МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

Е.В. Сумин, В.Б. Шерстюков,
О.В. Шерстюкова

Интегральные уравнения Фредгольма и Вольтерра, краевые задачи и методы их решения

Учебно-методическое пособие

Москва 2016

УДК 517.968(07)+517.954(07)
ББК 22.161.6я7
С89

Сумин Е.В., Шерстюков В.Б., Шерстюкова О.В. **Интегральные уравнения Фредгольма и Вольтерра, краевые задачи и методы их решения:** *Учебно-методическое пособие*. – М.: НИЯУ МИФИ, 2016. – 96 с.

Настоящее издание является учебно-методическим пособием по курсу интегральных уравнений, читаемому студентам 2-го курса НИЯУ МИФИ. В пособии рассмотрены методы решения интегральных уравнений Фредгольма и Вольтерра, краевой задачи Штурма–Лиувилля и разобраны типовые примеры. В конце пособия приведены задачи для самостоятельного решения и ответы к ним.

Пособие будет полезно аспирантам и преподавателям при проведении практических занятий.

Рецензент д-р физ.-мат. наук, проф. НИЯУ МИФИ А.С. Леонов

ISBN 978-5-7262-2282-0

Глава 1. Интегральные уравнения Фредгольма

§ 1. Уравнения Фредгольма. Основные понятия и определения

Интегральным уравнением называется всякое уравнение, содержащее неизвестную функцию под знаком интеграла.

Линейным интегральным уравнением Фредгольма 2-го рода называется уравнение вида

$$y(x)-\lambda\int_a^b K(x,t)\,y(t)\,dt=f(x), \tag{1.1}$$

где $y(x)$ – искомая функция; $K(x,t)$ и $f(x)$ – известные функции, заданные на основном квадрате $[a,b]\times[a,b]$ и отрезке $[a,b]$ соответственно; λ – числовой параметр. Функция $K(x,t)$ называется *ядром интегрального уравнения*, а $f(x)$ – *свободным членом* этого уравнения. Если $f(x)\not\equiv 0$, то уравнение (1.1) называется *неоднородным*, если же $f(x)\equiv 0$, то данное уравнение называется *однородным*.

Интегральное уравнение вида

$$\int_a^b K(x,t)\,y(t)\,dt=f(x), \tag{1.2}$$

не содержащее искомой функции $y(x)$ вне интеграла, называется *линейным интегральным уравнением Фредгольма 1-го рода*.

Линейные интегральные уравнения

$$z(x)-\lambda\int_a^b K(t,x)\,z(t)\,dt=g(x), \tag{1.3}$$

$$\int_a^b K(t,x)\,z(t)\,dt = g(x) \tag{1.4}$$

называются *союзными (сопряженными) к уравнениям Фредгольма 2-го рода (1.1) и 1-го рода (1.2)* соответственно, если функции $K(x,t)$, $f(x)$, $g(x)$ и параметр λ – вещественные.

Решением любого из интегральных уравнений (1.1)–(1.4) называется непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция, которая при подстановке ее в это уравнение обращает последнее в тождество.

§ 2. Метод последовательных приближений

Если в уравнении Фредгольма (1.1) числовой параметр λ удовлетворяет условию

$$|\lambda| < \frac{1}{B}, \text{ где } B^2 = \int_a^b\int_a^b |K(x,t)|^2\,dx\,dt, \tag{2.1}$$

то уравнение имеет единственное решение при любой непрерывной функции (свободном члене) $f(x)$. В этом случае оно может быть найдено методом последовательных приближений. Выбирая произвольным образом нулевое приближение $y_0(x)$, можно построить последовательность функций $\{y_n(x)\}$ с помощью рекуррентной формулы

$$y_n(x) = f(x) + \lambda\int_a^b K(x,t)\,y_{n-1}(t)\,dt. \tag{2.2}$$

Функции $y_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ рассматриваются как приближения к искомому решению уравнения. Данная последовательность $\{y_n(x)\}$ сходится равномерно на $[a,b]$ к точному решению, т.е. $y(x) = \lim\limits_{n\to\infty} y_n(x)$.

Пример 2.1. Решить методом последовательных приближений интегральное уравнение

$$y(x) = \frac{1}{2}\int_0^1 y(t)\,dt + \sin\pi x.$$

Решение. Отметим, что в данном уравнении

$$\lambda = \frac{1}{2}, \quad K(x,t) = 1.$$

Тогда

$$B^2 = \int_0^1\int_0^1 \left|K(x,t)\right|^2 \, dx\, dt = \int_0^1\int_0^1 dx\, dt = 1,$$

и условие $\left|\lambda\right| < \dfrac{1}{B}$ выполнено. В качестве нулевого приближения возьмем свободный член $f(x)$ данного уравнения, т.е.

$$y_0(x) = f(x) = \sin \pi x.$$

Строим последовательность функций $\{y_n(x)\}$ по рекуррентной формуле (2.2):

$$y_1(x) = f(x) + \frac{1}{2}\int_0^1 K(x,t)\, y_0(t)\, dt =$$

$$= \sin \pi x + \frac{1}{2}\int_0^1 \sin \pi t\, dt = \sin \pi x + \frac{1}{\pi},$$

$$y_2(x) = f(x) + \frac{1}{2}\int_0^1 K(x,t)\, y_1(t)\, dt =$$

$$= \sin \pi x + \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\sin \pi t + \frac{1}{\pi}\right) dt = \sin \pi x + \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2\pi},$$

$$y_3(x) = f(x) + \frac{1}{2}\int_0^1 K(x,t)\, y_2(t)\, dt =$$

$$= \sin \pi x + \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\sin \pi t + \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2\pi}\right) dt = \sin \pi x + \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{4\pi},$$

$$\ldots,$$

$$y_n(x) = f(x) + \frac{1}{2}\int_0^1 K(x,t)\, y_{n-1}(t)\, dt =$$

$$=\sin\pi x+\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2\pi}+\frac{1}{2^2\pi}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}\pi}=\sin\pi x+\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^k}.$$

Отсюда точное решение $y(x)$ определяется как предел

$$y(x)=\lim_{n\to\infty}y_n(x)=\lim_{n\to\infty}\left(\sin\pi x+\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^k}\right)=\sin\pi x+\frac{2}{\pi}.$$

Пример 2.2. Решить методом последовательных приближений интегральное уравнение

$$y(x)=\frac{5}{6}x+\frac{1}{2}\int_0^1 xt\ y(t)\,dt.$$

Решение. Отметим, что в данном уравнении $\lambda=\frac{1}{2}$, $K(x,t)=xt$. Тогда

$$B^2=\int_0^1\int_0^1 |K(x,t)|^2\ dx\,dt=\int_0^1\int_0^1 x^2t^2\ dx\,dt=\frac{1}{9},$$

и условие $|\lambda|<\frac{1}{B}$ выполнено.

Решим данное интегральное уравнение двумя способами: 1) в качестве нулевого приближения выберем свободный член уравнения, т.е. $y_0(x)=f(x)$; 2) произвольным образом выберем нулевое приближение $y_0(x)$.

1-й способ. В качестве нулевого приближения возьмем свободный член $f(x)$ данного уравнения, т.е. $y_0(x)=f(x)=\frac{5}{6}x$. Строим по формуле (2.2) последовательность функций $\{y_n(x)\}$:

$$y_1(x)=f(x)+\frac{1}{2}\int_0^1 K(x,t)\ y_0(t)\,dt=$$

$$=\frac{5}{6}x+\frac{1}{2}\int_0^1 xt\cdot\frac{5}{6}t\,dt=\frac{5}{6}x+\frac{5}{36}x=\frac{35}{36}x=\frac{5}{6}x\left(1+\frac{1}{6}\right),$$

$$y_2(x) = f(x) + \frac{1}{2}\int_0^1 K(x,t)\, y_1(t)\, dt =$$

$$= \frac{5}{6}x + \frac{1}{2}\int_0^1 xt \cdot \frac{35}{36} t\, dt = \frac{5}{6}x + \frac{35x}{216} = \frac{215}{216}x = \frac{5}{6}x\left(1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{36}\right),$$

$$y_3(x) = f(x) + \frac{1}{2}\int_0^1 K(x,t)\, y_2(t)\, dt = \frac{5}{6}x + \frac{1}{2}\int_0^1 xt \cdot \frac{215}{216} t\, dt =$$

$$= \frac{5}{6}x + \frac{215x}{1296} = \frac{1295x}{1296} = \frac{5}{6}x\left(1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{36} + \frac{1}{216}\right),$$

$$\ldots,$$

$$y_n(x) = f(x) + \frac{1}{2}\int_0^1 K(x,t)\, y_{n-1}(t)\, dt =$$

$$= \frac{5}{6}x\left(1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{6^3} + \ldots + \frac{1}{6^n}\right) = \frac{5}{6}x\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{6^k}\,.$$

Отсюда точное решение $y(x)$ определяется как предел

$$y(x) = \lim_{n\to\infty} y_n(x) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{6}x\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{6^k}\right) = \frac{5}{6}x \cdot \frac{6}{5} = x\,.$$

2-й способ. Выбираем произвольным образом нулевое приближение, например $y_0(x) = x^2$. Строим по формуле (2.2) последовательность функций $\{y_n(x)\}$:

$$y_1(x) = f(x) + \frac{1}{2}\int_0^1 K(x,t)\, y_0(t)\, dt =$$

$$= \frac{5}{6}x + \frac{1}{2}\int_0^1 xt^3\, dt = \frac{5}{6}x + \frac{1}{8}x = \frac{23x}{24}\,,$$

$$y_2(x) = f(x) + \frac{1}{2}\int_0^1 K(x,t)\, y_1(t)\, dt =$$

$$= \frac{5}{6}x + \frac{1}{2}\int_0^1 xt \cdot \frac{23}{24} t\, dt = \frac{5}{6}x + \frac{23}{144}x = \frac{143}{144}x = \frac{5}{6}x + \frac{1}{8}x + \frac{5}{144}x\,,$$

$$y_3(x) = f(x) + \frac{1}{2}\int_0^1 K(x,t)\, y_2(t)\, dt =$$

$$= \frac{5}{6}x + \frac{1}{2}\int_0^1 xt \cdot \frac{143}{144}t\, dt = \frac{5}{6}x + \frac{143}{864}x = \frac{863}{864}x = \frac{5}{6}x + \frac{1}{8}x + \frac{5}{144}x + \frac{5}{864}x\ ,$$

$$\ldots,$$

$$y_n(x) = f(x) + \frac{1}{2}\int_0^1 K(x,t)\, y_{n-1}(t)\, dt =$$

$$= \frac{5}{6}x + \frac{1}{8}x + \frac{5}{144}x + \frac{5}{864}x + \ldots + \frac{5}{144 \cdot 6^{n-2}}\, x =$$

$$= \frac{23x}{24} + \frac{5}{144}x\left(1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{6^2} + \ldots + \frac{1}{6^{n-2}}\right) = \frac{23}{24}x + \frac{5}{144}x\sum_{k=0}^{n-2}\frac{1}{6^k}\ .$$

Отсюда точное решение $y(x)$ определяется как предел

$$y(x) = \lim_{n\to\infty} y_n(x) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{23}{24}x + \frac{5}{144}x\sum_{k=0}^{n-2}\frac{1}{6^k}\right) =$$

$$= \frac{23}{24}x + \frac{5}{144}x \cdot \frac{6}{5} = \frac{23}{24}x + \frac{1}{24}x = x\ .$$

§ 3. Итерированные ядра. Построение резольвенты уравнения Фредгольма с помощью итерированных ядер. Решение уравнений с помощью резольвенты

Если в методе последовательных приближений для интегрального уравнения Фредгольма (1.1) выбрать $y_0(x) = f(x)$, то для n-го приближения можно получить формулу

$$y_n(x) = f(x) + \sum_{m=0}^{n} \lambda^{m+1}\int_a^b K_m(x,t)\, f(t)\, dt =$$

$$= f(x) + \lambda\int_a^b \sum_{m=0}^{n}\lambda^m K_m(x,t)\, f(t)\, dt\ . \qquad (3.1)$$

В формуле (3.1) функции $K_m(x,t)$, называемые *итерированными ядрами*, определяются следующими соотношениями:

$$K_0(x,t) = K(x,t),$$

$$K_1(x,t) = \int_a^b K(x,s)\,K_0(s,t)\,ds,$$

$$K_2(x,t) = \int_a^b K(x,s)\,K_1(s,t)\,ds, \tag{3.2}$$

$$\ldots,$$

$$K_m(x,t) = \int_a^b K(x,s)\,K_{m-1}(s,t)\,ds,$$

$m = 1, 2, 3, \ldots$

Резольвента интегрального уравнения (1.1) (или резольвента ядра $K(x,t)$) определяется формулой

$$R(x,t,\lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m K_m(x,t). \tag{3.3}$$

Ряд, стоящий в правой части формулы (3.3), получается, если $n \to \infty$ под знаком интеграла в формуле (3.1). Этот ряд, называемый *рядом Неймана* ядра $K(x,t)$, сходится при выполнении условия (2.1). В этом случае решение интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода (1.1) может быть найдено по формуле

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x,t,\lambda)\,f(t)\,dt. \tag{3.4}$$

Отметим, что граница (2.1) является существенной для сходимости ряда (3.3). Однако область сходимости данного ряда может оказаться шире, и решение уравнения (1.1) может существовать и для значений $|\lambda| > \dfrac{1}{B}$.

Пример 3.1. Построить резольвенту для интегрального уравнения

$$y(x) = \lambda \int_0^{\pi} \sin(x-t)\,y(t)\,dt + f(x).$$

Решение. Согласно (3.2) запишем последовательность итерированных ядер

$$K_0(x, t) = \sin(x - t),$$

$$K_1(x, t) = \int_0^{\pi} K(x, s)\, K_0(s, t)\, ds =$$

$$= \int_0^{\pi} \sin(x - s) \sin(s - t)\, ds = -\frac{\pi}{2} \cos(x - t),$$

$$K_2(x, t) = \int_0^{\pi} K(x, s)\, K_1(s, t)\, ds =$$

$$= -\frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \sin(x - s) \cos(s - t)\, ds = -\frac{\pi^2}{4} \sin(x - t),$$

$$\ldots$$

Очевидно, что

$$K_{2m}(x, t) = (-1)^m \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2m} \sin(x - t),$$

$$K_{2m-1}(x, t) = (-1)^m \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2m-1} \cos(x - t), \quad m = 1, 2, \ldots$$

Получаем

$$R(x, t, \lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m K_m(x, t) = K_0(x, t) +$$

$$+ \lambda K_1(x, t) + \lambda^2 K_2(x, t) + \ldots =$$

$$= \sin(x - t) - \frac{\lambda\pi}{2} \cos(x - t) - \frac{\lambda^2\pi^2}{4} \sin(x - t) + \ldots =$$

$$= \sin(x - t) \left[1 - \left(\frac{\lambda\pi}{2}\right)^2 + \left(\frac{\lambda\pi}{2}\right)^4 - \ldots\right] -$$

$$- \frac{\lambda\pi}{2} \cos(x - t) \left[1 - \left(\frac{\lambda\pi}{2}\right)^2 + \left(\frac{\lambda\pi}{2}\right)^4 - \ldots\right].$$

При $|\lambda|\cdot\dfrac{\pi}{2}<1$ ряд, стоящий в квадратных скобках, сходится и представляет собой сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Отсюда при $|\lambda|<\dfrac{2}{\pi}$ получаем

$$R(x,t,\lambda)=\frac{\sin(x-t)-\dfrac{\lambda\pi}{2}\cos(x-t)}{1+\left(\lambda\dfrac{\pi}{2}\right)^2}.$$

Для параметра λ в решении (3.4) интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода (1.1) известна оценка, обеспечивающая абсолютную и равномерную сходимость ряда из определения резольвенты (3.3):

$$|\lambda|<\frac{1}{\overline{K}(b-a)},$$

где $\overline{K}=\sup\limits_{\substack{a\le x\le b\\ a\le t\le b}}|K(x,t)|$.

Заметим, что

$$\frac{1}{B}\ge\frac{1}{\overline{K}(b-a)}$$

(выражение для B^2 дается формулой (2.1)).

В рассмотренном примере 3.1 получаем

$$|\lambda|<\frac{1}{\overline{K}(b-a)}=\frac{1}{\pi}.$$

Это говорит о том, что приведенная оценка является достаточной, но не является необходимой для сходимости ряда (3.3).

Пример 3.2. Решить методом итерированных ядер интегральное уравнение

$$y(x)=\lambda\int_0^1\frac{x}{1+t^2}\,y(t)\,dt+1+x^2.$$

Решение. Запишем последовательность итерированных ядер

$$K_0(x,t)=\frac{x}{1+t^2},$$

$$K_1(x,t)=\int_0^1 K(x,s)\,K_0(s,t)\,ds=$$

$$=\int_0^1 \frac{x}{1+s^2}\cdot\frac{s}{1+t^2}\,ds=\frac{\ln 2}{2}\cdot\frac{x}{1+t^2},$$

$$K_2(x,t)=\int_0^1 K(x,s)\,K_1(s,t)\,ds=$$

$$=\frac{\ln 2}{2}\int_0^1 \frac{x}{1+s^2}\cdot\frac{s}{1+t^2}\,ds=\left(\frac{\ln 2}{2}\right)^2\cdot\frac{x}{1+t^2},$$

$$\ldots,$$

$$K_m(x,t)=\left(\frac{\ln 2}{2}\right)^m\cdot\frac{x}{1+t^2}.$$

Получаем

$$R(x,t,\lambda)=\sum_{m=0}^{\infty}\lambda^m K_m(x,t)=\frac{x}{1+t^2}\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda\ln 2}{2}\right)^m.$$

При $|\lambda|\cdot\dfrac{\ln 2}{2}<1$ полученный ряд сходится и представляет собой сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Отсюда при $|\lambda|<\dfrac{2}{\ln 2}$ получаем

$$R(x,t,\lambda)=\frac{x}{1+t^2}\cdot\frac{2}{2-\lambda\ln 2}.$$

Оценим радиус сходимости полученного степенного ряда: $|\lambda|<\dfrac{2}{\ln 2}\approx 2{,}9$. Для рассматриваемого интегрального уравнения

$$B^2=\int_0^1\int_0^1 |K(x,t)|^2\,dx\,dt=$$

$$=\int_0^1\int_0^1 \frac{x^2}{(1+t^2)^2}\,dx\,dt=\frac{\pi+2}{24},$$

т.е. $B=\sqrt{\dfrac{\pi+2}{24}}$, откуда $\dfrac{1}{B}=\sqrt{\dfrac{24}{\pi+2}}\approx 2,2$. Таким образом, область сходимости ряда для резольвенты оказывается шире, чем это диктуется условием (2.1).

