы реактора. Например, при работе на номинальной мощности W = 3200 МВт более перспективным является восстановление по измеренной азотной активности расхода, а не мощности канала.

Для решения же конкретной задачи, например, восстановления значения расхода теплоносителя в неработающих расходомерах по сканированию азотной активности, необходимо разработать соответствующую математическую модель.







Количество информации, бит

5.4.2. Определения расхода теплоносителя через топливный канал на основе информации об активности теплоносителя

Математическая модель активации теплоносителя. Математическая модель должна максимально полно учитывать все существенные особенности активации теплоносителя при прохождении через активную зону и при движении по пароводяной коммуникации [1, 7, 11, 16, 18, 22]. При ее формировании необходимо учитывать следующие факторы.

1. Возможность активации теплоносителя не только быстрыми нейтронами самого исследуемого канала, но и быстрыми нейтронами ячеек ближайшего окружения. Дело в том, что по результатам сканирования оказалось, что активность теплоносителя в каналах с дополнительными поглотителями составляет ≈ 7 % от активности топливного канала. Результаты численного исследования полиячейки РБМК по программе ГЕТЕРА показали, что доля прямопрострельных быстрых нейтронов окружения также составляет порядка той же величины, что и обусловило принятие данного решения.

2. Использование в качестве теплогидравлического блока, необходимого для расчета распределения плотности теплоносителя по высоте канала и длине ПВК, аналога известной апробированной программы ГИДРА.

3. Детальный баланс образования ядер азота в жидкой и паровой фазе теплоносителя с учетом проскальзывания фаз.

Далее приводится математическая модель, полученная исходя из рассмотрения баланса ядер азота в элементарном объеме активной зоны и пароводяной коммуникации:

$$\begin{aligned} \frac{dq'_N}{dz} &= -\left(\frac{\lambda}{\omega'} + \frac{W}{H\rho' r S(1-\phi)\omega'}\right)q'_N + A(W+\alpha \overline{W}_0)S\rho'(1-\phi);\\ \frac{d}{dz}q''_N &= -\frac{\lambda q''_N}{\omega''} + \frac{q'_N}{S(1-\phi)\omega'}\frac{W}{Hr\rho'};\\ q'_N(z=z_0) &= q'_{NZ0};\\ q'_N(z=z_0) &= q'_{NZ0};\\ z_0 &\leq z \leq H; \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dz}q'_{N} = -\frac{\lambda q'_{N}}{\omega'};\\ \frac{d}{dz}q''_{N} = -\frac{\lambda q''_{N}}{\omega''};\\ q'_{N}(H) = q'_{NH};\\ q''_{N}(H) = q''_{NH};\\ H \leq z \leq H + L, \end{cases}$$

где N', q' – концентрация и плотность потока ядер азота в жидкой фазе теплоносителя соответственно, м⁻³; N'', q'' – концентрация и плотность потока ядер азота в паровой фазе теплоносителя соответственно, м⁻³; z – координата по высоте АЗ и ПВК, м; S – проходное сечение ТК или ПВК, м²; W – мощность ТК, МВт; $\overline{W_0}$ – средняя мощность окружения ТК, МВт; $\lambda = 0,101 \text{ c}^{-1}$ – постоянная распада ядер азота; ρ' – плотность воды на линии насыщения, кг/м³; ρ'' – плотность пара на линии насыщения, кг/м³; G – массовый расход, кг/с; ω' – скорость жидкой фазы, м/с; ω'' – скорость паровой фазы, м/с; $K_{\bullet} = \frac{\omega''}{\omega'}$ – коэффициент проскальзывания пара; φ – истинное объемное паросодержание; r – удельная теплота парообразования, Дж/кг; q_l – линейная нагрузка, Вт/м; $\tilde{\rho}$ – плотность недогретой воды, кг/м³; H – высота АЗ, м; L – длина ПВК, м; z_0 – координата точки начала кипения теплоносителя, м; $\alpha = 0,07$ – доля быстрых нейтронов из соседних каналов (окружения).

Скорости фаз можно определить, зная расход теплоносителя

$$G = \rho'\omega' S(1-\varphi) + \rho''\omega''S\varphi = \rho'\omega' S(1-\varphi) + \rho''\omega'K_{nm}S\varphi =$$

= $\omega'S[\rho'(1-\varphi) + \rho''\varphi K_{nm}].$

Отсюда находим скорости фаз:

$$\omega' = \frac{G}{S[\rho'(1-\varphi) + \rho''\varphi K_{nm}]};$$

$$\omega'' = K_{\bullet}\omega' = \frac{GK_{\bullet}}{S[\rho'(1-\varphi) + \rho''\varphi K_{\bullet}]},$$

где $\rho', \rho'', \rho, \phi, K_{\bullet}, r$ определяются из теплогидравлических расчетов.

Система уравнений решается относительно q'_N и q''_N потоков азота в жидкой и паровой фазах соответственно. Концентрации азота находятся непосредственно из соотношений $N' = \frac{q'_N}{S\omega'}$ и

 $N'' = \frac{q_N''}{S\omega''}$, и «модельная» концентрация азота определяется соотношением $N_{\rm M} = N' + N''$ (азотная активность есть $\lambda N_{\rm M}$).

Сравнивая по какому-либо алгоритму экспериментальные значения концентрации азота N_3 и $N_{\rm M}(G, W)$, можно при известном расходе восстановить мощность и наоборот.

Исследование чувствительности математической модели к изменению расхода и мощности. Результаты исследования чувствительности математической модели показаны на рис. 5.5 и 5.6, где отражена зависимость концентрации азота в точке измерения от расхода через канал при различных мощностях и от мощности при различных расходах. Из рисунков видно, что в режиме, близком к номинальному, математическая модель обладает большей чувствительностью по отношению к изменению расхода теплоносителя, что согласуется с информационными оценками.

Вместе с тем, простое решение уравнения $N_9 = N_M(W, G)$ относительно G вряд ли привело бы к успеху. Дело в том, что предлагаемая математическая модель, как и любая другая, не может учесть все факторы. Например, конструктивные особенности каждого канала и ПВК: проходные сечения могут отличаться как в пределах допусков при изготовлении, так и за счет возможных отложений при эксплуатации, длины участков и характер их размещения могут не соответствовать «среднему» и т.д. Иными словами, созданная математическая модель требует адаптации.



Рис. 5.5. Зависимость концентрации азота в точке измерения от расхода через канал



Рис. 5.6. Зависимость концентрации азота в точке измерения от мощности топливного канала

Алгоритм адаптации. Один из возможных алгоритмов адаптации заключается в следующем. Пусть в момент времени t известна достоверная информация о расходах $G_{i_3}^t$ и мощностях $W_{i_3}^t$ каждого из каналов и системой КГО произведено сканирование активной зоны на предмет получения азотной активности $N_{i_3}^t$. По математической модели рассчитывается значение $N_{i_M} = f(G_{i_3}^t, W_{i_3}^t)$ и находится отношение $k_i = \frac{N_{i_3}}{N_{i_M}}$. Пусть восстановление расходов производится в момент времени $\tau = t + \Delta t$, при этом известны мощности каналов $W_{i_3}^{\tau}$ и значение азотной активности $N_{i_3}^{\tau}$, тогда расход теплоносителя $G_{i_B}^{\tau}$ в каждом канале находится из соотношения $N_{i_3}^{\tau} = k_i \cdot f(W_{i_3}^{\tau}, G_{i_B}^{\tau})$ (здесь приводится только идея подхода, детали, связанные с нормировкой, учетом фона, численным решением и т.д., опущены).

