Министерство образования и науки РФ

Национальный исследовательский ядерный
университет "МИФИ"

С.В. Шведенко

НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Числа и множества чисел. Последовательности и их пределы. Пределы и непрерывность функций. Дифференциальное исчисление функций одной переменной

*Рекомендовано УМО «Ядерные физика и технологии»
в качестве учебного пособия
для студентов высших учебных заведений*

Москва 2011

УДК 517 (075)
ББК 22.161я7
Ш 34

Ш в е д е н к о С. В. **Начала математического анализа (Числа и множества чисел. Последовательности и их пределы. Пределы и непрерывность функций. Дифференциальное исчисление функций одной переменной):** Учебное пособие. М.: НИЯУ МИФИ, 2011.– 324 с.

Дано систематическое изложение начальной части курса математического анализа, охватывающей материал, изучаемый на основных факультетах МИФИ в первом семестре.

Книга адресована студентам, приступающим к изучению математического анализа как по обычной, так и по углубленной программе.

Подготовлена в рамках Программы создания и развития НИЯУ МИФИ

Рецензент д-р физ.-мат. наук, проф. *Л. А. Муравей*

ISBN 978-57262-1476-4

© Национальный исследовательский ядерный университет “МИФИ”, 2011

Предисловие

Предлагаемое здесь изложение начал математического анализа основано на лекциях, читанных автором студентам Высшего физического колледжа и (в сокращенном виде) других факультетов МИФИ, и охватывает материал, изучаемый в первом семестре.

Структуру предлагаемого изложения во многом определило одно замечание касательно содержания курса математического анализа, услышанное автором (в бытность студентом первого курса Московского университета) от акад. И.К.Кикоина. Когда на одной из лекций по физике выяснилось, что студенты-первокурсники не знают *формулу Эйлера*[1], И.К.Кикоин выразил не просто удивление, а возмущение по этому поводу, присовокупив слова: *“Я скажу “математикам”, чтобы они вам ее вывели”*.

Были переданы эти слова “математикам” или нет, осталось неизвестным, но ожидаемого влияния на курс анализа они тогда не произвели. Автор же этих строк сказанное запомнил, и когда сам стал “математиком”, счел необходимым учесть мнение выдающегося физика, понимая, что оно весомее мнения всех не согласных с ним методистов от математики вместе взятых. Трудность состояла “лишь” в том, что сделать это надо было на основе *только* понятий и фактов, изучаемых в первом семестре.

Как это нередко бывает, решение этой задачи одновременно позволило решить и другие, еще более важные:

дать внятное и исчерпывающее определение (с обоснованием свойств) *степени* положительного числа с *любым* действительным *показателем* – то, от чего обычно отказываются (ввиду трудности задачи) в курсах анализа;

дать свободные от логических изъянов доказательства предельных соотношений (*“замечательных пределов”*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ и $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$.

---

[1] $e^{it}=\cos t+i\sin t$.

При написании курса автор считал необходимым удержать взятый уровень изложения, категорически не принимая метод “выборочной строгости”, когда обстоятельность при обсуждении “удобных” вопросов сменяется поспешностью при обращении к вопросам “неудобным”[1], а недостаточность аргументации прикрывается бодрыми словосочетаниями “хорошо известно”, “легко видеть”, “нетрудно показать”[2].

К особенностям курса надо отнести включение *Приложений I и II*, содержащих начальные сведения о *символическом языке* и многочисленные примеры *символической записи*.

Ориентируясь, в первую очередь, на студентов, желающих как можно больше узнать о предмете (и хоть немного об истории и участниках его становления), автор хотел быть полезным и тем, кого интересует лишь необходимый минимум для сдачи экзамена. Отчасти этоой цели служит (помимо включения *Приложения II* и алфавитного указателя) выделение акцентируемых фраз и слов другим шрифтом[3], а дополнительного материала — шрифтом меньшего размера (с широким применением сносок).

Все приводимые понятия и факты анализа проверены по первоисточникам и сопровождаются выдержками из оригинальных текстов с указанием их точных координат.

Автор признателен Д. С. Теляковскому за помощь в подготовке книги к печати.

Электронный адрес автора: sershvedenko@mail.ru

---

[1] А это, прежде всего, внятное определение *степени*, без которого слишком много выпускников вузов воспринимают 2^π как “*число* 2, *умноженное на себя примерно* 3,14 *раза*”, и приходят в замешательство от вопроса, что такое $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$, например, при $x=\sqrt{2}$.

[2] Подобные словосочетания не украшают лекционный курс, а в письменном его изложении просто недопустимы: читатель лишен возможности возразить: “*Так покажите, раз нетрудно!*”

[3] При этом главные утверждения курса (именные и имеющие традиционные названия) снабжены титулом *теорема*, *критерий* и т. п., а утверждения “второго ряда” выделены двойной вертикальной чертой.

Введение

Как организована математика

Математика[1] есть *способ познания* через составление и сопоставление *понятий*, связующим среди которых является *число*[2].

Понятия — то, с чем имеет дело математика, — это не *реальные*, а исключительно *мыслимые* предметы и отношения между ними. Существуют они (включая те, за которыми стоят *реальные* предметы и отношения) лишь в воображении и лишь в силу их *определений* — внятных *словесных описаний* вменяемых им *признаков* и *свойств*[3]; обращаться с *понятиями* — значит оперировать их *определениями*.

Поскольку определения — это *словесные конструкции*, оперировать с ними надлежит по правилам *логики*[4], усвоение которых есть необходимый элемент (если не главная цель) *математического образования*.

Для упорядочения результатов математической деятельности их оформляют в самостоятельные (но взаимодействующие между собой) *математические теории* — связные изложения отдельных направлений (*ветвей*) математики[5].

---

[1] Этим словом — $\mu\alpha\theta\acute{\eta}\mu\alpha\tau\alpha$ (по греч. *выученное*) — древнегреческий философ Пифаго́р ($\Pi\upsilon\theta\alpha\gamma\acute{o}\rho\alpha\varsigma$, ок. 570 – ок. 480 до н. э.) и его окружение (пифагорейцы) обозначали *познания*, постигаемые через *числа*.

[2] Экспериментальный факт: оперируя *любыми* математическими объектами, неизбежно приходят к действиям с *числами*.

[3] Отсюда следует важный вывод: любой *математический* объект (в отличие от любого *реального*) описывается *конечным* набором слов.

[4] Логика (от греч. $\lambda\acute{o}\gamma o\varsigma$ — *слово, разум*) — наука о законах мышления и правилах словесного оформления рассуждений.

[5] Разделять *математику* на отдельные *ветви* начали пифагорейцы, изначально выделившие в ней *арифметику*, *музыку*, *геометрию* и *сферику* (то, что теперь называют *астрономией*).

Любую из них характеризуют:

а) набор охватываемых этой теорией *понятий*;

б) перечень *истинных утверждений* об этих понятиях;

в) способы *установления истинности* утверждений.

Построение любой *математической теории* состоит в том, что *сопоставлением* охватываемых ею *понятий* приходят к тем или иным *умозаключениям*, пополняющим сведения об этих понятиях и приводящим к новым понятиям.

Схематически это выглядит так: сформулировав некое (правдоподобное или желаемое) *утверждение* о *понятиях* теории, выясняют, является ли оно *истинным*, или, как говорят, *теоремой*[1] теории, понимая под этим *выводимость* этого утверждения по *принятым в данной теории правилам*[2] из уже имеющихся в ней *истинных утверждений*.

Неизбежным при таком подходе оказывается принятие некоторых утверждений за *изначально истинные* в данной теории – ее *аксиомы*[3]. О том, какие утверждения теории считать ее *аксимомами*, а какие – *теоремами* (*выводимыми из аксиом* и уже доказанных *теорем*), решают отдельно в конкретной *математической теории*, называемой при таком способе ее построения *аксиоматической*.

Развитие *аксиоматической теории* выражается в пополнении как списка охватываемых ею *понятий* (развитие теории "вширь"), так и списка *истинных утверждений* об этих понятиях (развитие теории "вглубь").

---

[1] Греч. $\theta\varepsilon\acute{\omega}\rho\eta\mu\alpha$ – *правило.*

[2] Выработкой *правил вывода* в отношении *математических* утверждений занимается *математическая логика*. В ходе ее развития выяснилось, что *истинность* утверждения теории и его *выводимость* в данной теории все-таки не одно и то же; подробно об этом (и о многом другом) можно с интересом прочитать в книге Ю.И. Манина [**16**].

[3] Греч. $\alpha\xi\acute{\iota}\omega\mu\alpha$ – *требование, предписание.*

Часто бывает, что аксиоматические теории, имея разные списки *исходных понятий* и *аксиом*, совпадают по набору охватываемых *понятий* и *истинных утверждений* об этих понятиях[1]. О таких аксиоматических теориях говорят, что они *эквивалентны*. На практике это выражается в разных способах изложения математических дисциплин.

Среди *эквивалентных* аксиоматических теорий предпочтительнее те, *понятия* которых имеют более зримые образы, а *аксиомы* лучше согласуются с наглядными представлениями: следует способствовать подключению *воображения* и *интуиции*, играющих не последнюю (а подчас определяющую) роль в математических изысканиях.

Непременное требование к любой аксиоматической теории — ее *непротиворечивость*: *утверждение* и его *отрицание* (противоположное утверждение) не могут быть *оба истинны* (*выводимы* из *аксиом* теории). Проверка *непротиворечивости* аксиоматических теорий и действующих в них *правил вывода* входит в круг задач *математической логики*.

В так называемых *формальных* *аксиоматических теориях* запись утверждений и рассуждений ведется на специально разработанном *искусственном символической языке* с четко прописанными *алфавитом* (набором используемых в языке *символов*) и *синтаксисом* (правилами составления и преобразования *комбинаций символов*).

В записи на этом языке *утверждения* принимают вид *формул*, а их *доказательства* (и вообще *рассуждения*) — *преобразований* выражающих их *формул* по четко прописанным правилам.

[1] Какие-то из *аксиом* одной теории оказываются *теоремами* другой и наоборот (так же как какие-то *понятия*, принимаемые за *исходные* в одной теории, являются *определяемыми* в другой и наоборот).

<u>*Неформальные*</u>, или <u>*содержательные*</u>, *аксиоматические теории* излагаются на обычном языке общения, их *формулировки* – списки *исходных понятий* и *аксиом* – не так внятны и точны как в *формальных* теориях, а рассуждения основываются на *интуитивной* (*естественной*) *логике* – врожденном человеческом "здравом смысле". Достаточное представление о *неформальных аксиоматических теориях* дает курс школьной *геометрии*.

Неуклонной тенденцией является постепенная *формализация* математических теорий, проявляющаяся как во все бóльшем использовании *символической* (*фóрмульной*) записи математических утверждений (на специально разрабатываемом *искусственном языке*), так и, что особенно важно, замене *чувственной* оценки *убедительности* рассуждений проверкой правильности *преобразований* выражающих эти утверждения *формул*.

Ситуация несколько напоминает ту, которая сложилась в греческой математике два с половиной тысячелетия назад, когда ограниченность возможностей *чисто наглядного* способа доказательств ("смотри!") привела к распространению *косвенного*[1], суть которого состоит в том, что доказательством *истинности* того или иного утверждения служит выведение *противоречия* из предположения, что данное утверждение *ложно*. Известный из школы (и считающийся первым в истории) пример утверждения, поддающегося лишь *косвенному* доказательству (см. с. 281) – это *иррациональность* числа $\sqrt{2}$.

Достигаемая *формализацией* цель – исключить возможность *двусмысленностей* и *противоречий*, нередко проявляющихся в обычных языках общения[2] и в рассуждениях с

---

[1] Часто называемый способом *"от противного"*, или *"приведения к абсурду"* (лат. *"reductio ad absurdum"*).

[2] Примером их проявления может служить школьный диалог:

"У Кутузова не было одного глаза."

"Неправда! У Кутузова был один глаз!"

позиции “наглядной очевидности” и “здравого смысла”.

О том, как подводят соображения “наглядной очевидности” при обращении с *бесконечными* множествами, видно на примере сопоставления двух *истинных утверждений*[1]:

“*между любыми двумя рациональными числами есть иррациональное число*” и

“*между любыми двумя иррациональными числами есть рациональное число*”.

С “наглядной очевидностью” из этих утверждений следует вывод:

“*рациональных чисел столько же, сколько иррациональных*”,

а это утверждение *ложно* (см. с. 47).

Формализацию математических теорий на деле никогда не доводят до конца,[2] и говорить имеет смысл лишь о том или ином *уровне формализации* – соотношении между *наглядно-образными* и *формульно-логическими* способами рассуждений. В каждом конкретном случае приходится искать оптимальный балланс между ними[3]: чрезмерная формализация сковывает интуицию и творческое воображение, недостаточная же не гарантирует правильности выводов.

Надо еще учесть, что “*особенности человеческой психики делают формальные выводы практически не поддающимися проверке, даже если согласиться, что в принципе это – идеальный вид доказательства. Два обстоятельства действуют в одну сторону с губительным эффектом: формальные выводы гораздо длиннее текстов на арго*[4]*, скорость их сознательного чтения человеком гораздо ниже.*” ([**15**, с. 55]).

---

[1] Доказательства их *истинности* приведены далее (см. с. 47–48).

[2] Тем более что изложить чисто *формальными* средствами можно отнюдь не всякую *содержательную* теорию.

[3] Что сходно выбору оптимального соотношения между двумя способами восстановления событий: *разговором* с очевидцами и обращением к *документам*: в каких-то случаях можно ограничиться разговором, в других разговор требует документального подкрепления, в третьих истину можно установить только на основе документов.

[4] Имеются в виду математические тексты на традиционных языках общения.

Выход часто видят в построении "параллельных" математических теорий, имеющих разную степень формализации. Так, наряду с воспринимаемой лишь узким кругом специалистов *формальной теорией множеств*[1], существует общедоступная *"наивная" теория множеств*, отнюдь не свободная от противоречий, но тем не менее служащая основой для большинства *неформальных* математических теорий, в частности, *математического анализа*.

Аксиоматическую теорию называют *дедуктивно полной*[2], если любое правильно составленное утверждение о ее понятиях либо *доказуемо* (выводимо из *аксиом*), либо *опровержимо* (когда выводимым из *аксиом* оказывается *отрицание* этого утверждения). Хотя *дедуктивно полные* аксиоматические теории существуют (примеры приведены в гл. IV книги А. Робинсона [**20**]), они все же являются редкостью. Об этом свидетельствует знаменитая *теорема Гёделя*[3] *о неполноте* (1931 г.), утверждающая, что в рамках любой *формальной аксиоматической теории*, содержащей в качестве составной части *арифметику целых чисел*, есть *истинные*, но *не доказуемые* утверждения[4].

Истинность любой *математической теории* понимают исключительно как ее *непротиворечивость*:

"Математика в своем развитии совершенно свободна и связана лишь тем само собой разумеемщимся условием, что ее понятия должны быть непротиворечивы, а также долж-

---

[1] Есть несколько ее вариантов, наиболее известный из которых – *теория множеств Цермело–Френкеля* (ее изложение можно найти, например, у Ю. И. Манина [**15**], А. Френкеля и И. Бар-Хиллела [**25**], Дж. Шенфилда [**28**]).

[2] Лат. deductio – *выведение*.

[3] Gödel, Kurt (1906–1978) – американский математик (родом из Австро-Венгрии).

[4] Точные формулировки этой теоремы – у Ю. И. Манина [**15**] (на с. 87), А. Френкеля и И. Бар-Хиллела [**25**] (на с. 364), Дж. Шенфилда [**28**] (на с. 199–200); доступное толкование – у Ю.И.Манина [**16**] (на с. 92–109).

ны находиться в неизменных, установленных определениями отношениях к образованным раньше и уже имеющимися налицо испытанным понятиям. ... каждое математическое понятие носит в самом себе необходимый корректив. Если оно неплодотворно или нецелесообразно, то это весьма скоро обнаруживается благодаря его полной непригодности, и тогда оно, за отсутствием успеха, отбрасывается.” ([**9**, с. 80]).

Говорить об *опытной* проверке математических теорий бессмысленно: математика занимается *формально-логическими*, а не *реально существующими* связями, и прямого отношения к *опытам* не имеет. Проверке *практикой* подлежат не *математические теории*, а их приложения к объяснению (и предсказанию) реальных явлений.

Общая схема этого такова. Строится *математическая модель* изучаемого явления: *реальные объекты* и имеющиеся между ними *отношения* заменяются *понятиями* из уже существующей или специально создаваемой *математической теории* (выбор этих понятий и самой теории определяется эрудицией исследователя и его интуицией). *Выводы теории* сравнивают с *результатами наблюдений*. По степени их согласования судят не об *истинности* теории, а о ее *пригодности* для описания данного явления, т. е. об удачности (или неудачности) выбора математической модели.

Знакомый всем пример *математической модели* — это *трехмерное координатное пространство* $\mathbb{R}^3$ как мыслимый образ окружающего *физического пространства*. *Реальным предметам* в этой модели соответствуют воображаемаые *геометрические объекты*, описываемые через *математические соотношения* (уравнения, неравенства, их системы), связывающие три *числовые переменные* (традиционно обозначаемые x, y, z) — *координаты* в пространстве $\mathbb{R}^3$.

На какие общие понятия опирается анализ

Зарождение *анализа* как отдельного раздела математики связывают обычно с *а)* открытием Ке́плером[1] в 1609 г. *законов движения планет*, заставивших искать способы сокращения вычислений, и *б)* предпринятым Дека́ртом[2] в его "Геометрии" 1637 г. [**8**] переходом от чисто алгебраического обращения с уравнениями к изучению того, как входящие в них величины меняются с изменением одной из них.

<u>*Анализ*</u>[3] в античной классификации *доказательств* означал *доказательство от предположенного* – в противовес <u>*синтезу*</u>[4], подразумевавшему *доказательство от начал*; изначально же *анализом* называли размен монеты на более мелкие, а *синтезом* – обратную операцию ([**53**], с. 162–167).

В новое время моду на слова "анализ" и "аналитический" ввел в математику Вие́т[5] публикацией в 1591 г. руководства *по алгебре* "Введение в аналитическое искусство. Отдельное извлечение из сочинения по восстановленному математическому анализу, или новая алгебра" ("In artem analyticem isagoge. Seorsim excussa ab Opere restitutae Mathematicae Analyseos, Seu, Algebrâ nuovâ"). Виету не нравилось сарацинское слово "алгебра" ("аль-джебр"), и он хотел заменить его греческим "анализ". В результате алгебра сохранила название, а "анализом" (часто с добавлением слова "математический") стали называть *новый* предмет, возникший из *алгебры* и *геометрии*.

Предмет *анализа* – если выразить его двумя словами – это *предельные переходы*. Базируется же *анализ* на общематематических понятиях *множества* и *функции*.

---

[1] Kepler Johannes, 1571–1630, – немецкий астроном.

[2] Descartes (в латинском написании Cartesius) René (1596–1650) – французский математик и философ.

[3] Греч. $\alpha\nu\acute{\alpha}\lambda\upsilon\sigma\iota\varsigma$ – *разрешение, развязывание*.

[4] Греч. $\sigma\acute{\upsilon}\nu\theta\varepsilon\sigma\iota\varsigma$ – *сложение, соединение*.

[5] Viète (в латинском написании Vieta) François (1540–1603) – французский адвокат и математик; был на службе у Генриха III, а затем Генриха IV, занимался, в частности, расшифровкой перехватываемых писем их врагов ([**18**]).

Множества

Множество в математике (за исключением некоторых ее разделов) считают *исходным понятием*, традиционно сопровождая его следующими *пояснениями*.

Множество есть многое, мыслимое нами как единое.

Множество есть собрание (*совокупность, коллекция*) *вещей, объединенных по какому-нибудь признаку*.

Подобные фразы[1], создавая *наглядное представление* о *понятии* “множества”, не являются *определениями* этого *понятия*, оказываясь *логически не действующими*: на их основе нельзя строить *логические рассуждения*. Потребовалась детальная разработка этого понятия, для чего был создан специальный раздел математики – *теория множеств*.

Та часть этой теории, которую сейчас называют *наивной*, или *канторовской*, сформировалась к концу XIX в.[2] и предполагалась стать общим фундаментом различных ветвей математики и, в первую очередь, – *математического анализа*. Строилась она не на строгой *аксиоматической* основе, а исходя из *наглядных* представлений (в стиле предыдущих *пояснений*) и принципов *интуитивной логики* (соображений “здравого смысла"). Главной ее целью (и в то же время источником критики) стало обращение с *бесконечными* множествами.

Почти сразу обнаружилось, что подход к *бесконечным* множествам, основанный на соображениях “здравого смысла оказывается порочным. Выявились так называемые *антино́мии*, или *парадоксы*, *теории множеств* (греч. *ἀντινομία – противоречие*, *παράδοξος – то,*

---

[1] А каждая из них есть лишь *подбор синонима* к слову *множество*.

[2] В работах немецкого математика Ка́нтора (Cantor Georg, 1845–1918), не скрывавшего, однако, что идеи этих работ предварил в написанной в 1847–1948 гг. книге **[2]** чешский математик, логик и философ Больца́но (Bolzano Bernard, 1781–1848).

что бывает против ожидания) – рассуждения о *множествах*, безупречные с точки зрения обыденной логики, но приводящие к явным противоречиям.

Одной из первых оказалась так называемая *антиномия Ра́ссела*[1], опубликованная в 1903 г.

Пусть Z — множество всех тех множеств X, которые не содержат *самих себя* в качестве своих элементов, иначе говоря, $X \in Z$ в том и только в том случае, когда $X \notin X$. Если предположить, что $Z \in Z$, то придется признать, что $Z \notin Z$, если же предположить, что $Z \notin Z$, то следует вывод: $Z \in Z$.

Еще раньше (в 1899 г.) Кантор, разбирая понятие "множество всех множеств" пришел к заключению, что оно *противоречиво* (подробнее об этой и других *антиномиях* можно прочитать у Э. Мендельсона [**17**] и А. Френкеля и И. Бар-Хиллела [**25**]).

Стремление избежать *противоречий* привело к созданию *формальной теории множеств*, точнее, различных ее вариантов[2]. Все они имеют жесткую структуру, опираются на весьма продвинутую *формальную логику* и по своему устройству оказываются свободными от упомянутых *антиномий*. Первоначальная (называемая теперь *наивной*) *теория множеств* сохранилась как популярный вариант для начинающих и терминологическая основа большинства *неформальных математических теорий*.

Исходными (*не подлежащими определению*) понятиями *неформальной* (*наивной*) *теории множеств* являются следующие *предметы* и *отношения*:

элементы, для обозначения которых используют *строчные* буквы (обычно *латинские* или *греческие*), нередко снабжаемые *индексами*;

множества, обычно обозначаемые *заглавными* буквами (разных алфавитов) и конструкциями на их основе;[3]

---

[1] Russel Bertrand, 1872–1970 – английский философ и математик.

[2] Первоначальный был предложен в 1908 г. немецким математиком Церме́ло (Zermelo Ernst, 1871–1953).

[3] В *формальной теории множеств* в качестве исходных предметов выступают только *множества* (обозначаемые *строчными* буквами).

<u>*принадлежность*</u> (*элемента множеству*), обозначаемая значком $\in$ (с записью $a \in A$)[1]; *отрицание принадлежности* обозначается значком $\notin$ ($a \notin A$).

Считается, что каждое *множество* полностью определяется его (т. е. *принадлежащими* ему) *элементами*.

Перечисленные *исходные* понятия служат основой для формирования *определяемых* понятий теории множеств.

<u>*Пустому*</u> *множеству* (обозначаемому $\varnothing$) *по определению не принадлежит* ни один *элемент*.[2]

Множество A называют <u>*подмножеством*</u> *множества* B, записывая это в виде $A \subset B$ (или $B \supset A$)[1], если любой *элемент, принадлежащий множеству* A, *принадлежит* и *множеству* B.[3]

<u>*Пересечение*</u> *множеств* A и B есть *множество*, обозначаемое $A \cap B$, *принадлежность* которому какого-либо *элемента* равносильна его принадлежности *обоим* множествам A и B.[4]

<u>*Объединение*</u> *множеств* A и B есть *множество*, обозначаемое $A \cup B$, *принадлежность* которому какого-либо *элемента* равносильна его принадлежности *хотя бы одному* из множеств A и B.[4]

<u>*Разность*</u> *множеств* A и B есть *множество*, обозначаемое $A \setminus B$, *элементами* которого являются те *элементы* множества A, которые *не принадлежат* множеству B.[4]

---

[1] Значки $\in$, $\subset$, и $\supset$ произошли от предложенных итальянским математиком Пеа́но (Peano Giuseppe, 1858–1932) обозначений по начальным буквам греч. $\acute{\varepsilon}\sigma\tau\iota$ (*есть*) и фр. contient (*содержит*) ([**51**], с. 7).

[2] В символической записи (см. *Приложение I*): $\forall x (x \notin \varnothing)$.

[3] $\forall x \big((x \in A) \Rightarrow (x \in B)\big)$.

[4] $\forall x \big((x \in A \cap B) \Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \in B)\big)$ ($\wedge$ — значок *логического* “и”);
$\forall x \big((x \in A \cup B) \Leftrightarrow (x \in A) \vee (x \in B)\big)$ ($\vee$ — значок *логического* “или”);
$\forall x \big((x \in A \setminus B) \Leftrightarrow \big((x \in A) \wedge (x \notin B)\big)\big)$.

Запись $a=b$ означает, что *один и тот же* элемент обозначен *разными* буквами, а $A=B$ — то, что $A\subset B$ и $B\subset A$ (т. е. множествам A и B принадлежат *одни и те же* элементы). Если $A\subset B$, но $A\neq B$, то множество A называют *собственным подмножеством* множества B.

На так называемых *диаграммах Ве́нна* (по имени английского логика Венна; Venn John, 1834–1923) *множества* условно изображаются *фигурами* на плоскости (обычно весьма незатейливыми, но при различных вариантах их взаимного расположения). Из этих диаграмм видно, например, что $(A\setminus B)\cup B\neq A$ и $(A\cup B)\setminus B\neq A$ (хотя, разумеется, разглядывание картинок еще не есть *доказательство*).

Множество считается *заданным*, если установлено, какие *элементы* ему *принадлежат*, а какие нет.

Простейший способ *задания* множества — *перечисление* (если это возможно) всех *принадлежащих* ему *элементов* (при этом в их *списке* допускаются повторы). Например, запись $X=\{x\}$ означает, что *множество* X состоит из *единственного* элемента x, а запись $X=\{x,\,y\}$ — что X есть *двухэлементное* множество, состоящее из элементов x, y (а возможно, *одноэлементное*, если $y=x$). *Перечислением элементов* могут быть заданы также некоторые *бесконечные* множества (например, множество *натуральных* чисел $\mathbb{N}=\{1,\,1{+}1,\,1{+}1{+}1,\,\ldots\}$).

Более общий способ *задания множества* состоит в указании *квалифицирующего свойства* его *элементов*. Выражается это записью вида $A=\{x\mid\mathcal{A}(x)\}$ (или $A=\{x\colon\mathcal{A}(x)\}$), где $\mathcal{A}(x)$ — формулировка некоего *утверждения* (*свойства*), которое *выполняется* (является *истинным*) в точности для тех элементов x, которые *принадлежат* множеству A.

На самом деле с этим способом *задания множеств* не все обстоит так просто. Например, если *переменные элементы* x являются *множествами*, а утверждение $\mathcal{A}(x)$ состоит в том, что множество x *не содержит* самое себя в качестве элемента ($x\notin x$), то $z=\{x\mid x\notin x\}$ оказывается "множеством" из *антиномии Рассела* (см. с. 14): *если* $z \in z$, *то* $z \notin z$, *а если* $z \notin z$, *то* $z \in z$. Подробнее о том, всякий ли объект $A = \{x \mid \mathcal{A}(x)\}$ является *множеством*, можно прочитать в учебнике А. Н. Колмогорова и А. Г. Драгалина [**10**] (с. 19–22). Здесь же следует отметить, что подобного парадокса не возникает, если заранее оговорено, что *переменный элемент* x пробегает некоторое изначально заданное *множество* X (с записью этого как в *примере 2* ниже).

<u>*Примеры*</u>. *1.* $\{x \mid x^5 - 3x^3 + 2x = 0\} = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

2. Запись $\{x \in X \mid \mathcal{A}(x)\}$ и $\{f(x) \mid \mathcal{A}(x)\}$ используется как сокращенная соответственно для $\{x \mid (x \in X) \wedge \mathcal{A}(x)\}$ и $\{y \mid (y = f(x)) \wedge \mathcal{A}(x)\}$.

3. Если $x = y$, то $\{x\}$, $\{x, y\}$ и $\{x, x, y\}$ – это *одно и то же* множество (с *единственным* элементом x); напротив, $\{x\}$, $\{\{x\}\}$ и $\{\{x\}, \{\{x\}\}\}$ – три *разных* множества.

4. $\varnothing = \{x \mid x \neq x\}$.

5. Множество $\{\varnothing\}$ (в отличие от $\varnothing$) не является *пустым*: ему *принадлежит* элемент "пустое множество".

Принадлежность элемента множеству ($a \in A$) и *принадлежность множества множеству* ($B \subset A$) – это принципиально разные понятия (что и подчеркивается различием их обозначений): отношение *подмножества* к *множеству* есть отношение *части* к *целому*, тогда как отношение *элемента* к *множеству* таковым не является: не выполняется принцип "*часть части целого сама есть часть этого целого*" (например, $x \in \{x\}$ и $\{x\} \in \{\{x\}\}$, но $x \notin \{\{x\}\}$)[1]. Выбор какого-либо *элемента* x из *множества* X фактически подразумевает выбор *одноэлементного подмножества* $\{x\} \subset X$.

---

[1] Более наглядный пример: *брюки* являются элементом *одежды*, *карман* является элементом *брюк*, при этом *карман* не есть элемент *одежды*.

Важно иметь в виду следующее. Понятие *множества* подразумевает лишь *принадлежность* ему его *элементов*, но не наличие между *элементами* множества каких-либо *отношений* (даже если таковые имеются). В тех же случаях, когда *множество* рассматривается вместе с теми или иными *отношениями* между его *элементами*, принято говорить о *множестве* с *дополнительной структурой*, называть его *системой*, *пространством* и т. п.

Важнейшие (с точки зрения *математического анализа*) примеры *множеств* с *дополнительной структурой* — это определяемые ниже *система* $\mathbb{R}$ *действительных чисел* и *координатное пространство* $\mathbb{R}^n$.

Упорядоченные пары и декартовы произведения

Дека́ртовым (или *прямым*) *произведением* двух непустых (но не обязательно различных) множеств X и Y (если $Y = X$, то Y считают вторым экземпляром множества X) называется *множество*, обозначаемое $X \times Y$, *элементами* которого служат всевозможные *упорядоченные пары* (x, y), каждая из которых составлена из какого-либо элемента x множества X (*первого* элемента *пары*) и какого-либо элемента y множества Y (ее *второго* элемента). Определяющим свойством *упорядоченных пар* является следующий принцип их *совпадения*: $(x, y) = (u, v)$ в том и только в том случае, когда одновременно $u = x$ и $v = y$.

В аксиоматической теории множеств *упорядоченную пару* (x, y) элементов x и y определяют как *множество*, составленное из *множеств* $\{x\}$ и $\{x, y\}$, т. е. по определению

$$(x, y) \begin{cases} \{\{x\}, \{x, y\}\}, & \text{если } x \neq y, \\ \{\{x\}\}, & \text{если } x = y; \end{cases}$$

несимметричность вхождения x и y отражает различие занимаемых ими мест в паре (x, y).

Данное определение *упорядоченной пары*[1] не имеет более глубокого смысла, помимо того, чтобы обеспечить выполнение *определяющего свойства* упорядоченной пары: $(x,y)=(u,v)$ в том и только в том случае, когда $x=u$ и $y=v$. Для проверки его выполнения следует отдельно рассмотреть случаи $x=y$ и $x\neq y$.

В первом случае соотношение $(x,y)=(u,v)$ означает *совпадение множеств* $\{\{x\}\}$ и $\{\{u\},\{u,v\}\}$, в силу чего $v=u$ и $u=x$.

В случае же $x\neq y$ соотношение $(x,y)=(u,v)$, равносильное *совпадению множеств* $\{\{x\},\{x,y\}\}$ и $\{\{u\},\{u,v\}\}$, обеспечивает (поскольку *одноэлементное* множество не может совпадать с *двухэлементным*) последовательное выполнение соотношений: $u\neq v$, $\{x\}=\{u\}$ и $\{x,y\}=\{u,v\}$. Из них, в свою очередь, следует, что $x=u$ и $y=v$.

Беря за основу определение *упорядоченной пары*, можно дать определение *упорядоченной тройки* $(x,\,y,\,z)$ элементов $x\in X,\ y\in Y,\ z\in Z$ как *упорядоченной пары* $\big((x,\,y),\,z\big)$. Совокупность всех таких *упорядоченных троек* составляет *декартово произведение* $X\times Y\times Z$ множеств $X,\ Y,\ Z$.

Дальнейшие действия по этой же схеме приводят к понятию *упорядоченного набора* $(x_1,\,x_2,\,\ldots,\,x_n)$ из n элементов $x_1\in X_1,\ x_2\in X_2,\ \ldots\ ,\ x_n\in X_n$ и, соответственно, *декартова произведения* $X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$ любых n (непустых) множеств $X_1,\ X_2,\ \ldots\ ,\ X_n$.

А именно, после того, как уже определены понятия *упорядоченого набора* $(x_1,\ldots,x_{n-1})$ *из* $n-1$ *элементов* и *декартова произведения* $X_1\times\cdots\times X_{n-1}$, *упорядоченный набор* $(x_1,\ldots,x_{n-1},x_n)$ *из* n *элементов* и *декартово произведение* $X_1\times\cdots\times X_n$ определяются, соответственно, как *упорядоченная пара* $\big((x_1,\,\ldots\,,\,x_{n-1}),\,x_n\big)$ и *декартово произведение* $\big(X_1\times\cdots\times X_{n-1}\big)\times X_n$.

В тех случаях, когда $X_1=\cdots=X_n=X\quad(n=2,3,\ldots)$, вместо $X_1\times\cdots\times X_n$ используют запись X^n.

Идея *декартова произведения* (как это и отражено в названии) восходит к Дека́рту, хотя он “всего лишь” первым начал (в своей “Гео-

[1] Предложенное польским математиком Куратовским (Kuratowski Kazimiez, 1896–1980) в 1921 г. в его статье в Fundam. Math., v. 2, p. 171.

метрии" [**38**], впервые изданной в 1637 г.) определять *положение точки* на плоскости *парой чисел* – ее *расстояниями* от двух пересекающихся прямых (называть их *координатами точки* стали позже), что позволило задавать *линии* на плоскости не только их *геометрическим построением* (как до Декарта), но и посредством *уравнений*, связывающих указанные *расстояния*.

Конструкция *декартова произведения* не только стала основой *координатного метода* изучения геометрических фигур (получившего название *аналитической геометрии*), но и позволила выразить понятия *функции* и *отношения*.

Функции

Беря за основу понятие *декартова произведения* $X \times Y$ множеств X и Y, под заданием <u>*функции*</u> $y = f(x)$ *переменного элемента* $x \in X$, *значениями* которой являются *переменные элементы* $y \in Y$, понимают[1] задание непустого *подмножества* $f \subset X \times Y$ со свойством:

$$\textit{если } (x, y_1) \in f \textit{ и } (x, y_2) \in f, \textit{ то } y_1 = y_2;^2$$

само *подмножество* $f \subset X \times Y$ называют при этом <u>*графиком*</u> *функции* $y = f(x)$ с записью его элементов в виде $\big(x, f(x)\big)$.

Из данного определения *функции* $y = f(x)$ *переменного элемента* $x \in X$ не следует, что x непременно пробегает *все* множество X. В случае, когда X есть множество *действительных* (или *комплексных*) *чисел* (о которых ниже в 1.1, 1.3), *переменный элемент* $x \in X$ называют <u>*переменной*</u> (сокращение от *переменная величина*[3]).

Первые элементы упорядоченных пар $(x, y) \in f$ вместе составляют подмножество $X_f \subset X$, называемое <u>*множеством*</u>

[1] Следуя определению *функции*, данному итальянским математиком Пеáно в 1911 г. в его заметке в Atti Reale Accad. Lincei, t. XX, p. 5.

[2] Его смысл: *вторые* элементы упорядоченных пар $(x, y) \in f$ *однозначно* определяются их *первыми* элементами. Выражением этого свойства и является привычная запись $y = f(x)$ (вместо $(x, y) \in f$).

[3] *Действительные* числа раньше называли "величинами".

задания (или *областью определения*) функции $y=f(x)$. Подмножество же $Y_f \subset Y$, составленное из *вторых* элементов упорядоченных пар $(x,y)\in f$, т. е. из *всех* элементов $y\in Y$ вида $y=f(x)$, $x\in X_f$, называется *множеством значений* этой функции.

В образном представлении X_f и Y_f являются "проекциями" *графика* f функции $y=f(x)$ соответственно на множества X и Y. Существенно, что *разные* точки *графика* функции (т.е. *разные* упорядоченные пары $(x,y)\in f$) имеют *разные* "проекции" на множество X.

Если функция $y=f(x)$ обладает тем свойством, что *разные* точки ее *графика* $f\subset X\times Y$ имеют *разные* "проекции" на множество Y (иначе говоря, если *разные* упорядоченные пары в f непременно различаются *вторыми* элементами, или, что то же самое, *разным* значениям x соответствуют *разные* значения y), то функцию $y=f(x)$ называют *взаимно-однозначной*.

Достоинством *взаимно-однозначной* функции $y=f(x)$ является существование *обратной* (по отношению к ней) *функции* $x=f^{-1}(y)$ (переменного элемента y). *График* f^{-1} обратной функции есть подмножество декартова произведения $Y\times X$, состоящее из взятых с *обратным* порядком следования элементов *упорядоченных пар* $(x,y)\in f$.

Если *множество значений* функции $y=f(x)$ (переменного элемента x) является подмножеством *множества задания* другой функции $z=g(y)$ (переменного элемента y), то сопоставление упорядоченных пар $(x,y)\in f$ и $(y,z)\in g$ (с одним и тем же y) определяет *композицию функций* (или *сложную функцию*) $z=g(f(x))$ (переменного элемента x).

Тот факт, что $y=f(x)$ — *взаимно-однозначная* функция, а $x=f^{-1}(y)$ — *обратная* к ней, выражается соотношениями:

$$x = f^{-1}(f(x)) \ \text{для любого} \ x \in X_f\,,$$
$$y = f(f^{-1}(y)) \ \text{для любого} \ y \in Y_f\,,$$

т. е. функции $x = f^{-1}(y)$ и $y = f(x)$ на самом деле являются *обратными* по отношению *друг к другу*, а их *множества задания* и *множества значений* при переходе от одной к другой меняются местами.

В случае, если в качестве множества X выступает *декартово произведение* $X_1 \times \cdots \times X_n$, функция $y = f(x)$ принимает вид $y = f(x_1, \ldots, x_n)$, оказываясь функцией n переменных $x_1 \in X_1\,, \ \ldots\ , x_n \in X_n$.

Отходя от формального подхода к поняти *функции*, можно сказать, что *задание функции* $y = f(x)$ *переменного элемента* $x \in X$ *со значениями в множестве* Y *есть установление правила соответствия, посредством которого каждому элементу* x *множества* X *или некоторого его подмножества* X_f (*множества задания функции*) *сопоставляется вполне определенный* элемент y множества Y (*второй* элемент той *единственной* упорядоченной пары $(x, y) \in f$, *первым* в которой является элемент x).

Термин “функция”[1] ввел в конце XVII в. немецкий математик и философ Лейбниц (Leibniz Gottfried Wilhelm, 1646–1716), изначально относя его к геометрическим параметрам кривой: “*Я называю функциями (fonctions) всякие части прямых линий, которые получают, проводя бесконечные прямые, соответствующие неподвижной точке и точкам кривой* ...” (цитировано по статье А. П. Юшкевича в Успехах математических наук за 1948 г., т. III, вып. 1, с. 180).

В 1718 г. Иоганн Бернулли[2] дал определение “функции”, не связанное с геометрическими представлениями: “*Функцией переменной величины называется количество, образованное каким угодно спосо-*

[1] Происходит от лат. *fungor, functus* – *исполнять*.

[2] Bernoulli Johann (1667–1748) – второй из братьев старшего поколения знаменитой семьи швейцарских математиков.

бом из этой переменной величины и постоянных"[1]. Он же предложил в качестве *символа функции* греческую букву φ с записью переменной без скобок: φx. Символ функции f и заключение переменной в скобки вошли в обиход позднее, начало чему положил швейцарский (он же российский) математик Эйлер (Euler Leonhard, 1707–1783; основная часть его деятельности прошла в Петербурге, где он и похоронен).

В настоящее время *функцию* многие склонны относить к *исходным* общематематическим понятиям, давая ему (например, в [**26**], с. 24) следующее *пояснение*.

Функцией называют операцию, которая, будучи применена к чему-то как к аргументу, дает некоторую вещь в качестве значения функции для данного аргумента.

Отдельно в анализе стоят функции *натуральной*[2] переменной, которые называют *последовательностями*. А именно, считается, что задана *последовательность* $\{x_n\}$ элементов множества X, если каждому *натуральному* числу[3] n поставлен в соответствие некий *элемент множества* X, обозначаемый (для указания его соответствия числу n) x_n и называемый n-*м элементом последовательности* $\{x_n\}$.

Поскольку *последовательность* $\{x_n\}$ есть *функция*[4], ее *элементы* x_n есть не просто *элементы множества* X, а *упорядоченные пары* (n, x_n), лишь для краткости обозначаемые x_n. В частности, x_n и x_m при $m \neq n$ — это *разные элементы последовательности* $\{x_n\}$, даже если они *совпадают* $(x_m = x_n)$ как *элементы множества* X.

---

[1] В оригинале: *"On appelle fonction d'une grandeur variable une quantité composée de quelque manière que soit de cette grandeur variable et de constantes"*. (Mémoire de l'acad. royale des sci. á Paris, 1718, p. 132)

[2] Вариант: *целой неотрицательной*.

[3] Возможно, начиная лишь с *некоторого* натурального числа, а в некоторых случаях, наоборот, начиная с *нуля*.

[4] Переменной $n \in \mathbb{N}$ (иногда включая $n = 0$) со значениями в множестве X; x_n есть видоизмененная запись $x(n)$.

Отношения

Задание в множестве X *n-местного <u>отношения</u>* $\mathcal{R}$ соответствует указанию *подмножества* $R \subset X^n$, *принадлежность* которому *упорядоченного набора* $(x_1, \ldots, x_n)$ элементов $x_1, \ldots, x_n \in X$ соответствует *выполнению* для этих элементов данного *отношения* (или, как говорят, истинности значение *предиката*[1] $\mathcal{R}(x_1, \ldots, x_n)$:

$(x_1, \ldots, x_n) \in R \iff \mathcal{R}(x_1, \ldots, x_n)$. В частности, любое *одноместное отношение* $\mathcal{R}$ в множестве X соответствует заданию некоего *подмножества* $R \subset X$, и его можно рассматривать как некое <u>*свойство*</u>, выполняющееся в точности для тех элементов $x \in X$, которые *принадлежат* подмножеству $R \subset X$: $x \in R \iff \mathcal{R}(x)$.[2]

Примерами *двухместных отношений* в множестве $\mathbb{R}$ *действительных чисел* служат отношения “равно” $(x = y)$ и “меньше” $(x < y)$; отвечающие им *подмножества* координатной плоскости $\mathbb{R}^2$ (переменных x, y) – это соответственно *прямая*, делящая пополам *1*-й и *3*-й координатные углы, и расположенная “над” ней *полуплоскость*.

Сложение и *умножение* в системе $\mathbb{R}$ *действительных чисел* можно рассматривать как выражаемые формулами $x+y=z$ и $x \cdot y = z$ *трехместные отношения* в множестве $\mathbb{R}$; *подмножества* координатного пространства $\mathbb{R}^3$, отвечающие этим *отношениям*, изучают в курсе *аналитической геометрии*.

Пример *одноместного отношения* в множестве $\mathbb{R}$ действительных чисел – *свойство* числа быть (или не быть) *положительным*.

---

[1] Лат. praedicatum – *высказанное*, *сказуемое*. Подробнее о *предикатах* – в *Приложении I*.

[2] Или (в обозначениях на с. 17) $R = \{x \in X \mid \mathcal{R}(x)\}$.

Перестановки, сочетания, бином Ньютона

Под *перестановкой* (или *размещением*) n элементов[1] понимают любое распределение между ними n натуральных чисел ("номеров") от 1 до n (позволяющее мыслить их *размещенными* "в линию" один за другим).

Подсчитывая общее число таких *перестановок*, следует заметить, что "номер" n может быть отдан любому из n предметов, т. е. n способами, и при каждом распределении "номера" n распределить "номер" $n-1$ (между не получившими "номер" n предметами) можно $n-1$ способами и т. д. В результате обозначаемое[2] P_n общее число всевозможных *перестановок* n элементов оказывается равным произведению $n\cdot(n-1)\cdots 1$, для которого установилось (после прочих предложений) обозначение $n!$ (читается: "n факториал").

Поскольку $P_0=1$ (разместить *отсутствующие* предметы можно *одним* способом – ничего не делать), равенство $P_n=n!$ при $n=1,2,\ \ldots$ дает основание полагать $0!=1$ (как это и принято считать *по определению*).

Под *числом сочетаний из n по k* (где $k=0,1,\ldots,n$) понимают обозначаемое[3] C_n^k (другое обозначение $\binom{n}{k}$) число способов выбора k предметов из имеющихся n; в частности, справедливы равенства: $C_n^k=C_n^{n-k}$ и $C_n^0=C_n^n=1$.

Найти значение C_n^k при $k=1,\ \ldots,n-1$ можно исходя из соотношения $P_n=C_n^k\cdot P_k\cdot P_{n-k}$ (получить *все* перестановки n предметов можно, выбрав произвольно k из них, взять *все* их перестановки, а затем *все* перестановки оставшихся $n-k$ предметов): $C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}=\frac{n\cdot(n-1)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdots k}$.

---

[1] Реальных или вымышленных, но *различаемых*.

[2] С использованием начальной буквы фр. permutation — *перемещение, перестановка*.

[3] От фр. combinaison – *комбинация, сочетание*.

Обобщением формулы “квадрата суммы” и “куба суммы” служит формула “бинома Ньютона”[1]

$$(x+a)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k x^{n-k},$$

или (в развернутом виде)

$$(x+a)^n = x^n + \frac{n}{1} a x^{n-1} + \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2} a^2 x^{n-2} + \ldots$$
$$\cdots + \frac{n\cdot(n-1)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdots\ k} a^k x^{n-k} + \cdots + a^n.$$

Для ее вывода достаточно заметить, что результатом раскрытия скобок в $(x+a)^n = \overbrace{(x+a)\cdots(x+a)}^{n}$ оказывается сумма произведений $a^k x^{n-k}$ (где $k=0,1,\ \ldots\ ,n$), каждое из которых входит с коэффициентом, равным числу образований (при раскрытии скобок) произведения $a^k x^{n-k}$, а оно как раз равно C_n^k – числу способов выбора k скобок из n: в этих k скобках при перемножении $\overbrace{(x+a)\cdots(x+a)}^{n}$ берется *второе* слагаемое, а в остальных $n-k$ скобках – *первое*, в результате чего и образуется произведение $a^k x^{n-k}$.

[1] Английский математик, физик и астроном Нью́тон (Newton, Sir Isaac, 1643–1727) не был открывателем этой формулы, но стал первым, кто распространил ее (в письме от 13 июня 1676 г. к Секретарю Лондонского королевского общества, через которого шла официальная переписка между Ньютоном и его немецким коллегой и соперником Лейбницем (Leibniz Gottfried Wilhelm, 1646–1716) на *отрицательные* и *дробные* показатели (когда правая часть формулы содержит *бесконечное* число слагаемых). При этом Ньютон не дал общей формулы для коэффициентов, а указал лишь правило для их последовательного вычисления. Подробности, включая краткую историю “бинома Ньютона”, желающие могут найти в изданном на русском языке и снабженном подробным комментарием сборнике математических работ Ньютона **[19]** (на с. 218–219, 233–236, 406–407).

I. Числа и множества чисел

I.1. Как устроена система действительных чисел

Начальное представление о *системе действительных* (или *вещественных*) *чисел* имеет каждый, кому приходилось *считать* и *измерять*. Сведений об этой *системе*, сообщаемых в средней школе, вполне хватает для всех видов практической деятельности и решения многих математических задач. Строить же на их основе курс *математического анализа* можно лишь в виде его популярной вульгаризации, именуемой в вузовских программах "высшей математикой".

Есть разные способы перейти от обыденного (школьного) представления о *действительных числах* к точному их *определению*. Каждый из этих способов неминуемо базируется на неких *исходных понятиях* и *свойствах* (*аксиомах*).

Согласно одному из них, весьма подробно изложенному в учебнике Э. Ландау [**12**], вначале *аксиоматически* определяется *система натуральных чисел*. Затем (на протяжении 112 страниц в ходе доказательства более двухсот теорем) устанавливаются правила и свойства *четырех основных действий*, понятия *больше* (*меньше*) и постепенно выясняется, что следует понимать под *целыми*, *рациональными* и, наконец, *действительными числами*.

Наиболее экономным является *аксиоматический* способ задания сразу всей *системы действительных чисел* как некоего *воображаемого множества* с относительно небольшим набором свойств, формулируемых в виде *аксиом*, оперируя которыми по *правилам логики* можно *вывести*, если не *все* вообще[1], то, по крайней мере, все необходимые для обоснования *математического анализа* свойства системы *действительных чисел*.

---

[1] Это, как отмечалось на с. 10, невозможно в принципе.

Определение системы действительных чисел

Система действительных (или *вещественных*) *чисел* — *это воображаемое множество*[1], *обозначаемое* $\mathbb{R}$, *в котором:*

а) есть два выделенных элемента: 0 (*нуль*) *и* 1 (*единица*);

б) выделено подмножество элементов a, *называемых положительными числами* (*обозначение* $a>0$ *или* $a\in\mathbb{R}_+$);

в) введены операции сложения и умножения[2]: *каковы бы ни были элемент* $a\in\mathbb{R}$ *и элемент* $b\in\mathbb{R}$ (*не обязательно отличный от* a), *определены обозначаемые* $a+b$ *и* $a\cdot b$ (*чаще* ab, *иногда* $a\times b$) *элементы множества* $\mathbb{R}$, *называемые соответственно суммой и произведением числа* a *и числа* b;

г) предполагаются выполненными утверждения (*аксиомы*[3]) **A 1 – A 10**, *в которых* a, b, ... — *любые элементы множества* $\mathbb{R}$ (*т. е. действительные числа*).

A 1. $a+b=b+a$ *и* $ab=ba$ — *переместительные законы* (*коммутативность*[4]) *сложения и умножения.*

A 2. $a+(b+c)=(a+b)+c$ *и* $a(bc)=(ab)c$ — *сочетательные законы* (*ассоциативность*[4]) *сложения и умножения.*

A 3. $a(b+c)=ab+ac$ — *распределительный закон* (*дистрибутивность*[4]) *сложения и умножения.*

A 4. $a+0=a$ *и* $a\cdot 1=a$ — *свойства нуля и единицы.*

---

[1] Его *элементы* и есть *действительные числа*. Обозначение $\mathbb{R}$ от лат. *res — вещь, действительность.*

[2] По сути это означает, что определены две *функции*, которые каждой *упорядоченной паре* (a,b) элементов a, $b\in\mathbb{R}$ (см. с. 18) сопоставляют элемент, обозначаемый $a+b$, и элемент, обозначаемый $a\cdot b$.

[3] Это один из возможных наборов *аксиом*: в литературе встречаются и другие, ему *эквивалентные*, т. е. приводящие к той же совокупности *истинных утверждений* о *действительных числах*.

[4] Лат. *commutatio — перемена, associatio — соединение, distributio — разделение.*

A 5. *Уравнение* $a+x=b$ *имеет в множестве* $\mathbb{R}$ *единственное решение, которое обозначают* $b-a$ *и называют* *<u>разностью</u>* *чисел* b *и* a (*или результатом* *<u>вычитания</u>* *числа* a *из числа* b); *разность* $0-a$ *обозначают* $-a$ *и называют* *числом,* *<u>противоположным</u>* a.

A 6. *Уравнение* $ax=b$ *при* $a\neq 0$ *имеет в множестве* $\mathbb{R}$ *единственное решение, которое обозначают* $\dfrac{b}{a}$ *и называют* *<u>частным</u>* *от* *<u>деления</u>* *числа* b *на число* a; *частное* $\dfrac{1}{a}$ (*обозначаемое также* a^{-1}) *называют числом,* *<u>обратным</u>* a.

A 7. *Если* $a\in\mathbb{R}$, *то либо* $a=0$, *либо* $a>0$, *либо* $-a>0$; *в последнем случае* a *называют* *<u>отрицательным</u>* *числом* (*обозначение* $a<0$); *если* $b-a>0$, *то считают, что* a *<u>меньше</u>* b, *или* b *<u>больше</u>* a, *обозначая это* $a<b$ (*или* $b>a$).

Как следствие, если $a\neq b$, то либо $a<b$, либо $a>b$. Запись $a\leqslant b$ (или $b\geqslant a$) означает, что либо $a<b$, либо $a=b$.

A 8. *Если* $a>0$ *и* $b>0$, *то* $a+b>0$ *и* $ab>0$.

A 9 (аксиома Архимеда)[1]. *Каким бы ни было положительное число* a, *среди чисел* $1,\ 1+1,\ 1+1+1,\ \ldots$ — *а их называют* *<u>натуральными</u>*[2] — *есть бо́льшее, чем* a.

---

[1] Сам Архимед ($A\rho\chi\iota\mu\acute{\eta}\delta\eta\varsigma$, ок. 287–212 до н. э.) формулировал ее в том смысле, что из двух неравных величин (отрезков, фигур, тел) бо́льшая превосходит меньшую на такую величину, которая будучи прибавлена к себе достаточное число раз, превзойдет любую заданную величину, допускающую с ней сравнение.

[2] Лат. *naturalis* — *созданный природой*. Обозначение начальных из них *цифрами* 1, 2, 3, …, 9 вкупе со знаком *нуля* 0 и *позиционной* записью остальных (об этом далее на с. 37–38) возникли в Индии, были приняты арабами и пришли в Европу (потеснив “римскую” систему записи чисел) благодаря Леона́рду Пиза́нскому, или Фибона́ччи (т. е. сыну Бона́ччо; Leonardo Pisano, Fibonacci), и его “Книге абака” (“Liber abaci”; аба́к — счетное устройство), вышедшей в 1202 и 1228 гг. Об этом обстоятельно и интересно написано в книгах [**33**] и [**41**].

А 10 (аксиома непрерывности[1]**).** *Если все элементы множества* $\mathbb{R}$ *разделены на два непустых подмножества* A *и* B *так, что любой элемент множества* A *меньше любого элемента множества* B, *то существует элемент* $c \in \mathbb{R}$, *являющийся либо наибольшим в множестве* A, *либо наименьшим в множестве* B.[2]

Аксиом **А1–А10** достаточно для аргументированного вывода всех привычных свойств действительных чисел.

Вот некоторые из этих свойств, которые оказываются *теоремами*, выводимыми из сформулированных *аксиом*.

Т 1. $2\times 2=4$.

<u>*Доказательство*</u>[3]. $2\cdot 2=2\cdot(1+1)\overset{\mathbf{A3}}{=}2\cdot 1+2\cdot 1\overset{\mathbf{A4}}{=}2+2=2+(1+1)\overset{\mathbf{A2}}{=}$ $\overset{\mathbf{A2}}{=}(2+1)+1=3+1=4$.

Т 2. $a\cdot 0=0$ *для любого* $a\in\mathbb{R}$.

<u>*Доказательство.*</u> $a\cdot 0\overset{\mathbf{A4}}{=}a\cdot 0+0\overset{\mathbf{A5}}{=}a\cdot 0+\bigl(a+(-a)\bigr)\overset{\mathbf{A2}}{=}(a\cdot 0+a)+(-a)\overset{\mathbf{A4}}{=}$ $\overset{\mathbf{A4}}{=}(a\cdot 0+a\cdot 1)+(-a)\overset{\mathbf{A3}}{=}a(0+1)+(-a)\overset{\mathbf{A1,A4}}{=}a+(-a)\overset{\mathbf{A5}}{=}0$.

Т 3. $-(-a)=a$ *для любого* $a\in\mathbb{R}$.

---

[1] Ее называют еще <u>*аксиомой полноты*</u>.

[2] Так что $A=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x\leqslant c\}$, а $B=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x>c\}$ в первом случае и $A=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x<c\}$, а $B=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x\geqslant c\}$ — во втором.

Данное свойство *системы действительных чисел* сформулировал в работе 1872 г. ([**7**], с. 20–21) немецкий математик Дéдекинд (Dedekind Richard, 1831–1916), однако еще до него (в 1817 г.) это свойство выразил (чуть в других терминах) чешский математик, логик и философ Бóльцáно (Bolzano Bernard, 1781–1848), о жизни и работах которого можно прочитать в книге Э. Кольмана [11].

Геометрическая формулировка аксиомы (если *действительные числа* мыслить *точками прямой*, а неравенства $a<x<b$ выражать словами “*x лежит между a и b*”): “*Если все точки прямой разделены на два множества* A *и* B *так, что никакая точка никакого из них не лежит между точками другого, то существует точка прямой, не лежащая ни между точками множества* A, *ни между точками множества* B.” (Amer. J. of Math., 1911, v. 33, no. 3, p. 291).

<u>Доказательство.</u> Оба числа a и $-(-a)$ являются *противоположными* числу $-a$, а поэтому *совпадают* в силу аксиомы **A5**.

T4. $(a^{-1})^{-1}=a$ *для любого ненулевого* $a\in\mathbb{R}$.

<u>Доказательство.</u> Оба числа a и $(a^{-1})^{-1}$ являются *обратными* по отношению к числу a^{-1}, а потому *совпадают* в силу аксиомы **A6**.

T5. $-0=0, \quad 1^{-1}=1$.

<u>Доказательство.</u> $0+0\overset{\mathbf{A4}}{=}0, \quad 1\cdot 1\overset{\mathbf{A4}}{=}1$; остается применить аксиомы **A5** и **A6**.

T6. $-a=(-1)a$ *для любого* $a\in\mathbb{R}$.

<u>Доказательство.</u> $0\overset{\mathbf{T2}}{=}a\cdot 0\overset{\mathbf{A6}}{=}a\big(1+(-1)\big)\overset{\mathbf{A3,A4,A1}}{=}a+(-1)a$, т.е. $(-1)a$ есть число, *противоположное* a.

T7. $b-a=b+(-a)$.

<u>Доказательство.</u> В силу аксиом **A1**, **A2**, **A4** число $b+(-a)$ удовлетворяет уравнению $a+x=b$, имеющему (согласно аксиоме **A5**) *единственное* решение, обозначаемое $b-a$.

T8. $\dfrac{b}{a}=a^{-1}b$.

<u>Доказательство.</u> В силу аксиом **A1**, **A2**, **A4** число $a^{-1}b$ удовлетворяет уравнению $ax=b$, имеющему (согласно аксиоме **A6**) *единственное* решение, обозначаемое $\dfrac{b}{a}$.

T9. $(ab)^{-1}=a^{-1}b^{-1}$.