Решение данного интегрального уравнения определяется формулой (3.4), согласно которой получаем

$$y(x)=f(x)+\lambda\int_0^1 R(x,t,\lambda)\,f(t)\,dt=$$

$$=1+x^2+\lambda\int_0^1 \frac{x}{1+t^2}\cdot\frac{2}{2-\lambda\ln 2}(1+t^2)\,dt=1+x^2+\frac{2\lambda x}{2-\lambda\ln 2}.$$

§ 4. Интегральные уравнения с вырожденным ядром

Ядро $K(x,t)$ интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода называется *вырожденным*, если оно имеет вид

$$K(x,t)=\sum_{k=1}^{n} p_k(x)\,q_k(t), \tag{4.1}$$

где функции $p_k(x)$ и $q_k(t)$ ($k=1, 2, \ldots, n$) непрерывны на основном квадрате $[a,b]\times[a,b]$ и линейно независимы между собой. В случае ядра (4.1) уравнение Фредгольма (1.1) может быть сведено к системе линейных алгебраических уравнений. Для этого перепишем уравнение (1.1) в виде

$$y(x)=\lambda\sum_{k=1}^{n} p_k(x)\int_a^b q_k(t)\,y(t)\,dt+f(x) \tag{4.2}$$

и введем обозначения

$$c_k=\int_a^b q_k(t)\,y(t)\,dt \quad (k=1, 2, \ldots, n). \tag{4.3}$$

Тогда уравнение (4.2) принимает вид

$$y(x)=\lambda\sum_{k=1}^{n} c_k p_k(x)+f(x), \tag{4.4}$$

где c_k – неизвестные постоянные.

Подставляя выражение (4.4) для функции $y(x)$ в формулу (4.3), получим

$$c_k=\int_a^b q_k(t)\left(\lambda\sum_{i=1}^{n} c_i p_i(t)+f(t)\right)dt=$$

$$=\lambda\sum_{i=1}^{n} c_i\int_a^b q_k(t)\,p_i(t)\,dt+\int_a^b q_k(t)\,f(t)\,dt=\lambda\sum_{i=1}^{n} c_i a_{ki}+b_k, \tag{4.5}$$

где постоянные a_{ki} и b_k определяются соотношениями

$$a_{ki}=\int_a^b p_i(t)\,q_k(t)\,dt,\quad b_k=\int_a^b q_k(t)\,f(t)\,dt. \tag{4.6}$$

Таким образом, вместо интегрального уравнения Фредгольма с вырожденным ядром получаем из (4.5) эквивалентную систему линейных алгебраических уравнений

$$c_k-\lambda\sum_{i=1}^{n} a_{ki}c_i=b_k\quad (k=1, 2, \ldots, n). \tag{4.7}$$

Решая систему уравнений (4.7) и подставляя полученные значения c_k в уравнение (4.4), получим решение исходного интегрального уравнения Фредгольма (1.1). Число решений исходного интегрального уравнения или его неразрешимость определяются свойствами системы (4.7).

Пример 4.1. Решить интегральное уравнение

$$y(x)=\int_0^1 (3x+2t)\,y(t)\,dt+8x^2-5x.$$

Решение. Ядро $K(x,t)=3x+2t$ данного интегрального уравнения является вырожденным, параметр $\lambda=1$. Обозначим

$$p_1(x)=x,\quad q_1(t)=3,\quad p_2(x)=2,\quad q_2(t)=t.$$

По формулам (4.6) найдем коэффициенты:

$$a_{11}=\int_0^1 p_1(t)\,q_1(t)\,dt=\int_0^1 3t\,dt=\frac{3}{2},$$

$$a_{12}=\int_0^1 p_2(t)\,q_1(t)\,dt=\int_0^1 6\,dt=6,$$

$$a_{21}=\int_0^1 p_1(t)\,q_2(t)\,dt=\int_0^1 t^2\,dt=\frac{1}{3},$$

$$a_{22}=\int_0^1 p_2(t)\,q_2(t)\,dt=\int_0^1 2t\,dt=1,$$

$$b_1=\int_0^1 q_1(t)\,f(t)\,dt=\int_0^1 3\,(8t^2-5t)\,dt=\frac{1}{2},$$

$$b_2=\int_0^1 q_2(t)\,f(t)\,dt=\int_0^1 t\,(8t^2-5t)\,dt=\frac{1}{3}.$$

Система уравнений (4.7) принимает вид

$$\begin{cases} c_1-\left(\dfrac{3}{2}c_1+6c_2\right)=\dfrac{1}{2}, \\ c_2-\left(\dfrac{1}{3}c_1+c_2\right)=\dfrac{1}{3}, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} -\dfrac{1}{2}c_1-6c_2=\dfrac{1}{2}, \\ -\dfrac{1}{3}c_1+0\cdot c_2=\dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

Так как главный определитель

$$\Delta=\begin{vmatrix} -\dfrac{1}{2} & -6 \\ -\dfrac{1}{3} & 0 \end{vmatrix}=-2\neq 0,$$

то система имеет единственное решение. Вычислим вспомогательные определители $\Delta_{c_1}=2$, $\Delta_{c_2}=0$. Тогда по формулам Крамера

$$c_1=\frac{\Delta_{c_1}}{\Delta}=-1, \quad c_2=\frac{\Delta_{c_2}}{\Delta}=0.$$

Используя представление (4.4), запишем решение исходного интегрального уравнения:

$$y(x) = -x + 8x^2 - 5x = 8x^2 - 6x .$$

Пример 4.2. Решить интегральное уравнение

$$y(x) = 4\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cdot y(t)\, dt + 2x - \pi .$$

Решение. Ядро $K(x,t) = \sin^2 x$ является вырожденным и состоит из одного слагаемого, параметр $\lambda = 4$. Решим это уравнение следующим образом.

Запишем

$$y(x) = 4\sin^2 x \int_0^{\pi/2} y(t)\, dt + 2x - \pi$$

и обозначим

$$c = \int_0^{\pi/2} y(t)\, dt .$$

Тогда

$$y(x) = 4c\sin^2 x + 2x - \pi .$$

Подставим полученное выражение в формулу для константы c:

$$c = \int_0^{\pi/2} (4c\sin^2 t + 2t - \pi)\, dt ,$$

или

$$c\left(1 - 4\int_0^{\pi/2} \sin^2 t\, dt\right) = \int_0^{\pi/2} (2t - \pi)\, dt .$$

Отсюда

$$c(1-\pi) = -\frac{\pi^2}{4} ,$$

т.е. $c = \dfrac{\pi^2}{4(\pi - 1)}$. Решение исходного интегрального уравнения имеет вид

$$y(x)=\frac{\pi^2}{\pi-1}\sin^2 x+2x-\pi\,.$$

Пример 4.3. Решить интегральное уравнение

$$y(x)=-\frac{\pi}{2}\int_0^1 (\cos\pi x-\sin\pi t)\,y(t)\,dt+2x-1\,.$$

Решение. Ядро $K(x,t)=\cos\pi x-\sin\pi t$ данного интегрального уравнения является вырожденным, параметр $\lambda=-\frac{\pi}{2}$. Обозначим

$$p_1(x)=\cos\pi x\,,\quad q_1(t)=1\,,\quad p_2(x)=-1\,,\quad q_2(t)=\sin\pi t$$

и запишем:

$$a_{11}=\int_0^1 p_1(t)\,q_1(t)\,dt=\int_0^1 \cos\pi t\,dt=0\,,$$

$$a_{12}=\int_0^1 p_2(t)\,q_1(t)\,dt=-\int_0^1 dt=-1\,,$$

$$a_{21}=\int_0^1 p_1(t)\,q_2(t)\,dt=\int_0^1 \cos\pi t\sin\pi t\,dt=0\,,$$

$$a_{22}=\int_0^1 p_2(t)\,q_2(t)\,dt=-\int_0^1 \sin\pi t\,dt=-\frac{2}{\pi}\,,$$

$$b_1=\int_0^1 q_1(t)\,f(t)\,dt=\int_0^1 (2t-1)\,dt=0\,,$$

$$b_2=\int_0^1 q_2(t)\,f(t)\,dt=\int_0^1 \sin\pi t\,(2t-1)\,dt=0\,.$$

Система уравнений (4.7) принимает вид

$$\begin{cases} c_1+\dfrac{\pi}{2}(0\cdot c_1-c_2)=0,\\ c_2+\dfrac{\pi}{2}\left(0\cdot c_1-\dfrac{2}{\pi}c_2\right)=0,\end{cases}$$

или

$$\begin{cases} c_1 - \dfrac{\pi}{2} c_2 = 0, \\ 0 \cdot c_1 + 0 \cdot c_2 = 0. \end{cases}$$

Так как главный определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -\dfrac{\pi}{2} \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

и вспомогательные определители $\Delta_{c_1} = \Delta_{c_2} = 0$, то система уравнений имеет бесконечно много решений. Общим решением этой системы будет $c_1 = C$, $c_2 = \dfrac{2}{\pi} c_1 = \dfrac{2}{\pi} C$, где C – произвольная постоянная. Тогда согласно (4.4) решение исходного интегрального уравнения имеет вид

$$y(x) = -\frac{\pi}{2}\left(C\cos\pi x - \frac{2}{\pi} C \right) + 2x - 1 = -\frac{\pi}{2} C\cos\pi x + C + 2x - 1 .$$

Пример 4.4. Решить интегральное уравнение

$$y(x) = \int_0^1 e^x t\, y(t)\, dt + e^{-x} .$$

Решение. 1-й способ. Ядро $K(x,t) = e^x t$ данного интегрального уравнения является вырожденным и состоит из одного слагаемого, параметр $\lambda = 1$. Будем решать это уравнение способом, использованным при решении примера 4.2.

Запишем

$$y(x) = e^x \int_0^1 t y(t)\, dt + e^{-x}$$

и обозначим

$$c = \int_0^1 t y(t)\, dt .$$

Тогда

$$y(x) = ce^x + e^{-x} .$$

Подставим полученное выражение в формулу для константы c:

$$c = \int_0^1 t(ce^t + e^{-t})\, dt ,$$

или

$$c\left(1 - \int_0^1 te^t\, dt\right) = \int_0^1 te^{-t}\, dt .$$

Отсюда $0 \cdot c = 1 - \dfrac{2}{e}$, что не может выполняться ни при каком c.

Таким образом, исходное интегральное уравнение не имеет решения.

2-й способ. Попробуем решить исходное интегральное уравнение методом последовательных приближений. Напомним, что $\lambda = 1$, $K(x,t) = e^x t$. Тогда

$$B^2 = \int_0^1\int_0^1 |K(x,t)|^2\, dx\, dt = \int_0^1\int_0^1 e^{2x}t^2\, dx\, dt =$$

$$= \int_0^1 e^{2x}\, dx \int_0^1 t^2\, dt = \frac{1}{6}(e^2 - 1) , \quad B = \sqrt{\frac{e^2 - 1}{6}} ,$$

$$\frac{1}{B} = \sqrt{\frac{6}{e^2 - 1}} \approx 0{,}8 .$$

Здесь $|\lambda| = 1 > \dfrac{1}{B} \approx 0{,}8$.

В качестве нулевого приближения возьмем свободный член $f(x)$ данного уравнения, т.е. $y_0(x) = f(x) = e^{-x}$. Строим последовательность функций $\{y_n(x)\}$ по формуле (2.2):

$$y_1(x) = f(x) + \int_0^1 K(x,t)\, y_0(t)\, dt = e^{-x} + \int_0^1 e^x te^{-t}\, dt =$$

$$e^{-x} + e^{x}\int_0^1 te^{-t}\,dt = e^{-x} + e^{x}\left(1 - \frac{1}{2e}\right),$$

$$y_2(x) = f(x) + \int_0^1 K(x,t)\,y_1(t)\,dt =$$

$$= e^{-x} + \int_0^1 e^{x}t\left[e^{-t} + e^{t}\left(1 - \frac{1}{2e}\right)\right]dt =$$

$$= e^{-x} + e^{x}\left[\int_0^1 te^{-t}\,dt + \left(1 - \frac{1}{2e}\right)\int_0^1 te^{t}\,dt\right] =$$

$$= e^{-x} + 2e^{x}\left(1 - \frac{1}{2e}\right),$$

$$y_3(x) = f(x) + \int_0^1 K(x,t)\,y_2(t)\,dt =$$

$$= e^{-x} + \int_0^1 e^{x}t\left[e^{-t} + 2e^{t}\left(1 - \frac{1}{2e}\right)\right]dt =$$

$$= e^{-x} + 3e^{x}\left(1 - \frac{1}{2e}\right),$$

$$\ldots,$$

$$y_n(x) = f(x) + \int_0^1 K(x,t)\,y_{n-1}(t)\,dt =$$

$$= e^{-x} + ne^{x}\left(1 - \frac{1}{2e}\right).$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$, то указанная последовательность функций $\{y_n(x)\}$ расходится. Последнее согласуется с тем, что исходное интегральное уравнение не имеет решения.

§ 5. Собственные значения и собственные функции

Рассмотрим однородное уравнение Фредгольма 2-го рода

$$y(x) - \lambda \int_a^b K(x, t)\, y(t)\, dt = 0\ . \tag{5.1}$$

Отметим, что уравнение (5.1) всегда имеет очевидное решение $y(x) \equiv 0$, которое называется *нулевым (тривиальным) решением*. Значения числового параметра λ, при которых это уравнение имеет ненулевые решения $y(x) \not\equiv 0$, называются *характеристическими числами* (величина $\mu = \dfrac{1}{\lambda}$ называется *собственным значением*) уравнения (5.1) или ядра $K(x, t)$. Каждое ненулевое решение этого уравнения называется *собственной функцией*, соответствующей характеристическому числу λ (собственному значению μ).

Подчеркнем, что число $\lambda = 0$ не является характеристическим числом, так как при $\lambda = 0$ из уравнения (5.1) следует, что $y(x) \equiv 0$.

Если ядро $K(x, t)$ однородного интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода (5.1) является вырожденным, то задача о нахождении собственных значений и собственных функций интегрального уравнения сводится к поиску собственных значений некоторой матрицы. В самом деле, как следует из формул (4.2), (4.3), (4.6), (4.7) (здесь $f(x) = 0$), всякое решение однородного интегрального уравнения (5.1) имеет вид

$$y(x) = \lambda \sum_{k=1}^{n} c_k p_k(x)\,, \tag{5.2}$$

где неизвестные числа c_k являются решением однородной системы уравнений

$$c_k - \lambda \sum_{i=1}^{n} a_{ki} c_i = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{5.3}$$

Система (5.3) может быть записана в матричной форме

$$(\mathbf{I} - \lambda \mathbf{A})\mathbf{C} = \mathbf{0} \quad \text{или} \quad (\mathbf{A} - \mu \mathbf{I})\mathbf{C} = \mathbf{0}\,, \tag{5.4}$$

где $\lambda, \mu \neq 0$; $\mu = \dfrac{1}{\lambda}$; $\mathbf{I} = (\delta_{ij})_n^n$ – единичная матрица порядка n; $\mathbf{A} = (a_{ij})_n^n$ – квадратная матрица порядка n; $\mathbf{C}$ – матрица-столбец, состоящая из чисел c_i $(i = \overline{1, n})$; $\mathbf{0}$ – нулевая матрица-столбец.

Таким образом, собственные значения однородного интегрального уравнения (5.1) совпадают с отличными от нуля собственными значениями матрицы $\mathbf{A}$ и могут быть найдены из характеристического уравнения

$$\det(\mathbf{A} - \mu\mathbf{I}) = 0. \qquad (5.5)$$

Отметим, что если исходное интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода является неоднородным

$$y(x) - \lambda \int_a^b K(x,t)\, y(t)\, dt = f(x)$$

и имеет вырожденное ядро $K(x,t)$, то его решение можно свести к решению системы линейных алгебраических уравнений (4.7), которая может быть записана в матричной форме

$$(\mathbf{I} - \lambda\mathbf{A})\mathbf{C} = \mathbf{B}, \qquad (5.6)$$

где $\mathbf{B}$ – матрица-столбец, состоящая из чисел b_i $(i = \overline{1, n})$.

Пример 5.1. Найти собственные значения и собственные функции интегрального уравнения

$$y(x) - \lambda \int_0^\pi (\cos^2 x \cdot \cos 2t + \cos 3x \cdot \cos^3 t)\, y(t)\, dt = 0.$$

Решение. Ядро

$$K(x,t) = \cos^2 x \cdot \cos 2t + \cos 3x \cdot \cos^3 t$$

является вырожденным. Здесь

$$p_1(x) = \cos^2 x, \quad q_1(t) = \cos 2t, \quad p_2(x) = \cos 3x, \quad q_2(t) = \cos^3 t.$$

По формулам (4.6) найдем элементы матрицы $\mathbf{A}$:

$$a_{11} = \int_0^\pi p_1(t)\, q_1(t)\, dt = \int_0^\pi \cos^2 t \cdot \cos 2t\, dt = \frac{\pi}{4},$$

$$a_{12}=\int\limits_0^\pi p_2(t)\,q_1(t)\,dt=\int\limits_0^\pi \cos 3t\cdot\cos 2t\,dt=0,$$

$$a_{21}=\int\limits_0^\pi p_1(t)\,q_2(t)\,dt=\int\limits_0^\pi \cos^2 t\cdot\cos^3 t\,dt=\int\limits_0^\pi \cos^5 t\,dt=0\,,$$

$$a_{22}=\int\limits_0^\pi p_2(t)\,q_2(t)\,dt=\int\limits_0^\pi \cos 3t\cdot\cos^3 t\,dt=\frac{\pi}{8}\,.$$

Характеристическое уравнение (5.5) для нахождения собственных значений имеет вид

$$\det(\mathbf{A}-\mu\mathbf{I})=\begin{vmatrix}\frac{\pi}{4}-\mu & 0\\ 0 & \frac{\pi}{8}-\mu\end{vmatrix}=0\,,$$

откуда $\left(\frac{\pi}{4}-\mu\right)\left(\frac{\pi}{8}-\mu\right)=0$. Получаем собственные значения $\mu_1=\frac{\pi}{4}$, $\mu_2=\frac{\pi}{8}$ (соответственно характеристические числа $\lambda_1=\frac{4}{\pi}$, $\lambda_2=\frac{8}{\pi}$).

