

МОСКОВСКИЙ ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(государственный университет)

С.А. Гришин, С.В. Мустяца, М.А. Петрова, Е.Х. Садекова

Зачет по линейной алгебре. 2 семестр

Москва 2009

УДК 514.7(075)
БДК 22.151.5я7
З-39

Гришин С.А., Мустяца С.В., Петрова М.А., Садекова Е.Х. Зачет по линейной алгебре. 1 семестр. — М.: МИФИ, 2009.— 36 с.

В настоящем издании приведены варианты зачетных заданий для студентов, обучающихся линейной алгебре во втором семестре, на всех факультетах МИФИ.

Они могут быть использованы преподавателями для приема зачетов по дисциплине «Линейная алгебра», проведения межсеместрового контроля успеваемости студентов, контрольных работ, а также студентами для подготовки к сдаче зачетов по данному предмету.

Рекомендовано к изданию редсоветом МИФИ.

© Московский инженерно-физический институт
(государственный университет), 2009.

Редактор Е.Е. Шумакова

Оригинал- макет подготовлен Гришиным С.А.

Подписано в печать 22.05.2009. Формат 60×84 1/16

Печ.л. 2.25. Уч.-изд.л. 2.25. Тираж 100 экз.

Изд. № 025-І. Заказ №

Московский инженерно-физический институт (государственный университет),

115409, Москва, Каширское шоссе, 31.

Типография МИФИ

Содержание

Зачет по линейной алгебре. 2 семестр	4
Список рекомендуемой литературы	34

Зачет по линейной алгебре. 2 семестр

Вариант 1

1. Является ли множество всех элементов $\mathbf{R}_7$ вида $(x_1; x_2; \dots x_7)$, у которых $x_1 = x_2$, линейным пространством? В случае положительного ответа найти размерность этого пространства, указать какой-нибудь базис.

2. Найти общее решение однородной системы:
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 0 \\ 7x_2 - 3x_3 - x_4 = 0 \end{cases};$$
 записать его в векторной форме.

Выделить фундаментальную систему решений.

3. Дана система линейных уравнений:
$$\begin{cases} x_1 - x_3 - x_4 - x_5 = 1 \\ x_2 + 2x_3 - x_4 + 3x_5 = 2 \\ 2x_1 - x_2 - 4x_3 - x_4 - 5x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 3 \end{cases}.$$

а) Доказать, что она совместна.

б) Найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы.

в) Найти общее решение системы и записать его в векторной форме.

4. В ЛП $\mathbf{R}_4$ заданы подпространства $L_1: \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$ и $L_2: \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$. Найти размерность пересечения $L_1 \cap L_2$ и базис суммы $L_1 + L_2$. Является ли сумма $L_1 + L_2$ прямой?

5. В линейном пространстве $\mathbf{R}_3$ задан линейный оператор $A: \forall x = (x_1; x_2; x_3) \in \mathbf{R}_3 \rightarrow Ax = [a; x]$ (векторное произведение), где $a = (1; 0; 2)$. Найти матрицу линейного оператора в базисе $f_1 = (1; -1; 1)$, $f_2 = (0; 1; 1)$, $f_3 = (1; 2; -1)$. Имеет ли оператор A обратный оператор?

Зачет по линейной алгебре. 2 семестр

Вариант 2

1. Является ли множество всех многочленов $p(x) \in P_6$ (степени не выше 6) таких, что $p(0) = p(1) = p(2) = 0$, линейным пространством? В случае положительного ответа найти размерность этого пространства, указать какой-нибудь базис.

2. Найти общее решение однородной системы:
$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 7x_4 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ 4x_1 + 11x_2 - 13x_3 + 16x_4 = 0 \\ 7x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$
; записать его в векторной форме.

Выделить фундаментальную систему решений.

3. Дана система линейных уравнений:
$$\begin{cases} x_1 + x_3 - x_4 + x_5 = 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 - 2x_5 = 6 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 - 4x_4 = 10 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 - 5x_4 + x_5 = 12 \end{cases}.$$

а) Доказать, что она совместна.

б) Найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы.

в) Найти общее решение системы и записать его в векторной форме.

4. В ЛП R_4 заданы подпространства $L_1: \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$ и $L_2: x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0$. Найти размерность суммы $L_1 + L_2$ и базис пересечения $L_1 \cap L_2$.

5. В линейном пространстве R_3 задан линейный оператор $A: \forall x = (x_1; x_2; x_3) \in R_3 \rightarrow Ax = (x_1; 0; x_3)$. Найти матрицу линейного оператора в базисе $f_1 = (1; 0; 1)$, $f_2 = (1; 2; 3)$, $f_3 = (-1; 3; 1)$. Имеет ли оператор A обратный оператор?

Зачет по линейной алгебре. 2 семестр

Вариант 3

1. Является ли множество всех элементов R_8 вида $(x_1; x_2; \dots x_8)$, у которых $x_1 = x_2 = \dots = x_8$, линейным пространством? В случае положительного ответа найти размерность этого пространства, указать какой-нибудь базис.

2. Найти общее решение однородной системы:
$$\begin{cases} 4x_1 + 7x_2 + 10x_3 - 7x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0 \end{cases}$$
; записать его в векторной форме.

Выделить фундаментальную систему решений.

3. Дана система линейных уравнений:
$$\begin{cases} 7x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 5x_4 + x_5 = 26 \\ x_1 - x_3 - x_4 - 5x_5 = -16 \\ 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 4x_4 = 19 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 7x_5 = 30 \end{cases}$$
.

а) Доказать, что она совместна.

б) Найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы.

в) Найти общее решение системы и записать его в векторной форме.

4. В ЛП R_4 заданы подпространства $L_1 = L(e_1, e_2)$ и $L_2 = L(e_3, e_4)$ – линейные оболочки векторов $e_1 = (1; 1; -1; 0)$, $e_2 = (-1; 2; 0; 1)$, $e_3 = (1; 1; -2; 1)$, $e_4 = (0; 3; -1; 1)$. Найти размерность пересечения $L_1 \cap L_2$ и базис суммы $L_1 + L_2$.
5. В линейном пространстве R_3 задан линейный оператор $A: \forall x = (x_1; x_2; x_3) \in R_3 \rightarrow Ax = (x_1; -x_2; -x_3)$. Найти матрицу линейного оператора в базисе $f_1 = (-1; -1; 0)$, $f_2 = (1; 1; 1)$, $f_3 = (2; 1; -1)$ и матрицу обратного оператора в этом же базисе.