Сравнение восстановленных расходов со значениями расходов, даваемыми штатными программами контроля («Призма»), приведены в табл. 5.2 и 5.3.

Таблица 5.2

№ нитки	σ_{cp} без адаптации	σ_{cp} с адаптацией
1	11,657	6,632
2	14,607	7,319
3	12,563	5,423
4	14,786	5,742
5	14,724	6,286
6	18,059	5,659
7	16,102	5,820
8	13,858	8,157
9	16,255	10,351
10	16,505	6,824
11	14,159	5,325
12	20,000	6,220
13	13,764	5,223

Средняя относительная погрешность восстановления расхода σ_{ср} (четвертый блок Курской АЭС)

Окончание табл. 5.2

№ нитки	σ_{cp} без адаптации	σ_{cp} с адаптацией
14	15,735	6,177
15	14,588	6,015
16	16,447	7,521
Среднее значение	σ _{ср} без адаптации = 15,228	σ_{cp} с адаптацией = 6,592

Таблица 5.3

Средняя относительная погрешность восстановления расхода (второй блок Игналинской АЭС)

№ нитки	σ_{cp} без адаптации	σ_{cp} с адаптацией
1	13,0	6,539
2	10,778	6,361
3	9,946	4,715
4	10,909	4,843
5	11,877	6,627
6	10,098	7,116
7	10,323	4,326
8	15,367	7,082
9	18,347	10,520
10	13,698	7,114
11	12,972	6,100
12	12,420	8,216
13	10,919	6,598
14	11,288	9,052
15	11,891	6,089
16	13,637	7,694
Среднее значение	σ _{ср} без адаптации =12,347	σ_{cp} с адаптацией = 6,824

Если считать, что модель адаптировалась по достоверным значениям расхода и система контроля реактора на втором временном срезе дает верные значения, то погрешность восстановления в среднем по активной зоне до адаптации и после адаптации составляет величину 15,3 и 6,6 % для четвертого блока Курской АЭС и 12,3 и 6,8 % для второго блока Игналинской АЭС.

На рис. 5.7 – 5.8 показаны гистограммы относительного отклонения восстановленных расходов от измеренных как для одной нитки, так и для всех ниток активной зоны ИАЭС и КАЭС. Из приведенных гистограмм видно, что адаптация модели существенно сужает разброс.



Рис. 5.7. Распределение относительной ошибки восстановления расхода (второй блок ИАЭС, нитка 1)



Рис. 5.8. Распределение относительной ошибки восстановления расхода (второй блок ИАЭС, нитки 1 — 16)

Оценка информационной емкости модели. Представляет интерес оценка количества информации, содержащейся в математической модели относительно экспериментально измеренной азотной активности как до, так и после адаптации. В табл. 5.4 представлены соответствующие результаты.

Взаимная	Курска	ая АЭС	Игналинская АЭС		
информация,	<i>W</i> = 3200 MBт	<i>W</i> = 3200 MBт	<i>W</i> = 2347 MBт	<i>W</i> = 3850 MBт	
бит	03.04.2000	14.04.2002	16.05.1995	28.04.1995	
$N_{\mathfrak{I}} \longleftrightarrow N_{_{\mathbf{M}}}$	0,303	0,294	0,937	0,519	
$N_{\mathfrak{H}} \leftrightarrow N_{\mathfrak{a} \mathfrak{g} \mathfrak{a} \mathfrak{n} \mathfrak{r}}$	_	1,174	_	0,867	

Количество информации об азотной активности, содержащейся в математической модели

В первой строке табл. 5.4 приведены данные о количестве информации, содержащиеся в математической модели относительно экспериментально измеренной азотной активности до адаптации математической модели, а во второй строке – после адаптации. Из таблицы видно, что адаптация модели увеличивает ее информационную емкость, что подтверждается приведенными выше оценками по погрешностям восстановления расходов.

Таким образом, использование оценок взаимной информации о параметрах объекта позволяет определить группы параметров, взаимная информация, содержащаяся в которых, может быть использована при разработке новых, отличных от штатных, средств контроля, что, в свою очередь, означает повышение уровня безопасности эксплуатации объекта.

5.4.3. Анализ информативности сигналов точечных и протяженных датчиков контроля физических полей

При вычислении переменных состояния объектов управления с распределенными параметрами находят применение различные алгоритмы обработки измерительной информации, обеспечивающие разный уровень точности при обработке одних и тех же входных данных [23]. С точки зрения теории информации это означает, что содержащееся в сигналах датчиков первоначальное количество информации в каждом алгоритме определяется по определенному закону.

В связи с этим целесообразно выяснить, какой алгоритм позволяет извлечь из исходных данных максимум полезной информации о рассматриваемом физической процессе, как соотносятся информационный и точностной критерии, возможно ли на основе их со-
вместного использования создание еще более совершенных алгоритмов и т.д., т.е. решить ряд проблем, связанных с применением положений и выводов теории информации а задачах восстановления физических полей.

Проведем сравнительный анализ количества информации от точечных и протяженных датчиков, поскольку их сигналы вследствие разных принципов замера – точечного и интегрального – обладают неодинаковой ценностью для алгоритмов обработки.

Не ограничивая общности, рассмотрим одномерный случай, например, процесс измерения высотного распределения некоторой физической величины X(z). Пусть

$$X(z_1) + Y(z_1), X(z_2) + Y(z_2), ..., X(z_n) + Y(z_n)$$
 (5.4.5)

есть последовательность отсчетов точечных датчиков, а

$$X(z_1) + Y(z_1), X(z_2) + Y(z_2), ..., X(z_n) + Y(z_n) - (5.4.6)$$

последовательность отсчетов протяженных датчиков (расположение датчиков изображено на рисунке).

Предположим, что X(z) и погрешность ее измерения Y(z) представляют собой нормальные случайные процессы, причем Y(z) одинакова для точечных и протяженных датчиков. Требуется определить количество информации в последовательностях (5.4.5) и (5.4.6) относительно последовательности

$$X(z_1^*), X(z_2^*), ..., X(z_m^*),$$
 (5.4.7)

причем z_i^* может совпадать или не совпадать с любым из z_i . Это означает, что определяется информативность сигналов точечных и протяженных датчиков об исходном анализируемом процессе X(z).