1. При $\mu_1=\frac{\pi}{4}$ система уравнений (5.4) принимает вид

$$\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & -\frac{\pi}{8}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix}=0\,,$$

откуда $c_2=0$, c_1 произвольно. Собственная функция, соответствующая собственному значению $\mu_1=\frac{\pi}{4}$, находится по формуле (5.2). Именно,

$$y(x)=\lambda_1 c_1 p_1(x)+\lambda_1 c_2 p_2(x)=\lambda_1 c_1\cos^2 x=$$

$$=\frac{4}{\pi}c_1\cos^2 x=C_1\cos^2 x\,,\quad C_1\neq 0\,.$$

2. При $\mu_2=\dfrac{\pi}{8}$ система уравнений (5.4) принимает вид

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\pi}{8} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}=0,$$

откуда $c_1=0$, c_2 произвольно. Собственная функция, соответствующая собственному значению $\mu_2=\dfrac{\pi}{8}$, находится по формуле (5.2). Именно,

$$y(x)=\lambda_2 c_1 p_1(x)+\lambda_2 c_2 p_2(x)=\lambda_2 c_2\cos 3x=$$

$$=\frac{8}{\pi}c_2\cos 3x=C_2\cos 3x,\quad C_2\neq 0.$$

Пример 5.2. При различных значениях параметра λ исследовать решения интегрального уравнения

$$y(x)=\lambda\int\limits_0^{\pi}\cos(x+t)\,y(t)\,dt+1.$$

Решение. Данное интегральное уравнение Фредгольма является неоднородным. Запишем его в следующем виде

$$y(x)=\lambda\int\limits_0^{\pi}(\cos x\cdot\cos t-\sin x\cdot\sin t)\,y(t)\,dt+1.$$

Ядро $K(x,t)=\cos x\cdot\cos t-\sin x\cdot\sin t$ является вырожденным. Здесь $p_1(x)=\cos x$, $q_1(t)=\cos t$, $p_2(x)=-\sin x$, $q_2(t)=\sin t$. По формулам (4.6) найдем элементы матрицы **A** и матрицы-столбца **B**:

$$a_{11}=\int\limits_0^{\pi}p_1(t)\,q_1(t)\,dt=\int\limits_0^{\pi}\cos^2 t\,dt=\int\limits_0^{\pi}\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt=\frac{\pi}{2},$$

$$a_{12}=\int\limits_0^{\pi}p_2(t)\,q_1(t)\,dt=-\int\limits_0^{\pi}\sin t\cdot\cos t\,dt=-\int\limits_0^{\pi}\sin t\,d(\sin t)=0,$$

$$a_{21}=\int\limits_0^{\pi}p_1(t)\,q_2(t)\,dt=\int\limits_0^{\pi}\cos t\cdot\sin t\,dt=0,$$

$$a_{22} = \int_0^{\pi} p_2(t)\, q_2(t)\, dt = -\int_0^{\pi} \sin^2 t\, dt = -\int_0^{\pi} \frac{1-\cos 2t}{2}\, dt = -\frac{\pi}{2},$$

$$b_1 = \int_0^{\pi} q_1(t)\, f(t)\, dt = \int_0^{\pi} \cos t \cdot 1 \cdot dt = \int_0^{\pi} \cos t\, dt = 0,$$

$$b_2 = \int_0^{\pi} q_2(t)\, f(t)\, dt = \int_0^{\pi} \sin t \cdot 1 \cdot dt = \int_0^{\pi} \sin t\, dt = 2 .$$

Характеристическое уравнение для определения характеристических чисел вытекает из (5.4) и имеет вид

$$\det(\mathbf{I} - \lambda \mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda\dfrac{\pi}{2} & 0 \\ 0 & 1+\lambda\dfrac{\pi}{2} \end{vmatrix} = 0,$$

откуда $\left(1-\lambda\dfrac{\pi}{2}\right)\left(1+\lambda\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$. Получаем характеристические числа $\lambda_1 = -\dfrac{2}{\pi}$, $\lambda_2 = \dfrac{2}{\pi}$. Система уравнений (5.6) принимает вид

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda\dfrac{\pi}{2} & 0 \\ 0 & 1+\lambda\dfrac{\pi}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

1. При $\lambda \neq \pm\dfrac{2}{\pi}$ система уравнений имеет единственное решение

$$c_1 = 0, \quad c_2 = \frac{2}{1+\lambda\dfrac{\pi}{2}}.$$

В этом случае решение исходного интегрального уравнения согласно формуле (4.4) имеет вид

$$y(x) = \lambda c_1 p_1(x) + \lambda c_2 p_2(x) + f(x) = -\frac{2\lambda}{1+\lambda\dfrac{\pi}{2}} \sin x + 1 =$$

$$=1-\frac{4\lambda}{2+\lambda\pi}\sin x\,.$$

2. При $\lambda=\frac{2}{\pi}$ решения системы уравнений

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

образуют пары (c_1, c_2), где c_1 произвольно, $c_2=1$. Соответственно, решения интегрального уравнения имеют вид

$$y(x)=\lambda c_1 p_1(x)+\lambda c_2 p_2(x)+f(x)=\frac{2}{\pi}c_1\cos x-\frac{2}{\pi}\cdot 1\cdot\sin x+1=$$

$$=C\cos x-\frac{2}{\pi}\sin x+1\,.$$

3. При $\lambda=-\frac{2}{\pi}$ система уравнений

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

решений не имеет. Значит, при данном λ не имеет решений и исходное интегральное уравнение.

Отметим, что однородное интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода может вообще не иметь характеристических чисел и собственных функций, или не иметь действительных характеристических чисел и собственных функций.

Пример 5.3. Показать, что интегральное уравнение

$$y(x)=\lambda\int_0^1\left(\sqrt{x}\cdot t-\sqrt{t}\cdot x\right)y(t)\,dt$$

не имеет действительных характеристических чисел и собственных функций.

Решение. Ядро $K(x,t)=\sqrt{x}\cdot t-\sqrt{t}\cdot x$ является вырожденным. Здесь $p_1(x)=\sqrt{x}$, $q_1(t)=t$, $p_2(x)=-x$, $q_2(t)=\sqrt{t}$. По формулам (4.6) найдем элементы матрицы **A**:

$$a_{11} = \int_0^1 p_1(t)\, q_1(t)\, dt = \int_0^1 t\sqrt{t}\, dt = \int_0^1 t^{3/2}\, dt = \frac{2}{5},$$

$$a_{12} = \int_0^1 p_2(t)\, q_1(t)\, dt = -\int_0^1 t^2\, dt = -\frac{1}{3},$$

$$a_{21} = \int_0^1 p_1(t)\, q_2(t)\, dt = \int_0^1 t\, dt = \frac{1}{2},$$

$$a_{22} = \int_0^1 p_2(t)\, q_2(t)\, dt = -\int_0^1 t\sqrt{t}\, dt = -\int_0^1 t^{3/2}\, dt = -\frac{2}{5}.$$

Характеристическое уравнение для определения характеристических чисел вытекает из (5.4) и имеет вид

$$\det\,(\mathbf{I} - \lambda\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda \cdot \dfrac{2}{5} & -\dfrac{1}{3}\lambda \\ \dfrac{1}{2}\lambda & 1 + \lambda \cdot \dfrac{2}{5} \end{vmatrix} =$$

$$= \left(1 - \frac{2}{5}\lambda\right)\left(1 + \frac{2}{5}\lambda\right) + \frac{1}{6}\lambda^2 = 1 + \frac{\lambda^2}{150}.$$

При действительных λ выполнено соотношение

$$\det\,(\mathbf{I} - \lambda\mathbf{A}) \neq 0,$$

поэтому при всех действительных λ исходное интегральное уравнение имеет только тривиальное решение $y(x) \equiv 0$. Итак, данное уравнение не имеет действительных характеристических чисел и собственных функций.

Пример 5.4. Показать, что интегральное уравнение

$$y(x) = \lambda \int_0^1 \sin \pi x \cos \pi t\; y(t)\, dt$$

не имеет характеристических чисел и собственных функций.

Решение. Запишем исходное уравнение в виде

$$y(x) = \lambda \sin \pi x \int_0^1 \cos \pi t\; y(t)\, dt \qquad (5.7)$$

и обозначим

$$C = \int_0^1 \cos\pi t \; y(t)\, dt .$$

Тогда

$$y(x) = C\lambda \sin\pi x .$$

Подставив полученное выражение для $y(x)$ в обе части уравнения (5.7), получим

$$C\lambda \sin\pi x = C\lambda^2 \sin\pi x \int_0^1 \cos\pi t \sin\pi t \; dt .$$

Но

$$\int_0^1 \cos\pi t \sin\pi t \; dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos z \sin z \; dz = 0 ,$$

поэтому $C\lambda \sin\pi x = 0$, откуда $C = 0$, и значит $y(x) \equiv 0$. Таким образом, исходное интегральное уравнение не имеет характеристических чисел и собственных функций.

§ 6. Интегральные уравнения с симметричным ядром

Ядро интегрального уравнения называется *симметричным*, если $K(x,t) = K(t,x)$, где аргументы x и t определены на основном квадрате $[a,b]\times[a,b]$. Одним из методов решения однородного интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода с симметричным ядром является сведение этого уравнения к краевой задаче.

Пример 6.1. Найти характеристические числа и собственные функции однородного уравнения

$$y(x) = \lambda \int_0^{\pi} K(x,t)\; y(t)\, dt ,$$

где симметричное ядро определяется следующей формулой

$$K(x,t) = \begin{cases} \cos x \sin t, & 0 \le x \le t; \\ \cos t \sin x, & t \le x \le \pi. \end{cases}$$

Решение. Запишем данное уравнение в следующем виде

$$y(x)=\lambda\int_0^x K(x,t)\,y(t)\,dt+\lambda\int_x^\pi K(x,t)\,y(t)\,dt,$$

или

$$y(x)=\lambda\sin x\int_0^x \cos t\,y(t)\,dt+\lambda\cos x\int_x^\pi \sin t\,y(x)\,dt. \qquad (6.1)$$

Дифференцируя уравнение (6.1), получаем

$$y'(x)=\lambda\cos x\int_0^x \cos t\,y(t)\,dt-\lambda\sin x\int_x^\pi \sin t\,y(t)\,dt. \qquad (6.2)$$

Повторное дифферецирование дает

$$y''(x)=\lambda y(x)-\left[\lambda\sin x\int_0^x \cos t\,y(t)\,dt+\lambda\cos x\int_x^\pi \sin t\,y(t)\,dt\right].$$

Но выражение в квадратных скобках равно $y(x)$, поэтому последнее уравнение можно записать следующим образом:

$$y''(x)=\lambda y(x)-y(x).$$

Из равенств (6.1) и (6.2) получаем, что $y(\pi)=0$, $y'(0)=0$.

Итак, исходное интегральное уравнение сведено к следующей краевой задаче

$$\begin{cases} y''(x)-(\lambda-1)\,y(x)=0; & (6.3)\\ y(\pi)=0, \quad y'(0)=0. & (6.4)\end{cases}$$

Здесь возможны три случая.

Случай 1. Пусть $\lambda-1=0$, т.е. $\lambda=1$. Уравнение (6.3) принимает вид $y''(x)=0$, откуда $y(x)=C_1x+C_2$. Используя краевые условия (6.4), получаем систему уравнений

$$\begin{cases} C_1\pi+C_2=0;\\ C_1=0,\end{cases}$$

которая имеет единственное решение: $C_1=0$, $C_2=0$. Значит, интегральное уравнение имеет только тривиальное решение $y(x)\equiv 0$.

Случай 2. Пусть $\lambda-1>0$, т.е. $\lambda>1$. Общее решение уравнения (6.3) имеет вид

$$y(x)=C_1\,\mathrm{ch}\left(\sqrt{\lambda-1}\cdot x\right)+C_2\,\mathrm{sh}\left(\sqrt{\lambda-1}\cdot x\right),$$

откуда

$$y'(x)=\sqrt{\lambda-1}\left[C_1\,\mathrm{sh}\left(\sqrt{\lambda-1}\,x\right)+C_2\,\mathrm{ch}\left(\sqrt{\lambda-1}\,x\right)\right].$$

Краевые условия (6.4) дают следующую систему уравнений

$$\begin{cases} C_1\,\mathrm{ch}\left(\pi\sqrt{\lambda-1}\right)+C_2\,\mathrm{sh}\left(\pi\sqrt{\lambda-1}\right)=0; \\ \sqrt{\lambda-1}\cdot C_2\cdot 1=0. \end{cases}$$

Откуда следует, что $C_2=0$, $C_1=0$ (так как $\mathrm{ch}\left(\pi\sqrt{\lambda-1}\right)\neq 0$). Интегральное уравнение имеет только тривиальное решение $y(x)\equiv 0$.

Итак, при $\lambda\geq 1$ интегральное уравнение не имеет характеристических чисел, а значит, и собственных функций.

Случай 3. Пусть $\lambda-1<0$, т.е. $\lambda<1$. Общее решение уравнения (6.3) имеет вид

$$y(x)=C_1\cos\left(\sqrt{1-\lambda}\cdot x\right)+C_2\sin\left(\sqrt{1-\lambda}\cdot x\right), \tag{6.5}$$

откуда

$$y'(x)=\sqrt{1-\lambda}\left[-C_1\sin\left(\sqrt{1-\lambda}\cdot x\right)+C_2\cos\left(\sqrt{1-\lambda}\cdot x\right)\right].$$

Краевые условия (6.4) дают следующую систему уравнений

$$\begin{cases} C_1\cos\left(\pi\sqrt{1-\lambda}\right)+C_2\sin\left(\pi\sqrt{1-\lambda}\right)=0; \\ \sqrt{1-\lambda}\cdot C_2\cdot 1=0. \end{cases} \tag{6.6}$$

Из-за того, что система уравнений (6.6) – однородная, она будет иметь ненулевое решение, только если ее основной определитель равен нулю, т.е.

$$\begin{vmatrix} \cos\left(\pi\sqrt{1-\lambda}\right) & \sin\left(\pi\sqrt{1-\lambda}\right) \\ 0 & \sqrt{1-\lambda} \end{vmatrix}=\sqrt{1-\lambda}\cos\left(\pi\sqrt{1-\lambda}\right)=0.$$

Так как $\sqrt{1-\lambda} \neq 0$, то $\cos\left(\pi\sqrt{1-\lambda}\right) = 0$, т.е.

$$\pi\sqrt{1-\lambda} = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Получаем $\lambda_n = 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right)^2$, $n = 0,\ 1,\ 2, \ldots$. Если $\lambda = \lambda_n$, то система уравнений (6.6) принимает вид

$$\begin{cases} C_1 \cdot 0 + C_2 = 0; \\ C_2 = 0, \end{cases}$$

отсюда $C_2 = 0$, $C_1 = C$, где C произвольно. Значит, исходное интегральное уравнение имеет бесконечно много решений, определяемых формулой (6.5):

$$y(x) = C\cos\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right), \quad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Итак, характеристические числа и собственные функции данного интегрального уравнения имеют вид

$$\lambda_n = 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right)^2, \quad y_n(x) = \cos\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right), \quad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Рассмотрим неоднородное интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода (1.1) с симметричным ядром. Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и числовой параметр λ не совпадает с характеристическими числами λ_n $(n = 1,\ 2, \ldots)$ соответствующего однородного уравнения, то неоднородное уравнение (1.1) имеет единственное решение

$$y(x) = f(x) - \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\lambda - \lambda_n} y_n(x), \tag{6.7}$$

где $y_n(x)$ – собственные функции соответствующего однородного уравнения,

$$a_n = \int_a^b f(x)\, y_n(x)\, dx, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{6.8}$$

причем ряд, стоящий в правой части формулы (6.7), сходится абсолютно и равномерно на $[a, b]$.

Если же параметр λ совпадает с одним из характеристических чисел, например $\lambda = \lambda_1$ ранга q (т.е. λ_1 отвечает q л.н.з. (линейно независимых) собственных функций $y_1(x)$, $y_2(x)$, …, $y_q(x)$), то неоднородное уравнение (1.1), вообще говоря, не имеет решений. Решения существуют, когда выполняются q условий

$$\int_a^b f(x)\, y_n(x)\, dx = 0\,, \quad n = 1, 2, \ldots, q, \tag{6.9}$$

т.е. когда функция $f(x)$ ортогональна ко всем собственным функциям $y_1(x)$, $y_2(x)$, …, $y_q(x)$, принадлежащим характеристическому числу λ_1. В этом случае неоднородное уравнение имеет бесконечно много решений

$$y(x) = f(x) + C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_q y_q(x) -$$

$$-\lambda_1 \sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{a_n}{\lambda - \lambda_n}\, y_n(x)\,, \tag{6.10}$$

где C_1, C_2, …, C_q – произвольные постоянные.