Зачет по линейной алгебре. 2 семестр

Вариант 4

1. Является ли множество всех элементов $\mathbf{R}_6$ вида $(x_1; x_2; \dots x_6)$, у которых $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 + 6x_6 = 0$, линейным пространством? В случае положительного ответа найти размерность этого пространства, указать какой-нибудь базис.
2. Найти общее решение однородной системы:
$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - 3x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + 10x_3 - 3x_4 - 4x_5 = 0 \end{cases}$$
; записать его в векторной форме. Выделить фундаментальную систему решений.
3. Дана система линейных уравнений:
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 2 \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 3 \end{cases}$$
 - а) Доказать, что она совместна.
 - б) Найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы.
 - в) Найти общее решение системы и записать его в векторной форме.
4. В ЛП $\mathbf{R}_4$ заданы подпространства $L_1: \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$ и $L_2 = L(e_1, e_2)$ – линейная оболочка векторов $e_1 = (1; -1; 0; 1), e_2 = (0; 1; 1; 1)$. Найти размерность пересечения $L_1 \cap L_2$ и базис в L_1 .
5. В линейном пространстве $\mathbf{R}_3$ задан линейный оператор $A: \forall x = (x_1; x_2; x_3) \in \mathbf{R}_3 \rightarrow Ax = (0; 0; x_3)$. Найти матрицу линейного оператора в базисе $f_1 = (1; 1; 0), f_2 = (1; -1; 1), f_3 = (0; 0; 1)$. Имеет ли оператор A обратный оператор?

Зачет по линейной алгебре. 2 семестр

Вариант 5

1. Является ли множество всех многочленов $p(x) \in P_5$ (степени не выше 5) таких, что $p(0) = p'(0) = 0$, линейным пространством? В случае положительного ответа найти размерность этого пространства, указать какой-нибудь базис.

2. Найти общее решение однородной системы:
$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$
; записать его в векторной форме.

Выделить фундаментальную систему решений.

3. Дана система линейных уравнений:
$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 1 \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 3 \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 6x_4 + 10x_5 = 7 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2 \end{cases}$$
.

а) Доказать, что она совместна.

б) Найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы.

в) Найти общее решение системы и записать его в векторной форме.

4. В ЛП R_4 заданы подпространства $L_1: \begin{cases} x_1 - x_2 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$ и $L_2: \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$. Найти базис

суммы $L_1 + L_2$. Является ли сумма $L_1 + L_2$ прямой?

5. Пусть $L(x; x^2)$ – линейная оболочка функций $e_1 = x, e_2 = x^2$. Действие оператора A на любой элемент $a = a_1 e_1 + a_2 e_2 \in L$ определяется формулой: $Aa = (a_1 + a_2)e_1 + a_2 e_2$. Найти матрицу обратного оператора в базисе e_1, e_2 .

Зачет по линейной алгебре. 2 семестр

Вариант 6

1. Является ли множество всех многочленов $p(x) \in P_5$ (степени не выше 5) таких, что $p''(x) = 0$ для всех $x \in (-\infty, +\infty)$, линейным пространством? В случае положительного ответа найти размерность этого пространства, указать какой-нибудь базис.
2. Найти общее решение однородной системы:
$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0; \\ x_1 - 2x_2 + 13x_3 + 9x_4 = 0 \end{cases}$$
 записать его в векторной форме.

Выделить фундаментальную систему решений.

3. Дана система линейных уравнений:
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 - 3x_5 = 2 \\ 5x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 7x_4 - 5x_5 = 3 \end{cases}$$

а) Доказать, что она совместна.

б) Найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы.

в) Найти общее решение системы и записать его в векторной форме.

4. В ЛП R_4 заданы подпространства $L_1: \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$ и $L_2 = L(e_3, e_4)$ – линейная оболочка векторов $e_3 = (0; 0; 1; 1), e_4 = (1; 1; 1; 1)$. Найти базис пересечения $L_1 \cap L_2$ и размерность суммы $L_1 + L_2$.
5. В линейном подпространстве $L = \{x \in R_3: x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ пространства R_3 действует оператор A по формуле: $\forall x = (x_1; x_2; x_3) \in L \rightarrow Ax = (x_3 - x_2; x_1 - x_3; x_2 - x_1)$. Найти матрицу оператора в базисе $f_1 = (1; 0; -1), f_2 = (0; 1; -1)$.

Зачет по линейной алгебре. 2 семестр

Вариант 7

1. Является ли множество всех элементов $\mathbf{R}_6$ вида $(x_1; x_2; \dots x_6)$, у которых $x_2 = x_4 = x_6$, линейным пространством? В случае положительного ответа найти размерность этого пространства, указать какой-нибудь базис.

2. Найти общее решение однородной системы:
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 7x_3 + 5x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases}$$
; записать его в векторной форме.

Выделить фундаментальную систему решений.

3. Дана система линейных уравнений:
$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 - x_5 = 1 \\ x_2 - x_4 + 3x_5 = -1 \\ -3x_1 + x_3 + x_4 = 2 \\ -x_1 - 6x_2 + 3x_3 + x_4 - 2x_5 = 4 \end{cases}.$$

а) Доказать, что она совместна.

б) Найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы.

в) Найти общее решение системы и записать его в векторной форме.

4. В пространстве $\mathbf{P}_3$ многочленов степени не выше 3 рассматриваются подпространства $L_1 = \{p \in \mathbf{P}_3: p(0) = p'(0) = 0\}$ и $L_2 = \{p \in \mathbf{P}_3: p(1) = 0\}$. Найти базис подпространств $L_1 \cap L_2$ и $L_1 + L_2$, размерность $L_1 + L_2$.
5. В линейном подпространстве $L = \{x \in \mathbf{R}_3: x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$ пространства $\mathbf{R}_3$ действует оператор A по формуле: $\forall x = (x_1; x_2; x_3) \in L \rightarrow Ax = (x_3; x_1 - x_2; -2x_2 + 2x_3)$. Найти матрицу обратного оператора в базисе $f_1 = (1; 0; 1), f_2 = (0; 1; 1)$.