Количество информации в последовательности (5.4.5) относительно последовательности (5.4.7) определяется формулой:

$$I_{X+Y\leftrightarrow X} = 0,5\log\frac{\det A_x \det A_{X+Y}}{\det A_{X(X+Y)}},$$
(5.4.8)

где корреляционная матрица последовательности $\left\{X(z_j^*)\right\}$

$$A_X = \left\| R_X(z_j^*, z_k^*) \right\|; \quad j = 1, 2, ..., m;$$

$$A_{X+Y} = \left\| R_X(z_i, z_l) + R_{YX}(z_i, z_l) + R_{XY}(z_i, z_l) + R_Y(z_i, z_l) \right\|;$$

$$i = 1, 2, ..., n; \quad l = 1, 2, ..., n.$$

В частных случаях могут быть получены сравнительно простые аналитические формулы, удобные для анализа количества информации от точечных и протяженных датчиков. Так, если требуется найти количество информации о X(z) в точке $z + \Delta z$ в отсчете X(z) + Y(z), то из соотношения (4.5.8) имеем ($\overline{X} = 0$):

$$\det A_{X} = \sigma_{X}^{2}(z + \Delta z);$$

$$\det A_{X+Y} = \sigma_{X}^{2}(z) + \sigma_{Y}^{2} + 2R_{XY}(z + \Delta z, z);$$

$$\det A_{X(X+Y)} = \sigma_{X}^{2}(z + \Delta z)[\sigma_{X}^{2}(z) + \sigma_{Y}^{2}(z) + R_{XY}(z, z) + R_{YX}(z, z)] - [R_{X}(z, z + \Delta z) + R_{YX}(z, z + \Delta z)][R_{X}(z, z + \Delta z) + R_{XY}(z, z + \Delta z)].$$
(5.4.9)

Предположив, что процессы стационарны и стационарно связаны, получим:

$$I_{X+Y\leftrightarrow Y} = 0.5\log \frac{\sigma_X^2 [\sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + 2R_{XY}(\Delta z)]}{\sigma_X^2 [\sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + 2R_{XY}(0)] - [R_X(\Delta z) + R_{XY}(\Delta z)]^2}$$

При выводе аналогичной формулы для протяженных датчиков учтем, что интегральный принцип замера приводит к получению значений не самой случайной величины X(z) с некоторой погрешностью Y(z), а ее осредненного значения

$$\int_{l} X(z)dz + Y(z),$$

где *l* – длина датчика. В результате существенно меняются статистические свойства случайной последовательности

$$\left\{ \int_{l_i} X(z) dz + Y(z_i) \right\} = \left\{ \overline{X}(z_i) + Y(z_i) \right\}$$

по отношению к свойствам последовательности отсчетов точечных датчиков $\{X(z_i) + Y(z_i)\}$. Так, отношения (5.4.9) для последовательности $\{\overline{X}(z_i) + Y(z_i)\}$ приобретает вид

$$\det A_{X} = \sigma_{X}^{2}(z + \Delta z);$$

$$\det A_{\overline{X}+Y} = \sigma_{\overline{X}}^{2}(z) + \sigma_{Y}^{2} + 2R_{\overline{X}Y}(z + \Delta z, z);$$

$$\det A_{X(\overline{X}+Y)} = \sigma_{X}^{2}(z + \Delta z)[\sigma_{\overline{X}}^{2}(z) + \sigma_{Y}^{2}(z) + R_{\overline{X}Y}(z, z) + R_{Y\overline{X}}(z, z)] - [R_{\overline{X}}(z, z + \Delta z) + R_{Y\overline{X}}(z, z + \Delta z)][R_{\overline{X}}(z, z + \Delta z) + R_{\overline{X}Y}(z, z + \Delta z)].$$
(5.4.10)

Выведенная на основе (5.4.10) формула для количества информации имеет следующий вид:

$$I_{\bar{X}+Y\leftrightarrow Y} = 0,5\log \frac{\sigma_X^2 [\sigma_{\bar{X}}^2 + \sigma_Y^2 + 2R_{\bar{X}Y}(\Delta z)]}{\sigma_X^2 [\sigma_{\bar{X}}^2 + \sigma_Y^2 + 2R_{\bar{X}Y}(0)] - [R_{\bar{X}}(\Delta z) + R_{\bar{X}Y}(\Delta z)]^2}.$$
 (5.4.11)

Оценим информацию от точечных и протяженных детекторов в местах расположения датчиков ($\Delta z = 0$) при следующих значениях статистических характеристик:

$$\sigma_X^2 = 3\sigma_{\bar{X}}^2; \quad \sigma_Y^2 = \frac{1}{3}\sigma_X^2; \quad ; \quad R_{XY}(0) = \frac{1}{3}\sigma_X^2; \\ R_{\bar{X}}(0) = \sigma_{\bar{X}}^2; \quad R_{\bar{X}Y}(0) = \frac{1}{3}R_{XY}(0).$$

При этом учтем, что дисперсия и корреляционная функция исходного случайного процесса обычно в несколько раз превышают дисперсии и корреляционную функцию $\sigma_{\bar{X}}^2, R_{\bar{X}}, R_{\bar{X}Y}$ локально осредненного процесса $\{\bar{X}(z_i) + Y(z_i)\}$. Тогда

$$I_{X+Y\leftrightarrow Y} = 0,5 \log_2 9 = 1,585;$$

 $I_{\overline{X}+Y\leftrightarrow Y} = 0,5 \log_2 1,28 = 0,174,$

т.е.

$$I_{X+Y\leftrightarrow Y} > I_{\overline{X}+Y\leftrightarrow Y}.$$

Вариации статистических характеристик $\sigma_X^2, \sigma_Y^2, R_X, ...$ также приводят к аналогичному соотношению: $I_{X+Y\leftrightarrow Y}$ всегда больше $I_{\overline{X}+Y\leftrightarrow Y}$, причем количество информации, снимаемое с точечных датчиков, значительно увеличивается по сравнению с протяженными при усилении корреляционных связей. Таким образом, вследствие локального осреднения измеряемого случайного процесса протяженными датчиками и ослабления корреляционных связей в последовательности их отсчетов сигналы протяженных датчиков оказываются менее информативными, чем сигналы точечных детекторов. Однако это не означает, что на практике нецелесообразно использовать протяженные детекторы. Напротив, в тех случаях, когда высокочастотные спектральные составляющие представлены нежелательным шумом, только его осреднение протяженными датчиками позволяет увеличить точность восстановления физических полей.

5.4.4. Информационный подход к оптимизации количества и расположения датчиков внутриреакторного контроля

Как уже отмечалось, контроль распределения энерговыделения в активной зоне на основе показаний внутриреакторных датчиков играет важную роль в обеспечении безопасности и экономичности эксплуатации ядерного энергетического реактора. В данном разделе [10, 19, 20] описывается применение информационного подхода для определения количества датчиков и способа их размещения в активной зоне. Исследования проводились на одномерной модели ядерного реактора, для описания распределения плотности потока нейтронов использовалось одногрупповое уравнение диффузии для плоского одномерного реактора. Система датчиков состоит из нескольких точечных датчиков, показания которых моделировались путем внесения в расчетные значения поля нейтронов погрешности, распределенной по нормальному закону.

Информативностью системы датчиков, расположенных в точках с координатами $y_1, ..., y_n$, назовем количество информации о плотности потока нейтронов X в точке активной зоны с координатой x, содержащееся в показаниях $\{Y_1, ..., Y_n\}$ системы датчиков:

$$I_{X \leftrightarrow Y_1, \dots, Y_n} = H(X) + H(Y_1, \dots, Y_n) - H(X, Y_1, \dots, Y_n) . \quad (5.4.12)$$

В выражении (5.4.12) H(X), $H(Y_1, ..., Y_n)$, $H(X, Y_1, ..., Y_n)$ – энтропии соответствующих систем, вычисляемые по формулам:

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{N} p_i \log p_i , \qquad (5.4.13)$$

$$H(Y_1, ..., Y_n) = -\sum_{i_1=1}^N ... \sum_{i_n=1}^N p_{i_1...i_n} \log p_{i_1...i_n} , \qquad (5.4.14)$$

$$H(X, Y_1, ..., Y_n) = -\sum_{i=1}^{N} \sum_{i_1=1}^{N} ... \sum_{i_n=1}^{N} p_{ii_1...i_n} \log p_{ii_1...i_n} , \quad (5.4.15)$$

где p_i – вероятность того, что плотность потока нейтронов в точке *x* попадет в *i*-й интервал разбиения; $p_{i_1...i_n}$ – вероятность того, что одновременно поле нейтронов в точке y_1 попадет в i_1 -й интервал разбиения (рис. 5.9), ..., поле нейтронов в точке y_n попадет в i_n -й интервал разбиения; $p_{ii_1...i_n}$ – вероятность того, что одновременно поле нейтронов в точке *x* попадет в *i*-й интервал разбиения, поле нейтронов в точке y_1 попадет в *i*-й интервал разбиения, поле нейтронов в точке y_n попадет в i_1 -й интервал разбиения, ..., поле нейтронов в точке y_n попадет в i_n -й интервал разбиения (*i*, $i_1,..., i_n = \overline{1,N}$). Логарифмы в формулах (5.4.13) – (5.4.15) будем вычислять по основанию 2, и количество информации при этом измеряется в битах.