Пример 6.2. Решить интегральное уравнение

$$y(x) = \lambda \int_0^1 K(x, t)\, y(t)\, dt + \cos \pi x\,,$$

где $\lambda \neq 0$ и

$$K(x, t) = \begin{cases} (x+1)t, & 0 \le x \le t; \\ (t+1)x, & t \le x \le 1. \end{cases}$$

Решение. Соответствующее однородное уравнение запишем в следующем виде

$$y(x) = \lambda \int_0^x K(x, t)\, y(t)\, dt + \lambda \int_x^1 K(x, t)\, y(t)\, dt\,,$$

или

$$y(x) = \lambda x \int_0^x (t+1)\, y(t)\, dt + \lambda (x+1) \int_x^1 t y(t)\, dt\,. \tag{6.11}$$

Дифференцируя уравнение (6.11), получаем

$$y'(x) = \lambda \int_0^x (t+1)\, y(t)\, dt + \lambda \int_x^1 t y(t)\, dt\,. \tag{6.12}$$

Повторное дифференцирование с учетом (6.11) дает

$$y''(x) = \lambda\,(x+1)\, y(x) - \lambda x y(x) = \lambda y(x)\,.$$

Из равенств (6.11) и (6.12) получаем, что $y(0) = y'(0)$, $y(1) = y'(1)$.

Итак, исходное интегральное уравнение сведено к следующей краевой задаче

$$\begin{cases} y''(x) - \lambda y(x) = 0; & (6.13) \\ y(0) = y'(0), \quad y(1) = y'(1). & (6.14) \end{cases}$$

Здесь возможны два случая.

Случай 1. Пусть $\lambda = \mu^2 > 0$ (считаем, что $\mu > 0$). Уравнение (6.13) принимает вид

$$y''(x) - \mu^2 y(x) = 0\,,$$

откуда получаем общее решение

$$y(x) = C_1 \operatorname{ch} \mu x + C_2 \operatorname{sh} \mu x\,.$$

Тогда

$$y'(x) = C_1 \mu \operatorname{sh} \mu x + C_2 \mu \operatorname{ch} \mu x\,.$$

Краевые условия (6.14) дают следующую систему уравнений

$$\begin{cases} C_1 = \mu C_2, \\ C_1 \operatorname{ch} \mu + C_2 \operatorname{sh} \mu = C_1 \mu \operatorname{sh} \mu + C_2 \mu \operatorname{ch} \mu, \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 = \mu C_2, \\ (C_1 - \mu C_2) \operatorname{ch} \mu = (\mu C_1 - C_2) \operatorname{sh} \mu, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} C_1 = \mu C_2, \\ (\mu^2 - 1) C_2 \operatorname{sh} \mu = 0. \end{cases}$$

С учетом того, что $\mu > 0$ ($\operatorname{sh} \mu \neq 0$), получаем систему уравнений

$$\begin{cases} C_1 = \mu C_2, \\ (\mu^2 - 1)C_2 = 0, \end{cases}$$

которая при $\mu^2 \neq 1$ имеет единственное решение $C_1 = 0$, $C_2 = 0$. Значит, в этой ситуации интегральное уравнение имеет тривиальное решение $y(x) \equiv 0$.

Пусть $\lambda = \lambda_0 = \mu^2 = 1$, т.е. $\mu = 1$. Уравнение (6.13) принимает вид $y''(x) - y(x) = 0$, откуда $y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$. Используя краевые условия (6.14), получаем систему уравнений

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = C_1 - C_2; \\ C_1 e + \dfrac{C_2}{e} = C_1 e - \dfrac{C_2}{e}, \end{cases}$$

откуда $C_2 = 0$, C_1 произвольно. Значит, в этой ситуации интегральное уравнение имеет решение $y_0(x) = C_1 e^x$.

Случай 2. Пусть $\lambda = -\mu^2 < 0$ (считаем, что $\mu > 0$). Уравнение (6.13) принимает вид

$$y''(x) + \mu^2 y(x) = 0 .$$

Запишем его общее решение:

$$y(x) = C_1 \cos \mu x + C_2 \sin \mu x . \tag{6.15}$$

Тогда

$$y'(x) = -C_1 \mu \sin \mu x + C_2 \mu \cos \mu x .$$

Краевые условия (6.14) дают следующую систему уравнений

$$\begin{cases} C_1 = \mu C_2; \\ C_1 \cos \mu + C_2 \sin \mu = -C_1 \mu \sin \mu + C_2 \mu \cos \mu, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} C_1 - \mu C_2 = 0; \\ C_1 (\cos \mu + \mu \sin \mu) + C_2 (\sin \mu - \mu \cos \mu) = 0. \end{cases} \tag{6.16}$$

Так как система (6.16) – однородная, то она будет иметь ненулевое решение, только если основной определитель данной системы равен нулю:

$$\begin{vmatrix} 1 & -\mu \\ \cos\mu + \mu\sin\mu & \sin\mu - \mu\cos\mu \end{vmatrix} =$$

$$= \sin\mu - \mu\cos\mu + \mu\cos\mu + \mu^2 \sin\mu = (1+\mu^2)\sin\mu = 0\,,$$

т.е. $\mu_n = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. С учетом рассматриваемого случая $\lambda_n = -\mu_n^2 = -n^2\pi^2$, $n = 1,\ 2,\ \ldots$. Если $\lambda = \lambda_n$, то система уравнений (6.16) принимает вид

$$\begin{cases} C_1 = \mu_n C_2; \\ C_1 \cos\mu_n = C_2\mu_n \cos\mu_n, \end{cases}$$

откуда $C_1 = \mu_n C_2$, C_2 произвольно. Значит, исходное интегральное уравнение имеет бесконечно много решений, определяемых формулой:

$$y(x) = C\,(\sin n\pi x + n\pi\cos n\pi x)\,, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Итак, характеристические числа и собственные функции данного интегрального уравнения имеют вид

$$\lambda_0 = 1\,, \quad y_0(x) = e^x\,,$$

$$\lambda_n = -n^2\pi^2\,, \quad y_n(x) = \sin n\pi x + n\pi\cos n\pi x\,, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

1. Если $\lambda \neq 1$ и $\lambda \neq -n^2\pi^2$ (n = 1, 2, …), то исходное неоднородное уравнение имеет единственное решение, которое будет определяться по формуле (6.7):

$$y(x) = \cos\pi x -$$

$$-\lambda\left[\frac{a_0 e^x}{\lambda-1} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{\lambda+n^2\pi^2}(\sin n\pi x + n\pi\cos n\pi x)\right].$$

Так как

$$a_0 = \int_0^1 e^x \cos\pi x\,dx = -\frac{1+e}{1+\pi^2}\,,$$

$$a_n = \int_0^1 \cos\pi x\,(\sin n\pi x + n\pi\cos n\pi x)\,dx = \begin{cases} 0, & n \neq 1; \\ \dfrac{\pi}{2}, & n = 1, \end{cases}$$

то

$$y(x)=\cos\pi x+\lambda\left[\frac{1+e}{1+\pi^2}\cdot\frac{e^x}{\lambda-1}-\frac{\pi}{2(\lambda+\pi^2)}(\sin\pi x+\pi\cos\pi x)\right].$$

2. Если $\lambda=1$ или $\lambda=-\pi^2$ ($n=1$), то исходное неоднородное уравнение решений не имеет, так как

$$\int_0^1 f(x)\,y_0(x)\,dx=\int_0^1 e^x\cos\pi x\,dx\neq 0$$

и

$$\int_0^1 f(x)\,y_1(x)\,dx=\int_0^1 \cos\pi x\,(\sin\pi x+\pi\cos\pi x)\,dx\neq 0\,.$$

3. Если $\lambda=-n^2\pi^2$ ($n=2,3,\ldots$), то исходное неоднородное интегральное уравнение имеет бесконечно много решений, которые определяются по формуле (6.10):

$$y(x)=\cos\pi x+C\,(\sin n\pi x+n\pi\cos n\pi x)+$$

$$+\lambda\left[\frac{1+e}{1+\pi^2}\cdot\frac{e^x}{\lambda-1}-\frac{\pi}{2(\lambda+\pi^2)}(\sin\pi x+\pi\cos\pi x)\right],$$

где C – произвольная постоянная.

§ 7. Альтернатива Фредгольма

Рассмотрим интегральные уравнения Фредгольма 2-го рода

$$y(x)=\lambda\int_a^b K(x,t)\,y(t)\,dt+f(x)\,, \tag{7.1}$$

$$y(x)=\lambda\int_a^b K(x,t)\,y(t)\,dt \tag{7.2}$$

и союзные (сопряженные) к ним интегральные уравнения

$$z(x)=\lambda\int_a^b K(t,x)\,z(t)\,dt+g(x)\,, \tag{7.3}$$

$$z(x) = \lambda \int_a^b K(t, x)\, z(t)\, dt\,. \qquad (7.4)$$

Согласно альтернативе Фредгольма для фиксированного характеристического числа λ или неоднородное уравнение (7.1) при заданной непрерывной функции $f(x)$ имеет единственное решение (λ не является характеристическим числом, 1-й случай альтернативы), или соответствующее ему однородное уравнение (7.2) имеет по крайней мере одно ненулевое решение (λ – характеристическое число, 2-й случай альтернативы).

Во 2-м случае альтернативы (т.е. когда λ – характеристическое число) для существования решения неоднородного уравнения (7.1) необходимо и достаточно, чтобы функция $f(x)$ была ортогональна любому решению $z(x)$ однородного сопряженного уравнения (7.4), т.е.

$$\int_a^b f(x)\, z(x)\, dx = 0\,. \qquad (7.5)$$

При выполнении последнего условия (7.5) уравнение (7.1) будет иметь бесконечное множество решений. Если же $f(x)$ не ортогональна хотя бы одному из решений $z(x)$ однородного уравнения (7.4), то неоднородное уравнение (7.1) решений не имеет.

Если ядро $K(x, t)$ интегрального уравнения (7.1) симметрично, то однородное сопряженное уравнение (7.4) совпадает с однородным уравнением (7.2), соответствующим уравнению (7.1).

В случае неоднородного интегрального уравнения (7.1) с вырожденным ядром (4.1)

$$y(x) - \lambda \int_a^b \left[\sum_{k=1}^{n} p_k(x)\, q_k(t) \right] y(t)\, dt = f(x)$$

условие (7.5) ортогональности правой части этого уравнения дает n равенств

$$\int_a^b f(t)\, p_k(t)\, dt = 0\,, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \qquad (7.6)$$

Отметим, что при использовании альтернативы Фредгольма вместо того, чтобы доказывать, что данное неоднородное интегральное уравнение (7.1) имеет единственное решение, часто бывает проще доказать, что соответствующее однородное уравнение (7.2) имеет только нулевое (тривиальное) решение.

Пример 7.1. Исследовать на разрешимость при различных значениях параметра λ интегральное уравнение

$$y(x) - \lambda \int_0^1 \sin \ln x \, y(t) \, dt = 2x .$$

Решение. Ядро $K(x,t) = \sin \ln x \cdot 1$ является вырожденным, где $p(x) = \sin \ln x$, $q(t) = 1$.

Обозначим $C = \int_0^1 y(t)\, dt$. Тогда исходное уравнение запишется в виде

$$y(x) = C\lambda \sin \ln x + 2x . \tag{7.7}$$

Подставим (7.7) в выражение для C и получим

$$C = C\lambda \int_0^1 \sin \ln t \, dt + \int_0^1 2t \, dt ,$$

$$C = C\lambda \int_0^1 \sin \ln t \, dt + 1 ,$$

откуда

$$C\left(1 + \frac{\lambda}{2}\right) = 1 , \tag{7.8}$$

так как

$$\int_0^1 \sin \ln t \, dt = -\frac{1}{2} .$$

1. Если $\lambda \neq -2$, то данное неоднородное интегральное уравнение имеет единственное решение

$$y(x) = \frac{2\lambda}{\lambda + 2} \sin \ln x + 2x ,$$

а соответствующее однородное уравнение

$$y(x)-\lambda\int_0^1 \sin\ln x\, y(t)\,dt=0$$

имеет только нулевое решение (λ не является характеристическим числом, 1-й случай альтернативы Фредгольма).

2. Если $\lambda=-2$, то исходное неоднородное интегральное уравнение не имеет решений, так как правая часть $f(x)=2x$ не ортогональна к функции $p(x)=\sin\ln x$, поскольку

$$\int_0^1 2x\sin\ln x\,dx\neq 0\,.$$

Соответствующее однородное уравнение имеет бесконечное множество решений (λ – характеристическое число, 2-й случай альтернативы Фредгольма). Действительно, в случае однородного уравнения соотношение для определения константы C, соответсвующее (7.8), принимает вид

$$C\cdot 0=0\,,$$

т.е. C произвольно.

Все эти решения определяются формулой

$$y(x)=C\lambda\sin\ln x=-2C\sin\ln x=C_1\sin\ln x\,.$$

Пример 7.2. Исследовать на разрешимость при различных значениях параметра λ интегральное уравнение

$$y(x)-\lambda\int_0^{\pi}\cos^2 x\, y(t)\,dt=1\,.$$

Решение. Ядро $K(x,t)=\cos^2 x\cdot 1$ является вырожденным, где $p(x)=\cos^2 x$, $q(t)=1$.

Обозначим $C=\int_0^{\pi} y(t)\,dt$. Тогда исходное уравнение запишется в виде

$$y(x)=C\lambda\cos^2 x+1\,. \tag{7.9}$$

Подставим (7.9) в выражение для C и получим

$$C = C\lambda \int_0^{\pi} \cos^2 t\, dt + \int_0^{\pi} 1 \cdot dt,$$

$$C = C\lambda \int_0^{\pi} \frac{1+\cos 2t}{2}\, dt + \pi,$$

откуда

$$C\left(1 - \frac{\pi\lambda}{2}\right) = \pi. \tag{7.10}$$

1. Если $\lambda \neq \dfrac{2}{\pi}$, то данное неоднородное интегральное уравнение имеет единственное решение

$$y(x) = \frac{2\pi\lambda}{2-\pi\lambda}\cos^2 x + 1,$$

а соответствующее однородное уравнение

$$y(x) - \lambda \int_0^{\pi} \cos^2 x \cdot y(t)\, dt = 0$$

имеет только нулевое решение (λ не является характеристическим числом, 1-й случай альтернативы Фредгольма).

2. Если $\lambda = \dfrac{2}{\pi}$, то исходное неоднородное интегральное уравнение не имеет решений, так как правая часть $f(x) = 1$ не ортогональна к функции $p(x) = \cos^2 x$, поскольку

$$\int_0^{\pi} 1 \cdot \cos^2 x\, dx = \int_0^{\pi} \frac{1+\cos 2x}{2}\, dx = \frac{\pi}{2} \neq 0.$$

Соответствующее однородное уравнение имеет бесконечное множество решений (λ – характеристическое число, 2-й случай альтернативы Фредгольма). Действительно, в случае однородного уравнения соотношение для определения константы C, соответсвующее (7.8), принимает вид

$$C \cdot 0 = 0,$$

т.е. C произвольно.

Все эти решения определяются формулой

$$y(x) = C\lambda \cos^2 x = \frac{2C}{\pi} \cos^2 x = C_1 \cos^2 x .$$

Пример 7.3. Исследовать на разрешимость при различных значениях параметра λ интегральное уравнение

$$y(x) - \lambda \int_0^1 (2xt - 4x^2)\, y(t)\, dt = 1 - 2x .$$

Решение. Ядро $K(x,t) = 2xt - 4x^2$ является вырожденным, где $p_1(x) = 2x$, $q_1(t) = t$, $p_2(x) = -4x^2$, $q_2(t) = 1$.

Запишем интегральное уравнение в следующем виде:

$$y(x) = \lambda \cdot 2x \int_0^1 ty(t)\, dt - \lambda \cdot 4x^2 \int_0^1 y(t)\, dt + 1 - 2x .$$

Обозначим $C_1 = \int_0^1 ty(t)\, dt$, $C_2 = \int_0^1 y(t)\, dt$. Тогда интегральное уравнение запишется следующим образом:

$$y(x) = C_1\lambda \cdot 2x - C_2\lambda \cdot 4x^2 + 1 - 2x . \qquad (7.11)$$

Подставим (7.11) в выражения для C_1 и C_2 и получим систему уравнений

$$\begin{cases} C_1 = \int_0^1 t(C_1 \cdot 2\lambda t - C_2\lambda \cdot 4t^2 + 1 - 2t)\, dt; \\ C_2 = \int_0^1 (C_1\lambda \cdot 2t - C_2\lambda \cdot 4t^2 + 1 - 2t)\, dt, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} C_1\left(1 - \frac{2}{3}\lambda\right) + C_2\lambda = -\frac{1}{6}; \\ -C_1\lambda + C_2\left(1 + \frac{4}{3}\lambda\right) = 0. \end{cases} \qquad (7.12)$$

Вычислим главный определитель Δ и вспомогательные определители Δ_{C_1} и Δ_{C_2} системы уравнений (7.12):

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1-\frac{2}{3}\lambda & \lambda \\ -\lambda & 1+\frac{4}{3}\lambda \end{vmatrix} = \left(1-\frac{2}{3}\lambda\right)\left(1+\frac{4}{3}\lambda\right)+\lambda^2 = \left(\frac{\lambda}{3}+1\right)^2,$$

$$\Delta_{C_1} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{6} & \lambda \\ 0 & 1+\frac{4}{3}\lambda \end{vmatrix} = -\frac{1}{6}\left(1+\frac{4}{3}\lambda\right),$$

$$\Delta_{C_2} = \begin{vmatrix} 1-\frac{2}{3}\lambda & -\frac{1}{6} \\ -\lambda & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{6}\lambda .$$

Если $\Delta \neq 0$, то по формулам Крамера

$$C_1 = \frac{\Delta_{C_1}}{\Delta} = \frac{-\frac{1}{6}\left(1+\frac{4}{3}\lambda\right)}{\left(\frac{\lambda}{3}+1\right)^2},$$

$$C_2 = \frac{\Delta_{C_2}}{\Delta} = \frac{-\frac{\lambda}{6}}{\left(\frac{\lambda}{3}+1\right)^3} .$$

1. Если $\lambda \neq -3$, то данное неоднородное интегральное уравнение имеет единственное решение

$$y(x) = \frac{-2\lambda x \cdot \frac{1}{6}\left(1+\frac{4}{3}\lambda\right)}{\left(\frac{\lambda}{3}+1\right)^2} + \frac{4x^2 \cdot \frac{\lambda^2}{6}}{\left(\frac{\lambda}{3}+1\right)^2} + 1 - 2x =$$

$$= \frac{3x(2\lambda^2 x - 2\lambda^2 - 5\lambda - 6) + (\lambda+3)^2}{(\lambda+3)^2},$$

а соответствующее однородное уравнение

$$y(x)-\lambda\int\limits_0^1 (2xt-4x^2)\,y(t)\,dt=0$$

имеет только нулевое решение (λ не является характеристическим числом, 1-й случай альтернативы Фредгольма).