Зачет по линейной алгебре. 2 семестр

Вариант 8

1. Является ли множество всех многочленов $p(x) \in P_5$ (степени не выше 5) таких, что $p'(x) = 0$ для всех $x \in (-\infty, +\infty)$, линейным пространством? В случае положительного ответа найти размерность этого пространства, указать какой-нибудь базис.
2. Найти общее решение однородной системы:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 4x_4 - 7x_5 = 0 \end{cases};$$
 записать его в векторной форме. Выделить фундаментальную систему решений.
3. Дана система линейных уравнений:
$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 1 \\ 4x_1 - 10x_2 + 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 1 \\ 2x_1 - 14x_2 + 7x_3 - 7x_4 + 11x_5 = -1 \end{cases}.$$
 - а) Доказать, что она совместна.
 - б) Найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы.
 - в) Найти общее решение системы и записать его в векторной форме.
4. В пространстве P_3 многочленов степени не выше 3 рассматриваются подпространства $L_1 = \{p \in P_3: p''(2) = 0\}$ и $L_2 = \{p \in P_3: p(2) = 0\}$. Найти базис подпространств $L_1 \cap L_2$ и L_1 , размерность суммы $L_1 + L_2$.
5. В пространстве P_2 многочленов степени не выше 2 задан оператор $A = D'' + D'$, где D' и D'' – операторы первой и второй производной. Найти матрицу оператора в базисе $f_1 = 2x + 1, f_2 = x^2 + x, f_3 = x^2 + 1$.

Зачет по линейной алгебре. 2 семестр

Вариант 9

1. Является ли множество всех элементов R_6 вида $(x_1; x_2; \dots x_6)$, у которых $x_1 + x_6 = 0$, линейным пространством? В случае положительного ответа найти размерность этого пространства, указать какой-нибудь базис.
2. Найти общее решение однородной системы:
$$\begin{cases} 8x_1 - 5x_2 - 5x_3 - 6x_4 + 3x_5 = 0 \\ 4x_1 - x_2 - x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 0 \\ 12x_1 - 7x_2 - 7x_3 - 9x_4 + 5x_5 = 0 \end{cases}$$
; записать его в векторной форме. Выделить фундаментальную систему решений.
3. Дана система линейных уравнений:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 6x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 6 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 - 4x_4 + x_5 = 4 \\ 2x_1 + x_2 - 7x_3 + x_4 - 4x_5 = 11 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 9 \end{cases}$$
 - а) Доказать, что она совместна.
 - б) Найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы.
 - в) Найти общее решение системы и записать его в векторной форме.
4. В пространстве P_3 многочленов степени не выше 3 рассматриваются подпространства $L_1 = \{p \in P_3 : p(1) = p'(1) = 0\}$ и $L_2 = \{p \in P_3 : p'(0) = 0\}$. Найти базис подпространства $L_1 \cap L_2$ и размерность суммы $L_1 + L_2$.
5. В пространстве P_2 многочленов степени не выше 2 задан оператор $A = D' + I$, где D' – оператор дифференцирования, I – тождественный оператор. Найти матрицу оператора в базисе $f_1 = 1, f_2 = (x - 1), f_3 = (x - 1)^2$.

Зачет по линейной алгебре. 2 семестр

Вариант 10

1. Является ли множество всех многочленов $p(x) \in P_5$ (степени не выше 5) таких, что $p'(0) = p(0) = 0$, линейным пространством? В случае положительного ответа найти размерность этого пространства, указать какой-нибудь базис.

2. Найти общее решение однородной системы:
$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 - x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 0 \\ 7x_1 + 9x_2 - 3x_3 + 5x_4 + 6x_5 = 0 \\ 5x_1 + 9x_2 - 3x_3 + x_4 + 6x_5 = 0 \end{cases}$$
; записать его в векторной форме. Выделить фундаментальную систему решений.

3. Дана система линейных уравнений:
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 5x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_5 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}.$$

а) Доказать, что она совместна.

б) Найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы.

в) Найти общее решение системы и записать его в векторной форме.

4. В пространстве P_3 многочленов степени не выше 3 рассматриваются подпространства $L_1 = \{p \in P_3: p''(2) = 0\}$ и $L_2 = \{p \in P_3: p'(2) = 0\}$. Найти базис подпространства $L_1 \cap L_2$ и размерность $L_1 + L_2$.
5. В подпространстве $L = \{p \in P_2: p(0) = 0\}$ пространства P_2 многочленов степени не выше 2 задан оператор: $A(ax^2 + bx) = (a + b)x^2 + (a - b)x$. Найти матрицу оператора в базисе $f_1 = x + 2x^2, f_2 = -x + x^2$.

Зачет по линейной алгебре. 2 семестр

Вариант 11

1. Является ли множество всех многочленов $p(x) \in P_5$ (степени не выше 5) таких, что $p(1) = p(0) = 0$, линейным пространством? В случае положительного ответа найти размерность этого пространства, указать какой-нибудь базис.

2. Найти общее решение однородной системы:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 3x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 6x_3 - 4x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 + 3x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ 5x_1 + 2x_2 + 15x_3 - 9x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$
; записать его в векторной форме. Выделить фундаментальную систему решений.

3. Дана система линейных уравнений:
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_5 = 1 \\ 3x_1 - 3x_2 + 5x_3 - x_4 + 2x_5 = -1 \\ -x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 = 3 \end{cases}$$
.

а) Доказать, что она совместна.

б) Найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы.

в) Найти общее решение системы и записать его в векторной форме.

4. В пространстве P_3 многочленов степени не выше 3 рассматриваются подпространства $L_1 = \{p \in P_3: p(0) = p'(0) = p''(0) = 0\}$ и $L_2 = \{p \in P_3: p(1) = p'(2) = 0\}$. Найти базис суммы $L_1 + L_2$. Является ли сумма прямой?
5. В подпространстве $L = \{p \in P_2: p(0) = p'(0) = 0\}$ пространства P_2 многочленов степени не выше 2 действует оператор: $A(ax^2 + bx + c) = (a + b)x^2 + (a + c)x + (b - a)$. Найти матрицу оператора в базисе $f_1 = x^2 + x - 1, f_2 = x - 1$.