Рис. 5.9. Разбиение диапазона возможных значений поля нейтронов на *N* интервалов (каждая кривая – отдельная случайная реализация поля нейтронов)

Исследование закона распределения поля нейтронов в точке. Для нормального закона распределения формулы для вычисления информативности системы датчиков имеют достаточно простой вид. Однако проверка закона распределения плотности потока нейтронов в различных точках АЗ на нормальность по критерию Пирсона («критерию χ^2 ») показала, что в точках, близких к центру АЗ, наблюдаются достаточно большие значения вероятности правдоподобия гипотезы о нормальном законе распределения, но при удалении от центра вероятность правдоподобия гипотезы уменьшается.

Общие условия проведения экспериментов представлены в табл. 5.5.

Таблица 5.5

Параметр	Значение
Ширина АЗ	7 м
Число зон разбиения АЗ	28
Макроскопическое сечение поглощения	0,006 см ⁻¹
Произведение макроскопического сечения деления	0,0062 см ⁻¹
на число нейтронов деления	
Коэффициент диффузии	0,85 см
Количество реализаций	1500
Возмущения, вносимые в сечение поглощения	1 %
Число степеней свободы	17

Общие условия проведения экспериментов при исследовании закона распределения плотности потока нейтронов

Значения критерия согласия Пирсона в предположении нормального закона распределения плотности потока нейтронов в точке для различных координат приведены в табл. 5.6.

Таблица 5.6

Значения критерия Пирсона и вероятности правдоподобия гипотезы для различных координат

х, м	1	2	3	4	5	6
χ^2	355,4	30,8	14,1	13,7	45,5	467,8
р	< 0,5	< 0,5	0,65	0,7	< 0,5	< 0,5

На рис. 5.10 и 5.11 приведены гистограммы распределения плотности потока нейтронов в различных точках АЗ.



ф, отн.ед.

Рис. 5.10. Гистограмма распределения поля нейтронов в точке с координатой 375 см



Рис. 5.11. Гистограмма распределения поля нейтронов в точке с координатой 100 см

Критерий согласия Пирсона в точке x = 375 см равен 11,5, т.е. вероятность правдоподобия гипотезы о нормальном законе распределения поля нейтронов 85 %. Исследования показали, что в других точках АЗ, близких к центру, также наблюдаются достаточно большие значения вероятности правдоподобия гипотезы о нормальном законе распределения. Но при удалении от центра вероятность правдоподобия гипотезы уменьшается и закон распределения плотности потока нейтронов в этом случае нельзя считать нормальным, поэтому при расчете информативности системы датчиков использовались статистические оценки вероятности попадания значений случайной величины в интервал.

Исследование зависимости информативности системы датчиков от различных факторов. Приведем результаты численного исследования зависимости информативности системы датчиков от различных факторов, а именно: погрешности датчика, расположения датчика в АЗ и количества датчиков в системе. Общие условия проведения экспериментов представлены в табл. 5.7.

Таблица 5.7

Параметр	Значение
Ширина АЗ	7 м
Число зон по ширине реактора	28
Число групп нейтронов	1
Сечение поглощения	0,006 см ⁻¹
Произведение сечения деления на число нейтронов деления	0,00602 см ⁻¹
Коэффициент диффузии	1 см
Возмущения в произведении сечения деления на число ней-	5 %
тронов деления	
Число статистик	2000
Число интервалов разбиения диапазона поля нейтронов	10

Общие условия проведения экспериментов

Математическое ожидание и дисперсия плотности потока нейтронов, при которых проводились исследования, представлены на рис. 5.12.



Рис. 5.12. Математическое ожидание (*a*) и дисперсия (*б*) плотности потока нейтронов

Исследование зависимости информативности датчика от его погрешности. Исследование зависимости количества информации, содержащегося в показаниях одного датчика, о поле нейтронов в определенной точке от погрешности датчика, проводились для датчика, расположенного в середине АЗ (3,5 м).



Из рис. 5.13 видно, что при увеличении погрешности датчика уменьшается его информативность, т.е. датчик с большей погрешностью дает меньше сведений о поле нейтронов.

Исследование зависимости информативности системы датчиков от числа датчиков в системе. При исследовании информативности системы датчиков погрешность каждого отдельного датчика принималась равной 5 %. Результаты исследований представлены на рис. 5.14.

Из рис. 5.14 видно, что при увеличении числа датчиков в системе увеличивается информативность системы, причем при добавлении датчика в основном увеличивается информация о поле нейтронов в тех точках, где датчика не было, а информация о точках, в которых уже были датчики (например, о поле в точке с координатой 2 м), меняется незначительно. Из рисунка также видно, что при введении датчика в какую-либо точку информация об этой точке резко увеличивается.



Рис. 5.14. Зависимость количества информации от координаты при различном количестве датчиков в системе: а) 1 (2 м); в) 3 (2, 3 и 4 м); б) 2 (2 и 3 м); г) 4 (2, 3, 4 и 5 м)

Исследование зависимости информативности датчика от его расположения в АЗ. При исследовании зависимости количества информации, содержащегося в показании одного датчика, о поле нейтронов в точке расположения этого датчика погрешность датчика принималась равной 5 %. Результаты исследований представлены на рис. 5.15.

Из рис. 5.15 видно, что количество информации, которое дает датчик о поле в той точке, где он расположен, неодинаково для различного расположения датчика. Датчики, расположенные ближе к краю АЗ, дают минимальную информацию. Таким образом, максимальную информацию о поле в точке своего расположения дают те датчики, которые расположены в областях максимальной дисперсии. Таким образом, результаты проведенных исследований сводятся к следующему:

информативность отдельного датчика уменьшается при увеличении его погрешности;

информативность системы датчиков увеличивается при увеличении числа датчиков в системе;

информативность датчика тем больше, чем больше дисперсия поля в точке его расположения.



Зависимость информативности системы датчиков от их расположения. Исследуем зависимость информативности системы датчиков (при заданном их числе) от их расположения в АЗ.

Результаты исследований представлены на рис. 5.16 и 5.17. Все датчики имеют погрешность 5 %.