2. Если $\lambda=-3$, то система уравнений (7.12) принимает вид

$$\begin{cases} 3C_1-3C_2=-\dfrac{1}{6}; \\ 3C_1-3C_2=0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} C_1-C_2=-\dfrac{1}{18}; \\ C_1-C_2=0. \end{cases}$$

Данная система уравнений несовместна, т.е. решений не имеет. Отметим, что исходное неоднородное интегральное уравнение также не имеет решений, так как правая часть $f(x)=1-2x$ не ортогональна к $p_1(x)=2x$ и $p_2(x)=-4x^2$, поскольку

$$\int\limits_0^1 (1-2x)\,2x\,dx\neq 0 \quad \text{и} \quad \int\limits_0^1 (1-2x)\,(-4x^2)\,dx\neq 0\,.$$

Соответствующее однородное уравнение имеет бесконечное множество решений (λ – характеристическое число, 2-й случай альтернативы Фредгольма), так как однородная система уравнений для определения C_1 и C_2, соответствующая (7.12), принимает вид

$$\begin{cases} 3C_1-3C_2=0; \\ 3C_1-3C_2=0, \end{cases}$$

откуда $C_1=C_2=C$, где C произвольно.

Все эти решения согласно (7.11) определяются формулой

$$y(x)=-6Cx+12Cx^2+1-2x=C_3x-2C_3x^2+1-2x\,.$$

Пример 7.4. Исследовать на разрешимость при различных значениях параметра λ интегральное уравнение

$$y(x)-\lambda\int\limits_0^{\pi} \cos\,(x+t)\,y(t)\,dt=\cos 3x\,.$$

Решение. Отметим, что ядро

$$K(x,t)=\cos\,(x+t)=\cos x\cos t-\sin x\sin t$$

является одновременно и симметричным и вырожденным, где $p_1(x)=\cos x$, $q_1(t)=\cos t$, $p_2(x)=-\sin x$, $q_2(t)=\sin t$.

Запишем интегральное уравнение в следующем виде:

$$y(x)=\lambda\cos x\int_0^{\pi}\cos t\; y(t)\,dt-\lambda\sin x\int_0^{\pi}\sin t\; y(t)\,dt+\cos 3x .$$

Обозначим

$$C_1=\int_0^{\pi}\cos t\; y(t)\,dt,\quad C_2=\int_0^{\pi}\sin t\; y(t)\,dt .$$

Тогда интегральное уравнение запишется следующим образом:

$$y(x)=C_1\lambda\cos x-C_2\lambda\sin x+\cos 3x . \tag{7.13}$$

Подставим (7.13) в выражения для C_1 и C_2 и получим систему уравнений:

$$\begin{cases} C_1=\int_0^{\pi}\cos t\,(C_1\lambda\cos t-C_2\lambda\sin t+\cos 3t)\,dt;\\ C_2=\int_0^{\pi}\sin t\,(C_1\lambda\cos t-C_2\lambda\sin t+\cos 3t)\,dt,\end{cases}$$

или

$$\begin{cases} C_1\left(1-\lambda\frac{\pi}{2}\right)=0;\\ C_2\left(1+\lambda\frac{\pi}{2}\right)=0.\end{cases} \tag{7.14}$$

Вычислим определитель Δ системы уравнений (7.14):

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1-\lambda\frac{\pi}{2} & 0\\ 0 & 1+\lambda\frac{\pi}{2}\end{vmatrix}=\left(1-\lambda\frac{\pi}{2}\right)\left(1+\lambda\frac{\pi}{2}\right).$$

1. Если $\lambda\neq\pm\frac{2}{\pi}$, то система уравнений (7.14) имеет единственное решение: $C_1=0$, $C_2=0$. Поэтому исходное неоднородное интегральное уравнение имеет единственное решение $y(x)=\cos 3x$, а соответствующее однородное уравнение

$$y(x) - \lambda \int_0^{\pi} \cos(x+t)\, y(t)\, dt = 0$$

имеет только нулевое решение (λ не является характеристическим числом, 1-й случай альтернативы Фредгольма).

2. Если $\lambda = \lambda_1 = \dfrac{2}{\pi}$, то система уравнений (7.14) принимает вид

$$\begin{cases} C_1 \cdot 0 = 0; \\ C_2 \cdot 0 = 0, \end{cases}$$

откуда C_1 произвольно, $C_2 = 0$.

Исходное неоднородное интегральное уравнение имеет бесконечное множество решений, которые определяются формулой:

$$y(x) = C_1 \lambda \cos x + \cos 3x = C_1 \frac{2}{\pi} \cos x + \cos 3x = C \cos x + \cos 3x.$$

Отметим, что правая часть $f(x) = \cos 3x$ ортогональна к $p_1(x) = \cos x$ и $p_2(x) = -\sin x$, так как

$$\int_0^{\pi} \cos 3t \cos t\, dt = 0, \quad \int_0^{\pi} \cos 3t \sin t\, dt = 0.$$

Соответствующее однородное интегральное уравнение имеет бесконечное множество решений, которые определяются формулой:

$$y(x) = C_1 \lambda \cos x = C_1 \frac{2}{\pi} \cos x = C_3 \cos x$$

(λ_1 является характеристическим числом, 2-й случай альтернативы Фредгольма).

3. Если $\lambda = \lambda_2 = -\dfrac{2}{\pi}$, то система уравнений (7.14) принимает вид

$$\begin{cases} C_1 \cdot 2 = 0; \\ C_2 \cdot 0 = 0, \end{cases}$$

откуда $C_1 = 0$, C_2 произвольно.

Исходное неоднородное интегральное уравнение имеет бесконечное множество решений, которые определяются по формуле:

$$y(x) = -C_2\lambda \sin x + \cos 3x = C_2 \frac{2}{\pi} \sin x + \cos 3x = C \sin x + \cos 3x .$$

Соответствующее однородное интегральное уравнение имеет бесконечное множество решений, которые определяются формулой:

$$y(x) = C_2\lambda \sin x = C_2 \left(-\frac{2}{\pi} \right) \sin x = C_4 \sin x$$

(λ_2 является характеристическим числом, 2-й случай альтернативы Фредгольма).

Глава 2. Интегральные уравнения Вольтерра

§ 8. Уравнения Вольтерра. Основные понятия и определения

Линейным интегральным уравнением Вольтерра 2-го рода называется уравнение вида

$$y(x)-\lambda\int_a^x K(x,t)\,y(t)\,dt=f(x). \tag{8.1}$$

Интегральное уравнение вида

$$\int_a^x K(x,t)\,y(t)\,dt=f(x) \tag{8.2}$$

называется *интегральным уравнением Вольтерра 1-го рода.* Все обозначения в уравнениях (8.1), (8.2) аналогичны обозначениям в уравнениях Фредгольма (1.1), (1.2).

Формально уравнения Вольтерра (8.1), (8.2) можно рассматривать как частный случай уравнений Фредгольма (1.1), (1.2), полагая в уравнениях Фредгольма $K(x,t)\equiv 0$ при $t>x$ или рассматривая ядро интегрального уравнения Вольтерра в треугольнике $a\le x\le b$, $a\le t\le x$. Однако физические задачи, приводящие к уравнениям Вольтерра и Фредгольма, а также свойства решений этих уравнений существенно различны. Поэтому уравнения Вольтерра выделяют в отдельный тип интегральных уравнений.

§ 9. Метод последовательных приближений

Уравнения Вольтерра в отличие от уравнений Фредгольма всегда имеют единственное решение. В частности, уравнение Вольтерра 2-го рода (8.1) имеет единственное решение при любом значении числового параметра λ. Это решение может быть найдено методом последовательных приближений. Выбирая произвольным образом нулевое приближение $y_0(x)$, можно с помощью рекуррентной формулы

$$y_n(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)\, y_{n-1}(t)\, dt \tag{9.1}$$

построить последовательность функций $\{y_n(x)\}$, которая всегда сходится к единственному решению интегрального уравнения при $n \to \infty$, т.е. $y(x) = \lim\limits_{n\to\infty} y_n(x)$.

Пример 9.1. Решить методом последовательных приближений интегральное уравнение

$$y(x) = \int_0^x y(t)\, dt + \frac{x^2}{2}.$$

Решение. Отметим, что в данном уравнении $\lambda = 1$, $K(x,t) = 1$.

В качестве нулевого приближения возьмем $y_0(x) = 1$. Строим последовательность функций $\{y_n(x)\}$ по формуле (9.1):

$$y_1(x) = f(x) + \int_0^x K(x,t)\, y_0(t)\, dt = \frac{x^2}{2} + \int_0^x 1 \cdot dt = \frac{x^2}{2} + x,$$

$$y_2(x) = f(x) + \int_0^x K(x,t)\, y_1(t)\, dt =$$

$$= \frac{x^2}{2} + \int_0^x \left(\frac{t^2}{2} + t\right) dt = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} = x^2 + \frac{x^3}{6},$$

$$y_3(x) = f(x) + \int_0^x K(x,t)\, y_2(t)\, dt = \frac{x^2}{2} + \int_0^x \left(t^2 + \frac{t^3}{6}\right) dt =$$

$$= \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} = \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!},$$

$$\ldots,$$

$$y_n(x) = f(x) + \int_0^x K(x,t)\, y_{n-1}(t)\, dt = \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} =$$

$$=\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+...+\frac{x^n}{n!}\right)-(x+1)=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}-x-1.$$

Отсюда точное решение $y(x)$ определяется как предел

$$y(x)=\lim_{n\to\infty}y_n(x)=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}-x-1\right)=e^x-x-1\,.$$

Пример 9.2. Решить методом последовательных приближений интегральное уравнение

$$y(x)=x+1-\int_0^x y(t)\,dt\,.$$

Отметим, что в данном уравнении $\lambda=1$, $K(x,t)=1$.

В качестве нулевого приближения возьмем свободный член $f(x)$ данного уравнения, т.е. $y_0(x)=f(x)=x+1$.

Строим по формуле (9.1) последовательность функций $\{y_n(x)\}$:

$$y_1(x)=f(x)+\int_0^x K(x,t)\,y_0(t)\,dt=$$

$$=x+1-\int_0^x (t+1)\,dt=x+1-\frac{x^2}{2}-x=1-\frac{x^2}{2}\,,$$

$$y_2(x)=f(x)+\int_0^x K(x,t)\,y_1(t)\,dt=x+1-\int_0^x\left(1-\frac{t^2}{2}\right)dt=$$

$$=x+1-x+\frac{x^3}{6}=1+\frac{x^3}{6}\,,$$

$$y_3(x)=f(x)+\int_0^x K(x,t)\,y_2(t)\,dt=$$

$$=x+1-\int_0^x\left(1+\frac{t^3}{6}\right)dt=x+1-x-\frac{x^4}{24}=1-\frac{x^4}{24}\,,$$

$$\ldots,$$

$$y_n(x)=f(x)+\int\limits_0^x K(x,t)\,y_{n-1}(t)\,dt=1+(-1)^n\cdot\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Отсюда точное решение $y(x)$ определяется как предел

$$y(x)=\lim_{n\to\infty} y_n(x)=\lim_{n\to\infty}\left[1+(-1)^n\,\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right]=1\,.$$

§ 10. Решение интегрального уравнения путем сведения его к дифференциальному уравнению

Если в интегральных уравнениях (8.1), (8.2) ядро $K(x,t)$ и свободный член $f(x)$ имеют непрерывные производные по переменной x, то эти уравнения могут быть почленно продифференцированы несколько раз. Это позволяет свести решение интегрального уравнения к задаче Коши для некоторого обыкновенного дифференциального уравнения. Отметим, что производная от интеграла вычисляется по формуле

$$\frac{d}{dx}\int\limits_0^x K(x,t)\,y(t)\,dt=K(x,x)\,y(x)+\int\limits_0^x \frac{\partial K(x,t)}{\partial x}\,y(t)\,dt\,. \qquad (10.1)$$

Пример 10.1. Решить интегральное уравнение

$$y(x)=x+\int\limits_0^x xty(t)\,dt.$$

Решение. Данное уравнение перепишем в следующем виде

$$y(x)=x\left(1+\int\limits_0^x ty(t)\,dt\right).$$

Обозначим

$$z(x)=1+\int\limits_0^x ty(t)\,dt\,.$$

Продифференцируем последнее уравнение и найдем

$$z'(x)=xy(x)\,.$$

Так как $y(x)=x\cdot z(x)$, то получаем обыкновенное дифференциальное уравнение $z'(x)=x^2\cdot z(x)$. Отсюда $z(x)=Ce^{x^3/3}$.

Заметим, что $z(0)=1$, поэтому $C=1$. Таким образом, решение исходного уравнения имеет вид

$$y(x)=x\cdot z(x)=xe^{x^3/3}.$$

Пример 10.2. Решить интегральное уравнение

$$y(x)=\sin x+\int\limits_0^x \sin(x-t)\,y(t)\,dt.$$

Дважды продифференцируем данное уравнение. С учетом (10.1) получим

$$y'(x)=\cos x+\int\limits_0^x \cos(x-t)\,y(t)\,dt,$$

$$y''(x)=-\sin x+y(x)-\int\limits_0^x \sin(x-t)\,y(t)\,dt.$$

Исключая из полученных выражений для $y(x)$, $y''(x)$ интеграл

$$\int\limits_0^x \sin(x-t)\,y(t)\,dt,$$

получим обыкновенное дифференциальное уравнение $y''=0$. Отсюда $y(x)=C_1x+C_2$. Из выражений для $y(x)$, $y'(x)$ вытекают следующие начальные условия: $y(0)=0$, $y'(0)=1$. Решением данной задачи Коши

$$\begin{cases} y''(x)=0; \\ y(0)=0,\ y'(0)=1 \end{cases}$$

будет функция $y(x)=x$.

§ 11. Итерированные ядра. Построение резольвенты уравнения Вольтерра с помощью итерированных ядер. Решение уравнений с помощью резольвенты

Если в методе последовательных приближений для интегрального уравнения Вольтерра (8.1) выбрать в качестве нулевого приближения $y_0(x)=f(x)$, то по аналогии с уравнением Фредгольма для n-го приближения можно получить формулу

$$y_n(x)=f(x)+\sum_{m=0}^{n}\lambda^{m+1}\int_a^x K_m(x,t)\,f(t)\,dt=$$

$$=f(x)+\lambda\int_a^x\sum_{m=0}^{n}\lambda^m K_m(x,t)\,f(t)\,dt\,. \tag{11.1}$$

В формуле (11.1) функции $K_m(x,t)$, называемые итерированными ядрами, определяются следующим рекуррентным соотношением:

$$K_m(x,t)=\int_t^x K(x,s)\,K_{m-1}(s,t)\,ds\,, \tag{11.2}$$

m = 1, 2, 3, … . Здесь $K_0(x,t)=K(x,t)$. Резольвента интегрального уравнения (8.1) (или резольвента ядра $K(x,t)$) определяется формулой

$$R(x,t,\lambda)=\sum_{m=0}^{\infty}\lambda^m K_m(x,t)\,. \tag{11.3}$$

Указанный ряд в случае непрерывного ядра сходится абсолютно и равномерно. В этом случае решение интегрального уравнения Вольтерра (8.1) может быть найдено по формуле

$$y(x)=f(x)+\lambda\int_a^x R(x,t,\lambda)\,f(t)\,dt\,. \tag{11.4}$$

Пример 11.1. Построить резольвенту для интегрального уравнения

$$y(x)=e^{x^2}+\int_0^x e^{x^2-t^2}y(t)\,dt\,.$$

С помощью построенной резольвенты найти решение данного интегрального уравнения.

Решение. Запишем последовательность итерированных ядер. Имеем

$$K_0(x,t)=e^{x^2-t^2}\,,$$

$$K_1(x,t)=\int_t^x K(x,s)\,K_0(s,t)\,ds=\int_t^x e^{x^2-s^2}e^{s^2-t^2}\,ds=$$

$$=e^{x^2-t^2}\int_t^x ds=e^{x^2-t^2}(x-t)\,.$$

Отметим, что при нахождении итерированных ядер уравнения Вольтерра интегрирование ведется не от a до x (в условии примера $a = 0$), а от t до x. Далее

$$K_2(x,t)=\int_t^x K(x,s)\,K_1(s,t)\,ds=\int_t^x e^{x^2-s^2}e^{s^2-t^2}(s-t)\,ds=$$

$$=e^{x^2-t^2}\int_t^x (s-t)\,ds=e^{x^2-t^2}\cdot\frac{(x-t)^2}{2}=e^{x^2-t^2}\cdot\frac{(x-t)^2}{2!}\,,$$

$$K_3(x,t)=\int_t^x K(x,s)\,K_2(s,t)\,ds=$$

$$=\int_t^x e^{x^2-s^2}\cdot e^{s^2-t^2}\,\frac{(s-t)^2}{2}\,ds=e^{x^2-t^2}\int_t^x \frac{(s-t)^2}{2}\,ds=$$

$$=e^{x^2-t^2}\,\frac{(x-t)^3}{6}=e^{x^2-t^2}\cdot\frac{(x-t)^3}{3!}\,,$$

$$\ldots,$$

$$K_n(x,t)=\int_t^x K(x,s)\,K_{n-1}(s,t)\,ds=e^{x^2-t^2}\cdot\frac{(x-t)^n}{n!}\,.$$

Таким образом, согласно определению (11.3) имеем

$$R(x,t,\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n K_n(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n\cdot e^{x^2-t^2}\cdot\frac{(x-t)^n}{n!}=$$

$$=e^{x^2-t^2}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n\,\frac{(x-t)^n}{n!}=e^{x^2-t^2}\cdot e^{\lambda(x-t)}\,.$$

В данном уравнении $\lambda=1$, поэтому $R(x,t,1)=e^{x^2-t^2}\cdot e^{x-t}$. Решение данного интегрального уравнения определяется формулой (11.4), согласно которой получаем

$$y(x)=f(x)+\int\limits_0^x R(x,t,1)\,f(t)\,dt=e^{x^2}+\int\limits_0^x e^{x^2-t^2}\cdot e^{x-t}\cdot e^{t^2}\,dt=$$

$$=e^{x^2}+e^{x+x^2}\int\limits_0^x e^{-t}\,dt=e^{x^2}-e^{x+x^2}(e^{-x}-1)=e^{x+x^2}.$$

Пример 11.2. Решить интегральное уравнение

$$y(x)=\int\limits_0^x (x-t)\,y(t)\,dt+x^2.$$

Решим данное интегральное уравнение тремя способами: 1) с помощью резольвенты; 2) методом последовательных приближений; 3) методом сведения интегрального уравнения к обыкновенному дифференцильному уравнению.