Зачет по линейной алгебре. 2 семестр

Вариант 12

1. Является ли множество всех матриц $A \in A^{2 \times 3}$: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$ – таких, что $\text{rang} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = 0$, линейным пространством? В случае положительного ответа найти размерность этого пространства, указать какой-нибудь базис.
2. Найти общее решение однородной системы:
$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 0 \\ 4x_1 - 10x_2 + 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 0 \\ 2x_1 - 14x_2 + 7x_3 - 7x_4 + 11x_5 = 0 \end{cases}$$
; записать его в векторной форме. Выделить фундаментальную систему решений.
3. Дана система линейных уравнений:
$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2 \\ 6x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 3 \\ 9x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4 \end{cases}$$
 - а) Доказать, что она совместна.
 - б) Найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы.
 - в) Найти общее решение системы и записать его в векторной форме.
4. В пространстве P_3 многочленов степени не выше 3 рассматриваются подпространства $L_1 = \{p \in P_3: p(1) = p'(1) = 0\}$ и $L_2 = \{p \in P_3: p(0) = p'(0) = p''(0) = 0\}$. Найти базис суммы $L_1 + L_2$. Является ли сумма прямой?
5. В подпространстве $L = \{p \in P_2: p'(0) = 0\}$ пространства P_2 многочленов степени не выше 2 действует оператор: $A(ax^2 + bx + c) = (a + c)x^2 + bx + (a - c)$. Найти матрицу обратного оператора в базисе $f_1 = x^2 + 1$, $f_2 = 2x^2 + 3$.

Зачет по линейной алгебре. 2 семестр

Вариант 13

1. Является ли множество всех элементов R_6 вида $(x_1; x_2; \dots x_6)$, у которых $x_2 - x_4 + x_6 = 0$, линейным пространством? В случае положительного ответа найти размерность этого пространства, указать какой-нибудь базис.
2. Найти общее решение однородной системы:
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 + 5x_5 = 0 \\ 7x_1 + 10x_2 + x_3 + 6x_4 + 5x_5 = 0 \end{cases}$$
; записать его в векторной форме. Выделить фундаментальную систему решений.
3. Дана система линейных уравнений:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = 2 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 1 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 4 \end{cases}$$
 - а) Доказать, что она совместна.
 - б) Найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы.
 - в) Найти общее решение системы и записать его в векторной форме.
4. В пространстве $L(1; \sin x; \cos x)$ – линейной оболочке функций $e_1 = 1, e_2 = \sin x, e_3 = \cos x$ – рассматриваются подпространства $L_1 = L(e_2 + e_3)$ и $L_2 = L(e_2 - e_3)$. Найти размерность пересечения $L_1 \cap L_2$ и базис суммы $L_1 + L_2$. Является ли сумма $L_1 + L_2$ прямой?
5. В пространстве $L(1; e^x; e^{2x})$ – линейной оболочке функций $e_1 = 1, e_2 = e^x, e_3 = e^{2x}$, задан оператор $A = 2D'' + D'$, где D' и D'' – операторы первой и второй производной. Найти матрицу оператора в базисе $f_1 = 1 + e^x, f_2 = 1 - e^x, f_3 = e^{2x}$.

Зачет по линейной алгебре. 2 семестр

Вариант 14

1. Является ли множество всех элементов $\mathbf{R}_7$ вида $(x_1; x_2; \dots x_7)$, у которых $x_1 = x_3 = x_5 = x_7$, линейным пространством? В случае положительного ответа найти размерность этого пространства, указать какой-нибудь базис.

2. Найти общее решение однородной системы:
$$\begin{cases} 3x_1 - 9x_2 + 15x_3 + 2x_4 + 5x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 + x_5 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 + x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$
; записать его в векторной форме. Выделить фундаментальную систему решений.

3. Дана система линейных уравнений:
$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 4x_3 = 0 \\ 4x_1 - x_2 - 9x_3 + 2x_4 - x_5 = 2 \\ 3x_1 + 9x_2 + 16x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 2 \\ 5x_1 + x_2 - 6x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 3 \end{cases}$$

а) Доказать, что она совместна.

б) Найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы.

в) Найти общее решение системы и записать его в векторной форме.

4. В пространстве квадратных матриц $\mathbf{A}^{2 \times 2}$ рассматриваются подпространства $L_1 = \{A \in \mathbf{A}^{2 \times 2}: a_{ij} = a_{ji}\}$ симметрических матриц и $L_2 = \{A \in \mathbf{A}^{2 \times 2}: a_{ij} = -a_{ji}\}$ кососимметрических матриц. Найти размерность пересечения $L_1 \cap L_2$. Опишите пространство $L_1 + L_2$.
5. В пространстве $L(e^x; e^{-x})$ – линейной оболочке функций $e_1 = e^x$, $e_2 = e^{-x}$ – задан оператор $A = I + \alpha D'$, где D' – оператор дифференцирования, I – тождественный оператор. Найти матрицу оператора в базисе $f_1 = \operatorname{sh} x$, $f_2 = \operatorname{ch} x$. При каких α оператор A имеет обратный оператор?

Зачет по линейной алгебре. 2 семестр

Вариант 15

1. Является ли множество всех элементов R_6 вида $(x_1; x_2; \dots x_6)$, у которых $x_1 = x_2, x_3 = x_4, x_5 = x_6$, линейным пространством? В случае положительного ответа найти размерность этого пространства, указать какой-нибудь базис.

2. Найти общее решение однородной системы;
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 8x_1 + 12x_2 - 9x_3 + 8x_4 = 0 \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 - 7x_4 = 0 \end{cases}$$
; записать его в векторной форме.

Выделить фундаментальную систему решений.

3. Дана система линейных уравнений:
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = -1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 = 1 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 0 \\ x_1 - 10x_2 - 25x_3 + 3x_5 = -2 \end{cases}$$

а) Доказать, что она совместна.

б) Найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы.

в) Найти общее решение системы и записать его в векторной форме.