<u>Доказательство.</u> В силу аксиом **A1**, **A2**, **A6** $(ab)a^{-1}b^{-1}=1$, т.е. $a^{-1}b^{-1}$ является числом, *обратным* к ab.

T10. $(-c)(-c)=cc$ для любого $c\in\mathbb{R}$.

<u>Доказательство.</u> $(-c)(-c)-(cc)\overset{\mathbf{T6}}{=}(-1)c(-1)c+(-1)(cc)\overset{\mathbf{A1,A2,A3}}{=}$
$\overset{\mathbf{A1,A2,A3}}{=}((cc)(-1))(-1+1)\overset{\mathbf{A5}}{=}((cc)(-1))0\overset{\mathbf{T2}}{=}0$.

T11. $1>0$.

<u>Доказательство.</u> Так как 1 и 0 — два *разных* элемента, $1\neq 0$, допущение же, что $-1>0$, приводит к противоречию с аксиомой **A7**: $1\overset{\mathbf{T10}}{=}(-1)(-1)\overset{\mathbf{A8}}{>}0$. Поэтому (ввиду этой же аксиомы) $1>0$.

T12. *Все натуральные числа* $(1,\ 1+1,\ 1+1+1,\ \dots)$ *различны.*

<u>Доказательство.</u> Ввиду теоремы **T11** и аксиомы **A8** *разность* между различными *суммами единиц* отлична от нуля.

T13. *Если* $a<b$, *а* $b<c$, *то* $a<c$.

<u>*Доказательство.*</u> $c-a \overset{\mathbf{T7}}{=} c+(-a) \overset{\mathbf{A4,A5}}{=} c+(-b)+b+(-a) \overset{\mathbf{T7}}{=}$
$\overset{\mathbf{T7}}{=} (c-b)+(b-a) \overset{\mathbf{A8}}{>} 0.$

T 14. *Если* $b>a>0$, *то* $a^{-1}>b^{-1}>0$.

<u>*Доказательство.*</u> При $a>0$ соотношения $a^{-1}=0$ и $a^{-1}<0$ невозможны в силу теорем **T 2** и **T 11**; если $b>a>0$, то $a^{-1}-b^{-1} \overset{\mathbf{A4,A6}}{=}$
$\overset{\mathbf{A4,A6}}{=} (ab)^{-1}ab\big(a^{-1}-b^{-1}\big) \overset{\mathbf{A1-A4,A6}}{=} (ab)^{-1}(b-a) \overset{\mathbf{A7,A8}}{>} 0.$

<u>**T 15.**</u> $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$; $\quad (a+b)(a-b)=a^2-b^2$;
$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$.[1]

<u>*Доказательство.*</u> $(a+b)^2=(a+b)(a+b) \overset{\mathbf{A3}}{=} a(a+b)+b(a+b) \overset{\mathbf{A1,A3}}{=}$
$\overset{\mathbf{A1,A3}}{=} aa+ab+ba+bb \overset{\mathbf{A1,A3,A4}}{=} a^2+(1+1)ab+b^2;$

$(a+b)(a-b) \overset{\mathbf{A1,A3,T6}}{=} aa+ba+(-1)ab+(-1)bb \overset{\mathrm{A5,T6}}{=} a^2-b^2;$

$(a+b)^3=(a+b)^2(a+b)=(a^2+2ab+b^2)(a+b) \overset{\mathbf{A1-A4}}{=}$
$\overset{\mathbf{A1-A4}}{=} a^2a+2aba+b^2a+a^2b+2abb+b^2b=a^3+(2+1)a^2b+2+1)ab^2+b^3.$

T 16. *В обозначении*[1] $a^n=\overbrace{a\cdots a}^{n}$ *при* $n=2,\,3,\,\ldots$ (*с соглашением считать* $a^1=a$) *для любых натуральных чисел* m,n *выполняются равенства*: *1)* $a^{m+n}=a^ma^n$, $\quad$ *2)* $a^{m\cdot n}=(a^m)^n$.

<u>*Доказательство.*</u> *1)* $a^{m+n}=\overbrace{a\cdots a}^{m+n}=\overbrace{a\cdots a}^{m}\cdot\overbrace{a\cdots a}^{n}=a^ma^n$;

2) $a^{m\cdot 1} \overset{\mathbf{A4}}{=} a^m, \qquad a^{m\cdot 2}=a^{m(1+1)} \overset{\mathbf{A3,A4}}{=} a^{m+m} \overset{1)}{=} a^ma^m=(a^m)^2,$

$a^{m\cdot 3}=a^{m(2+1)} \overset{\mathbf{A3,A4}}{=} a^{m\cdot 2}a^m=(a^m)^2a^m \overset{1)}{=} (a^m)^3, \ \ldots$

Как видно из этих примеров, предварять титулом “теорема” *каждое* выводимое утверждение было бы непрактично, да и вряд ли возможно. Как правило, этот титул применяют в более узком смысле, называя “теоремами” не все выводимые утверждения, а лишь наиболее значимые из них, обычно именные или имеющие традиционные названия. Примером такого утверждения может служить следующее.

---

[1] Запись a^2 наравне с aa, a^3 вместо aaa и т. д. ввел Декарт в своей “Геометрии” [**38**] (1637 г.).

В “Новой Алгебре” Виета формула *куба суммы* записывалась в виде
$\overline{a+b}$ *cubo æqualia a cubus* $+$ *b in a quadr.* $3+$ *a in b quadr.* $3+$ *b cubo.*

Теорема существования арифметического корня. *Каковы бы ни были положительное число s и натуральное число k, существует единственное положительное число r, для которого $r^k = s$; это число r называют арифметическим корнем степени k из числа s и обозначают $\sqrt[k]{s}$.*[1]

Доказательство.[2] Справедлива *формула разности степеней*[3]

$$\boxed{u^k - v^k = (u-v)(u^{k-1} + u^{k-2}v + \cdots + uv^{k-2} + v^{k-1})}\,^4,$$

напрямую проверяемая *раскрытием скобок*. Из нее сразу следует, что *положительное* число r, для которого $r^k = s$ (в случае его существования) является *единственным*.[5]

Доказать, что для любого числа $s > 0$ *существует* положительное число r, для которого $r^k = s$, можно, предположив противное и разделив (в соответствии с этим предположением) все действительные числа на множества A и B, отнеся к первому все *отрицательные* числа, *нуль* и те *положительные* числа, k–я степень которых *меньше* числа s, а ко второму — все *положительные* числа, k–я степень которых *больше* числа s.

Множества A и B удовлетворяют всем условиям *аксиомы* **A 10** (см. с. 30): оба эти множества *непусты*[6], и $a < b$ для любых элемен-

---

[1] $\sqrt{\ }$ — стилизованная начальная буква лат. слова *radix* — *корень*.

[2] Основанное исключительно на *аксиомах* системы действительных чисел. Расширение запаса *истинных утверждений* математического анализа позволит дать более короткое доказательство этой теоремы (см. далее с. 158–159, а также с. 80).

[3] Обобщение “школьных” *формул разностей квадратов* и *кубов*.

[4] Особенно часто используется ее частный случай

$$\boxed{(1-q^n) = (1-q)(1+q+\cdots+q^{n-1})}\,.$$

[5] Предположение, что $r^k = s$ и $\widetilde{r}^k = s$ при *положительных* $r \neq \widetilde{r}$ (для определенности $r < \widetilde{r}$), сразу приводит к противоречию:

$$0 = \widetilde{r}^k - r^k = (\widetilde{r} - r)(\widetilde{r}^{k-1} + \widetilde{r}^{k-2}r + \cdots + \widetilde{r}r^{k-2} + r^{k-1}) \overset{\mathbf{A\,6}}{>} 0.$$

[6] Множеству B принадлежит, например, число $s+1$, поскольку

$$\overbrace{(s+1)\cdots(s+1)}^{k} = 1 + ks + \cdots > s.$$

тов $a \in A$ и $b \in B$.[1] В силу аксиомы **A 10** либо в множестве A есть *наибольший* элемент, либо в множестве B есть *наименьшим*, а поэтому (чтобы получить *противоречие*) остается убедиться, что на самом деле в множестве A нет *наибольшего* элемента, а в множестве B нет *наименьшего*.

Если бы множество A содержало *наибольший* элемент c, то выполнялись бы соотношения $c \geqslant 0$ (поскольку $0 \in A$) и $c^k < s$. Взяв тогда *натуральное* число n, превосходящее *положительное* число $\dfrac{k(c+1)^{k-1}}{s-c^k}$ (аксиома **A 9**), и применяя *формулу разности степеней*, можно было бы заключить, что

$$\begin{aligned}\left(c+\tfrac{1}{n}\right)^k &= \left[\left(c+\tfrac{1}{n}\right)^k - c^k\right] + c^k = \\ &= \tfrac{1}{n}\left[\left(c+\tfrac{1}{n}\right)^{k-1} + \left(c+\tfrac{1}{n}\right)^{k-2}c + \cdots + \left(c+\tfrac{1}{n}\right)c^{k-2} + c^{k-1}\right] + c^k < \\ &< \tfrac{1}{n}k(c+1)^{k-1} + c^k < (s-c^k) + c^k = s,\end{aligned}$$

т. е. число $c+\dfrac{1}{n}$, *бо́льшее*, чем *наибольший* элемент множества A, также оказывается элементом этого множества — *противоречие*.

Если бы множество B содержало *наименьший* элемент c, то взяв *натуральное* число n, превосходящее наибольшее из *положительных* чисел $\dfrac{kc^{k-1}}{c^k-s}$ и $\dfrac{1}{c}$ (аксиома **A 9**), и применяя *формулу разности степеней*, можно было бы заключить, что

$$\begin{aligned}\left(c-\tfrac{1}{n}\right)^k &= c^k - \left[c^k - \left(c-\tfrac{1}{n}\right)^k\right] = \\ &= c^k - \tfrac{1}{n}\left[c^{k-1} + c^{k-2}\left(c-\tfrac{1}{n}\right) + \cdots + c\left(c-\tfrac{1}{n}\right)^{k-2} + \left(c-\tfrac{1}{n}\right)^{k-1}\right] > \\ &> c^k - \tfrac{1}{n}kc^{k-1} > c^k - (c^k - s) = s,\end{aligned}$$

т. е. число $c-\dfrac{1}{n}$ (*положительное*, так как $\dfrac{1}{c}$), *ме́ньшее*, чем *наименьший* элемент c множества B, также оказывается элементом этого множества — *противоречие*.

В соответствии с принципом *косвенного доказательства* (см. *Приложение I*) предположение, что *положительного* числа r, для которого $r^k = s$, *не существует*, является *ложным*. **Q.E.D.**[2]

---

[1] Это заведомо так, если $a<0$ или $a=0$, если же $a>0$, то (поскольку $a^k<s$, а $b^k>s$) $b-a=\dfrac{b^k-a^k}{b^{k-1}+b^{k-2}a+\cdots+ba^{k-2}+a^{k-1}}>0$.

[2] От лат. *quod erat demonstrandum* (*что требовалось доказать*) — классическое указание окончания доказательства.

Замечание 1. Так как для любых *положительных* чисел a и b *оба* числа $\sqrt[k]{ab}$ и $\sqrt[k]{a}\sqrt[k]{b}$ удовлетворяют уравнению $x^k = ab$, из доказанной теоремы[1] следует, что $\sqrt[k]{ab} = \sqrt[k]{a}\sqrt[k]{b}$, и по такой же причине $\sqrt[k]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[k]{a}}{\sqrt[k]{b}}$.

Замечание 2. Так как при *нечетном* k равенства $x^k = a$ и $(-x)^k = -a$ равносильны, можно определить корень *нечетной* степени из *отрицательного* числа, полагая $\sqrt[k]{-a} = -\sqrt[k]{a}$.

Кроме *натуральных чисел* $1,\ 2=1+1,\ 3=1+1+1,\ \ldots$ в системе $\mathbb{R}$ *действительных* чисел выделяют:

целые числа, относя к ним все *натуральные* числа, им *противоположные*, а также *нуль*;

рациональные числа — те, которые представимы в виде *отношений целых* чисел;

иррациональные числа — те, которые не представимы в виде таких *отношений*.

Декарт и Ньютон называли *иррациональные* числа "глухими" (фр. *sourd*, лат. *surdus*). На с. 2 изданной в 1707 г. "Всеобщей арифметики" Ньютона [**48**] можно прочитать: *"Существует три вида* [*чисел*]: *целое, дробное и глухое. Целое то, что измеряется единицей, дробное — кратной долей единицы, глухое же несоизмеримо с единицей".* (В латинском оригинале: *"Estque triplex; integer, fractus & surdus: Integer, quem unitas metitur, fractus quem unitatis par submultiplex metitur, & surdus cui unitas est incommenurabilis".*).

Иррациональность числа $\sqrt{2}$ (отношения длины диагонали квадрата к длине его стороны) была открыта пифагорейцами (см. с. 5), хранившими это открытие в тайне (по легенде выдавший ее погиб в кораблекрушении). Ныне доказательство *иррациональности* числа $\sqrt{2}$ (см. с. 280–281) входит в школьную программу. О том, что *иррациональных* чисел "больше", чем *рациональных*, см. далее с. 46–47.

Слова "рациональные" и "иррациональные" возникли в результате преобразования (через латынь) греческих терминов $\rho\eta\tau o\acute{\iota}$ — *выразимые* и $\alpha\rho\rho\eta\tau o\acute{\iota}$ — *невыразимые*, которыми оперировали пифагорейцы.

---

[1] В части *единственности* арифметического корня.

Для *рациональных* чисел выполняются следующие правила *равенства* и *четырех основных действий* с ними:

$$\boxed{\frac{m}{n}=\frac{k}{l} \Longleftrightarrow ml=nk, \quad \frac{m}{n}\pm\frac{k}{l}=\frac{lm\pm nk}{nl}, \quad \frac{m}{n}\cdot\frac{k}{l}=\frac{mk}{nl}, \quad \frac{\frac{m}{n}}{\frac{k}{l}}=\frac{ml}{nk}}$$

Рациональная степень положительного числа

Распространение символа a^k, которым (вслед за Декартом) стали обозначать произведение $\overbrace{a\cdots a}^{k}$, $k=2,3,\ldots$, с соглашением, что $a^1=a$, а $a^0=1$ (если $a\neq 0$), на *отрицательные* и *дробные* значения "показателя" дали английские математики Ва́ллис[1] и (в окончательной форме) Нью́тон[2] Вслед за ними полагают

$$a^{-k}=(a^k)^{-1}=\frac{1}{a^k},$$

а за *рациональную* степень $a^{\frac{m}{n}}$ *положительного* числа a и *рационального* числа $\frac{m}{n}$ (где m и n — *целые* числа, причем $n>0$) принимают число $\sqrt[n]{a^m}$ — единственный *положительный* корень уравнения $x^n=a^m$ (см. с. 33).

С рациональной степенью *отрицательного* числа возникают сложности: значение $(-1)^{\frac{1}{2}}$ не определено, а $(-1)^{\frac{1}{3}}\neq(-1)^{\frac{2}{6}}$, хотя $\frac{1}{3}$ и $\frac{2}{6}$ — одно и то же число.

Определение и вывод свойств *степени* положительного числа с *любым* действительным показателем даны ниже (см. с. 164–165) на основе понятий *экспоненты* и *логарифма*.

---

[1] Точнее, Уо́ллис (Wallis John, 1616–1703) в его "Arithmetica Infinitorum", вышедшей в свет в 1656 г.: "$\frac{1}{x}$ *cujus index est* -1", "$\sqrt{x}$ *cujus index est* $\frac{1}{2}$" ([**52**], p. 35).

[2] Вот фрагмент русского перевода его знаменитого письма (уже упоминавшегося на с. 26) 1676 г.: "*Так же, как алгебраисты обычно вместо* aa, aaa, $aaaa$ *и т. д. пишут* a^2, a^3, a^4, *и т. д., так и я вместо* $\sqrt{a}$, $\sqrt{a^3}$, $\sqrt[3]{a^5}$ *и т. д. пишу* $a^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{3}{2}}$, $a^{\frac{5}{3}}$ *и т. д., а вместо* $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{aa}$, $\frac{1}{aaa}$, ... *пишу* a^{-1}, a^{-2}, a^{-3}, ..." ([**19**], с. 218).

p-ичные дроби и позиционная запись действительных чисел

Аксиома **A 9** служит основой представления *действительных чисел* в виде (*конечных* или *бесконечных*) *p-ичных дробей*, где p — любое *натуральное* число, бо́льшее единицы[1], взятое в качестве *основания.*

Пусть $a > 0$ и пусть n_0+1 — *первое* из *натуральных* чисел, *бо́льшее* числа a (*существование* такого *натурального* числа обеспечивает *аксиома Архимеда*). Тогда либо $a = n_0$ (т.е. a есть *целое неотрицательное* число), либо $n_0 < a < n_0+1$. В последнем случае пусть n_1+1 есть *первое* среди чисел $1, \dots, p$, *бо́льшее* числа $(a-n_0)p$, т.е. либо $a = n_0 + \dfrac{n_1}{p}$, либо $n_0 + \dfrac{n_1}{p} < a < n_0 + \dfrac{n_1+1}{p}$. В последнем случае находят натуральное число $n_2+1 \leqslant p$ со свойством: либо $a = n_0 + \dfrac{n_1}{p} + \dfrac{n_2}{p \cdot p}$, либо $n_0 + \dfrac{n_1}{p} + \dfrac{n_2}{p \cdot p} < a < n_0 + \dfrac{n_1}{p} + \dfrac{n_2+1}{p \cdot p}$ и т.д.

В результате для любого *положительного* числа a возникает либо *представление* $a = n_0 + \dfrac{n_1}{p} + \dfrac{n_2}{p^2} + \cdots + \dfrac{n_k}{p^k}$ "*p-<u>ичной дробью</u>*" (в которой $n_0, n_1, \dots, n_k$ — целые неотрицательные числа, причем $n_1, \dots, n_k$ меньше p), либо *бесконечный* набор *последовательных приближений* этого числа (с *недостатком* и с *избытком*) "*p-ичными дробями*":

$$n_0 + \frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{p^2} + \cdots + \frac{n_k}{p^k} < a < n_0 + \frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{p^2} + \cdots + \frac{n_k+1}{p^k},$$

с кратким обозначением этого $a = n_0 + \dfrac{n_1}{p} + \dfrac{n_2}{p^2} + \cdots + \dfrac{n_k}{p^k} + \cdots$ — в виде "*бесконечной p-ичной дроби*".

Для получение *<u>позиционной p-ичной записи</u>* числа $a > 0$ следует еще представить *<u>целую часть</u>* n_0 числа a (а ее обычно обозначают $[a]$) в виде $n_0 = m_j p^j + \cdots + m_1 p + m_0$, где $m_0, \dots, m_j$ — *целые неотрицательные* числа, *меньшие* p. При $n_0 < p$ это представление сводится к равенству $n_0 = n_0$ (т.е. $j = 0$, а $m_0 = n_0$); если же $n_0 \geqslant p$, то:

j — это *первое* из чисел $0, 1, 2, \dots$, для которого $n_0 < p^{j+1}$ (оно существует по *аксиоме Архимеда*, так как $p > 1$, $p^2 > 2$, $p^3 > 3, \dots$);

m_j — это *целая часть* числа $\dfrac{n_0}{p^j}$ (при этом $1 \leqslant m_j \leqslant p-1$);

---

[1] Помимо наиболее распространенного выбора p, равного числу пальцев на руках, в древнем Вавилоне пользовались дробями с основанием 60 (о чем напоминает нынешнее разделение *часа* и *географического градуса* на *минуты* и *секунды*). У древних египтян в ходу были *двоичные* дроби.

m_{j-1} — это *целая часть* числа $\dfrac{n_0-m_jp^j}{p^{j-1}}$ $(0\leqslant m_{j-1}\leqslant p-1)$;

. . . .

m_1 — это *целая часть* числа $\dfrac{n_0-m_jp^j-\dots-m_2p^2}{p}$ $(0\leqslant m_1\leqslant p-1)$;

$m_0=n_0-m_jp^j-\dots-m_1p$ $(0\leqslant m_0\leqslant p-1)$.

Поскольку числа $m_j,\dots,m_1,m_0$ (как и $n_1,\dots,n_k$) — *целые неотрицательные*, *меньшие* p, остается выбрать *символы* для обозначения чисел $0,1,\dots,p-1$, т.е. систему *цифр*[1], и принять следующую *позиционную* запись чисел (в p-ичной системе):

$n_0=m_j\dots m_1m_0$ вместо $n_0=m_jp^j+\dots+m_1p+m_0$ для *целого неотрицательного* числа n_0,

$a=m_j\dots m_1m_0,n_1\dots n_k$ вместо $a=n_0+\dfrac{n_1}{p}+\dfrac{n_2}{p^2}+\dots+\dfrac{n_k}{p^k}$ для числа $a>0$, представимого *"конечной" p-ичной дробью*,

$a=m_j\dots m_1m_0,n_1\dots n_k\dots$ вместо $a=n_0+\dfrac{n_1}{p}+\dfrac{n_2}{p^2}+\dots+\dfrac{n_k}{p^k}+\dots$ для числа $a>0$, представимого *"бесконечной" p-ичной дробью.*[2]

Для *отрицательного* числа a описанные действия совершают с *положительным* числом $-a$, предваряя полученную его *позиционную запись* знаком "минус". Следует лишь учесть, что если a — *нецелое отрицательное* число, то его *целой частью* $[a]$ считают не $-[-a]$, а $-[-a]-1$. Вследствие этого $[a]<a<[a]+1$ для любого *нецелого* и $[a]=a$ для любого *целого* числа a.

---

[1] Например, привычных "индо-арабских" (см. с. 29) с добавлением к ним при $p>10$ символов ("цифр") для чисел $10,\dots,p-1$.

[2] Отделять *целую часть* числа от "дробной" во "Всеобщей арифметике" Ньютона [**48**] (на с. 2) предлагается либо запятой, либо точкой, либо еще и черточкой. В России прижился первый способ, в большинстве же прочих стран — второй.

Позиционная (*десятичная*) система записи чисел пришла в Европу (постепенно вытесняя римскую) благодаря "Книге абака" Леонардо Пизанского (1202 г.). Поначалу представление чисел в этой системе называлось *алгоритмом* — по латинской транскрипции *Algorithmi* прозвища аль-Хорезми (т.е. *из Хорезма*), под которым известен математик IX в. Мохаммед бен Муса, написавший популярный трактат по решению уравнений, название которого, по-арабски звучащее как "Китаб аль-джебр валь мукабала", породило слово *алгебра*.

Ключевую роль при изложении анализа играет наглядное геометрическое представление *действительных чисел точками* (или *направленными отрезками*) *прямой*, превращаемой в *числовую ось* выбором на ней изображений *нуля* и *единицы* и последующим сопоставлением аксиом действительных чисел с аксиомами геометрии (что осуществляется в обстоятельных курсах *аналитической геометрии*).

Мысленно представив "второй экземпляр" *числовой оси* "скользящим" по первому, можно геометрически истолковать *сложение* и *вычитание* действительных чисел; если же два экземпляра *числовой оси* представить пересекающимися (в точке 0), то возникает геометрическая трактовка *умножения* и *деления* (рис. 1), впервые данная Декартом на первых же страницах его "Геометрии" [**38**][1].

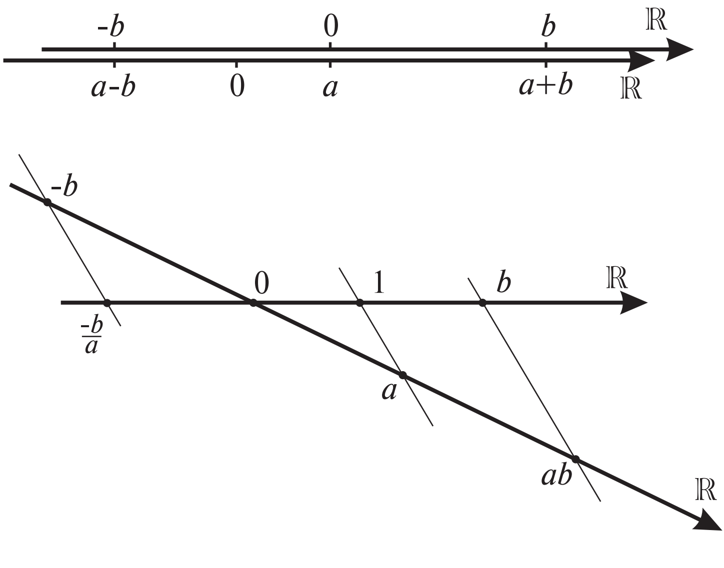


Рис. 1

[1] До Декарта, изображая числа *отрезками*, их *произведение* представляли не *отрезком*, а трактовали как *площадь прямоугольника*.

I.2. Что называют точными гранями множеств действительных чисел

Все *множества*, о которых идет речь в этом параграфе, являются множествами *действительных чисел*, а в наглядном представлении — множествами *точек числовой оси*.

Число $a \in \mathbb{R}$ *называют* <u>*нижней границей*</u> множества X, *если любой* элемент данного множества *не меньше* числа a: $\forall x (x \in X \Rightarrow a \leqslant x)$[1].

Множество X, *для которого существует нижняя граница, называют* <u>*ограниченным снизу*</u>: $\exists a \forall x (x \in X \Rightarrow a \leqslant x)$; *в противном случае*[2] *оно называется* <u>*не ограниченным снизу*</u>: $\neg \exists a \forall x (x \in X \Rightarrow a \leqslant x) = \forall a \exists x (x \in X \wedge x < a)$.

По этой же схеме вводятся понятия *верхней границы* и *ограниченного сверху* множества.

Число $b \in \mathbb{R}$ *называют* <u>*верхней границей*</u> множества X, *если любой* элемент этого множества *не больше* числа b: $\forall x (x \in X \Rightarrow x \leqslant b)$.

Множество X, *для которого существует верхняя граница, называют* <u>*ограниченным сверху*</u>: $\exists b \forall x (x \in X \Rightarrow x \leqslant b)$; *в противном случае его называют* <u>*не ограниченным сверху*</u>: $\neg \exists b \forall x (x \in X \Rightarrow x \leqslant b) = \forall b \exists x (x \in X \wedge x > b)$.

<u>Пример</u>. Множество $\mathbb{N}$ *натуральных* чисел *ограничено снизу*, но *не ограничено сверху*. Для доказательство достаточно заметить, что из теоремы **T11** на с. 31 и аксиом **A8** и **A9** (см. с. 29) следует:

а) любое *натуральное* число *больше нуля*;

б) для любого *действительного* числа существует *превосходящее* его *натуральное* число.

---

[1] То, что число *a не является нижней границей* множества X, записывается посредством *отрицания* этой *формулы*:

$$\neg \forall x (x \in X \Rightarrow a \leqslant x) = \exists x \neg (x \in X \Rightarrow a \leqslant x) = \exists x (x \in X \wedge a > x).$$

Комментарии к *символической записи* даны в *Приложении I*.

[2] Если *истинным* является *отрицание* этой *формулы*.

<u>*Ограниченность*</u> *множества* X *подразумевает его ограниченность и снизу, и сверху*: $\exists a \exists b \forall x (x \in X \Rightarrow a \leqslant x \leqslant b)$[1].

Наименьшую из верхних границ множества X (*если таковая существует*) *называют* <u>*точной верхней гранью*</u>[2] *множества* X (обозначение $\overline{\mathrm{x}} = \sup X$)[3]:

$$\overline{\mathrm{x}} = \sup X \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}{}^{4} \forall x (x \in X \Rightarrow x \leqslant \overline{\mathrm{x}}) \wedge \forall \varepsilon > 0 \exists x (x \in X \wedge x > \overline{\mathrm{x}} - \varepsilon)$$

(смысл последней *формулы* таков: число $\overline{\mathrm{x}}$ является *верхней границей* множества X, а любое *ме́ньшее* число — нет).

Наибольшую из нижних границ множества X (*если таковая существует*) *называют* <u>*точной нижней гранью*</u>[5] *множества* X (обозначение $\underline{\mathrm{x}} = \inf X$)[3]:

$$\underline{\mathrm{x}} = \inf X \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \forall x (x \in X \Rightarrow x \geqslant \underline{\mathrm{x}}) \wedge \forall \varepsilon > 0 \exists x (x \in X \wedge x < \underline{\mathrm{x}} + \varepsilon)$$

(смысл последней *формулы*: число $\underline{\mathrm{x}}$ является *нижней границей* множества X, а любое *бо́льшее* число — нет).

Следующие соотношения связывают *точные грани* множества X и обозначаемого $-X$ множества чисел, *противоположных* числам $x \in X$:

$$\boxed{\inf(-X) = -\sup X, \quad \sup(-X) = -\inf X}.$$

Вот *доказательство*, например, первого из них:

$$\overline{\mathrm{x}} = \sup X \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \forall x (x \in X \Rightarrow x \leqslant \overline{\mathrm{x}}) \wedge \forall \varepsilon > 0 \exists x (x \in X \wedge x > \overline{\mathrm{x}} - \varepsilon) \overset{\text{замена } x \text{ на } -x}{\Longleftrightarrow}$$

$$\Longleftrightarrow \forall x (x \in (-X) \Rightarrow x \geqslant -\overline{\mathrm{x}}) \wedge \forall \varepsilon > 0 \exists x (x \in (-X) \wedge x < -\overline{\mathrm{x}} + \varepsilon) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$$

$$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} -\overline{\mathrm{x}} = \inf(-X).$$

---

[1] Эквивалентно: $\exists c > 0 \forall x (x \in X \Rightarrow |x| \leqslant c)$, причем эта *формула* сохраняет смысл и для множеств X *комплексных* чисел).

[2] Или <u>*точной верхней границей*</u>.

[3] Лат. superus (supremus) — *верхний*, inferus (infimus) — *нижний*.

[4] $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ означает "*эквивалентно по определению*" (лат. definitio — *определение*).

[5] Или <u>*точной нижней границей*</u>.

Теорема существования точных граней[1]. *Если множество X непусто и ограничено сверху, то существует число* $\overline{\mathrm{x}} = \sup X$. *Если же множество X непусто и ограничено снизу, то существует число* $\underline{\mathrm{x}} = \inf X$.

Доказательство. Пусть множество X *непусто* и *ограничено сверху* и пусть B обозначает множество всех *верхних границ* множества X, а A — множество всех остальных действительных чисел (т. е. не являющихся верхними границами множества X). Оба множества A и B *непусты*[2], и любой элемент $a \in A$ *меньше* любого элемента $b \in B$ (так как $a < x$ для *некоторого* элемента $x \in X$, тогда как $x \leqslant b$ для *любого* элемента $b \in B$). В силу аксиомы **A10** либо в множестве A есть *наибольший* элемент, либо в множестве B есть *наименьший*.

Если допустить *первый* вариант (что в множестве A есть *наибольший* элемент $\overline{a}$), то (так как $\overline{a} \in A$) для некоторого элемента $x \in X$ будет выполняться неравенство $\overline{a} < x$, а потому и неравенства $\overline{a} < \frac{1}{2}(\overline{a} + x) < x$; вследствие *второго* $\frac{1}{2}(\overline{a}+x) \in A$, а в силу *первого* $\frac{1}{2}(\overline{a}+x) \notin A$ — *противоречие*.

Выполняется поэтому *второй* вариант: в множестве B есть *наименьший* элемент. **Q.E.D.**

---

[1] Первым внятную формулировку и доказательство этой теоремы дал чешский математик Больцано в §12 своей знаменитой работы 1817 г. с говорящим названием “Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen je zwei Werten, die ein entgegengesetztes Resultat gewären, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege”. (Ее перевод на русский “Чисто аналитическое доказательство теоремы, что между любыми двумя значениями, дающими результаты противоположного знака, лежит по меньшей мере один действительный корень уравнения” можно найти в книге Э. Кольмана [**11**]).

[2] Множество B — ввиду *ограниченности сверху* множества X, а множество A — ввиду *непустоты* множества X (если $x \in X$, то любое число, *меньшее* x, принадлежит множеству A).

Понятия *точных верхней* и *нижней граней* допускают распространение на *неограниченные* множества $X \subset \mathbb{R}$ (и *пустое* множество), если перейти к *расширенной системе действительных чисел*, присоединив к системе $\mathbb{R}$ два *несобственных* (*не входящих* в нее) *элемента* — *бесконечно удаленные точки*[1] $+\infty$ и $-\infty$, считая по определению, что $-\infty < x < +\infty$ для любого *действительного числа* x.

В соответствии с этим полагают, что $\sup X = +\infty$ для любого *не ограниченного сверху*, а $\inf X = -\infty$ для любого *не ограниченного снизу* множества $X \subset \mathbb{R}$:

$$\sup X = +\infty \overset{\text{def}}{\iff} \forall b \exists x (x \in X \wedge x > b);$$
$$\inf X = -\infty \overset{\text{def}}{\iff} \forall a \exists x (x \in X \wedge x < a).$$

В частности, $\sup \mathbb{R} = \sup \mathbb{N} = +\infty$, а $\inf \mathbb{R} = -\infty$ (тогда как $\inf \mathbb{N} = 1$).

Если подмножество $X \subset \mathbb{R}$ *пусто*, то $\sup X = -\infty$, а $\inf X = +\infty$. Это следует из того, что для *пустого* множества $X \subset \mathbb{R}$ множеством всех *верхних* (а равно и *нижних*) границ является все множество $\mathbb{R}$.

Промежутки

Множество $X \subset \mathbb{R}$, содержащее более одной точки, называется *промежутком*, если с любыми двумя точками оно содержит и все точки, *промежуточные* между ними:

$$\forall x_1 \forall x_2 \big(x_1 \in X \wedge x_2 \in X \wedge x_1 < x_2 \Rightarrow \forall x (x_1 < x < x_2 \Rightarrow x \in X)\big)$$

Помимо множества $\mathbb{R}$ *промежутками* являются:

отрезки $[a, b] \overset{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$[2] (предполагается, что $a < b$),

---

[1] Основные действия распространяются на элементы $+\infty$ и $-\infty$ лишь частично: например, $+\infty + x = x + (+\infty) = +\infty$ для любого действительного числа x (а также $x = +\infty$), тогда как значение $+\infty + (-\infty)$ *не определено*; $-\infty + x = x + (-\infty) = x - (+\infty) = -\infty$; $\frac{x}{\pm\infty} = 0$ для $x \neq 0$; $(+\infty) \cdot x = \pm\infty$ соответственно для $x > 0$ и $x < 0$, а значения $(\pm\infty) \cdot 0$ *не определены*.

[2] $\overset{\text{def}}{=}$ означает *"есть по определению"* (лат. *definitio — определение*).

<u>*интервалы*</u> $(a,b) \overset{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$,

<u>*полуинтервалы*</u>[1] $(a,b] \overset{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b\}$ и
$$[a,b) \overset{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b\},$$
<u>*лучи*</u> $[a,+\infty) \overset{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$, $(a,+\infty) \overset{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x\}$,
$$(-\infty,b] \overset{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant b\}, \quad (-\infty,b) \overset{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}.$$

Перечисленными видами множеств $X \subset \mathbb{R}$ исчерпываются все промежутки.

<u>Доказательство</u>. Пусть *промежуток X ограничен снизу* и *сверху* и пусть $a = \inf X$, а $b = \sup X$. Тогда если $a \in X$ и $b \in X$, то $X = [a,b]$; если же (например) $a \in X$, а $b \notin X$, то $X = [a,b)$[2]. Если *промежуток X не ограничен снизу* и *сверху*, то, каково бы ни было число $x \in \mathbb{R}$, существуют число $x_1 \in X$, ме́ньшее x, и число $x_2 \in X$, бо́льшее x, в силу чего и $x \in X$, так что $X = \mathbb{R}$. Разбор случаев, когда *промежуток X не ограничен сверху* или *снизу* проводится по этой же схеме.

Принцип вложенных отрезков. *Если каждому натуральному числу n соответствует некий отрезок $[a_n, b_n]$ с выполнением условия $\forall n (a_n \leqslant a_{n+1} < b_{n+1} \leqslant b_n)$,* или, что то же самое, $[a_1,b_1] \supset [a_2,b_2] \supset \cdots \supset [a_n,b_n] \supset [a_{n+1},b_{n+1}] \supset \cdots$[3], *то существует действительное число c, принадлежащее всем этим отрезкам: $\exists c \forall n (a_n \leqslant c \leqslant b_n)$.*

<u>Доказательство</u>. Пусть A — множество *левых* концов отрезков $[a_n, b_n]$, т. е. чисел a_n, $n = 1, 2, \ldots$ Так как

---

[1] Г. Е. Шилов, чьи лекции по анализу в Московском университете посещал автор, предлагал называть *полуинтервалы* $(a,b]$ и $[a,b)$ соответственно “интрезком” и “оттервалом”.

[2] $X \subset [a,b)$, так как $a = \inf X$, $b = \sup X$ и $b \notin X$. Наоборот, если $x \in [a,b)$, то (так как $x < b = \sup X$) существует число $\widetilde{x} \in X$, бо́льшее x, а потому число x (как *промежуточное* между $a \in X$ и $\widetilde{x} \in X$) принадлежит множеству X, так что $[a,b) \subset X$.

[3] В этом случае говорят, что задана *последовательность вложенных отрезков*: каждый последующий является частью предыдущего.

$$a_n \leqslant a_{n+k} < b_{n+k} \leqslant b_k \quad \text{при любых } n, k = 1, 2, \ldots,$$

множество A *ограничено сверху*.[1] По *теореме о существовании точных граней* (см. с. 42) существует действительное число c, являющееся *наименьшей* среди всех *верхних границ* множества A, так что для него выполняются и неравенства $a_n \leqslant c$, $n = 1, 2, \ldots$, и неравенства $c \leqslant b_k$, $k = 1, 2, \ldots$, или, что то же самое, $a_n \leqslant c \leqslant b_n$, $n = 1, 2, \ldots$ **Q.E.D.**

На последовательности *промежутков*, отличных от *отрезков*, доказанное утверждение *не распространяется*. Например, не существует *числа* x, принадлежащего *каждому* из последовательности *вложенных полуинтервалов* $(0,1] \supset \big(0,\frac{1}{2}\big] \supset \big(0,\frac{1}{3}\big] \supset \cdots \supset \big(0,\frac{1}{n}\big] \supset \cdots$[2] (равно как и *вложенных лучей* $[1,+\infty) \supset [2,+\infty) \supset \cdots \supset [n,+\infty) \supset \cdots$).

Счетные и несчетные множества.

Множество X, *содержащее бесконечное число элементов, называют* *<u>счетным</u>*, *если все его элементы можно представить в виде последовательности* $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$[3]; *в противном случае (если такое представление невозможно) множество* X *называют* *<u>несчетным</u>*.

Говоря иначе, *счетность* бесконечного множества X — это возможность его исчерпания посредством сопоставления (каким-либо способом) каждому натуральному числу n некоего элемента множества X так, чтобы *каждый* элемент $x \in X$ оказался *сопоставленным*[4] некоторому числу $n \in \mathbb{N}$; *несчетность* же множества X, напротив, означает невозможность такого исчерпания.

---

[1] При любом k число b_k служит *верхней границей* этого множества.

[2] Если бы такое число x существовало, оно было бы *положительным*, и в силу аксиомы **A 9** существовало бы *натуральное* число $n > \dfrac{1}{x}$, а это противоречило бы тому, что $x \in \big(0, \frac{1}{n}\big]$ для *всех* натуральных n.

[3] В формульной записи: $\forall x \big(x \in X \Rightarrow \exists n (x = x_n)\big)$.

[4] При желании это *сопоставление* можно сделать *взаимно-однозначным* (когда *разным* $n \in \mathbb{N}$ соответствуют *разные* $x \in X$).

К примеру, множество *рациональных* чисел из отрезка $[0,1]$ *счетно*: представить все *рациональные* числа $r \in [0,1]$ в виде одной *последовательности* можно, расположив их (например) в таком порядке:

$$0,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \ \frac{1}{4},\ \frac{2}{4},\ \frac{3}{4},\ \ \frac{1}{5},\ \frac{2}{5},\ \frac{3}{5},\ \frac{4}{5},\ \ \ldots;$$

любое *рациональное* число $r \in [0,1]$ оказывается при этом сопоставленным некоторому *натуральному* числу — *номеру* изображающей это число *дроби* в этом списке.[1]

> *Множество действительных чисел отрезка* $[0,1]$ *несчетно: не существует последовательности* $\{x_n\}$*, имеющей своими элементами все числа этого отрезка.*

Доказательство. Пусть (вопреки утверждению теоремы) *существует* последовательность $\{x_n\} = x_1,\ x_2,\ \ldots, x_n,\ \ldots$, среди элементов которой содержатся *все* числа отрезка $[0,1]$. Если отрезок $[0,1]$ разделить (произвольно) на *три* отрезка, то по крайней мере один из этих *трех* отрезков *не будет* содержать числа x_1. Если этот отрезок (обозначив его $[a_1, b_1]$) в свою очередь разделить на *три* отрезка, то по крайней мере один из полученных трех отрезков (обозначаемый $[a_2, b_2]$) *не будет* содержать числа x_2. Далее на три части делится отрезок $[a_2, b_2]$ и т. д. В результате возникнет *последовательность вложенных отрезков*

$$[0,1] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots \supset [a_n, b_n] \supset \cdots$$

со свойством: $x_n \notin [a_n, b_n],\ \ n = 1, 2, \ldots$ Согласно *принципу вложенных отрезков* существует действительное число x, принадлежащее *всем* отрезкам $[0,1]$, $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$, $\ldots$;

[1] Чтобы это сопоставление оказывалось *взаимно-однозначным*, т. е. каждое рациональное число $r \in [0,1]$ соответствовало *единственному* натуральному числу (получило *единственный* “номер”), следует удалить из этого списка все те дроби, числитель и знаменатель которых допускают сокращение.

в частности, $x = x_{n_0}$ (так как $x \in [0,1]$) при некотором натуральном n_0, и *истинными* оказываются *несовместимые* утверждения: "$x \in [a_n, b_n]$ при *всех* n" и "$x \notin [a_{n_0}, b_{n_0}]$". Предположение о возможности представить *все* числа отрезка $[0,1]$ в виде одной *последовательности* является поэтому *ложным*. **Q.E.D.**

Несчетность множества всех *действительных* чисел отрезка $[0,1]$ в сочетании со *счетностью* множества всех *рациональных* чисел этого отрезка свидетельствует не только о существовании чисел *иррациональных*, но и о том, что они сами образуют *несчетное* множество[1], и их в этом смысле "больше", чем *рациональных*.

Сопоставляя этот факт со следующими двумя утверждениями, можно убедиться, что привычные представления, выработанные повседневным обращением с *конечными* множествами (содержащими лишь *конечное* число элементов) не всегда совместимы со свойствами *бесконечных* множеств.

1. Между любыми двумя рациональными числами есть иррациональное число.

2. Между любыми двумя иррациональными числами есть рациональное число.

Доказательства. *1.* Пусть r_1 и r_2 $(r_1 < r_2)$ — любые два *рациональных* числа, а α — любое принадлежащее отрезку $[0,1]$ *иррациональное* число[2]. В силу аксиомы **A 9** (см. с. 29)

[1] Если бы все *иррациональные* числа отрезка $[0,1]$ допускали расположение в одну последовательность $q_1, q_2, \ldots$, то с учетом возможности расположения в одну последовательность $r_1, r_2, \ldots$ всех *рациональных* чисел этого отрезка открывалась бы возможность расположения в одну последовательность (например, $r_1, q_1, r_2, q_2, \ldots$) *всех* действительных чисел отрезка $[0,1]$, что по только что доказанному невозможно.

[2] Например, $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

существует *натуральное* число $n > \dfrac{\alpha}{r_2 - r_1}$. Действительное число $\beta = r_1 + \frac{\alpha}{n}$ удовлетворяет неравенствам $r_1 < \beta < r_2$ и *рациональным* (т. е. представимым в виде *отношения* двух *целых* чисел) *не является*: в противном случае *рациональным* оказывалось бы и число $\alpha = (\beta - r_1)n$.

2. Пусть α_1 и α_2 $(\alpha_1 < \alpha_2)$ — любые два *иррациональных* числа. Если оба они *положительны*, то *промежуточным* между ними *рациональным* числом, будет (например) $\frac{m}{n}$, где n — любое *натуральное* число, *бо́льшее* $\dfrac{1}{\alpha_2 - \alpha_1}$, а m — *первое натуральное* число, *бо́льшее* $n\alpha_1$ (существование таких чисел n и m обеспечивает аксиома **A 9**)[1]. Если оба числа α_1, α_2 *отрицательны*, то *промежуточным* между ними *рациональным* числом является число, *противоположное* рациональному числу, *промежуточному* между *положительными* иррациональными числами $-\alpha_2$ и $-\alpha_1$ $(-\alpha_2 < -\alpha_1)$. Если же $\alpha_1 < 0 < \alpha_2$, то *рациональным* числом, промежуточным между α_1 и α_2, является *нуль*. **Q.E.D.**

Вот прямое следствие доказанных утверждений.

> *Между любыми действительными числами a, b $(a < b)$ есть как рациональное, так и иррациональное число.*

Доказательство. Если a и b — *рациональные* числа, то между ними лежит некоторое *иррациональное* число (*утверждение 1*) и *рациональное* число $\dfrac{a+b}{2}$. Если a и b — *иррациональные* числа, то между ними лежит некоторое *рациональное* число r (*утверждение 2*) и *иррациональное* число $\dfrac{a+r}{2}$. Если же одно из этих чисел *рациональное*, а другое *иррациональное*, то между ними лежит *иррациональное* число $\dfrac{a+b}{2}$ и *рациональное*, имеющееся (в силу *утверждения 2*) между $\dfrac{a+b}{2}$ и *иррациональным* из чисел a и b. **Q.E.D.**

---

[1] Так как $m - 1 \leqslant n\alpha_1 < m$, одновременно выполняются неравенства $\alpha_1 < \dfrac{m}{n} \leqslant \alpha_1 + \dfrac{1}{n} < \alpha_2$.

I.3. Как возникла и сложилась система комплексных чисел

Необходимость *расширить* систему *действительных* чисел, добавляя к ней *мнимые* (с образованием в результате системы комплéксных чисел) проявилась в XVI в. в связи со странной ситуацией, возникающей при вычислении корней *неполного кубического уравнения* $x^3+px+q=0$ по так называемой *<u>формуле Кардáно</u>*, имеющей (в современной записи) вид

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\,.$$

Неполное кубическое уравнение $x^3+px+q=0$ (к которому *полное кубическое уравнение* $x^3+ax^2+bx+d=0$ сводится принятием $x+\frac{a}{3}$ за новую переменную) возникает, например, при решении задачи *трисекции угла* ([**27**], [**38**]). Вот почти дословный перевод рассуждений Декарта на с. 75–76) его "Геометрии" [**38**] (на рис. 2 воспроизведен фрагмент рисунка Декарта):

"При желании разделить угол NOP, или дугу окружности $NQPT$, на три равные части, имея радиус окружности $NO=1$, хорду дуги $NP=q$ и хорду трети дуги $NQ=z$, приходят к уравнению $z^3=3z-q$.

Так как, проведя прямые NQ, OQ, OT и прямую QS, параллельную TO, можно заметить, что NO та к же относится к NQ, как NQ к QR и QR к RS; поскольку $NO=1$, а $NQ=z$, то $QR=z^2$, а $RS=z^3$; по причине же, что NP не хватает RS, т.е. z^3, чтобы быть втрое больше, чем NQ, получается: $q=3z-z^3$, или $z^3=3z-q$".

Приводящий к вышеприведенной *"формуле Кардано"* способ решения кубических уравнений первым нашел (но сохранил в секрете) в самом начале XVI в. итальянский математик дель Фéрро[1] (до него такие уравнения считались "нерешаемыми"). В 1535 г. способ дель Ферро переоткрыл другой итальянский

[1] Del Ferro Scipion (1465–1526).

математик — Тарта́лья[1]. Стимулом для него послужило желание победить (что и произошло) ученика и обладателя секрета дель Ферро в математическом поединке, которые нередко проводились в европейских университетах и имели приятные последствия для победителей[2]. Найденный способ Тарталья, поддавшись уговорам и клятве сохранить способ в тайне, сообщил (в форме стихотворения) своему соотечественнику Карда́но[3], который, нарушив обещание, изложил сообщенный ему способ (не приписывая его себе, а корректно называя автором Тарталью) в своем знаменитом трактате 1545 г. “Великое искусство” (“Ars magna”). Забавные подробности этой истории и судеб ее героев можно найти в книге [**49**], а вывод *формулы Кардано* с подробным комментарием к ее применению — в книгах [**18**] и [**27**].

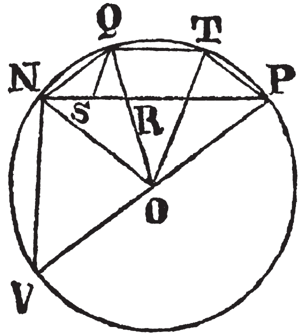


Рис. 2

[1] Tartaglia Nicolo (1500–1557). Tartaglia (по ит. *заика*) — не настоящее его имя, а прозвище из-за дефекта речи вследствие увечья, которое ему, еще шестилетнему мальчику, нанес храбрый французский солдат.

[2] Желанием побеждать в этих поединках и объясняется распространенный среди математиков того времени обычай хранить свои открытия в тайне.

[3] Cardano Gerolamo (1501–1576) — итальянский математик, врач, изобретатель (“карданный вал”); почитать о нем можно в [**18**] и [**49**].

Странность ситуации (подмеченная Кардано) состоит в том, что в случае, например, уравнения $x^3-15x-4=0$ (у которого есть три *действительных* корня $x=4, -2\pm\sqrt{3}$)[1] формула принимает вид $x=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$, т. е. в вычисления вторгается "несуществующий" квадратный корень из *отрицательного* числа. Позднее выяснилось, это явление возникает всякий раз, когда уравнение $x^3+px+q=0$ имеет три (различных) *действительных* корня.

Поскольку уйти от возникающего затруднения — необходимости оперировать "несуществующими" числами — никак не удавалось, решили поступить традиционным способом: если какое-либо неудобное явление нельзя устранить, его следует легализовать. Для этого достаточно было принять правила *совместных действий*[2] с настоящими ("действительными") числами и "несуществующим" числом $\sqrt{-1}$, которое со временем стали называть *мнимой единицей* и обозначать i. Суть этих правил сводится к тому, что оперировать с *мнимой единицей* i следует так же, как при обращении с многочленами оперируют с *действительной переменной*, но с заменой всюду i^2 на -1.

Первым слово "мнимый" ("imaginaire") по отношению к *корням уравнений* применил Декарт в своей "Геометрии" [**38**, с. 63]. Обозначение i ввел Эйлер (в рукописи 1777 г.), но активно внедрять начал (с 1801 г.) Га́усс[3]; внедрение шло постепенно, и некоторые до сих пор вместо i пишут $\sqrt{-1}$. Электротехники, привыкшие воспринимать i как *силу тока*, обозначают *мнимую единицу* j.

---

[1] Хотя "настоящими" тогда считали лишь *положительные* корни.

[2] Начало оформлению этих правил положил итальянский математик и инженер-гидравлик Бомбелли (Bombelli Raffaele, 1526–1573) в своей "Алгебре" ("L'Algebra"), вышедшей в 1572 г.

[3] Gauss Carl Friedrich (1777–1855) — немецкий математик, физик, астроном и геодезист.

Складывая и *перемножая* (указанным способом) *действительные числа* a, b, ... и *мнимую единицу* i, получают *сочетания*[1] вида $a+bi$, которые (и в этом состоит их замечательное свойство) обладают привычными атрибутами *чисел*: их можно *складывать, вычитать, перемножать и делить*, получая в результате такие же *сочетания*:

$$(a+bi)\pm(c+di)=a+bi\pm c\pm di=(a\pm c)+(b\pm d)i,$$

$$(a+bi)(c+di)=ac+bic+adi+bidi=(ac-bd)+(ad+bc)i,$$

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{ac+bic-adi-bidi}{cc+dic-cdi-didi}=\frac{ac+bd}{cc+dd}+\frac{bc-ad}{cc+dd}i$$

(*деление* в предположении $c+di\neq 0$, когда $cc+dd\neq 0$).

Сочетания $a+bi$ *действительных чисел* и *мнимой единицы* получили название <u>*компле́ксных чисел*</u>. Вместе они образуют <u>*систему компле́ксных чисел*</u> $\mathbb{C}$, разделяющую с *системой действительных чисел* $\mathbb{R}$ свойства, выражаемые аксиомами[2] **A1**–**A6** (см. с. 28–29). В терминах алгебры это означает: *система комплексных чисел* (так же как и *система действительных чисел*) является <u>*полем*</u>.

Касательно же свойств действительных чисел, выражаемых аксиомами **A7**–**A10**, то при переходе к *комплексным числам* они *утрачивают смысл*, поскольку (и это необходимо отметить и подчеркнуть) <u>*в системе комплексных чисел отношения "больше" и "меньше" не определены*</u>[3].

---

[1] С возможностью перестановки в них как *слагаемых*, так и *сомножителей*, и записью $a-bi$ вместо $a+(-b)i$. Частными случаями таких *сочетаний* являются *действительные числа* и *сочетания* вида bi.

[2] С тем, однако, отличием, что для *комплексных чисел* эти свойства будут уже не *аксиомами*, а *теоремами*, вытекающими из этих *аксиом* для *действительных чисел*.

[3] Попытка ввести их приводит к противоречиям с привычными свойствами этих отношений. Достаточно попробовать увязать любое из предположений $i>0$ и $i<0$ с аксиомами **A7** и **A8**.

Термин “комплексные числа” был введен Гауссом в воспроизводимом здесь фрагменте его работы 1831 г. [**40**, Bd. II, S. 102]. Отчетливо видно, что Гаусс *объединял* этим термином[1] *действительные* и *мнимые* числа, воспринимая *действительное* число как *частный случай* числа *комплексного* (а не нечто ему противоположное).

“Поле комплексных чисел $a+bi$ *содержит*:

I. Действительные числа, у которых $b=0$, *и среди них, в зависимости от того, каково* a,

1) нуль,

2) положительные числа,

3) отрицательные числа.

II. Мнимые числа, у которых $b\neq 0$. *Здесь снова различают*:

1) мнимые числа без действительной части, т. е. те, у которых $a=0$,

2) мнимые числа с действительной частью — у которых и $b\neq 0$, *и* $a\neq 0$.

Первые при желании можно называть чисто мнимыми числами, а вторые — смешанными мнимыми числами”[2].

---

[1] Который вместе с прочими терминами, разъясненными в этом фрагменте, стали общепринятыми.

[2] В латинском оригинале:

“Campus numerorum complexorum $a+bi$ *continet*

I. numeros reales, ubi $b=0$, *et, inter hos, pro indole ipsius* a

1) cifram

2) numeros positivos

3) numeros negativos

II. numeros imaginarios, ubi b *cifrae inaequalis. Hic iterum distinguutur*

1) numeri imaginarii absque parte reali, i. e. ubi $a=0$

2) numeri imaginarii cum parte reali, ubi neque b *neque* $a=0$.

Priores si placet numeri imaginarii puri, posteriores numeri imaginasrii mixti vocari possunt.”

Ирландский математик Га́мильтон[1] на с. 12 вышедшей в 1853 г. монографии [**42**] (в которой окончательно оформилось понятие *вектора*) предложил следующую интерпретацию *комплексных чисел*:

“The more general expression of algebra, $a_1+\sqrt{-1}a_2$, for any (*so called*) *imaginary root of a quadratic or other equation, ... interpreted as being a symbol of the number-couple which I had otherwise denoted by* (a_1, a_2) *, ... its multiplication by another number-couple is expressed by the formula*

$$(b_1, b_2)(a_1, a_2) = (b_1a_1 - b_2a_2, b_2a_1 + b_1a_2).”$$

В результате широко распространилось определение *комплексных чисел* как *упорядоченных пар* действительных чисел с *умножением* по представленной формуле и покоординатным *сложением*. Так как *действительное* число есть частный случай числа *комплексного* (см. с. 53), принятие этого определения, вынуждает сделать не украшающий математику вывод: *действительное число — это пара действительных чисел.*

Для краткой записи *комплексных чисел* используют *однобуквенные* обозначения (например, $c=a+bi$, $a=1-i\sqrt{2}$)[2]. Наиболее часто (особенно для обозначения *комплексных переменных*) используют запись $z=x+iy$ (а также $w=u+iv$).

Действительные числа x и y в записи *комплексного числа* $z=x+iy$ называют соответственно <u>*действительной*</u> и <u>*мнимой*</u> <u>*частями*</u> этого *комплексного числа* с обозначениями $x = \mathrm{Re}\,z$, $y = \mathrm{Im}\,z$. *Равенство* комплексных чисел $z=x+iy$ и $w=u+iv$ равносильно равенству как *действительных*, так и *мнимых* их частей: $z=w \Leftrightarrow x=u$ и $y=v$.[3]

Запись $z=x+iy=x\cdot 1+y\cdot i$ наводит на мысль наглядно представлять *комплексные числа* z как *точки* (или *векторы*[4]) декартовой координатной плоскости $\mathbb{R}^2$ с координата-

---

[1] Hamilton William Rowan, 1805–1865.

[2] В первом случае a предполагается *действительным* числом, а во втором — служит обозначением *мнимого.*

[3] Из предположения, что $x+iy=u+iv$ при $x\neq u$ или $y\neq v$, следовало бы, что i — *действительное* число: $i=\frac{x-u}{v-y}$ или $i=\frac{y-v}{x-u}$.

[4] Откладываемые от любой *точки.*

ми $x = \mathrm{Re}\, z$, $y = \mathrm{Im}\, z$. *Единица* 1 и *мнимая единица* i обретают при этом смысл *единичных направляющих векторов* осей x (“действительной”) и y (“мнимой”), а *сложение* и *вычитание* комплексных чисел — *сложения* и *вычитания* изображающих их *векторов*.

К *наглядному изображению* комплексных чисел обратились лишь спустя два с половиной века после их возникновения: долгое время их воспринимали исключительно как “фантомы”, возникающие в ходе решения уравнений и исчезающие на завершающем этапе.

Первыми *геометрическое представление* комплексных чисел дали норвежский топограф Ве́ссель[1], изобразивший 1 и $\sqrt{-1}$ *единичными перпендикулярными* друг к другу *векторами*[2] плоскости и указавший правило *перемножения* комбинаций $a+b\sqrt{-1}$ этих векторов, и французский математик Арга́н[3], также представлявший комплексные числа “направленными отрезками” (“lignes dirigées”).

Изображать комплексные числа *точками* плоскости начал Гаусс. В 1811 г. (еще до введения термина “комплексные числа”) он писал: *“Так же как совокупность всех действительных величин можно мыслить в виде бесконечной прямой линии, совокупность всех величин, действительных и мнимых, можно представить в виде бесконечной плоскости, где каждая точка, задаваемая абсциссой a и ординатой b, представляет величину $a+bi$”*[4].

---

[1] Wessel Caspar (1745–1818) в 1797 г. в докладе Датской королевской академии. В 1999 г. вышло английское издание этого доклада [**55**], содержащее подробное жизнеописание Весселя, а также исторический очерк о комплексных числах и их геометрическом представлении.

[2] Во времена Весселя термином “вектор” еще не оперировали, и у него говорится о *прямых линиях*.

[3] Argand Jean-Robert (1768–1822) в книге [**31**], впервые вышедшей (анонимно) в 1806 г.