Рис. 5.16. График зависимости информативности системы из двух датчиков от координаты при различном расположении датчиков в АЗ: 1 – датчики в точках 1 и 3,5 м; 2 – датчики в точках 1 и 6 м





Рис. 5.17. График зависимости информативности системы из трех датчиков от координаты при различном расположении датчиков в АЗ:: 1 – датчики в точках 1, 2 и 3,5 м; 2 – датчики в точках 1, 2 и 6 м

Из приведенных рисунков видно, что датчики, расположенные в различных точках, дают неодинаковую информацию как о поле в конкретной точке, так и поле в целом.

Определение оптимальной с точки зрения информативности системы датчиков. Величиной, характеризующей информацию о поле в целом, можно считать площадь под кривой информативности. Таким образом, наибольшую информацию о поле в целом будет давать такая система датчиков, для которой площадь под кривой информативности максимальна. При заданном количестве датчиков можно оптимизировать их расположение в АЗ, добиваясь максимума площади под кривой информативности:

$$\max_{x_1...x_n} \int_{0}^{H} I(x) dx, \qquad (5.4.16)$$

где H – размер АЗ; $x_1 \dots x_n$ – координаты датчиков.

На рис. 5.18 приведены результаты расчетов для системы из двух и из трех датчиков.

Из приведенных результатов следует, что оптимальным является неравномерное распределение датчиков по размеру активной зоны.



Рис. 5.18. Кривые информативности при оптимальном расположении двух (*a*) и трех (*б*) датчиков

Исследование погрешности восстановления поля при использовании различных наборов датчиков. Сравним погрешность восстановления плотности потока нейтронов по показаниям датчиков при их найденном оптимальном и произвольном расположении. Для восстановления поля нейтронов будем использовать гармонические функции:

Рассмотрим восстановление плотности потока нейтронов гармоническими функциями:

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{n} A_j \sin \frac{j\pi x}{H},$$
 (5.4.17)

где $\varphi(x)$ – плотность потока нейтронов в точке x, $x \in [0, H]$; H – высота АЗ и ДКЭВ; n – число базисных функций; A_j – амплитуды.

Сравнение эффективности восстановления различными наборами датчиков будем проводить на основе суммарной относительной невязки:

$$\delta = \sum_{p=1}^{n} \sum_{t=1}^{N} \left| \frac{\varphi_{\text{BOCCT}}^{tp} - \varphi_{\text{H3M}}^{tp}}{\varphi_{\text{H3M}}^{tp}} \right|,$$
(5.4.18)

где n – число точек в АЗ (точки располагаются с интервалом 5 см); N – число временных статистик; $\phi_{\text{восст}}^{tp}$ – восстановленное (по показаниям датчиков) значение поля в точке p во временной реализации t; $\phi_{\text{изм}}^{tp}$ – измеренное значение поля (рассчитанное по математической модели). Восстановление проводилось гармоническими функциями.

В табл. 5.8 представлены результаты расчета невязки (5.4.18) для различных наборов датчиков, расположенных в АЗ шириной 7 м.

Таблица 5.8

Равномерное расположение	Оптимальное расположение				
Два да	атчика				
(2,35; 4,7 м)	(2,8; 4,15 м)				
494,5	363,2				
Три да	атчика				
(1,75; 3,5; 5,25 м)	(2,35; 3,45; 4,65м)				
447	397,5				

Результаты расчета невязки

На рис. 5.19 представлена зависимость невязки от номера итерации при нахождении оптимального расположения датчиков методом покоординатного спуска (осуществляется переход от равномерного расположения датчиков к оптимальному).



Рис. 5.19. Зависимость невязки от номера итерации для двух (a) и трех (δ) датчиков в системе

Из табл. 5.8 и рис. 5.19 видно, что невязка восстановления поля для оптимального с точки зрения информации расположения датчиков меньше, чем для равномерного расположения. Причем при переходе методом покоординатного спуска от равномерного расположения к оптимальному невязка уменьшается. Таким образом, оптимальное с точки зрения информации расположение датчиков дает более точное восстановление поля.

5.4.5. Восстановление аксиального распределения поля нейтронов в реакторе РБМК при частичной потере измерительной информации

Алгоритмы контроля за распределением поля энерговыделения в реакторе предусматривают ситуации, когда часть датчиков по какой-либо причине выходит из строя [9, 21]. Например, при восстановлении аксиального распределения плотности потока нейтронов, если одна из четырех секций ДКЭВ вышла из строя, то ее показаниями пользоваться запрещено, т.е. секция считается «запрещенной». Сигнал такой секции заменяется на сигнал, рассчитанный определенным образом на основе показаний ближайших ДКЭВ. Если же из строя вышли две и более секции датчика, то датчик полностью считается неработоспособным, подлежащим замене, что не всегда возможно по технологическим соображениям и оправдано по экономическим. Понятно, что если число запрещенных ДКЭВ превысит некоторый предел, то это отрицательно скажется на точности восстановления поля энерговыделения реактора в целом и существенно снизит уровень его безопасности. По этой причине целесообразным представляется разработка алгоритмов, позволяющих восстанавливать поле нейтронов при большем числе отказавших секций, например при двух.

Штатный алгоритм восстановления высотного поля основан на том, что распределение плотности потока нейтронов по высоте аппроксимируется с помощью собственных функций «голого» одномерного реактора:

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{n} A_{j} \psi_{j}(x) = \vec{A}^{\mathrm{T}} \vec{\psi}_{j}(x), \qquad (5.4.19)$$

где $\varphi(x)$ – плотность потока нейтронов в точке $x, x \in [0, H]$; H – высота АЗ и ДКЭВ; $\psi_j(x) = \sin \frac{j\pi x}{H}, j = \overline{1, n},$ – базисные функции (исходный набор); n – число базисных функций; A_j – амплитуды. Учитывая, что каждая секция дает интегрированный по ее размеру сигнал C_i , аппроксимационное выражение (5.4.19) приводится к виду

$$\vec{\Phi} = \hat{U}\vec{A} , \qquad (5.4.20)$$

где \hat{U} – матрица $m \times n$;

$$u_{ij} = \frac{2H}{j\pi} \sin \frac{(2i-1)j\pi}{2m} \sin \frac{j\pi}{2m}, \ i = \overline{1, m}, \ j = \overline{1, n}.$$

Коэффициенты аппроксимации \vec{A} находятся по методу наименьших квадратов из условия:

$$J = \min_{A} (\vec{C} - \hat{U}\vec{A})^{\mathrm{T}} \hat{K}^{-1} (\vec{C} - \hat{U}\vec{A}), \qquad (5.4.21)$$

где \hat{K} – матрица $m \times m$.