1-й способ. Запишем последовательность итерированных ядер:

$$K_0(x,t)=x-t,$$

$$K_1(x,t)=\int\limits_t^x K(x,s)\,K_0(s,t)\,ds=\int\limits_t^x (x-s)\,(s-t)\,ds=$$

$$=\frac{(x-t)^3}{6}=\frac{(x-t)^3}{3!},$$

$$K_2(x,t)=\int\limits_t^x K(x,s)\,K_1(s,t)\,ds=$$

$$=\int\limits_t^x (x-s)\,\frac{(s-t)^3}{3!}\,ds=\frac{(x-t)^5}{5!},$$

$$K_3(x,t)=\int\limits_t^x K(x,s)\,K_2(s,t)\,ds=\int\limits_t^x (x-s)\,\frac{(s-t)^5}{5!}\,ds=\frac{(x-t)^7}{7!},$$

$$\ldots,$$

$$K_n(x,t)=\int\limits_t^x K(x,s)\,K_{n-1}(s,t)\,ds=\frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Таким образом, согласно (11.3)

$$R(x,t,\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n K_n(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n\frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n\frac{\sqrt{\lambda}\cdot(x-t)^{2n+1}}{\sqrt{\lambda}\cdot(2n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left[\sqrt{\lambda}(x-t)\right]^{2n+1}}{\sqrt{\lambda}(2n+1)!}=\frac{\operatorname{sh}[\sqrt{\lambda}\,(x-t)]}{\sqrt{\lambda}}.$$

В данном уравнении $\lambda=1$, поэтому $R(x,t,1)=\operatorname{sh}(x-t)$.

Решение данного интегрального уравнения определяется формулой (11.4):

$$y(x)=f(x)+\int_0^x R(x,t,1)\,f(t)\,dt=$$

$$=x^2+\int_0^x \operatorname{sh}(x-t)\cdot t^2\,dt=2\,(\operatorname{ch}x-1).$$

2-й способ. В качестве нулевого приближения возьмем $y_0(x)=0$. Строим по формуле (9.1) последовательность функций $\{y_n(x)\}$:

$$y_1(x)=f(x)+\int_0^x K(x,t)\,y_0(t)\,dt=x^2,$$

$$y_2(x)=f(x)+\int_0^x K(x,t)\,y_1(t)\,dt=$$

$$=x^2+\int_0^x (x-t)\,t^2\,dt=x^2+\frac{x^4}{3}-\frac{x^4}{4}=x^2+\frac{x^4}{12},$$

$$y_3(x)=f(x)+\int_0^x K(x,t)\,y_2(t)\,dt=$$

$$=x^2+\int_0^x (x-t)\left(t^2+\frac{t^4}{12}\right)dt=x^2+\frac{x^4}{12}+\frac{x^6}{360},$$

$$\ldots,$$

$$y_n(x) = f(x) + \int_0^x K(x,t)\, y_{n-1}(t)\, dt =$$

$$= x^2 + \frac{x^4}{12} + \frac{x^6}{360} + \ldots + \frac{2x^{2n}}{(2n)!} = 2\left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!}\right) - 2 .$$

Отсюда точное решение $y(x)$ определяется как предел

$$y(x) = \lim_{n\to\infty} y_n(x) = 2 \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!}\right) - 2 =$$

$$= 2\,\mathrm{ch}\, x - 2 = 2\,(\mathrm{ch}\, x - 1) .$$

3-й способ. Дважды продифференцируем данное интегральное уравнение и учтем (10.1). Получим

$$y'(x) = \int_0^x y(x)\, dt + 2x ,$$

$$y''(x) = y(x) + 2 .$$

Решая последнее обыкновенное дифференциальное уравнение, получаем $y(x) = C_1\,\mathrm{ch}\, x + C_2\,\mathrm{sh}\, x - 2$. Из выражений для $y(x)$, $y'(x)$ вытекают следующие начальные условия: $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$. Решением данной задачи Коши

$$\begin{cases} y'' = y + 2; \\ y(0) = 0, \ \ y'(0) = 0 \end{cases}$$

будет функция $y(x) = 2\,(\mathrm{ch}\, x - 1)$.

§ 12. Интегральные уравнения с вырожденным ядром

Если ядро интегрального уравнения Вольтерра (8.1) является вырожденным, т.е. имеет вид, определяемый формулой (4.1), то уравнение Вольтерра 2-го рода можно записать в виде

$$y(x) = \lambda \sum_{k=1}^{n} p_k(x) \int_a^x q_k(t)\, y(t)\, dt + f(x) . \tag{12.1}$$

Введем функции:

$$z_k(x) = \int\limits_a^x q_k(t)\, y(t)\, dt\,, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{12.2}$$

и подставим их в уравнение (12.1). Решение интегрального уравнения (8.1) с вырожденным ядром (4.1) принимает вид

$$y(x) = \lambda \sum_{k=1}^{n} p_k(x)\, z_k(x) + f(x)\,. \tag{12.3}$$

Продифференцировав формулы (12.2) и подставив в полученные соотношения выражение $y(x)$ из (12.3), получим систему дифференциальных уравнений для неизвестных функций $z_k(x)$:

$$z_k'(x) = q_k(x)\, y(x) =$$

$$= \lambda \sum_{j=1}^{n} q_k(x)\, p_j(x)\, z_j(x) + f(x)\, q_k(x)\,, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{12.4}$$

Из (12.2) при $x = a$ вытекают начальные условия для функций $z_k(x)$: $z_1(a) = z_2(a) = \ldots = z_n(a) = 0$. Полученные функции $z_k(x)$ ($k = \overline{1, n}$) подставляем в (12.3) и получаем решение исходного интегрального уравнения Вольтерра 2-го рода с вырожденным ядром.

Пример 12.1. Решить интегральное уравнение

$$y(x) = \int\limits_1^x \frac{2t}{x^2}\, y(t)\, dt + x^2\,.$$

Решение. Ядро $K(x,t) = \dfrac{t}{x^2}$ является вырожденным, параметр $\lambda = 2$.

Обозначим

$$z(x) = \int\limits_1^x t\, y(t)\, dt\,. \tag{12.5}$$

Тогда исходное уравнение запишется в виде

$$y(x) = \frac{2}{x^2}\, z(x) + x^2\,. \tag{12.6}$$

Продифференцируем (12.5) и подставим вместо $y(x)$ выражение (12.6). Получим

$$z'(x) = x\,y(x) = x\left(\frac{2}{x^2}\,z(x) + x^2\right) = \frac{2}{x}\,z(x) + x^3 .$$

Решением этого уравнения с учетом начального условия $z(1) = 0$ будет функция

$$z(x) = \frac{1}{2}\left(x^4 - x^2\right).$$

Подставляя ее в (12.6), получаем решение исходного интегрального уравнения:

$$y(x) = \frac{2}{x^2}\,z(x) + x^2 = 2x^2 - 1 .$$

Пример 12.2. Решить интегральное уравнение

$$y(x) = \int_e^x \frac{2}{t\ln x}\,y(t)\,dt + 1 .$$

Решение. Ядро $K(x,t) = \dfrac{1}{t\ln x}$ является вырожденным, параметр $\lambda = 2$.

Обозначим

$$z(x) = \int_e^x \frac{y(t)\,dt}{t} . \tag{12.7}$$

Тогда исходное уравнение запишется в виде

$$y(x) = \frac{2}{\ln x}\,z(x) + 1 . \tag{12.8}$$

Продифференцируем (12.7) и подставим вместо $y(x)$ выражение (12.8). Получим

$$z'(x) = \frac{1}{x}\,y(x) = \frac{1}{x}\left(\frac{2}{\ln x}\,z(x) + 1\right) = \frac{2}{x\ln x}\,z(x) + \frac{1}{x}.$$

Решением этого уравнения с учетом начального условия $z(e) = 0$ будет функция

$$z(x) = \ln^2 x - \ln x .$$

Подставляя ее в (12.8), получаем решение исходного интегрального уравнения:

$$y(x) = \frac{2}{\ln x} z(x) + 1 = 2 \ln x - 1 .$$

§ 13. Интегральные уравнения с разностным ядром. Преобразование Лапласа. Решение интегральных и интегро-дифференциальных уравнений

Интегральные уравнения Вольтерра 1-го и 2-го рода

$$\int_0^x K(x,t)\, y(t)\, dt = f(x), \tag{13.1}$$

$$y(x) - \lambda \int_0^x K(x,t)\, y(t)\, dt = f(x), \tag{13.2}$$

у которых ядро $K(x,t)$ зависит лишь от разности аргументов, т.е. $K(x,t) = K(x-t)$, называются *интегральными уравнениями Вольтерра 1-го и 2-го рода типа свертки*. Такие уравнения могут быть решены операторным методом. Суть этого метода состоит в том, что каждой функции $f(x)$ (называемой *оригиналом*) взаимно однозначно ставится в соответствие функция $F(p)$ (называемая *изображением*) по следующему правилу:

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(x)\, e^{-px}\, dx ,$$

которое называется *преобразованием Лапласа*. Ключевым свойством преобразования Лапласа является свойство умножения изображений (теорема о свертке), которое определяется следующим соотношением:

$$f(x) * g(x) = \int_0^x f(x-t)\, g(t)\, dt =$$

$$= \int_0^x f(x)\, g(x-t)\, dt \doteqdot F(p)\, G(p) , \tag{13.3}$$

т.е. изображение свертки оригиналов $f(x)*g(x)$ равно произведению их изображений $F(p)$ и $G(p)$. Здесь соответствия между оригиналами $f(x)$ и $g(x)$ и их изображениями $F(p)$ и $G(p)$ обозначаются символически так: $f(x) \risingdotseq F(p)$, $g(x) \risingdotseq G(p)$.

Пусть $y(x) \risingdotseq Y(p)$, $f(x) \risingdotseq F(p)$, $K(x) \risingdotseq K(p)$. Пользуясь свойством линейности преобразования Лапласа и теоремой о свертке (13.3), преобразуем исходное интегральное уравнение (13.2) в алгебраическое уравнение относительно изображений (операторное уравнение)

$$Y(p) - \lambda\, K(p)\, Y(p) = F(p), \qquad (13.4)$$

откуда находим

$$Y(p) = \frac{F(p)}{1 - \lambda\, K(p)}. \qquad (13.5)$$

По полученному изображению (13.5) восстанавливаем искомую функцию $y(x)$. Для перехода от оригиналов $f(x)$ к изображениям $F(p)$ и обратно используем таблицу соответствия (табл. 13.1).

Пример 13.1. Решить интегральное уравнение с помощью преобразования Лапласа

$$y(x) = \int_0^x \sin(x-t)\, y(t)\, dt + e^{-x}.$$

Решение. В данном уравнении $f(x) = e^{-x}$, $K(x) = \sin x$, $\lambda = 1$, тогда $f(x) \risingdotseq \dfrac{1}{p+1}$, $K(x) \risingdotseq \dfrac{1}{p^2+1}$. Пользуясь свойством линейности преобразования Лапласа и теоремой о свертке, получаем следующее операторное уравнение

$$Y(p) = \frac{1}{p^2+1} Y(p) + \frac{1}{p+1},$$

откуда $Y(p) = \dfrac{p^2+1}{p^2(p+1)}$. Разлагая дробь, стоящую в правой части на сумму простейших дробей, получаем

$$Y(p) = -\frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{2}{p+1}.$$

По табл. 13.1 по изображениям восстанавливаем оригиналы и получаем

$$y(x) = -1 + x + 2e^{-x}.$$

Таблица 13.1

№	Ориганал $f(x)$	Изображение $F(p) = \int\limits_0^{\infty} f(x)\, e^{-px}\, dx$
1	1	$\frac{1}{p}$
2	$e^{\alpha x}$	$\frac{1}{p-\alpha}$
3	x	$\frac{1}{p^2}$
4	$\sin \omega x$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
5	$\cos \omega x$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$
6	$\text{sh}\ \omega x$	$\frac{\omega}{p^2-\omega^2}$
7	$\text{ch}\ \omega x$	$\frac{p}{p^2-\omega^2}$
8	$e^{\alpha x} \sin \omega x$	$\frac{\omega}{(p-\alpha)^2+\omega^2}$
9	$e^{\alpha x} \cos \omega x$	$\frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\omega^2}$
10	$e^{\alpha x}\, \text{sh}\ \omega x$	$\frac{\omega}{(p-\alpha)^2-\omega^2}$
11	$e^{\alpha x}\, \text{ch}\ \omega x$	$\frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2-\omega^2}$
12	x^n (n – целое)	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
13	$e^{\alpha x} \cdot x^n$	$\frac{n!}{(p-\alpha)^{n+1}}$

Окончание табл. 13.1

№	Ориганал $f(x)$	Изображение $F(p)=\int_0^\infty f(x)\,e^{-px}\,dx$
14	$x\sin\omega x$	$\frac{2\omega p}{(p^2+\omega^2)^2}$
15	$x\cos\omega x$	$\frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$
16	$x\,\mathrm{sh}\,\omega x$	$\frac{2\omega p}{(p^2-\omega^2)^2}$
17	$x\,\mathrm{ch}\,\omega x$	$\frac{p^2+\omega^2}{(p^2-\omega^2)^2}$
18	$xe^{\alpha x}\sin\omega x$	$\frac{2\omega(p-\alpha)}{((p-\alpha)^2+\omega^2)^2}$
19	$xe^{\alpha x}\cos\omega x$	$\frac{(p-\alpha)^2-\omega^2}{((p-\alpha)^2+\omega^2)^2}$
20	$\sin(\omega x\pm\varphi)$	$\frac{\omega\cos\varphi\pm p\sin\varphi}{p^2+\omega^2}$
21	$\cos(\omega x\pm\varphi)$	$\frac{p\cos\varphi\mp\omega\sin\varphi}{p^2+\omega^2}$

Пример 13.2. Решить интегральное уравнение с помощью преобразования Лапласа

$$y(x)=5\int_0^x \sin(x-t)\,y(t)\,dt+4.$$

Решение. В данном уравнении $f(x)=4$, $K(x)=\sin x$, $\lambda=5$. Тогда $f(x)\risingdotseq\frac{4}{p}$, $K(x)\risingdotseq\frac{1}{p^2+1}$. Пользуясь свойством линейности преобразования Лапласа и теоремой о свертке, получаем следующее операторное уравнение

$$Y(p)=\frac{5}{p^2+1}Y(p)+\frac{4}{p},$$

откуда

$$Y(p)=\frac{4\,(p^2+1)}{p\,(p^2-4)}.$$

Разлагая дробь, стоящую в правой части на сумму простейших дробей, получаем

$$Y(p)=-\frac{1}{p}+\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{p-2}+\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{p+2}.$$

По табл. 13.1 по изображениям восстанавливаем оригиналы и получаем

$$y(x)=-1+\frac{5}{2}\,e^{2x}+\frac{5}{2}\,e^{-2x}=-1+5\,\frac{e^{2x}+e^{-2x}}{2}=-1+5\,\mathrm{ch}\,2x.$$

Пример 13.3. Решить интегральное уравнение с помощью преобразования Лапласа

$$\int_0^x \mathrm{sh}\,(x-t)\;y(t)\;dt=x^3e^{-x}.$$

Решение. Данное уравнение представляет собой интегральное уравнение Вольтерра 1-го рода. Имеем $f(x)=x^3e^{-x}$, $K(x)=\mathrm{sh}\,x$. Пользуясь теоремой о свертке, получаем следующее операторное уравнение

$$\frac{1}{p^2-1}\,Y(p)=\frac{3!}{(p+1)^4},$$

откуда

$$Y(p)=3!\,\frac{p^2-1}{(p+1)^4}=3!\,\frac{p-1}{(p+1)^3}.$$

Разлагая дробь, стоящую в правой части на сумму простейших дробей, получаем

$$Y(p)=3!\left[\frac{1}{(p+1)^2}-\frac{2}{(p+1)^3}\right].$$

По табл. 13.1 по изображениям восстанавливаем оригиналы, получаем

$$y(x)=3!\left(xe^{-x}-x^2e^{-x}\right)=6x(1-x)e^{-x}.$$

Интегро-дифференциальным уравнением называется уравнение, которое содержит неизвестную функцию как под знаком интеграла, так и в виде производных, причем производные могут входить и в подынтегральное выражение. Интегро-дифференциальные уравнения с разностным ядром $K(x,t)=K(x-t)$ также могут быть решены операторным методом. При этом используется свойство дифференцирования оригинала преобразования Лапласа, согласно которому производные $y'(x)$, $y''(x)$, …, $y^{(n)}(x)$ вычисляются по формулам:

$$y'(x) \doteqdot pY(p)-y(0),$$

$$y''(x) \doteqdot p^2Y(p)-py(0)-y'(0),$$

$$\ldots,$$

$$y^{(n)}(x) \doteqdot p^nY(p)-p^{n-1}y(0)-p^{n-2}y'(0)-\ldots-py^{(n-2)}(0)-y^{(n-1)}(0).$$

Из данных формул следует, что для получения однозначной разрешимости интегро-дифференциальных уравнений, в отличие от интегральных, необходимо задать начальные условия $y(0)$, $y'(0)$, …, $y^{(n-1)}(0)$.