[4] В немецком оригинале [**40**, Bd. VIII, S. 90–91]: *“so wie man sich das ganze Reich aller reellen Grössen durch eine unendliche gerade Linie denken kann, so kann man das ganze Reich aller Grössen, reellen und imaginärer Grössen sich durch eine unendliche Ebene sinnlich machen, worin jeder Punkt, durch Abscisse = a, Ordinate = b bestimmt, die Grösse $a+bi$ gleichsam repräsentirt.”*

Уяснить геометрический смысл *умножения* и *деления комплексных чисел* (чего разглядыванием формул на с. 52 достичь трудно) позволяет переход от *декартовых* координат на плоскости к *полярным* r, φ, связанным с *декартовыми* равенствами $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

Любое *ненулевое* комплексное число $z = x + iy$ принимает тогда вид $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, который называют *полярной* (или *тригонометрической*) *формой* этого *комплексного числа*, при этом r называют *модулем*, а φ — *аргументом* числа z с обозначениями их $r = |z|$, $\varphi = \arg z$.[1] Геометрически *модуль* комплексного числа $z \neq 0$ есть *длина* изображающего его *вектора* координатной плоскости а *аргумент* — величина *угла*[2], образуемого этим *вектором* с осью x. *Модуль* любого комплексного числа $z = x + iy$ однозначно находится из равенства $|z|^2 = x^2 + y^2$ (т. е. $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$), *аргумент* же, напротив, определяется лишь с точностью до слагаемого, кратного 2π, и единого равенства для его вычисления (через x и y) не существует[3].

При изображении *комплексных чисел* z_1 и z_2 *точками* плоскости величина $|z_1 - z_2|$ приобретает смысл *расстояния* между этими *точками*. Множество тех $z \in \mathbb{C}$, для которых $|z - z_1| = |z - z_2|$, есть поэтому *прямая*, перпендикулярная к

---

[1] Число 0 *аргумента* (а следовательно, и *полярной формы*) не имеет, тогда как $|0| \overset{\text{def}}{=} 0$.

[2] За величину *угла* (в *радианной мере*) принимается *длина дуги* единичной окружности, высекаемая этим углом, взятая со знаком $+$ или $-$, соответственно отсчету дуги от оси x “против хода часовой стрелки” или же в противоположном направлении (допускается *прибавление* к измеренной *длине дуги* любого кратного *длины окружности*, т. е. 2π).

[3] Равенство $\arg z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ $(+2\pi k)$, верно *лишь* для комплексных чисел $z = x + iy$ с $x > 0$, тогда как при $x < 0$ действует равенство $\arg z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + \pi$ $(+2\pi k)$.

отрезку, соединяющему точки z_1 и z_2, и проходящая через его середину.[1] *Окружность* радиуса r с центром z_0 есть множество тех точек $z\in\mathbb{C}$, для которых $|z-z_0|=r$.[2]

Известные *неравенства для сторон треугольника* (“*длина любой стороны треугольника не больше суммы и не меньше разности длин двух других сторон*”) имеют следующую запись через *модули* комплексных чисел:

$$||z_1|-|z_2||\leqslant|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|.$$

Вот примеры *полярной записи* комплексных чисел:

$$1=\cos 0+i\sin 0,\quad -2=2(\cos\pi+i\sin\pi),\quad i=\cos\tfrac{\pi}{2}+i\sin\tfrac{\pi}{2},$$

$$\sqrt{3}+i=2\left(\cos\tfrac{\pi}{6}+i\sin\tfrac{\pi}{6}\right),\quad -\sqrt{3}+i=2\left(\cos\tfrac{5\pi}{6}+i\sin\tfrac{5\pi}{6}\right),$$

$$1+i=\sqrt{2}\left(\cos\tfrac{\pi}{4}+i\sin\tfrac{\pi}{4}\right),\ 1-i=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\tfrac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\tfrac{\pi}{4}\right)\right)^{3}.$$

(возможно добавление к *аргументам* любого кратного 2π).

Запись комплексных чисел в *полярной форме* сразу же проясняет геометрический смысл их умножения и деления: если $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, а $w=\rho(\cos\psi+i\sin\psi)$, то

$$\begin{aligned}zw&=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)\rho(\cos\psi+i\sin\psi)=\\&=r\rho\big((\cos\varphi\cos\psi-\sin\varphi\sin\psi)+i(\sin\varphi\cos\psi+\cos\varphi\sin\psi)\big)=\\&=r\rho\big(\cos(\varphi+\psi)+i\sin(\varphi+\psi)\big);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{z}{w}&=\frac{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}{\rho(\cos\psi+i\sin\psi)}\cdot\frac{(\cos\psi-i\sin\psi)}{(\cos\psi-i\sin\psi)}=\\&=\frac{r}{\rho}\big((\cos\varphi\cos\psi+\sin\varphi\sin\psi)+i(\sin\varphi\cos\psi-\cos\varphi\sin\psi)\big)=\\&=\frac{r}{\rho}\big(\cos(\varphi-\psi)+i\sin(\varphi-\psi)\big).\end{aligned}$$

---

[1] Неравенство же $|z-z_1|<|z-z_2|$ описывает ту из двух *полуплоскостей*, ограниченных указанной *прямой*, которая содержит точку z_1.

[2] Ограниченный же этой окружностью *круг* описывается неравенством $|z-z_0|<r$.

[3] Равенство $1-i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ тоже верно, но оно *не является* записью числа $1-i$ в *полярной форме*.

Выводы:

1. При перемножении ненулевых комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются[1]:

$$|zw| = |z||w|, \quad \arg(zw) = \arg z + \arg w;$$

геометрически это означает:

при умножении комплексного числа $z \neq 0$ на комплексное число $w \neq 0$ вектор, изображающий число z, изменяет длину в $|w|$ раз и поворачивается (вокруг начала координат) *на угол, равный* $\arg w$.

2. Модуль отношения двух ненулевых комплексных чисел равен отношению их модулей, а аргумент — разности их аргументов:

$$\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}, \quad \arg\frac{z}{w} = \arg z - \arg w.$$

3. Справедлива <u>формула Муáвра</u>[2]

$$\boxed{\big(r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\big)^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi), \quad n \in \mathbb{Z}}.$$

Числа $x+iy$ и $x-iy$ (или, что то же самое, $x+i(-y)$) называют <u>*комплексно сопряженными*</u> с обозначениями их z и $\overline{z}$. На плоскости *комплексно сопряженным* числам соответствуют *точки* (*векторы*), *симметричные* относительно оси x. Как следствия, имеют место равенства:

$$\overline{\overline{z}} = z, \quad \overline{z \pm w} = \overline{z} \pm \overline{w}, \quad \overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}, \quad \overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}},$$

$$|\overline{z}| = |z|, \quad z\overline{z} = |z|^2, \quad \frac{z+\overline{z}}{2} = \operatorname{Re} z, \quad \frac{z-\overline{z}}{2i} = \operatorname{Im} z.$$

---

[1] Все равенства для аргументов считаются выполненными с точностью до слагаемого, кратного 2π.

[2] De Moivre Abraham (1687–1754) — французский математик. О том, каким сложным путем и в каком виде была выведена им (в 1730 г.) эта *формула*, можно прочитать в примечании к §138 первого тома труда Л. Эйлера [**29**] (на с. 295–296).

Примером приложения правил *перемножения* комплексных чисел может служить вывод *формул преобразования* декартовых координат на плоскости при *повороте* осей.

Пусть оси координат $\widetilde{x}, \widetilde{y}$ повернуты относительно осей x, y (вокруг их общего начала) на угол α (рис. 3).

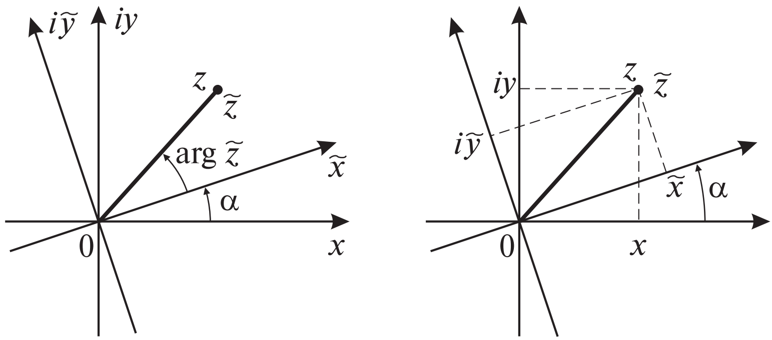


Рис. 3

Произвольно взятая *точка* плоскости имеет при этом два набора декартовых координат: (x, y) и $(\widetilde{x}, \widetilde{y})$, а потому *вектор*, ведущий из начала координат в эту точку, служит изображением сразу двух комплексных чисел (на двух экземплярах комплексной плоскости): $z = x + iy$ и $\widetilde{z} = \widetilde{x} + i\widetilde{y}$, для которых $|z| = |\widetilde{z}|$, а $\arg z = \arg \widetilde{z} + \alpha$. Выполняется поэтому равенство $x + iy = (\widetilde{x} + i\widetilde{y}) \cdot (\cos\alpha + i \sin\alpha)$, из которого (сравнением действительных и мнимых частей) и получают *формулы преобразования* декартовых координат при повороте осей (на угол α):

$$\begin{cases} x = \widetilde{x}\cos\alpha - \widetilde{y}\sin\alpha, \\ y = \widetilde{x}\sin\alpha + \widetilde{y}\cos\alpha. \end{cases}$$

I.4. Как извлекают корни из комплексных чисел

<u>*Корнями n-й степени*</u> ($n \in \mathbb{N}$) из *комплексного* числа a называют все те *комплексные* числа, которые удовлетворяют уравнению $z^n = a$. Для их обозначения (всех вместе и каждого в отдельности) используют обозначения $a^{\frac{1}{n}}$ и $\sqrt[n]{a}$.

Поскольку (в силу правила *перемножения* комплексных чисел) равенства $z \neq 0$ и $z^n = 0$ несовместимы, единственным значением $\sqrt[n]{0}$ является 0.

В случае же $a \neq 0$ переход в уравнении $z^n = a$ к *полярной записи* $a = |a|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ и $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ (с неизвестными пока r и φ) преобразует его в равенство

$$r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = |a|(\cos\alpha + i\sin\alpha),$$

равносильное следующим двум:

$$r = \sqrt[n]{|a|}, \qquad \varphi = \frac{\alpha}{n} + 2\pi\frac{k}{n}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

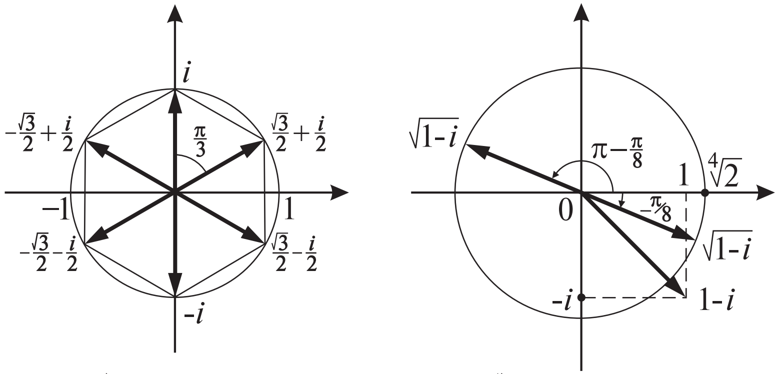
Так как перечисленным значениям φ отвечают ровно n *лучей*, выходящих из начала координат и разделяющих плоскость на n углов раствора $\frac{2\pi}{n}$, следует вывод:

Для любого ненулевого комплексного числа a символ $\sqrt[n]{a}$ имеет ровно n комплексных значений. Изображенные на координатной плоскости, они располагаются в вершинах правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса $r = \sqrt[n]{|a|}$ с центром в начале координат.[1]

Этот вывод дает геометрический способ нахождения *всех* значений $\sqrt[n]{a}$, если известно *хотя бы одно* из них. Например, $-i$ есть *одно* из значений $\sqrt[6]{-1}$, а остальные находятся построением правильного *шестиугольника*, вписанного в *единичную окружность*, с одной из вершин $-i$ (рис. 4, а).

---

[1] Под $\sqrt[n]{|a|}$ здесь понимается *арифметический* (положительный) корень степени n из *положительного* числа $|a|$ (см. с. 33).



а) *б)*

Рис. 4

Стоит отметить, что из найденных *шести* значений $\sqrt[6]{-1}$ $\left(\text{чисел } \pm i,\ \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\pm\frac{i}{2}\right)$ только *три* $\left(\text{числа } -i \text{ и } \pm\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)$ составляют набор значений $\sqrt[3]{i}$. Остальные *три* числа — это значения $\sqrt[3]{-i}$.

Извлекать *квадратные* корни из комплексных чисел можно и не прибегая к их *полярной записи*, а напрямую решая для данного комплексного числа $a+bi$ уравнение $z^2=a+bi$ (записав $z=x+iy$) как систему двух *действительных* уравнений относительно x и y.

Например, задача нахождения $\sqrt{1-i}=x+iy$ приводит к системе $\begin{cases} x^2-y^2=1 \\ 2xy=-1 \end{cases}$, решение которой дает значения: $\sqrt{1-i}=\pm\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}\mp i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$.

Оперируя же *полярной формой* комплексного числа $1-i$, можно прийти к тем же двум значениям $\sqrt{1-i}$, но записанным в другом виде:

$$1-i=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\tfrac{\pi}{4}+2\pi k\right)+i\sin\left(-\tfrac{\pi}{4}+2\pi k\right)\right),$$

$$\sqrt{1-i}=\sqrt[4]{2}\left(\cos\left(-\tfrac{\pi}{8}+\pi k\right)+i\sin\left(-\tfrac{\pi}{8}+\pi k\right)\right)=$$

$$=\pm\sqrt[4]{2}\left(\cos\left(-\tfrac{\pi}{8}\right)+i\sin\left(-\tfrac{\pi}{8}\right)\right)\ \ (\text{рис. } 4,\ \textit{б}).$$

Использование единого символа $\sqrt[n]{a}$ (или $a^{\frac{1}{n}}$) для обозначения как всего набора корней n-й степени из числа a, так и каждого из них в отдельности, имеет неудобства, связанные, в частности, с тем, что в рамках системы *действительных* чисел символом $\sqrt[n]{a}$ принято обозначать *арифметический* (*единственный положительный*) корень степени n из *положительного* числа a. Наиболее разумный выход — всякий раз специально оговаривать, что в конкретном случае подразумевается под этим символом[1].

К примеру, общеизвестная формула *корней квадратного уравнения* $ax^2+bx+c=0$ допускает две записи:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{и} \quad x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

при этом в рамках системы *действительных* чисел приемлема лишь запись слева и только при условии $b^2-4ac\geqslant 0$, а при допущении *мнимых* корней применимы обе записи, если считать, что в записи справа радикал имеет *два* значения, а в записи слева — какое-либо *одно* из них.

[1] Один из основоположников современного анализа французский математик Коши́ (Cauchy Augustin-Louis, 1789–1857) в своем знаменитом “Курсе анализа” [**34**] предлагал обойти эту трудность, используя запись типа $\sqrt{\!\sqrt{a}}=\pm\sqrt{a}$, однако поддержки в этом не нашел.

II. Последовательности чисел

II.1. Что называют пределом числовой последовательности

Числовой последовательностью называют функцию натуральной[1] *переменной, принимающую числовые значения. Именно, говорят, что задана* <u>*числовая последовательность*</u>[2] $\{x_n\}$, *если каждому натуральному числу*[3] n *сопоставлено некое число* (*действительное или мнимое*), *обозначаемое* x_n *и называемое* n*-м* <u>*элементом последовательности*</u> $\{x_n\}$.

Вот фрагмент трактата 1800 г. французского математика Лакруа́ (Lacroix Silvester François, 1765–1813): *"Если, например,* $A_n = 3+2n$, *то беря последовательно* $n=0$, $n=1$, $n=2$, $n=3$ *и т. д., получили бы последовательность чисел* $3, 5, 7, 9$ *и т. д."*[4]

Имеются и такие варианты записи *последовательности*:

$$n \mapsto x_n,\quad n=0,1,2,\ldots;\qquad \{x_n\}_{n=1}^{+\infty};\qquad \{x_n\} = x_{n_1}, x_{n_1+1}, \ldots;$$

<u>*постоянную*</u> последовательность $c, c, \ldots$ естественно обозначать $\{c\}$ (не путая с *одноэлементным множеством* $\{c\}$).

Вместо x_n в записи *последовательности* $\{x_n\}$ часто стоит указание *вычислительных действий*, которые надлежит совершить с *числом* n, чтобы получить n*-й элемент последовательности*. Например, у *последовательности* $\left\{\frac{1}{n-1}\right\}$ элемент x_1 *не определен*, $x_2=1$, $x_3=\frac{1}{2}$, $\ldots$ (или, если угодно, можно считать, что *первый* элемент последовательности отвечает значению $n=2$, *второй* – значению $n=3$ и т. д.).

---

[1] Вариант: *целой неотрицательной*.

[2] В дальнейшем для краткости просто <u>*последовательность*</u>.

[3] Возможно, начиная с некоторого $n=n_1$ (или, наоборот, с $n=0$).

[4] В оригинале [**43**, с. 2] (в еще старой французской орфографии): "*Si l'on avoit, par exemple,* $A_n = 3+2n$; *en posant successivement* $n=0$, $n=1$, $n=2$, $n=3$, *etc. on obtiendroit la suite des nombres* $3, 5, 7, 9$, *etc.*"

Число x называют <u>*пределом*</u> *последовательности* $\{x_n\}$ (запись: $\lim x_n = x$)[1], *если истинно утверждение*:

> *"Для любого положительного числа, обозначаемого ε, существует такое натуральное число n_0, что все элементы x_n со значениями $n > n_0$ попадают в ε-*<u>*окрестность*</u> *числа x, т. е. удовлетворяют неравенству $|x_n - x| < \varepsilon$."*

Символически оно выражается *формулой*[2]

$$\boxed{\forall\varepsilon > 0\, \exists n_0 \forall n (n > n_0 \Rightarrow |x_n - x| < \varepsilon)}.$$

Из нее, в частности, следует, что если число $\varepsilon > 0$ брать *сколь угодно малым*, то натуральное число n_0, для которого верно утверждение $\forall n(n > n_0 \Rightarrow |x_n - x| < \varepsilon)$, поневоле оказывается[3] *сколь угодно большим*: если $\varepsilon = |x_m - x|$, где x_m – любой *отличный от* x элемент последовательности $\{x_n\}$, то неравенство $|x_n - x| < \varepsilon$ может выполняться *для всех* $n > n_0$, лишь если $n_0 > m$. Подчеркивая это обстоятельство, наряду с $\lim x_n = x$ часто пишут $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$ (а раньше писали $\lim\limits_{n=\infty} x_n = x$).

Данное определение *предела последовательности* применимо к последовательностям $\{x_n\}$ как *действительных*,

---

[1] А также $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$ (особенно если существует зависимость x_n от других переменных, помимо n), $\{x_n\} \to x$ и т. п.

[2] На удобном для записи утверждений анализа "диалекте" языка L_1Real – языка логики *первого* порядка, *предметными переменными* в котором служат *действительные числа*. Все *кванторы* в этой *формуле* являются *ограниченными*: переменная ε принимает только *положительные* значения, а переменные n и n_0 – только *целые неотрицательные*. Более подробную информацию касательно принципов *символической записи* можно найти в *Приложении I*.

В случае последовательности $\{x_n\}$ *действительных* (но не *комплексных*) чисел эквивалентной *формулой* служит

$$\forall\mu\forall\nu(\mu < x < \nu \Rightarrow \exists n_0 \forall n (n > n_0 \Rightarrow \mu < x_n < \nu))$$

(ее смысл: *любой содержащий число x интервал содержит все элементы последовательности $\{x_n\}$ с достаточно большими "номерами"*).

[3] Если исключить нетипичный случай последовательности, *все* элементы которой, начиная с некоторого, *равны* числу x.

так и *комплексных* чисел (с записью их $\{z_n\} = \{x_n + iy_n\}$). Различие лишь в *геометрической трактовке* неравенства $|x_n - x| < \varepsilon$ (а по сути ε-*окрестности* числа x). В "действительном" случае это неравенство означает, что элемент x_n попадает в *интервал* $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ *действительной оси*. В "комплексном" же случае неравенство $|z_n - z| < \varepsilon$ выражает тот факт, что элемент $z_n = x_n + iy_n$ оказывается в *круге* радиуса ε с центром $z = x + iy$ на *комплексной плоскости*, при этом $\lim z_n = z$ в том и только в том случае, когда $\lim x_n = x$ и $\lim y_n = y$.

Последовательность, у которой есть предел, называют *сходящейся*, а у которой нет предела – *расходящейся*.

Символически *сходимость* последовательности $\{x_n\}$ выражается *формулой*

$$\exists x \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n (n > n_0 \Rightarrow |x_n - x| < \varepsilon),$$

а ее *расходимость* – *формулой*, получаемой *отрицанием*:

$$\forall x \exists \varepsilon > 0 \forall n_0 \exists n (n > n_0 \wedge |x_n - x| \geqslant \varepsilon).$$

Примеры. *1. Постоянная* последовательность $\{c\} = c, c, \ldots$ является *сходящейся* (ее *пределом* служит число c).

2. Последовательность $\left\{\frac{a}{n}\right\}$ (a – любое число) *сходится*, и ее *предел* равен *нулю*. Доказать это – значит проверить *истинность* утверждения, выражаемого формулой

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n \left(n > n_0 \Rightarrow \left|\frac{a}{n}\right| < \varepsilon\right).$$

Если для произвольно взятого *положительного* числа ε взять в качестве n_0 любое *натуральное* число, превосходящее число $\frac{|a|}{\varepsilon}$ (такое число n_0 существует по аксиоме **A9**), то для *натуральных* чисел n утверждение "$n > n_0 \Rightarrow \left|\frac{a}{n}\right| < \varepsilon$" оказывается *истинным*[1].

---

[1] Так же доказывается *сходимость* к *нулю* последовательностей $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}$, $\left\{\frac{1}{\sqrt{n}}\right\}$ (выбором соответственно $n_0 > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ и $n_0 > \frac{1}{\varepsilon^2}$) и т. п.

3. Последовательность $\{(-1)^n\}$ является *расходящейся*. Доказывается это проверкой *истинности* утверждения

$$\forall x \exists \varepsilon > 0 \forall n_0 \exists n (n > n_0 \wedge |(-1)^n - x| \geqslant \varepsilon).$$

Каким бы ни было число x, взяв $\varepsilon = \frac{1}{2}$, можно утверждать, что для любого *целого* числа n_0 хотя бы одно из неравенств $|(-1)^{n_0+1} - x| < \varepsilon$ или $|(-1)^{n_0+2} - x| < \varepsilon$ не выполняется: в противном случае оказывалось бы, что

$$2 = |(-1)^{n_0+1} - (-1)^{n_0+2}| \leqslant |(-1)^{n_0+1} - x| + |x - (-1)^{n_0+2}| < 2\varepsilon = 1.$$

Общие свойства сходящихся последовательностей

1. *Сходящаяся последовательность имеет единственный предел.*

Доказательство. Если предположить, что $x = \lim x_n$ и $\widetilde{x} = \lim x_n$ $(x \neq \widetilde{x})$, то каково бы ни было *положительное* число ε, для всех достаточно больших “номеров” n должны были бы выполняться неравенства $|x_n - x| < \varepsilon$ и $|x_n - \widetilde{x}| < \varepsilon$, из которых следовало бы, что

$$|x - \widetilde{x}| = |(x - x_n) + (x_n - \widetilde{x})| \leqslant |x - x_n| + |x_n - \widetilde{x}| < 2\varepsilon,$$

что *невозможно* при выборе $\varepsilon \leqslant \frac{|x - \widetilde{x}|}{2}$.

2. *Сходимость последовательности не нарушается* (*и величина ее предела сохраняется*) *при любом изменении в последовательности* (*равно как при удалении из нее или добавлении к ней*) *конечного числа начальных элементов.*

Доказательство. *Изменить* в последовательности $\{x_n\}$ несколько начальных элементов — значит перейти к последовательности $\{\widetilde{x}_n\}$ с $\widetilde{x}_n = x_n$ для всех n, начиная с некоторого n_1. *Удалить* же из нее (соответственно, *добавить* к ней) *начальный* элемент — значит перейти к последовательности $\{x_{n+1}\}$ (соответственно последовательности $\{x_{n-1}\}$).

Пусть последовательность $\{x_n\}$ *сходится* к числу x, т. е. *истинно* утверждение, выражаемое *формулой*

$$\forall\varepsilon>0\exists n_0\forall n(n>n_0 \Rightarrow |x_n-x|<\varepsilon).$$

Замена *натурального* числа n_0, *существующего* (в силу данной *формулы*) для *любого* значения $\varepsilon>0$, на *наибольшее* из чисел n_0 и n_1 позволяет сделать вывод об *истинности* утверждения, выражаемого *формулой*

$$\forall\varepsilon>0\exists n_0\forall n(n>n_0 \Rightarrow |\widetilde{x}_n-x|<\varepsilon), -$$

о *сходимости* (к *пределу* x) последовательности $\{\widetilde{x}_n\}$.

Подобным образом (заменой n_0, соответственно, на n_0-1 и n_0+1) выводится *истинность* утверждений о *сходимости* (к *пределу* x) последовательностей $\{x_{n+1}\}$ и $\{x_{n-1}\}$.

3. *Любая сходящаяся последовательность*[1] $\{x_n\}$ *является ограниченной: все ее элементы не больше (по модулю) некоторого положительного числа:* $\exists h>0\forall n(|x_n|\leqslant h)$.

Доказательство. Пусть ε – произвольно взятое *положительное* число. Тогда если $x=\lim x_n$, то для всех *натуральных* чисел n, бо́льших некоторого n_0, будет выполняться неравенство $|x_n-x|<\varepsilon$, а следовательно, и неравенство $|x_n|<|x|+\varepsilon$. Пусть p – *наибольшее* из чисел $|x_1|, \ldots, |x_{n_0}|$, а h – *наибольшее* из чисел p и $|x|+\varepsilon$. Тогда $|x_n|\leqslant h$ *для всех* n, поскольку заведомо $|x_n|\leqslant p$ при всех $n\leqslant n_0$ и $|x_n|<|x|+\varepsilon$ при всех $n>n_0$. **Q.E.D.**

Для последовательностей $\{x_n\}$ *действительных* чисел вводят также понятия ограниченности снизу $\big(\exists a\forall n(a\leqslant x_n)\big)$ и ограниченности сверху $\big(\exists b\forall n(x_n\leqslant b)\big)$, при этом *ограниченность* последовательности $\{x_n\}$ равносильна ее *ограниченности снизу* и *сверху*.

В силу доказанного утверждения *ограниченность* последовательности есть *необходимое* условие ее *сходимости*. То, что это условие не является *достаточным*, видно на примере последовательности $\{(-1)^n\}$.

---

[1] *Действительных* или *мнимых* чисел.

4. *Если последовательность* $\{x_n\}$ *сходится* (*к числу* x) *то последовательность* $\{|x_n|\}$ *также сходится* (*к числу* $|x|$).

Доказательство. Формула

$$\forall\varepsilon>0\exists n_0\forall n(n>n_0\Rightarrow ||x_n|-|x||<\varepsilon)$$

(выражающая то, что $\lim|x_n|=|x|$) есть следствие формулы

$$\forall\varepsilon>0\exists n_0\forall n(n>n_0\Rightarrow |x_n-x|<\varepsilon)$$

и неравенства $||x_n|-|x||\leqslant|x_n-x|$.

Арифметика сходящихся последовательностей

Среди *сходящихся* последовательностей особо выделяют те, которые *сходятся* к *нулю*, называя их бесконечно малыми. Их роль состоит, в частности, в том, что *сходимость* последовательности $\{x_n\}$ к числу x равносильна тому, что последовательность $\{x_n-x\}$ является *бесконечно малой*.

1) сумма (*и разность*) *двух*[1] *бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность*;
2) произведение любой ограниченной последовательности на бесконечно малую есть бесконечно малая последовательность.

Доказательство. *а)* Пусть $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ – *бесконечно малые* последовательности ($\lim\alpha_n=\lim\beta_n=0$) и пусть ε – любое *положительное* число. Согласно определению *предела последовательности* для числа $\frac{\varepsilon}{2}$ (как и для любого *положительного* числа) существуют такие *натуральные* числа n_1 и n_2, что

$$|\alpha_n|<\frac{\varepsilon}{2}\text{ для всех }n>n_1\quad\text{и}\quad|\beta_n|<\frac{\varepsilon}{2}\text{ для всех }n>n_2.$$

Так как $|\alpha_n\pm\beta_n|\leqslant|\alpha_n|+|\beta_n|$, выбором $n_0=\max\{n_1,n_2\}$[2] устанавливается *истинность* утверждения о том, что и последовательности $\{\alpha_n\pm\beta_n\}$ являются *бесконечно малыми*:

---

[1] А следовательно, и любого *конечного* числа.

[2] Т. е. $n_0=n_1$, если $n_1\geqslant n_2$, и $n_0=n_2$, если $n_1<n_2$.

$$\forall\varepsilon>0\exists n_0\forall n(n>n_0 \Rightarrow |\alpha_n\pm\beta_n|<\varepsilon).$$

б) Пусть $\{c_n\}$ – *ограниченная* последовательность (т. е. существует такое *положительное* число h, что $|c_n|\leqslant h$ для *всех* элементов этой последовательности) и пусть последовательность $\{\alpha_n\}$ является *бесконечно малой*. Каково бы ни было *положительное* число ε, можно утверждать (поскольку $\lim\alpha_n=0$), что для *положительного* числа $\frac{\varepsilon}{h}$ существует такое *натуральное* число n_0, что $|\alpha_n|<\frac{\varepsilon}{h}$ для всех $n>n_0$. Как следствие, $|c_n\alpha_n|=|c_n||\alpha_n|<h\frac{\varepsilon}{h}=\varepsilon$ для всех $n>n_0$, т. е. истинным оказывается утверждение:

$$\forall\varepsilon>0\exists n_0\forall n(n>n_0 \Rightarrow |c_n\alpha_n|<\varepsilon).$$

Если $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ – сходящиеся последовательности, то последовательности $\{x_n\pm y_n\}$ и $\{x_n y_n\}$ также сходятся и $\lim(x_n\pm y_n)=\lim x_n\pm\lim y_n$, *а* $\lim(x_n y_n)=(\lim x_n)(\lim y_n)$; *если к тому же $\lim y_n\neq 0$, то сходящейся является и последовательность $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$, причем* $\lim\frac{x_n}{y_n}=\frac{\lim x_n}{\lim y_n}$.

Доказательство. Если последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ *сходятся*, имея *пределами* числа x и y, то последовательности $\{x_n-x\}$ и $\{y_n-y\}$ являются *бесконечно малыми*. В соответствии с установленными свойствами *бесконечно малых* последовательностей[1] *бесконечно малыми* являются также последовательности

$$\{(x_n\pm y_n)-(x\pm y)\} = \{(x_n-x)\pm(y_n-y)\}$$

и

$$\{x_n y_n-xy\} = \{x_n(y_n-y)+(x_n-x)y\},$$

а следовательно, последовательности $\{x_n\pm y_n\}$ и $\{x_n y_n\}$ *сходятся*, причем

$$\lim(x_n\pm y_n)=\lim x_n\pm\lim y_n \quad \text{и} \quad \lim(x_n y_n)=(\lim x_n)(\lim y_n).$$

[1] С учетом *ограниченности* сходящихся последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y\}$ (постоянной последовательности).

Если $\lim y_n = y \neq 0$, то для *положительного* числа $\frac{|y|}{2}$ существует *натуральное* число n_1 со свойством: $|y_n - y| < \frac{|y|}{2}$ для *всех* натуральных чисел ("номеров") $n > n_1$; как следствие, при $n > n_1$ имеет место неравенство $|y_n| > \frac{|y|}{2}$, в силу которого *определена* и оказывается *ограниченной* последовательность $\left\{\frac{1}{y_n}\right\}_{n=n_1+1}^{+\infty}$. Остается заметить, используя запись

$$\left\{\frac{x_n}{y_n} - \frac{x}{y}\right\} = \left\{\frac{x_n}{y_n} - \frac{x}{y_n} + \frac{x}{y_n} - \frac{x}{y}\right\} = \left\{\frac{1}{y_n}(x_n - x) - x\,\frac{1}{y}\,\frac{1}{y_n}(y_n - y)\right\}$$

и свойства *бесконечно малых* последовательностей, что последовательность $\left\{\frac{x_n}{y_n} - \frac{x}{y}\right\}$ является *бесконечно малой*, а поэтому $\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{x}{y}$.

Сходимость и неравенства, "принцип сэндвича"

> *Если сходящиеся последовательности*[1] $\{x_n\}$ *и* $\{y_n\}$ *таковы, что* $x_n \leqslant y_n$ *для всех натуральных чисел ("номеров")* n, *начиная с некоторого, то* $\lim x_n \leqslant \lim y_n$.

<u>Доказательство</u>. Пусть $\lim x_n = x$ и $\lim y_n = y$. Рассуждая "от противного", т. е. предполагая, что $x > y$, приходится делать вывод: для *положительного* числа $\frac{x-y}{2}$ существуют такие *натуральные* числа n_1 и n_2, что

$$|x_n - x| < \frac{x-y}{2}, \text{ т. е. } x - \frac{x-y}{2} < x_n < x + \frac{x-y}{2} \text{ для всех } n > n_1,$$

а

$$|y_n - y| < \frac{x-y}{2}, \text{ т. е. } y - \frac{x-y}{2} < y_n < y + \frac{x-y}{2} \text{ для всех } n > n_2,$$

и, как следствие, $y_n < \frac{x+y}{2} < x_n$ для любого n, превосходящего *оба* числа n_1, n_2, а это несовместимо с тем, что по условию $x_n \leqslant y_n$ для *всех* натуральных чисел n, начиная с некоторого. Пролученное противоречие доказывает, что неравенство $\lim x_n > \lim y_n$ *неверно*.

---

[1] *Действительных* чисел.

<u>*Замечание*</u>. При замене в условии утверждения неравенства $x_n \leqslant y_n$ на *строгое* $x_n < y_n$ утверждать можно лишь *нестрогое* неравенство $\lim x_n \leqslant \lim y_n$; это видно на примере последовательностей $\left\{-\frac{1}{n}\right\}$ и $\left\{\frac{1}{n}\right\}$.

"Принцип сэндвича". *Если* $\{x_n\}$ *и* $\{\widetilde{x}_n\}$ *– сходящиеся последовательности, причем* $\lim x_n = \lim \widetilde{x}_n = x$*, а последовательность* $\{y_n\}$ *такова, что* $x_n \leqslant y_n \leqslant \widetilde{x}_n$ *для всех* n*, начиная с некоторого, то последовательность* $\{y_n\}$ *также является сходящейся и* $\lim y_n = x$.[1]

<u>*Доказательство*</u>. Так как $\lim x_n = x$ и $\lim \widetilde{x}_n = x$, для любого *положительного* числа ε существуют такие *натуральные* числа n_1 и $\widetilde{n}_1$, что

$$|x_n - x| < \varepsilon, \text{ т. е. } x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon \text{ для всех } n > n_1$$

и

$$|\widetilde{x}_n - x| < \varepsilon, \text{ т. е. } x - \varepsilon < \widetilde{x}_n < x + \varepsilon \text{ для всех } n > \widetilde{n}_1.$$

Если за n_0 взять какое-либо *натуральное* число, *не меньшее* как обоих чисел n_1 и $\widetilde{n}_1$, так и того числа n, начиная с которого выполняются неравенства $x_n \leqslant y_n \leqslant \widetilde{x}_n$, то для всех натуральных чисел $n > n_0$ выполненными окажутся также неравенства $x - \varepsilon < x_n \leqslant y_n \leqslant \widetilde{x}_n < x + \varepsilon$, так что *истинным* оказывается утверждение $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n (n > n_0 \Rightarrow |y_n - x| < \varepsilon)$, т. е. $\lim y_n = x$. **Q.E.D.**

---

[1] Наглядной иллюстрацией сформулированного свойства, объясняющей его название, служит известное наблюдение: если в *сэ́ндвиче* – изделии, состоящем из двух ломтей хлеба, проложенных какой-либо начинкой, – оба ломтя хлеба направляются в (один и тот же) рот, то туда же уходит и начинка. Термин "сэндвич" (а его применяют и к изделиям непищевого назначения) вошел в обиход после того, как английский мореплаватель и государственный деятель Джон Монтегю, 4-й граф Сэндвич (John Montagu, 4-th Earl of Sandwich, 1718–1792) отметился в лондонском обществе тем, что сутки провел за игровым столом, подкрепляясь (дабы не пачкать рук) исключительно такими изделиями. (The Oxford English Dictionary. Oxford, 1989, v. XIV, p. 456.)

Применение вышеприведенных свойств сходящихся последовательностей иллюстрирует разбор двух важных примеров (и следующих за ними утверждений).

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ для любого числа $a > 0$ $(a \neq 1)$.

Если $a > 1$, то и $\sqrt[n]{a} > 1$,[1] а поэтому[2] можно записать $\sqrt[n]{a} = 1 + r_n$. Возведение в n-ю степень[3] показывает, что

$$a = (1 + r_n)^n = 1 + nr_n + \cdots \leqslant 1 + nr_n,$$

вследствие чего выполняются неравенства $0 < r_n \leqslant \frac{a-1}{n}$, применение к которым “принципа сэндвича” дает: $\lim r_n = 0$, а следовательно, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = \lim(1+r_n) = 1$. Если же $0 < a < 1$, то $a^{-1} > 1$, так что[4] $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a^{-1}}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a^{-1}}} = 1$.

2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Учитывая, что $\sqrt[n]{n} \geqslant 1$ при любом натуральном n, можно записать $\sqrt[n]{n} = 1 + r_n$, где $r_n \geqslant 0$. Привлекая формулу *бинома Ньютона* (см. с. 26) и опуская в ее правой части все слагаемые, кроме *первого* и *третьего*, можно заключить, что

$$n = (1 + r_n)^n = 1 + \frac{n}{1} r_n + \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2} r_n^2 + \cdots \geqslant 1 + \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2} r_n^2,$$

а следовательно, $r_n^2 \leqslant \frac{2}{n}$. Если n_0 — натуральное число, превосходящее $\frac{2}{\varepsilon^2}$, то для всех $n > n_0$ выполняются неравенства $r_n^2 < \frac{2}{n} < \frac{2}{n_0} < \varepsilon^2$, а поэтому и неравенство $r_n < \varepsilon$. Этим завершается доказательство *истинности* утверждения

$$\forall\varepsilon \exists n_0 \forall n (n > n_0 \Rightarrow |\sqrt[n]{n} - 1| < \varepsilon).$$

---

[1] Это вытекает, например, из формулы *разности степеней* (см. с. 33), примененной к разности $(\sqrt[n]{a})^n - 1$.

[2] Если обозначить r_n *разность* между $\sqrt[n]{a}$ и 1.

[3] Непосредственным раскрытием скобок или применением формулы *бинома Ньютона*.

[4] С учетом свойств арифметического корня (см. с. 35, замечание 1).

Если последовательность $\{x_n\}$ *сходится к числу* x, *то последовательность* $\left\{\frac{x_1+\dots+x_n}{n}\right\}$ *средних арифметических элементов этой последовательности также сходится к* x.

Доказательство. Пусть ε — любое *положительное* число, а n_1 — такое *натуральное* число, что $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$ для всех $n > n_1$. Воспользовавшись соотношениями

$$\left|\frac{x_1+\dots+x_n}{n} - x\right| = \left|\frac{(x_1-x)+\dots+(x_n-x)}{n}\right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{|x_1-x|+\dots+|x_{n_1}-x|}{n} + \frac{|x_{n_1+1}-x|+\dots+|x_n-x|}{n},$$

можно заметить, что *вторая* из последних двух дробей *меньше* числа $\frac{\varepsilon}{2}$ (при любом $n > n_1$), тогда как *первая* становится сколь угодно малой (а следовательно, *меньшей* числа $\frac{\varepsilon}{2}$), если n взять *достаточно большим* (бо́льшим некоторого n_2). В результате оказывается, что $\left|\frac{x_1+\dots+x_n}{n} - x\right| < \varepsilon$ для всех $n > n_0$, где n_0 — наибольшее из чисел n_1, n_2.

Если последовательность $\{x_n\}$ *положительных чисел сходится к числу* x, *то последовательность* $\left\{\sqrt[n]{x_1\cdots x_n}\right\}$ *средних геометрических элементов этой последовательности также сходится к* x.

Доказательство. Пусть ε — любое *положительное* число, а n_1 — такое *натуральное* число, что для всех натуральных чисел $n > n_1$ выполняются неравенства $x - \frac{\varepsilon}{2} < x_n < x + \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда

$$\sqrt[n]{x_1\cdots x_n} = \sqrt[n]{x_1\cdots x_{n_1}x_{n_1+1}\cdots x_n} < \sqrt[n]{x_1\cdots x_{n_1}(x+\tfrac{\varepsilon}{2})^{n-n_1}} =$$
$$= \sqrt[n]{x_1\cdots x_{n_1}(x+\tfrac{\varepsilon}{2})^{-n_1}}\left(x+\frac{\varepsilon}{2}\right),$$

а так как $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{x_1\cdots x_{n_1}(x+\frac{\varepsilon}{2})^{-n_1}} = 1$ (пример 1) и в силу этого для всех достаточно больших n (бо́льших некоторого n_2) выполняется неравенство $\sqrt[n]{x_1\cdots x_{n_1}(x+\frac{\varepsilon}{2})^{-n_1}} < \frac{x+\varepsilon}{x+\frac{\varepsilon}{2}}$, то для всех n, бо́льших *наибольшего* из чисел n_1, n_2, выполняется и неравенство $\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} < x + \varepsilon$.

Если $x = 0$, то этого неравенства достаточно, чтобы утверждать[1], что $\lim \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} = 0 = \lim x_n$. Если же $x > 0$, то надлежит доказать еще выполнение (для всех n, бо́льших некоторого n_0) неравенства $\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} > x - \varepsilon$.

Для этого следует воспользоваться соотношениями[2]

$$\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} = \sqrt[n]{x_1 \cdots x_{n_1} x_{n_1+1} \cdots x_n} > \sqrt[n]{x_1 \cdots x_{n_1} (x - \tfrac{\varepsilon}{2})^{n-n_1}} =$$
$$= \sqrt[n]{x_1 \cdots x_{n_1} (x - \tfrac{\varepsilon}{2})^{-n_1}} \left(x - \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Именно, поскольку[3] $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{x_1 \cdots x_{n_1} (x - \frac{\varepsilon}{2})^{-n_1}} = 1$, для всех достаточно больших n (бо́льших некоторого n_3) выполняется неравенство $\sqrt[n]{x_1 \cdots x_{n_1} (x + \frac{\varepsilon}{2})^{-n_1}} > \frac{x - \varepsilon}{x - \frac{\varepsilon}{2}}$, а следовательно, для всех n, бо́льших *наибольшего* из чисел n_1, n_3, выполняется и требуемое неравенство $\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} > x - \varepsilon$.

В результате оказывается: $x - \frac{\varepsilon}{2} < \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} < x + \frac{\varepsilon}{2}$ для всех $n > n_0$, где n_0 — наибольшее из чисел n_1, n_2, n_3.

Доказанное утверждение позволяет сделать следующий важный вывод.

> *Если для последовательности $\{x_n\}$ положительных чисел последовательность $\left\{\frac{x_n}{x_{n-1}}\right\}$ сходится к числу c, то к этому же числу сходится и последовательность $\left\{\sqrt[n]{x_n}\right\}$.*

Доказательство.

$$\lim \sqrt[n]{x_n} = \lim \sqrt[n]{\frac{x_1}{1} \frac{x_2}{x_1} \frac{x_3}{x_2} \cdots \frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} \frac{x_n}{x_{n-1}}} = \lim \frac{x_n}{x_{n-1}} = c.$$

---

[1] Ввиду произвольности числа $\varepsilon > 0$.

[2] С заменой их неравенством $\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} > x - \varepsilon$, если число $x - \varepsilon$ оказывается *отрицательным*.

[3] В случае *неотрицательности* числа $x - \varepsilon$ (а потому и числа $x - \frac{\varepsilon}{2}$).

Расходимость и бесконечные пределы

Среди *расходящихся* последовательностей (действительных чисел) $\{x_n\}$ – тех, для которых *ложно* утверждение о их сходимости
$$\exists x \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n (n > n_0 \Rightarrow |x_n - x| < \varepsilon),$$
а следовательно, *истинно* его *отрицание*
$$\neg \exists x \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n (n > n_0 \Rightarrow |x_n - x| < \varepsilon) =$$
$$= \forall x \exists \varepsilon > 0 \forall n_0 \exists n (n > n_0 \wedge |x_n - x| \geqslant \varepsilon),$$
выделяют те, которые имеют *бесконечные пределы*[1]: $+\infty$, $-\infty$ и ∞ (без знака).

Говорят, что последовательность $\{x_n\}$ *действительных чисел имеет* *<u>бесконечный предел</u>* $+\infty$ (запись: $\lim x_n = +\infty$), *если для любого* (подтекст: *сколь угодно большого*) *положительного числа* h *существует такое натуральное число* n_0, *что* $x_n > h$ *для всех* $n > n_0$:
$$\boxed{\lim x_n = +\infty \ \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \ \forall h > 0 \exists n_0 \forall n (n > n_0 \Rightarrow x_n > h)};$$
подобным же образом считают:
$$\boxed{\lim x_n = -\infty \ \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \ \forall h > 0 \exists n_0 \forall n (n > n_0 \Rightarrow x_n < -h)}.$$

Последовательность $\{x_n\}$ *называют* *<u>бесконечно большой</u>* *с обозначением* $\lim x_n = \infty$ (*без знака*), *если* $\lim |x_n| = +\infty$:
$$\boxed{\lim x_n = \infty \ \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \ \forall h > 0 \exists n_0 \forall n (n > n_0 \Rightarrow |x_n| > h)}.$$

Например, *бесконечно большой* является последовательность $\{q^n\}$, где q – любое число с $|q| > 1$. Чтобы в этом убедиться, следует представить число $|q| > 1$ в виде $1 + r$, где $r > 0$, и заметив, что

---

[1] *Предел* числовой последовательности, если к слову предел не добавлено прилагательное *бесконечный*, всегда подразумевается *конечным* числом (действительным или мнимым).

$$
\begin{aligned}
&|q^2| = (1+r)(1+r) > 1+2r > 2r,\\
&|q^3| = |q^2|(1+r) > (1+2r)(1+r) > 1+3r > 3r,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&|q^n| > 1+nr > nr,\\
&\ldots\ldots,
\end{aligned}
$$

применить *аксиому Архимеда* (см. с. 29): каким бы ни было *положительное* число h, для числа $\frac{h}{r}$ (как и для любого *положительного* числа) существует *превосходящее* его *натуральное* число n_0. Но тогда $|q^n| > nr > n_0 r > h$ для всех значений (“номеров”) $n > n_0$, чем и завершается доказательство *истинности* утверждения $\forall h > 0 \exists n_0 \forall n (n > n_0 \Rightarrow |q^n| > h)$.

Для того чтобы последовательность $\{x_n\}$ была бесконечно большой, необходимо и достаточно, чтобы последовательность $\{(x_n)^{-1}\}$ была бесконечно малой.

Доказательство. Введением обозначения $h = \varepsilon^{-1}$ *формула* $\forall h > 0 \exists n_0 \forall n (n > n_0 \Rightarrow |x_n| > h)$, служащая выражением того, что $\lim x_n = \infty$, преобразуется в *равнозначную* ей формулу $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n (n > n_0 \Rightarrow |(x_n)^{-1}| < \varepsilon)$, выражающую то, что $\lim (x_n)^{-1} = 0$.

Соединение доказанного утверждения с разбором предшествующего примера показывает, что если $|q| < 1$, то последовательность $\{q^n\}$ является *бесконечно малой.*

Сравнивая формулы

$$\forall h > 0 \exists n_0 \forall n (n > n_0 \Rightarrow |x_n| > h) \text{ и } \forall h > 0 \exists n (|x_n| > h)^1,$$

служащие выражениями того, что последовательность $\{x_n\}$ является, соответственно, *бесконечно большой* и *неограниченной*, можно заключить: *а)* любая *бесконечно большая* последовательность является *неограниченной*; *б)* существуют *неограниченные* последовательности, не являющиеся *бесконечно большими* (например, $\{(1 + (-1)^n) n\}$).

[1] *Отрицание* формулы *ограниченности* $\exists h > 0 \forall n (|x_n| \leqslant h)$.

II.2. Какие последовательности называют монотонными и какие из них сходятся

Последовательность $\{x_n\}$ *действительных чисел называется: а) возрастающей, б) неубывающей, в) убывающей, г) невозрастающей, если истинны, соответственно, утверждения: а)* $\forall n\,(x_n < x_{n+1})$, *б)* $\forall n\,(x_n \leqslant x_{n+1})$, *в)* $\forall n\,(x_n > x_{n+1})$, *г)* $\forall n\,(x_n \geqslant x_{n+1})$; *названные виды последовательностей объединяют термином монотонные последовательности*[1].

Замечание 1. Так как любая *возрастающая* последовательность является *неубывающей*, а любая *убывающая* — *невозрастающей*, все установленное для *неубывающих* последовательностей, справедливо и для *возрастающих*, а то, что верно для *невозрастающих*, остается верным и для *убывающих*.

Замечание 2. Поскольку добавление или отбрасывание любого *конечного* числа начальных элементов последовательности не влияют на ее сходимость (см. с. 66, *свойство 2*), в формулировках утверждений о пределах *монотонных* последовательностей условие *монотонности* можно заменить на *монотонность, начиная с некоторого “номера”*.

Теорема о сходимости ограниченных монотонных последовательностей. *Любая ограниченная монотонная последовательность является сходящейся.* Точнее:

1) если неубывающая последовательность $\{x_n\}$ *ограничена сверху, то она сходится*;

2) если невозрастающая последовательность $\{x_n\}$ *ограничена снизу, то она сходится.*

[1] Словосочетания типа *монотонно возрастающая* (вместо *возрастающая*) являются избыточными, поскольку *возрастание* уже есть проявление *монотонности* (греч. *μονοτονος — однообразный*.

Доказательство (к примеру, пункта *1*). *Ограниченность сверху* последовательности $\{x_n\} = x_1, x_2, \dots$ означает то же самое, что *ограниченность сверху* множества $\{x_1, x_2, \dots\}$ ее элементов.[1] Согласно *теореме существования точных граней* (см. с. 42) у множества $\{x_1, x_2, \dots\}$ есть *точная верхняя грань* — действительное число x со свойствами:

а) x является *верхней границей* этого множества: любой элемент множества $\{x_1, x_2, \dots\}$ *не больше* числа x;

б) любое число, *меньшее* x (а его можно записать в виде $x-\varepsilon$, где $\varepsilon > 0$), не является *верхней границей* этого множества: существует элемент $x_{n_0} \in \{x_1, x_2, \dots\}$, *превосходящий* это число[2].

Выполнение этих свойств, имеющих формульную запись

а) $\forall n (x_n \leqslant x)$ и *б)* $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 (x_n > x - \varepsilon)$,

влечет истинность утверждения

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n (n > n_0 \Rightarrow x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon),$$

т. е. *сходимость* последовательности $\{x_n\}$ к числу x.

Любая неограниченная монотонная последовательность является бесконечно большой. Точнее:
1) неограниченная неубывающая последовательность расходится к $+\infty$;
2) неограниченная невозрастающая последовательность расходится к $-\infty$.

Доказательство (к примеру, пункта *2*). *Неограниченная*

---

[1] Как отмечалось (см. с. 23), *последовательность* $\{x_n\} = x_1, x_2, \dots$ и *множество* $\{x_1, x_2, \dots\}$ ее элементов — это разные объекты (различающиеся так же как *график* функции $y = f(x)$ и его *проекция* на ось y): если $x_n = x_m$ (при $n \neq m$), то x_n и x_m — *различные* элементы *последовательности* $\{x_n\} = x_1, x_2, \dots$, представляющие *один и тот же* элемент *множества* $\{x_1, x_2, \dots\}$.

[2] А следовательно — ввиду *неубывания* последовательности $\{x_n\}$ — *превосходящими* число $x-\varepsilon$ оказываются и *все* элементы x_n с $n > n_0$.

невозрастающая последовательность $\{x_n\}$ является (в силу неравенств $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots x_n \geqslant x_{n+1} \geqslant \ldots$) *неограниченной снизу*. Каким бы ни было *положительное* число h, существует поэтому элемент x_{n_0} последовательности $\{x_n\}$, *меньший* числа $-h$, так что (ввиду *невозрастания* последовательности) $-h > x_{n_0} \geqslant x_{n_0+1} \geqslant x_{n_0+2} \geqslant \cdots$, и *истинным* оказывается утверждение $\forall h > 0 \exists n_0 \forall n (n > n_0 \Rightarrow x_n < -h)$. **Q.E.D.**

Примеры. *1*. Если $|q| < 1$, то $\{q^n\}$ – *бесконечно малая* последовательность.

Так как $|q| \geqslant |q|^2 \geqslant |q|^3 \geqslant \cdots \geqslant 0$, последовательность $\{|q|^n\}$ является *невозрастающей* и *ограниченной снизу*. Поэтому она *сходится* к некоторому числу x, к которому *сходится* и последовательность $\{|q|^{n+1}\}$ – последовательность $\{|q|^n\}$ с отброшенным первым элементом. Равенства

$$x = \lim_{n\to+\infty} |q|^n = \lim_{n\to+\infty} |q|^{n+1} = |q| \lim_{n\to+\infty} |q|^n = |q| x$$

позволяет сделать вывод: $x = 0$, т. е. последовательность $\{|q|^n\}$, а с ней (так как $|q|^n = |q^n|$) и последовательность $\{q^n\}$, являются *бесконечно малыми*.

2. Последовательность $\left\{\frac{n^k}{a^n}\right\}$ является *бесконечно малой* при любом $k = 1, 2, \ldots$ и любом a с $|a| > 1$, а последовательность $\left\{\frac{b^n}{n!}\right\}$ является *бесконечно малой* при любом b.

Обозначения $x_n = \left|\frac{n^k}{a^n}\right|$, $y_n = \left|\frac{b^n}{n!}\right|$ приводят к равенствам

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)^k}{n^k |a|} = \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^k \frac{1}{|a|}, \qquad \frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{|b|}{n+1},$$

из которых следует, что $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{|a|} < 1$, а $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{y_{n+1}}{y_n} = 0$. Как следствие для всех достаточно больших значений n выполняются неравенства $\frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$ и $\frac{y_{n+1}}{y_n} < 1$, т. е. обе последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ оказываются *убывающими* (во всяком случае, начиная с некоторого "номера"). Поскольку обе последовательности *ограничены снизу* (числом 0), они *схо-*

дятся к некоторым (неизвестным пока) числам: $\lim x_n = x$, $\lim y_n = y$. Так как к этим же числам x и y сходятся также последовательности $\{x_{n+1}\}$ и $\{y_{n+1}\}$, переход к пределам в равенствах $x_{n+1} = x_n\left(1+\frac{1}{n}\right)^k \frac{1}{|a|}$ и $y_{n+1} = y_n \frac{|b|}{n+1}$ позволяет заключить: $x = x\cdot 1^k \cdot \frac{1}{|a|}$, $y = y\cdot 0$, так что $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{n^k}{a^n}\right| = x = 0$ и $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{b^n}{n!}\right| = x = 0$, а следовательно $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^k}{a^n} = 0$ и $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{b^n}{n!} = 0$.

3. Каким бы ни было *положительное* число a, последовательность $\{x_n\}$, элементы которой определяются соотношением $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$ с произвольно взятым начальным элементом $x_1 > 0$, *сходится* к числу $\sqrt{a}$.

Из соотношения $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$ вытекают равенства

$$x_n - x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n - \frac{a}{x_n}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{(x_n^2 - a)}{x_n},$$

$$x_{n+1}^2 - a = \frac{1}{4}\left(x_n^2 + 2a + \frac{a^2}{x_n^2}\right) - a = \frac{1}{4}\,\frac{(x_n^2 - a)^2}{x_n^2},$$

позволяющие сделать следующие выводы:

если $x_1^2 = a$, то *все* элементы последовательности $\{x_n\}$ равны $\sqrt{a}$;

если $x_1^2 > a$ или же $x_1^2 < a$, то в *обоих* случаях $x_2^2 > a$;

$x_3 < x_2$, при этом $x_3^2 > a$;

$x_4 < x_3$, при этом $x_4^2 > a$;

вообще $x_{n+1} < x_n$ (причем $x_{n+1}^2 > a$) для любого $n \geqslant 2$.

Последовательность $\{x_n\}$, являясь *убывающей* и *ограниченной снизу* (поскольку все $x_n > 0$), *сходится* к некоторому числу x, к которому *сходится* и последовательность $\{x_{n+1}\}$ (последовательность $\{x_n\}$ с отброшенным первым элементом). Это приводит к соотношениям

$$x = \lim x_{n+1} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right),$$

в силу которых $x = \sqrt{a}$.

II.3. Предел каких последовательностей принят за число e

Пусть $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, а $y_n = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\dots+\frac{1}{n!}$, $n=1,2,\dots$ *Обе последовательности* $\{x_n\}$ *и* $\{y_n\}$ *сходятся к одному и тому же числу, обозначаемому* e.

Доказательство. Так как $y_{n+1} = y_n + \frac{1}{(n+1)!}$, последовательность $\{y_n\}$ является *возрастающей*, а так как

$$y_n = 1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}+\dots+\frac{1}{1\cdot 2\cdots n} \leqslant 1+1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{2^{n-1}} < 3,$$

то и *ограниченной сверху*. Поэтому существует число

$$y = \lim y_n = \lim\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\dots+\frac{1}{n!}\right) \leqslant 3.$$

Что касается последовательности $\{x_n\}$, то применение формулы *бинома Ньютона* (см. с. 26)[1] дает равенства

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+\frac{n}{1}\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\left(\frac{1}{n}\right)^2+\dots+\frac{n(n-1)\cdots 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdots(n-1)\cdot n}\left(\frac{1}{n}\right)^n =$$

$$= 1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}\frac{n-1}{n}+\dots+\frac{1}{1\cdot 2\cdots(n-1)\cdot n}\frac{(n-1)\cdots 2\cdot 1}{n^{n-1}},$$

из которых следует, что $x_n \leqslant 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\dots+\frac{1}{n!} = y_n \leqslant 3$. Переход же в них от n к $n+1$, *увеличивающий* как все (начиная с третьего) *слагаемые* в правой части, так и (на единицу) *число* этих слагаемых, показывает, что $x_n < x_{n+1}$. Следует вывод: *последовательность* $\{x_n\}$ *сходится к некоторому числу* x, *причем* $x = \lim x_n \leqslant \lim y_n = y$.