4. В пространстве квадратных матриц $A^{2 \times 2}$ рассматриваются подпространства $L_1 = \{A \in A^{2 \times 2}; a_{ij} = 0, i \neq j\}$ диагональных матриц и $L_2 = \{A \in A^{2 \times 2}; a_{ij} = a_{ji}\}$ симметрических матриц. Найти размерность пересечения $L_1 \cap L_2$. Опишите пространство $L_1 + L_2$.
5. В пространстве $L(\sin x; \cos x)$ – линейной оболочке функций $e_1 = \sin x, e_2 = \cos x$ задан оператор интегрирования: $A(a \sin x + b \cos x) = -a \cos x + b \sin x$. Найти матрицу обратного оператора A^{-1} в базисе $f_1 = \sin x + \cos x, f_2 = \cos x - \sin x$. Сравнить оператор A^{-1} с оператором дифференцирования.

Зачет по линейной алгебре. 2 семестр

Вариант 16

1. Является ли множество всех многочленов $p(x) \in P_5$ (степени не выше 5) таких, что $p(1) = 0$, линейным пространством? В случае положительного ответа найти размерность этого пространства, указать какой-нибудь базис.

2. Найти общее решение однородной системы:
$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 + 8x_4 = 0 \\ 5x_1 + 18x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}$$
; записать его в векторной форме.

Выделить фундаментальную систему решений.

3. Дана система линейных уравнений:
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 + x_5 = 1 \\ 4x_1 + 5x_2 - 10x_3 + 7x_4 - 5x_5 = 1 \\ 2x_1 + 7x_2 - 14x_3 + 11x_4 - 7x_5 = -1 \end{cases}$$
.

а) Доказать, что она совместна.

б) Найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы.

в) Найти общее решение системы и записать его в векторной форме.

4. В пространстве квадратных матриц $A^{2 \times 2}$ рассматриваются подпространства $L_1 = \{A \in A^{2 \times 2}: a_{i2} = 0, i = 1, 2\}$ и $L_2 = \{A \in A^{2 \times 2}: a_{1j} = 0, j = 1, 2\}$. Найти размерность пересечения $L_1 \cap L_2$. Опишите пространство $L_1 + L_2$.
5. В пространстве $L(e^x; e^{2x})$ – линейной оболочке функций $e_1 = e^x, e_2 = e^{2x}$ – задан оператор интегрирования: $A(ae^x + be^{2x}) = ae^x + \frac{1}{2}be^{2x}$. Найти матрицу оператора A^{-1} в базисе $f_1 = e^x + 2e^{2x}, f_2 = e^x - e^{2x}$.

Зачет по линейной алгебре. 2 семестр

Вариант 17

1. Является ли множество всех элементов R_7 вида $(x_1; x_2; \dots x_7)$, у которых $x_1 = x_4 = x_7 = 0$, линейным пространством? В случае положительного ответа найти размерность этого пространства, указать какой-нибудь базис.

2. Найти общее решение однородной системы:
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 - 13x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 - 2x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 6x_5 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 - 7x_5 = 0 \end{cases};$$
 записать его в векторной форме. Выделить фундаментальную систему решений.

3. Дана система линейных уравнений:
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 1 \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 2 \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 3 \end{cases}.$$

а) Доказать, что она совместна.

б) Найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы.

в) Найти общее решение системы и записать его в векторной форме.

4. В пространстве квадратных матриц $A^{2 \times 2}$ рассматриваются подпространства $L_1 = \{A \in A^{2 \times 2}: a_{11} + a_{12} = 0, a_{21} + a_{22} = 0\}$ и $L_2 = \{A \in A^{2 \times 2}: a_{11} + a_{21} = 0, a_{12} + a_{22} = 0\}$. Найти базис в пересечении $L_1 \cap L_2$. Опишите пространство $L_1 + L_2$.

5. В пространстве квадратных матриц второго порядка действует оператор $A \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}$. Найти матрицу этого оператора в базисе $e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Зачет по линейной алгебре. 2 семестр

Вариант 18

1. Является ли множество всех элементов R_6 вида $(x_1; x_2; \dots x_6)$, у которых $x_1 = x_6, x_2 = x_5, x_3 = x_4$, линейным пространством? В случае положительного ответа найти размерность этого пространства, указать какой-нибудь базис.

2. Найти общее решение однородной системы:
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 0 \\ 6x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 - 11x_5 = 0 \\ 6x_1 + 4x_2 + x_3 + 4x_4 - 13x_5 = 0 \end{cases}$$
; записать его в векторной форме. Выделить фундаментальную систему решений.

3. Дана система линейных уравнений:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 7 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = -2 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 23 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 12 \end{cases}.$$

а) Доказать, что она совместна.

б) Найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы.

в) Найти общее решение системы и записать его в векторной форме.

4. В линейном пространстве R_4 рассмотрены два подпространства $L_1: \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ и $L_2: \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$. Найти базис в $L_1 \cap L_2$ и размерность $L_1 + L_2$.

5. В пространстве квадратных матриц второго порядка действует оператор $A \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. Найти матрицу этого оператора в базисе $e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Зачет по линейной алгебре. 2 семестр

Вариант 19

1. Является ли множество всех элементов $\mathbf{R}_6$ вида $(x_1; x_2; \dots x_6)$, у которых $x_2 = x_6$, $x_1 = 0$, линейным пространством? В случае положительного ответа найти размерность этого пространства, указать какой-нибудь базис.

2. Найти общее решение однородной системы:
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + 5x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ 4x_1 - x_2 - 13x_3 + 13x_4 = 0; \\ x_1 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_2 + 5x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$
 записать его в векторной форме.

Выделить фундаментальную систему решений.

3. Дана система линейных уравнений:
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 7x_4 + 2x_5 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 + 3x_5 = 4 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 1 \end{cases}$$

а) Доказать, что она совместна. б) Найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы. в) Найти общее решение системы и записать его в векторной форме.

4. В линейном пространстве $\mathbf{R}_4$ рассмотрены два подпространства $L_1: \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ и

$L_2: \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$. Найти базис в $L_1 \cap L_2$ и дополнить его до базиса $L_1 + L_2$.