Пример 13.4. Решить интегро-дифференциальное уравнение

$$y'(x)=\int_0^x (x-t)\,y(t)\,dt-1, \quad y(0)=1.$$

Решение. Пользуясь теоремой о свертке, свойством дифференцирования оригинала преобразования Лапласа и учитывая начальное условие, получаем операторное уравнение

$$pY(p)-1=\frac{1}{p^2}\,Y(p)-\frac{1}{p},$$

откуда $Y(p)=\dfrac{p}{p^2+p+1}$.

Преобразуем правую часть, разложив ее на подходящую сумму простейших дробей. Получаем

$$Y(p)=\frac{p}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=\frac{p+\frac{1}{2}}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}-\frac{\frac{1}{2}}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}.$$

По табл. 13.1 восстанавливаем решение исходного интегро-дифференциального уравнения:

$$y(x)=e^{-x/2}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right).$$

Пример 13.5. Решить интегро-дифференциальное уравнение

$$y''(x)+\int_0^x e^{2(x-t)}y'(t)\,dt=e^{2x},\quad y(0)=0,\quad y'(0)=1.$$

Решение. Пользуясь теоремой о свертке, свойством дифференцирования оригинала преобразования Лапласа и учитывая начальные условия, получаем операторное уравнение

$$p^2Y(p)-1+pY(p)\frac{1}{p-2}=\frac{1}{p-2},$$

откуда

$$Y(p)=\frac{p-1}{p^3-2p^2+p}=\frac{1}{p\,(p-1)}.$$

Отметим, что по теореме о свертке

$$\int_0^x e^{2(x-t)}y'(t)\,dt \risingdotseq \frac{1}{p-2}\,pY(p),$$

так как $y(0)=0$. Разлагаем правую часть на сумму простейших дробей и получаем

$$Y(p)=-\frac{1}{p}+\frac{1}{p-1}.$$

По табл. 13.1 восстанавливаем решение исходного уравнения:

$$y(x)=-1+e^x.$$

Глава 3. Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений

§ 14. Задача Штурма–Лиувилля. Определение функции Грина. Два метода построения функции Грина

Пусть дано дифференциальное уравнение 2-го порядка

$$\frac{d}{dx}\left(p\frac{dy}{dx}\right)+(\lambda r+q)\,y=0,\quad x\in[a,b], \tag{14.1}$$

где функции $q(x)$, $r(x)$ непрерывны на $[a,b]$, причем $p(x)>0$, $r(x)>0$ на $[a,b]$, а функция $p(x)$ непрерывно дифференцируема на $[a,b]$, и краевые условия

$$\begin{cases} R_1(y)\equiv\alpha_1 y(a)+\beta_1 y'(a)=0; \\ R_2(y)\equiv\alpha_2 y(b)+\beta_2 y'(b)=0, \end{cases} \tag{14.2}$$

где α_i, β_i – заданные числа, $\alpha_i^2+\beta_i^2>0$, $i = 1, 2$.

Задача о нахождении собственных значений и собственных функций однородной краевой задачи (14.1), (14.2) называется *задачей Штурма–Лиувилля.*

Если $\lambda=0$ не является собственным значением краевой задачи (14.1), (14.2), то дифференциальное уравнение

$$L(y)\equiv\frac{d}{dx}\left(p\frac{dy}{dx}\right)+qy=0 \tag{14.3}$$

и краевые условия (14.2) образуют краевую задачу, которая имеет только нулевое (тривиальное) решение $y(x)\equiv 0$.

Функцией Грина (функцией влияния) краевой задачи (14.3), (14.2) называется функция $G(x,\xi)$, построенная для любой точки ξ, $a<\xi<b$, и имеющая следующие четыре свойства:

1) $G(x,\xi)$ определена и непрерывна на основном квадрате $[a,b]\times[a,b]$;

2) на диагонали основного квадрата, т.е. при $x=\xi$, $\xi\in(a,b)$, производная $G'_x(x,\xi)$ имеет разрыв 1-го рода, причем скачок равен $\dfrac{1}{p(\xi)}$, т.е.

$$G'_x(\xi+0,\xi)-G'_x(\xi-0,\xi)=-\frac{1}{p(\xi)},$$

где $G'_x(\xi+0,\xi)$ и $G'_x(\xi-0,\xi)$ – соответственно правая и левая односторонние производные по x;

3) $G(x,\xi)$ как функция переменной x имеет при $a\le x<\xi$ и $\xi<x\le b$ непрерывные производные до 2-го порядка включительно и удовлетворяет однородному уравнению (14.3);

4) $G(x,\xi)$ как функция от x удовлетворяет при $\xi\in(a,b)$ краевым условиям (14.2).

Существуют два метода построения функции Грина. Рассмотрим их для дифференциального уравнения 2-го порядка

$$L(y)=\frac{d}{dx}\left(p\frac{dy}{dx}\right)+q\cdot y=0,\quad x\in[a,b], \tag{14.4}$$

с краевыми условиями

$$y(a)=0,\quad y(b)=0. \tag{14.5}$$

1-й метод. В общем решении дифференциального уравнения (14.4) не удается выделить два л.н.з. решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$, одно из которых удовлетворяет краевому условию $y_1(a)=0$ ($y_1(b)\ne0$), а другое – условию $y_2(b)=0$ ($y_2(a)\ne0$).

В этом случае формально записывается выражение для функции Грина в виде, аналогичном общему решению. Функция Грина $G(x,\xi)$ находится с учетом:

а) непрерывности $G(x,\xi)$ в точке $x=\xi$;

б) скачка $G'_x(x,\xi)$ при $x=\xi$;

в) краевых условий (14.5).

2-й метод. Удается в структуре общего решения выделить два л.н.з. решения $y_1(x)$, $y_2(x)$, которые удовлетворяют краевым условиям $y_1(a)=0$, $y_2(b)=0$. Функцию Грина в этом случае можно вычислять сразу по формуле

$$G(x,\xi)=\begin{cases}\dfrac{y_1(x)y_2(\xi)}{p(\xi)W(\xi)}, & a\le x\le\xi;\\[2mm] \dfrac{y_1(\xi)y_2(x)}{p(\xi)W(\xi)}, & \xi\le x\le b,\end{cases} \tag{14.6}$$

где $W(\xi)=W\left[y_1(x),\,y_2(x)\right]\Big|_{x=\xi}$ – определитель Вронского решений $y_1(x)$, $y_2(x)$ уравнения (14.4) на $[a,b]$. Отметим, что если краевая задача (14.3), (14.2) имеет только нулевое решение $y(x)\equiv 0$, то функция Грина существует и единственна.

Пример 14.1. Установить, существует ли функция Грина для данной краевой задачи, и если существует, то построить ее

$$\begin{cases}y''=0;\\ y(0)=y'(0),\ \ y(1)=0.\end{cases} \tag{14.7}$$

Решение. Выясним сначала, существует ли функция Грина для однородной краевой задачи (14.7). Очевидно, что исходное дифференциальное уравнение имеет решение $y(x)=Ax+B$.

Краевые условия дают два соотношения для определения *A* и *B*:

$$\begin{cases}y(0)=B=y'(0)=A;\\ y(1)=A+B=0,\end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases}A=B;\\ A+B=0,\end{cases}$$

откуда $A=B=0$, т.е. краевая задача (14.7) имеет только нулевое решение: $y(x)\equiv 0$. Итак, функция Грина существует и единственна.

Допустим, что не удалось выделить два л.н.з. решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$, одно из которых удовлетворяет краевому условию $y_1(0)=0$, а другое – условию $y_2(1)=0$. Тогда согласно 1-му методу выражение для функции Грина записывается в виде, аналогичном общему решению дифференциального уравнения:

$$G(x,\xi)=\begin{cases} a_1x+a_2, & 0\le x\le \xi;\\ b_1x+b_2, & \xi\le x\le 1.\end{cases}$$

Из непрерывности $G(x,\xi)$ (свойство 1) при $x=\xi$ получаем

$$a_1\xi+a_2=b_1\xi+b_2,$$

а скачок $G'_x(x,\xi)$ в точке $x=\xi$ равен $\dfrac{1}{p(\xi)}=1$ (свойство 2), так что $b_1-a_1=1$. Полагая $b_1-a_1=c_1$, $b_2-a_2=c_2$, имеем

$$\begin{cases} b_1-a_1=1;\\ -(b_1-a_1)\xi-(b_2-a_2)=0,\end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} c_1=1;\\ -c_1\xi-c_2=0,\end{cases}$$

откуда $c_1=1$, $c_2=-\xi$.

Воспользуемся свойством 4 функции Грина, а именно тем, что она должна удовлетворять краевым условиям

$$\begin{cases} G(0,\xi)=G'_x(0,\xi);\\ G(1,\xi)=0.\end{cases}$$

Тогда

$$\begin{cases} a_2=a_1;\\ b_1+b_2=0.\end{cases}$$

Так как $c_k=b_k-a_k$ ($k=1,2$), то получаем систему уравнений

$$\begin{cases} b_1-a_1=1;\\ b_2-a_2=-\xi;\\ a_2=a_1;\\ b_1+b_2=0,\end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} b_1-a_1=1;\\ b_1+a_1=\xi,\end{cases}$$

т.е. $b_1=\dfrac{1}{2}(1+\xi)$, $a_1=\dfrac{1}{2}(\xi-1)$. Таким образом,

$$a_1 = a_2 = \frac{1}{2}(\xi - 1), \quad b_1 = \frac{1}{2}(\xi + 1), \quad b_2 = -\frac{1}{2}(\xi + 1),$$

т.е.

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\xi - 1)(x + 1), \ 0 \le x \le \xi; \\ \frac{1}{2}(\xi + 1)(x - 1), \ \xi \le x \le 1. \end{cases}$$

Пример 14.2. Установить, существует ли функция Грина для данной краевой задачи, и если существует, то построить ее

$$\begin{cases} y'' - y = 0; \\ y(0) = y(1) = 0. \end{cases} \qquad (14.8)$$

Решение. Выясним сначала, существует ли функция Грина для однородной краевой задачи (14.8). Очевидно, что исходное дифференциальное уравнение имеет решение

$$y(x) = \tilde{C}_1 e^x + \tilde{C}_2 e^{-x} = C_1 \operatorname{sh} x + C_2 \operatorname{ch} x.$$

Краевые условия дают два соотношения для определения C_1 и C_2:

$$y(0) = C_1 \operatorname{sh} 0 + C_2 \operatorname{ch} 0 = C_2 \cdot 1 = 0,$$

так как $\operatorname{sh} 0 = 0$, $\operatorname{ch} 0 = 1$; $y(1) = C_1 \operatorname{sh} 1 + C_2 \operatorname{ch} 1 = 0$. Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} C_2 = 0; \\ C_1 \operatorname{sh} 1 + C_2 \operatorname{ch} 1 = 0, \end{cases}$$

откуда $C_1 = 0$ (так как $\operatorname{sh} 1 \ne 0$), $C_2 = 0$, т.е. краевая задача (14.8) имеет только нулевое решение: $y(x) \equiv 0$. Итак, функция Грина существует и единственна.

Решение $y_1(x) = \operatorname{sh} x$ удовлетворяет краевому условию $y_1(0) = 0$, а решение $y_2(x) = \operatorname{sh}(x - 1)$ удовлетворяет краевому условию $y_2(1) = 0$, причем эти решения являются л.н.з.

Тогда согласно 2-му методу найдем значение определителя Вронского для $y_1(x) = \operatorname{sh} x$ и $y_2(x) = \operatorname{sh}(x - 1)$ в точке $x = \xi$:

$$W(\xi)=W\left[y_1(x),y_2(x)\right]\Big|_{x=\xi}=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}_{x=\xi}=$$

$$=\begin{vmatrix} \operatorname{sh}\xi & \operatorname{sh}(\xi-1) \\ \operatorname{ch}\xi & \operatorname{ch}(\xi-1) \end{vmatrix}=\operatorname{sh}\xi\operatorname{ch}(\xi-1)-\operatorname{ch}\xi\operatorname{sh}(\xi-1)=\operatorname{sh}1.$$

Отсюда согласно (14.6) с учетом $p(x)\equiv 1$ запишем

$$G(x,\xi)=\begin{cases} \dfrac{\operatorname{sh}x\cdot\operatorname{sh}(\xi-1)}{\operatorname{sh}1}, & 0\le x\le\xi; \\ \dfrac{\operatorname{sh}\xi\cdot\operatorname{sh}(x-1)}{\operatorname{sh}1}, & \xi\le x\le 1. \end{cases}$$

Пример 14.3. Установить, существует ли функция Грина для данной краевой задачи, и если существует, то построить ее

$$\begin{cases} y''+y=0; \\ y(0)=y(\pi)=0. \end{cases} \tag{14.9}$$

Решение. Выясним сначала, существует ли функция Грина для однородной краевой задачи (14.9). Очевидно, что исходное дифференциальное уравнение имеет решение

$$y(x)=C_1\cos x+C_2\sin x.$$

Краевые условия дают два соотношения для определения коэффициентов C_1 и C_2:

$$\begin{cases} y(0)=C_1\cos 0+C_2\sin 0=C_1=0; \\ y(\pi)=C_1\cos\pi+C_2\sin\pi=-C_1=0, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} C_1=0; \\ -C_1=0, \end{cases}$$

откуда $C_1=0$, C_2 произвольно. Последняя система уравнений имеет бесконечное множество решений, и решение краевой задачи (14.9) имеет вид $y(x)=C_2\sin x$.

Таким образом, для данной краевой задачи функции Грина не существует.

Краевая задача для дифференциального уравнения 2-го порядка

$$y''(x) + p_1(x)\, y'(x) + p_2(x)\, y(x) = 0 \tag{14.10}$$

и неоднородных краевых условий

$$y(a) = A\,, \quad y(b) = B \tag{14.11}$$

сводится к рассмотренной краевой задаче (14.3), (14.2) следующим образом:

1) дифференциальное уравнение (14.10) приводится к виду (14.3) путем умножения (14.10) на функцию $p(x) = e^{\int p_1(x)\,dx}$, при этом в качестве $q(x)$ следует брать $p(x)p_2(x)$;

2) краевые условия (14.11) сводятся к однородным краевым условиям (14.2) линейной заменой исходной функции

$$z(x) = y(x) - \frac{B-A}{b-a}(x-a) - A\,.$$

При такой замене линейность уравнения (14.10) не нарушается, но в отличие от уравнения (14.3), теперь получается неоднородное дифференциальное уравнение

$$L(z) \equiv \frac{d}{dx}\left(p\,\frac{dz}{dx} \right) + q \cdot z = f(x)\,, \tag{14.12}$$

где

$$f(x) = -\left[A + \frac{B-A}{b-a}(x-a) \right] q(x) - \frac{B-A}{b-a}\, p(x)\, p_1(x)\,.$$

При этом функция Грина строится для однородной краевой задачи

$$\begin{cases} L(z) = 0; \\ z(a) = z(b) = 0, \end{cases}$$

которая полностью совпадает с краевой задачей (14.3), (14.2).

Пример 14.4. Установить, существует ли функция Грина для данной краевой задачи, и если существует, то построить ее

$$\begin{cases} x^2 y'' + xy' - n^2 y = 0,\ n > 0; \\ y(0)\ \text{конечно},\ y(1) = 0. \end{cases}$$

Решение. Запишем данную краевую задачу в следующем виде

$$\begin{cases} y'' + \dfrac{1}{x} y' - \dfrac{n^2}{x^2} y = 0; & (14.13) \\ y(0) = A,\ y(1) = 0. & (14.14) \end{cases}$$

Здесь

$$a = 0\,,\ b = 1\,,\ B = 0\,,\ p_1(x) = \frac{1}{x}\,,\ p_2(x) = -\frac{n^2}{x^2}\,,$$

$$p(x) = e^{\int p_1(x)\,dx} = e^{\int \frac{dx}{x}} = e^{\ln x} = x\,.$$

Умножая обе части уравнения (14.13) на x, получаем

$$xy'' + y' - \frac{n^2}{x} y = 0\,.$$

Делаем замену функции $z(x) = y(x) + Ax - A$. Тогда

$$z(0) = y(0) - A = A - A = 0\,,$$

$$z(1) = y(1) + A - A = 0\,.$$

Записав $y(x) = z(x) - Ax + A$, $y'(x) = z'(x) - A$, $y''(x) = z''(x)$, получаем

$$xz'' + (z' - A) - \frac{n^2}{x}(z - Ax + A) = 0\,,$$

или

$$xz'' + z' - \frac{n^2}{x} z = A - n^2 A + \frac{An^2}{x}\,.$$

Итак, получили краевую задачу

$$\begin{cases} xz'' + z' - \dfrac{n^2}{x} z = f(x); \\ z(0) = 0,\ z(1) = 0, \end{cases}$$

где $f(x) = A - n^2 A + \dfrac{An^2}{x}$.