С другой стороны, взяв произвольно натуральное число k и оставив в правой части представления

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}\frac{n-1}{n}+\dots+\frac{1}{1\cdot 2\cdots(n-1)\cdot n}\frac{(n-1)\cdots 2\cdot 1}{n^{n-1}}$$

лишь первые $k+1$ слагаемых (считая, что $n > k$), можно прийти к соотношениям

[1] Если взять в ней $x=1$ и $a=\frac{1}{n}$.

$$x_n \geqslant 1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}\,\frac{n-1}{n}+\,\cdots\,+\frac{1}{1\cdot 2\cdots k}\,\frac{(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^{k-1}}=$$
$$=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\Big(1-\frac{1}{n}\Big)+\,\cdots\,+\frac{1}{k!}\Big(1-\frac{1}{n}\Big)\cdots\Big(1-\frac{k-1}{n}\Big),$$
а от них — переходом к пределу при $n\to+\infty$ и *произвольном*, но *фиксированном* k — к соотношениям
$$x=\lim x_n \geqslant 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{k!}=y_k,$$
дающим в пределе — на сей раз при $k\to+\infty$ — неравенство $x\geqslant y$. В соединении с ранее полученным неравенством $x\leqslant y$ это доказывает, что последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходятся к *одному и тому же* числу, для которого Эйлер ([**29**], § 122, с. 120) предложил обозначение e и нашел приближенное значение $2,71828\,18284\,59045\,23536\,028$.

Следующее утверждение, дающее оценку разности $e-y_n$, позволяет доказать *иррациональность* числа e.

> *При любом натуральном n справедливы неравенства*
> $$\frac{1}{(n+1)!}<e-\Big(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\Big)<\frac{1}{n!n}.$$

Доказательство. При любом натуральном n и $k=2,3,\ldots$ выполняются соотношения

а) $1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}=y_{n+1}<y_{n+2}\leqslant y_{n+k}$

и

б) $y_{n+k}-y_n=\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\cdots+\frac{1}{(n+k)!}=$
$$=\frac{1}{(n+1)!}\Big(1+\frac{1}{n+2}+\,\cdots\,+\frac{1}{(n+2)\cdots(n+k)}\Big)\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{(n+1)!}\Big(1+\frac{1}{n+2}+\,\cdots\,+\frac{1}{(n+2)^{k-1}}\Big)=\frac{1}{(n+1)!}\,\frac{1-\frac{1}{(n+2)^k}}{1-\frac{1}{n+2}}.$$

Переход в них к пределу при $k\to+\infty$ (и фиксированном n) дает:

а) $1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}<y_{n+2}\leqslant e$

и

б) $e-y_n\leqslant\frac{1}{(n+1)!}\frac{n+2}{n+1}<\frac{1}{n!n}$ (ввиду того, что $\frac{n+2}{n+1}<\frac{n+1}{n}$). **Q.E.D.**

Если допустить, что e — *рациональное* число $\big(e=\frac{m}{n}\big)$, то возникает *противоречие*: число $n!\Big(e-\Big(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\Big)\Big)$, заведомо являясь *целым*, одновременно оказывается заключенным между числами $\frac{1}{n+1}$ и $\frac{1}{n}$.

II.4. Что такое подпоследовательность, предельная точка последовательности

Подпоследовательностью заданной последовательности $\{x_n\} = x_1, x_2, \ldots$ *называют новую последовательность, обозначаемую* $\{x_{n_k}\}$, *элементами которой служат элементы исходной последовательности, но взятые не подряд, а с пропусками — согласно выбору возрастающей последовательности натуральных чисел ("номеров")* $\{n_k\} = n_1, n_2, \ldots$ [1].

Перебирая всевозможные *возрастающие* последовательности "номеров" $\{n_k\}$, получают всевозможные *подпоследовательности* $\{x_{n_k}\}$ последовательности $\{x_n\}$.[2]

Например, если $\{x_n\} = \{(-1)^n\} = -1, 1, -1, 1, -1, \ldots$, то

$\{x_{2n}\} = x_2, x_4, x_6, x_8, x_{10}, \ldots = 1, 1, 1, 1, 1, \ldots$;[3]

$\{x_{3n}\} = x_3, x_6, x_9, x_{12}, x_{15}, \ldots = -1, 1, -1, 1, -1, \ldots$;

$\{x_{2^n}\} = x_2, x_4, x_8, x_{16}, x_{32}, \ldots = 1, 1, 1, 1, 1, \ldots$;[4]

$\{x_{2^n-1}\} = x_1, x_3, x_7, x_{15}, x_{31}, \ldots = -1, -1, -1, -1, \ldots$;

$\{x_{n+[\frac{n}{2}]}\} = x_1, x_3, x_4, x_6, x_7, \ldots = -1, -1, 1, 1, -1, \ldots$ [5]

---

[1] Это означает, что $\{x_{n_k}\} = x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots$, т.е. *первым* элементом *подпоследовательности* $\{x_{n_k}\}$ является элемент последовательности $\{x_n\}$ с "номером" n_1, ее *вторым* элементом — элемент последовательности $\{x_n\}$ с "номером" n_2 и т.д. В частности, если $\{n_k\} = 1, 2, \ldots$, то подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ совпадает с исходной последовательностью $\{x_n\}$.

[2] Фразу не следует понимать буквально: *перебрать* (одну за другой) *все* возрастающие последовательности целых неотрицательных чисел *невозможно*, поскольку они составляют *несчетное* множество.

[3] В этом случае *возрастающая* последовательность "номеров" $\{n_k\}$ есть последовательность $2, 4, 6, \ldots$ всех *четных* натуральных чисел.

[4] Совпадающие между собой последовательности $\{x_{2n}\}$ и $\{x_{2^n}\}$ *различны* как *подпоследовательности* последовательности $\{(-1)^n\}$.

[5] $[\frac{n}{2}]$ — *целая часть* числа $\frac{n}{2}$ (см. с. 37).

Если последовательность $\{x_n\}$ *сходится*, то *сходится* (к тому же пределу) и любая ее подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$.[1] Может, однако, случиться, что *расходящаяся* последовательность $\{x_n\}$ имеет *сходящуюся* подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$.[2]

Если последовательность $\{x_n\}$ имеет подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, сходящуюся к некоторому числу x, то это число называют предельной точкой последовательности $\{x_n\}$ (или ее частичным пределом)[3].

Критерий[4] предельной точки. *Число[5] x является предельной точкой (частичным пределом) последовательности $\{x_n\}$ в том и только в том случае, когда любая окрестность точки x содержит бесконечно много элементов последовательности $\{x_n\}$ (или, что то же самое, элементы последовательности $\{x_n\}$ со сколь угодно большими "номерами")*; символически: $\boxed{\forall\varepsilon>0\forall n_0\exists n(n>n_0\wedge|x_n-x|<\varepsilon)}$.

Доказательство. Пусть x — *предельная точка* последовательности $\{x_n\}$, т. е. *предел* некоторой ее *подпоследовательности* $\{x_{n_k}\}$. По определению *предела* это означает, что в любую окрестность точки x попадают *все* элементы *подпоследовательности* $\{x_{n_k}\}$, начиная с некоторого "номера", а потому эта окрестность содержит элементы последовательности $\{x_n\}$ со *сколь угодно большими* "номерами".

Пусть, наоборот, истинно утверждение

[1] Если истинно утверждение $\forall\varepsilon>0\exists n_0\forall n(n>n_0\Rightarrow|x_n-x|<\varepsilon)$, то (так как $n_k\geqslant k$) истинно утверждение $\forall\varepsilon>0\exists n_0\forall k(k>n_0\Rightarrow|x_{n_k}-x|<\varepsilon)$.

[2] Так же как *немонотонная* последовательность — *монотонную* подпоследовательность.

[3] Для *сходящейся* последовательности понятия *предельной точки* (*частичного предела*) и *предела* совпадают.

[4] Греч. *κριτήριον — признак, по которому можно судить верно.*

[5] *Действительное* или *мнимое* (изображаемое *точкой* на *числовой оси* или *комплексной плоскости*).

$$\forall\varepsilon > 0 \forall n_0 \exists n (n > n_0 \wedge |x_n - x| < \varepsilon).$$

"Прочтение" этой формулы дает:

для $\varepsilon = 1$ и $n_0 = 1$ существует такое значение $n > 1$ (обозначаемое n_1), что $|x_{n_1} - x| < 1$;

для $\varepsilon = \frac{1}{2}$ и $n_0 = n_1$ существует такое значение $n > n_1$ (обозначаемое n_2), что $|x_{n_2} - x| < \frac{1}{2}$;

для $\varepsilon = \frac{1}{3}$ и $n_0 = n_2$ существует такое значение $n > n_2$ (обозначаемое n_3), что $|x_{n_3} - x| < \frac{1}{3}$ и так далее.

Таким образом из последовательности $\{x_n\}$ выделяется *подпоследовательность* $\{x_{n_k}\}$, обладающая тем свойством, что $|x_{n_k} - x| < \frac{1}{k}$, $k = 1, 2, \ldots$, и в силу этого *сходящаяся* к числу x. Число x, оказываясь *пределом* подпоследовательности $\{x_{n_k}\}$, является *частичным пределом* последовательности $\{x_n\}$. **Q.E.D.**

Главным утверждением, связанным с *подпоследовательностями* и *предельными точками* (*частичными пределами*) числовых последовательностей является следующее.

Теорема Больца́но–Ве́йерштрасса[1]. *Любая ограниченная последовательность*[2] *имеет предельную точку.*

---

[1] Ее название объясняется тем, что она почти напрямую следует из *теоремы о существовании точных граней* (см. с. 42), установленной Больцано в 1817 г. Имя же немецкого математика Ве́йерштрасса (Weierstrass Karl, 1815–1897) часто встречается в названиях теорем во многом благодаря знаменитым лекциям по анализу, которые читал в 1856–1861 гг. в Берлинском университете и Промышленном институте (Gewerbeinstitut) и в которых он дал переосмысление и ставшие общепринятыми формулировки базовых понятий и фактов анализа. Эти лекции не были оформлены Вейерштрассом в виде обстоятельного учебника и получили известность стараниями его учеников, ведших их записи (подробнее об этом в [**39**]).

[2] Речь идет о последовательностях *действительных* чисел, хотя теорема верна и для последовательностей *комплексных* чисел.

Эквивалентная формулировка теоремы: *любая ограниченная последовательность имеет сходящуюся подпоследовательность.*

<u>*Доказательство.*</u> Согласно определению (см. с. 67) *ограниченность* последовательности[1] $\{x_n\}$ означает существование *отрезка* $[a,b]$, содержащего *все* элементы этой последовательности: $\exists a \exists b \forall n (a \leqslant x_n \leqslant b)$.

Пусть X — множество тех действительных чисел, *справа* от которых (на числовой оси) лежит *бесконечно много* элементов последовательности $\{x_n\}$. Множество X *непусто* (ему принадлежит любое число, меньшее a) и *ограничено сверху* (например, числом b), так что по *теореме о существовании точных граней* (см. с. 42) существует число $\overline{x} = \sup X$. Остается доказать, что число $\overline{x}$ является *предельной точкой* последовательности $\{x_n\}$.

Пусть ε — любое (сколь угодно малое) *положительное* число. Согласно определению *точной верхней грани* (см. с. 41) любой элемент множества X *не превосходит* числа $\overline{x}$, так что $\overline{x}+\frac{\varepsilon}{2} \notin X$, а потому *справа* от числа $\overline{x}+\frac{\varepsilon}{2}$ может находиться лишь *конечное* число элементов последовательности $\{x_n\}$ (либо их нет совсем). С другой стороны, число $\overline{x}-\varepsilon$ не является *верхней границей* множества X, а потому *справа* от него *есть* элемент $x \in X$ (*справа* от которого, а следовательно, *справа* от числа $\overline{x}-\varepsilon$ лежит *бесконечно много* элементов последовательности $\{x_n\}$). Сопоставление этих фактов показывает: интервал $(\overline{x}-\varepsilon, \overline{x}+\varepsilon)$ при любом $\varepsilon > 0$ содержит *бесконечно много* элементов последовательности $\{x_n\}$, а следовательно, $\overline{x}$ (согласно *критерию* на с. 84) есть *предельная точка* этой последовательности (т. е. *предел* некоторой ее *подпоследовательности*). **Q.E.D.**

---

[1] *Действительных* чисел.

II.5. Что понимают под верхним и нижним пределами последовательности

Для произвольно взятой последовательности[1] $\{x_n\}$ пусть X — множество тех действительных чисел, *справа* от которых (на числовой оси) лежит *бесконечно много* элементов этой последовательности. *Точная верхняя грань* этого множества X есть то, что называют *верхним пределом* последовательности $\{x_n\}$ с обозначением его $\overline{\lim}\, x_n$ или $\lim\sup x_n$.[2]

Возможны три случая:

1) множество X *пусто*;

2) множество X *непусто* и *ограничено сверху*;

3) множество X *не ограничено сверху*.

Соответственно этим случаям:

1) $\overline{\lim}\, x_n = \sup X = -\infty$ (см. с. 43);

2) $\overline{\lim}\, x_n = \sup X$ есть некое *действительное* число $\overline{x}$;

3) $\overline{\lim}\, x_n = \sup X = +\infty$ (см. с. 43).

В *первом* случае *справа* от любого действительного числа (на числовой оси) может находиться лишь *конечное* число элементов последовательности $\{x_n\}$ (либо их нет совсем), а потому в любой *промежуток* вида $(-\infty, a)$ — то, что называют *окрестностью элемента* $-\infty$ — попадают *все* элементы последовательности $\{x_n\}$, начиная с некоторого, а это означает (см. с. 75), что $\lim x_n = -\infty$.

Во *втором* случае любая *окрестность* числа[3] $\overline{x}$ — *интервал* вида $(\overline{x}-\varepsilon, \overline{x}+\varepsilon)$ — содержит *бесконечно много* элементов последовательности $\{x_n\}$, тогда как *справа* от лю-

---

[1] *Действительных* чисел.

[2] Доказательство *теоремы Больцано–Вейерштрасса* (см. с. 86) по сути было доказательством того, что любая *ограниченная* последовательность (*действительных* чисел) имеет *верхний предел*.

[3] Точнее, изображающей его *точки* числовой оси.

бого такого *интервала* их может быть лишь *конечное* число (или нет совсем)[1]; фактически это означает, что число $\overline{x} = \overline{\lim}\, x_n$ оказывается *наибольшей предельной точкой* последовательности $\{x_n\}$.

В *третьем* случае любой *промежуток* вида $(a, +\infty)$ — то, что называют *окрестностью элемента* $+\infty$ — содержит *бесконечно много* элементов последовательности $\{x_n\}$, а следовательно, существует *подпоследовательность* $\{x_{n_k}\}$, *расходящаяся к* $+\infty$ $(\overline{\lim}\, x_n = \lim x_{n_k} = +\infty)$.[2]

Двойственным по отношению к *верхнему пределу* является понятие *нижнего предела* последовательности $\{x_n\}$, обозначаемого символами $\underline{\lim}\, x_n$ и $\liminf x_n$ и определяемого как *точная нижняя грань* множества тех действительных чисел, *слева* от которых (на числовой оси) лежит *бесконечно много* элементов последовательности $\{x_n\}$.

Подобно тому, как это имело место для *верхнего предела*, возможны три случая:

1) $\underline{\lim}\, x_n = +\infty$ — если *нет* действительных чисел, *слева* от которых (на числовой оси) находилось бы *бесконечно*

---

[1] Для обоснования этого достаточно заметить, что (в соответствии с определением множества X) *справа* от числа $\overline{x}+\frac{\varepsilon}{2}$ может лежать лишь *конечное* число элементов последовательности $\{x_n\}$ (либо их нет совсем), тогда как *справа* от числа $\overline{x}-\varepsilon$ есть элемент множества X, а потому *справа* от него лежит *бесконечно много* элементов последовательности $\{x_n\}$.

[2] Обычно это выражают словами: *элемент* $+\infty$ *есть бесконечная предельная точка* (*или бесконечный частичный предел*) *последовательности* $\{x_n\}$. Для построения такой *подпоследовательности* достаточно (пользуясь тем, что любой *промежуток* $(a, +\infty)$ содержит *бесконечно много* элементов последовательности $\{x_n\}$) взять в качестве x_{n_1} любой элемент последовательности $\{x_n\}$, лежащий в промежутке $(1, +\infty)$, в качестве x_{n_2} — любой элемент последовательности $\{x_n\}$ с “номером” $n_2 > n_1$, лежащий в промежутке $(2, +\infty)$ и т. д.

много элементов последовательности $\{x_n\}$; это означает, что любой *промежуток* $(a, +\infty)$ (любая *окрестность* элемента $+\infty$) содержит *все* элементы последовательности $\{x_n\}$, начиная с некоторого, т. е. $\lim x_n = +\infty$;

2) $\underline{\lim}\, x_n$ есть некое действительное число $\underline{x}$ — если множество тех действительных чисел, *слева* от которых (на числовой оси) лежит *бесконечно много* элементов последовательности $\{x_n\}$, *непусто* и *ограничено снизу*; в этом случае любой *интервал* $(\underline{x} - \varepsilon, \underline{x} + \varepsilon)$ — *ε-окрестность* числа $\underline{x}$ — содержит *бесконечно много* элементов последовательности $\{x_n\}$, тогда как *слева* от любого такого *интервала* их может быть лишь *конечное* число (или нет совсем); по сути это означает, что число $\underline{x} = \underline{\lim}\, x_n$ есть *наименьшая* из всех *предельных точек* последовательности $\{x_n\}$;

3) $\underline{\lim}\, x_n = -\infty$ — если *слева* от *любого* действительного числа лежит *бесконечно много* элементов последовательности $\{x_n\}$, а следовательно, существует *подпоследовательность* $\{x_{n_k}\}$, *расходящаяся к* $-\infty$ $(\underline{\lim}\, x_n = \lim x_{n_k} = -\infty)$[1].

Выводы:

1. *Верхний* и *нижний пределы* (возможно, *бесконечные*) имеет *любая* последовательность действительных чисел[2].

2. *Верхний* (соответственно, *нижний*) *предел* последовательности $\{x_n\}$ (будь он *конечным* или *бесконечным*) обладает следующим свойством: любая его *окрестность* (на числовой оси) содержит *бесконечно много* элементов этой последовательности, тогда как *справа* (соответственно, *слева*) от любой такой *окрестности* этих элементов может быть лишь *конечное* число (или нет совсем).

---

[1] Иначе говоря, *элемент* $-\infty$ *есть бесконечная предельная точка* (*или бесконечный частичный предел*) *последовательности* $\{x_n\}$.

[2] В то время как *предел* (конечный или бесконечный) существует не для всякой последовательности.

(По сути это означает, что *верхний* и *нижний пределы* последовательности являются соответственно *наибольшим* и *наименьшим* из ее *частичных пределов*.)

3. Существование *предела* (конечного или бесконечного) для последовательности $\{x_n\}$ действительных чисел равносильно *совпадению* ее *верхнего* и *нижнего пределов*, при этом $\lim x_n = \overline{\lim}\, x_n = \underline{\lim}\, x_n$.

Следует подчеркнуть различие понятий *верхнего* и *нижнего пределов* последовательности ($\overline{\lim}\, x_n$ и $\underline{\lim}\, x_n$) и *точной верхней* и *точной нижней граней* множества ее элементов (кратко обозначаемых $\sup x_n$ и $\inf x_n$)[1]. Например:

для последовательности $\{x_n\} = \left\{1 - \frac{(-1)^n}{n}\right\}$
$\sup x_n = x_1 = 2,\quad \inf x_n = x_2 = \frac{1}{2},\quad \overline{\lim}\, x_n = \underline{\lim}\, x_n = \lim x_n = 1;$

для последовательности $\{x_n\} = \left\{(-1)^n - \frac{1}{n}\right\}$
$\sup x_n = 1,\quad \inf x_n = x_1 = -2,\quad \overline{\lim}\, x_n = 1,\quad \underline{\lim}\, x_n = -1;$

для последовательности $\{x_n\} = \left\{n^{(-1)^n} - \frac{2}{n}\right\}$
$\sup x_n = +\infty,\quad \inf x_n = x_1 = -1,\quad \overline{\lim}\, x_n = +\infty,\quad \underline{\lim}\, x_n = 0.$

Понятия *верхнего* и *нижнего пределов* последовательности (хотя и без употребления самих этих терминов) были введены Гауссом в заметке на с. 390–395 тома X его собрания сочинений [**40**]. Согласно его определению (эквивалентному данному выше) *верхний* и *нижний пределы* последовательности $\{x_n\}$ — это соответственно

$$\lim_{n\to+\infty} \sup\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots\} \ \text{ и } \ \lim_{n\to+\infty} \inf\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots\}.$$[2]

Основную роль здесь играет тот факт, что последовательности $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$ чисел (возможно, *бесконечных*)

$$u_n = \sup\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots\} \ \text{ и } \ v_n = \inf\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots\}$$

являются соответственно *невозрастающей* и *неубывающей*.

---

[1] Вместо $\sup\{x_1, x_2, \ldots\}$ и $\inf\{x_1, x_2, \ldots\}$.

[2] Отсюда и происходят альтернативные обозначениям $\overline{\lim}\, x_n$ и $\underline{\lim}\, x_n$ обозначения *верхнего* и *нижнего пределов* $\lim\sup x_n$ и $\lim\inf x_n$.

II.6. В чем состоит критерий Коши

Последовательность $\{x_n\}$ *называют* *фундаментальной*, *если истинно утверждение*: *каково бы ни было положительное число* ε, *существует такое целое неотрицательное число* n_0, *что любые два элемента последовательности* $\{x_n\}$ *с "номерами", бо́льшими, чем* n_0, *различаются между собой меньше, чем на* ε: $\boxed{\forall\varepsilon>0\,\exists n_0\forall n\forall k\,(n>n_0\Rightarrow|x_n-x_{n+k}|<\varepsilon)}$[1].

Критерий Коши́[2]. *Для того чтобы последовательность*[3] $\{x_n\}$ *была сходящейся, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.*

Доказательство. *1. Необходимость.* Пусть последовательность[3] $\{x_n\}$ *сходится* (к некоторому числу x). Взяв любое положительное число ε, можно утверждать (поскольку $\lim x_n=x$), что в $\frac{\varepsilon}{2}$-окрестность числа x попадают все элементы x_n с "номерами", бо́льшими некоторого n_0. Следовательно, для любого $n>n_0$ и любого натурального k будут выполняться соотношения

$$|x_n-x_{n+k}|=|x_n-x+x-x_{n+k}|\leqslant|x_n-x|+|x-x_{n+k}|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2},$$

что и доказывает *истинность* для последовательности $\{x_n\}$ утверждения $\forall\varepsilon>0\,\exists n_0\forall n\forall k\,(n>n_0\Rightarrow|x_n-x_{n+k}|<\varepsilon)$.

---

[1] Иногда более удобна эквивалентная запись (с использованием обозначения $n+k=m$):

$$\boxed{\forall\varepsilon>0\,\exists n_0\forall n\forall m\,(n>n_0\wedge m>n_0\Rightarrow|x_n-x_m|<\varepsilon)}.$$

[2] Более правильное его название — *критерий Больцано–Коши*: Больцано привел его *с доказательством* в своей знаменитой работе 1817 г. (указанной на с. 42), тогда как у Коши он впервые встречается (причем без доказательства) в вышедшем четырьмя годами позднее "Курсе анализа" [**34**].

[3] *Действительных* или *мнимых* чисел.

2. Достаточность. Пусть $\{x_n\}$ — последовательность *действительных* чисел, и для нее *истинно* утверждение, выражаемое *формулой* $\forall\varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n \forall k (n > n_0 \Rightarrow |x_n - x_{n+k}| < \varepsilon)$. Взяв *какое-либо* значение $\varepsilon = \varepsilon_0 > 0$ и считая, что n_0 есть то целое неотрицательное число, которое (согласно *формуле*) *существует* для значения $\varepsilon = \varepsilon_0$, можно утверждать:

$$|x_n - x_{n_0+1}| < \varepsilon_0 \text{ для всех } n > n_0,$$

а следовательно, для всех таких значений n

$$|x_n| = |x_n - x_{n_0+1} + x_{n_0+1}| \leqslant |x_n - x_{n_0+1}| + |x_{n_0+1}| < |x_{n_0+1}| + \varepsilon_0 .$$

Обозначая *c наибольшее* из чисел

$$|x_1|, \ \ldots \ , |x_{n_0}|, |x_{n_0+1}| + \varepsilon_0 ,$$

можно утверждать теперь, что $|x_n| \leqslant c$ при *всех* $n = 1, 2, \ \ldots$, т. е. последовательность $\{x_n\}$ оказывается *ограниченной.*

По *теореме Больцано–Вейерштрасса* (см. с. 85) последовательность $\{x_n\}$, являясь *ограниченной*, имеет *предельную точку* — число x, любая *окрестность* которого (на числовой оси) содержит элементы последовательности $\{x_n\}$ со *сколь угодно большими* "номерами". Остается доказать, что число x на самом деле есть *предел* последовательности $\{x_n\}$, т. е. *истинно* утверждение $\forall\varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n (n > n_0 \Rightarrow |x_n - x| < \varepsilon)$.

Пусть ε — любое *положительное* число. Так как последовательность $\{x_n\}$ *фундаментальна*, для числа $\frac{\varepsilon}{2}$ существует такое *натуральное* число (которое можно обозначить n_1), что любые два элемента последовательности $\{x_n\}$ с "номерами", *превосходящими* n_1, отстоят друг от друга меньше, чем на $\frac{\varepsilon}{2}$. Взяв в $\frac{\varepsilon}{2}$-окрестности числа x элемент последовательности $\{x_n\}$ с "номером" $n_0 > n_1$ (а такой существует, поскольку x — *предельная точка* последовательности $\{x_n\}$), можно утверждать: если $n > n_0$, то

$$|x_n - x| = |x_n - x_{n_0} + x_{n_0} - x| \leqslant |x_n - x_{n_0}| + |x_{n_0} - x| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon ,$$

а следовательно, $x = \lim x_n$.

Пусть теперь $\{z_n\}=\{x_n+iy_n\}$ — *фундаментальная* последовательность *комплексных* чисел, т. е. *истинно* утверждение $\forall\varepsilon>0\,\exists n_0\forall n\forall k\,(n>n_0\Rightarrow|z_n-z_{n+k}|<\varepsilon)$. Так как

$$|z_n-z_{n+k}|=\sqrt{(x_n-x_{n+k})^2+(y_n-y_{n+k})^2}\geqslant\begin{cases}|x_n-x_{n+k}|\\|y_n-y_{n+k}|\end{cases},$$

истинными оказываются и утверждения

$$\forall\varepsilon>0\,\exists n_0\forall n\forall k\,(n>n_0\Rightarrow|x_n-x_{n+k}|<\varepsilon),$$
$$\forall\varepsilon>0\,\exists n_0\forall n\forall k\,(n>n_0\Rightarrow|y_n-y_{n+k}|<\varepsilon),$$

т. е. *фундаментальными* оказываются последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ *действительных* чисел. По уже доказанному эти последовательности *сходятся* к некоторым числам x и y, а следовательно, *сходится* — к числу $z=x+iy$ — и последовательность $\{z_n\}=\{x_n+iy_n\}$.[1] **Q.E.D.**

Примеры. *1*. Последовательность

$$\Big\{1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\Big\}=1,\ 1+\frac{1}{2^2},\ 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2},\ 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2},\ \ldots$$

сходится. Для доказательства следует, обозначив элементы последовательности x_n, воспользоваться соотношениями

$$|x_n-x_{n+k}|=\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+k)^2}<$$
$$<\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots+\frac{1}{(n+k-1)(n+k)}=$$
$$=\Big(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\Big)+\Big(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\Big)+\cdots+\Big(\frac{1}{n+k-1}-\frac{1}{n+k}\Big)=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+k}<\frac{1}{n},$$

---

[1] Пусть ε — любое *положительное* число. Поскольку $\lim x_n=x$, а $\lim y_n=y$, для числа $\frac{\varepsilon}{\sqrt2}$ (как и для любого *положительного* числа) существуют такие *натуральные* числа n_1 и n_2, что $|x_n-x|<\frac{\varepsilon}{\sqrt2}$ при $n>n_1$, а $|y_n-y|<\frac{\varepsilon}{\sqrt2}$ при $n>n_2$. Но тогда

$$|z_n-z|=|(x_n+iy_n)-(x+iy)|=\sqrt{(x_n-x)^2+(y_n-y)^2}<\varepsilon$$

при любом $n>n_0$, где n_0 — *наибольшее* из чисел n_1,n_2. Следовательно, *истинно* утверждение $\forall\varepsilon>0\,\exists n_0\forall n\,(n>n_0\Rightarrow|z_n-z|<\varepsilon)$, т. е. $\lim z_n=z$.

из которых следует, что если для любого числа $\varepsilon>0$ взять в качестве n_0 *натуральное* число, *превосходящее* $\frac{1}{\varepsilon}$, то для любых *натуральных* чисел $n>n_0$ и $k=1,2,3,\ \ldots$ будет выполняться неравенство $|x_n-x_{n+k}|<\varepsilon$, т. е. *истинным* оказывается утверждение $\forall\varepsilon>0\exists n_0\forall n\forall k(n>n_0\Rightarrow|x_n-x_{n+k}|<\varepsilon)$, и остается воспользоваться *критерием Коши*.

2. Последовательность

$\left\{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right\}=1,\ 1+\frac{1}{2},\ \ 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3},\ \ 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4},\ \ldots$

расходится. Для того чтобы это доказать, используя *критерий Коши*, следует предварительно составить *формульную запись* утверждения *“последовательность* $\{x_n\}$ *не является фундаментальной”* — построив (по обычным правилам[1]) *отрицание формулы* $\forall\varepsilon>0\exists n_0\forall n\forall k(n>n_0\Rightarrow|x_n-x_{n+k}|<\varepsilon)$, приходя к следующей:

$$\boxed{\exists\varepsilon>0\forall n_0\exists n\exists k(n>n_0\wedge|x_n-x_{n+k}|\geqslant\varepsilon)}.$$

Доказать, что для последовательности $\{x_n\}=\left\{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right\}$ значение последней *формулы* есть *истина*, можно выбором для произвольно взятого *натурального* числа n_0 значений $n=n_0$ и $k=n_0$. При таком выборе этих значений

$$|x_n-x_{n+k}|=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+k}=$$
$$=\frac{1}{n_0+1}+\frac{1}{n_0+2}+\cdots+\frac{1}{n_0+n_0}\geqslant n_0\,\frac{1}{n_0+n_0}$$

(число складываемых дробей равно n_0, а *наименьшей* из них является *последняя*), так что *истинность* утверждения $\exists\varepsilon>0\forall n_0\exists n\exists k(n>n_0\wedge|x_n-x_{n+k}|\geqslant\varepsilon)$ для данной последовательности установлена[2].

---

[1] См. *Приложение I*.

[2] Достаточно взять, как только что показано, $\varepsilon=\frac{1}{2}$ и (каково бы ни было n_0) $n=k=n_0$.

Наиболее эффективным (и об этом свидетельствуют разобранные примеры) является применение *критерия Коши* к важнейшей разновидности последовательностей — *рядам.*

Обозначаемый $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ или $a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots$ *ряд*, составленный из элементов последовательности $\{a_n\}$ (служащих *слагаемыми* этого *ряда*) — это *последовательность*

$\{a_1+\cdots+a_n\} = a_1,\ a_1+a_2,\ a_1+a_2+a_3,\ \ldots,\ a_1+a_2+\cdots+a_n,\ \ldots,$

элементы которой называют *частичными суммами* данного *ряда*[1].

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ называют *сходящимся* или *расходящимся* в зависимости от того, *сходится* или *расходится* последовательность *частичных сумм* этого *ряда*, причем *предел* этой последовательности (в случае ее *сходимости*) принимают за *сумму* данного *ряда* (с обозначением ее тем же символом, что и сам *ряд*)[2]: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n \stackrel{\text{def}}{=} \lim\limits_{n\to+\infty}(a_1+\cdots+a_n)$.[3]

Вот примеры *рядов*, изучаемых в средней школе:

1) сумма "бесконечно убывающей" геометрической прогрессии: если $|q|<1$, то

$$a_0+a_0q+\cdots+a_0q^{n-1}+\cdots \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n\to+\infty} a_0(1+q+\cdots+q^{n-1}) = \lim_{n\to+\infty}\frac{a_0(1-q^n)}{1-q} = \frac{a_0}{1-q};$$

2) бесконечная десятичная дробь $n_0,n_1n_2\ldots n_k\ldots$ (см. с. 37–38): представляемое ею *действительное число* есть *сумма ряда*

$$n_0+\frac{n_1}{10}+\frac{n_2}{10^2}+\frac{n_3}{10^3}+\cdots = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{n_k}{10^k} = \lim_{k\to+\infty}\Big(n_0+\frac{n_1}{10}+\frac{n_2}{10^2}+\cdots+\frac{n_k}{10^k}\Big).$$

---

[1] Нередко "нумерацию" *слагаемых* ряда начинают с *целого неотрицательного* числа $m\neq 1$, записывая *ряд* как $\sum\limits_{n=m}^{+\infty} a_n$, а его *частичные суммы* как $a_m,\ a_m+a_{m+1},\ a_m+a_{m+1}+a_{m+2},\ \ldots$ Вместо термина "ряд" российские математики XIX в. использовали термин "строка".

[2] Подобно тому как *одним символом* $f(x)$ обозначают *функцию* переменной x и ее *значения* при конкретных значениях x.

[3] Тем самым понятие *суммы*, изначально определенное лишь для *конечного* числа слагаемых, распространяется на случай, когда слагаемые образуют *последовательность*.

II.7. Как определяют экспоненту числа

Для *комплексного* числа z и $n=0,1,2,\ \ldots$ пусть

$$s_n(z)=1+\frac{z}{1!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}.$$

Определение экспоненты. *Каково бы ни было комплексное число* z (*действительное или мнимое*), *последовательность* $\{s_n(z)\}=1,\ 1+\frac{z}{1!},\ 1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!},\ 1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!},\ \ldots$ *сходится* к *некоторому* (*комплексному*) *числу, которое называют* <u>*экспонентой*</u> *числа* z *и обозначают* $\exp z$:

$$\boxed{\exp z \overset{\text{def}}{=} \lim_{n\to+\infty}\Big(1+\frac{z}{1!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}\Big)}.^1$$

В частности, $\exp 0=1$, $\exp 1=e$ (см. с. 81), а значение $\exp i$ графически представлено на рис. 5.

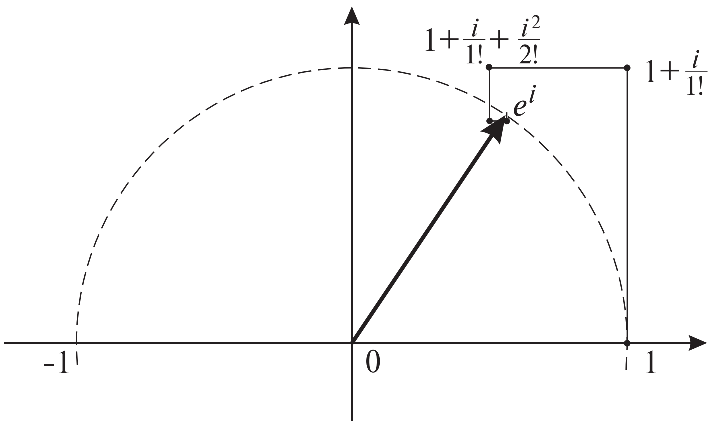


Рис. 5

[1] А с привлечением понятия *суммы ряда* (см. с. 95) $\exp z \overset{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}$.

<u>*Доказательство*</u>. Ввиду *критерия Коши* (см. с. 91) достаточно доказать, что для произвольно взятого (но *фиксированного*) *комплексного* числа z последовательность комплексных чисел $\{s_n(z)\}$ является *фундаментальной*, т. е. для нее *истинно* утверждение

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n \forall k (n > n_0 \Rightarrow |s_n(z) - s_{n+k}(z)| < \varepsilon).$$

Пусть ε — любое *положительное* число. Так как обе последовательности $\left\{\frac{|z|}{n+1}\right\}$ и $\left\{\frac{|z|^n}{n!}\right\}$ являются *бесконечно малыми*[1], существует такое натуральное число n_0, что при $n > n_0$ выполняются неравенства $\frac{|z|^n}{n!} < \varepsilon$ и $\frac{|z|}{n+1} < \frac{1}{2}$, из которых следует, что для любого натурального k

$$|s_n(z) - s_{n+k}(z)| = \left|\left(1 + \frac{z}{1!} + \cdots + \frac{z^n}{n!}\right) - \left(1 + \frac{z}{1!} + \cdots + \frac{z^{n+k}}{(n+k)!}\right)\right| =$$

$$= \left|\frac{z^{n+1}}{(n+1)!} + \cdots + \frac{z^{n+k}}{(n+k)!}\right| \leqslant \frac{|z|^n}{n!}\left(\frac{|z|}{n+1} + \cdots + \frac{|z|^k}{(n+1)\cdots(n+k)}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{|z|^n}{n!}\left(\frac{|z|}{n+1} + \cdots + \frac{|z|^k}{(n+1)^k}\right) \leqslant \frac{|z|^n}{n!} \frac{\frac{|z|}{n+1}}{1 - \frac{|z|}{n+1}} < \varepsilon.^2 \quad \textbf{Q.E.D.}$$

Основное тождество для экспоненты. *Для любых комплексных чисел z, ζ (действительных или мнимых)*

$$\boxed{\exp(z + \zeta) = \exp z \exp \zeta}.$$

<u>*Доказательство*</u>. В обозначении $s_n(z) = \left(1 + \frac{z}{1!} + \cdots + \frac{z^n}{n!}\right)$

$$s_1(z)\, s_1(\zeta) = \left(1 + \frac{z}{1!}\right)\left(1 + \frac{\zeta}{1!}\right) = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{\zeta}{1!} + \frac{z}{1!}\frac{\zeta}{1!} = 1 + \frac{z+\zeta}{1!} + \frac{2z\zeta}{2!} =$$

$$= s_1(z+\zeta) + \frac{\text{неполное выражение для } (z+\zeta)^2}{2!},$$

[1] См. разбор примеров на с. 65, 79.

[2] Была использована формула *суммы геометрической прогрессии* со знаменателем $\frac{|z|}{n+1} < \frac{1}{2}$.

из чего следует, что

$$|s_1(z)s_1(\zeta) - s_1(z+\zeta)| \leqslant \frac{\text{неполное выражение для } (|z|+|\zeta|)^2}{2!} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{(|z|+|\zeta|)^2}{2!} = s_2(|z|+|\zeta|) - s_1(|z|+|\zeta|).$$

Подобно этому в случае любого n

$$s_n(z)s_n(\zeta) = \Big(1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}\Big)\Big(1+\frac{\zeta}{1!}+\frac{\zeta^2}{2!}+\cdots+\frac{\zeta^n}{n!}\Big) =$$

$$= 1+\Big(\frac{z}{1!}+\frac{\zeta}{1!}\Big)+\cdot\cdot\cdot\cdot+\Big(\frac{z^n}{n!}+\frac{z^{n-1}\zeta}{(n-1)!1!}+\cdots+\frac{z\zeta^{n-1}}{1!(n-1)!}+\frac{\zeta^n}{n!}\Big)+$$

$$+\Big(\frac{z^n\zeta}{n!1!}+\frac{z^{n-1}\zeta^2}{(n-1)!2!}+\cdots+\frac{z^2\zeta^{n-1}}{2!(n-1)!}+\frac{z\zeta^n}{1!n!}\Big)+\cdot\cdot\cdot\cdot+\frac{z^n\zeta^n}{n!n!} =$$

$$= 1+\frac{z+\zeta}{1!}+\cdot\cdot\cdot\cdot+\frac{z^n+C_n^1z^{n-1}\zeta+\cdots+C_n^{n-1}z\zeta^{n-1}+\zeta^n}{n!}+$$

$$+\frac{C_{n+1}^1z^n\zeta+C_{n+1}^2z^{n-1}\zeta^2+\cdots+C_{n+1}^nz\zeta^n}{(n+1)!}+\cdot\cdot\cdot\cdot+\frac{C_{2n}^nz^n\zeta^n}{(2n)!} =$$

$$= 1+\frac{z+\zeta}{1!}+\cdots+\frac{(z+\zeta)^n}{n!}+\frac{\text{неполное выражение для } (z+\zeta)^{n+1}}{(n+1)!}+$$

$$+\cdot\cdot\cdot\cdot+\frac{\text{неполное выражение для } (z+\zeta)^{2n}}{(2n)!},$$

а поэтому

$$|s_n(z)s_n(\zeta) - s_n(z+\zeta)| \leqslant \frac{\text{неполное выражение для } (|z|+|\zeta|)^{n+1}}{(n+1)!}+$$

$$+\cdot\cdot\cdot\cdot+\frac{\text{неполное выражение для } (|z|+|\zeta|)^{2n}}{(2n)!} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{(|z|+|\zeta|)^{n+1}}{(n+1)!}+\cdot\cdot\cdot\cdot+\frac{(|z|+|\zeta|)^{2n}}{(2n)!} = s_{2n}(|z|+|\zeta|)-s_n(|z|+|\zeta|).$$

Но по *определению экспоненты* (см. с. 96) последовательности $\{s_n(z)\}$, $\{s_n(\zeta)\}$ и $\{s_n(z+\zeta)\}$ *сходятся* соответственно к *числам* $\exp z$, $\exp\zeta$ и $\exp(z+\zeta)$, а (обе) последовательности $\{s_n(|z|+|\zeta|)\}$ и $\{s_{2n}(|z|+|\zeta|)\}$ — к *числу* $\exp(|z|+|\zeta|)$. Как следствие, последовательность $\{s_n(|z|+|\zeta|) - s_{2n}(|z|+|\zeta|)\}$, а вместе с ней[1] и последовательность $\{s_n(z)s_n(\zeta) - s_n(z+\zeta)|\}$ являются *бесконечно малыми*, поэтому

$$\exp z \exp\zeta - \exp(z+\zeta) = \lim_{n\to+\infty}\big(s_n(z)s_n(\zeta) - s_n(z+\zeta)\big) = 0. \quad \textbf{Q.E.D.}$$

> *1.* $\exp z \exp(-z) = 1$ (*в частности*, $\exp z \neq 0$) *для любого комплексного числа* z (*действительного или мнимого*).
>
> *2.* $\exp(z-\zeta) = \dfrac{\exp z}{\exp\zeta}$ *для любых комплексных* z, ζ.

<u>*Доказательство*</u>. *1.* В силу *основного тождества для экспоненты* $\exp z\exp(-z) = \exp(z+(-z)) = \exp 0 = 1$.

2. $\exp z = \exp(z-\zeta+\zeta) = \exp(z-\zeta)\exp\zeta$. **Q.E.D.**

Из сопоставления определений *экспоненты* и числа e (см. с. 81) следует, что $\exp 1 = \lim\limits_{n\to+\infty}\Big(1+\frac{1}{1!}+\cdots+\frac{1}{n!}\Big) = e$. Применение же *тождества* $\exp(z+\zeta) = \exp z\exp\zeta$ позволяет заключить:

$$\exp 2 = \exp(1+1) = \exp 1\exp 1 = ee = e^2,$$

$$\exp 3 = \exp(2+1) = \exp 2\exp 1 = e^2e = e^3$$

и вообще для любого *натурального* числа $n = 1+\cdots+1$

$$\exp n = \exp(\overbrace{1+\cdots+1}^{n}) = \overbrace{\exp 1\cdots\exp 1}^{n} = \overbrace{e\cdots e}^{n} = e^n.$$

Далее, $1 = \exp 0 = \exp(n+(-n)) = \exp n\exp(-n)$, откуда

$$\exp(-n) = \frac{1}{\exp n} = \frac{1}{e^n} = e^{-n},$$

а так как $e^m = \exp m = \exp\Big(\frac{m}{n}+\cdots+\frac{m}{n}\Big) = \Big(\exp\frac{m}{n}\Big)^n$,

$\exp\frac{m}{n} = e^{\frac{m}{n}}$ для любого *рационального* числа $\frac{m}{n}$ (см. с. 36).

---

[1] Ввиду полученного неравенства
$|s_n(z)s_n(\zeta) - s_n(z+\zeta)| \leqslant s_{2n}(|z|+|\zeta|) - s_n(|z|+|\zeta|)$.

На основе *совпадения* значений $\exp z$ и e^z для *рациональных* чисел z полагают вообще для *любого* числа z (*действительного* или *мнимого*)

$$\boxed{e^z \overset{\text{def}}{=} \exp z \overset{\text{def}}{=} \lim_{n\to+\infty}\Big(1+\frac{z}{1!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}\Big)}.$$

Тем самым получают определение *степени* числа e с *любым показателем*[1] и одновременно привычные правила

$$\boxed{e^{z+\zeta}=e^z e^\zeta, \quad e^z e^{-z}=1, \quad e^{z-\zeta}=\frac{e^z}{e^\zeta}},$$

являющиеся лишь другой записью полученных ранее соотношений для экспоненты.

Следует подчеркнуть: значения, к примеру, e^{-2} и $e^{\frac{1}{2}}$ (*рациональные* степени числа e) можно *эквивалентно* понимать и как (соответственно) $\dfrac{1}{e\cdot e}$ и $\sqrt{e}$, и как

$$\exp(-2) \overset{\text{def}}{=} \lim_{n\to+\infty}\Big(1+\frac{-2}{1!}+\cdots+\frac{(-2)^n}{n!}\Big)$$

и

$$\exp\frac{1}{2} \overset{\text{def}}{=} \lim_{n\to+\infty}\Big(1+\frac{\frac{1}{2}}{1!}+\cdots+\frac{(\frac{1}{2})^n}{n!}\Big);$$

значение же $e^{\sqrt{2}}$ (степень с *иррациональным* показателем) понимается только как

$$\exp\sqrt{2} \overset{\text{def}}{=} \lim_{n\to+\infty}\Big(1+\frac{\sqrt{2}}{1!}+\cdots+\frac{(\sqrt{2})^n}{n!}\Big).$$

Что касается *мнимых* степеней числа e, то помимо исходного определения $e^{a+bi}=\lim\limits_{n\to+\infty}\Big(1+\frac{a+bi}{1!}+\cdots+\frac{(a+bi)^n}{n!}\Big)$ существует еще замечательная *формула Эйлера*[2]

$$\boxed{e^{ib}=\cos b+i\sin b},$$

вывод которой дан в следующей главе.

---

[1] Лат. *expono* — *показывать*. Как понимать степень (с любым показателем) положительного числа, отличного от e, обсуждается в следующей главе (см. с. 164–165).

[2] А следовательно, равенство $\boxed{e^{a+bi}=e^a(\cos b+i\sin b)}$.

III. Предел и непрерывность функции

III.1. Что понимают под пределом функции в точке и ее непрерывностью в ней

Число b называют <u>*пределом*</u> *функции $y = f(x)$ в точке a (или при стремлении x к a)*, записывая это $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ *(или $f(x) \to b$ при $x \to a$)*[1], *если истинно утверждение, выражаемое формулой*

$$\boxed{\forall\varepsilon>0\,\exists\delta>0\,\forall x\left(0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-b|<\varepsilon\right)}$$

со следующими вариантами ее прочтения:

"для любого положительного числа (обозначаемого ε) существует такое положительное число (обозначаемое δ), что для любого значения x, удовлетворяющего неравенствам $0<|x-a|<\delta$, выполняется неравенство $|f(x)-b|<\varepsilon$";

"для любого положительного числа ε существует такая δ-окрестность точки a, что для любой (но отличной от a) точки x из этой окрестности значение $f(x)$ отличается от числа b меньше, чем на ε."[2]

Данное определение *предела функции*[3] надлежит сопроводить следующими *замечаниями*.

1. Определение относится к функциям как *действительной*, так и *комплексной* переменной. Различие сводится к *геометрической трактовке неравенств*: в случае *комплексной* переменной x (когда ее чаще обозначают z) неравенства $0<|z-a|<\delta$ выражают *принадлежность* точки $z\in\mathbb{C}$ *кругу* радиуса δ с (*исключенным*) *центром* $a\in\mathbb{C}$.

---

[1] Ранее в ходу была запись $\lim\limits_{x=a} f(x) = b$.

[2] *Числа* и изображающие их *точки* воспринимают в анализе как синонимы, однако в здесь удобнее говорить о *числе* b и *точках* a и x.

[3] Это базовое определение, его разновидности обсуждаются далее.

2. Из определения следует, что понятие *“предела функции в точке”* является характеристикой поведения функции в *окрестности* данной *точки*, *исключая* саму эту *точку*: значение $f(a)$ (будь оно *определено* или нет) *не влияет* ни на *существование*, ни на *величину предела* функции $y=f(x)$ в *точке* a.

3. Следует учитывать специфику построения *отрицаний формул*, в которые входят *значения функций*. К примеру, если *отрицанием* по отношению к неравенству $|x-a|<\delta$ служит *неравенство* $|x-a|\geqslant\delta$, то *отрицанием* по отношению к неравенству $|f(x)-b|<\varepsilon$ является *утверждение*: *“либо* $|f(x)-b|\geqslant\varepsilon$, *либо значение* $f(x)$ *не определено”*[1].

Отрицание утверждения *“число* b *есть предел функции* $y=f(x)$ *в точке* a*”* строится поэтому следующим образом:

$$\neg\forall\varepsilon>0\,\exists\delta>0\,\forall x\,\big(0<|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)-b|<\varepsilon\big)=$$
$$=\exists\varepsilon>0\,\forall\delta>0\,\exists x\,\big(0<|x-a|<\delta\wedge(((|f(x)-b|\geqslant\varepsilon)\vee(\neg!f(x)))\big)$$

(*“существует такое положительное число* (*обозначаемое* ε), что в любой *окрестности* точки a есть *отличная* от a точка x, в которой значение $f(x)$ либо *отличается* от числа b *не меньше*, чем на ε, либо *не определено*”).

Иногда определение *предела функции в точке* предваряют предположением: *“Пусть функция* $y=f(x)$ *определена в некоторой окрестности точки* a*, исключая, возможно, саму эту точку”*. Хотя наличие этого предположения перед *формулой*

$$\forall\varepsilon>0\,\exists\delta>0\,\forall x\,\big(0<|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)-b|<\varepsilon\big)$$

---

[1] В формульном виде: $\neg\big(|f(x)-b|<\varepsilon\big)=\big(|f(x)-b|\geqslant\varepsilon\big)\vee\big(\neg!f(x)\big)$, где $!f(x)$ — символическая запись того, что “определено значение $f(x)$”. (Наглядная аналогия: *ложность* утверждения “в моем “Bentley” *не больше* двух бутылок вина” имеет варианты: “в моем “Bentley” *больше* двух бутылок вина” и “никакого “Bentley” у меня нет”.)

является избыточным[1], оно позволят сократить запись *отрицания* этой *формулы* до

$$\exists\varepsilon>0\,\forall\delta>0\,\exists x\bigl(0<|x-a|<\delta\wedge|f(x)-b|\geqslant\varepsilon)\bigr).$$

4. Переход к переменной $t=x-a$ преобразует формулу

$$\forall\varepsilon>0\,\exists\delta>0\,\forall x\bigl(0<|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)-b|<\varepsilon\bigr)$$

в

$$\forall\varepsilon>0\,\exists\delta>0\,\forall t\bigl(0<|t|<\delta\Rightarrow|f(t+a)-b|<\varepsilon\bigr),$$

а потому задача нахождения *предела* функции $y = f(x)$ в *точке* a равносильна задаче (часто более удобной для решения) отыскания *предела* функции $y=f(t+a)$ в *нуле*.

Примеры. *1*. $\lim\limits_{x\to a} x=a$, $\quad\lim\limits_{x\to a}|x|=|a|$.

Для доказательство *истинности* обоих утверждений

$$\forall\varepsilon>0\exists\delta>0\forall x\bigl(0<|x-a|<\delta\Rightarrow|x-a|<\varepsilon\bigr),$$
$$\forall\varepsilon>0\exists\delta>0\forall x\bigl(0<|x-a|<\delta\Rightarrow\bigl||x|-|a|\bigr|<\varepsilon\bigr)$$

достаточно для любого числа $\varepsilon>0$ взять $\delta=\varepsilon$.

2. $\lim\limits_{x\to a}\sin x=\sin a$, $\quad\lim\limits_{x\to a}\cos x=\cos a$.

Из самого определения *синуса* действительного числа[2] следует неравенство $|\sin x|\leqslant|x|$, так что с учетом формул

$$\sin x-\sin a=2\cos\tfrac{x+a}{2}\sin\tfrac{x-a}{2},\ \cos x-\cos a=-2\sin\tfrac{x+a}{2}\sin\tfrac{x-a}{2}$$

выполняются неравенства

$$|\sin x-\sin a|\leqslant|x-a|\ \text{ и }\ |\cos x-\cos a|\leqslant|x-a|,$$

в силу которых *истинность* утверждений

---

[1] Данное предположение заложено в самой *формуле*: если сколь угодно близко от точки a есть точки x, в которых значение $f(x)$ *не определено*, то значение *формулы* есть *“ложь”*.

[2] $\sin x$ есть проекция на “вертикальную” ось *дуги* единичной окружности длины $|x|$, отмеренной от точки 1 “горизонтальной” оси соответственно “против хода часовой стрелки” в случае $x>0$ и в обратном направлении, если $x<0$.

$$\forall\varepsilon>0\exists\delta>0\forall x\big(0<|x-a|<\delta\Rightarrow|\sin x-\sin a|<\varepsilon\big),$$
$$\forall\varepsilon>0\exists\delta>0\forall x\big(0<|x-a|<\delta\Rightarrow|\cos x-\cos a|<\varepsilon\big)$$

вытекает (как и в предыдущем примере) из возможности выбора $\delta=\varepsilon$.

3. Функция $y=\sin\frac{1}{x}$ *не имеет предела* в точке 0.

Для произвольно взятого *положительного* числа δ пусть n — настолько большое *натуральное* число[1], что *положительное* число $\frac{1}{-\frac{\pi}{2}+2\pi n}$, а вместе с ним и число $\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n}$ оказываются *меньшими* числа δ. Каково бы ни было действительное число b, выбором $x=\frac{1}{-\frac{\pi}{2}+2\pi n}$ или $x=\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n}$ соответственно случаям $b\geqslant 0$ и $b<0$ обеспечивается выполнение неравенства $\left|\sin\frac{1}{x}-b\right|\geqslant 1$. Этим доказывается *истинность* утверждения $\forall b\exists\varepsilon>0\forall\delta>0\,\exists x\left(0<|x-0|<\delta\wedge\left|\sin\frac{1}{x}-b\right|\geqslant\varepsilon\right)$[2], являющегося *отрицанием* утверждения $\exists b\Big(b=\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}\Big)$ о *существовании предела* функции $y=\sin\frac{1}{x}$ в точке 0.

4. Функция $y=f(x)\overset{\text{def}}{=}\lim\limits_{n\to+\infty}(\cos\pi x)^n=$

$$=\begin{cases}0, & \text{если } x \text{ — \textit{нецелое} действительное число},\\ 1, & \text{если } x \text{ — \textit{четное} целое число},\\ \textit{не существует}, & \text{если } x \text{ — \textit{нечетное} целое число},\end{cases}$$

имеет *предел*, равный *нулю*, в любой точке a числовой оси. Пусть δ — расстояние от числа a (точки числовой оси) до ближайшего к нему (но отличного от него) *целого* числа.

---

[1] Существование такого натурального числа n гарантирует *аксиома Архимеда* (см. с. 29).

[2] Каким бы ни было действительное число b, достаточно взять $\varepsilon=1$ и для любого числа $\delta>0$ взять в качестве x число $\frac{1}{-\frac{\pi}{2}+2\pi n}$ при $b\geqslant 0$ и $\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n}$ при $b<0$.

Тогда $f(x)=0$ для любого x с $0<|x-a|<\delta$, так что *истинно* утверждение $\forall a \forall \varepsilon>0 \exists \delta>0 \forall x \big(0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-0|<\varepsilon\big)$.

5. $\lim\limits_{x\to a} x^2=a^2$.

Чтобы доказать *истинность* утверждения

$$\forall \varepsilon>0 \exists \delta>0 \forall x \big(0<|x-a|<\delta \Rightarrow |x^2-a^2|<\varepsilon\big),$$

требуется провести небольшую подготовительную работу. Если $|x-a|<\delta$, то $|x|=|x-a+a|\leqslant \delta+|a|$, а следовательно,

$$|x^2-a^2|=|x-a|\cdot|x+a|<\delta(2|a|+\delta);$$

значит, выполнение импликации $|x-a|<\delta \Rightarrow |x^2-a^2|<\varepsilon$ будет обеспечено, если *положительные* числа ε и δ удовлетворяют неравенству $\delta(2|a|+\delta)\leqslant\varepsilon$. Поэтому достаточно для любого числа $\varepsilon>0$ взять $\delta=\sqrt{a^2+\varepsilon}-|a|$ — *положительный* корень квадратного уравнения $\delta^2+2|a|\delta-\varepsilon=0$ (или любое меньшее *положительное* число).

6. $\lim\limits_{x\to a}\sqrt{x}=\sqrt{a}$ при любом $a>0$.

Каким бы ни было *положительное* число ε, взяв в качестве δ *наименьшее* из *положительных* чисел a и $\varepsilon\sqrt{a}$, можно утверждать: каким бы ни было *действительное* число x, если $|x-a|<\delta$, то

$$|\sqrt{x}-\sqrt{a}|=\frac{|x-a|}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}\leqslant\frac{|x-a|}{\sqrt{a}}<\frac{\delta}{\sqrt{a}}<\varepsilon.$$[1]

7. $\lim\limits_{x\to a}\sqrt[n]{x}=\sqrt[n]{a}$ при любом $a>0$ и $n=3, 4, \ldots$

Следует повторить рассуждения при разборе предыдущего примера с заменой равенства $\sqrt{x}-\sqrt{a}=\frac{x-a}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}$ его обобщением $\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{a}=\frac{x-a}{(\sqrt[n]{x})^{n-1}+(\sqrt[n]{x})^{n-2}\sqrt[n]{a}+\cdots+(\sqrt[n]{a})^{n-1}}$.

[1] Поскольку $\delta\leqslant a$, неравенство $|x-a|<\delta$ обеспечивает *положительность* числа x, так что значение $\sqrt{x}$ *определено* (см. с. 33).

8. $\lim\limits_{z\to 0}\exp z = 1$ (переменную z можно считать *действительной* или *комплексной*: различия в рассуждениях нет).

Запись определения $\exp z \overset{\text{def}}{=} \lim\limits_{n\to+\infty}\Big(1+\frac{z}{1!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}\Big)$ в виде $\exp z - 1 = z\cdot\lim\limits_{n\to+\infty}\Big(\frac{1}{1!}+\frac{z}{2!}+\cdots+\frac{z^{n-1}}{n!}\Big)$ приводит к соотношениям

$$|\exp z - 1| = \Big|z\cdot\lim_{n\to+\infty}\Big(\frac{1}{1!}+\frac{z}{2!}+\cdots+\frac{z^{n-1}}{n!}\Big)\Big| \leqslant$$
$$\leqslant |z|\cdot\lim_{n\to+\infty}\Big(\frac{1}{1!}+\frac{|z|}{2!}+\cdots+\frac{|z|^{n-1}}{n!}\Big),$$

из которых следует, что если $|z|<1$, то

$$|\exp z - 1| \leqslant |z|\cdot\lim_{n\to+\infty}\Big(\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\Big) \leqslant 2|z|;$$

чтобы убедиться в *истинности* утверждения

$$\forall\varepsilon>0\,\exists\delta>0\,\forall z\big(0<|z|<\delta \Rightarrow |\exp z - 1|<\varepsilon\big),$$ [1]

остается поэтому для любого *положительного* числа ε взять в качестве числа δ *наименьшее* из чисел 1 и $\frac{\varepsilon}{2}$.