5. В пространстве квадратных матриц второго порядка действует оператор $P(A) = \frac{1}{2}(A + A^T)$. Найти матрицу этого оператора в базисе $e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Зачет по линейной алгебре. 2 семестр

Вариант 20

1. Является ли множество всех элементов $\mathbf{R}_7$ вида $(x_1; x_2; \dots x_7)$, у которых $x_2 = x_4 = x_6$, линейным пространством? В случае положительного ответа найти размерность этого пространства, указать какой-нибудь базис.

2. Найти общее решение однородной системы:
$$\begin{cases} 11x_1 - 16x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 - 5x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 5x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$
; записать его в векторной форме.

Выделить фундаментальную систему решений.

3. Дана система линейных уравнений:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 7x_3 - 7x_4 - 2x_5 = 4 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - 9x_3 - 5x_5 = 7 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 - 7x_5 = 5 \end{cases}$$

а) Доказать, что она совместна. б) Найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы. в) Найти общее решение системы и записать его в векторной форме.

4. В линейном пространстве L ($1; e^x \sin x; e^x \cos x$) – линейной оболочке функций $e_1 = 1, e_2 = e^x \sin x, e_3 = e^x \cos x$ – рассматриваются подпространства $L_1 = \{f \in L: f(0) = f'(0) = 0\}$ и $L_2 = \{f \in L: f(\frac{\pi}{2}) = 0\}$.

Найти размерность пересечения $L_1 \cap L_2$, базисы в L_1, L_2 и $L_1 + L_2$.

5. В пространстве квадратных матриц второго порядка действует оператор $P(A) = \frac{1}{2}(A - A^T)$. Найти матрицу этого оператора в базисе $e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Зачет по линейной алгебре. 2 семестр

Вариант 21

1. Является ли множество всех матриц $A \in A^{2 \times 2}$ таких, что $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, линейным пространством? В случае положительного ответа найти размерность этого пространства, указать какой-нибудь базис.
2. Найти общее решение однородной системы:
$$\begin{cases} 3x_1 - 7x_2 - 5x_3 + 5x_4 - 2x_5 = 0 \\ \quad - 2x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 \quad - 6x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 7x_3 \quad + x_5 = 0 \end{cases}$$
; записать его в векторной форме. Выделить фундаментальную систему решений.
3. Дана система линейных уравнений:
$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -1 \\ 5x_1 - 4x_2 + 4x_3 + x_4 = -6 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 \quad = -5 \\ x_1 + 2x_2 \quad - x_4 = -4 \end{cases}$$
.
 - а) Доказать, что она совместна.
 - б) Найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы.
 - в) Найти общее решение системы и записать его в векторной форме.
4. В линейном пространстве L ($1; \sin x; \cos x$) – линейной оболочке функций $e_1 = 1, e_2 = \sin x, e_3 = \cos x$ – рассматриваются подпространства $L_1 = \{f \in L: f(0) = f'(0) = 0\}$ и $L_2 = \{f \in L: f(\frac{\pi}{4}) = f'(\frac{\pi}{4}) = 0\}$. Найти размерность пересечения $L_1 \cap L_2$, базисы в L_1, L_2 и $L_1 + L_2$.
5. В линейном пространстве функций вида $f(x) = e^x p(x)$, где $p(x)$ – многочлен степени не выше двух, действует оператор дифференцирования D' . Найти матрицу этого оператора в базисе $f_1 = e^x, f_2 = (1+x)e^x, f_3 = (1+x+x^2)e^x$.

Зачет по линейной алгебре. 2 семестр

Вариант 22

1. Является ли множество всех матриц $A \in A^{2 \times 2}$ таких, что $A = \begin{pmatrix} a & 2b \\ b & c \end{pmatrix}$, линейным пространством? В случае положительного ответа найти размерность этого пространства, указать какой-нибудь базис.
2. Найти общее решение однородной системы:
$$\begin{cases} 19x_1 - 24x_2 - 8x_3 - 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 0 \\ 4x_1 - 6x_2 - 5x_3 - 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - 4x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$
; записать его в векторной форме.

Выделить фундаментальную систему решений.

3. Дана система линейных уравнений:
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ 5x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 = 8 \\ x_1 + 5x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 3 \end{cases}$$
.

а) Доказать, что она совместна.

б) Найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы.

в) Найти общее решение системы и записать его в векторной форме.

4. В линейном пространстве $L(1; x; x^2; x^3)$ – линейной оболочке функций $e_1 = 1, e_2 = x, e_3 = x^2, e_4 = x^3$ – рассматриваются подпространства $L_1 = \{f \in L: f'(0) = f''(0) = 0\}$ и $L_2 = \{f \in L: f(1) = 0\}$. Найти базис в пересечении $L_1 \cap L_2$, базисы в L_1, L_2 .
5. В линейном пространстве функций вида $f(x) = e^{2x} p(x)$, где $p(x)$ – многочлен степени не выше двух, действует оператор повторного дифференцирования D'' . Найти матрицу этого оператора в базисе $f_1 = e^{2x}, f_2 = (1+x)e^{2x}, f_3 = (1+x+x^2)e^{2x}$.

Зачет по линейной алгебре. 2 семестр

Вариант 23

1. Является ли множество всех матриц $A \in A^{2 \times 3}$ таких, что $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & -c & a \end{pmatrix}$, линейным пространством? В случае положительного ответа найти размерность этого пространства, указать какой-нибудь базис.
2. Найти общее решение однородной системы:
$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 5x_4 + 8x_5 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 4x_5 = 0 \\ x_1 - 9x_2 - 3x_3 - 5x_4 - 14x_5 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 5x_4 + 6x_5 = 0 \end{cases}$$
; записать его в векторной форме. Выделить фундаментальную систему решений.
3. Дана система линейных уравнений:
$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = -2 \\ 5x_1 - 4x_2 - x_3 + 6x_4 = 2 \end{cases}$$
 - а) Доказать, что она совместна.
 - б) Найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы.
 - в) Найти общее решение системы и записать его в векторной форме.
4. В линейном пространстве $L(e^x; xe^x; x^2e^x)$ – линейной оболочке функций $e_1 = e^x, e_2 = xe^x, e_3 = x^2e^x$ – рассматриваются подпространства $L_1 = \{f \in L: f(0) + f'(0) = 0\}$ и $L_2 = \{f \in L: f'(0) + f''(0) = 0\}$. Найти базис в пересечении $L_1 \cap L_2$, базис в L_1 и размерность L_2 .
5. В линейном пространстве функций вида $f(x) = e^x p(x)$, где $p(x)$ – многочлен не выше первой степени, действует оператор интегрирования: $A((ax + b)e^x) = (ax + b - a)e^x$. Найти матрицу этого оператора в базисе $f_1 = (x + 1)e^x, f_2 = (x - 1)e^x$.