Таким образом, вектор амплитуд имеет вид

$$\vec{A} = (\hat{U}^{\mathrm{T}} \hat{K}^{-1} \hat{U})^{-1} \hat{U}^{\mathrm{T}} \hat{K}^{-1} \vec{C} . \qquad (5.4.22)$$

В случае n = m

 $\vec{A} = \hat{U}^{-1}\vec{C} \; .$

Для обеспечения возможности восстановления аксиального распределения плотности потока нейтронов при выходе из строя части секций датчика предлагается модифицировать штатный алгоритм восстановления за счет корректировки функций разложения. Новые функции разложения предлагается определять по алгоритму, изложенному в разд. 2.5.2, т.е. предлагается перейти от тригонометрического ряда к координатным функциям приближенного канонического разложения. Об эффективности такого подхода можно судить по приведенным ниже данным. Исходным материалом для приведенных ниже оценок являлась информация о токах 66 четырехсекционных датчиков ДКЭВ в 610 временных «срезах». Приближенные координатные функции канонического разложения («естественные» функции), найденные по алгоритму, приведенному в разд. 2.5.2, имеют вид

$$\begin{split} & \left\{ \tilde{\Psi}_{0}(x) = 2,37 \sin \frac{\pi x}{H} + 0,76 \cdot 10^{-1} \sin \frac{2\pi x}{H} + 0,86 \sin \frac{3\pi x}{H} - 0,11 \cdot 10^{-1} \sin \frac{4\pi x}{H}; \\ & \tilde{\Psi}_{1}(x) = \sin \frac{\pi x}{H} + 0,29 \cdot 10^{-3} \sin \frac{2\pi x}{H} + 0,36 \sin \frac{3\pi x}{H} - 0,62 \cdot 10^{-2} \sin \frac{4\pi x}{H}; \\ & \tilde{\Psi}_{2}(x) = \sin \frac{2\pi x}{H} - 0,41 \cdot 10^{-1} \sin \frac{3\pi x}{H} + 0,24 \sin \frac{4\pi x}{H}; \\ & \tilde{\Psi}_{3}(x) = \sin \frac{3\pi x}{H} - 0,25 \sin \frac{4\pi x}{H}; \\ & \tilde{\Psi}_{4}(x) = \sin \frac{4\pi x}{H}. \end{split}$$

Сделаем еще одно замечание. Известно, что переход от коррелированных составляющих вектора \vec{A} к некоррелированным может быть сделан не единственным образом. Например, некоррелированными являются собственные вектора ковариационной матрицы:

$$\hat{K}\vec{Z} = \lambda\vec{Z} . \tag{5.4.23}$$

Если на компоненты вектора \vec{Z} наложить условие, чтобы первая переменная была ориентирована по направлению максимально возможной дисперсии, вторая – по направлению максимально возможной дисперсии в подпространстве, ортогональном первому направлению, и так далее, то в этом случае компоненты вектора \vec{Z} называют главными компонентами. Координатные функции, полученные по методу главных компонент, имеют вид

$$\begin{aligned} & \left(\eta_{1}(x) = 0,94\sin\frac{\pi x}{H} - 0,36\cdot10^{-3}\sin\frac{2\pi x}{H} + 0,34\sin\frac{3\pi x}{H} - 0,75\cdot10^{-2}\sin\frac{4\pi x}{H}; \\ & \eta_{2}(x) = -0,37\cdot10^{-1}\sin\frac{\pi x}{H} - 0,95\cdot10^{-3}\sin\frac{2\pi x}{H} + 0,96\cdot10^{-1}\sin\frac{3\pi x}{H} - 0,30\sin\frac{4\pi x}{H}; \\ & \eta_{3}(x) = 0,31\sin\frac{\pi x}{H} - 0,22\sin\frac{2\pi x}{H} - 0,84\sin\frac{3\pi x}{H} + 0,38\sin\frac{4\pi x}{H}; \\ & \eta_{4}(x) = -0,14\sin\frac{\pi x}{H} - 0,23\sin\frac{2\pi x}{H} + 0,40\sin\frac{3\pi x}{H} + 0,87\sin\frac{4\pi x}{H}. \end{aligned}$$

$$(5.4.24)$$

«Естественные» функции и аппроксимирующие функции, рассчитанные по методу главных компонент, имеют вид, изображенный на рис. 5.20.



Рис. 5.20. Вид "естественных" функций (*a*) и функций, рассчитанных по методу главных компонент (δ): a) $1 - \tilde{\psi}_1$, $2 - \tilde{\psi}_2$, $3 - \tilde{\psi}_3$, $4 - \tilde{\psi}_4$; b) $1 - \eta_1$, $2 - \eta_2$, $3 - \eta_3$, $4 - \eta_4$

В качестве критерия, по которому производилось сравнение наборов базисных функций, было выбрано следующее значение невязки в *i*-й секции ДКЭВ:

$$\delta_{i} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N} \frac{\left| C_{i}^{t} - \hat{\Phi}_{i}^{t} \right|}{C_{i}^{t}}, \qquad (5.4.25)$$

где N – число реализаций поля нейтронов (произведение числа временных срезов и числа датчиков); C_i^t – истинное показание *i*-й секции ДКЭВ в *t*-й реализации, $\hat{\Phi}_i^t$ – рассчитанное показание *i*-й секции ДКЭВ в *t*-й реализации при аппроксимации одним из трех наборов базисных функций (собственные, «естественные», главные компоненты).

Для каждого метода восстановления (для каждого набора функций) и для каждой секции датчика была рассчитана невязка (5.4.25) при запрете различных секций.

Понятно, что при отсутствии запрещенных секций и четырех аппроксимирующих функциях невязка в каждой секции будет равна нулю. Вид восстановленного поля для первой реализации (пер-

вый датчик, первый временной срез) представлен на рис. 5.21 (все кривые совпадают).



Рис. 5.21. Распределение плотности потока нейтронов по высоте активной зоны

Также были проведены расчеты при отсутствии запрещенных секций, но при меньшем числе аппроксимирующих функций (3, 2, 1). Результаты расчетов приведены в табл. 5.9.

Таблица 5.9

Собс	твенны	«Естественные» функции				Главные компоненты					
]	Номер с	секции		Номер секции				Номер секции			
1	2	3	4	1	1 2 3 4				2	3	4
Число аппроксимирующих функций равно 3											
3,7	4,0	2,7	1,6	3,1	3,1 3,3 1,7 0,5 3,3 3,						0,1
Число аппроксимирующих функций равно 2											
36,3	23,0	24,7	36,4	4,2	3,3	4,5	4,8	4,3	3,3	4,5	4,6
Число аппроксимирующих функций равно 1											
38,3	21,1	27,4	32,7	8,3	4,4	5,2	9,4	8,3	4,4	5,2	9,4

Результаты расчетов невязки (в процентах) при отсутствии запрещенных секций

Из табл. 5.9 видно, что при уменьшении числа аппроксимирующих функций при одном и том же числе разрешенных секций невязка возрастает для каждого набора функций в каждой секции. Но для одного и того же числа функций невязка в любой секции при восстановлении собственными функциями значительно превышает невязку при восстановлении «естественными» функциями и главными компонентами (особенно эта разница видна при малом числе функций – 1 и 2, в этих случаях первая невязка превышает вторую почти на порядок). При этом невязки при восстановлении «естественными» функциями и главными компонентами практически не отличаются.

В табл. 5.10 представлены результаты расчетов при запрете одной секции датчика.

Таблица 5.10

Собственные функции				«Естественные» функции				Главные компоненты			
Номер секции				Номер секции				Номер секции			
1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
Запрещена секция № 1, число аппроксимирующих функций ра								вно 3			
13,5	0	0	0	10,9	0	0	0	9,7	0	0	0
Запрещена секция № 1, число аппроксимирующих функций равно 2											
67,3	13,2	24,6	22,4	9,7	2,7	4,3	3,4	9,8	3,0	4,0	2,9
	Запр	оещена	секция	№2, чи	исло ап	прокси	мируюі	цих фу	нкций	= 3	
0	10,9	0	0	0	6,4	0	0	0	5,9	0	0
	Запрен	цена сен	кция №	23, чис.	по аппр	оксими	ирующи	іх фуні	сций ра	вно 3	
0	0	11,4	0	0	0	10,2	0	0	0	13,8	0
	Запрещена секция № 4, число аппроксимирующих функций равно 3										
0	0	0	14,7	0	0	0	28,4	0	0	0	11,3

Результаты расчетов невязки (в процентах) при запрете одной секции

Из табл. 5.10 видно, что при запрете одной секции и восстановлении тремя функциями невязка отлична от нуля только в запрещенной секции, т.е. восстановление по достаточному числу измерений во всех остальных секциях не зависит от отказа одной секции. Однако при использовании меньшего числа функций невязка возрастает. Также из табл. 5.10 видно, что при аппроксимации собственными и «естественными» функциями наименьшая невязка возникает при запрете средних секций (2-й и 3-й), а при аппроксимации функциями, рассчитанными по методу главных компонент, наименьшие невязки возникают при запрете крайних левых секций (1-й и 2-й). Вид поля при запрете 3-й секции представлен на рис. 5.22.