9. $\lim\limits_{z\to a}\exp z = \exp a$ (где a — любое *комплексное* число).

Применение *основного тождества для экспоненты* дает:

$$|\exp z - \exp a| = |\exp a\exp(z-a) - \exp a| =$$
$$= |\exp a(\exp(z-a)-1)| = |\exp a|\cdot|\exp(z-a)-1|,$$

а так как (ввиду предыдущего примера) $\lim\limits_{z\to a}\exp(z-a)=1$, при любом выборе числа $\varepsilon>0$ для числа $|\exp a|\varepsilon$ (как и для любого *положительного* числа) существует такое *положительное* число δ, что для всех чисел z с $|z-a|<\delta$ выполняется неравенство $|\exp(z-a)-1| < |\exp a|\varepsilon$, а следовательно, и неравенство $|\exp z - \exp a| < \varepsilon$.

Следующий пример, ввиду его фундаментальной важности, следует выделить в отдельное утверждение.

[1] А фактически утверждения $\forall\varepsilon>0\,\exists\delta>0\,\forall z\big(|z|<\delta \Rightarrow |\exp z - 1|<\varepsilon\big)$.

Основной предел для экспоненты: $\boxed{\lim\limits_{z\to 0}\frac{\exp z-1}{z}=1}$.

<u>*Доказательство*</u>. $\exp z \overset{\text{def}}{=} \lim\limits_{n\to+\infty}\Bigl(1+\frac{z}{1!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}\Bigr)$, поэтому (для $z\neq 0$) $\frac{\exp z-1}{z}-1=\lim\limits_{n\to+\infty}\Bigl(\frac{z}{2!}+\cdots+\frac{z^{n-1}}{n!}\Bigr)$, так что

$$\Bigl|\frac{\exp z-1}{z}-1\Bigr|=\Bigl|z\cdot\lim_{n\to+\infty}\Bigl(\frac{1}{2!}+\frac{z}{3!}+\cdots+\frac{z^{n-2}}{n!}\Bigr)\Bigr|\leqslant$$

$$\leqslant|z|\lim_{n\to+\infty}\Bigl(\frac{1}{2!}+\frac{|z|}{3!}+\cdots+\frac{|z|^{n-2}}{n!}\Bigr);$$

если $0<|z|<1$, то

$$\Bigl|\frac{\exp z-1}{z}-1\Bigr|\leqslant|z|\lim_{n\to+\infty}\Bigl(\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\Bigr)\leqslant|z|,$$

и остается для любого числа $\varepsilon>0$ взять за δ наименьшее из чисел 1 и ε, чтобы убедиться в *истинности* утверждения

$$\forall\varepsilon>0\exists\delta>0\forall z\Bigl(0<|z|<\delta\Rightarrow\Bigl|\frac{\exp z-1}{z}-1\Bigr|<\varepsilon\Bigr).$$ **Q.E.D.**

Непрерывность функции в точке

Функцию $y=f(x)$ переменной[1] *x называют* <u>*непрерывной*</u> *в точке a, если истинно утверждение, выражаемое формулой*

$$\boxed{\forall\varepsilon>0\,\exists\delta>0\,\forall x\,\bigl(|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(a)|<\varepsilon\bigr)},$$

смысл которой: "*для произвольно взятого* положительного *числа существует такая* окрестность *точки a, что для любой точки x из этой* окрестности *значения $f(x)$ и $f(a)$ различаются* меньше, *чем на взятое положительное число*"[2].

---

[1] *Действительной* или *комплексной* — с тем лишь различием, что *комплексную* переменную чаще обозначают z, а не x.

[2] Другой вариант прочтения: "*для произвольно взятого положительного числа ε существует такое положительное число δ, что в любой точке x, отстоящей от точки a меньше, чем на δ, значение $f(x)$ отличается от значения $f(a)$ меньше, чем на ε*".

Ввиду того, что смысл *формулы* не меняется при замене в ней неравенства $|x-a|<\delta$ неравенствами $0<|x-a|<\delta$, *непрерывность* функции $y=f(x)$ в точке a *равносильна* выполнению следующих условий:

а) функция $y=f(x)$ одновременно *определена* и *имеет предел* в точке a,

б) *предел* этой функции в точке a и ее *значение* в ней *совпадают*: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$.

Здесь проявляется различие понятий *предела* и *непрерывности* функции в точке: если *предел* отражает поведение функции в *окрестности* точки, *исключая* саму эту *точку*, то *непрерывность*, напротив, *связывает* поведение функции в *окрестности* точки и ее *значение* в самой точке.

Из разбора примеров на с. 103–106 следует:

1) функции $y=x$, $y=|x|$, $y=x^2$, а также функции $y=\sin x$ и $y=\cos x$, являются *непрерывными* в *любой* точке действительной оси;

2) функция $y=\sin\frac{1}{x}$ *не является непрерывной* в точке 0, так как *не имеет предела* в этой точке;

3) функция $y=f(x)\overset{\text{def}}{=}\lim\limits_{n\to+\infty}(\cos\pi x)^n$, имеющая *предел* в *каждой* точке действительной оси, является *непрерывной* только в тех из них, которые соответствуют *нецелым* числам: в точках, изображающих *целые четные* числа, *значение* функции (равное *единице*) *отлично* от ее *предела* (равного *нулю*); в точках же, изображающих *целые нечетные* числа, *значение* функции *не определено*;

4) каждая их функций $y=\sqrt[n]{x}$, $\quad n=2,3,\ \ldots$ является *непрерывной* в любой точке $a\in(0,+\infty)$.

5) функция $w=e^z$ *непрерывна* в *любой* точке a (как *действительной оси*, так и *комплексной плоскости*).

III.2. Как эквивалентно определяют предел и непрерывность функции в точке

Критерий[1] **(эквивалентное определение) предела функции в точке “через последовательности”.** *Утверждение*

а) “функция $y = f(x)$ *имеет в точке* a *предел, равный* b*”, по определению*[2] *выражаемое формулой*

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x \left(0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon \right),$$

равносильно утверждению

б) для любой, сходящейся к точке a*, последовательности* $\{x_n\}$ *точек, отличных от* a*, значения* $f(x_n)$ *образуют последовательность* $\{f(x_n)\}$*, сходящуюся к числу* b*.*

Доказательство. 1. Пусть *истинно* утверждение *а)*, и для произвольно взятого *положительного* числа ε пусть δ — то *положительное* число, которое *существует*[3] для взятого числа ε. Если $\{x_n\}$ — какая-либо *сходящаяся* к a последовательность точек, *отличных* от a, то для указанного числа δ (как и для любого *положительного* числа) существует такое число n_0, что для всех *натуральных* чисел $n > n_0$ выполняются неравенства $0 < |x_n - a| < \delta$, а следовательно, ввиду *истинности* утверждения *а)*, и неравенство $|f(x_n) - b| < \varepsilon$. Этим установлена *сходимость* последовательности $\{f(x_n)\}$ к числу b, а с ней и *истинность* утверждения *б)*.

2. Пусть утверждение *а) ложно*, т. е. *истинно* его *отрицание*, выражаемое (как отмечалось на с. 102) *формулой*

---

[1] В равной степени относится к функциям *действительной* и *комплексной* переменной: упоминаемые в нем *числа* могут быть как *действительными*, так и *мнимыми*, а *точки* — как *действительной оси*, так и *комплексной плоскости*.

[2] См. с. 101.

[3] Согласно *формуле*, выражающей утверждение *а)*.

$$\exists\varepsilon>0\,\forall\delta>0\,\exists x\,\big(0<|x-a|<\delta\wedge((|f(x)-b|\geqslant\varepsilon)\vee(\neg!f(x))\big).$$

“Прочитывая” эту *формулу*, последовательно беря значения $\delta=1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ \dots$ и обозначая $x_1,x_2,x_3,\ \dots$ *существующие* для этих значений δ значения x, получают последовательность $\{x_n\}$ точек x_n, для которых $0<|x_n-a|<\frac{1}{n}$, а $|f(x_n)-b|\geqslant\varepsilon$ (либо значение $f(x_n)$ *не определено*). Последовательность $\{x_n\}$ *сходится* к числу a, ее элементы *отличны* от a, однако последовательность $\{f(x_n)\}$ *не сходится* к числу b (либо *не определена*). Наличие такой последовательности $\{x_n\}$ означает *ложность* утверждения *б)*. **Q.E.D.**

Критерий (эквивалентное определение) непрерывности функции в точке “через последовательности”. *Утверждение*

а) “функция $y=f(x)$ является непрерывной в точке a”, по определению[1] *выражаемое формулой*

$$\forall\varepsilon>0\,\exists\delta>0\,\forall x\,\big(|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(a)|<\varepsilon\big),$$

равносильно утверждению

б) “для любой последовательности точек $\{x_n\}$, сходящейся к точке a, последовательность $\{f(x_n)\}$ значений функции в точках x_n сходится к значению $f(a)$”.

Доказательство[2]. *1.* Пусть *истинно* утверждение а). Если $\{x_n\}$ — любая *сходящаяся* к a последовательность точек x_n, то, взяв любое число $\varepsilon>0$ и *существующее* для него число $\delta>0$, можно утверждать (поскольку $\lim x_n=a$) существование *натурального* числа n_0 со свойством: если $n>n_0$, то $|x_n-a|<\delta$, а следовательно, $|f(x_n)-f(a)|<\varepsilon$. Этим доказана *сходимость* последовательности $\{f(x_n)\}$ к числу $f(a)$.

---

[1] См. с. 107.

[2] По схеме доказательства предыдущего утверждения, но с тем отличием, что для переменной x (будь она *действительной* или *комплексной*) значение $x=a$ *не исключается*.

2. Пусть утверждение *а) ложно*, т. е. *истинно* его отрицание
$$\exists\varepsilon>0\,\forall\delta>0\,\exists x\left(|x-a|<\delta\wedge\left(|f(x)-f(a)|\geqslant\varepsilon\vee\neg\,!f(x)\vee\neg\,!f(a)\right)\right).$$
Последовательно полагая в этой *формуле* $\delta=1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ \ldots$ и обозначая $x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots$ значения x, *существующие* для этих значений δ, получают последовательность $\{x_n\}$ точек x_n, для которой одновременно $|x_n-a|<\frac{1}{n}$ и $|f(x_n)-f(a)|\geqslant\varepsilon$ (либо значения $f(x_n)$ и/или $f(a)$ *не определены*). Построенная последовательность $\{x_n\}$ обладает поэтому свойством: она *сходится* к точке a, однако *не верно*, что последовательность $\{f(x_n)\}$ значений функции в точках x_n *сходится* к значению $f(a)$. **Q.E.D.**

В российской (а точнее, *московской*) практике преподавания математического анализа распространена (но не всеми поддерживается) терминология, согласно которой в вышеприведенных *критериях* (см. с. 109, 110) формульные записи утверждений *а)* являются определениями *предела* и *непрерывности* функции $y=f(x)$ в *точке а* “по Коши”, тогда как формулировки утверждений *б)* являются определениями *предела* и *непрерывности* функции в точке a “по Гейне”.

Предпринятая автором попытка выяснить степень обоснованности этой терминологии обнаружила следующее.

1. Определения *предела* и *непрерывности* функции по первому способу — через *неравенства* с ε и δ — ввел в математический обиход Вейерштрасс в своих знаменитых (и уже упоминавшихся на с. 85) берлинских лекциях, ставших поворотным пунктом в развитии математического анализа.

2. Явно сформулированного определения *предела функции* в работах Коши нет. Приводит он (и неоднократно повторяет) лишь следующее, вполне типичное для математической литературы того времени, определение *предела переменной*: *“Если значения, последовательно придаваемые одной и той же переменной, неограниченно приближаются к фиксированному значению так, что отличие от него становится сколь угодно малым, это последнее значение называют пределом всех остальных ... Мы будем обозначать предел, к которому сходится дан-*

ная переменная, абревиатурой lim, ставя ее перед этой переменной".[1]

Другое дело, что при обсуждении[2] *предела* конкретной величины $\frac{f(x+i)-f(x)}{i}$ при стремлении i к нулю[3], он дал следующее *толкование* того, как следует понимать *предел* этой величины: *"Обозначим δ, ε два очень маленьких числа, первое выбранное таким, что для значений i, абсолютная величина которых меньше, чем δ, отношение $\frac{f(x+i)-f(x)}{i}$ всегда остается большим, чем $f'(x)-\varepsilon$, и меньшим, чем $f'(x)+\varepsilon$".*[4] Лишь благодаря Вейерштрассу это *толкование* стало *определением предела функции в точке* (с сохранением по сей день употребления в его формулировке тех же греческих букв ε и δ).

Следует отметить, что излагая вышеприведенное *толкование*, Коши никак не обозначил ни его новизны, ни своего авторства, хотя был весьма щепетилен в отношении своего приоритета в математических достижениях.

3. Взгляд Гейне[5] на понятие *непрерывности* функции в *точке* (о *пределе* функции как таковом в его работах ничего нет) ясен из следующих фрагментов его статьи "Элементы теории функций" ("Die Elemente der Functionenlehre") в "Журнале чистой и прикладной математики" ("Journal für die reine und angewandte Mathematik") за 1872 г. (т. 74, с. 182):

---

[1] В оригинале (например, в [**34**], с. 4): *"Lorsque les valeurs successivement attribuées à une même variable s'approchent indéfiniment d'une valeur fixe, de manière à finir par en différer aussi peu que l'on voudra, cette dernière est appelée la limite de toutes les autres ... Nous indiquerons la limite vers laquelle converge une variable donnée par l'abréviation lim placée devant cette variable".*

[2] В опубликованном в 1823 г. т. 1 его Résumé des leçons donneés à l'École Royale Polytechnique ([**35**], с. 44).

[3] Разумеется, i здесь служит у Коши обозначением *действительной переменной*, а не *мнимой единицы*.

[4] В оригинале ([**35**], с. 44): *"Désignons par δ, ε deux nombres très petits, le premier étant choisi de telle sorte que, pour des valeurs numériques de i inférieures à δ, le rapport $\frac{f(x+i)-f(x)}{i}$ reste toujours supérieure à $f'(x)-\varepsilon$ et inférieure à $f'(x)+\varepsilon$".*

[5] Heine Heinrich Eduard (1821–1881) — немецкий математик, наставник и коллега своего более именитого соотечественника Кантора.

“Определение. Функция $f(x)$ называется непрерывной при отдельном конкретно взятом значении $x=X$, если для любой сколь угодно малой заданной величины ε существует такое положительное число η_0, что ни для какой положительной величины η, меньшей, чем η_0, абсолютное значение величины $f(X\pm\eta)-f(X)$ не превосходит ε”.

И в сноске на этой же с. 182: *“Утверждение, что функция является непрерывной в том и только в том случае, когда для любой последовательности* [x_1, x_2 *и т.д., сходящейся*] *к X, величина $f(X)-f(x_n)$ становится сколь угодно малой, а также доказательство* [этого утверждения] *я заимствовал у г-на Кантора”.*[1]

4. Термины *предел* (*непрерывность*) *“по Коши”* и *“по Гейне”* вошли в обиход скорее всего под воздействием акад. Н.Н. Лузина[2], идеи и указания которого сформировали стиль и терминологические предпочтения его учеников, учеников учеников и их преемников.

Разумеется, условность тех или иных терминов и частое их несоответствие исторической правде — дело обычное не только в математике. В данном же случае удивляет другое: терминология, не получившая признания в авторитетной математической литературе (в частности, ее не употребляет Г.М. Фихтенгольц в [**24**]), продолжает активно (если не сказать агрессивно) пропагандироваться заметной частью вузовских преподавателей.

Стоит отметить, что утверждения *б)*[3] обоих критериев не имеют символической записи на языке L_1Real, так как требуют запрещенного правилами этого языка (см. *Приложение I*) действия квантора по переменной *последовательности* (*функции натуральной переменной*).

---

[1] В оригинале: *“Definition. Eine Function $f(x)$ heisst bei einem bestimmten einzelnen Werthe $x=X$ continuirlich, wenn, für jede noch so klein gegebene Grösse ε, eine andere positive Zahl η_0 von solcher Beschaffenheit existirt, dass für keine positive Crösse η, die kleiner als η_0 ist, der Zahlwerth von $f(X\pm\eta)-f(X)$ das ε überschreitet”.*

“Den Satz, dass die Function nur und immer continuirlich ist, wenn $f(X)-f(x_n)$, für jede Zahlenreiche von X beliebig klein wird, mit seinem Beweise, entlehne ich dem Herrn Cantor”.

[2] Лузин Николай Николаевич (1883–1950) — руководитель московской школы теории функций. Обсуждаемые термины можно найти в его учебнике для педвузов [**14**].

[3] В отличие от утверждений *а)*.

III.3. Каковы общие свойства функций, имеющих предел

О том, насколько эффективным оказывается применение доказанных *критериев*[1] *предела и непрерывности функции в точке*, можно судить по доказательствам следующих утверждений.

> *Если функции $y=f(x)$ и $y=g(x)$ имеют в точке a пределы (равные соответственно b и c), то функции $y=f(x)\pm g(x)$ и $y=f(x)\cdot g(x)$, а если $c\neq 0$, то и функция $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$, также имеют пределы в точке a, при этом*
> $$\lim_{x\to a}\bigl(f(x)\pm g(x)\bigr)=b\pm c,\quad \lim_{x\to a}\bigl(f(x)\cdot g(x)\bigr)=b\cdot c,\quad \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{b}{c}.$$

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ — любая *сходящаяся* к a последовательность точек, *отличных* от a. В силу *критерия* (эквивалентного определения) *предела функции* последовательности $\{f(x_n)\}$ и $\{g(x_n)\}$ *сходятся* соответственно к числам b и c. Но тогда (см. с. 69) *сходятся* (соответственно к числам $b\pm c$, $b\cdot c$ и $\dfrac{b}{c}$) и последовательности $\{f(x_n)\pm g(x_n)\}$, $\{f(x_n)\cdot g(x_n)\}$ и $\left\{\dfrac{f(x_n)}{g(x_n)}\right\}$. Повторное применение *критерия предела* позволяет сделать вывод: $\lim\limits_{x\to a}\bigl(f(x)\pm g(x)\bigr)=b\pm c$, $\lim\limits_{x\to a}\bigl(f(x)\cdot g(x)\bigr)=b\cdot c$, $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{b}{c}$. **Q.E.D.**

Если в условии доказанного утверждения дополнительно предположить, что $b=f(a)$, а $c=g(a)$, то это утверждение перейдет в следующее.

> *Если функции $y=f(x)$ и $y=g(x)$ непрерывны в точке a, то функции $y=f(x)\pm g(x)$ и $y=f(x)\cdot g(x)$, а если $g(a)\neq 0$, то и функция $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$, также непрерывны в точке a.*

[1] Или, если угодно, *эквивалентных определений*.

Переход к пределу в неравенствах

Если функции[1] $y=f(x)$ *и* $y=g(x)$ *имеют пределы в точке* a *и в некоторой окрестности этой точки*[2] *удовлетворяют неравенству* $f(x)\leqslant g(x)$, *то* $\lim\limits_{x\to a} f(x)\leqslant \lim\limits_{x\to a} g(x)$.

<u>Доказательство</u>. Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=c$ и пусть $\{x_n\}$ — любая *сходящаяся* к точке a последовательность точек, *отличных* от a. Согласно *критерию* (*эквивалентному определению*) *предела функции* последовательности $\{f(x_n)\}$ и $\{g(x_n)\}$ сходятся соответственно к числам b и c, и для всех значений n, начиная с некоторого, выполняется неравенство $f(x_n)\leqslant g(x_n)$. В силу установленного ранее (см. с. 70) утверждения о неравенствах для пределов последовательностей выполняется неравенство $b\leqslant c$. **Q.E.D.**

Следующее утверждение есть аналог для функций “принципа сэндвича” для последовательностей (см. с. 71).

Если функции[1] $y=f(x)$ *и* $y=g(x)$ *имеют общий предел* b *в точке* a *и в некоторой окрестности этой точки*[2] *выполнены неравенства* $f(x)\leqslant h(x)\leqslant g(x)$, *то существует также* $\lim\limits_{x\to a} h(x)=b$.

<u>Доказательство</u>. Пусть $\{x_n\}$ — любая *сходящаяся* к a последовательность точек, *отличных* от a. Так как в силу *критерия предела функции* обе последовательности $\{f(x_n)\}$ и $\{g(x_n)\}$ сходятся к числу b, причем $f(x_n)\leqslant h(x_n)\leqslant g(x_n)$ для всех значений n, начиная с некоторого, “*принцип сэндвича*” обеспечивает *сходимость* последовательности $\{h(x_n)\}$ к тому же числу b. Вторичное применение *критерия предела функции* позволяет утверждать, что $\lim\limits_{x\to a} h(x)=b$. **Q.E.D.**

---

[1] Принимающие только *действительные* значения.

[2] Неважно, *включая* или *не включая* саму эту *точку*.

Локальные ограниченность и сохранение знака

> *Если функция $y=f(x)$ имеет предел в точке a, то существует окрестность этой точки, в которой данная функция является ограниченной*[1]*.*

<u>Доказательство</u>. Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$, т. е. *истинно* утверждение $\forall\varepsilon>0\,\exists\delta>0\,\forall x\,\big(0<|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)-b|<\varepsilon\big)$. Поэтому, взяв *какое-либо* значение $\varepsilon>0$ и *существующее* для него значение $\delta>0$, можно утверждать: если $0<|x-a|<\delta$, то $|f(x)|=|f(x)-b+b|\leqslant|f(x)-b|+|b|<\varepsilon+|b|$.[2] **Q.E.D.**

> *Если функция*[3] *$y=f(x)$ имеет в точке a положительный (отрицательный) предел, то существует окрестность этой точки*[4]*, в которой данная функция принимает только положительные (только отрицательные) значения.*

<u>Доказательство</u>. Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$, т. е. *истинно* утверждение $\forall\varepsilon>0\,\exists\delta>0\,\forall x\,\big(0<|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)-b|<\varepsilon\big)$. Взяв *положительное* значение $\varepsilon=|b|$ и *существующее* для него *положительное* значение δ, можно утверждать поэтому: если $0<|x-a|<\delta$, то $b-|b|<f(x)<b+|b|$, а следовательно, $f(x)>0$ в случае $b>0$ и $f(x)<0$ в случае $b<0$. **Q.E.D.**

Вот прямое следствие доказанного утверждения.

> *Если функция*[3] *$y=f(x)$ является непрерывной в точке a и $f(a)\neq 0$, то существует окрестность точки a, в которой значения функции являются положительными, если $f(a)>0$, и отрицательными, если $f(a)<0$.*

---

[1] Т. е. значения $|f(x)|$ для точек x из этой *окрестности* не превосходят некоторого *положительного* числа.

[2] А если функция определена и в точке a, то $|f(x)|<\varepsilon+|b|+|f(a)|$ при $|x-a|<\delta$.

[3] Принимающая только *действительные* значения.

[4] Рассматриваемая без самой этой *точки*.

Предел и непрерывность сложной функции

Если функция $x=\varphi(t)$ имеет в точке α предел, равный a, а функция $y=f(x)$ непрерывна в точке a, то *композиция* *этих функций или, как часто говорят,* *сложная функция* $y=f(\varphi(t))$ *имеет в точке α предел, равный $f(a)$.*

Доказательство. Согласно определениям (см. с. 107, 101) предположения о *непрерывности* функции $y=f(x)$ в точке a и *существовании предела* функции $x=\varphi(t)$ в точке α означают *истинность* утверждений

$$\forall\varepsilon>0\,\exists\sigma>0\,\forall x\big(|x-a|<\sigma\Rightarrow|f(x)-f(a)|<\varepsilon\big)$$

и

$$\forall\sigma>0\,\exists\delta>0\,\forall t\big(0<|t-\alpha|<\delta\Rightarrow|\varphi(t)-a|<\sigma\big);$$

соединение их[1] влечет *истинность* утверждения

$$\forall\varepsilon>0\,\exists\delta>0\,\forall x\big(0<|t-\alpha|<\delta\Rightarrow|f(\varphi(t))-f(a)|<\varepsilon\big) \text{ —}$$

о существовании у функции $y=f(\varphi(t))$ *предела* в точке α, равного $f(a)$. **Q.E.D.**[2]

---

[1] По схеме: для любого числа $\varepsilon>0$ существует (согласно *первому* утверждению) число $\sigma>0$ с выполнением импликации

$$|x-a|<\sigma\Rightarrow|f(x)-f(a)|<\varepsilon,$$

а для этого числа σ, в свою очередь, существует (уже согласно *второму* утверждению) число $\delta>0$ с выполнением импликации

$$0<|t-\alpha|<\delta\Rightarrow|\varphi(t)-a|<\sigma,$$

а следовательно, и возможностью *подстановки* $x=\varphi(t)$ в $y=f(x)$, т. е. образования *сложной функции* $y=f(\varphi(t))$, с выполнением импликаций

$$0<|t-\alpha|<\delta\Rightarrow|\varphi(t)-a|<\sigma\Rightarrow|f(\varphi(t))-f(a)|<\varepsilon.$$

[2] Вот другое доказательство, использующее *критерии предела* и *непрерывности* функции в *точке* (см. с. 109, 110). Пусть $\{t_n\}$ — любая *сходящаяся* к α последовательность точек t_n, отличных от α. Ввиду существования у функции $\varphi(t)$ предела в точке α, равного a, последовательность $\{\varphi(t_n)\}$ будет сходиться к a, а так как функция $y=f(x)$ *непрерывна* в точке a, последовательность $\{f(\varphi(t_n))\}$ будет сходиться к $f(a)$.

Следующий пример показывает, что условие *непрерывности* функции $y=f(x)$ в точке a нельзя ослабить, заменив его условием существования у функции *предела* в этой точке.

Пусть $f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 0, & \text{если } t=0, \\ 1, & \text{если } t\neq 0, \end{cases}$ и $\varphi(t) \stackrel{\text{def}}{=} t\sin\dfrac{1}{t}$. Функция $y=f(x)$ *не является непрерывной* в точке $x=0$, но имеет в ней *предел*, равный *нулю*. В свою очередь, функция $x=\varphi(t)$ имеет в точке $t=0$ *предел*, равный *нулю*.[1] Вместе с тем *композиция* этих *функций* (*сложная функция*) $y=f(\varphi(t))$ *предела* в точке $t=0$ *не имеет*, поскольку для *сходящейся* к *нулю* последовательности $\{t_n\}=\left\{\dfrac{2}{\pi n}\right\}$ точек t_n (отличных от нуля) последовательность значений функции в этих точках *расходится*: $\bigl\{f(\varphi(t_n))\bigr\}=\bigl\{f\bigl(\frac{2}{\pi n}\sin\frac{\pi n}{2}\bigr)\bigr\}=1,0,1,0,\ \ldots$

Прямым следствием доказанного утверждения является *свойство непрерывности сложной функции*:

> *Если функция $x=\varphi(t)$ непрерывна в точке α, а функция $y=f(x)$ непрерывна в точке $a=\varphi(\alpha)$, то и композиция этих функций (сложная функция) $y=f(\varphi(t))$ будет непрерывна в точке α.*

Другим следствием является *перестановочность* символа *непрерывной функции* и символа *предела*[2]:

> *Функция $y=f(x)$ является непрерывной в точке a в том и только в том случае, когда равенство*
> $$\lim_{t\to\alpha} f(\varphi(t)) = f\bigl(\lim_{t\to\alpha}\varphi(t)\bigr)$$
> *выполняется для любой функции $x=\varphi(t)$ и любой точки α, лишь только существует $\lim\limits_{t\to\alpha}\varphi(t)=a$.*

---

[1] Это следует из того, что для любой *сходящейся* к *нулю* последовательности $\{t_n\}$ точек $t_n\neq 0$ последовательность $\{\varphi(t_n)\}=\left\{t_n\sin\dfrac{1}{t_n}\right\}$ как произведение *бесконечно малой* последовательности $\{t_n\}$ на *ограниченную* $\left\{\sin\dfrac{1}{t_n}\right\}$ также *сходится* к *нулю*.

[2] На него указал Больцано в работе 1817 г. (см. [**11**], с. 58).

III.4. Что называют формулами Эйлера и как они выводятся

Для любого действительного числа t

$$\boxed{\overline{e^{it}} = e^{-it} = \frac{1}{e^{it}}}^{1}, \text{ а следовательно, } \boxed{|e^{it}| = 1}.$$

<u>*Доказательство*</u>. В силу определения числа e^{it} (см. с. 100), свойств операции *комплексного сопряжения* (см. с. 58) и того, что $\overline{\lim z_n} = \lim \overline{z_n}$ для любой *сходящейся* последовательности $\{z_n\}$ *комплексных* чисел[2], справедливы равенства:

$$e^{it} = \exp(it) = \lim_{n\to+\infty}\Bigl(1 + \frac{it}{1!} + \frac{(it)^2}{2!} + \cdots + \frac{(it)^n}{n!}\Bigr),$$

$$\overline{e^{it}} = \overline{\exp(it)} = \lim_{n\to+\infty}\Bigl(\overline{1} + \overline{\frac{it}{1!}} + \overline{\frac{(it)^2}{2!}} + \cdots + \overline{\frac{(it)^n}{n!}}\Bigr) =$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\Bigl(1 + \frac{-it}{1!} + \frac{(-it)^2}{2!} + \cdots + \frac{(-it)^n}{n!}\Bigr) = e^{-it},$$

Окончательно: $|e^{it}|^2 = e^{it}\overline{e^{it}} = e^{it}e^{-it} = e^0 = 1$. **Q.E.D.**

Из доказанного утверждения следует, что для любого *действительного* числа t число e^{it} изображается *точкой* плоскости $\mathbb{C}$, лежащей на *единичной окружности* (окружности радиуса 1 с центром в начале координат). Вопрос о том, какой конкретно *точкой* этой *окружности* изображается число e^{it}, разрешается следующим утверждением.

Для любого действительного числа t

$$\boxed{\arg(e^{it}) = t \text{ (с точностью до слагаемого, кратного } 2\pi)}.$$

---

[1] Т. е. числом, *обратным* по отношению к экспоненте e^{it} *чисто мнимого* числа it, служит *комплексно сопряженное* с ней число $\overline{e^{it}}$.

[2] Так как *комплексное сопряжение* на плоскости $\mathbb{C}$ есть *зеркальное отражение* относительно действительной оси, утверждения $\lim z_n = z$ и $\lim \overline{z_n} = \overline{z}$, выражаемые *формулами*

$\forall\varepsilon>0\,\exists n_0\,\forall n\,(n>n_0 \Rightarrow |z_n - z| < \varepsilon)$ и $\forall\varepsilon>0\,\exists n_0\,\forall n\,(n>n_0 \Rightarrow |\overline{z_n} - \overline{z}| < \varepsilon)$, являются *эквивалентными*.

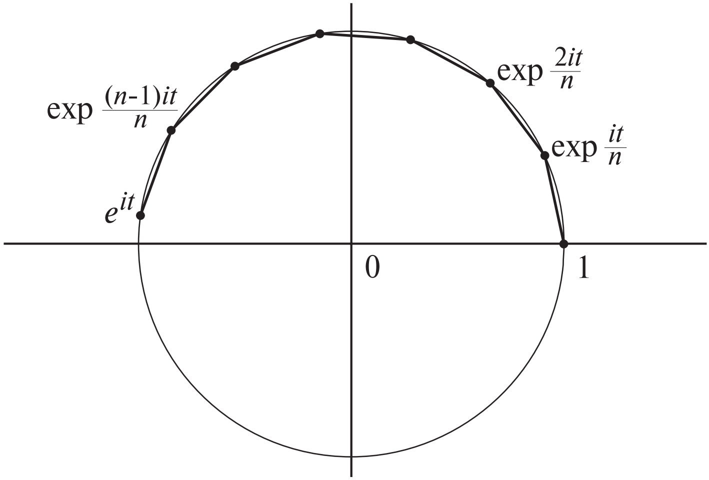


Рис. 6

<u>*Доказательство*</u>. Каким бы ни было натуральное число n, концевые точки векторов[1], изображающих числа

$$1,\ \exp\frac{it}{n},\ \exp\frac{2it}{n},\ \ldots,\ \exp\frac{(n-1)it}{n},\ \exp\frac{nit}{n}=e^{it}$$

(в этом порядке), являются вершинами *правильной* n-*звенной* *ломаной*, вписанной в *единичную окружность* (рис. 6)[2]. Так как длина одного (первого) звена этой ломаной равна $|\exp\frac{it}{n}-1|$, длину l_n всей ломаной можно записать в виде

---

[1] Выходящих из начала координат комплексной плоскости.

[2] То, что все эти точки лежат на *единичной окружности*, есть следствие того, что $|e^{it}|=1$, а так как каждое последующее из чисел $1,\ \exp\frac{it}{n},\ \exp\frac{2it}{n},\ \ldots,\ \exp\frac{(n-1)it}{n},\ \exp\frac{nit}{n}=e^{it}$ (начиная со второго) есть результат *умножения* предыдущего на *одно и то же* комплексное число $\exp\frac{it}{n}$, из геометрической трактовки умножения следует, что каждый последующий из изображающих эти числа *векторов* комплексной плоскости получается *поворотом* предыдущего на *один и тот же* угол, равный (пока еще неизвестному) $\arg\exp\frac{it}{n}$.

$$l_n = n\,|\exp\tfrac{it}{n} - 1| = |t|\,\frac{|\exp\frac{it}{n} - 1|}{|\frac{it}{n}|} = |t|\cdot\left|\frac{\exp\frac{it}{n} - 1}{\frac{it}{n}}\right|.$$

Так как *последовательность* $\{\frac{it}{n}\}$ *сходится* к *нулю*, из *критерия* (*эквивалентного определения*) *предела функции* “*через последовательности*”, примененного к *основному пределу для экспоненты* $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\exp z - 1}{z} = 1$ (см. с. 107), следует: последовательность $\left\{\frac{\exp\frac{it}{n} - 1}{\frac{it}{n}}\right\}$ *сходится* к *единице*, а последовательность $\{l_n\} = \left\{|t|\cdot\left|\frac{\exp\frac{it}{n} - 1}{\frac{it}{n}}\right|\right\}$ — соответственно к *числу* $|t|$. Но *предел* (при $n \to +\infty$) последовательности $\{l_n\}$ *длин* правильных n-звенных *ломаных*, вписанных в единичную окружность и имеющих общие концевые точки 1 и e^{it}, есть по определению *длина дуги* единичной окружности между указанными точками (возможно, с добавлением целого кратного *длины окружности*[1], т. е. $2\pi k$). Опять пользуясь тем, что $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\exp\frac{it}{n} - 1}{\frac{it}{n}} = 1$, можно заключить: при всех достаточно больших n вектор $\exp\frac{it}{n} - 1$ (направляющий для первого звена *ломаной*) образует с вектором $\dfrac{it}{n}$ *острый* угол, вследствие чего при $t > 0$ направление отсчета длины дуги от точки 1 к точке $\exp(it) = e^{it}$ является *положительным* (“против хода часовой стрелки”), а при $t < 0$ — *отрицательным* (в противоположном направлении). Окончательно: *аргумент* числа e^{it}, измеряемый[2] *длиной дуги* единичной окружности между направлениями (из начала координат) на точки 1 и e^{it}, равен[2] числу t:

---

[1] Ломаные, соединяя точки 1 и e^{it}, могут сколько-то раз обойти вокруг центра окружности.

[2] С точностью до слагаемого, кратного 2π.

$$\arg e^{it} = t\ (+2\pi k).\quad \textbf{Q.E.D.}$$

Переход к *полярной записи* числа e^{it} с учетом установленных соотношений $|e^{it}| = 1$, $\arg e^{it} = t\ (+2\pi k)$ приводит к равенству

$$\boxed{e^{it} = \cos t + i\sin t},$$

называемому *формулой Эйлера*.

Комбинируя это равенство с другим его экземпляром, записанным в виде $e^{-it} = \cos t - i\sin t$, можно получить эквивалентные *формуле Эйлера* равенства

$$\boxed{\cos t = \frac{e^{it}+e^{-it}}{2}, \quad \sin t = \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}},$$

также называемым *формулами Эйлера*[1]. Второе из них в соединении с *основным пределом для экспоненты* (см. с. 107) приводит к *основному пределу для синуса*:

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{e^{it}-e^{-it}}{2it} \underset{it=z}{=} \lim_{z\to 0}\frac{e^{z}-e^{-z}}{2z} = \lim_{z\to 0}\frac{e^{z}-1+1-e^{-z}}{2z} \underset{-z=\zeta}{=}$$

$$= \frac{1}{2}\Big(\lim_{z\to 0}\frac{e^{z}-1}{z} + \lim_{\zeta\to 0}\frac{e^{\zeta}-1}{\zeta}\Big) = 1;$$

его стоит выделить более заметно (и с более традиционным обозначением x действительной переменной):

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1}.$$

Вариант доказательства: если $\{x_n\}$ — любая *сходящаяся* к *нулю* последовательность *действительных* чисел $x_n \neq 0$, то последовательность $\left\{\frac{e^{ix_n}-1}{ix_n}\right\}$ *сходится* к *единице*, а вместе с ней *сходится* к *единице* и последовательность $\left\{\mathrm{Re}\,\frac{e^{ix_n}-1}{ix_n}\right\} = \left\{\mathrm{Re}\,\frac{\cos x_n + i\sin x_n - 1}{ix_n}\right\} = \left\{\frac{\sin x_n}{x_n}\right\}$; остается воспользоваться *критерием* (*эквивалентным определением*) *предела функции "через последовательности"*.

---

[1] Именно в этом виде Эйлер первоначально получил названные его именем *формулы*. Тот способ, которым Эйлер вывел эти *формулы* из *формулы Муавра* (см. с. 58), изложен в §§ 132–138 его знаменитой монографии [**29**].

Чувственные люди предпочитают называть его *“первым замечательным пределом”* и приводить *геометрические* его доказательства, не все из которых, однако, логически безупречны.

Начальным шагом этих доказательств является вывод[1] неравенств $\sin|x| < |x| < \operatorname{tg}|x|$, из которых затем получают[2] неравенства $1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$, переход к пределу в которых (с учетом того, что $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} = 1$) дает $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} = 1$, а потому и $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$.

Обычно предлагаемый в курсах анализа вывод упомянутых неравенств сравнением *площадей*: *1) равнобедренного треугольника* OAB, *2) кругового сектора* OAB, *3) прямоугольного треугольника* OCB: $\frac{\sin|x|}{2} < \frac{|x|}{2} < \frac{\operatorname{tg}|x|}{2}$ (рис. 7, а) содержит классическую ошибку *“порочного круга”* (*“circulus vitiosus”*), которую многие видят, но предпочитают не замечать. Полагать *площадь кругового сектора* OAB, опирающегося на дугу единичной окружности длины $|x|$, равной $\frac{|x|}{2}$ (тогда как она *по определению*[3] есть *предел*, к которому стремится *сумма площадей равнобедренных треугольников*, имеющих общей *вершиной* центр окружности, а *основаниями* звенья правильной *ломаной*, вписаной в указанную *дугу*, при неограниченном увеличении числа звеньев, т. е. *предел* при $n \to +\infty$ величины $n\frac{1}{2}\sin\frac{|x|}{n}$), значит при выводе предельного соотношения $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ пользоваться *самим этим соотношением*, что и есть “порочный круг”.

---

[1] В предположении, что $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$.

[2] Делением на $\sin|x|$ и последующим снятием знака модуля ввиду *четности* возникающих дробей.

[3] Тому, которым располагают выпускники школы.

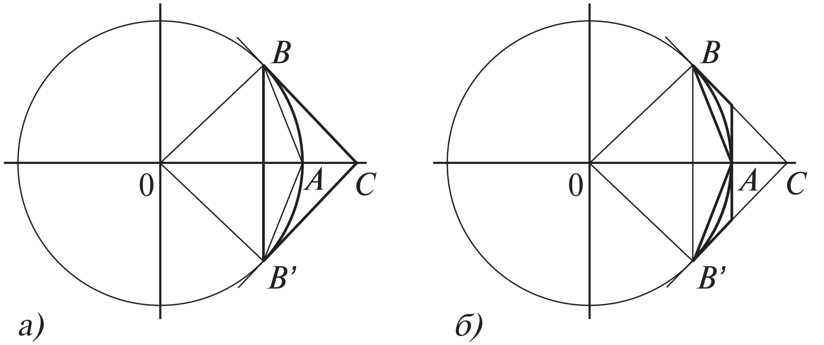


Рис. 7

Логически корректный вывод упомянутых неравенств основан на сравнении *длин* изображенных на рис. 7, а:

1) хорды $B'B$ (перпендикулярной к горизонтальной оси), стягивающей *дугу* $B'AB$ этой окружности длины $2|x| < \pi$,

2) ломаной $B'CB$, звенья которой *касаются* единичной окружности в точках B' и B.

Стандартный процесс последовательного "удвоения" числа звеньев (его начало проиллюстрировано на рис. 7, *а*,*б*) приводит к последовательностям:

1) вписанных в дугу $B'AB$ *правильных ломаных* (с числом звеньев 2^0, 2^1, 2^2, ...), *длины* l_n которых образуют[1] *возрастающую* последовательность $2\sin|x| = l_0 < l_1 < l_2 < \cdots$,

2) описанных около этой дуги *ломаных* (с числом звеньев $x_0 = 2$, $x_n = 2x_{n-1} - 1$), *длины* $\overline{l}_n$ которых образуют[1] *убывающую* последовательность $2\,\mathrm{tg}|x| = \overline{l}_0 > \overline{l}_1 > \overline{l}_2 > \cdots$

Так как $l_n < \overline{l}_n$, а $\lim\limits_{n\to+\infty} l_n = 2|x|$ (*длина* дуги $B'AB$), следует вывод: $\sin|x| < |x| < \mathrm{tg}|x|$ при $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$.

[1] В силу известного свойства сторон треугольника: *сумма длин любых двух его сторон больше длины третьей его стороны.*

III.5. Какие разновидности имеют понятия предела и непрерывности функции

Односторонние пределы и непрерывность

Число b_1 есть <u>*предел*</u> *функции $y = f(x)$ действительной переменной в* <u>*точке*</u> $a \in \mathbb{R}$ <u>*слева*</u>[1] (запись $b_1 = \lim\limits_{x \to a-0} f(x)$, *или* $f(x) \to b_1$ *при* $x \to a-0$), *если истинно утверждение*

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \big(a - \delta < x < a \Rightarrow |f(x) - b_1| < \varepsilon\big)}.$$ [2]

Число b_2 есть <u>*предел*</u> *функции $y = f(x)$ в* <u>*точке*</u> $a \in \mathbb{R}$ <u>*справа*</u>[3] (запись $b_2 = \lim\limits_{x \to a+0} f(x)$, *или* $f(x) \to b_2$ *при* $x \to a+0$), *если истинно утверждение*

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \big(a < x < a + \delta \Rightarrow |f(x) - b_2| < \varepsilon\big)}.$$

Общепринятыми стали обозначения *односторонних пределов* символами[4] $f(a-0)$ (*предела слева*) и $f(a+0)$ (*предела справа*): $f(a-0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim\limits_{x \to a-0} f(x)$, $\quad f(a+0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim\limits_{x \to a+0} f(x)$.

Из сопоставления данных определений с определением *предела функции в точке* (см. с. 109) следует вывод:

> *Функция $y = f(x)$ (действительной* переменной *x) имеет в точке a предел, равный b, в том и только в том случае, когда она имеет в этой точке* предел слева *и* предел справа, *оба равные b.*

---

[1] Или *при x, стремящемся* к *точке a слева.*

[2] *"Для любого положительного* числа, *обозначенного ε, существует такое положительное число, обозначенное δ, что для всех значений переменной x из интервала $(a-\delta, a)$ —* <u>*левой δ-окрестности*</u> *(или, как еще говорят,* <u>*левой δ-полуокрестности*</u>*) точки a — значение функции $f(x)$ отличается от числа b_1 меньше, чем на ε".*

[3] Или *при x, стремящемся* к *точке a справа.*

[4] Введенными в 1837 г. немецким математиком Дирихле́ (Dirichlet Gustav Peter Lejeune, 1805–1859) на с. 170 его основополагающей работе по рядам Фурье (Repertorium der Physik, I Band. Berlin, 1837).

Вот приводимое для полноты его *доказательство* — не до конца *формальное*, но с вкраплением правил *формального вывода* (см. с. 8).

Пусть существует $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$, т. е. *истинно* утверждение

$$\forall\varepsilon>0\,\exists\delta>0\,\forall x\big(0<|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)-b|<\varepsilon\big).$$

Полагая $\mathcal{A}'=\big(a-\delta<x<a\big)$, $\mathcal{A}''=\big(a<x<a+\delta\big)$, $\mathcal{B}=(0<|x-a|<\delta)$, $\mathcal{C}=\big(|f(x)-b|<\varepsilon\big)$ и применяя схему *вывода*, основанную на *тавтологии* $((\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B})\wedge(\mathcal{B}\Rightarrow\mathcal{C}))\Rightarrow(\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{C})$, приходят к *истинности* утверждений

$$\forall\varepsilon>0\,\exists\delta>0\,\forall x\big(a-\delta<x<a\Rightarrow|f(x)-b|<\varepsilon\big),$$

$$\forall\varepsilon>0\,\exists\delta>0\,\forall x\big(a<x<a+\delta\Rightarrow|f(x)-b|<\varepsilon\big),$$

означающих, что $b=\lim\limits_{x\to a-0}f(x)=\lim\limits_{x\to a+0}f(x)$.

Наоборот, пусть *истинны* оба последних утверждения, и для произвольно взятого значения $\varepsilon>0$ пусть δ_1 и δ_2 — *существующие* для этого значения ε (соответственно первому и второму утверждениям) значения δ. Возможность взять δ равным *наименьшему* из значений δ_1,δ_2 обеспечивает *истинность* утверждения

$$\forall\varepsilon>0\,\exists\delta>0\,\forall x\big((a-\delta<x<a\Rightarrow|f(x)-b|<\varepsilon)\wedge(a<x<a+\delta\Rightarrow|f(x)-b|<\varepsilon)\big),$$

а *истинность* (в предыдущих обозначениях) импликации $\mathcal{B}\Rightarrow(\mathcal{A}'\vee\mathcal{A}'')$ вкупе с *тавтологией* $(\mathcal{B}\Rightarrow(\mathcal{A}'\vee\mathcal{A}''))\wedge(\mathcal{A}'\Rightarrow\mathcal{C})\wedge(\mathcal{A}''\Rightarrow\mathcal{C})\Rightarrow(\mathcal{B}\Rightarrow\mathcal{C})$ — *истинность* утверждения $\forall\varepsilon>0\,\exists\delta>0\,\forall x\big(0<|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)-b|<\varepsilon\big)$, означающего, что $\lim\limits_{x\to a}f(x)=b$. **Q.E.D.**

Функцию $y=f(x)$ называют <u>*непрерывной слева*</u> в *точке* $a\in\mathbb{R}$, если $\boxed{f(a-0)=f(a)}$, и, соответственно, <u>*непрерывной справа*</u>, если $\boxed{f(a+0)=f(a)}$; *непрерывность* же функции в этой *точке* означает, что $\boxed{f(a-0)=f(a+0)=f(a)}$.

По аналогии с *односторонними пределами* вводят запись $\lim\limits_{x\to a}f(x)=b-0$, обозначая ею *истинность* утверждения

$$\boxed{\forall\varepsilon>0\,\exists\delta>0\,\forall x\big(0<|x-a|<\delta\Rightarrow b-\varepsilon<f(x)<b\big)},$$

и, соответственно, $\lim\limits_{x\to a}f(x)=b+0$ — для обозначения *истинности* утверждения

$$\boxed{\forall\varepsilon>0\,\exists\delta>0\,\forall x\big(0<|x-a|<\delta\Rightarrow b<f(x)<b+\varepsilon\big)}.$$

Пределы в бесконечности и бесконечные пределы

Понятиями, родственными *односторонним пределам*, являются <u>пределы</u> функции (*действительной* переменной) в *бесконечно удаленных точках* $+\infty$ и $-\infty$.

Число b называют <u>пределом</u> функции $y = f(x)$ при x, <u>стремящемся к</u> $+\infty$ (*с обозначениями этого* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$ *или $f(x) \to b$ при $x \to +\infty$*), *если истинно утверждение*

$$\boxed{\forall\varepsilon>0\exists c>0\forall x\big(x>c \Rightarrow |f(x)-b|<\varepsilon\big)}^{1},$$

имеющее следующий смысл: *"каково бы ни было положительное* число ε, *существует такая окрестность* элемента $+\infty$ (*промежуток* вида $(c, +\infty)$), *что для всякой точки x из этой окрестности* значение $f(x)$ *отличается от* числа b *меньше*, чем на ε".

Число b называют <u>пределом</u> функции $y = f(x)$ при x, <u>стремящемся к</u> $-\infty$ (*с обозначениями этого* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$ *или $f(x) \to b$ при $x \to -\infty$*), *если истинно утверждение*

$$\boxed{\forall\varepsilon>0\exists c>0\forall x\big(x<-c \Rightarrow |f(x)-b|<\varepsilon\big)}.$$

Считают по определению, что функция $y = f(x)$ имеет в точке a <u>бесконечный предел</u> $+\infty$ (*с записью* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$, *или $f(x) \to +\infty$ при $x \to a$*), *если истинно утверждение*

$$\boxed{\forall c>0\exists\delta>0\forall x\big(0<|x-a|<\delta \Rightarrow f(x)>c\big)},$$

имеющее следующий смысл: *"для любого положительного* числа c *существует такая окрестность* точки a, *что для всех* (отличных от a) точек x *из этой окрестности*, значения $f(x)$ *оказываются бо́льшими* числа c".

---

[1] Вариант прочтения: *"для любого положительного* числа ε существует такое *положительное* число c, что для *всех* значений x, *бо́льших* c, значения $f(x)$ отличаются от числа b *меньше*, чем на ε".

Соответственно, истинность утверждения

$$\boxed{\forall c>0\,\exists\delta>0\,\forall x\big(0<|x-a|<\delta\Rightarrow f(x)<-c\big)}$$

означает по определению, что функция $y=f(x)$ имеет в точке a <u>бесконечный предел</u> $-\infty$ (с записью $\lim\limits_{x\to a}f(x)=-\infty$, или $f(x)\to-\infty$ при $x\to a$).

Функцию $y=f(x)$ называют <u>бесконечно большой</u> при x, стремящемся к a, если $\lim\limits_{x\to a}|f(x)|=+\infty$.

Вышеприведенные разновидности понятия *предела функции* в *точке* допускают широкую гибридизацию в виде таких соотношений, как: *а)* $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=b+0$, *б)* $\lim\limits_{x\to a+0}f(x)=b-0$, *в)* $\lim\limits_{x\to a-0}f(x)=+\infty$, *г)* $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$, выполнение которых по определению означает *истинность* утверждений, выражаемых *формулами*:

а) $\forall\varepsilon>0\,\exists c>0\,\forall x\big(x<-c\Rightarrow b<f(x)<b+\varepsilon\big)$,

б) $\forall\varepsilon>0\,\exists\delta>0\,\forall x\big(a<x<a+\delta\Rightarrow b-\varepsilon<f(x)<b\big)$,

в) $\forall c>0\,\exists\delta>0\,\forall x\big(a-\delta<x<a\Rightarrow f(x)>c\big)$,

г) $\forall c>0\,\exists d>0\,\forall x\big(x>d\Rightarrow f(x)<-c\big)$.

Для каждого из этих (и им подобных) вариантов понятия *предела функции* есть аналогичный доказанному на с. 109–110 *критерий* (*эквивалентное определение*) “через последовательности”. Вот, к примеру, как он выглядит применительно к первому из перечисленных.

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=b+0$ в том и только в том случае, когда истинно утверждение: “какова бы ни была последовательность $\{x_n\}$ действительных чисел, расходящаяся к $-\infty$, соответствующая ей последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится к числу b так, что все ее элементы $f(x_n)$ остаются бо́льшими числа b”.

<u>*Доказательство*</u>. Пусть $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b+0$, т. е. *истинно* утверждение

$$\forall\varepsilon>0\,\exists c>0\,\forall x\,\bigl(x<-c \Rightarrow b<f(x)<b+\varepsilon\bigr),$$

и пусть $\{x_n\}$ — любая последовательность *действительных* чисел, *расходящаяся* к $-\infty$. Если ε — произвольно взятое *положительное* число, то (так как $\lim x_n = -\infty$) для *существующего* (в силу указанного утверждения) числа c (как и для любого *положительного* числа) существует такое *натуральное* число n_0, что для всех *натуральных* чисел ("номеров") n, *бо́льших* n_0, справедливо неравенство $x_n < -c$, а следовательно, и неравенства $b < f(x_n) < b+\varepsilon$. В силу произвольности выбора числа $\varepsilon > 0$ это означает, что последовательность $\{f(x_n)\}$ *сходится* к числу b, причем $f(x_n) > b$ при всех n.

Пусть теперь соотношение $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b+0$ *не выполняется*, т. е. утверждение

$$\forall\varepsilon>0\,\exists c>0\,\forall x\,\bigl(x<-c \Rightarrow b<f(x)<b+\varepsilon\bigr)$$

ложно, и *истинно* его *отрицание*

$$\exists\varepsilon>0\,\forall c>0\,\exists x\,\bigl(x<-c \wedge (f(x)\leqslant b \vee f(x)\geqslant b+\varepsilon \vee \neg! f(x)^{1}\bigr).$$

Беря одно за другим значения $c = 1, 2, 3, \ \ldots$ и обозначая $x_1, x_2, x_3, \ \ldots$ значения x, *существующие* (согласно последней формуле) для этих значений c, получают последовательность $\{x_n\}$ точек действительной оси со свойством: $x_n<-n$ при $n = 1, 2, 3, \ \ldots$, а каждое из значений $f(x_n)$ либо *не больше* числа b, либо *не меньше* числа $b+\varepsilon$, либо вообще *не определено*. Это означает, что последовательность $\{x_n\}$ *расходится к* $-\infty$, при этом *неверно*, что последовательность $\{f(x_n)\}$ *сходится* к числу b и все ее элементы $f(x_n)$ *больше* числа b. **Q.E.D.**

---

[1] *Отрицанием* утверждения $b < f(x) < b+\varepsilon$ является утверждение: *"либо $f(x)\leqslant b$, либо $f(x)\geqslant b+\varepsilon$, либо значение $f(x)$ не определено".*

Предел функции в точке по множеству

Следующий вариант понятия *предела* функции в *точке* предполагает, что функция $y=f(x)$ *определена* на множестве $X\subset\mathbb{R}$, для которого эта *точка* является <u>*предельной*</u>[1].

Число b *называют* <u>*пределом*</u> *функции* $y=f(x)$ *в* <u>*точке*</u>[2] a *по* <u>*множеству*</u> X (*с обозначением этого* $\lim\limits_{X\ni x\to a} f(x)=b$), *если истинно утверждение*: "*для любого положительного числа* (*обозначаемого* ε) *существует окрестность точки* a, *в каждой точке которой, принадлежащей множеству* X, *но отличной от* a, *значение функции отличается от числа* b *меньше, чем на* ε"; формульно:

$$\boxed{\forall\varepsilon>0\,\exists\delta>0\,\forall x\,\big((x\in X)\wedge(0<|x-a|<\delta)\Rightarrow|f(x)-b|<\varepsilon\big)}.$$[3]

Следует подчеркнуть: данное определение имеет смысл лишь если оно предварено условием, что a есть *предельная точка* множества X.[4] Дело в том, что если это условие не выполнено, то при достаточно малых значениях $\delta>0$ утверждение $(x\in X)\wedge(0<|x-a|<\delta)$ оказывается *ложным*, а утверждение

---

[1] Точка a называется предельной (по-другому: <u>*точкой накопления*</u>, <u>*точкой сгущения*</u>) для множества X, если в любой *окрестности* точки a есть точки, *принадлежащие* множеству a, отличные от a; формульно: $\forall\delta>0\,\exists x\,(x\in X\wedge 0<|x-a|<\delta)$, если a — точка *действительной оси* (или *комплексной плоскости*), $\forall c>0\,\exists x\,(x\in X\wedge x>c)$, если $a=+\infty$, и $\forall>0\,\exists x\,(x\in X\wedge x<-c)$, если $a=-\infty$.

[2] Или при *стремлении* x к точке.

[3] А если $a=+\infty$ или $a=-\infty$, то соответственно

$$\forall\varepsilon>0\,\exists c>0\,\forall x\,\big((x\in X)\wedge(x>c)\Rightarrow|f(x)-b|<\varepsilon\big),$$

$$\forall\varepsilon>0\,\exists c>0\,\forall x\,\big((x\in X)\wedge(x<-c)\Rightarrow|f(x)-b|<\varepsilon\big).$$

[4] По этой причине данное условие предпочтительнее включать в саму *формулу*:

$$\text{“}\lim_{X\ni x\to a} f(x)=b\text{”}\overset{\text{def}}{\iff}\big(\forall\delta>0\,\exists x\,(x\in X\wedge 0<|x-a|<\delta)\big)\wedge$$

$$\wedge\big(\forall\varepsilon>0\,\exists\delta>0\,\forall x\,\big((x\in X)\wedge(0<|x-a|<\delta)\Rightarrow|f(x)-b|<\varepsilon\big)\big).$$

$$\forall\varepsilon>0\exists\delta>0\forall x\big((x\in X)\land(0<|x-a|<\delta)\Rightarrow|f(x)-b|<\varepsilon\big),$$

соответственно[1], *истинным*, тогда как говорить в данной ситуации (когда вблизи точки a нет отличных от нее точек, *принадлежащих* множеству X) о *пределе* функции $y=f(x)$ при x, *стремящемся к a по множеству* X, бессмысленно.

Если множество X, на котором задана функция $y=f(x)$, содержит целиком некоторую *окрестность* точки a,[2] то понятия *предела* функции в *точке по множеству* и *предела* функции в *точке* в изначальном определении (см. с. 101) *совпадают*: $\lim\limits_{X\ni x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x)$. Это следует из того, что если число $\delta > 0$ достаточно мало, то *выполнение неравенств* $0<|x-a|<\delta$ *влечет* выполнение условия $x\in X$, а потому *формулы*

$$\forall\varepsilon>0\exists\delta>0\forall x\big((x\in X)\land(0<|x-a|<\delta)\Rightarrow|f(x)-b|<\varepsilon\big)$$

и

$$\forall\varepsilon>0\exists\delta>0\forall x\big(0<|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)-b|<\varepsilon\big)$$

оказываются *равнозначными*.

Подобно этому, если множество X представляет собой *левую окрестность* точки a, то $\lim\limits_{X\ni x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a-0} f(x)$, а если в качестве множества X выступает *правая окрестность* точки a, то $\lim\limits_{X\ni x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a+0} f(x)$.

Точно так же, если $a=+\infty$, а множество X содержит промежуток вида $(c,+\infty)$, то $\lim\limits_{X\ni x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, а если $a=-\infty$, и множество X содержит промежуток вида $(-\infty,c)$, то $\lim\limits_{X\ni x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

Если $a=+\infty$, а $X=\mathbb{N}$ — множество *натуральных чисел*, то $\lim\limits_{X\ni x\to a} f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(n)$ есть *предел последовательности* $\{f(n)\}$.

[1] Согласно правилу *истинности импликации* (см. *Приложение I*).

[2] Исключая, возможно, саму эту *точку*.

Вот *критерий* (эквивалентное определение) “*через последовательности*” *предела* функции в точке *по множеству*.