Зачет по линейной алгебре. 2 семестр

Вариант 24

1. Является ли множество всех матриц $A \in A^{2 \times 3}$ таких, что $A = \begin{pmatrix} a & b & a - b + c \\ c & 0 & 2a + b \end{pmatrix}$, линейным пространством?
В случае положительного ответа найти размерность этого пространства, указать какой-нибудь базис.
2. Найти общее решение однородной системы:
$$\begin{cases} 4x_1 + 7x_2 - 2x_3 + 6x_4 + 5x_5 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 0 \\ 6x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 9x_4 + 7x_5 = 0 \\ 6x_1 + x_2 - 3x_3 + 9x_4 + 5x_5 = 0 \end{cases}$$
; записать его в векторной форме. Выделить фундаментальную систему решений.
3. Дана система линейных уравнений:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 - 11x_5 = 2 \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 - 13x_4 + 54x_5 = -5 \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 + 20x_4 - 20x_5 = 22 \\ x_1 - 5x_4 + x_5 = -2 \end{cases}$$
.
 - а) Доказать, что она совместна.
 - б) Найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы.
 - в) Найти общее решение системы и записать его в векторной форме.
4. В линейном пространстве L ($\sin x$; $\cos x$; $x \sin x$; $x \cos x$) – линейной оболочке функций $e_1 = \sin x$, $e_2 = \cos x$, $e_3 = x \sin x$, $e_4 = x \cos x$ – рассматриваются подпространства $L_1 = \{f \in L: f(0) = f'(0) = 0\}$ и $L_2 = \{f \in L: f''(0) = 0\}$. Найти базис в пересечении $L_1 \cap L_2$, базис в L_1 и размерность L_2 .
5. В линейном пространстве L ($e^x \sin x$; $e^x \cos x$) – линейной оболочке функций $e_1 = e^x \sin x$, $e_2 = e^x \cos x$ – задан оператор дифференцирования D . Найти матрицу D' в базисе $f_1 = e^x (\sin x + \cos x)$, $f_2 = e^x (\cos x - \sin x)$.

Зачет по линейной алгебре. 2 семестр

Вариант 25

1. Является ли множество всех многочленов $p(x) \in P_5$ (степени не выше 5) таких, что $p'(-1) = 0$, линейным пространством? В случае положительного ответа найти размерность этого пространства, указать какой-нибудь базис.
2. Найти общее решение однородной системы:
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 0 \\ 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 0 \\ 9x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_4 + 8x_5 = 0 \end{cases}$$
; записать его в векторной форме. Выделить фундаментальную систему решений.
3. Дана система линейных уравнений:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 = 2 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 - x_5 = 1 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_5 = 5 \end{cases}$$
 - а) Доказать, что она совместна.
 - б) Найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы.
 - в) Найти общее решение системы и записать его в векторной форме.
4. В линейном пространстве L ($e^x \sin x$; $e^x \cos x$; $xe^x \sin x$; $xe^x \cos x$) – линейной оболочке функций $e_1 = e^x \sin x$, $e_2 = e^x \cos x$, $e_3 = xe^x \sin x$, $e_4 = xe^x \cos x$ – рассматриваются подпространства $L_1 = \{f \in L: f(0) = f'(0) = 0\}$ и $L_2 = \{f \in L: f''(0) = 0\}$. Найти базис в пересечении $L_1 \cap L_2$, базис в L_1 и размерность L_2 .
5. В линейном пространстве L ($e^{2x} \sin x$; $e^{2x} \cos x$) – линейной оболочке функций $e_1 = e^{2x} \sin x$, $e_2 = e^{2x} \cos x$ – задан оператор повторного дифференцирования D'' . Найти матрицу D'' в базисе $f_1 = e^{2x} (\sin x + \cos x)$, $f_2 = e^{2x} (\cos x - \sin x)$.

Зачет по линейной алгебре. 2 семестр

Вариант 26

1. Является ли множество всех многочленов $p(x) \in P_4$ (степени не выше 4) таких, что $p''(-1) = p'''(0) = 0$, линейным пространством? В случае положительного ответа найти размерность этого пространства, указать какой-нибудь базис.
2. Найти общее решение однородной системы:
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 + 11x_2 + 34x_3 - 5x_5 = 0 \end{cases}$$
; записать его в векторной форме. Выделить фундаментальную систему решений.
3. Дана система линейных уравнений:
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ 4x_1 - 3x_2 + 8x_3 + 9x_4 = 1 \end{cases}$$
 - а) Доказать, что она совместна.
 - б) Найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы.
 - в) Найти общее решение системы и записать его в векторной форме.
4. В ЛП R_4 заданы два подпространства $L_1: \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$ и $L_2: \begin{cases} 2x_1 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$. Найти размерность пересечения $L_1 \cap L_2$ и базис суммы $L_1 + L_2$. Является ли сумма $L_1 + L_2$ прямой?
5. В линейном пространстве $L(e^x; xe^x; x^2e^x)$ – линейной оболочке элементов e^x, xe^x, x^2e^x – действует оператор дифференцирования D' . Найти матрицу оператора D' в базисе $e_1 = e^x$, $e_2 = (1+x)e^x$, $e_3 = (1+x^2)e^x$.