Рис. 5.22. Распределение плотности потока нейтронов по высоте активной зоны: *I* – восстановление без запрета секций по четырем функциям; *2* – восстановление собственными функциями; *3* – восстановление «естественными» функциями; *4* – восстановление главными компонентами

Из рис. 5.22 видно, что наибольшие расхождения между полем, восстановленным по четырем функциям (кривая 1) и полем, восстановленным меньшим числом функций, возникают в третьей секции ($x \in [3,5;5,25]$), что подтверждает выводы, сделанные по расчетам невязки.

То, что при восстановлении главными компонентами наибольшие ошибки возникают в крайних нижних секциях, можно объяснить несимметричным видом функций. Таким образом, получается, что при отказе крайних секций лучше использовать для аппроксимации «естественные» функции, а при отказе центральных секций – главные компоненты.

В табл. 5.11 представлены результаты восстановления аксиального поля нейтронов при запрете двух и трех секций.

На рис. 5.23 – 5.25 представлены распределения плотности потока нейтронов по высоте АЗ (кривые: 1 – восстановление полным набором (4 функции); 2, 3 и 4 – восстановление с запретом секций максимально возможным числом функций: 2 – собственные, 3 – «естественные», 4 – главные компоненты).

Таблица 5.11

Собственные функции				«Естественные» функции				Главные компоненты			
Номер секции				I	Номер	секции	И	Номер секции			
1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
Зап	рещен	ы секции	и№1иJ	№ 2, чи	исло ан	прокс	имиру	ющих	функц	ий рав	но 2
159,0	128	0	0	28,6	20,2	0	0	21,7	14,5	0	0
Зап	рещен	ы секции	и№ 1иЈ	№ 3, чи	исло ан	прокс	имиру	ющих	функц	ий рав	но 2
66,5	0	55,9	0	8,9	0	7,6	0	8,9	0	7,0	0
Зап	рещен	ы секции	и№ 1иЈ	№ 4, чи	исло аг	проке	имиру	ющих	функц	ий рав	но 2
47,4	0	0	49,0	9,0	0	0	12,0	9,3	0	0	13,4
Зап	рещен	ы секции	и № 2 и Ј	№ 3, чи	исло ан	прокс	имиру	ющих	функц	ий рав	но 2
0	93,8	96,8	0	0	6,9	8,5	0	0	6,9	8,3	0
Зап	рещен	ы секции	и № 2 и Ј	№ 4, чі	исло ан	прокс	имиру	ющих	функц	ий рав	но 2
0	55,8	0	70,9	0	6,1	0	12,0	0	5,9	0	13,2
Зап	рещен	ы секции	и № 3 и Ј	№ 4, чи	исло ан	прокс	имиру	ющих	функц	ий рав	но 2
0	0	141,0	177,0	0	0	20,0	31,0	0	0	17,0	31,0
Запрен	щены (секции М	№ 1, № 2	и № 3,	, число	аппро	оксими	рующ	их фун	кций р	оавно 1
168,0	82,0	91,0	0	15,0	12,3	10,5	0	15,0	12,0	10,0	0
Запрен	щены (секции М	№ 1, № 2	и № 4,	, число	аппро	оксими	рующ	их фун	кций р	оавно 1
51,0	8,0	0	46,0	12,0	7,8	0	10,7	12,2	7,8	0	10,7
Запрен	щены (секции М	№ 1, № 3	и № 4,	, число	аппро	оксими	рующ	их фун	кций р	оавно 1
48,9	0	9,6	44,0	8,5	0	8,2	13,0	8,5	0	8,2	13,0
Запрен	щены (секции М	№ 2, № 3	и № 4	, число	аппро	оксими	рующ	их фун	кций р	оавно 1
0	98,3	110,0	19,1	0	8,4	12,9	16,1	0	8,4	12,8	16,2

Результаты расчетов невязки при запрете двух и трех секций



Рис. 5.23. Распределение плотности потока нейтронов по высоте при запрете 2-й и 4-й секций

382



Рис. 5.24. Распределение плотности потока нейтронов по высоте при запрете 2-й и 3-й секций



Рис. 5.25. Распределение плотности потока нейтронов по высоте при запрете 1-й, 2-й и 3-й секций

Из рис. 5.23 – 5.25 и из табл. 5.11 видно, что при увеличении числа запрещенных секций, то есть при уменьшении числа аппроксимирующих функций, погрешность восстановления, т.е. невязка, рассчитанная по формуле (5.4.25), увеличивается. Причем, величина невязки при аппроксимации «естественными» функциями и координатными функциями главных компонент приблизительно на порядок меньше невязки для собственных функций голого реактора. Следует также отметить, что во всех исследуемых случаях невязки при восстановлении "естественными" функциями и главными компонентами были практически равны (отличались незначительно). Из табл. 5.11 видно, что при запрете одновременно двух секций с одного края (1-й и 2-й или 3-й и 4-й) возникает гораздо большая ошибка восстановления, чем при запрете двух не соседних или двух центральных секций. Этот эффект возникает из-за того, что при запрете секций одной половины теряются все сведения о поле в этой половине.

Таким образом, приведенные выше результаты исследований показывают, что при частичной потере измерительной информации для восстановления высотного распределения плотности потока нейтронов предпочтительнее использовать «естественные» функции или функции, рассчитанные по методу главных компонент (и те, и другие являются координатными функциями канонического разложения). Такой выбор базиса позволяет восстанавливать поле меньшим числом функций (вместо используемых четырех собственных функций можно брать одну или две «естественные» функции). Отметим, что на наш взгляд, перспективным является использование канонического набора и при решении задачи диагностики работоспособности датчика в режиме on-line. Действительно, если проводить диагностику, например, на основе распознавания образов, то выбор в качестве параметров образа амплитуд при координатных функциях канонического разложения равносилен применению метода главных координат, обычно используемого в задачах такого рода.

Список литературы к главе 5

1. Артемьев А.В., Миронов Н.И., Загребаев А.М., Овсянникова Н.В. Математическое обеспечение идентификации расхода теплоносителя в топливном канале реактора РБМК на основе информации об азотной активности // Известия вузов. Ядерная энергетика. – 2004. – № 1. – С. 69 – 76.

2. Бурьян В.И. Концепция математического обеспечения внутриреакторного контроля на АЭС с ВВЭР // Ядерные измерительные информационные технологии. – 2000. – С. 12 – 16.