> *В предположении, что a — предельная точка множества X (на котором задана функция $y=f(x)$), выполнение соотношения $\lim\limits_{X\ni x\to a} f(x)=b$ равносильно истинности утверждения: “какова бы ни была последовательность $\{x_n\}$ точек $x_n\in X$, $x_n\neq a$, если она имеет предел*[1]*, равный a, то последовательность $\{f(x_n)\}$* имеет *предел*[1], равный b”.

<u>Доказательство</u>. Пусть $\lim\limits_{X\ni x\to a} f(x)=b$, т. е. *истинным* является утверждение

$$\forall\varepsilon>0\,\exists\delta>0\,\forall x\,\big((x\in X)\wedge(0<|x-a|<\delta)\Rightarrow|f(x)-b|<\varepsilon\big),^{2}\quad(*)$$

Если $\{x_n\}$ — любая последовательность точек $x_n\in X$, $x_n\neq a$, для которой $\lim x_n=a$, то каково бы ни было число $\varepsilon>0$, для *существующей* для него (в силу утверждения $(*)$) *окрестности* точки a существует такое *натуральное* число n_0, что все точки x_n с “номерами” $n>n_0$ попадают в эту *окрестность*, так что (опять в силу утверждения $(*)$) $|f(x_n)-b|<\varepsilon$ и, следовательно, $\lim f(x_n)=b$.

Наоборот, если *не верно*, что $\lim\limits_{X\ni x\to a} f(x)=b$, т. е. *истинно отрицание* утверждения $(*)$ — утверждение

$$\exists\varepsilon>0\,\forall\delta>0\,\exists x\,\big((x\in X)\wedge(0-a|<\delta)\wedge(|f(x)-b|\geqslant\varepsilon)\big),^{3}$$

то, беря одно за другим значения $\delta=1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ \ldots$[4] и записывая x_1, x_2, x_3, $\ldots$ *существующие* для них (согласно последнему утверждению) значения x, получают последовательность $\{x_n\}$ точек $x_n\in X$, $x_n\neq a$, для которой $\lim x_n=a$, но *не верно*, что $\lim f(x_n)=b$. **Q.E.D.**

---

[1] *Конечный* или *бесконечный*.

[2] С указанными в сноске[3] на с. 130 его вариантами для $a=\pm\infty$.

[3] С заменой при $a=\pm\infty$ неравенств $0<|x-a|<\delta$ на $x>c$ или $x<-c$.

[4] Соответственно, $c=1,2,3,\ \ldots$ при $a=\pm\infty$.

Верхний и нижний пределы функции

По аналогии с понятиями *верхнего* и *нижнего пределов* последовательности (см. с. 87) вводят понятия *верхнего* и *нижнего пределов* функции $y=f(x)$ в точке a (включая случаи $a=\pm\infty$, стремления к точке a *слева*, *справа* или по некоторому *множеству* X).

В частности, запись $\overline{\lim\limits_{x\to a+0}} f(x)=b$ по определению означает, что:

а) *существует* последовательность $\{x_n\}$ точек $x_n>a$, для которой $\lim x_n=a$, а $\lim f(x_n)=b$;

б) *не существует* последовательности $\{x_n\}$ точек $x_n>a$, для которой $\lim x_n=a$, а $\lim f(x_n)>b$,

а запись $\underline{\lim\limits_{x\to+\infty}} f(x)=b$ означает, что:

а) *существует* последовательность $\{x_n\}$, *расходящаяся* к $+\infty$, для которой $\lim f(x_n)=b$;

б) *не существует* последовательности $\{x_n\}$, *расходящейся* к $+\infty$, для которой $\lim f(x_n)<b$.

Например: $\overline{\lim\limits_{x\to 0\pm 0}} \sin\dfrac{1}{x}=1$, а $\underline{\lim\limits_{x\to 0\pm 0}} \sin\dfrac{1}{x}=-1$.

> *Условие* $\underline{\lim\limits_{x\to a}} f(x)=\overline{\lim\limits_{x\to a}} f(x)=b$ *необходимо и достаточно для того, чтобы функция*[1] $y=f(x)$ *имела в точке* a *предел, равный* b.[2]

<u>Доказательство</u>. Если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$, то[3] какова бы ни была *сходящаяся* к a последовательность $\{x_n\}$ точек $x_n\neq a$, соответствующая последовательность $\{f(x_n)\}$ *сходится* к b, а потому $\underline{\lim\limits_{x\to a}} f(x)=\overline{\lim\limits_{x\to a}} f(x)=b$.

Наоборот, пусть эти соотношения выполнены, но для *некоторой* последовательности $\{x_n\}$ точек $x_n\neq a$, *сходящейся* к a, последовательность $\{f(x_n)\}$ *не сходится* к b, т.е. либо $\lim f(x_n)=\widetilde{b}\neq b$, либо у последовательности $\{f(x_n)\}$ *нет* (ни *конечного*, ни *бесконечного*) *предела*. Во втором случае $\underline{\lim} f(x_n)\neq\overline{\lim} f(x_n)$, в силу чего существовует *подпоследовательность* $\{x_{n_k}\}$ последовательности $\{x_n\}$ (также *сходящейся* к a), для которой $\lim f(x_{n_k})=\widetilde{b}\neq b$. В обоих случаях возникает *противоречие* с тем, что $\underline{\lim\limits_{x\to a}} f(x)=\overline{\lim\limits_{x\to a}} f(x)=b$. **Q.E.D.**

---

[1] Заданная в *окрестности* точки a (кроме, возможно, ее самой).

[2] Утверждение верно и для $a=\pm\infty$, $x\to a\pm 0$, $b=\pm\infty$.

[3] В силу *критерия* (*эквивалентного определения*) *предела функции* "*через последовательности*" (см. с. 109).

III.6. Что называют критерием Коши существования предела функции

Критерий Коши существования предела функции в точке[1]. *Функция* $y=f(x)$ *имеет предел*[2] *в точке* a *тогда и только тогда, когда для любого положительного числа* ε *существует окрестность точки* a*, в которой*[3] *значения функции разнятся между собой меньше, чем на* ε:

$$\exists b\big(b=\lim_{x\to a}f(x)\big)\iff\forall\varepsilon>0\exists\delta>0\forall x'\forall x''\big((0<|x'-a|<\delta)\wedge \wedge(0<|x''-a|<\delta)\Rightarrow|f(x')-f(x'')|<\varepsilon\big).$$[4]

<u>*Доказательство*</u>. Пусть *предел* функции $y=f(x)$ в точке a *существует* и пусть $\lim\limits_{x\to a}f(x)=b$. Взяв любое *положительное* число ε, можно утверждать, что для числа $\frac{\varepsilon}{2}$ (как и для любого *положительного* числа) существует такое *положительное* число δ, что для любого значения x, удовлетворяющего неравенствам $0<|x-a|<\delta$, выполняется неравенство $|f(x)-b|<\frac{\varepsilon}{2}$. Поэтому для любых *двух* таких значений x', x''

$$|f(x')-f(x'')|=|f(x')-f(x'')\pm b|\leqslant|f(x')-b|+|f(x'')-b|<\varepsilon,$$

т. е. *истинно* утверждение

$$\forall\varepsilon>0\exists\delta>0\forall x'\forall x''\big((0<|x'-a|<\delta)\wedge(0<|x''-a|<\delta)\Rightarrow \Rightarrow|f(x')-f(x'')|<\varepsilon\big).$$

---

[1] На самом деле автор этого *критерия* (аналога *критерия Коши сходимости последовательности*) — немецкий математик Дюбуа-Реймон (Du Bois-Reymond Paul, 1831–1889), сформулировавший его в гл. V “Общей теории функций” [**36**] как “Общий принцип сходимости и расходимости” (“Das allgemeine Convergenz- und Divergenzprincip”).

[2] Термин *предел*, не сопровождаемый прилагательным *бесконечный*, подразумевает *конечное* число.

[3] Если исключить из нее саму точку a.

[4] Варианты *критерия* для *односторонних* пределов даны на с. 136.

Наоборот, пусть это утверждение *истинно*, и для произвольно взятого *положительного* числа ε пусть δ — то *положительное* число, которое (в силу этого утверждения) *существует* для этого числа ε. Если $\{x_n\}$ — любая *сходящаяся* к a последовательность точек $x_n \neq a$, то для указанного числа δ (как и для всякого *положительного* числа) существует такое число n_0, что для всех *бóльших* его *натуральных* чисел n, m выполняется неравенство $|x_n - x_m| < \delta$, а следовательно, и неравенство $|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$. Это означает, что последовательность $\{f(x_n)\}$ является *фундаментальной* (см. с. 91), а потому (в силу *критерия Коши* для последовательностей) и *сходящейся* к некоторому числу b. Остается доказать, что это число b на самом деле является *общим пределом* всех таких последовательностей $\{f(x_n)\}$, отвечающих *всевозможным* последовательностям $\{x_n\}$ точек $x_n \neq a$, *сходящимся* к точке a.[1] Если бы для какой-то последовательности $\{x'_n\}$ *отличных* от a точек, *сходящейся* к a, последовательность $\{f(x'_n)\}$ сходилась к числу $b' \neq b$, то для последовательности $x_1, x'_2, x_3, x'_4, \ldots$ (также *сходящейся* к a и состоящей из точек, *отличных* от a) последовательность $f(x_1), f(x'_2), f(x_3), f(x'_4), \ldots$, с одной стороны (по уже доказанному), была бы *фундаментальной*, а следовательно, *сходящейся*, тогда как, с другой стороны, имея *подпоследовательности* $f(x_1), f(x_3), f(x_5), \ldots$ и $f(x'_2), f(x'_4), f(x'_6), \ldots$, *сходящиеся* к *разрым* пределам, оказывалась бы *расходящейся* — *противоречие*. **Q.E.D.**

Вот важный для приложений (в вопросах сходимости *несобственных интегралов*) вариант доказанного *критерия* для *односторонних пределов* (на примере *левостороннего*).

---

[1] В силу *критерия (эквивалентного определения) предела функции "через последовательности"* это и будет означать, что $b = \lim\limits_{x \to a} f(x)$.

Функция $y = f(x)$ *(действительной переменной) имеет в точке* a *(включая случай* $a = +\infty$*) предел слева тогда и только тогда, когда для любого положительного числа* ε *существует левая окрестность точки* a*, в которой значения функции разнятся между собой меньше, чем на* ε; формульно (соответственно случаям $a \in \mathbb{R}$ и $a = +\infty$):

$$\exists b\big(b = \lim_{x\to a-0} f(x)\big) \Longleftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0 \forall x' \forall x'' \big(a-\delta < x' < x'' < a \Rightarrow \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon\big),$$

$$\exists b\big(b = \lim_{x\to +\infty} f(x)\big) \Longleftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \exists c > 0 \forall x' \forall x'' \big(c < x' < x'' \Rightarrow \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon\big).$$

Ограниченность и монотонность функций

Функцию $y = f(x)$ *(с действительными значениями)* называют *ограниченной сверху на множестве* X, если истинно утверждение $\boxed{\exists b \forall x \big(x \in X \Rightarrow f(x) \leqslant b\big)}$, *означающее, что ограничено сверху* множество $Y_X \overset{\text{def}}{=} \{f(x) \mid x \in X\}$ *всех значений, принимаемых функцией на множестве* X (рис. 8).

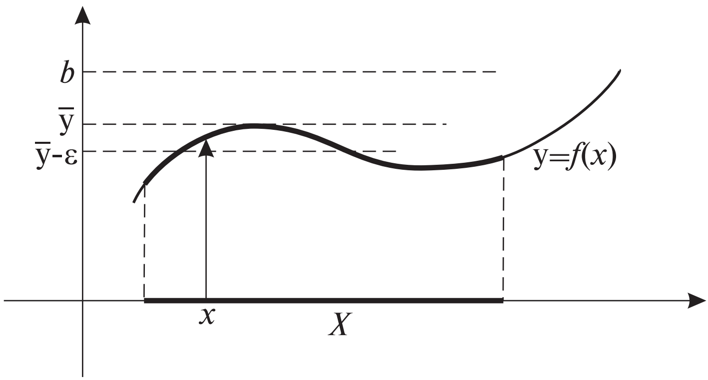


Рис. 8

Замена в последней *формуле* неравенства $f(x) \leqslant b$ противоположно направленным $f(x) \geqslant b$ приводит к определению функции, <u>*ограниченной снизу*</u> на *множестве* X.

Говоря об <u>*ограниченности*</u> функции $y = f(x)$ (принимающей *действительные* значения на множестве X), подразумевают ее *ограниченность сверху* и *снизу*, что равносильно *истинности* утверждения $\boxed{\exists c > 0 \forall x \big(x \in X \Rightarrow |f(x)| \leqslant c\big)}$.[1]

<u>Пример</u>. Функция $y = \dfrac{1}{x}$ на множестве $X = (0, +\infty)$ *ограничена снизу*, но *не ограничена сверху*: $\forall x \Big(x > 0 \Rightarrow 0 < \dfrac{1}{x}\Big)$, но $\forall b \exists x \Big(x > 0 \wedge \dfrac{1}{x} > b\Big)$ $\Big($достаточно взять $x = \dfrac{1}{|b|+1}\Big)$.

Если функция $y = f(x)$ *ограничена сверху* на множестве X, то число $\overline{\mathbf{y}} = \sup Y_X$ — *точную верхнюю грань* множества *значений* этой функции[2] (см. рис. 8) — принимают за <u>*точную верхнюю грань*</u> *функции* $y = f(x)$ *на множестве* X с обозначением $\overline{\mathbf{y}} = \sup\limits_X f(x)$; *формульно*: $\overline{\mathbf{y}} = \sup\limits_X f(x) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

$$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \forall x \big(x \in X \Rightarrow f(x) \leqslant \overline{\mathbf{y}}\big) \wedge \forall \varepsilon > 0 \exists x \big(x \in X \wedge f(x) > \overline{\mathbf{y}} - \varepsilon\big).$$

Подобным образом определяют <u>*точную нижнюю грань*</u> *функции* на *множестве*: $\underline{\mathbf{y}} = \inf\limits_X f(x) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

$$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \forall x \big(x \in X \Rightarrow f(x) \geqslant \underline{\mathbf{y}}\big) \wedge \forall \varepsilon > 0 \exists x \big(x \in X \wedge f(x) < \underline{\mathbf{y}} + \varepsilon\big).$$

Если же функция $y = f(x)$ *не ограничена сверху* на множестве X, т. е. *истинно* утверждение $\forall b \exists x \big(x \in X \wedge f(x) > b\big)$, то полагают $\sup\limits_X f(x) = +\infty$; соответственно, считают, что $\inf\limits_X f(x) = -\infty$ для *не ограниченной снизу* функции.

---

[1] Последняя *формула* распространяет понятие *ограниченности* на *комплекснозначные* функции, для которых понятия *ограниченности сверху* и *ограниченности снизу* лишены смысла.

[2] См. с. 42, *теорема о существовании точных граней*.

Функцию $y = f(x)$ действительной переменной называют *неубывающей* *на множестве $X \subset \mathbb{R}$, если истинно утверждение $\forall x' \forall x'' \big(x' \in X \wedge x' \in X \wedge x' < x'' \Rightarrow f(x') \leqslant f(x'')\big)$; замена в этой формуле неравенства $f(x') \leqslant f(x'')$ неравенствами $f(x') < f(x'')$, $f(x') \geqslant f(x'')$, $f(x') > f(x'')$ приводит к определениям соответственно* *возрастающей*, *невозрастающей* *и* *убывающей* *функции на множестве X.*

Перечисленные виды функций объединяют общим названием *монотонные* *функции на множестве X, при этом возрастающие и убывающие функции (а они являются частными случаями соответственно неубывающих и невозрастающих)*[1] *называют* *строго монотонными.*[2]

В дальнейшем *монотонные функции* будут рассматриваться исключительно на *промежутках* — тех множествах действительной оси[3], которые вместе с любыми двумя своими точками содержат и все *промежуточные* между ними, т. е. на *отрезках*, *интервалах*, *полуинтервалах*, *лучах* и на всей *действительной оси*.

Если I — *промежуток*, то любая его точка, отличная от *концевой*, является *внутренней* точкой этого промежутка: она принадлежат ему вместе с некоторой *окрестностью*. Промежуток, в который не включены его *концевые* точки, называют *открытым* (каждый такой промежуток имеет вид (a, b), где $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$).

---

[1] То, что доказано для *неубывающих* функций, справедливо и для *возрастающих* (и то же в отношении *невозрастающих* и *убывающих* функций).

[2] Для функций *комплексной* переменной и функций, принимающих *комплексные* значения, понятие *монотонности* лишено смысла.

Если в качестве X выступает множество $\mathbb{N}$ *натуральных* чисел, то данные определения *монотонных функций* переходят в приведенные на с. 75 определения *монотонных последовательностей*.

[3] Содержащих более одной точки.

Теорема о пределах неубывающей функции. *Если $y = f(x)$ — неубывающая функция на промежутке $I \subset \mathbb{R}$, то в точках c этого промежутка, отличных от его левой концевой точки, существует предел слева $f(c{-}0)$, а в точках c промежутка, отличных от его правой концевой точки, — предел справа $f(c{+}0)$, при этом $f(c-0) \leqslant f(c) \leqslant f(c{+}0)$.*[1]

Доказательство[2]. Пусть точка c промежутка I не является его *левой* концевой точкой. Множество $\{f(x) \mid x \in I \wedge x < c\}$ (значений функции в точках промежутка I, лежащих *слева* от точки c), являясь *непустым* и *ограниченным сверху* (числом $f(c)$), имеет *точную верхнюю грань*. Обозначив ее $\overline{y}$ (при этом $\overline{y} \leqslant f(c)$), остается доказать, что $\overline{y} = \lim\limits_{x \to c-0} f(x)$.

Так как $\overline{y} = \sup(f(x) \mid x \in I \wedge x < c\}$, из определения *точной верхней грани* множества (см. с. 41) следует, что:

а) $f(x) \leqslant \overline{y}$ для всех $x \in I,\ x < c$;

б) каким бы ни было положительное число ε, в некоторой точке $x' \in I,\ x' < c$ функция принимает значение $f(x') > \overline{y} - \varepsilon$.

Беря $\delta = c - x'$ и используя *неубывание* функции $y = f(x)$ на промежутке I, можно поэтому утверждать, что для всех $x \in (c{-}\delta, c)$ выполняются неравенства $\overline{y} - \varepsilon < f(x) \leqslant \overline{y}$, из чего следует, что число $\overline{y}$ (не превосходящее числа $f(c)$) является для функции $y = f(x)$ *пределом слева* в точке c. **Q.E.D.**

Замечание. По этой же схеме доказывается, что если *левая* (соответственно, *правая*) концевая точка промежутка I *не включается* в этот промежуток, то в ней существует (возможно, *бесконечный*) *предел справа* (соответственно, *слева*), совпадающий с $\inf\limits_I f(x)$ (соответственно, с $\sup\limits_I f(x)$).

---

[1] Такое же утверждение — с заменой последних неравенств на противоположно направленные — справедливо для любой *невозрастающей* функции на промежутке.

[2] Например, для *предела слева*.

III.7. Как понимают непрерывность функции на множестве

Функцию $y = f(x)$ *называют* *непрерывной* *на* *множестве* X,[1] *если истинно утверждение, выражаемое формулой*

$$\boxed{\forall\widetilde{x}\forall\varepsilon>0\exists\delta>0\forall x\big(\widetilde{x}\in X\wedge x\in X\wedge|x-\widetilde{x}|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(\widetilde{x})|<\varepsilon\big)},^2$$

либо равносильное ему утверждение:

> *“Для любой точки* $\widetilde{x}$ *множества* X *и любой сходящейся к ней последовательности* $\{x_n\}$ *точек этого множества последовательность* $\{f(x_n)\}$ *значений функции в точках* x_n *сходится к значению функции в точке* $\widetilde{x}$*”.*

Вот доказательство *равносильности* этих утверждений.

1. Пусть для функции $y = f(x)$ и множества X приведенная выше *формула* имеет значение “истина”. Если $\widetilde{x}$ — любая точка множества X и $\{x_n\}$ — любая *сходящаяся* к ней последовательность точек множества X, то, взяв произвольно *положительное* число ε и *существующее* для него (согласно *формуле*) *положительное* число δ, можно утверждать существование *натурального* числа n_0 со свойством: если $n>n_0$, то $|x_n-\widetilde{x}|<\delta$, а следовательно, (в силу *формулы*) $|f(x_n)-f(\widetilde{x})|<\varepsilon$. Этим доказана *сходимость* последовательности $\{f(x_n)\}$ к значению $f(\widetilde{x})$.

2. Пусть для функции $y = f(x)$ и множества X вышеприведенная *формула* имеет значение “ложь”, т. е. значение “истина” имеет ее *отрицание*

---

[1] *Действительной оси* или *комплексной плоскости*. Множество X предполагается *входящим* в множество определения данной функции.

[2] Читается: *“Какова бы ни была точка* $\widetilde{x}$ *множества* X*, для любого положительного числа* ε *существует такое положительное число* δ*, что для любой точки множества* X*, отстоящей от точки* $\widetilde{x}$ *меньше, чем на* δ*, значения* $f(x)$ *и* $f(\widetilde{x})$ *различаются меньше, чем на* ε*”.*

$\exists\widetilde{x}\exists\varepsilon>0\forall\delta>0\exists x\big(\widetilde{x}\in X\wedge x\in X\wedge|x-\widetilde{x}|<\delta\wedge|f(x)-f(\widetilde{x})|\geqslant\varepsilon\big)$. Последовательно полагая в этой *формуле* $\delta=1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \ldots$ и обозначая $x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots$ *существующие* для этих значений δ точки $x\in X$, получают последовательность $\{x_n\}$ точек множества X со свойством: $|x_n-\widetilde{x}|<\frac{1}{n}$, а $|f(x_n)-f(\widetilde{x})|\geqslant\varepsilon$ для $n=1,2,\ \ldots$ Это означает, что последовательность $\{x_n\}$ *сходится* к точке $\widetilde{x}$, но при этом *не верно*, что последовательность $\{f(x_n)\}$ *сходится* к значению $f(\widetilde{x})$. **Q.E.D.**

Следует иметь в виду, что требования:

а) непрерывности функции $y=f(x)$ на *множестве* X и

б) ее *непрерывности* в *каждой точке* этого *множества* *неравносильны*; точнее, первое требование[1] есть *следствие* второго[2], однако второе *не вытекает* из первого.[3]

Отмеченный факт можно наглядно проиллюстрировать.

Примеры. *1.* Функция $y=f(x)$, заданная на *всей действительной оси* правилом $f(x)=\begin{cases}1, & \text{если } x\in[a,b],\\ 0, & \text{если } x\notin[a,b],\end{cases}$ является *непрерывной* на *отрезке* $[a,b]$, не являясь при этом *непрерывной* в *точках* a и b этого отрезка (в которых она является *непрерывной* только *справа* или только *слева*).

---

[1] Выражаемое *формулой*

$$\forall\widetilde{x}\forall\varepsilon>0\exists\delta>0\forall x\big(\widetilde{x}\in X\wedge x\in X\wedge|x-\widetilde{x}|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(\widetilde{x})|<\varepsilon\big). \qquad (*)$$

[2] Выражаемого *формулой*

$$\forall\widetilde{x}\forall\varepsilon>0\exists\delta>0\forall x\big(\widetilde{x}\in X\wedge|x-\widetilde{x}|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(\widetilde{x})|<\varepsilon\big) \qquad (**)$$

и означающего, что в любой точке множества X функция имеет *предел*, равный ее *значению* в этой *точке* (см. с. 107–108).

[3] Исключение составляет случай *открытого* множества X (у которого каждая точка является *внутренней*, т.е. имеет *окрестность*, принадлежащую этому множеству): для любой точки $\widetilde{x}$ такого множества (и достаточно малого положительного числа δ) выполнение условия $\widetilde{x}\in X\wedge|x-\widetilde{x}|<\delta$ *влечет* выполнение условия $\widetilde{x}\in X\wedge x\in X\wedge|x-\widetilde{x}|<\delta$, так что *формула* $(**)$ оказывается *следствием формулы* $(*)$.

2. Функция $\varphi(x) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} 1, & \text{если } x - \textit{ рациональное} \text{ число,} \\ 0, & \text{если } x - \textit{ иррациональное} \text{ число,} \end{cases}$ является *непрерывной* на *множестве* $\mathbb{Q}$ всех *рациональных* чисел, *не являясь* при этом *непрерывной* ни в одной *точке* этого *множества*[1].

3. Функцию $y = f(x)$, определенную в *одной лишь* точке $\widetilde{x} \in \mathbb{R}$, следует считать *непрерывной* на *одноэлементном множестве* $X = \{\widetilde{x}\}$ (поскольку утверждение
$\forall\widetilde{x}\forall\varepsilon>0\exists\delta>0\forall x\big(\widetilde{x}\in X \wedge x\in X \wedge |x-\widetilde{x}|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(\widetilde{x})|<\varepsilon\big)$
для данной *функции* и данного *множества истинно*), говорить же о *непрерывности* этой функции в *точке* $\widetilde{x}$ (т. е. выполнении для нее соотношения $\lim\limits_{x\to\widetilde{x}} f(x) = f(\widetilde{x})$) попросту лишено смысла.

Стоит отметить, что и чешский математик Больцано (в уже упоминавшейся на с. 42 работе 1817 г. — первой, где дано современное определение *непрерывности функции*), и французский математик Коши (в вышедшем в 1821 г. "Курсе анализа" [**34**]) определяли *непрерывность* функции исключительно на *открытых промежутках* (когда нестыковок типа отмеченных в предыдущих примерах не возникает). Вот что можно прочитать в русском переводе упомянутой работы Больцано ([**11**], с. 174–175): "*Согласно правильному объяснению понимают под выражением, что функция $f(x)$ изменяется по закону непрерывности для всех значений x, которые лежат внутри или вне известных границ, лишь то, что если x — какое-нибудь из этих значений, то разность $f(x+\omega)-f(x)$ может быть сделана меньше, чем любая заданная величина, если можно принять ω столь малым, сколько мы хотим*".

---

[1] Первое из следующих двух утверждений *истинно*, а второе *ложно*:

а) для любой точки $\widetilde{x}\in\mathbb{Q}$ (т. е. рационального *числа) и любой сходящейся к ней последовательности $\{x_n\}$* рациональных *чисел последовательность $\{\varphi(x_n)\}$ значений функции* сходится *к значению $\varphi(\widetilde{x})$;*

б) для любой точки $\widetilde{x}\in\mathbb{Q}$ (т. е. рационального *числа) и любой сходящейся к ней последовательности $\{x_n\}$* действительных *чисел последовательность $\{\varphi(x_n)\}$ значений функции* сходится *к значению $\varphi(\widetilde{x})$.*

Сопоставляя определения *непрерывности* функции[1]: *а)* в *точке* (см. с. 107), *б)* в *точке слева* или *справа* (см. с. 126), *в)* на *множестве* (см. с. 140), можно сделать простой, но важный вывод:

> *Функция $y = f(x)$ является непрерывной на промежутке I тогда и только тогда, когда эта функция:*
> *а) непрерывна в любой внутренней точке промежутка I,*
> *б) непрерывна справа в левой концевой и непрерывна слева в правой концевой точках этого промежутка*[2].

В частности:

> *Непрерывность функции на открытом промежутке (конечном или бесконечном)*[3] *— это то же самое, что ее непрерывность в каждой точке этого промежутка.*

> *Непрерывность функции на отрезке $[a, b]$ есть ее непрерывность в каждой точке интервала (a, b), непрерывность справа в точке a и слева в точке b.*

Из сопоставления же определений *непрерывности* функции на *множестве* (см. с. 140) и *предела* функции в *точке* по *множеству* (см. с. 130) вытекает следующее утверждение (частными случаями которого являются два предыдущих):

> *Функция $y = f(x)$ является непрерывной на множестве X тогда и только тогда, когда в любой неизолированной точке x этого множества*[4] *выполняется соотношение $\lim\limits_{X \ni z \to x} f(z) = f(x)$.*

Для функций, *непрерывных* на каком-либо *множестве*[5] X, справедливо следующее утверждение, аналогичное доказанному на с. 114 для функций, *непрерывных* в *точке*.

---

[1] *Действительной* переменной.

[2] В случаях вхождения одной или обеих этих точек в промежуток I.

[3] Т. е. *промежутке* вида (a, b), где $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$.

[4] Т. е. точке, *принадлежащей* множеству X и являющейся *предельной* для этого множества: $x \in X \wedge \forall \delta > 0 \, \exists z \, (0 < |z - x| < \delta \wedge z \in X)$.

[5] *Действительной оси* или *комплексной плоскости*.

Если функции $y=f(x)$ и $y=g(x)$ непрерывны на множестве X, то функции $y=f(x)\pm g(x)$ и $y=f(x)\cdot g(x)$ также непрерывны на множестве X; для функции же $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ непрерывность гарантирована *на множестве X с исключенными точками x,* в которых $g(x)=0$.

<u>*Доказательство*</u>. Пусть x — любая точка множества X и $\{x_n\}$ — любая *сходящаяся* к ней последовательность точек этого множества. Согласно условию[1] обе последовательности $\{f(x_n)\}$ и $\{g(x_n)\}$ *сходятся* соответственно к числам $f(x)$ и $g(x)$, так что ввиду арифметических свойств сходящихся последовательностей (см. с. 69) *сходятся* — соответственно к числам $f(x)\pm g(x)$ и $f(x)\cdot g(x)$ — последовательности $\{f(x_n)\pm g(x_n)\}$ и $\{f(x_n)\cdot g(x_n)\}$, что и доказывает *непрерывность* функций $y=f(x)\pm g(x)$ и $y=f(x)\cdot g(x)$ на *множестве* X. Те же рассуждения[2] доказывают *непрерывность* на *множестве* X с *исключенными корнями уравнения* $g(x)=0$ и функции $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$. **Q.E.D.**

Применение этого утверждения к *непрерывным на всей действительной оси* функциям $y=x$, $y=\sin x$ и $y=\cos x$ (см. с. 108) дает:

Функции вида $y=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ (т. е. *многочлены) непрерывны* на всей *действительной оси, а* функции $y=\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m}$ *(рациональные),* $y=\mathrm{tg}x$ *(тангенс)* и $y=\mathrm{ctg}x$ *(котангенс)* — на всей *действительной оси с исключенными корнями уравнений* $b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m=0$, $\cos x=0$ *и* $\sin x=0$ *соответственно.*

[1] С учетом равносильного определения *непрерывности* функции на *множестве* через последовательности (см. с. 140).

[2] Если ограничиться точками $x\in X$, в которых $g(x)\neq 0$.

III.8. Какие свойства имеют функции, непрерывные на отрезке

Теорема о прохождении непрерывной функции через нуль.[1] *Если функция*[2] $y = f(x)$ *непрерывна на отрезке и принимает на концах этого отрезка значения разных знаков, то внутри этого отрезка есть точка*[3], *в которой значение функции равно нулю.*

Доказательство. Пусть этим отрезком является $[a, b]$ и пусть, например, $f(a) < 0$, а $f(b) > 0$. Если в точке $\frac{a+b}{2}$ (т. е. *середине* отрезка $[a, b]$) значение функции равно *нулю*, то искомая точка найдена; в противном случае (если $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \neq 0$) из двух отрезков $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$, $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$ один, обозначаемый $[a_1, b_1]$, обладает тем свойством, что значение функции на его *левом* конце *отрицательно*, а на *правом* конце *положительно*. Если в точке $\frac{a_1+b_1}{2}$ значение функции равно *нулю*, то искомая точка найдена; в противном случае один из двух отрезков $\left[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}\right]$, $\left[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1\right]$, обозначаемый $[a_2, b_2]$, будет обладать тем свойством, что $f(a_2) < 0$, а $f(b_2) > 0$ и т. д. Описанный процесс "деления отрезков пополам" либо закончится через конечное число шагов (с нахождением точки, в которой функция равна нулю), либо приведет к *последовательности вложенных отрезков*

$$[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots \supset [a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}] \supset \cdots,$$

---

[1] Первым доказательство этой *теоремы*, базирующееся не на наглядном представлении о *непрерывности* функции, а на четком *определении* этого понятия, дал Больцано в уже упоминавшейся (на с. 42) работе 1817 г. В вышедшем четырьмя годами позже "Курсе анализа" Коши [**34**] приведены два доказательства этой теоремы, лишь одно из которых приемлемо с современных позиций.

[2] Принимающая *действительные* значения.

[3] Хотя бы одна.

для которых $f(a_n)<0<f(b_n)$, $n=1,2,\ldots$ *Принцип вложенных отрезков* (см. с. 44) гарантирует существование *точки* действительной оси, принадлежащая *всем* этим отрезкам (в частности, отрезку $[a,b]$). Обозначив ее c и учитывая, что последовательность $\left\{\frac{b-a}{2^n}\right\}$ *длин* указанных отрезков является *бесконечно малой*, можно утверждать что любая *окрестность* точки c содержит *все* отрезки $[a_n,b_n]$, начиная с некоторого "номера" n, так что $\lim a_n=c$ и $\lim b_n=c$. Ввиду *непрерывности* функции на *отрезке* $[a,b]$ отсюда следует, что $\lim f(a_n) = f(c) = \lim f(b_n)$, а с учетом неравенств $f(a_n)<0<f(b_n)$ — что $f(c)\leqslant 0\leqslant f(c)$ (см. с. 70), т. е. $f(c)=0$. Так как $c\in[a,b]$, а $f(a)f(b)<0$, точка c лежит *внутри* отрезка $[a,b]$. **Q.E.D.**

Как видно на примере функции $y=e^{ix}=\cos x+i\sin x$ (см. с. 122), для непрерывных *комплекснозначных* функций на отрезке утверждение *теоремы* неверно: на концах отрезка $[0,\pi]$ эта функция принимает значения $e^{i0}=1$ и $e^{i\pi}=-1$, хотя $|e^{ix}|=1$ для любой точки x действительной оси (см. с. 119).

Теоремы Ве́йерштрасса[1]

Теорема 1. *Если функция*[2] *является непрерывной на отрезке, то она ограничена на этом отрезке*[3].

Доказательство. Применяя метод доказательства "от противного", следует прийти к *противоречию*, предположив существование функции $y = f(x)$, *непрерывной* на отрезке $[a,b]$, для которой *ложным* является утверждение

$$\exists c>0\forall x\big(x\in[a,b]\Rightarrow|f(x)|\leqslant c\big)$$

---

[1] Так обычно называют следующие две *теоремы*, поскольку именно Ве́йерштрасс первым дал их внятные формулировки и доказательства в своих берлинских лекциях (см. с. 85).

[2] Как *действительнозначная*, так и *комплекснозначная*.

[3] Т. е. для функции $y=f(x)$, *непрерывной* на *отрезке* $[a,b]$, *истинно* утверждение $\exists h>0\forall x\big(x\in[a,b]\Rightarrow|f(x)|\leqslant h\big)$ (см. с. 137).

о ее *ограниченности* на этом отрезке, т. е. *истинным* оказывается его *отрицание* $\forall c>0 \exists x \big(x \in [a,b] \wedge |f(x)|>c\big)$.

"Прочитывая" последнюю *формулу*, беря в ней последовательно значения $c=1,2,\ldots$ и обозначая $x_1, x_2, \ldots$ *существующие* для этих значений *c точки* $x \in [a,b]$, получают последовательность $\{x_n\}$ точек отрезка $[a,b]$ со свойством

$$|f(x_n)|>n, \quad n=1,2,\ldots$$

Последовательность $\{x_n\}$ является *ограниченной* $(a \leqslant x_n \leqslant b)$ и по *теореме Больцано–Вейерштрасса* (см. с. 83–84) имеет *подпоследовательность* $\{x_{n_k}\}$, *сходящуюся* к некоторой точке $\widetilde{x}$, *принадлежащей*[1] *отрезку* $[a,b]$. Ввиду *непрерывности* функции $y=f(x)$ на этом отрезке последовательность $\{f(x_{n_k})\}$ *сходится* (к числу $f(\widetilde{x})$), а потому является *ограниченной* (см. с. 67). Возникает *противоречие*, так как по построению $|f(x_{n_k})|>n_k \geqslant k$ при $k=1,2,\ldots$ Так как *противоречие* возникло из предположения о существовании *непрерывной* функции на отрезке, *не ограниченной* на этом отрезке, это предположение *ложно*. **Q.E.D.**

Теорема 2. *Если функция*[2] *является непрерывной на отрезке, то она достигает на этом отрезке своих точной нижней и точной верхней граней*[3].

<u>Доказательство</u> (например, достижимости *точной верхней грани*). По *теореме 1* функция $y=f(x)$, *непрерывная* на

---

[1] Как показывает переход к пределу в неравенствах $a \leqslant x_{n_k} \leqslant b$ (см. с. 70). Следует отметить, что если бы речь в теореме шла не об *отрезке*, а об *интервале* (a,b), то из неравенств $a<x_{n_k}<b$ вытекали бы лишь неравенства $a \leqslant \widetilde{x} \leqslant b$, так что утверждать принадлежность точки $\widetilde{x}$ *интервалу* (a,b) было бы нельзя.

[2] Принимающая *действительные* значения.

[3] Т. е. для любой функции $y=f(x)$, *непрерывной* на *отрезке* $[a,b]$, *истинны* утверждения

$$\exists \underline{x}\big(\underline{x} \in [a,b] \wedge f(\underline{x}) = \inf_{[a,b]} f(x)\big) \quad \text{и} \quad \exists \overline{x}\big(\overline{x} \in [a,b] \wedge f(\overline{x}) = \sup_{[a,b]} f(x)\big).$$

отрезке $[a,b]$, *ограничена* на этом отрезке. В частности, она *ограничена сверху*, а потому у *множества* $Y_{[a,b]}$ *значений* этой функции на отрезке $[a,b]$ существует *точная верхняя грань*[1] — действительное число $\mathbf{\overline{y}}$ со свойством:

$$\forall x\big(x\in[a,b]\Rightarrow f(x)\leqslant\mathbf{\overline{y}}\big)\wedge\forall\varepsilon>0\,\exists x\big(x\in[a,b]\wedge f(x)>\mathbf{\overline{y}}-\varepsilon\big).$$

"Прочитывая" эту *формулу*, беря в ней последовательно значения $\varepsilon=1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \ldots$ и обозначая $x_1,x_2,x_3,\ldots$ *существующие* для этих значений ε *точки* $x\in[a,b]$, получают последовательность $\{x_n\}$ точек отрезка $[a,b]$ со свойством

$$\mathbf{\overline{y}}-\frac{1}{n}<f(x_n)\leqslant\mathbf{\overline{y}},\quad n=1,2,\ldots$$

Так как последовательность $\{x_n\}$ является *ограниченной* ($a\leqslant x_n\leqslant b$), по *теореме Больцано–Вейерштрасса* (см. с. 85–86) у нее есть *подпоследовательность* $\{x_{n_k}\}$, *сходящаяся* к некоторой точке $\overline{x}$, которая *принадлежит* (в силу неравенств $a\leqslant x_{n_k}\leqslant b$) *отрезку* $[a,b]$. Ввиду *непрерывности* функции $y=f(x)$ на этом *отрезке* последовательность $\{f(x_{n_k})\}$ *сходится* к числу $f(\widetilde{x})$, тогда как применение к неравенствам $\mathbf{\overline{y}}-\frac{1}{n}<f(x_n)\leqslant\mathbf{\overline{y}},\ \ n=1,2,\ldots$, "принципа сэндвича" (см. с. 71) свидетельствует о том, что последовательность $\{f(x_n)\}$ *сходится* к числу $\mathbf{\overline{y}}$. Следует вывод:

$$\mathbf{\overline{y}}=\lim f(x_n)=\lim f(x_{n_k})=f(\overline{x}).\ \ \mathbf{Q.E.D.}$$

Пример функции $y=\frac{1}{x}$, являющейся *непрерывной*, но *не ограниченной* на любом *интервале* $(0,a)$ и *не достигающей* на этом *интервале* своей *точной нижней грани*[2], показывает, что на функции, *непрерывные* на *промежутке*, не являющемся *отрезком*, *теоремы Вейерштрасса* не распространяются.

---

[1] Называемая также *точной верхней гранью* данной *функции* на *отрезке* $[a,b]$.

[2] $\sup\limits_{(0,a)}\frac{1}{x}=+\infty$, а $\inf\limits_{(0,a)}\frac{1}{x}=\frac{1}{a}<\frac{1}{x}$ при $0<x<a$.

Пример же функции $y = x - [x]$ (*дробная часть* числа x), для которой $\lim\limits_{x\to 1-0}(x-[x]) = 1$, тогда как $1-[1]=0$, говорит о том, что функция, не являющаяся *непрерывной* на *отрезке*, не обязана *достигать* на нем *точной верхней грани*.

Равномерная непрерывность функции на множестве

Функцию $y = f(x)$ называют <u>*равномерно непрерывной*</u> *на множестве X, если для нее истинно утверждение, выражаемое формулой*

$$\boxed{\forall\varepsilon>0\exists\delta>0\forall x\forall x\big(x\in X\wedge\widetilde{x}\in X\wedge|x-\widetilde{x}|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(\widetilde{x})|<\varepsilon\big)},$$

смысл которой: "для любого положительного числа ε существует такое положительное число δ, что в любых двух точках множества X, отстоящих друг от друга меньше, чем на δ, значения функции разнятся меньше, чем на ε".

Соотнести это понятие с понятием *непрерывности* функции на *множестве* позволяет анализ *формул*, выражающих эти понятия. Обе *формулы* строятся на основе одного и того же *предиката* $x\in X\wedge\widetilde{x}\in X\wedge|x-\widetilde{x}|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(\widetilde{x})|<\varepsilon$, и различие заложенного в них содержания определяется различием порядка следования *кванторов*. В *формуле*

$\forall\widetilde{x}\forall\varepsilon>0\exists\delta>0\forall x\big(x\in X\wedge\widetilde{x}\in X\wedge|x-\widetilde{x}|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(\widetilde{x})|<\varepsilon\big)$[1]

значение переменной $\delta>0$ зависит от выбора значений как переменной $\varepsilon>0$, так и переменной $\widetilde{x}\in X$. В формуле же

$\forall\varepsilon>0\exists\delta>0\forall x\forall\widetilde{x}\big(x\in X\wedge\widetilde{x}\in X\wedge|x-\widetilde{x}|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(\widetilde{x})|<\varepsilon\big)$[2]

значение переменной $\delta>0$ зависит лишь от выбора значения переменной $\varepsilon>0$, иначе говоря, число δ определяется исключительно по числу ε и *не зависит* от точки $\widetilde{x}\in X$.

---

[1] Выражающей свойство *непрерывности* функции $y = f(x)$ на *множестве* X.

[2] А она выражает свойство *равномерной непрерывности* функции $y = f(x)$ на *множестве* X.

Вывод: функция, *равномерно непрерывная* на множестве, является *непрерывной* на этом множестве, но утверждать обратное в общем случае оснований нет. Подтверждают это следующие примеры.

1. Функция $y=\sqrt{x}$ *равномерно непрерывна* на всем множестве своего определения — промежутке $[0,+\infty)$.[1]

Доказать это, т. е. установить *истинность* утверждения

$$\forall\varepsilon>0\,\exists\delta>0\,\forall x\,\forall\widetilde{x}\big(x\geqslant 0\wedge\widetilde{x}\geqslant 0\wedge|x-\widetilde{x}|<\delta\Rightarrow|\sqrt{x}-\sqrt{\widetilde{x}}|<\varepsilon\big),$$

можно выбором для любого *положительного* числа ε значения $\delta=\varepsilon^2$: если $x\geqslant 0$, $\widetilde{x}\geqslant 0$ и $|x-\widetilde{x}|<\varepsilon^2$, то[2] $|\sqrt{x}-\sqrt{\widetilde{x}}|<\varepsilon$.

2. Функция $y=x^2$:

а) *непрерывна* на *действительной оси*,[3] но

б) не является на ней *равномерно непрерывной*.

а) Так как $|x^2-\widetilde{x}^2|=|x+\widetilde{x}|\cdot|x-\widetilde{x}|=|2\widetilde{x}+(x-\widetilde{x})|\cdot|x-\widetilde{x}|$, неравенство $|x^2-\widetilde{x}^2|<\varepsilon$ (при *заданном* $\widetilde{x}$ и *переменном* x) оказывается *следствием* неравенства $|x-\widetilde{x}|<\delta$ лишь в том случае, когда $(2|\widetilde{x}|+\delta)\delta\leqslant\varepsilon$, т. е. при $\delta\leqslant-|\widetilde{x}|+\sqrt{\widetilde{x}^2+\varepsilon}<\frac{\varepsilon}{2|\widetilde{x}|}$.

---

[1] А следовательно, и на любом *подмножестве* этого промежутка: любая функция, *равномерно непрерывная* на *множестве* X, является *равномерно непрерывной* и на любом *подмножестве* $X_0\subset X$, так как если *истинно* утверждение

$$\forall\varepsilon>0\,\exists\delta>0\,\forall x\,\forall\widetilde{x}\big(x\in X\wedge\widetilde{x}\in X\wedge|x-\widetilde{x}|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(\widetilde{x})|<\varepsilon\big),$$

то (по *закону цепного умозаключения* $(\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B})\wedge(\mathcal{B}\Rightarrow\mathcal{C})\Rightarrow(\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{C})$) *истинно* и утверждение

$$\forall\varepsilon>0\,\exists\delta>0\,\forall x\,\forall\widetilde{x}\big(x\in X_0\wedge\widetilde{x}\in X_0\wedge|x-\widetilde{x}|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(\widetilde{x})|<\varepsilon\big);$$

разумеется, это же относится и к понятию *непрерывности* функции на *множестве*.

[2] Поскольку $|x-\widetilde{x}|=|(\sqrt{x}+\sqrt{\widetilde{x}})(\sqrt{x}-\sqrt{\widetilde{x}})|\geqslant|\sqrt{x}-\sqrt{\widetilde{x}}|^2$.

[3] Это уже было установлено ранее (см. с. 108), но здесь будет дано другое доказательство — исходя из *формулы*, выражающей *непрерывность* функции на *множестве*.

Этим доказана *истинность* утверждения

$$\forall\widetilde{x}\forall\varepsilon>0\exists\delta>0\forall x\bigl(|x-\widetilde{x}|<\delta\Rightarrow|x^2-\widetilde{x}^2|<\varepsilon\bigr)$$

(о *непрерывности* функции $y=x^2$ на *действительно оси*)[1].

б) Доказать, что функция $y=x^2$ не является *равномерно непрерывной* на *действительной оси* — значит установить *истинность отрицания* утверждения

$$\forall\varepsilon>0\exists\delta>0\forall x\forall\widetilde{x}\bigl(|x-\widetilde{x}|<\delta\Rightarrow|x^2-\widetilde{x}^2|<\varepsilon\bigr) \text{ —}$$

утверждения

$$\exists\varepsilon>0\forall\delta>0\exists x\exists x\bigl(|x-\widetilde{x}|<\delta\wedge|x^2-\widetilde{x}^2|\geqslant\varepsilon\bigr).$$

Если для любого *положительного* числа δ взять $\widetilde{x}=\frac{1}{\delta}$, а $x=\frac{1}{\delta}+\frac{\delta}{2}$, то одновременно будут выполняться неравенства $|x-\widetilde{x}|<\delta$ и $|x^2-\widetilde{x}^2|>1$, что доказывает *истинность* сформулированного утверждения (поскольку можно взять $\varepsilon=1$).

Выполнению условия *равномерной непрерывности* функции $y=f(x)$ на *множестве* $X\subset\mathbb{R}$ (и, наоборот, не выполнению этого условия) можно дать следующую наглядную иллюстрацию.

Если *для любого* положительного числа ε существует такой *прямоугольник* с вертикальными сторонами длины 2ε, что при параллельном перемещении этого прямоугольника так, что его *центр* остается на *графике* функции, ни одна точка графика не оказывается *над* или *под* этим *прямоугольником* (рис. 9, а), то данная функция будет *равномерно непрерывной* на множестве X.

---

[1] И одновременно показано, что надеяться на *равномерную непрерывность* этой функции на *действительной оси* (или любом *неограниченном* ее подмножестве) — *истинность* утверждения

$$\forall\varepsilon>0\exists\delta>0\forall x\forall\widetilde{x}\bigl(|x-\widetilde{x}|<\delta\Rightarrow|x^2-\widetilde{x}^2|<\varepsilon\bigr) \text{ —}$$

не приходится: нет *положительного* числа δ, *зависящего лишь от* ε, для которого неравенство $\delta<\frac{\varepsilon}{2|\widetilde{x}|}$ выполнялось бы сразу для всех $\widetilde{x}$.

Если же *существует* такое положительное число ε, что каков бы ни был прямоугольник с вертикальными сторонами длины 2ε (и сколь угодно малыми горизонтальными сторонами), при параллельном перемещении этого прямоугольника так, что его *центр* не покидает *графика* функции, непременно найдется положение, при котором какая-то точка *графика* оказывается *над* или *под* этим *прямоугольником* (рис. 9, *б*), то данная функция не будет *равномерно непрерывной* на множестве X.

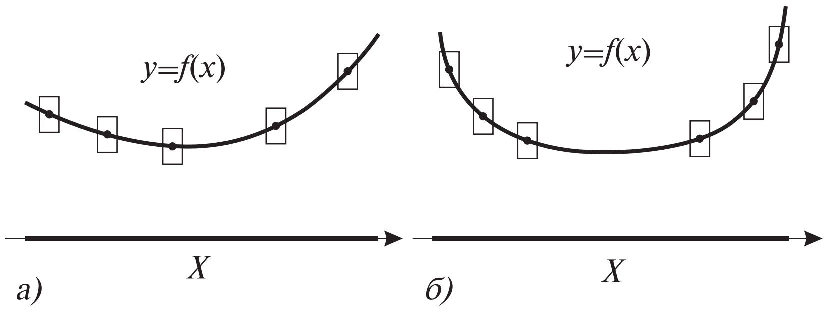


Рис. 9

Понятие функции, *равномерно непрерывной* от a до b (*gleichmässig continuirlich von* $x = a$ *bis* $x = b$) ввел Гейне (точнее, Хайне) в его уже упоминавшейся на с. 112 публикации 1872 г. в J.reine und angew. Math. за 1872 г. (т. 74, с. 184). В той же публикации (на с. 186) сформулирована и доказана следующая *теорема* (6 *Lehrsatz*), автором которой в практике российского преподавания анализа принято считать Кантора — ученика и более именитого коллегу Гейне.[1]

[1] О важности этой теоремы можно судить хотя бы по тому, что она является центральным пунктом доказательства *интегрируемости* любой *непрерывной* функции на *отрезке*.

Теорема Кантора о равномерной непрерывности. *Если функция непрерывна на отрезке, то она является на нем равномерно непрерывной.*

<u>Доказательство</u> (“от противного”). Пусть некая функция $y = f(x)$, *непрерывная* на отрезке $[a, b]$, не является на нем *равномерно непрерывной*, так что *ложно* утверждение

$$\forall\varepsilon>0\exists\delta>0\forall x\forall\widetilde{x}\big(x\in[a,b]\wedge\widetilde{x}\in[a,b]\wedge|x-\widetilde{x}|<\delta\Rightarrow$$
$$\Rightarrow|f(x)-f(\widetilde{x})|<\varepsilon\big),$$

т. е. *истинно* его *отрицание*

$$\exists\varepsilon>0\forall\delta>0\exists x\exists\widetilde{x}\big(x\in[a,b]\wedge\widetilde{x}\in[a,b]\wedge|x-\widetilde{x}|<\delta\wedge$$
$$\wedge|f(x)-f(\widetilde{x})|\geqslant\varepsilon).$$

“Прочитывая” последнюю *формулу*, полагая в ней последовательно значения $\delta = 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \ldots$ и обозначая $x_1, \widetilde{x}_1,\ x_2, \widetilde{x}_2,\ x_3, \widetilde{x}_3,\ \ldots$ *существующие* для этих значений δ *пары точек* $x \in [a, b]$ и $\widetilde{x} \in [a, b]$, получают две последовательности $\{x_n\}$ и $\{\widetilde{x}_n\}$ точек отрезка $[a, b]$ со свойством:

$$|x_n-\widetilde{x}_n|<\frac{1}{n},\ \text{а}\ \ |f(x_n)-f(\widetilde{x}_n)|\geqslant\varepsilon,\quad n=1,2,\ldots$$

Последовательность $\{\widetilde{x}_n\}$ (как и последовательность $\{x_n\}$) является *ограниченной* ($a \leqslant \widetilde{x}_n \leqslant b$) и по *теореме Больцано –Вейерштрасса* имеет *подпоследовательность* $\{\widetilde{x}_{n_k}\}$, *сходящуюся* к некоторой точке $\widetilde{x}$, *принадлежащей* (в силу неравенств $a \leqslant \widetilde{x}_{n_k} \leqslant b$) *отрезку* $[a, b]$. С учетом того, что $|x_{n_k} - \widetilde{x}_{n_k}| < \frac{1}{n_k} \leqslant \frac{1}{k}$, *подпоследовательность* $\{x_{n_k}\}$ *последовательности* $\{x_n\}$ *сходится* к той же точке $\widetilde{x}$. Ввиду *непрерывности* функции $y = f(x)$ на *отрезке* $[a, b]$ выполняются соотношения $\lim f(\widetilde{x}_{n_k}) = f(\widetilde{x})$ и $\lim f(x_{n_k}) = f(\widetilde{x})$, так что последовательность $\{f(x_{n_k}) - f(\widetilde{x}_{n_k})\}$ является *бесконечно малой*. Возникает противоречие с выполняющимся для любого n неравенством $|f(x_n) - f(\widetilde{x}_n)| \geqslant \varepsilon$. Это означает, что функции, *непрерывной* на *отрезке*, не являющейся на нем *равномерно непрерывной*, не существует. **Q.E.D.**

На функции, *непрерывные* на *промежутках*, не являющихся *отрезками*, утверждение *теоремы* не распространяется. При невозможности прямого применения теоремы ею пользуются вкупе с другими соображениями.

Пример. Функция $y = \frac{\sin x}{x}$ *равномерно непрерывна* на множестве $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (*действительной оси* без точки 0).

Так как $\frac{\sin x}{x} \to 0$ при $x \to \pm\infty$, применение *критерия Коши существования предела функции* (см. с. 134–136) позволяет заключить: для любого *положительного* числа ε существуют такое *положительное* число c, что для любых двух точек $x, \widetilde{x}$ каждого из промежутков $(-\infty, -c)$ и $(c, +\infty)$ (*окрестностей* элементов $\pm\infty$) выполнено неравенство $\left|\frac{\sin x}{x} - \frac{\sin \widetilde{x}}{\widetilde{x}}\right| < \varepsilon$.

Так как $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (см. с. 120), функция

$$y = f(x) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 1, & \text{если } x = 0, \end{cases}$$

оказывается *непрерывной* на всей *действительной оси* и, в частности, на *отрезке* $[-2c, 2c]$. По доказанной *теореме* эта функция является *равномерно непрерывной* на этом *отрезке*, а следовательно для взятого *положительного* числа ε существует такое *положительное* число $\widetilde{\delta}$, что для любых двух точек $x, \widetilde{x} \in [-2c, 2c]$ выполнение неравенства $|x - \widetilde{x}| < \widetilde{\delta}$ обеспечивает выполнение неравенства $|f(x) - f(\widetilde{x})| < \varepsilon$.

Если теперь взять за δ *наименьшее* из положительных чисел $\widetilde{\delta}$ и c, то для любых (отличных от нуля) двух точек $x, \widetilde{x}$ действительной оси, для которых $|x - \widetilde{x}| < \delta$, будет выполняться неравенство $\left|\frac{\sin x}{x} - \frac{\sin \widetilde{x}}{\widetilde{x}}\right| < \varepsilon$.[1]

---

[1] Достаточно заметить, что обе точки x, $\widetilde{x}$ непременно попадают в *один и тот же* из промежутков $(-\infty, -c)$, $[-2c, 2c]$, $(c, +\infty)$.

III.9. Какие монотонные функции являются непрерывными на промежутках

Из *теоремы о прохождении непрерывной функции через нуль* (см. с. 145) вытекает следующее утверждение.

Теорема о промежуточных значениях. *Если функция $y=f(x)$ непрерывна на промежутке $I\subset\mathbb{R}$ и в некоторых точках x_1 и x_2 этого промежутка принимает значения y_1 и y_2 $(y_1\neq y_2)$, то эта функция принимает на промежутке I и все значения, промежуточные между y_1 и y_2.*

Краткая формулировка:

> *Множеством значений функции, непрерывной на промежутке, также является промежуток.*

Доказательство. Пусть $Y_I=\{f(x)\,|\,x\in I\}$ — *множество значений*, принимаемых функцией $y=f(x)$, *непрерывной* на *промежутке* I. Доказать, что это множество есть *промежуток* (см. с. 43), — значит доказать, что каковы бы ни были числа $y_1,y_2\in Y_I$, любое число $\widetilde{y}$, *промежуточное* между y_1 и y_2, *принадлежит* множеству Y_I. Пусть x_1 и x_2 — те точки промежутка I, в которых функция принимает значения y_1 и y_2, а $\widetilde{y}$ — любое число, *промежуточное* между y_1 и y_2. Так как по условию I есть *промежуток*, ему принадлежит *отрезок* с концевыми точками x_1 и x_2, а потому на этом *отрезке* функция $y=f(x)$, а вместе с ней и функция $y=f(x)-\widetilde{y}$, является *непрерывной*. Применение ко второй функции (а она в точках x_1 и x_2 принимает значения $y_1-\widetilde{y}$ и $y_2-\widetilde{y}$ *разных знаков*) *теоремы о прохождении непрерывной функции через нуль* позволяет заключить: между точками x_1 и x_2 (а следовательно, на *промежутке* I) есть (хотя бы одна) точка $\widetilde{x}$, в которой значение функции $y=f(x)-\widetilde{y}$ *равно нулю*, т. е. $f(\widetilde{x})=\widetilde{y}$. **Q.E.D.**

Для *монотонных* функций верно обратное утверждение.

Критерий непрерывности монотонной функции. *Для того чтобы функция, монотонная на промежутке, была на нем непрерывной, необходимо и достаточно, чтобы множество значений этой функции было промежутком.*

Доказательство. По предыдущей *теореме* множество значений *любой* (*монотонной* или *немонотононой*) *непрерывной* функции на *промежутке* является *промежутком*, так что доказательства требует лишь *достаточность* сформулированного условия.

Пусть $y = f(x)$ — *неубывающая* (для определенности) функция на *промежутке* $I \subset \mathbb{R}$ и пусть множество ее *значений* на этом *промежутке* также является *промежутком.* Чтобы доказать *непрерывность* функции $y = f(x)$ на промежутке I методом "от противного", следует предположить, что в некоторой точке c промежутка I не выполняется хотя бы одно из равенств $f(c-0) = f(c) = f(c+0)$. С учетом того, что в силу *теоремы о пределах неубывающей функции* (см. с. 137) в любой точке $c \in I$ выполняются соотношения[1] $f(c-0) \leqslant f(c) \leqslant f(c+0)$, это будет означать, что либо $f(c-0) < f(c)$, либо $f(c) < f(c+0)$. Если предположить, что выполняется, например, первое неравенство, то для *положительного* числа $\varepsilon = \frac{f(c)-f(c-0)}{2}$ будет существовать такая *левая окрестность* точки c, для всех точек x которой будут выполняться неравенства $f(c-0)-\varepsilon < f(x) < f(c-0)+\varepsilon$, а следовательно, и неравенства $f(x) < \frac{f(c)+f(c-0)}{2} < f(c)$. Это означает, что функция *не принимает* значение $\frac{f(c)+f(c-0)}{2}$, *промежуточное* между ее значениями в точке c и в точках промежутка I, лежащих слева от точки c, — *противоречие.*

[1] Или — если c является концевой точкой промежутка I (принадлежащей этому промежутку) — одно из этих соотношений.