Зачет по линейной алгебре. 2 семестр

Вариант 27

1. Является ли множество всех матриц $A \in A^{2 \times 4}$ таких, что $A = \begin{pmatrix} 0 & (b-a) & (b-c) & (a-b-c) \\ 3a & (6b-3a) & (b+c) & 0 \end{pmatrix}$, линейным пространством? В случае положительного ответа найти размерность этого пространства, указать какой-нибудь базис.
2. Найти общее решение однородной системы:
$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$
; записать его в векторной форме. Выделить фундаментальную систему решений.
3. Дана система линейных уравнений:
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_5 = 1 \\ 4x_1 - 7x_2 + 2x_3 + x_4 = 3 \\ 3x_1 - 5x_2 - x_3 + x_4 - 4x_5 = 2 \end{cases}$$
.
 - а) Доказать, что она совместна.
 - б) Найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы.
 - в) Найти общее решение системы и записать его в векторной форме.
4. В пространстве многочленов $p(x) \in P_4$ (степени не выше 4) рассматриваются подпространства $L_1 = \{p(x) \in P_4 : p''(1) = p'''(1) = 0\}$ и $L_2 = \{p(x) \in P_4 : p''(-1) = p'''(0) = 0\}$. Найти базис пересечения $L_1 \cap L_2$ и размерность суммы $L_1 + L_2$.
5. В линейном пространстве P_2 (многочлены степени не выше 2) действует оператор $Ap(x) = \frac{1}{x} \int_0^x p(t) dt$. Найти матрицу сопряженного оператора A в базисе $e_1 = 1, e_2 = x, e_3 = x^2$.

Зачет по линейной алгебре. 2 семестр

Вариант 28

1. Является ли множество всех матриц $A \in A^{2 \times 4}$ таких, что $A = \begin{pmatrix} (a+6b) & (c+a) & d & 0 \\ 0 & 3c & (d+b) & -b \end{pmatrix}$, линейным пространством? В случае положительного ответа найти размерность этого пространства, указать какой-нибудь базис.
2. Найти общее решение однородной системы:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 10x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ 5x_1 - x_2 + 8x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 - 12x_3 - 4x_4 + 4x_5 = 0 \end{cases}$$
; записать его в векторной форме. Выделить фундаментальную систему решений.
3. Дана система линейных уравнений:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 1 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 - x_5 = 3 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 4x_4 - x_5 = 2 \end{cases}$$
.
 - а) Доказать, что она совместна.
 - б) Найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы.
 - в) Найти общее решение системы и записать его в векторной форме.
4. В пространстве матриц $A \in A^{2 \times 4}$ рассматриваются два подпространства $L_1 = \{A \in A^{2 \times 4}: a_{11} + a_{13} = 0, a_{21} + a_{23} = 0\}$ и $L_2 = \{A \in A^{2 \times 4}: a_{11} + a_{21} = 0, a_{13} + a_{23} = 0\}$. Найти базис пересечения $L_1 \cap L_2$ и размерность суммы $L_1 + L_2$.
5. В линейном пространстве многочленов P_2 (степени не выше 2) действует оператор $A = E + D'$, где E – тождественный оператор, D' – оператор дифференцирования. Найти матрицу оператора A в базисе $e_1 = 1, e_2 = 1 + x, e_3 = 1 + x + x^2$.

Зачет по линейной алгебре. 2 семестр

Вариант 29

1. Является ли множество всех многочленов $p(x) \in P_4$ (степени не выше 4) таких, что $p''(1) = p'''(1) = 0$, линейным пространством? В случае положительного ответа найти размерность этого пространства, указать какой-нибудь базис.
2. Найти общее решение однородной системы:
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 10x_2 - 3x_3 - 2x_4 - x_5 = 0 \\ 4x_1 + 19x_2 - 4x_3 - 5x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$$
; записать его в векторной форме. Выделить фундаментальную систему решений.
3. Дана система линейных уравнений:
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_5 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 1 \end{cases}$$
.
 - а) Доказать, что она совместна.
 - б) Найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы.
 - в) Найти общее решение системы и записать его в векторной форме.
4. В пространстве матриц $A \in A^{2 \times 4}$ рассматриваются два подпространства $L_1 = \{A \in A^{2 \times 4}: a_{11} + a_{12} + a_{13} = 0, a_{21} + a_{22} + a_{23} = 0\}$ и $L_2 = \{A \in A^{2 \times 4}: a_{11} + a_{12} = 0, a_{21} + a_{22} = 0\}$. Найти базис пересечения $L_1 \cap L_2$ и размерность суммы $L_1 + L_2$.
5. В пространстве $L(1; \sin x; \cos x)$ – линейной оболочке функций $e_1 = 1$, $e_2 = \sin x$, $e_3 = \cos x$ – действует оператор дифференцирования D' . Найти матрицу оператора D' в базисе $f_1 = e_1$, $f_2 = e_1 + e_2$, $f_3 = e_1 + e_2 + e_3$.

Зачет по линейной алгебре. 2 семестр

Вариант 30

1. Является ли множество всех многочленов $p(x) \in P_4$ (степени не выше 4) таких, что $p''(-1) = p'''(0) = 0$, линейным пространством? В случае положительного ответа найти размерность этого пространства, указать какой-нибудь базис.
2. Найти общее решение однородной системы:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 - 2x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 2x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$$
; записать его в векторной форме. Выделить фундаментальную систему решений.
3. Дана система линейных уравнений:
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_5 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 4x_4 + 2x_5 = 1 \end{cases}$$
.
 - а) Доказать, что она совместна.
 - б) Найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы.
 - в) Найти общее решение системы и записать его в векторной форме.
4. В ЛП R_4 заданы два подпространства $L_1: \begin{cases} x_1 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$ и $L_2: \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$. Найти базис пересечения $L_1 \cap L_2$ и базис суммы $L_1 + L_2$.
5. В линейном пространстве $L(e^x; e^x \sin x; e^x \cos x)$ – линейной оболочке элементов $e^x, e^x \sin x, e^x \cos x$ – действует оператор повторного дифференцирования D'' . Найти матрицу оператора D'' в базисе $e_1 = e^x, e_2 = e^x(1 + \sin x + \cos x), e_3 = e^x(\sin x - \cos x)$.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Проскуряков. И.В. Сборник задач по линейной алгебре. М.: ЛБЗ, 2001.
2. Беклемишева Л.А., Петрович А.Ю., Чубаров И.А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре. М.: Наука, 1987.
3. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М.: Наука, 1985.
4. Ильин В.А., Поздняк Э.Н. Линейная алгебра. М.: Наука, 1984.