3. Бурьян В.И. Оперативный контроль поля энерговыделения в ВВЭР. Математическая модель и алгоритм оценки // Ядерные измерительные информационные технологии. – 2003. – № 2. – С. 3 – 7. 4. Синтез поля энерговыделения в активной зоне ВВЭР на основе критерия направленного расхождения / В.И. Бурьян, А.С. Кужиль, С.П. Падун, А.Б. Пешков // Ядерные измерительные информационные технологии. – 2002. – № 4. – С. 24 – 28.

5. Загребаев А.М. Восстановление аксиального распределения поля нейтронов при частичной потере измерительной информации. Безопасность информационных технологий. – № 1. – М.: МИФИ, 2005.

6. Загребаев А.М. Диагностика неисправности высотных датчиков в реакторе РБМК-1000. Современные технологии в задачах управления, автоматики и обработки информации: Сборник трудов XIV научнотехнического семинара. Сентябрь 2005 г. – Алушта-Самара: Самарский государственный аэрокосмический университет, 2005.

7. Загребаев А.М. Исследование возможностей восстановления теплотехнических параметров канала на основе информации системы КГО об активности теплоносителя. Математические модели для исследования и обоснования характеристик оборудования и ЯЭУ в целом при их создании и эксплуатации. Тезисы докладов семинара секции динамики. – Сосновый Бор, НИТИ, 18 – 20 сентября 2000 г.

8. Загребаев А.М., Крайко М.А., Крицына Н.А. Использование канонического разложения для определения поля нейтронов в ядерном реакторе. Труды Х международного научно-технического семинара «Современные технологии в задачах управления, автоматизации и обработки информации», 2001 г.

9. Загребаев А.М., Крайко М.А., Овсянникова Н.В., Страхов Р.В. Методика восстановления аксиального распределения энерговыделения вы реакторе РБМК-1000. Труды XIII международного научно-технического семинара «Современные технологии в задачах управления, автоматики и обработки информации». – М.: Изд-во МГУ, 2004.

10. Загребаев А.М., Крицына Н.А. Об оценке информативности датчиков внутриреактрного контроля. Научная сессия МИФИ-2000. Сборник научных трудов. – Т. 8. – М.: МИФИ, 2000.

11. Загребаев А.М., Миронов Н.И., Овсянникова Н.В. Контроль расхода теплоносителя в канале реактора РБМК на основе информации об азотной активности. Материалы XIII семинара по проблемам физики реакторов. – Москва, 2 – 6 сентября 2004 г.

12. Загребаев А.М., Насонова В.А. Использование статистических характеристик плотности потока нейтронов для определения параметров ксеноновых колебаний. Труды XVI международного научно-технического семинара «Современные технологии в задачах управления, автоматики и обработки информации». – Сентябрь 2007 г. Алушта. – С. 54 – 55.

13. Загребаев А.М., Насонова В.А. О пороге ксеноновых колебаний при пространственно-распределенной обратной связи. НАУЧНАЯ СЕС-СИЯ МИФИ – 2008. Сборник научных трудов. – В 16 т. – Т. 1. Физикотехнические проблемы ядерной энергетики. – М.: МИФИ, 2008.

14. Загребаев А.М., Овсянникова Н.В. Использование информационной избыточности системы контроля реактора РБМК для повышения уровня безопасности эксплуатации // Безопасность информационных технологий. – № 4. – М.: МИФИ, 2002. – С. 73 – 78.

15. Загребаев А.М., Овсянникова Н.В. Использование информационной избыточности системы контроля ядерного реактора для повышения безопасности эксплуатации. Х Всероссийская научная конференция «Проблемы информационной безопасности в системе высшей школы». 28 – 30 января 2003 г. Сборник научных трудов. – М.: МИФИ, 2003.

16. Загребаев А.М., Овсянникова Н.В. Математическая модель активации теплоносителя в реакторе РБМК-1000 и ее использование для идентификации расхода через канал. Препринт 008-2002. – М.: МИФИ. 2002.

17. Загребаев А.М., Овсянникова Н.В. Об информационном подходе к оценке файлов состояния реактора РБМК. Научная сессия МИФИ. Сборник научных трудов. – Т. 8. Ядерная энергетика. – М.: МИФИ, 2002.

18. Загребаев А.М., Овсянникова Н.В. Пространственно-временная математическая модель активации однофазного теплоносителя. Препринт № 010-2002. – М.: МИФИ, 2002.

19. Загребаев А.М., Овсянникова Н.В., Розанова М.Н. Информационный подход к оптимизации количества и расположения датчиков внутриреакторного контроля. Труды XVI международного научно-технического семинара «Современные технологии в задачах управления, автоматики и обработки информации». – Сентябрь 2007 г. Алушта. – С. 54 – 55.

20. Загребаев А.М., Н.В. Овсянникова, М.Н. Розанова. Исследование информативности системы датчиков внутриреакторного контроля. НА-УЧНАЯ СЕССИЯ МИФИ – 2006. Сборник научных трудов. – В 16 т. – Т. 8. Нетрадиционная энергетика. Ядерная энергетика. – М.: МИФИ, 2006. – С. 84, 85.

21. Загребаев А.М., Овсянникова Н.В., Розанова М.Н., Страхов Р.В. Диагностика неисправности датчика ДКЭВ на основе анализа архива высотных полей. Научная сессия МИФИ-2005. Сборник научных трудов. – Т. 8. Нетрадиционная энергетика. Ядерная энергетика. – М.: МИФИ, 2005.

22. Загребаев А.М., Резников С.В. Определение теплотехнических параметров канала ядерного реактора на основе информации об активации теплоносителя. Труды VIII Международного научно-технического семинара «Современные технологии в задачах управления, автоматики и обработки информации», Алушта, 1999. 23. Загребаев А.М., Саманчук В.Н. Анализ информативности сигналов точечных и протяженных датчиков контроля физических полей // Алгоритмы обработки информации в сложных системах. – М.: Энергоатомиздат, 1991.

24. Митин В.И. Технические средства внутриреакторного контроля на ВВЭР // Атомная энергия. – 1986. – Т. 60. – Вып. 1. – С. 7 – 11.

25. Митин В.И. и др. Основные решения по модернизированной системе внутриреакторного контроля реакторов ВВЭР-1000. Международный симпозиум «Измерения, важные для безопасности реакторов», 20 – 22 ноября 2007 г.

26. Постников В.В. Способы, инструментарий, методы и программы контроля нейтронных и гамма-потоков в активных зонах РБМК // Вопр. атом. науки и техн. – Сер. Обеспеч. безопас. АЭС. – 2004. – № 6. С. 75 – 86.

27. Системы внутриреакторного контроля АЭС с реакторами ВВЭР / Под ред. Г.Л. Левина. – М.: Энергоатомиздат, 1987. – 127 с. (Библиотека эксплуатационника АЭС. – Вып. 20).

28. Филипчук Е.В., Потапенко П.Т., Постников В.В. Управление нейтронным полем ядерного реактора. – М.: Энергоиздат, 1981.

МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ В ЗАДАЧАХ КОНТРОЛЯ ЯДЕРНЫХ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ УСТАНОВОК

Учебное пособие

Редактор М.В. Макарова

Подписано в печать 20.11.2008. Формат 60х84 1/16 Уч.-изд.л. 24,25. Печ.л. 24,25. Тираж 150 экз. Изд. № 1/3 Заказ №

Московский инженерно-физический институт (государственный университет). 115409, Москва, Каширское ш., 31

Типография издательства «Тровант». г. Троицк Московской области