Теорема об обратной функции. *Если на промежутке* $I \subset \mathbb{R}$ *функция* $y = f(x)$ *является непрерывной и строго монотонной, то на множестве* $Y_I = \{f(x) \,|\, x \in I\}$ значений, принимаемых этой функции на промежутке[1] I, определена *обратная к* $y = f(x)$ *функция*[2] $x = f^{-1}(y)$, *также являющаяся непрерывной и строго монотонной* (рис. 10).

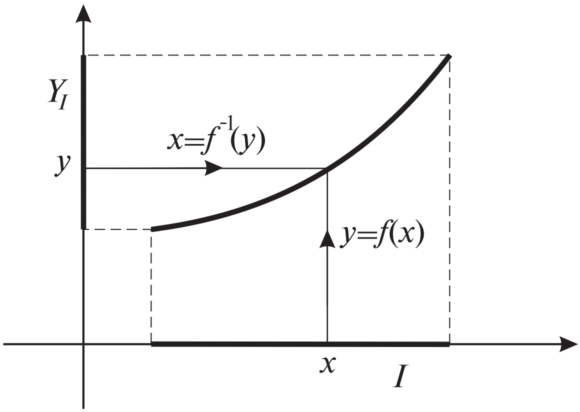


Рис. 10

<u>Доказательство</u>. Пусть $y = f(x)$ — *строго монотонная* (для определености, *возрастающая*) функция, *непрерывная* на *промежутке* I. Так как для любого значения $y \in Y_I$ существует ровно *одно* значение[3] $x \in I$, для которого $f(x) = y$, на *промежутке* Y_I определена *обратная* к $y = f(x)$ функция $x = f^{-1}(y)$,[4] *множеством значений* для которой служит

[1] По *теореме о промежуточных значениях* (см. с. 155) множество Y_I также является *промежутком*.

[2] *Восстанавливающая* значения $x \in I$ по значениям $y = f(x) \in Y_I$.

[3] В силу *строгой монотонности* функции $y = f(x)$.

[4] По определению это означает, что $f^{-1}(f(x)) = x$ для любого $x \in I$, равно как $f(f^{-1}(y)) = y$ для любого $y \in Y_I$.

промежуток I. В силу предыдущего *критерия* для доказательства *непрерывности* функции $x = f^{-1}(y)$ на промежутке Y_I достаточно доказать ее *монотонность* (а именно, *возрастание*) на указанном промежутке, т. е. выполнение для *любой* пары точек $y_1, y_2 \in Y_I$, $y_1 < y_2$, неравенства $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$. Допустив (если рассуждать “от противного”), что $f^{-1}(y_1) \geqslant f^{-1}(y_2)$ для *какой-то* пары точек $y_1, y_2 \in Y_I$, $y_1 < y_2$, приходят (с учетом *возрастания* функции $y = f(x)$ на исходном промежутке I) к *противоречию*: $y_1 = f(f^{-1}(y_1)) \geqslant f(f^{-1}(y_2)) = y_2$. **Q.E.D.**

Замечание. График функции $x = f^{-1}(y)$ *совпадает* с графиком функции $y = f(x)$, а при переходе к записи $y = f^{-1}(x)$ оказывается *симметричным* ему относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов.

Вот несколько примеров, иллюстрирующих практическую значимость доказанной теоремы.

1. Функция $y = x^2$, являющаяся *непрерывной* в любой точке *действительной оси* (см. с. 108), *возрастает* на промежутке $[0, +\infty)$[1]. В силу *критерия непрерывности монотонной функции* (см. с. 156) *множеством значений* функции $y = x^2$ является *промежуток*, а с учетом того, что $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$, этим *промежутком* является $[0, +\infty)$. По *теореме об обратной функции* на промежутке $[0, +\infty)$ определена *обратная* к $y = x^2$ функция $x = \sqrt{y}$, или (после переобозначения переменных) $y = \sqrt{x}$ (другая запись $y = x^{\frac{1}{2}}$)[2], *возрастающая* и *непрерывная* на указанном промежутке.

Разобранный пример допускает следующее обобщение.

1'. Функция $y = x^n$ (при фиксированном натуральном n)

---

[1] Если $0 \leqslant x_1 < x_2$, то $x_2^2 - x_1^2 = (x_2 + x_1)(x_2 - x_1) > 0$.

[2] Таким образом, $\sqrt{x^2} = x$ и $(\sqrt{x})^2 = x$ для любого $x \geqslant 0$.

непрерывна[1] в любой точке *действительной оси*. В силу же *формулы разности степеней* (см. с. 33) она *возрастает* на промежутке $[0,+\infty)$ (а при *нечетном* n — на всей *действительной оси*), поскольку

$$x_2^n - x_1^n = (x_2 - x_1)(x_2^{n-1} + x_2^{n-2}x_1 + \cdots + x_2 x_1^{n-2} + x_1^{n-1}) > 0$$

для *неотрицательных* $x_1 < x_2$ (а при *нечетном* n также и для *отрицательных* $x_1 < x_2$). Вследствие *критерия непрерывности монотонной функции* (см. с. 156) *множеством значений* функции $y = x^n$ является *промежуток*, а с учетом того, что $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$, этим *промежутком* является $[0,+\infty)$ при *четном* n и $(-\infty,+\infty)$ при *нечетном* n. По *теореме об обратной функции* на этом промежутке определена *обратная* к $y = x^n$ функция $x = \sqrt[n]{y}$, или (после переобозначения переменных) $y = \sqrt[n]{x}$ (другая запись $y = x^{\frac{1}{n}}$)[2], *возрастающая* и *непрерывная* на указанном промежутке.

2. Обе функции $y = \sin x$ и $y = \cos x$ *непрерывны* на всей *действительной оси* (см. с. 108), причем первая *возрастает* на *отрезке* $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, а вторая *убывает* на *отрезке* $[0,\pi]$.[3] Следует вывод: на *отрезке* $[-1,1]$ (являющемся *множеством значений* для той и другой функции) определены *обратные* к ним функции $x = \arcsin y$ и $x = \arccos y$, *непрерывные* на этом отрезке, причем первая является *возрастающей*, имея множеством значений *отрезок* $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, а вторая — *убывающей* с множеством значений $[0,\pi]$.

---

[1] Как *произведение* $y = \overbrace{x \cdots x}^{n}$ *непрерывных* функций (см. с. 108, 114).

[2] Таким образом, справедливы тождества $\sqrt[n]{x^n} = x$, $(\sqrt[n]{x})^n = x$.

[3] Это следует из того, что

$$\sin x_2 - \sin x_1 = 2\cos\frac{x_2+x_1}{2}\sin\frac{x_2-x_1}{2} > 0, \text{ если } -\frac{\pi}{2} \leqslant x_1 < x_2 \leqslant \frac{\pi}{2},$$

$$\cos x_2 - \cos x_1 = -2\sin\frac{x_2+x_1}{2}\sin\frac{x_2-x_1}{2} < 0, \text{ если } 0 \leqslant x_1 < x_2 \leqslant \pi.$$

3. Функция $y=\operatorname{tg} x$ *непрерывна* (как *отношение* непрерывных функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$) на *действительной оси*, исключая *точки* $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, и является *возрастающей* на *интервале* $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$: если $-\frac{\pi}{2} < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}$, то $\operatorname{tg} x_2 - \operatorname{tg} x_1 = \frac{\sin x_2}{\cos x_2} - \frac{\sin x_1}{\cos x_1} = \frac{\sin(x_2 - x_1)}{\cos x_1 \cos x_2} > 0$. Ввиду того, что $\lim\limits_{x\to\pm(\frac{\pi}{2}-0)} \frac{\sin x}{\cos x} = \pm\infty$, *промежутком значений* функции $y=\operatorname{tg} x$ служит вся *действительная ось*, на которой по *теореме об обратной функции* определена *обратная* к $y=\operatorname{tg} x$ функция $x = \operatorname{arctg} y$, являющаяся *непрерывной* и *возрастающей* на всей *действительной оси* и имеющая множеством значений *интервал* $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

По этой же схеме — с заменой интервала $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ интервалом $(0, \pi)$ — устанавливается существование функции $x = \operatorname{arcctg} y$ (*обратной* к $y = \operatorname{ctg} x$), являющейся *непрерывной* и *убывающей* на всей *действительной оси* и имеющей множеством значений *интервал* $(0, \pi)$.

Главным же приложением *теоремы об обратной функции* является определение *логарифма* — функции, *обратной* к *экспоненциальной* на действительной оси.

Определение и свойства логарифма

Экспоненциальная функция (*экспонента*), обозначаемая $y = \exp x$ (а также $y = e^x$) и определяемая для всех (и *действительных*, и *мнимых*) значений переменной x как

$$\exp x \overset{\text{def}}{=} \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right),$$

обладает следующими свойствами (см. с. 97, 106, 107):

1° $\exp x_1 \exp x_2 = \exp(x_1 + x_2)$ — *основное тождество*,

2° $\lim\limits_{x\to a} \exp x = \exp a$ — *свойство непрерывности*,

3° $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\exp x - 1}{x} = 1$ — *основной предел.*

Если ограничиться лишь *действительными* значениями x (т. е. рассматривать *экспоненциальную* функцию на *действительной оси*), то к уже перечисленным свойствам надлежит добавить следующие:

4° $\lim\limits_{x\to+\infty} \exp x = +\infty$, *а* $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp x = 0$.[1]

<u>*Доказательство*</u>. Первое соотношение вытекает вытекает из того, что для *положительных* значений x

$$\exp x = \lim_{n\to+\infty}\Big(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\,\cdots\,+\frac{x^n}{n!}\Big)\geqslant 1+x,$$

а для доказательства второго достаточно заметить, что

$$\lim_{x\to-\infty} \exp x = \lim_{(-x)\to+\infty} \frac{1}{\exp(-x)} = 0. \quad \textbf{Q.E.D.}$$

5° На действительной оси функция $y = \exp x$ является возрастающей и имеет множеством значений промежуток $(0,+\infty)$.

<u>*Доказательство*</u>. Так как при $x>0$

$$\exp x = \lim_{n\to+\infty}\Big(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\,\cdots\,+\frac{x^n}{n!}\Big)\geqslant 1+x>1;$$

а $\exp x \exp(-x) = \exp 0 = 1$, функция $y = \exp x$ в точках действительной оси принимает лишь *положительные* значения, и если $x_1 < x_2$, то

$$\exp x_2 = \exp(x_2 - x_1 + x_1) = \exp(x_2 - x_1)\exp x_1 > \exp x_1,$$

[1] Точнее, $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp x = 0+0$ (см. с. 126). Если (учитывая это свойство) распространить определение экспоненциальной функции на всю *расширенную систему действительных чисел* (см. с. 43), полагая по определению $\boxed{\exp(+\infty) = +\infty, \quad \exp(-\infty) = 0}$, то свойство *перестановочности* символов *экспоненциальной функции* и *предела* — равенство $\boxed{\lim\limits_{t\to\alpha} \exp\big(\varphi(t)\big) = \exp\big(\lim\limits_{t\to\alpha}\varphi(t)\big)}$ — будет выполняться всякий раз, когда функция $y=\varphi(t)$ имеет в (*конечной* или *бесконечной*) точке α *конечный* или *бесконечный* предел.

что доказывает *возрастание* функции $y = \exp x$ на действительной оси. В силу *критерия непрерывности монотонной функции множество значений* этой функции есть *промежуток*, а так как этот *промежуток* содержит лишь *положительные* числа, в том числе (*свойство 4°*) *сколь угодно большие* и *сколь угодно близкие к нулю*, этим *промежутком* является $(0, +\infty)$. **Q.E.D.**

В сочетании с *теоремой об обратной функции* только что доказанное свойство *экспоненциальной* функции позволяет сделать следующий важный вывод:

Функция $y = \exp x$, рассматриваемая на действительной оси, имеет обратную функцию, определенную на промежутке $(0, +\infty)$ и являющуюся на нем непрерывной и возрастающей. Эту функцию называют логарифмической (логарифмом[1]*) и обозначают $x = \ln y$; таким образом:*

$$\boxed{\ln(\exp x) = x \text{ для всех } x \in \mathbb{R}, \ \exp(\ln y) = y \text{ для всех } y > 0}.$$

Оперируя *основным тождеством для экспоненты* (*свойство 1°*), можно *вывести* привычные свойства *логарифма*:

Для любых чисел $a, b > 0$ справедливы равенства

$$\boxed{\ln(ab) = \ln a + \ln b, \quad \ln\frac{1}{b} = -\ln b, \quad \ln\frac{a}{b} = \ln a - \ln b}.$$

Доказательство.

$$\ln a + \ln b = \ln\bigl(\exp(\ln a + \ln b)\bigr) = \ln\bigl(\exp(\ln a)\exp(\ln b)\bigr) = \ln(ab);$$

$$0 = \ln 1 = \ln\Bigl(\frac{1}{b}b\Bigr) = \ln\frac{1}{b} + \ln b; \ \ln a = \ln\Bigl(\frac{a}{b}b\Bigr) = \ln\frac{a}{b} + \ln b. \ \textbf{Q.E.D.}$$

[1] *Логарифмы* и само это слово (греч. *λόγος αριθμός* — *число отношения*) ввел в обиход шотладский барон Не́пер (Neper или Napier, John, Laird of Merchiston, 1550–1617) в изданном в 1614 г. “Описании удивительных таблиц логарифмов” (“Mirifici Logarithmorum Canonis descriptio”). О Непере и его логарифмах (а они отличались от нынешних и равнялись $10^7 \ln(10^7 x^{-1})$) можно почитать в [**6**] и [**23**].

Выполняются предельные соотношения:

а) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$, б) $\lim\limits_{x\to 0+0} \ln x = -\infty$,

т. е. истинны утверждения, выражаемые формулами:

а) $\forall c>0\,\exists d>0\,\forall x\big(x>d \Rightarrow \ln x>c\big)$ и

б) $\forall c>0\,\exists \delta>0\,\forall x\big(0<x<\delta \Rightarrow \ln x<-c\big)$.

Для *доказательства* достаточно взять в этих *формулах* $d=e^c$, $\delta=e^{-c}$ и применить *возрастание* функции $y=\ln x$.

Основной предел для логарифма $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1}$.

Доказательство. Удобно применить *критерии* (*эквивалентные определения*) *предела* и *непрерывности функции в точке* (см. с. 109–110). Пусть $\{x_n\}$ — *любая* последовательность действительных чисел $x_n\neq 0$, *сходящаяся* к *нулю*. Последовательность $\{1+x_n\}$ будет тогда *сходиться* к *единице*, и каждое число $1+x_n$ будет *отличным от единицы*. Ввиду *непрерывности* и *возрастания* (на промежутке $(0,+\infty)$) функции $y=\ln x$ последовательность $\{y_n\}=\big\{\ln(1+x_n)\big\}$ значений этой функции будет *сходиться* к $\ln 1=\ln(\exp 0)=0$, при этом все числа $y_n=\ln(1+x_n)$ будут *отличны от нуля*. В силу *основного предела для экспоненты* (*свойство* 3°) последовательность $\left\{\dfrac{\exp y_n-1}{y_n}\right\}$ будет *сходиться* к *единице*, а так как $\dfrac{\exp y_n-1}{y_n}=\dfrac{\exp(\ln(1+x_n))-1}{\ln(1+x_n)}=\dfrac{x_n}{\ln(1+x_n)}$, то *сходиться* к *единице* будет и последовательность $\left\{\dfrac{\ln(1+x_n)}{x_n}\right\}$. Остается еще раз воспользоваться *критерием* (*эквивалентным определением*) *предела функции в точке*, в соответствии с которым функция $y=\dfrac{\ln(1+x)}{x}$ имеет в точке $x=0$ *предел*, равный *единице*. **Q.E.D.**

III.10. Каково общее определение степени положительного числа

Для любого *положительного* числа a и любого *действительного* числа b полагают *по определению*[1] $\boxed{a^b = \exp(b\ln a)}$.

Первое, что надлежит сделать, — это проверить *согласованность* данного определения *степени* с традиционным в случае *целого* или *рационального* показателя (см. с. 36).

Если $b=n$ (*натуральное* число), то

$$a^b = \exp(b\ln a) = \exp(n\ln a)\exp(\overbrace{\ln a + \cdots + \ln a}^{n}) =$$

$$= \overbrace{\exp(\ln a)\cdots\exp(\ln a)}^{n} = \overbrace{a\cdots a}^{n} = a^n;$$

если $b=-n$ (*целое отрицательное* число), то

$$a^b = \exp(b\ln a) = \exp(-n\ln a) = \frac{1}{\exp(n\ln a)} = \frac{1}{a^n};$$

если $b=0$, то $a^b = \exp(b\ln a) = \exp 0 = 1$;

если же $b=\dfrac{m}{n}$ (*рациональное* число), то

$$(a^b)^n = \exp\big(n\ln(\exp(b\ln a)\big) = \exp\big(n(b\ln a)\big) = a^m,$$

так что число $a^b = \exp\left(\frac{m}{n}\ln a\right)$ удовлетворяет уравнению $x^n = a^m$ и поэтому совпадает с числом $\sqrt[n]{a^m}$.

Проведенная проверка показывает, что, к примеру, число 2^3 можно *эквивалентно* понимать и как $2\cdot 2\cdot 2$, и как $\exp(3\ln 2)$, а число $2^{\frac{1}{3}}$ — и как $\sqrt[3]{2}$, и как $\exp(\frac{1}{3}\ln 2)$; число же $2^{\sqrt{3}}$ следует понимать исключительно как $\exp(\sqrt{3}\ln 2)$.

Данное определение *степени* вместе с *основным тождеством для экспоненты* $\exp x_1 \exp x_2 = \exp(x_1 + x_2)$ позволяет просто и аккуратно вывести привычные *свойства степени*:

---

[1] Иные имеющиеся *определения* (см., например, [**24**], n° 19) громоздки, требуют сложного обоснования и неудобны в обращении.

Для любого положительного числа a и любых действительных чисел a, b справедливы равенства:

$$\boxed{a^{b+c} = a^b a^c, \quad (a^b)^c = a^{bc}, \quad a^{-b} = \frac{1}{a^b}}\,.$$

<u>*Доказательство*</u>.

$$a^{b+c} = \exp\big((b+c)\ln a\big) = \exp(b\ln a)\exp(c\ln a) = a^b a^c;$$

$$(a^b)^c = \exp\big(c\ln(\exp(b\ln a))\big) = \exp(cb\ln a) = a^{bc};$$

$$a^{-b} = \exp(-b\ln a) = \frac{1}{\exp(b\ln a)} = \frac{1}{a^b}.\ \ \textbf{Q.E.D.}$$

Пользуясь *определением степени*, свойством *непрерывности экспоненты*[1] и *основным пределом для логарифма* (см. с. 163), можно получить предельное соотношение

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\exp\big(\tfrac{1}{x}\ln(1+x)\big) = \exp\Big(\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}\Big) = \exp 1 = e,$$

которое можно представить[2] в виде $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\Big(1+\frac{1}{x}\Big)^x = e}$.

Отправным пунктом традиционного вывода этого соотношения (см., например, [**24**], n° 54) служит (предварительно устанавливаемая) *сходимость* последовательности $\big\{\big(1+\frac{1}{n}\big)^n\big\}$, *предел* которой по определению и есть число e.

Следующий шаг состоит в написании для значений $x \in [n, n+1)$ неравенств $\big(1+\frac{1}{n+1}\big)^n < \big(1+\frac{1}{x}\big)^x < \big(1+\frac{1}{n}\big)^{n+1}$. Чтобы этот шаг был логически состоятельным, необходимо: *а)* предварительно дать внятное и исчерпывающее *определение* того, что понимается под $\big(1+\frac{1}{x}\big)^x$ для *любого действительного* числа $x \neq 0$, *б)* на базе этого определения *обосновать* (а не просто написать) приведенные неравенства. В противном случае — а именно он является типичным для вузовских курсов анализа — этот и последующие шаги вывода “замечательного предела” $\lim\limits_{x\to\infty}\big(1+\frac{1}{x}\big)^x = e$ не имеют доказательной силы.

[1] А конкретно — *перестановочностью* символа *экспоненты* с символом *предела* (см. с. 161).

[2] Перенося обозначение x на переменную $\frac{1}{x}$, стремящуюся к ∞ (без знака).

Степенная функция

При фиксированном $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$, степенная функция $y = x^\alpha$ является непрерывной и строго монотонной[1] *на промежутке $(0, +\infty)$ и имеет множеством значений этот же промежуток; обратной по отношению к ней (на этом промежутке) служит степенная функция $x = y^{\frac{1}{\alpha}}$.*

Доказательство. *Непрерывность* функции $y = x^\alpha$ на промежутке $(0, +\infty)$ есть прямое следствие *непрерывности* на этом промежутке *логарифма* (см. с. 162) и свойства *перестановочности* символов *непрерывной функции* (в данном случае *экспоненты*) и *предела*: какова бы ни была точка $x_0 \in (0, +\infty)$,

$$\lim_{x \to x_0} x^\alpha = \lim_{x \to x_0} \exp(\alpha \ln x) = \exp\Big(\lim_{x \to x_0} (\alpha \ln x)\Big) = \\ = \exp(\alpha \ln x_0) = {x_0}^\alpha.$$

Если $0 < x_1 < x_2$, то (в силу *возрастания логарифма*) $\alpha \ln x_1 < \alpha \ln x_2$, если $\alpha > 0$, и $\alpha \ln x_1 > \alpha \ln x_2$, если $\alpha < 0$, так что (с учетом *возрастания экспоненты*)

$$x_1^\alpha = \exp(\alpha \ln x_1) < \exp(\alpha \ln x_2) = x_2^\alpha, \text{ если } \alpha > 0,$$

$$x_1^\alpha = \exp(\alpha \ln x_1) > \exp(\alpha \ln x_2) = x_2^\alpha, \text{ если } \alpha < 0.$$

Так как при $\alpha \neq 0$ функции $y = \ln x$ и $y = \alpha \ln x$ имеют на промежутке $(0, +\infty)$ общее *множество значений* — всю действительную ось, — функция $y = x^\alpha \overset{\text{def}}{=} \exp(\alpha \ln x)$ (при любом $\alpha \neq 0$) имеет *множеством значений* на промежутке $(0, +\infty)$ этот же промежуток, а поскольку для любого $x > 0$

$$(x^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = \exp\Big(\frac{1}{\alpha} \ln\big(\exp(\alpha \ln x)\big)\Big) = \exp(\ln x) = x,$$

функция $x = y^{\frac{1}{\alpha}}$ служит обратной по отношению к $y = x^\alpha$.

---

[1] А именно: *возрастающей*, если $\alpha > 0$, и *убывающей*, если $\alpha < 0$.

Основной предел для степенной функции. *Для любого числа* $\alpha \neq 0$ *существует* $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha}$.

<u>*Доказательство*</u>. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\exp(\alpha\ln(1+x))-1}{x}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\exp(\alpha\ln(1+x))-1}{\alpha\ln(1+x)}\frac{\alpha\ln(1+x)}{x}=^1\lim_{y\to 0}\frac{\exp y-1}{y}\lim_{x\to 0}\frac{\alpha\ln(1+x)}{x}=\alpha.$$

Вот расшифровка записанных соотношений на основе *критерия* (*эквивалентного определения*) *предела функции в точке "через последовательности"*.

Пусть $\{x_n\}$ — любая *сходящаяся к нулю* последовательность действительных чисел, *отличных от нуля*. Так как функция $y=\ln(1+x)$ *непрерывна* и *возрастает*[2], последовательность $\{y_n\}=\{\alpha\ln(1+x_n)\}$ будет *сходиться* к числу $\ln 1=0$, причем все числа y_n будут *отличны от нуля*. Поскольку

$$\lim_{y\to 0}\frac{\exp y-1}{y}=1 \quad \text{и} \quad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1 \ (\text{см. с. } 107,\ 163),$$

обе последовательности $\left\{\dfrac{\exp y_n-1}{y_n}\right\}$ и $\left\{\dfrac{\ln(1+x_n)}{x_n}\right\}$ *сходятся к единице*, а так как

$$\frac{(1+x_n)^\alpha-1}{x_n}=\frac{\exp(\alpha\ln(1+x_n))-1}{x_n}=\frac{\exp(\alpha\ln(1+x_n))-1}{\alpha\ln(1+x_n)}\cdot\frac{\alpha\ln(1+x_n)}{x_n}=$$
$$=\frac{\exp y_n-1}{y_n}\cdot\frac{\ln(1+x_n)}{x_n}\,\alpha,$$

последовательность $\left\{\dfrac{(1+x_n)^\alpha-1}{x_n}\right\}$ *сходится к числу* α. В соответствии с *критерием* (*эквивалентным определением*) *предела функции в точке "через последовательности"* существует $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha$. **Q.E.D.**

---

[1] С введением переменной $y=\alpha\ln(1+x)$ $(y\to 0$ при $x\to 0)$.

[2] На промежутке $(-1,+\infty)$.

Показательная функция и обратная к ней

> *При фиксированном* $a > 0,\ \ a \neq 1$, *показательная функция* $y = a^x$ *является непрерывной и строго монотонной*[1] *на действительной оси и имеет множеством значений промежуток* $(0, +\infty)$; *обратной по отношению к ней (на этом промежутке) служит функция, обозначаемая* $x = \log_a y$ *и называемая логарифмом по основанию* a.

Доказательство. То, что функция $y = a^x \stackrel{\text{def}}{=} \exp(x \ln a)$ на *действительной оси* является *непрерывной*, *строго монотонной*[2], имеет *множеством значений* промежуток $(0, +\infty)$, и на этом промежутке определена *обратная* к ней функция, также являющаяся *непрерывной* и *строго монотонной*, напрямую вытекает из того, что этими свойствами обладает *экспоненциальная функция*, и *теоремы об обратной функции*. Дополнительно следует лишь указать на связь между *логарифмами* $\log_a$ и $\ln$. По определению $\log_a a^x = x$ для любого *действительного* числа x. Полагая $a^x = y$, можно заключить, что $y = a^{\log_a y}$ для любого *положительного* числа y. Из последнего равенства, в свою очередь, следует: $\ln y = \ln\bigl(\exp(\log_a y \ln a)\bigr) = \log_a y \ln a$, так что $\boxed{\log_a y = \dfrac{\ln y}{\ln a}}$ при $y > 0$.

Основной предел для показательной функции. *Для любого числа* $a > 0,\ a \neq 1$ *существует* $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - 1}{x} = \ln a}$.

Доказательство. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\exp(x\ln a)-1}{x}\,\dfrac{\ln a}{\ln a} =$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\exp(x\ln a)-1}{x\ln a}\ln a = \ln a. \quad \textbf{Q.E.D.}$$

---

[1] А именно: *возрастающей*, если $a > 1$, и *убывающей*, если $a < 1$.

[2] *Возрастающей* при $a > 1$ (когда $\ln a > 0$), и *убывающей*, если $a < 1$ (когда $\ln a < 0$).

Вот расшифровка этой цепочки равенств.

Пусть $\{x_n\}$ — любая *сходящаяся к нулю* последовательность действительных чисел, *отличных от нуля*. Так как последовательность $\{y_n\} = \{x_n \ln a\}$ тоже сходится к нулю, и при этом все y_n *отличны от нуля*, из *основного предела для экспоненты* $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\exp y - 1}{y} = 1$ (см. с. 107) следует: последовательность $\left\{\dfrac{\exp y_n - 1}{y_n}\right\} = \left\{\dfrac{\exp(x_n \ln a) - 1}{x_n \ln a}\right\}$ *сходится* к *единице*, а потому последовательность $\left\{\dfrac{a_n^x - 1}{x_n}\right\} = \left\{\dfrac{\exp(x_n \ln a) - 1}{x_n}\right\}$ *сходится* к числу $\ln a$. Применение *критерия* (*эквивалентного определения*) *предела функции* "*через последовательности*" позволяет заключить: существует $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x - 1}{x} = \ln a$. **Q.E.D.**

Доказанным предельным соотношением завершается

Список основных пределов для элементарных[1] *функций*:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1 \ \ (\text{с. } 122); & \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1 \ \ (\text{с. } 163); \\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha \ \ (\text{с. } 167); & \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x - 1}{x} = \ln a \ \ (\text{с. } 168); \\ \lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e, \ \ \text{или} & \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e \ \ (\text{с. } 165). \end{array}}$$

Следует подчеркнуть: *все* они были выведены исходя из *основного предела для экспоненты* $\boxed{\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\exp z - 1}{z} = 1}$, так что если уж использовать термин "замечательный предел", то именно он больше всех его заслуживает.

[1] К *элементарным* принято относить те функции (*действительной* и *комплексной* переменной), которые можно выразить через *переменную* и *константы*, производя конечное число действий *сложения, вычитания, умножения, деления*, взятия *экспоненты* и *логарифма* (см. [**4**], с. 7).

III.11. Как оперируют символами o и O и понятием эквивалентности функций

На первых страницах второго тома “Лекций по теории чисел” [**45**] (1927 г.) немецкий математик Э. Ландау (Landau Edmund, 1877–1938) ввел следующие обозначения, ставшие общепринятыми под названием *“о и О символики”*.

По определению:

запись $f(x)=o(1),\ x\to x_0$,[1] означает, что $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$;[2]

запись $f(x)=o\big(g(x)\big),\ x\to x_0$,[3] выражает тот факт, что $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$, т. е. $\dfrac{f(x)}{g(x)}=o(1),\ x\to x_0$;[4]

запись $f(x)=O(1),\ x\to x_0$,[5] означает, что при стремлении x к x_0 функция $y=f(x)$ остается *ограниченной*, т. е. $|f(x)|\leqslant h$ для некоторого числа $h>0$ и всех x из некоторой окрестности точки x_0;

запись $f(x)=O\big(g(x)\big),\ x\to x_0$, выражает тот факт, что $\dfrac{f(x)}{g(x)}=O(1),\ x\to x_0$, т. е. *отношение* $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ остается *ограниченным* в некоторой *окрестности* точки x_0.

---

[1] Читается: *“$f(x)$ есть о малое от единицы при стремлении x к x_0”*.

[2] Т. е. функция $y=f(x)$ становится <u>*бесконечно малой*</u>, когда точка x стремится к точке x_0. Точка x_0 может быть как *конечной*, так и *бесконечной*, а стремление x к ней — стремлением *справа* или *слева*; Э. Ландау в [**45**], вводя эту символику, оперировал точкой $x_0=+\infty$.

[3] Читается: *“$f(x)$ есть “о малое” от $g(x)$ при стремлении x к x_0”*; говорят также, что *“функция $y=f(x)$ является бесконечно малой относительно функции $y=g(x)$ при стремлении x к x_0”*.

[4] Это позволяет переписать соотношение $f(x)=o\big(g(x)\big),\ x\to x_0$, в виде $f(x)=o(1)g(x),\ x\to x_0$, означающем, что $f(x)=\alpha(x)g(x)$, где $\alpha(x)=o(1),\ x\to x_0$ (при этом допускается возможность одновременного *обращения в нуль* значений $f(x)$ и $g(x)$ вблизи точки x_0).

[5] Читается: *“$f(x)$ есть “О большое” от единицы при стремлении x к x_0”*.

Символы o и O позволяют видоизменять (и часто сокращать) запись стандартных фраз и утверждений касательно *пределов* функций. Например, то, что $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=b$, можно альтернативно записать в виде $f(x)-b=o(1),\ x\to x_0-0$; символические же равенства

а) $o(1)=O(1)$, *б)* $o(1)\pm o(1)=o(1)$, *в)* $o(1)O(1)=o(1)$

кратко выражают соответственно утверждения:

а) функция, *бесконечно малая* (при $x\to x_0$), является *ограниченной* (в окрестности точки x_0);

б) сумма (и *разность*) двух *бесконечно малых* функций есть *бесконечно малая* функция;

в) произведение бесконечно малой функции на *ограниченную* есть *бесконечно малая* функция.

Следует особо подчеркнуть:

а) знак $=$ в символике o и O не является знаком *равенства* в обычном смысле (в частности, $o(1)=O(1)$ — верное утверждение, а $O(1)=o(1)$ — нет);

б) запись $f(x)=o(1)$ (и ей подобные) не имеет смысла без сопровождаемого (или подразумеваемого) указания, к чему стремится переменная x (например, $\sin x=o(x)$, $x\to\infty$, — верное утверждение, а $\sin x=o(x)$, $x\to 0$, — нет).

Весьма часто оперируют соотношениями типа

$$\frac{o(g(x))}{g(x)}=o(1) \quad\text{и}\quad o\big(g(x)\big)h(x)=o\big(g(x)h(x)\big)$$

(а также их аналогами для O)[1] и "более продвинутыми"

---

[1] Каждое из них предполагает стремление x к некоторому значению x_0 и напрямую вытекает из определений: если $f(x)=o\big(g(x)\big)$ (соответственно, $f(x)=O\big(g(x)\big)$) при $x\to x_0$, то отношения $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ и $\dfrac{f(x)h(x)}{g(x)h(x)}$ оказываются (при $x\to x_0$) *бесконечно малыми* (соответственно, *ограниченными*).

$$o\big(g(x)\big)O\big(h(x)\big)=o\big(g(x)h(x)\big);\quad O\big(g(x)\big)O\big(h(x)\big)=O\big(g(x)h(x)\big);$$

$$o\big(O(g(x)\big)=o\big(g(x)\big);\ \ O\big(O(g(x)\big)=O\big(g(x)\big);\ \ O\big(o(g(x)\big)=o\big(g(x)\big).$$

Вот, к примеру, доказательства первого и последнего из этого списка:

если (при $x\to x_0$) $f_1(x)=o\big(g(x)\big)$, а $f_2(x)=O\big(h(x)\big)$, т. е. отношение $\frac{f_1(x)}{g(x)}$ *стремится к нулю*, а отношение $\frac{f_2(x)}{h(x)}$ остается *ограниченным*, то отношение $\frac{f_1(x)f_2(x)}{g(x)\,h(x)}$ *стремится к нулю*, а потому $f_1(x)f_2(x)=o\big(g(x)\,h(x)\big)$ (при $x\to x_0$);

если (при $x\to x_0$) $f(x)=O\big(h(x)\big)$, а $h(x)=o\big(g(x)\big)$, т. е. отношение $\frac{f(x)}{h(x)}$ остается *ограниченным*, а отношение $\frac{h(x)}{g(x)}$ *стремится к нулю*, то отношение $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)}{h(x)}\frac{h(x)}{g(x)}$ *стремится к нулю*, а это и означает, что $f(x)=o\big(g(x)\big)$ (при $x\to x_0$).

Функции $y=f(x)$ *и* $y=g(x)$ *считают* <u>*эквивалентными*</u> *при* $x\to x_0$ (запись: $f(x)\sim g(x)$, $x\to x_0$), *если* $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=1$.

Вот прямое следствие приведенных определений.

> $f(x)\sim g(x)$, $x\to x_0$, *в том и только в том случае, когда* $g(x)\sim f(x)$, $x\to x_0$, *и в том и только в том случае, когда* $f(x)=g(x)+o\big(g(x)\big)$, $x\to x_0$.

<u>Примеры</u>. *1*. $x^2+x^3\sim x^2$, $x\to 0$, но $x^2+x^3\sim x^3$, $x\to\infty$.

2. $\ln x=o(x^\delta)$, $x\to+\infty$, при любом $\delta>0$. $\Big($В силу определения *экспоненты* $\exp t\overset{\text{def}}{=}\lim\limits_{n\to+\infty}\Big(1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\cdots+\frac{t^n}{n!}\Big)\geqslant\frac{t^2}{2!}$ для $t>0$, из чего следует, что $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{t}{\exp t}\geqslant\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{t}{t^2/2!}=0$; полагая $\ln x^\delta=t$, можно заключить: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^\delta}=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{1}{\delta}\frac{t}{\exp t}=0\Big)$.

Следующее простое *правило* позволяет упростить вычисление пределов *произведений* и *отношений* функций.

Отыскивая пределы произведений и отношений функций, входящие в них сомножители[1] *можно заменять эквивалентными им функциями: если* $f(x) \sim \widetilde{f}(x)$, *а* $g(x) \sim \widetilde{g}(x)$ (*в обоих случаях* $x \to x_0$), *то* $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)h(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\widetilde{f}(x)h(x)}{\widetilde{g}(x)}$ (*если какой-то из этих пределов существует*).

<u>Доказательство</u>. Пусть $f(x) \sim \widetilde{f}(x)$ и $g(x) \sim \widetilde{g}(x)$, $x \to x_0$, т. е. $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{\widetilde{f}(x)} = 1$ и $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\widetilde{g}(x)}{g(x)} = 1$. Тогда если $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\widetilde{f}(x)h(x)}{\widetilde{g}(x)} = b$, то и $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)h(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{\widetilde{f}(x)} \dfrac{\widetilde{f}(x)h(x)}{\widetilde{g}(x)} \dfrac{\widetilde{g}(x)}{g(x)} = b$. **Q.E.D.**

Базой для практического применения сформулированного *правила* служит следующее утверждение.

Если функция $y = \varphi(x)$ *является бесконечно малой при* $x \to x_0$, *причем* $\varphi(x) \neq 0$ *для всех* $x \neq x_0$ *из некоторой окрестности точки* x_0, *то справедливы следующие отношения эквивалентности* (*при* $x \to x_0$):

$$\exp\varphi(x) - 1 \sim \varphi(x); \quad \sin\varphi(x) \sim \varphi(x); \quad \ln\bigl(1 + \varphi(x)\bigr) \sim \varphi(x);$$

$$\operatorname{tg}\varphi(x) \sim \varphi(x);$$

$$a^{\varphi(x)} - 1 \sim \ln a \cdot \varphi(x); \quad \bigl(1 + \varphi(x)\bigr)^{\alpha} - 1 \sim \alpha \cdot \varphi(x);$$ [2]

$f(\varphi(x)) \sim b$, для любой функции $y = f(t)$, имеющей $\lim\limits_{t \to 0} f(t) = b \neq 0$.

<u>Доказательство</u> (например, первого и двух последних)[3].

---

[1] Но не *слагаемые*!

[2] В предположении, что $a > 0$, $a \neq 1$, а $\alpha \neq 0$.

[3] Доказательства остальных — по той же схеме.

Пусть $\{x_n\}$ — любая *сходящаяся к* x_0 последовательность действительных чисел, *отличных от* x_0. Тогда последовательность $\{\varphi(x_n)\}$ будет *сходиться к нулю*, причем все элементы $\varphi(x_n)$ этой последовательности будут *отличны от нуля*. Так как $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\exp t-1}{t}=1$, $\lim\limits_{t\to 0}\frac{(1+t)^\alpha-1}{t}=\alpha$, а $\lim\limits_{t\to 0}f(t)=b$, *критерий* (*эквивалентное определение*) *предела функции в точке "через последовательности"* позволяет заключить: последовательности $\left\{\frac{\exp\varphi(x_n)-1}{\varphi(x_n)}\right\}$, $\left\{\frac{(1+\varphi(x_n))^\alpha-1}{\varphi(x_n)}\right\}$ и $\{f(\varphi(x_n))\}$ *сходятся* соответственно к *единице*, числу α и числу b. Повторно применяя вышеупомянутый *критерий*, можно прийти к выводу:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\exp\varphi(x)-1}{\varphi(x)}=1,\ \lim_{x\to x_0}\frac{(1+\varphi(x))^\alpha-1}{\varphi(x)}=\alpha \text{ и } \lim_{x\to x_0}f(\varphi(x))=b.$$

Так как по предположению $\alpha\neq 0$ и $b\neq 0$, это означает, что

$$\exp\varphi(x)-1\sim\varphi(x),\ \big(1+\varphi(x)\big)^\alpha-1\sim\alpha\cdot\varphi(x) \text{ и } f(\varphi(x))\sim b$$

при $x\to x_0$. **Q.E.D.**

<u>Замечание</u>. При отыскании пределов *произведений* и *отношений* функций заменять *эквивалентными* функциями можно лишь входящие в них *сомножители*, но ни в коем случае не *слагаемые*: замена в ходе вычисления $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$ *вычитаемого* $\cos x$ на *эквивалентную* ему (при $x\to 0$) *единицу* дает неправильный ответ *нуль*, тогда как на самом деле $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2(\frac{x}{2})^2}{x^2}=\frac{1}{2}$.

<u>Примеры</u>. *1*. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\ln\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{ctg}x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\ln(1+(\operatorname{tg}x-1))}{1-\operatorname{ctg}x}=$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\operatorname{tg}x-1}{1-\operatorname{ctg}x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg}x=1.$$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-3}{2x+1}\right)^{x+1} = \lim\limits_{x\to\infty}\exp\left((x+1)\ln\frac{2x-3}{2x+1}\right) =$

$$= \lim_{x\to\infty}\exp\left((x+1)\ln\left(1+\frac{-4}{2x+1}\right)\right) = \exp\left(\lim_{x\to\infty}\frac{-4(x+1)}{2x+1}\right) = e^{-2}.$$

3. $\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}} = \lim\limits_{x\to a}\exp\left(\frac{1}{x-a}\ln\frac{\sin x}{\sin a}\right) =$

$$= \lim_{x\to a}\exp\left(\frac{1}{x-a}\ln\left(1+\frac{\sin x-\sin a}{\sin a}\right)\right) = \lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{(x-a)\sin a} =$$

$$= \lim_{x\to a}\frac{2\cos\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}}{(x-a)\sin a} = \lim_{x\to a}\frac{\cos\frac{x+a}{2}}{\sin a} = \operatorname{ctg} a.$$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\frac{1+x}{1-x}}{\operatorname{arctg}(1+x)-\operatorname{arctg}(1-x)} =$[1]

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{2x}{1-x}\right)}{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(1+x)-\operatorname{arctg}(1-x))} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{2x}{1-x}}{\frac{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(1+x))-\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(1-x))}{1+\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(1+x))\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(1-x))}} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{2x}{1-x}}{\frac{(1+x)-(1-x)}{1+(1+x)(1-x)}} = 2.$$

5. $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(\sqrt{1+x^{-2}}-1\right) =$

$$= \lim_{x\to+\infty} x^2\frac{1}{2}x^{-2} = \frac{1}{2};$$

$$\lim_{x\to-\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right) = \lim_{x\to-\infty}(-x^2)\left(\sqrt{1+x^{-2}}+1\right) = -\infty.$$

6. $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}} = \lim\limits_{x\to 1}\exp\left(\frac{1}{1-x}\ln x\right) = \lim\limits_{x\to 1}\exp\frac{\ln(1+(x-1))}{-(1-x)} = e^{-1}.$

[1] Так как $\operatorname{arctg}(1+x)-\operatorname{arctg}(1-x)\to 0$ при $x\to 0$.

В следующих примерах a и b — *положительные* числа.

$$7.\ \lim_{x\to a}\frac{a^x-x^a}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{(a^x-a^a)-(x^a-a^a)}{x-a}=$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{a^a(a^{x-a}-1)-a^a((\frac{x}{a})^a-1)}{x-a}=$$

$$=\lim_{x\to a}a^a\Big(\frac{a^{x-a}-1}{x-a}-\frac{(1+\frac{x-a}{a})^a-1}{x-a}\Big)=a^a(\ln a-1).$$

$$8.\ \lim_{x\to a}\frac{x^x-a^a}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{x^x-a^x+a^x-a^a}{x-c}=$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{a^x((\frac{x}{a})^x-1)+a^a(a^{x-a}-1)}{x-a}=$$

$$=\lim_{x\to a}\Big(a^x\,\frac{\exp(x\ln\frac{x}{a})-1}{x-a}+a^a\,\frac{a^{x-a}-1}{x-a}\Big)=$$

$$=\lim_{x\to a}\Big(a^x\,\frac{x\ln(1+\frac{x-a}{a})}{x-a}+a^a\,\frac{a^{x-a}-1}{x-a}\Big)=$$

$$=a^a+a^a\ln a.$$

$$9.\ \lim_{x\to 0}\frac{a^{x^2}-b^{x^2}}{(a^x-b^x)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{b^{x^2}}{b^{2x}}\,\frac{(\frac{a}{b})^{x^2}-1}{((\frac{a}{b})^x-1)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\ln\frac{a}{b}}{(x\ln\frac{a}{b})^2}=\frac{1}{\ln\frac{a}{b}}.$$

$$10.\ \lim_{x\to 0}\Big(\frac{a^{x^2}+b^{x^2}}{a^x+b^x}\Big)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\exp\Big(\frac{1}{x}\ln\frac{a^{x^2}+b^{x^2}}{a^x+b^x}\Big)\overset{1}{=}$$

$$=\exp\Big(\lim_{x\to 0}\Big(\frac{1}{x}\ln\Big(1+\frac{a^{x^2}-a^x+b^{x^2}-b^x}{a^x+b^x}\Big)\Big)\Big)=$$

$$=\exp\Big(\lim_{x\to 0}\Big(\frac{a^x(a^{x^2-x}-1)}{x(a^x+b^x)}+\frac{b^x(b^{x^2-x}-1)}{x(a^x+b^x)}\Big)\Big)=$$

$$=\exp\Big(\lim_{x\to 0}\Big(\frac{(x^2-x)\ln a}{x\cdot 2}+\frac{(x^2-x)\ln b}{x\cdot 2}\Big)\Big)=\frac{1}{\sqrt{ab}}.$$

---

[1] С учетом возможности *перестановки* символов *экспоненты* и *предела* (см. с. 161).

Выделение главной части функции

Среди *отношений эквивалентности* $f(x)\sim g(x)$, $x\to x_0$, особо выделяют те, которые имеют вид

$f(x)\sim c\cdot(x-x_0)^\lambda$, $x\to x_0$,[1] и $f(x)\sim c\cdot x^\lambda$, $x\to\infty$ (или $\pm\infty$); при этом $c\cdot(x-x_0)^\lambda$ (соответственно, $c\cdot x^\lambda$) называют *главной частью*, а показатель λ *порядком* функции $y=f(x)$ относительно *бесконечно малой* $x-x_0$ при $x\to x_0$ (соответственно, относительно *бесконечно большой* x при $x\to\infty$).[2]

Примеры. *1. Главная часть* функции $y=\sin x-\operatorname{tg} x$ при $x\to 0$ находится из условия $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\operatorname{tg} x}{c\cdot x^\lambda}=1$: так как

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\operatorname{tg} x}{c\cdot x^\lambda}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(\cos x-1)}{c\cdot x^\lambda\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin^2\frac{x}{2}\sin x}{c\cdot x^\lambda\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\left(\frac{x}{2}\right)^2 x}{c\cdot x^\lambda},$$

данное условие выполняется при $c=-\frac{1}{2}$ и $\lambda=3$.[3]

2. Главная часть функции $y=\sqrt[3]{x^2+1}-\sqrt[3]{x^2-1}$ при $x\to\infty$ ищут из соотношения $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^2+1}-\sqrt[3]{x^2-1}}{c\cdot x^\lambda}=1$. Так как

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^2+1}-\sqrt[3]{x^2-1}}{c\cdot x^\lambda}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt[3]{x^2+1}\right)^3-\left(\sqrt[3]{x^2-1}\right)^3}{c\cdot x^\lambda\left(\left(\sqrt[3]{x^2+1}\right)^2+\sqrt[3]{x^2+1}\sqrt[3]{x^2-1}+\left(\sqrt[3]{x^2-1}\right)^2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{c\cdot x^{\lambda+\frac{4}{3}}\left(\left(\sqrt[3]{1+x^{-2}}\right)^2+\sqrt[3]{1-x^{-4}}+\left(\sqrt[3]{1-x^{-2}}\right)^2\right)},$$

следует взять $c=\frac{2}{3}$ и $\lambda=-\frac{4}{3}$.[4]

---

[1] В случае $x_0\in\mathbb{R}$ (с допустимостью при этом вариантов $x\to x_0\pm 0$).

[2] При *отрицательном* λ чаще говорят о числе $-\lambda$ как о *порядке* функции $y=f(x)$ относительно *бесконечно большой* $\dfrac{1}{x-x_0}$ при $x\to x_0$ (соответственно, относительно *бесконечно малой* $\dfrac{1}{x}$ при $x\to\infty$).

[3] Так что $\sin x-\operatorname{tg} x$ при $x\to 0$ есть *бесконечно малая 3-го порядка* относительно *бесконечно малой* x.

[4] Можно сказать, что функция $y=\sqrt[3]{x^2+1}-\sqrt[3]{x^2-1}$ есть *бесконечно малая порядка* $\dfrac{4}{3}$ относительно *бесконечно малой* $\dfrac{1}{x}$ при $x\to+\infty$.

3. Поскольку

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{x}}} = \sqrt{1+\sqrt[4]{x}\sqrt{\left(\sqrt{x}\right)^{-1}+1}} =$$
$$= \sqrt[8]{x}\sqrt{\left(\sqrt[4]{x}\right)^{-1}+\sqrt{\left(\sqrt{x}\right)^{-1}+1}} \sim \sqrt[8]{x} \quad \text{при } x\to+\infty,$$

главной частью функции $y = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{x}}}$ при $x\to+\infty$ является $x^{\frac{1}{8}}$ — *бесконечно большая порядка* $\dfrac{1}{8}$ относительно *бесконечно большой* x (при $x\to+\infty$).

4. Для нахождения *главной части* функции $y=x^x-1$ при $x\to 1$ требуется найти действительные числа c и λ с тем, чтобы $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^x-1}{c\cdot(x-1)^\lambda}=1$. Так как $x^x-1=\exp(x\ln x)-1\sim x\ln x$, а $\ln x=\ln(1+(x-1))\sim x-1$ при $x\to 1$, *главная часть* функции $y=x^x-1$ при $x\to 1$ есть *бесконечно малая* $x-1$.

5. Так как $\ln x = o(x^\delta)$, $x\to+\infty$, при любом $\delta>0$ (см. с. 172)[1], функция $y=\ln x$ не имеет главной части вида $c\cdot x^\lambda$ при $x\to+\infty$. Замена же в соотношении $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^\delta}=0$ переменной x на $\dfrac{1}{x}$, приводящая к соотношению $\lim\limits_{x\to 0+0} x^\delta\ln x=0$ (при любом $\delta>0$) позволяет сделать вывод: функция $y=\ln x$ не имеет главной части вида $c\cdot\left(\dfrac{1}{x}\right)^\lambda$ при $x\to 0+0$.

6. $$\lim_{x\to 0+0} x^{x^x-1} = \lim_{x\to 0+0}\exp\bigl((\exp(x\ln x)-1)\ln x\bigr) =^2$$
$$= \lim_{x\to 0+0}\exp(x\ln^2 x) =^2 \exp 0 = 1,$$

из чего следует, что *главной частью* функции $y=x^{x^x}$ при $x\to 0+0$ является *бесконечно малая* x.

---

[1] Часто это выражают словами: “$\ln x$ *растет при* $x\to+\infty$ *медленнее любой степени* x”.

[2] С учетом тогог, что $\lim\limits_{x\to 0+0} x^\delta\ln x=0$ при любом $\delta>0$ (см. предыдущий пример).

III.12. Что подразумевают под точками разрыва функции

Точками разрыва функции естественно называть те точки, в которых нарушается *непрерывность* данной функции[1]. Неожиданно возникающая при этом трудность состоит в том, что *не всякую* точку, в которой функция *не является непрерывной*, разумно считать *точкой разрыва* этой функции; например, функция $y = \arcsin x$ *не является непрерывной* при $x = 2$, однако $x = 2$ не есть *точка разрыва* этой функции.

Дать *всеохватное* определение *точки разрыва* функции оказывается не так просто, и то, к чему удалось прийти в рамках *математического анализа*, сводится к выделению следующих видов *точек разрыва* функций *действительной* переменной[2].

I. *Двухсторонние разрывы функции*.

Точку $x_0 \in \mathbb{R}$ считают *точкой двухстороннего разрыва*[3] функции $y = f(x)$, если эта функция *определена* в некоторой *окрестности* точки x_0, исключая, возможно, саму эту точку, и *не является непрерывной* в точке x_0 ни *слева*, ни *справа*[4].

---

[1] Вот что об этом писал Коши ([**34**], с. 35): *"если функция $f(x)$ перестает быть непрерывной в окрестности конкретного значения переменной x, то говорят, что она становится разрывной и что при этом конкретном значении переменной происходит разрыв"*. (В оригинале: *"lorsqu'une fonction $f(x)$ cesse d'être continue dans le voisinage d'une valeur particulière de la variable x, on dit qu'elle devient alors discontinue, et qu'il y a pour cette valeur particulière solution de continuité".*)

[2] С теми или иными оговорками и расхождениями в деталях.

[3] Или, для краткости, просто *точкой разрыва*.

[4] Иногда дополнительно требуют, чтобы в точках $x \neq x_0$ указанной *окрестности* функция $y = f(x)$ была *непрерывной*.

Двухсторонний разрыв функции в точке бывает одной из следующих трех разновидностей:

устранимый разрыв — когда функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 (конечный) *предел* (или, что равносильно, *равные* между собой *пределы слева* и *справа*), но при этом *не является непрерывной* в точке x_0, т. е. не выполняется равенство $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ — то ли из-за того, что *не определено* значение $f(x_0)$, то ли из-за того, что значение $f(x_0)$ *не равно пределу* функции в точке x_0;

разрыв 1-го рода — когда функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 (конечные) *пределы слева* и *справа*, но они *не равны* друг другу: $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) \neq \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$;

разрыв 2-го рода — когда функция $y = f(x)$ не имеет в точке x_0 либо *предела слева*, либо *предела справа* (либо обоих), либо один из них (или оба) являются *бесконечными*.

Термин *устранимый разрыв* объясняется тем, что если функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 *предел*, равный b, но при этом либо $b \neq f(x_0)$, либо значение $f(x_0)$ *не определено*, то после изменения функции в одной лишь точке x_0 присвоением ей *нового значения* $f(x_0) \stackrel{\text{def}}{=} b$ функция становится *непрерывной* в точке x_0, т. е. *разрыв устраняется*. Напротив, *разрывы 1-го* и *2-го рода* являются *неустранимыми*: ни при каком определении (или изменении) значения $f(x_0)$ *соотношение непрерывности* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ не может быть достигнуто.

II. *Односторонние разрывы функции*.

Точку $x_0 \in \mathbb{R}$ считают *точкой левостороннего разрыва* функции $y = f(x)$, если эта функция *определена* в некоторой *левой окрестности* точки x_0, *включая* саму эту точку, но *не является непрерывной слева* в точке x_0 (*справа* от точки x_0 функция может быть *определена* или *не определена*, но если уж она *определена* в *правой* окрестности точки x_0, то она должна быть *непрерывной справа* в этой точке[1]).

Левосторонние разрывы бывают следующих двух видов:

левосторонний разрыв 1-го рода — когда функция имеет в точке x_0 (конечный) *предел слева*, но он не равен значению функции в этой точке; число $f(x_0)-\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)$ называют при этом *скачком слева* в точке x_0 функции $y=f(x)$;

левосторонний разрыв 2-го рода — когда у функции *нет* (конечного) *предела слева* в точке x_0.

По этой же схеме определяют и классифицируют *точки правостороннего разрыва*.

Точку $x_0\in\mathbb{R}$ считают *точкой правостороннего разрыва* функции $y=f(x)$, если эта функция *определена* в некоторой *правой окрестности* точки x_0, *включая* саму эту точку, но *не является непрерывной справа* в точке x_0 (*слева* от точки x_0 функция может быть как определена, так и не определена, но в случае, если она определена в некоторой *левой* окрестности точки x_0, она должна быть *непрерывной слева* в этой точке[1]).

В этой ситуации реализуется одна из следующих двух возможностей:

правосторонний разрыв 1-го рода — когда функция имеет в точке x_0 (конечный) *предел справа*, но он не равен значению функции в этой точке; разность $\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)-f(x_0)$ называют в этом случае *скачком справа* в точке x_0 функции $y=f(x)$;

правосторонний разрыв 2-го рода — когда у функции *нет* (конечного) *предела справа* в точке x_0.

---

[1] В противном случае x_0 оказывается точкой *двухстороннего разрыва* функции $y=f(x)$.

Прочие разновидности *нарушения непрерывности* функции в *точке* либо рассматривают отдельно (по возможности распространяя на них вышеизложенную классификацию), либо выводят за рамки *математического анализа*, относя их к отпочковавшемуся от него разделу *теория функций действительной переменной*.

Примеры. *1*. Для функций $y=\dfrac{\sin x}{\sin x}$, $y=\dfrac{\sin x}{|\sin x|}$, $y=\dfrac{x}{\sin x}$ каждое из значений $x=0,\pm\pi,\pm 2\pi,\ldots$ является *точкой разрыва*, причем для первой функции — *точкой устранимого разрыва*, а для второй — *точкой разрыва 1-го рода*; для третьей же функции значение $x=0$ является *точкой устранимого разрыва*, а каждое из значений $x=\pm\pi,\pm 2\pi,\ldots$ — *точкой разрыва 2-го рода*.

2. Функция $y=\lim\limits_{n\to+\infty}\cos^n x=\begin{cases}0, & \text{если } x\neq k\pi,\\ 1, & \text{если } x=2k\pi,\end{cases}$ [1] $k\in\mathbb{Z}$, имеет *устранимые разрывы* при $x=\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$ (рис. 11).

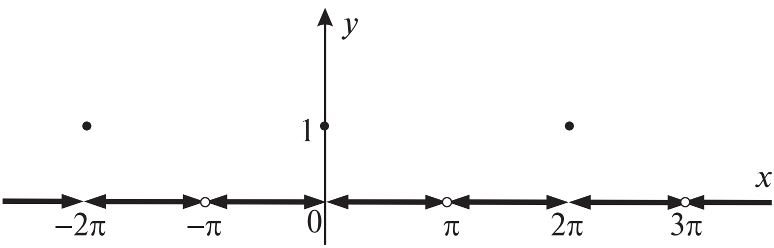


Рис. 11

3. Для обеих функций $y=2^{\frac{1}{x}}$ и $y=\sin\dfrac{1}{x}$ значение $x=0$ есть *точка разрыва 2-го рода*.

[1] А в точках $x=(2k+1)\pi$ значения функции *не определены*.

4. Функция $y=\operatorname{tg}x$, если ее рассматривать лишь на интервале $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, не имеет точек разрыва; на действительной же оси каждое из значений $x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k=0,\pm1\pm2,\ldots$, является для функции $y=\operatorname{tg}x$ *точкой разрыва 2-го рода*.

5. Для функции $y=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x^n-x^{-n}}{x^n+x^{-n}}=\begin{cases}-1, \text{ если } 0<|x|<1,\\ 1, \text{ если } |x|>1,\\ 0, \text{ если } |x|=1,[1]\end{cases}$

значение $x=0$ является *точкой устранимого разрыва*, а значения $x=\pm1$ — *точками разрыва 1-го рода* (рис. 12).