Выясним, существует ли функция Грина для соответствующей однородной краевой задачи

$$\begin{cases} x^2 z'' + xz' - n^2 z = 0; & (14.15) \\ z(0) = 0, \ z(1) = 0. & (14.16) \end{cases}$$

Полученное дифференциальное уравнение 2-го порядка (14.15) является уравнением Эйлера и имеет решение

$$z(x) = C_1 x^n + \frac{C_2}{x^n}.$$

Первое краевое условие (14.16) дает $C_2 = 0$, так как в противном случае $z(x) \to \infty$ при $x \to 0$. Второе краевое условие (14.16) дает $C_1 = 0$. Краевая задача (14.15), (14.16) имеет только нулевое решение $y(x) \equiv 0$. Итак, функция Грина существует и единственна. Согласно 1-му методу запишем формально $G(x, \xi)$ в виде

$$G(x, \xi) = \begin{cases} a_1 x^n + \dfrac{a_2}{x^n}, \ 0 < x \le \xi; \\ b_1 x^n + \dfrac{b_2}{x^n}, \ \xi \le x \le 1. \end{cases} \tag{14.17}$$

Из непрерывности $G(x, \xi)$ при $x = \xi$ (свойство 1) получаем

$$a_1 \xi^n + \frac{a_2}{\xi^n} = b_1 \xi^n + \frac{b_2}{\xi^n}.$$

Скачок $G'_x(x, \xi)$ в точке ($x = \xi$) (свойство 2) равен $\dfrac{1}{\xi^2}$, поэтому

$$\left(b_1 n \xi^{n-1} - \frac{n b_2}{\xi^{n+1}} \right) - \left(a_1 n \xi^{n-1} - \frac{n a_2}{\xi^{n+1}} \right) = \frac{1}{\xi^2}.$$

Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} a_1 \xi^n + \dfrac{a_2}{\xi^n} = b_1 \xi^n + \dfrac{b_2}{\xi^n}; \\ \left(b_1 n \xi^{n-1} - \dfrac{n b_2}{\xi^{n+1}} \right) - \left(a_1 n \xi^{n-1} - \dfrac{n a_2}{\xi^{n+1}} \right) = \dfrac{1}{\xi^2}, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases}(b_1-a_1)\xi^n+\dfrac{1}{\xi^n}(b_2-a_2)=0;\\(b_1-a_1)n\xi^{n-1}-(b_2-a_2)\dfrac{n}{\xi^{n+1}}=\dfrac{1}{\xi^2}.\end{cases}$$

Полагая $c_1=b_1-a_1$, $c_2=b_2-a_2$, получаем

$$\begin{cases}c_1\xi^n+\dfrac{c_2}{\xi^n}=0;\\c_1n\xi^{n-1}-c_2\dfrac{n}{\xi^{n+1}}=\dfrac{1}{\xi^2}.\end{cases}\qquad(14.18)$$

Вычислим главный определитель Δ и вспомогательные определители Δ_{c_1} и Δ_{c_2} системы уравнений (14.18). Имеем

$$\Delta=\begin{vmatrix}\xi^n & \dfrac{1}{\xi^n}\\ n\xi^{n-1} & -\dfrac{n}{\xi^{n+1}}\end{vmatrix}=-\frac{n}{\xi}-\frac{n}{\xi}=-\frac{2n}{\xi},$$

$$\Delta_{c_1}=\begin{vmatrix}0 & \dfrac{1}{\xi^n}\\ \dfrac{1}{\xi^2} & -\dfrac{n}{\xi^{n+1}}\end{vmatrix}=-\frac{1}{\xi^{n+2}},$$

$$\Delta_{c_2}=\begin{vmatrix}\xi^n & 0\\ n\xi^{n-1} & \dfrac{1}{\xi^2}\end{vmatrix}=\xi^{n-2},$$

откуда по формулам Крамера

$$c_1=\frac{\Delta_{c_1}}{\Delta}=\frac{1}{2n\xi^{n+1}},\quad c_2=\frac{\Delta_{c_2}}{\Delta}=-\frac{\xi^{n-1}}{2n}.\qquad(14.19)$$

Теперь используем свойство 4 функции Грина, согласно которому $G(x,\xi)$ должна удовлетворять кравевым условиям (14.16): $G(0,\xi)=0$, $G(1,\xi)=0$. Указанные условия принимают вид

$$\begin{cases} a_2 = 0; \\ b_1 + b_2 = 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a_2 = 0; \\ b_2 = -b_1. \end{cases} \tag{14.20}$$

Используя то, что $c_k = b_k - a_k$ ($k = 1, 2$) и пользуясь соотношениями (14.19), (14.20), запишем

$$c_1 = b_1 - a_1 = \frac{1}{2n\xi^{n+1}}, \quad c_2 = b_2 - a_2 = b_2 = -\frac{\xi^{n-1}}{2n},$$

тогда

$$\frac{\xi^{n-1}}{2n} - a_1 = \frac{1}{2n\xi^{n+1}}, \quad a_1 = \frac{\xi^{n-1}}{2n} - \frac{1}{2n\xi^{n+1}}.$$

Итак,

$$a_1 = \frac{\xi^{n-1}}{2n} - \frac{1}{2n\xi^{n+1}}, \quad b_1 = \frac{\xi^{n-1}}{2n}, \quad a_2 = 0, \quad b_2 = -\frac{\xi^{n-1}}{2n}.$$

Подставив значения коэффициентов a_1, a_2, b_1, b_2 в формулу (14.17) для $G(x, \xi)$, получим

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \dfrac{1}{2n\xi}\left[(x\xi)^n - \left(\dfrac{x}{\xi}\right)^n\right], & 0 < x \le \xi; \\ \dfrac{1}{2n\xi}\left[(x\xi)^n - \left(\dfrac{\xi}{x}\right)^n\right], & \xi \le x \le 1. \end{cases}$$

§ 15. Применение функции Грина для решения краевых задач

Если функция Грина $G(x, \xi)$ является решением однородной задачи (14.3), (14.2), то решение краевой задачи

$$\begin{cases} L(y) \equiv \dfrac{d}{dx}\left(p\,\dfrac{dy}{dx}\right) + q \cdot y = f(x), \;\; x \in [a, b]; & (15.1) \\ y(a) = 0, \;\; y(b) = 0 & (15.2) \end{cases}$$

определяется формулой

$$y(x)=\int_a^b G(x,\xi)\,f(\xi)\,d\xi\,. \tag{15.3}$$

Пример 15.1. Используя функцию Грина, решить следующую краевую задачу

$$\begin{cases} y''+4y=2\sin 2x; \\ y(0)=0,\ \ y\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=0. \end{cases} \tag{15.4}$$

Решение. Выясним сначала, существует ли функция Грина для однородной краевой задачи

$$\begin{cases} y''+4y=0; \\ y(0)=0,\ \ y\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=0. \end{cases} \tag{15.5}$$

Очевидно, что дифференциальное уравнение имеет решение

$$y(x)=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x\,.$$

Краевые условия дают два соотношения для определения C_1 и C_2:

$$\begin{cases} y\,(0)=C_1=0; \\ y\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=C_2=0, \end{cases}$$

откуда $C_1=C_2=0$, т.е. краевая задача (15.5) имеет только нулевое решение $y(x)\equiv 0$. Итак, функция Грина существует и единственна. Решение $y_1(x)=\sin 2x$ удовлетворяет краевому условию $y_1(0)=0$, а решение $y_2(x)=\cos 2x$ удовлетворяет краевому условию $y_2\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=0$, причем эти решения являются л.н.з.

Тогда согласно 2-му методу найдем значение определителя Вронского для $y_1(x)=\sin 2x$ и $y_2(x)=\cos 2x$ в точке $x=\xi$:

$$W(\xi)=W\,[y_1(x),\,y_2(x)]\big|_{x=\xi}=\begin{vmatrix} \sin 2\xi & \cos 2\xi \\ 2\cos 2\xi & -2\sin 2\xi \end{vmatrix}=$$

$$=-2\sin^2 2\xi-2\cos^2 2\xi=-2\,.$$

Отметим, что $p(x)=1$. Тогда согласно (14.6) находим

$$G(x,\xi)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x\cos 2\xi}{-2},\ \ 0\le x\le\xi;\\[2mm] \dfrac{\sin 2\xi\cos 2x}{-2},\ \ \xi\le x\le\dfrac{\pi}{4}.\end{cases}$$

Решение краевой задачи (15.4) запишется в виде

$$y(x)=\int\limits_0^{\pi/4} G(x,\xi)\,f(\xi)\,d\xi=\int\limits_0^{x}\frac{\sin 2\xi\cos 2x}{-2}\,2\sin 2\xi\,d\xi+$$

$$+\int\limits_x^{\pi/4}\frac{\sin 2x\cos 2\xi}{-2}\,2\sin 2\xi\,d\xi=-\cos 2x\int\limits_0^{x}\sin^2 2\xi\,d\xi-$$

$$-\sin 2x\int\limits_x^{\pi/4}\sin 2\xi\,\cos 2\xi\,d\xi=-\frac{x}{2}\cos 2x-\frac{1}{8}\sin 2x+$$

$$+\frac{1}{8}\sin 2x=-\frac{x}{2}\cos 2x\,.$$

Пример 15.2. Используя функцию Грина, решить следующую краевую задачу

$$\begin{cases}y''+16y=\dfrac{64x}{\pi+1};\\ y(0)=y(\pi)+y'(\pi)=0.\end{cases}\qquad(15.6)$$

Решение. Выясним сначала, существует ли функция Грина для однородной краевой задачи

$$\begin{cases}y''+16y=0;\\ y(0)=y(\pi)+y'(\pi)=0.\end{cases}\qquad(15.7)$$

Очевидно, что дифференциальное уравнение имеет решение

$$y(x)=C_1\cos 4x+C_2\sin 4x\,.$$

Краевые условия дают два соотношения для определения C_1 и C_2:

$$\begin{cases}y(0)=C_1=0;\\ y(\pi)+y'(\pi)=C_1\cos 4\pi+C_2\sin 4\pi-4C_1\sin 4\pi+4C_2\cos 4\pi=C_1+4C_2=0,\end{cases}$$

или

$$\begin{cases} C_1 = 0; \\ C_1 + 4C_2 = 0, \end{cases}$$

откуда $C_1 = 0$, $C_2 = 0$, т.е. краевая задача (15.7) имеет только нулевое решение $y(x) \equiv 0$. Итак, функция Грина существует и единственна. Решение $y_1(x) = \sin 4x$ удовлетворяет краевому условию $y_1(0) = 0$, второе л.н.з. решение будем искать в виде

$$y_2(x) = \cos 4\,(x + \alpha_0)\,.$$

Получаем

$$y_2'(x) = -4\sin 4\,(x + \alpha_0)\,,$$

$$y_2(\pi) + y_2'(\pi) = \cos 4\,(\pi + \alpha_0) - 4\sin 4\,(\pi + \alpha_0) =$$

$$= \cos 4\alpha_0 - 4\sin 4\alpha_0 = 0\,,$$

т.е. $\operatorname{tg} 4\alpha_0 = \dfrac{1}{4}$, откуда $\alpha_0 = \dfrac{1}{4}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{4}$, $0 < \alpha_0 < \dfrac{\pi}{2}$.

Тогда согласно 2-му методу найдем значение определителя Вронского для $y_1(x) = \sin 4x$, $y_2(x) = \cos 4\,(x + \alpha_0)$ в точке $x = \xi$:

$$W(\xi) = W\,[y_1(x), y_2(x)]\big|_{x=\xi} = \begin{vmatrix} \sin 4\xi & \cos 4\,(\xi + \alpha_0) \\ 4\cos 4\xi & -4\sin 4\,(\xi + \alpha_0) \end{vmatrix} =$$

$$= -4\sin 4\xi\,\sin 4\,(\xi + \alpha_0) - 4\cos 4\xi \cos 4\,(\xi + \alpha_0) = -4\cos 4\alpha_0\,.$$

Согласно (14.6)

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \dfrac{\sin 4x\,\cos 4\,(\xi + \alpha_0)}{-4\cos 4\alpha_0}, & 0 \le x \le \xi; \\[2ex] \dfrac{\sin 4\xi\,\cos 4\,(x + \alpha_0)}{-4\cos 4\alpha_0}, & \xi \le x \le \pi. \end{cases}$$

Решение краевой задачи (15.6) запишется в виде

$$y(x) = \int_0^\pi G(x, \xi)\, f(\xi)\, d\xi = \int_0^x \frac{64\xi}{\pi + 1} \cdot \frac{\sin 4\xi \cos 4\,(x + \alpha_0)}{-4\cos 4\alpha_0}\, d\xi +$$

$$+\int\limits_x^\pi \frac{64\xi}{\pi+1}\cdot\frac{\sin 4x\cos 4\,(\xi+\alpha_0)}{-4\cos 4\alpha_0}\,d\xi=-\frac{16\cos 4\,(x+\alpha_0)}{(\pi+1)\cos 4\alpha_0}\int\limits_0^x \xi\sin 4\xi\,d\xi-$$

$$-\frac{16\sin 4x}{(\pi+1)\cos 4\alpha_0}\int\limits_x^\pi \xi\cos 4\,(\xi+\alpha_0)\,d\xi=$$

$$=\frac{1}{\pi+1}\,(4x-\sin 4x-\pi\sin 4x)=\frac{4x}{\pi+1}-\sin 4x\,.$$

Отметим, что в данной краевой задаче (15.7) в качестве $y_2(x)$ можно взять функцию $y_2(x)=\sin 4x-4\cos 4x$, которая удовлетворяет краевому условию $y_2(\pi)+y_2'(\pi)=0$. Тогда определитель Вронского для функций

$$y_1(x)=\sin 4x\,,\quad y_2(x)=\sin 4x-4\cos 4x$$

в точке $x=\xi$ равен

$$W(\xi)=W\,[y_1(x),\,y_2(x)]\big|_{x=\xi}=\begin{vmatrix}\sin 4\xi & \sin 4\xi-4\cos 4\xi\\ 4\cos 4\xi & 4\cos 4\xi+16\sin 4\xi\end{vmatrix}=16\,,$$

откуда согласно (14.6) запишем

$$G(x,\xi)=\begin{cases}\dfrac{\sin 4x\,(\sin 4\xi-4\cos 4\xi)}{16}, & 0\le x\le\xi;\\[2ex] \dfrac{\sin 4\xi\,(\sin 4x-4\cos 4x)}{16}, & \xi\le x\le\pi.\end{cases}$$

§ 16. Краевые задачи, содержащие параметр, и их сведение к интегральному уравнению

Если $\lambda=0$ не является собственным значением задачи (14.1), (14.2), то указанная задача Штурма–Лиувилля эквивалентна интегральному уравнению Фредгольма 2-го рода

$$y(x)=\lambda\int\limits_a^b G(x,\xi)\,r(\xi)\,y(\xi)\,d\xi\,,\tag{16.1}$$

где $G(x,\xi)$ – функция Грина соответствующей однородной краевой задачи (14.3), (14.2).

Таким образом, если числовой параметр λ и функция $y(x)$ являются соответствующими друг другу собственным значением и собственной функцией (ненулевым решением) краевой задачи (14.1), (14.2), то λ и $y(x)$ являются отвечающими друг другу характеристическим числом и собственной функцией интегрального уравнения (16.1).

Отметим, что ядро $K(x,\xi)=G(x,\xi)\,r(\xi)$ интегрального уравнения (16.1), вообще говоря, – несимметричное.

Преобразуем интегральное уравнение (16.1), умножив обе части уравнения на $\sqrt{r(x)}$ и положив $z(x)=y(x)\sqrt{r(x)}$. Получим интегральное уравнение

$$z(x)=\lambda\int_a^b G(x,\xi)\sqrt{r(x)}\cdot\sqrt{r(\xi)}\cdot z(\xi)\,d\xi \qquad (16.2)$$

с симметричным ядром

$$K(x,\xi)=G(x,\xi)\sqrt{r(x)}\cdot\sqrt{r(\xi)}\,.$$

Интегральные уравнения (16.1) и (16.2) эквивалентны, т.е. если при некотором λ непрерывная функция $y(x)$ – решение интегрального уравнения (16.1), то непрерывная функция $z(x)=y(x)\sqrt{r(x)}$ – решение интегрального уравнения (16.2) при том же λ, и, наоборот, если непрерывная функция $z(x)$ является решением интегрального уравнения (16.2), то непрерывная функция $y(x)=\dfrac{z(x)}{\sqrt{r(x)}}$ (напомним, что $r(x)>0$ на $[a,b]$) является решением интегрального уравнения (16.1).

Во многих случаях приходится рассматривать дифференциальное уравнение 2-го порядка вида

$$\frac{d}{dx}\left(p\,\frac{dy}{dx}\right)=\lambda y+h(x)\,,\quad x\in[a,b], \qquad (16.3)$$

с краевыми условиями (14.2).

При $h(x) \equiv 0$ получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{d}{dx}\left(p\frac{dy}{dx}\right) = \lambda y\,. \qquad (16.4)$$

Если однородная краевая задача (16.4), (14.2) имеет функцию Грина $G(x,\xi)$, то краевая задача (16.3), (14.2) эквивалентна уравнению Фредгольма 2-го рода

$$y(x) = \lambda \int_a^b G(x,\xi)\, y(\xi)\, d\xi + f(x)\,, \qquad (16.5)$$

где

$$f(x) = \int_a^b G(x,\xi)\, h(\xi)\, d\xi\,. \qquad (16.6)$$

В частности, однородная краевая задача (16.4), (14.2) эквивалентна однородному интегральному уравнению

$$y(x) = \lambda \int_a^b G(x,\xi)\, y(\xi)\, d\xi\,. \qquad (16.7)$$

Пример 16.1. Свести краевую задачу

$$\begin{cases} y'' + \lambda y - y = 0; \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$$

к интегральному уравнению.

Решение. В данном примере согласно (14.1) имеем $p(x) = 1$, $r(x) = 1$, $q(x) = -1$.

Найдем функцию Грина $G(x,\xi)$ для соответствующей однородной краевой задачи

$$\begin{cases} y'' - y = 0; \\ y(0) = y(1) = 0. \end{cases}$$

Пользуясь результатом примера 14.2, запишем

$$G(x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sh} x \operatorname{sh}(\xi - 1)}{\operatorname{sh} 1}, & 0 \le x \le \xi; \\ \dfrac{\operatorname{sh} \xi \operatorname{sh}(x - 1)}{\operatorname{sh} 1}, & \xi \le x \le 1. \end{cases}$$