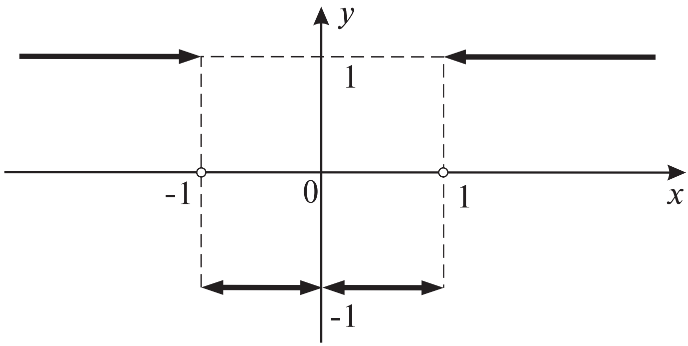


Рис. 12

6. В работе 1829 г. ("Journal für die reine und angewandte Mathematik", Bd. IV, S. 169) немецкий математик Дирихле (уже упоминавшийся на с. 125) рассмотрел в качестве примера функцию $y=\varphi(x)$, принимающую всего лишь *два* значения: одно для всех *рациональных* значений x, а другое для всех *иррациональных* значений x. Эта функция, вошедшая в математический обиход как "функция Дирихле", имеет *разрыв 2-го рода* в любой точке действительной оси.

[1] А при $x=0$ значение функции *не определено*.

7. Для функции $y = [x]$ (*целая часть* числа x; рис. 13) каждое *целое* значение x является точкой *левостороннего разрыва 1-го рода* (со *скачком* 1).

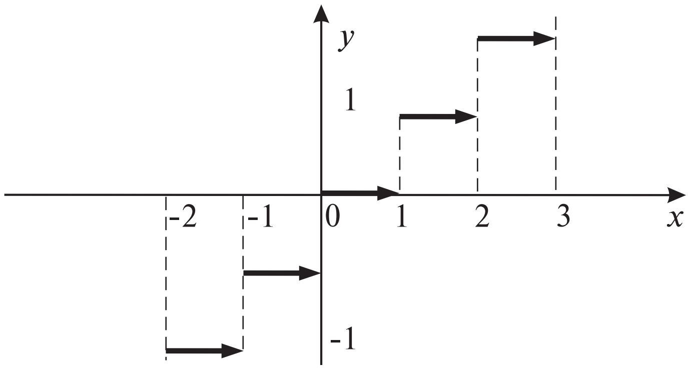


Рис. 13

8. Функция $y = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x} = \begin{cases} 0, & \text{если } x = 0, \\ 1, & \text{если } x > 0, \end{cases}$ имеет при $x = 0$ *правосторонний разрыв 1-го рода* (со *скачком* 1).

9. Функция $y = \ln x$ не имеет точек разрыва, тогда как функция $y = \lim\limits_{n\to+\infty} n^2\left(\sqrt[n]{x} - \sqrt[n+1]{x}\right) = \begin{cases} \ \ 0\ \ , & \text{если } x = 0, \\ \ln x, & \text{если } x > 0, \end{cases}$ имеет при $x = 0$ *правосторонний разрыв 2-го рода*.

10. Для функций $y = \dfrac{\sin\frac{1}{x}}{\sin\frac{1}{x}}$ и $y = \dfrac{\sin\frac{1}{x}}{|\sin\frac{1}{x}|}$ значения $x = \dfrac{1}{\pi k}$, $k = \pm1, \pm2, \ \ldots$, являются *точками разрыва*: *устранимого* для первой функции и *1-го рода* для второй. Значение же $x = 0$ выходит за рамки данного выше определения *точки разрыва*, однако, наиболее разумно, по-видимому, считать $x = 0$ *точкой устранимого разрыва* для первой функции и *точкой разрыва 2-го рода* для второй.

IV. Производная и дифференциал функции

IV.1. Что называют производной функции и ее дифференциалом

Дифференциальное исчисление возникло в конце XVII в. в работах Ньютона и Лейбница[1] как метод изучения функций путем сравнения "бесконечно умаляющихся" *разностей* $x - x_0$ и $y - y_0 = f(x) - f(x_0)$ — значений *переменной* x и ее *функции* $y = f(x)$. Эти *разности* стали обозначать $\triangle x$ и $\triangle y$ (или $\triangle f$) и называть приращениями *переменной* x и *функции* $y = f(x)$ этой переменной *в точке* x_0.

Приращение $\triangle y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \triangle x) - f(x_0)$ (*функции* $y = f(x)$ в точке x_0) является при этом *функцией приращения* $\triangle x$ (переменной x в точке x_0), а *допустимыми* значениями приращения $\triangle x$ являются все те (ненулевые) числа, для которых значение $f(x_0 + \triangle x)$ *определено*[2].

Пример. Если $y = x^2$, а x_0 — любая точка действительной оси, то допустимым значением $\triangle x$ является любое (ненулевое) число, а $\triangle y = x^2 - x_0^2 = (x_0 + \triangle x)^2 - x_0^2 = 2x_0 \triangle x + (\triangle x)^2$.

Основные понятия *дифференциального исчисления* — это *дифференциал* функции и ее *производная*.

Первое внятное (и действующее по сей день) определение *дифференциала* функции дал португальский математик да Ку́нья[3] (называвший *дифференциал* "флюксией"[4]).

---

[1] Выдержки из этих работ (в русском переводе) можно найти в хрестоматии [**30**] (с. 95–116). Термин *дифференциальное исчисление* ввел Лейбниц (лат. *differentia — различие, разность*).

[2] В частности, если функция определена в *δ-окрестности* точки x_0, то *допустимыми* для $\triangle x$ будут все (ненулевые) значения с $|\triangle x| < \delta$.

[3] Da Cunha Joseph-Anastase, 1744–1787.

[4] Лат. *fluxio — течение*. Ньютон (в отличие от да Куньи) называл *флюксией* то, что сейчас называют *производной*.

<u>*Дифференциалом*</u> *функции* $y=f(x)$ *(в точке* x_0*) называют обозначаемую* dy *(или* df*) и зависящую от приращения* $\Delta x = x - x_0$ *величину, которая:*

а) пропорциональна Δx *(т. е. имеет вид* $dy = a\cdot\Delta x$*);*

б) отличается от приращения функции Δy *(вызванного приращением* Δx *переменной* x*) на бесконечно малую относительно* Δx*, т. е.* $\Delta y - dy = o(\Delta x)$ *при* $\Delta x \to 0$.[1]

Функцию, у которой существует дифференциал в точке x_0*, называют* <u>*дифференцируемой*</u> *в этой точке.*

Например, *приращение* функции $y=x^3$ в какой-либо точке x_0 есть $\Delta y = (x_0+\Delta x)^3 - x_0^3 = 3x_0^2\Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$, из чего следует, что данная функция *дифференцируема* в любой точке x_0, имея в ней *дифференциал* $dy = 3x_0^2\Delta x$.

<u>*Производной*</u> функции $y = f(x)$ (в точке x_0) называют число $f'(x_0) \overset{\text{def}}{=} \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ (при условии, что этот *предел* существует.[2]

---

[1] Дословно (на с. 197 французского издания удивительного по четкости и краткости изложения учебника да Куньи [**37**]): “*... on désigne de même par* $d\Gamma x$*, et on appelle fluxion de* Γx*, la grandeur qui rendroit* $\frac{d\Gamma x}{dx}$ *constante, et* $\frac{\Gamma(x+dx)-\Gamma x}{dx} - \frac{d\Gamma x}{dx}$ *infinitième ou zéro, si* dx *devenoit infinitième, et si tout ce qui ne dépend pas de* dx *demeroit constant*”.

[2] Наравне с $f'(x_0)$ пишут $y'(x_0)$. Термин *производная* (*fonction dérivée*) и *штрих* (знак *прим*) как символ взятия *производной* ввел французский математик Лагра́нж (Lagrange, Joseph Louis, 1736–1813); *производную* он определял (на с. 14 в [**44**]) чисто алгебраически, не прибегая к *пределу*, о чем и говорит полное название его монографии [**44**]: “Теория аналитических функций, содержащая принципы дифференциального исчисления, очищенные от какого бы то ни было рассмотрения бесконечно малых или исчезающих, пределов или флюксий и сведенные к алгебраическому анализу конечных величин” (“Théorie des fonctions analytiques contenant les principes du calcul différentiel, dégagés de toute considération d’infiniment petits ou d’évanouissans, de limites ou de fluxions et réduits à l’analyse algébrique des quantités finies”).

Функция $y = f(x)$ является дифференцируемой в точке x_0 тогда и только тогда, когда она имеет в этой точке производную, при этом производная и дифференциал функции (в точке x_0) связаны соотношением $df = f'(x_0)\,\triangle x$.

Доказательство. Существование в точке x_0 *производной* $f'(x_0) \overset{\text{def}}{=} \lim\limits_{\triangle x \to 0} \dfrac{\triangle f}{\triangle x}$ означает, что $\dfrac{\triangle f}{\triangle x} - f'(x_0) = o(1)$ при $\triangle x \to 0$,[1] или, что то же самое, $\triangle f - f'(x_0)\,\triangle x = o(\triangle x)$ при $\triangle x \to 0$, а это и означает существование у функции $y = f(x)$ *дифференциала* $df = f'(x_0)\triangle x$ в точке x_0. **Q.E.D.**

Замечание. Ввиду доказанной *равносильности* требований *дифференцируемости* и *существования производной* их нередко смешивают, *называя* функцию *дифференцируемой*, если она *имеет производную*. Этого не стоит делать хотя бы потому что при переходе к функциям *нескольких* переменных указанные требования становятся *неравносильными*.

Следующее утверждение часто называют *необходимым условием дифференцируемости* функции.

Если функция дифференцируема[2] в точке, то она непрерывна в этой точке.

Доказательство. Переходом к *приращениям* $\triangle x = x - x_0$ и $\triangle f = f(x) - f(x_0)$ условие $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ *непрерывности* функции в точке x_0 преобразуется к виду $\lim\limits_{\triangle x \to 0} \triangle f = 0$. Чтобы доказать выполнение последнего соотношения в случае *дифференцируемости* (а следовательно *существования производной*) функции $y = f(x)$ в точке x_0 достаточно записать: $\lim\limits_{\triangle x \to 0} \triangle f = \lim\limits_{\triangle x \to 0} \dfrac{\triangle f}{\triangle x} \triangle x = f'(x_0) \cdot 0 = 0$. **Q.E.D.**

---

[1] Т. е. разность между отношением $\dfrac{\triangle f}{\triangle x}$ и числом $f'(x_0)$ есть *бесконечно малая* при $\triangle x \to 0$.

[2] Или, что эквивалентно, *имеет производную*.

То, что *непрерывность* является лишь *необходимым* (но не *достаточным*) условием *дифференцируемости* функции, видно из следующих двух примеров.

1. $y=|x-x_0|$. *Приращению* $\triangle x = x - x_0$ соответствует *приращение* $\triangle y = |x-x_0|$, из чего следует:

а) $\lim\limits_{\triangle x\to 0}\triangle f = \lim\limits_{\triangle x\to 0}|\triangle x| = 0$, а потому функция $y=|x-x_0|$ является *непрерывной* в точке x_0;

б) у функции $y=|x-x_0|$ *нет производной* в точке x_0: отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{|x-x_0|}{x-x_0}$ не имеет предела в точке x_0, поскольку $\lim\limits_{x\to x_0-0}\dfrac{|x-x_0|}{x-x_0} = -1$, а $\lim\limits_{x\to x_0+0}\dfrac{|x-x_0|}{x-x_0} = 1$.

<u>Замечание</u>. В подобных случаях (когда отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, *не имея предела* при $x\to 0$, *имеет предел* при $x\to 0-0$ и/или $x\to 0+0$) говорят, что функция $y=f(x)$, *не имея производной* в точке x_0, *имеет* в этой точке *левую* и/или *правую производные* $y'_-(x_0) \overset{\text{def}}{=} \lim\limits_{\Delta x\to 0-0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ и $y'_+(x_0) \overset{\text{def}}{=} \lim\limits_{\Delta x\to 0+0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

2. $y = \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & \text{если } x\neq 0, \\ \quad 0 \quad, & \text{если } x=0. \end{cases}$ *Приращениями* переменных x и y в точке $x=0$ в данном случае являются $\Delta x = x$ и $\Delta y = x\sin\dfrac{1}{x}$, из чего следует:

а) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y = \lim\limits_{x\to 0} x\cdot\sin\dfrac{1}{x} = 0$,[1] т. е. данная функция *непрерывна* в точке 0;

б) значение $y'(0) \overset{\text{def}}{=} \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ *не определено.*[2]

---

[1] Как произведение *бесконечно малой* (при $x\to 0$) на *ограниченную*.

[2] *Не определены* в данном случае и значения $y'_-(0) \overset{\text{def}}{=} \lim\limits_{\Delta x\to 0-0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ и $y'_+(0) \overset{\text{def}}{=} \lim\limits_{\Delta x\to 0+0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ — *левая* и *правая производные* функции при $x=0$.

Производные комбинаций функций

> *Если обе функции* $y=f(x)$ *и* $y=g(x)$ *имеют производные (соответственно* $f'(x_0)$ *и* $g'(x_0)$*) в точке* x_0*, то в этой точке имеют производные также сумма, разность и произведение этих функций, а при условии* $g(x_0)\neq 0$ *и их частное, при этом*
> $(f\pm g)'(x_0)=f'(x_0)\pm g'(x_0)$;
> $(f\cdot g)'(x_0)=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$;
> $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0)=\frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$.

Доказательство. Если $\triangle x=x-x_0$, то

$$\triangle f=f(x)-f(x_0),\quad \triangle g=g(x)-g(x_0),$$

в силу чего

$$\triangle(f\pm g)=\big(f(x)\pm g(x)\big)-\big(f(x_0)\pm g(x_0)\big)=\triangle f\pm\triangle g,$$

$$\begin{aligned}\triangle(f\cdot g)&=f(x)\cdot g(x)-f(x_0)\cdot g(x_0)=\\&=\big(f(x_0)+\triangle f\big)\cdot\big(g(x_0)+\triangle g\big)-\big(f(x_0)\cdot g(x_0)\big)=\\&=\triangle f\cdot g(x_0)+f(x_0)\cdot\triangle g+\triangle f\cdot\triangle g,\end{aligned}$$

$$\triangle\Big(\frac{f}{g}\Big)=\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(x_0)}{g(x_0)}=\frac{(f(x_0)+\triangle f)\,g(x_0)-(g(x_0)+\triangle g)\,f(x_0)}{(g(x_0)+\triangle g)g(x_0)}=$$
$$=\frac{\triangle f\cdot g(x_0)-f(x_0)\cdot\triangle g}{(g(x_0)+\triangle g)\cdot g(x_0)};$$

последующим делением на $\triangle x$ и устремлением его к нулю[1] устанавливается существование

$$\lim_{\triangle x\to 0}\frac{\triangle(f\pm g)}{\triangle x}=f'(x_0)\pm g'(x_0),$$

$$\lim_{\triangle x\to 0}\frac{\triangle(f\cdot g)}{\triangle x}=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0),$$

---

[1] При этом $\triangle f$ и $\triangle g$ также *стремятся к нулю*.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\left(\frac{f}{g}\right)}{\Delta x} = \frac{f'(x_0)\,g(x_0)-f(x_0)\,g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$ **Q.E.D.**[1]

Теорема о производной сложной функции. *Если функция $x = \varphi(t)$ имеет в точке t_0 производную $\varphi'(t_0)$, а функция $y = f(x)$ имеет в точке $x_0 = \varphi(t_0)$ производную $f'(x_0)$, то композиция $y = f\big(\varphi(t)\big)$ этих функций*[2] *имеет в точке t_0 производную* $\boxed{y'(t_0) = f'(x_0)\,\varphi'(t_0)}$.[3]

<u>Доказательство</u>. Пусть $\Delta t = t - t_0$ — любое, но достаточно малое по абсолютной величине *приращение* переменной t в точке t_0.[4] Соответствующее этому приращению Δt *приращение* $\Delta x = x - x_0 = \varphi(t) - \varphi(t_0)$ представимо (ввиду *дифференцируемости* функции $x = \varphi(t)$ в точке t_0) в форме

$$\Delta x = \varphi'(t_0)\,\Delta t + o(\Delta t),\ \ \Delta t \to 0;$$

в свою очередь отвечающее этому *приращению* Δx *приращение* $\Delta y = f(t) - f(t_0)$ представимо (ввиду *дифференцируемости* функции $y = f(x)$ в точке x_0) в форме

$$\Delta y = f'(x_0)\,\Delta x + o(\Delta x),\ \ \Delta x \to 0.$$

Подстановка в правую часть последнего равенства вместо Δx его представления $\Delta x = \varphi'(t_0)\,\Delta t + o(\Delta t)$ с учетом того,

---

[1] Так как производная *постоянной* функции *равна нулю*, следствием доказанного утверждения является *формула производной линейной комбинации функций*: $\boxed{(\alpha\cdot f + \beta\cdot g)'(x_0) = \alpha\cdot f'(x_0) + \beta\cdot g'(x_0)}$, где α, β — любые (*действительные* или *мнимые*) числа.

[2] Или, как еще говорят, *сложная функция*.

[3] <u>*Формула производной сложной функции*</u>, или "<u>*цепное правило*</u>".

[4] Оно будет *допустимым* как для функции $x = \varphi(t)$, так и для функции $y = f\big(\varphi(t)\big)$: если значение $|\,\Delta t|$ *достаточно мало*, то точка $t = t_0 + \Delta t$ попадает в ту *окрестность* точки t_0, в которой определена функция $x = \varphi(t)$, так же как (поскольку $\Delta t \to 0 \implies \Delta x \to 0$) значение $\varphi(t) = x = x_0 + \Delta x$ оказывается в той *окрестности* точки x_0, в которой определена функция $y = f(x)$.

что (в силу этого же представления) $\Delta x = O(\Delta t)$ при $\Delta t \to 0$, позволяет[1] записать *приращение* Δy в виде

$$\Delta y = f'(x_0)\big(\varphi'(t_0)\,\Delta t + o(\Delta t)\big) + o\big(\underbrace{\varphi'(t_0)\,\Delta t + o(\Delta t)}_{O(\Delta t)}\big) =$$

$$= f'(x_0)\,\varphi'(t_0)\,\Delta t + \underbrace{f'(x_0)\,o(\Delta t)}_{o(\Delta t)} + \underbrace{o(O(\Delta\, t))}_{o(\Delta t)} =$$

$$= f'(x_0)\,\varphi'(t_0)\,\Delta t + o(\Delta t), \quad \Delta\, t \to 0. \quad \textbf{Q.E.D.}$$

Теорема о производной обратной функции. *Если непрерывная и строго монотонная на промежутке I функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 этого промежутка производную $f'(x_0)$, не равную нулю, то обратная к $y = f(x)$ функция $x = f^{-1}(y)$ (определенная на промежутке значений функции $y = f(x)$ и являющаяся на этом промежутке непрерывной и строго монотонной)*[2] *имеет в точке $y_0 = f(x_0)$ производную* $\boxed{(f^{-1})'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}}$.

<u>*Доказательство*</u>. В то время как функция $y = f(x)$ по *приращению* $\Delta x = x - x_0$ переменной x (в точке x_0) определяет *приращение* $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ переменной y, *обратная* к ней функция $\Delta x = f^{-1}(y)$ по *приращению* $\Delta y = y - y_0$ переменной y (в точке y_0) восстанавливает исходное *приращение* $\Delta x = x - x_0 = f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)$. *Строгая монотонность* и *непрерывность* обеих функций $y = f(x)$ и $x = f^{-1}(y)$ (см. с. 157) позволяет утверждать, что

$$\text{а) } \Delta x \neq 0 \iff \Delta y \neq 0, \quad \text{б) } \Delta x \to 0 \iff \Delta y \to 0,$$

а так как существует $f'(x_0) \overset{\text{def}}{=} \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} \neq 0$, то существует и

$$(f^{-1})'(y_0) \overset{\text{def}}{=} \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\dfrac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x_0)}. \quad \textbf{Q.E.D.}$$

---

[1] Оперируя по правилам действий с o и O (см. с. 171–172).

[2] Согласно *теореме об обратной функции* (см. с. 157).

Примеры. *1*. $y=\exp x$. Любому *приращению* $\Delta x = x - x_0$ переменной x в произвольно взятой точке x_0 соответствует *приращение* $\Delta y = \exp x - \exp x_0 = \exp x_0(\exp\Delta\, x - 1)$; ввиду *основного предела для экспоненты* (см. с. 107) существует

$$y'(x_0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\exp x_0(\exp\Delta x - 1)}{\Delta x} = \exp x_0.$$

2. Функция $y=\ln x$, $0<x<+\infty$, *обратная* по отношению к *непрерывной возрастающей* (на действительной оси) функции $x = e^y$ (см. с. 162) с *производной* $x'(y_0) = e^{y_0} \neq 0$ (предыдущий пример), по *теореме о производной обратной функции* имеет в любой точке $x_0 \in (0,+\infty)$ *производную*

$$y'(x_0) = \frac{1}{x'(y_0)} = \frac{1}{e^{y_0}} = \frac{1}{x_0}.$$

Вот другой вывод *производной* функции $y=\ln x$. Каковы бы ни были значения $x_0, x > 0$, *приращению* $\Delta\, x = x - x_0$ отвечает *приращение* $\Delta\, y = \ln x - \ln x_0 = \ln\frac{x}{x_0} = \ln\frac{x_0+\Delta x}{x_0}$, и применение *основного предела для логарифма* (с. 163) дает:

$$y'(x_0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\ln\frac{x_0+\Delta x}{x_0} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\ln\Bigl(1+\frac{\Delta x}{x_0}\Bigr) =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{x_0}\,\frac{x_0}{\Delta x}\ln\Bigl(1+\frac{\Delta x}{x_0}\Bigr) = \frac{1}{x_0}.$$

3. $y = x^\alpha$. Так как согласно *общему определению степени* (см. с. 164) $x^\alpha = \exp(\alpha \ln x)$ (при *любом* α и *положительных* x), можно применить *формулу производной сложной функции* и воспользоваться уже вычисленными производными *экспоненты* и *логарифма* :

$$y'(x_0) = \exp(\alpha\ln x_0)\cdot\Bigl(\alpha\cdot\frac{1}{x_0}\Bigr) = \alpha x_0^{\alpha-1}, \quad x_0 > 0.$$

В случае же, когда показатель α есть *натуральное* число n (для функции $y = x^n$) *производная* $y'(x_0)$ существует в *любой* точке x_0 действительной оси:

$$y'(x_0) \overset{\text{def}}{=} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^n - {x_0}^n}{\Delta x} =^1$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x - x_0)(x^{n-1} + x^{n-2} x_0 + \dots + x {x_0}^{n-2} + {x_0}^{n-1})}{\Delta x} = n {x_0}^{n-1};$$

если же $\alpha = -n$ — *целое отрицательное* число, т. е. $y = \dfrac{1}{x^n}$, то применение *формулы производной частного* (см. с. 189) дает:

$$y'(x_0) = \frac{-n\,(x_0)^{n-1}}{(x_0)^{2n}} = -n\,(x_0)^{-n-1} = \alpha (x_0)^{\alpha - 1}, \ \ x_0 \neq 0;$$

в том случае, когда $\alpha = \dfrac{1}{n}$, т. е. $y = \sqrt[n]{x}$, или $x = y^n$, *теорема о производной обратной функции* (с. 191) позволяет заключить:

$$y'(x_0) = \frac{1}{x'(y_0)} = \frac{1}{n {y_0}^{n-1}} = \frac{1}{n (\sqrt[n]{x_0})^{n-1}} = \frac{1}{n} (x_0)^{\frac{1}{n} - 1} = \alpha (x_0)^{\alpha - 1}$$

(для $x_0 > 0$ при *четном* n и для $x_0 \neq 0$ при *нечетном* n).

4. $y = a^x$. Записав (согласно *определению степени*) эту функцию в виде $y = \exp(x \ln a)$, можно применить *теорему о производной сложной функции*:

$$y'(x_0) = \exp(x_0 \ln a) \ln a = a^x \ln a.$$

5. Функция $y = \log_a x$, являющаяся *обратной* к $x = a^y$ (см. с. 168), по *теореме о производной обратной функции* имеет производную

$$y'(x_0) = \frac{1}{x'(y_0)} = \frac{1}{a^{y_0} \log_a} = \frac{1}{x \cdot \log_a}.$$

6. $y = \sin x$. *Приращению* $\Delta x = x - x_0$ отвечает *приращение* $\Delta y = \sin x - \sin x_0 = 2 \cos \frac{x + x_0}{2} \sin \frac{x - x_0}{2}$, а поэтому[2] в любой точке x_0 существует

$$y'(x_0) \overset{\text{def}}{=} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2}{\Delta x} \cos\!\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right) \sin \frac{\Delta x}{2} = \cos x_0 .$$

---

[1] См. с. 33, *формула разности степеней*.

[2] Ввиду *непрерывности косинуса* (см. с. 108) и с применением *основного предела для синуса* (см. с. 122).

7. $y=\cos x$. *Приращению* $\Delta x = x - x_0$ отвечает *приращение* $\Delta y = \cos x - \cos x_0 = -2\sin\frac{x+x_0}{2}\sin\frac{x-x_0}{2}$, поэтому

$$y'(x_0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{-2}{\Delta x}\sin\Bigl(x_0+\frac{\Delta x}{2}\Bigr)\sin\frac{\Delta x}{2} = -\sin x_0 .$$

Производные *синуса* и *косинуса* могут быть получены[1] и на основе *формул Эйлера* $\sin x = \dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$, $\cos x = \dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ (см. с. 122) и *производной линейной комбинации функций*:

$$\sin' x_0 = \frac{i\,e^{ix_0}-(-i)e^{-ix_0}}{2i} = \frac{e^{ix_0}+e^{-ix_0}}{2} = \cos x_0 ,$$

$$\cos' x_0 = \frac{i\,e^{ix_0}-i\,e^{-ix_0}}{2} = -\frac{e^{ix_0}-e^{-ix_0}}{2i} = -\sin x_0 .$$

8. Гиперболический синус $\operatorname{sh} x \stackrel{\text{def}}{=} \dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ и *гиперболический косинус* $\operatorname{ch} x \stackrel{\text{def}}{=} \dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$,[2] имеют производные

$$\operatorname{sh}' x_0 = \frac{e^{x_0}-(-e^{-x_0})}{2} = \operatorname{ch} x_0 ,\quad \operatorname{ch}' x_0 = \frac{e^{x_0}+(-e^{-x_0})}{2} = \operatorname{sh} x_0 .$$

9. $y=\operatorname{tg} x$. Так как $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, применение *формулы производной частного* дает:

$$y'(x_0) = \frac{(\cos x_0)\cos x_0 - \sin x_0(-\sin x_0)}{(\cos x_0)^2} = \frac{1}{\cos^2 x_0} .$$

10. $y=\operatorname{ctg} x$. Так как $\operatorname{ctg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$,

$$y'(x_0) = \frac{(-\sin x_0)\sin x_0 - (\cos x_0)\cos x_0}{(\sin x_0)^2} = -\frac{1}{\sin^2 x_0} .$$

---

[1] Как, например, у не признававшего понятия *предела* Лагранжа (см. с. 186) на с. 24–25 его книги [**44**].

[2] Введенные в 1757 г. итальянским математиком Рикка́ти (Riccati, Vicenzo, 1707–1775) и названные так, с одной стороны, из-за сходства с представлениями через экспоненту обычных (круговых) *синуса* и *косинуса* (по *формулам Эйлера*), а с другой — ввиду того, что в записи $x=\operatorname{ch} t$, $y=\operatorname{sh} t$ они удовлетворяют уравнению *гиперболы* $x^2-y^2=1$.

11. Функцию $y = \arcsin x$ определяют на *отрезке* $[-1,1]$ как *обратную* к функции $x = \sin y$, рассматриваемой на *отрезке* $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ (см. с. 159). Так как $\sin' x_0 = \cos x_0 \neq 0$ в любой точке x_0 *интервала* $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, то по *теореме о производной обратной функции*

$$y'(x_0) = \frac{1}{x'(y_0)} = \frac{1}{\cos x_0} =^1 \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y_0}} = \frac{1}{\sqrt{1-(x_0)^2}},$$

где x_0 — любая точка *интервала* $(-1,1)$ — множества значений функции $x = \sin y$, на *интервале* $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$.

Подобно этому функция $y = \arccos x$, которая определена на *отрезке* $[-1,1]$ как *обратная* к функции $x = \cos y$ (рассматриваемой на *отрезке* $[0,\pi]$), имеет в каждой точке x_0 *интервала* $(-1,1)$ *производную*

$$y'(x_0) = \frac{1}{x'(y_0)} = \frac{1}{-\sin x_0} =^2 \frac{1}{-\sqrt{1-\cos^2 y_0}} = -\frac{1}{\sqrt{1-(x_0)^2}}.$$

12. Для функции $y = \operatorname{arctg} x$, $-\infty < x < +\infty$, определяемой как *обратная* к функции $x = \operatorname{tg} y$, рассматриваемой на *интервале* $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$,

$$y'(x_0) = \frac{1}{x'(y_0)} = \left(\frac{1}{\cos^2 y_0}\right)^{-1} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y_0} = \frac{1}{1+(x_0)^2},$$

где x_0 — любая точка *действительной оси*.

Так же для функции $y = \operatorname{arcctg} x$, $-\infty < x < +\infty$, являющейся *обратной* к функции $x = \operatorname{ctg} y$, рассматриваемой на *интервале* $(0,\pi)$,

$$y'(x_0) = \frac{1}{x'(y_0)} = \left(-\frac{1}{\sin^2 y_0}\right)^{-1} = -\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2 y_0} = -\frac{1}{1+(x_0)^2},$$

Если точку x_0, в которой берется *производная* функции

---

[1] С учетом того, что $\cos x > 0$ для $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

[2] С учетом того, что $\sin x > 0$ для $x \in (0,\pi)$.

$y=f(x)$, считать *переменной*[1], то вычисленная в этой точке *производная* сама становится *функцией* $y=f'(x)$ этой точки. Эту функцию французский математик Лагранж назвал *производной функцией*[2] по отношению к функции $y=f(x)$, предложив называть последнюю *первообра́зной функцией*[3] по отношению к функции $y=f'(x)$ ([**44**], с. 2, 14–15).

Результаты разбора вышеприведенных примеров можно оформить в виде следующего списка *производных* наиболее употребительных в анализе функций:

$$\boxed{\begin{gathered}(\exp x)'=\exp x;\quad (\ln x)'=\frac{1}{x};\quad (x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1};\quad (a^x)'=a^x\ln a;\\ (\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a};\quad \sin' x=\cos x;\quad \cos' x=-\sin x;\\ \operatorname{sh}' x=\operatorname{ch} x;\quad \operatorname{ch}' x=\operatorname{sh} x;\quad \operatorname{tg}' x=\frac{1}{\cos^2 x};\quad \operatorname{ctg}' x=-\frac{1}{\sin^2 x};\\ \arcsin' x=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};\quad \arccos' x=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};\\ \operatorname{arctg}' x=\frac{1}{1+x^2};\quad \operatorname{arcctg}' x=-\frac{1}{1+x^2}.\end{gathered}}$$

Каждое из этих равенств предполагает, что переменная x может принимать любое значение, для которого определены левая и правая части данного равенства. Касательно *производной логарифма* можно добавить, что *первообразной функцией* по отношению к $y=\frac{1}{x}$ является $y=\ln|x|$, так как $(\ln|x|)'=\left(\frac{1}{2}\ln x^2\right)'=\frac{1}{2}\frac{(x^2)'}{x^2}=\frac{1}{x}$.

---

[1] Опуская при этом индекс в ее обозначении.

[2] *Fonction dérivée.*

[3] *Fonction primitive.*

IV.2. Что понимают под инвариантностью формы записи дифференциала

Воспринимая *независимую* переменную[1] x как *функцию*, зависящую лишь от *“самой себя”* $(x = x)$, с *производной* $x' = \lim\limits_{\Delta x} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$ и *дифференциалом* $dx = x' \cdot \Delta x = \Delta x$ (в любой точке), можно сделать вывод: *дифференциал* dx функции $x = x$, имея вид $dx = \Delta x$, есть то же самое, что ее *приращение* Δx. На основе этого наблюдения принимают следующее *определение*.

Дифференциалом dx *независимой* (*свободной*) *переменной* x (*в любой точке* x_0 *множества ее значений*) *считают произвольное приращение* $\Delta x = x - x_0$ *этой переменной*.

С принятием этого определения *дифференциал* dy любой (*дифференцируемой* в точке x_0) функции $y = f(x)$ приобретает более симметричный, нежели $dy = f'(x_0)\,\Delta\,x$, вид $\boxed{dy = f'(x_0)\,dx}$.[2]

Помимо симметрии запись *дифференциала* $dy = f'(x_0)\,dx$ имеет и более важное преимущество перед его изначальной записью $dy = f'(x_0)\Delta x$ — <u>*свойство инвариантности*</u>.

Под этим понимается следующее. Пусть x является не *свободной* переменной, а *функцией* $x = \varphi(t)$ некоторой другой (пока предполагаемой *свободной*) переменной t. Если при этом *функция* $x = \varphi(t)$ имеет *производную* $\varphi'(t_0)$ в точке t_0, то применение *теоремы о производной сложной функции* (с. 190) дает: какова бы ни была функция $y = f(x)$, имеющая в точке $x_0 = \varphi(t_0)$ *производную* $f'(x_0)$, функция $y = f\big(\varphi(t)\big)$

---

[1] Т. е. не являющейся *функцией* других переменных.

[2] Соответственно, *производная* функции в точке x_0 обретает запись $f'(x_0) = \dfrac{df}{dx}$ (или же $y'(x_0) = \dfrac{dy}{dx}$) в виде *отношения дифференциалов* переменных x и $y = f(x)$ в этой точке.

имеет в точке t_0 *производную* $y'(t_0) = f'(x_0)\,\varphi'(t_0)$ и, соответственно, *дифференциал* $dy = f'(x_0)\,\varphi'(t_0)\,dt$.

Поскольку переменная t предполагается (пока) *свободной*, множитель dt в правой части последнего равенства есть произвольное *приращение* $\triangle t = t - t_0$ переменной t (в точке t_0). Но произведение $\varphi'(t_0)dt$ есть не что иное, как *дифференциал* dx *функции* $x = \varphi(t)$ в точке t_0, и это позволяет представить *дифференциал* dy функции $y = f\big(\varphi(t)\big)$ в виде $dy = f'(x_0)\,dx$, т. е. том же самом, что и в случае, когда переменная x была *свободной*.

Вывод: *дифференциал* функции $y = f(x)$ (*в любой точке* x*, где эта функция имеет* *производную*) *вне зависимости* *от того, является переменная* x *свободной или, наоборот,* *функцией* $x = \varphi(t)$ *какой-то другой переменной, имеет* *один и тот же вид* $\boxed{dy = f'(x)\,dx}$ — *свойство* *инвариантности* (*неизменности*) *данной формы записи* *дифференциала*[1].

Необходимо подчеркнуть, что при переходе от случая *свободной* переменной x к случаю *зависимой* $(x = \varphi(t))$ запись дифференциала $dy = f'(x)\,dx$, сохраняя неизменной *форму*, меняет *содержание*. Если в первом случае $dx = \triangle x$ есть произвольно взятое *приращение* переменной x, *не зависящее* от *точки*, в которой оно берется[2], то во втором случае $dx = \varphi'(t)\,dt$ есть величина, *зависящая* от x (поскольку как $x = \varphi(t)$, так и $dx = \varphi'(t)\,dt$ *зависят* от t).

Что касается записи дифференциала в виде $dy = f'(x)\triangle x$, где $\triangle x$ — *приращение* переменной x (в той точке, в которой взята *производная*), то *инвариантной* она не является,

[1] Одновременно это означает, что первоначальное предположение, что $x = \varphi(t)$ есть функция *свободной* переменной t, может быть снято.

[2] Приращение $\triangle x$ берут *одним и тем же* во всех точках x, для которых данное значение $\triangle x$ является *допустимым* (см. с. 185).

поскольку становится *неверной* при переходе от *свободной* переменной x к *зависимой* ($x=\varphi(t)$) от другой переменной.

Убедиться в этом можно на простом примере *зависимой* переменной $x=t^2$: подстановка в правую часть равенства $dy=f'(x)\triangle x$ *приращения* $\triangle x=(t+\triangle t)^2-t^2=2t\triangle t+(\triangle t)^2$ приводит к выражению $f'(t^2)(2t\triangle t+(\triangle t)^2)$, *не совпадающему* с *дифференциалом* $dy=f'(t^2)2t\triangle t$ функции $y=f(t^2)$, который можно получить подстановкой в *инвариантную* форму дифференциала $dy=f'(x)dx$ значений $x=t^2$ и $dx=2tdt$.

Из *правил производной суммы, разности, произведения и частного функций* (с. 189) вытекает соответствующие *правила* для *дифференциалов*:

> *Если функции $y=f(x)$ и $y=g(x)$ имеют в точке x_0 дифференциалы $df=f'(x_0)dx$ и $dg=g'(x_0)dx$, то в этой точке имеют дифференциалы также сумма, разность и произведение этих функций, а при условии $g(x_0)\neq 0$ и их частное, при этом*[1]
>
> $d(f\pm g)=df\pm dg$;
>
> $d(f\cdot g)=df\cdot g+f\cdot dg$;
>
> $d\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{df\cdot g-f\cdot dg}{g^2}$.

<u>Доказательство</u> (например, в отношении дифференциала *частного*):

$$d\left(\frac{f}{g}\right)=\left(\frac{f}{g}\right)'dx=\frac{f'\cdot g-f\cdot g'}{g^2}dx=\frac{f'dx\cdot g-f\cdot g'dx}{g^2}=$$
$$=\frac{df\cdot g-f\cdot dg}{g^2}.\quad \textbf{Q.E.D.}$$

[1] С использованием краткой записи f и g для *значений* функций $y=f(x)$ и $y=g(x)$ в той точке, в которой вычислены *дифференциалы* df и dg.

Примеры. *1*. Найти $d\,\mathrm{arctg}\frac{u}{v}$ в тех точках x, в которых *дифференцируемы* функции $u=u(x)$ и $v=v(x)$ и $v(x)\neq 0$.

Воспринимая *частное* $\frac{u}{v}$ функций $u=u(x)$ и $v=v(x)$ как новую *переменную* (зависящую от x) и пользуясь *инвариантностью формы дифференциала*, значением *производной арктангенса* и *правилом дифференциала частного*, можно прийти к равенствам:

$$d\,\mathrm{arctg}\frac{u}{v}=\mathrm{arctg}'\frac{u}{v}\,d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{1}{1+(\frac{u}{v})^2}\frac{du\cdot v-u\cdot dv}{v^2}=\frac{du\cdot v-u\cdot dv}{u^2+v^2}.$$

2. Для приближенного вычисления значения $\sqrt[10]{1000}$ полагают $f(x)=\sqrt[10]{x}$, $x_0=1024=2^{10}$ и $\triangle x=-24$. Тогда

$$\sqrt[10]{1000}=f(x_0+\triangle x)=f(x_0)+\triangle f\approx f(x_0)+df=$$
$$=f(x_0)+f'(x_0)\,\triangle x=\sqrt[10]{2^{10}}+\frac{1}{10\sqrt[10]{(2^{10})^9}}(-24)=$$
$$=2-\frac{3}{640}\approx 1,9953.$$

3. Линия на плоскости x,y, заданная в *полярных координатах* r,φ уравнением $r=a^{\varphi}$ (с положительной постоянной $a\neq 1$), называется *логарифмической спиралью*[1]. Пользуясь *формулами перехода* $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$ и *свойством инвариантности дифференциала*, можно вычислить производные y'_x функций $y=y(x)$, определяемых уравнением $r=a^{\varphi}$ (из *графиков* этих функций и складывается *логарифмическая спираль*):

$$dy=\sin\varphi\,dr+r\cos\varphi\,d\varphi=\sin\varphi\,a^{\varphi}\ln a\,d\varphi+a^{\varphi}\cos\varphi\,d\varphi,$$

$$dx=\cos\varphi\,dr-r\sin\varphi\,d\varphi=\cos\varphi\,a^{\varphi}\ln a\,d\varphi-a^{\varphi}\sin\varphi\,d\varphi,$$

откуда

$$y'_x=\frac{dy}{dx}=\frac{\sin\varphi\ln a+\cos\varphi}{\cos\varphi\ln a-\sin\varphi}=\frac{\frac{1}{\ln a}+\mathrm{tg}\varphi}{1-\frac{1}{\ln a}\,\mathrm{tg}\varphi}=\mathrm{tg}(\mathrm{arctg}\tfrac{1}{\ln a}+\varphi).$$

[1] По этой спирали закручены “домики” улиток и других моллюсков, а ее дуги просматриваются в расположении семечек в подсолнухе.

IV.3. Какую прямую считают касательной к графику функции

Прямую $\mathcal{L}$ на координатной плоскости переменных x, y называют <u>*касательной*</u> к *графику* функции $y = f(x)$ в точке $P_0(x_0, f(x_0))$, если

а) эта прямая *проходит* через точку P_0,

б) величины $\rho(P, \mathcal{L})$ и $\rho(P, P_0)$ — *расстояния* от переменной точки $P(x, f(x))$ *графика* функции соответственно до *прямой* $\mathcal{L}$ и до *точки касания* P_0 (рис. 14) — связаны соотношением $\boxed{\rho(P, \mathcal{L}) = o\big(\rho(P, P_0)\big) \text{ при } \rho(P, P_0) \to 0}$ ("условием касания"), принимающим, если функция $y = f(x)$ *непрерывна* в точке x_0, вид[1] $\boxed{\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\rho(P, \mathcal{L})}{\rho(P, P_0)} = 0}$.

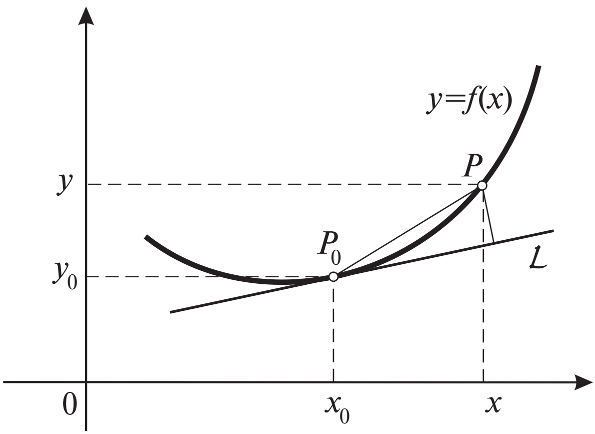


Рис. 14

[1] Так как $\rho(P, P_0) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (f(x) - f(x_0))^2}$, из *непрерывности* функции $y = f(x)$ в точке x_0 вытекает, что $\rho(P, P_0) \to 0 \iff x \to x_0$.

Если функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x_0, то прямая $\mathcal{L}$, заданная на координатной плоскости уравнением $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$, является касательной к графику этой функции в точке $P_0(x_0, f(x_0))$.[1]

<u>Доказательство</u>. Прямая $\mathcal{L}$, которую задает уравнение $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$, обладает свойствами:

а) она *проходит* через точку $P_0(x_0, f(x_0))$,

б) величины $\rho(P, \mathcal{L})$ и $\rho(P, P_0)$ для этой прямой, имея значения соответственно

$$\rho(P, \mathcal{L}) = \frac{|f'(x_0)(x - x_0) - (f(x) - f(x_0))|}{\sqrt{(f'(x_0))^2 + 1}}$$

и

$$\rho(P, P_0) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (f(x) - f(x_0))^2},$$

стремятся к нулю при $x \to x_0$, при этом

$$\frac{\rho(P, \mathcal{L})}{\rho(P, P_0)} = \frac{|f'(x_0)(x - x_0) - (f(x) - f(x_0))|}{\sqrt{(f'(x_0))^2 + 1}\,\sqrt{(x - x_0)^2 + (f(x) - f(x_0))^2}} =$$

$$= \frac{\left| f'(x_0) - \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right|}{\sqrt{(f'(x_0))^2 + 1}\,\sqrt{1 + \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right)^2}} \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0.$$

Согласно данному выше определению прямая $\mathcal{L}$, заданная уравнением $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$, является *касательной* к *графику* функции $y = f(x)$ в точке $P_0(x_0, f(x_0))$.[2] **Q.E.D.**

<u>Замечание</u>. Если для функции $y = f(x)$ в точке x_0 существуют лишь <u>*левая*</u> и/или <u>*правая производные*</u>

---

[1] Или, как для краткости говорят, *касательной в точке* x_0.

[2] Записав производную $f'(x_0)$ как *отношение дифференциалов* (в точке x_0), уравнение *касательной* можно представить в виде *пропорции* $\dfrac{y - y_0}{x - x_0} = \dfrac{dy}{dx}$ (или $\dfrac{dx}{x - x_0} = \dfrac{dy}{y - y_0}$), где $y_0 = f(x_0)$.

$$f'_-(x_0) \overset{\text{def}}{=} \lim_{x\to x_0-0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ ,\quad f'_+(x_0) \overset{\text{def}}{=} \lim_{x\to x_0+0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$ [1]

то уравнения

$$y=f'_-(x_0)(x-x_0)+f(x_0) \ \text{ и } \ y=f'_+(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

задают прямые, которые называют соответственно *левой* и *правой касательными* к *графику* функции $y=f(x)$ в точке $P_0(x_0,f(x_0))$: *условия касания* для них имеют вид соответственно $\lim\limits_{x\to x_0-0} \dfrac{\rho(P,\mathcal{L})}{\rho(P,P_0)}=0$ и $\lim\limits_{x\to x_0+0} \dfrac{\rho(P,\mathcal{L})}{\rho(P,P_0)}=0$.

Если для функции $y=f(x)$, непрерывной в точке x_0, выполняется условие[1] $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} \infty$, *то "вертикальная" прямая $x=x_0$ является касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке $P_0(x_0,f(x_0))$.*

Это следует из того, что в данном случае

$$\frac{\rho(P,\mathcal{L})}{\rho(P,P_0)} = \frac{|x-x_0|}{\sqrt{(x-x_0)^2+(f(x)-f(x_0))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)^2}} \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} 0.$$

Примеры. *1*. Так как функция $y=\sqrt[3]{\sin x^3}$ имеет при $x=0$ *производную* $y'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{\sin x^3}-0}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[3]{\dfrac{\sin x^3}{x^3}}=1$, *прямая* $y=x$, является *касательной* к *графику* этой функции в точке $(0,0)$. В свою очередь *ось* y служит *касательной* к *графику* функции $y=\sqrt[3]{\sin x}$ в начале координат.

---

[1] Как, например, в случае функции $f(x)=\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$, для которой

$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1-0}\frac{\arcsin\frac{2x}{1+x^2}-\frac{\pi}{2}}{x-1}=\lim_{x\to 1-0}\frac{\sin\left(\arcsin\frac{2x}{1+x^2}-\frac{\pi}{2}\right)}{x-1}=$$

$$=\lim_{x\to 1-0}\frac{-\cos\left(\arcsin\frac{2x}{1+x^2}\right)}{x-1}=\lim_{x\to 1-0}\frac{-\sqrt{1-(\frac{2x}{1+x^2})^2}}{x-1}=1, \text{ а } f'_+(1)=-1.$$

[2] В таком случае говорят, что функция $y=f(x)$ имеет в точке x_0 *бесконечную производную*.

2. Уравнение $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=\sqrt[3]{a^2}$, где a — *положительное* число, определяет на координатной плоскости линию, называемую <u>*астроидой*</u>[1]. Взяв *дифференциалы* обеих частей ее уравнения, можно найти уравнение *касательной прямой* к *астроиде* в любой ее точке (x_0, y_0): $\frac{2}{3\sqrt[3]{x_0}}dx+\frac{2}{3\sqrt[3]{y_0}}dy=0$, поэтому $\frac{dy}{dx}=-\frac{\sqrt[3]{y_0}}{\sqrt[3]{x_0}}$, так что $\frac{y-y_0}{x-x_0}=-\frac{\sqrt[3]{y_0}}{\sqrt[3]{x_0}}$ есть уравнение *касательной* к *астроиде* в ее точке (x_0, y_0).

Так как эта *прямая* пересекает ось y при $x=x_0+\sqrt[3]{y_0x_0^2}$, а ось x при $y=y_0+\sqrt[3]{x_0y_0^2}$, вычислением суммы $(x_0+\sqrt[3]{y_0x_0^2})^2+(y_0+\sqrt[3]{x_0y_0^2})^2$ (равной a^2) устанавливается следующее свойство *касательной* к *астроиде*: ее *отрезок* между осями координат имеет *постоянную* длину.

Понятием, близким *касательной прямой* („*касательной в бесконечности*"), является <u>*аси́мпто́та*</u>[2] — прямая $\mathcal{L}$ с тем свойством, что для некоторого множества X (из множества задания функции $y=f(x)$) и некоторой точки x_0 (конечной или бесконечной) величины $\rho(P,\mathcal{L})$ и $\rho(P,O)$ — *расстояния* от точки $P(x, f(x))$ соответственно до *прямой* $\mathcal{L}$ и до *начала координат* O — удовлетворяют соотношениям:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}}\rho(P,\mathcal{L})=0, \quad \text{тогда как} \quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}}\rho(P,O)=+\infty.$$ [3]

Для "вертикальной" прямой $\mathcal{L}$ (с уравнением $x=a$) оба эти соотношения выполняются в том и только в том случае,

---

[1] От лат. astrum — звезда. Представить *астроиду* можно, сопоставив ее с линиями, заданными уравнениями $x^2+y^2=a^2$ и $\sqrt{x^2}+\sqrt{y^2}=\sqrt{a^2}$.

[2] В словарях встречаются два варианта ударения.

[3] Т. е. при неограниченном удалении точки P вдоль некоторой "ветви" графика функции расстояние от этой точки до прямой $\mathcal{L}$ стремится к нулю. Название *асимптота* (греч. $\alpha\sigma\acute{\upsilon}\mu\pi\tau\omega\tau o\varsigma$ — несовпадающий) объясняется тем, что изначально в определение асимптоты входило требование *недостижимости* точкой P прямой $\mathcal{L}$.

когда выполнено соотношение[1] $\lim\limits_{x\to a\pm 0} f(x)=\infty$. В случае же прямой $\mathcal{L}$ с уравнением $y=kx+b$,[2] когда
$\rho(P,\mathcal{L})=\dfrac{|kx-f(x)+b|}{\sqrt{k^2+1}}$, в то время как $\rho(P,O)=\sqrt{x^2+(f(x))^2}$, выполнение указанных соотношений равносильно тому, что $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(kx-f(x)+b)=0$,[3] в силу чего

$$\boxed{k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x},\ \text{а}\ b=\lim_{x\to\pm\infty}\bigl(f(x)-kx\bigr)}.$$

Примеры. *1*. График функции $y=\dfrac{x^3}{x^2-1}$ имеет "вертикальные" асимптоты $x=\pm 1$ и "наклонную" асимптоту $y=x$.

2. Прямая $y=0$ является "горизонтельной" асимптотой графика функции $y=\dfrac{\sin x}{x}$.

3. Для функции $y=y(x)$, заданной *параметрически* уравнениями $x=\dfrac{t^2}{t-1}$, $y=\dfrac{t}{t^2-1}$, из соотношений:

а) $\lim\limits_{t\to -1\pm 0} x(t)=-\dfrac{1}{2}$, $\lim\limits_{t\to -1\pm 0} y(t)=\pm\infty$;

б) $\lim\limits_{t\to 1\pm 0} x(t)=\pm\infty$, $\lim\limits_{t\to 1\pm 0}\dfrac{y(t)}{x(t)}=\dfrac{1}{2}$, $\lim\limits_{t\to 1\pm 0}\Bigl(y(t)-\dfrac{1}{2}x(t)\Bigr)=-\dfrac{3}{4}$;

в) $\lim\limits_{t\to\pm\infty} x(t)=\pm\infty$, $\lim\limits_{t\to\pm\infty}\dfrac{y(t)}{x(t)}=0$, $\lim\limits_{t\to\pm\infty}\bigl(y(t)-0\cdot x(t)\bigr)=0$

следует, что график этой функции имеет:

а) "вертикальную" асимптоту $x=-\dfrac{1}{2}$,

б) "наклонную" асимптоту $y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{3}{4}$,

в) "горизонтальную" асимптоту $y=0$.

---

[1] Т.е. функция $y=f(x)$ становится *бесконечно большой* при стремлении переменной x к значению a слева и/или справа (роль точки x_0 выполняет a, а множества X — ее *левая* и/или *правая окрестность*.

[2] Т.е. "наклонной" или "горизонтальной" (при $k=0$).

[3] Т.е. в качестве точки x_0 выступают $+\infty$ или $-\infty$, а в качестве множества X (задающего "ветвь" графика) — *окрестность* точки $+\infty$ или $-\infty$.

IV.4. В чем суть метода Ферма и теорем Ролля, Лагранжа и Коши

Для функции $y = f(x)$, принимающей на множестве[1] X *действительные значения, точку $x_0 \in X$ называют:*

а) точкой абсолютного (*или глобального*) *максимума, если истинно утверждение, выражаемое формулой*

$$\forall x \big(x \in X \wedge x \neq x_0 \Rightarrow f(x) \leqslant f(x_0)\big),$$

смысл которой: "среди всех значений функции $y = f(x)$ на множестве X значение $f(x_0)$ является наибольшим"[2];

б) точкой локального максимума, если истинно утверждение, выражаемое формулой

$$\exists \delta > 0 \forall x \big(x \in X \wedge 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) \leqslant f(x_0)\big),$$

смысл которой: "существует окрестность точки x_0, в любой точке x которой, отличной от x_0, но принадлежащей множеству X, значение $f(x)$ не превосходит значения $f(x_0)$";

если истинность этих утверждений сохраняется при замене в них неравенства $f(x) \leqslant f(x_0)$ на $f(x) < f(x_0)$, то точку x_0 называют точкой строгого максимума — абсолютного или локального — функции $y = f(x)$ на множестве X.

Таким же образом (с заменой неравенств $f(x) \leqslant f(x_0)$ и $f(x) < f(x_0)$ противоположно направленными) дают определения *точек минимума* (*абсолютного* и *локального*) *функции $y = f(x)$ на множестве X.*

Точки максимума и *точки минимума* функции объединяют термином *точки экстремума* этой функции.

---

[1] Точек *действительной оси* (или *комплексной плоскости*).

[2] Эквивалентно: "*x_0 — точка множества X, в которой функция $y = f(x)$ достигает своей точной верхней грани на этом множестве*". (Такая точка не обязательно существует, а если существует, то не обязательно является единственной.)

Необходимое условие точки экстремума ("метод Ферма́")[1]. *Если точкой экстремума*[2] *функции* $y=f(x)$ *на промежутке* $I\subset\mathbb{R}$ *служит какая-либо внутренняя точка* c *этого промежутка, то либо* $f'(c)=0$, *либо в точке* c *данная функция не имеет производной*[3].

Доказательство. Если *точкой экстремума* (для определенности *максимума*)[4] функции $y=f(x)$ на промежутке I является некоторая *внутренняя* точка c этого промежутка, то для любого достаточно малого (по модулю) *приращения* $\triangle x=x-c$ *приращение* $\triangle f=f(x)-f(c)$ оказывается *неположительным*, так что $\frac{\Delta f}{\Delta x}\leqslant 0$ при $\triangle x>0$ и $\frac{\Delta f}{\Delta x}\geqslant 0$ при $\triangle x<0$. Следовательно, если существует $f'(c)\overset{\mathrm{def}}{=}\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}$, то $f'(c)=0$. **Q.E.D.**

[1] Прообразом этого утверждения является "метод отыскания наибольших и наименьших значений", применимый к *многочленам* и описанный в сочинении 1639 г. (с тем же названием) французского математика Ферма́ (Fermat, Pierre, 1601–1665); русский перевод этого сочинения включен в русское издание "Геометрии" Декарта [**8**]. Метод состоит в том, что, записав для многочлена $p(x)$ равенство $p(x)=p(x+h)$, следует сократить общие члены, разделить оставшиеся на h и отбросить все те, в которых остался множитель h (или его степень); полученное в результате уравнение имеет решениями искомые точки максимума и минимума многочлена $p(x)$. Если оперировать понятием *производной* (которым Ферма не располагал), то это уравнение принимает вид $p'(x)=0$.

[2] *Максимума* или *минимума*, *абсолютного* или *локального*, *строгого* или нет.

[3] Искать *точки экстремума* функции на *промежутке* следует поэтому лишь среди тех его *внутренних* точек, в которых *производная* функции либо *равна нулю* (такие точки называют *стационарными*), либо *не существует*, и среди *концевых* точек *промежутка*. Пример функции $y=x^3$ показывает, что выполнение условия $f'(c)=0$ еще не гарантирует наличия *экстремума* функции в точке c.

[4] *Абсолютного* или *локального* (*строгого* или нет).

Теорема Ро́лля[1]. *Если функция*[2] $y=f(x)$:

а) непрерывна на отрезке $I\subset\mathbb{R}$,[3]

б) имеет производную $f'(x)$ *в любой внутренней точке* x *этого отрезка,*

в) на концах отрезка I *принимает одно и то же значение,*

то $f'(c)=0$ *хотя бы в одной внутренней точке* c *этого отрезка.*

Доказательство. Если в *любой* точке отрезка I функция $y=f(x)$ принимает то же самое значение, что и на его *концах*, то она является *постоянной* на этом *отрезке*, и потому $f'(x)=0$ в любой *внутренней* точке x отрезка I. Если же среди значений функции на отрезке I есть *отличные* от ее значения на его *концах*, то либо *точная верхняя*, либо *точная нижняя грань* этой функции[4] на отрезке I *достигается* в некоторой его *внутренней* точке c, оказывающейся в силу этого либо *точкой абсолютного максимума*, либо *точкой*

[1] Французский алгебраист Ролль (Rolle Michel, 1652–1719) в изданном в 1691 г. сочинении “Доказательство одного метода решения уравнений всех степеней” (“Démonstration d'une méthode pour résoudre les égalités de tous les degrés”) установил лишь следующее: *в двух соседних однократных корнях многочлена производная этого многочлена принимает значения противоположных знаков.* Ролль оперировал чисто алгебраически, и в качестве того, что сейчас называют *производной* многочлена $p(x)$, у него выступал (как раз равный $p'(x)$) *коэффициент* при z в разложении многочлена $p(x+z)$ по степеням z. Современную формулировку “теоремы Ролля” дал Вейерштрасс в своих (уже упоминавшихся на с. 85) лекциях по дифференциальному исчислению.

[2] Принимающая *действительные* значения: на *комплекснозначные* функции утверждение теоремы *не распространяется* (пример ниже).

[3] Т. е. (см. с. 143) *непрерывна* в каждой *внутренней* точке этого отрезка и *непрерывна слева* или *справа* в его *концевых* точках.

[4] А обе они *достигаются* на отрезке I (см. с. 147, *теорема 2*).

абсолютного минимума[1] функции $y = f(x)$ на отрезке I. В обоих случаях $f'(c) = 0$ в силу *необходимого условия точки экстремума* (см. с. 207). **Q.E.D.**

То, что на *комплекснозначные* функции *теорема Ролля* не распространяется, видно на примере функции $y = e^{ix}$, которая

а) непрерывна на отрезке $[0, 2\pi]$,[2]

б) имеет производную $\left(e^{ix}\right)' = i e^{ix}$ в любой *внутренней* точке этого отрезка,[2]

в) $e^{i0} = e^{i2\pi} = 1$,

но *производная* которой $\left(e^{ix}\right)' = i e^{ix}$ *отлична от нуля* при *любом* значении x.

Теорема Лагра́нжа[3]. *Если функция*[4] $y = f(x)$:

а) непрерывна на отрезке $I \subset \mathbb{R}$,

б) имеет производную $f'(x)$ *в любой внутренней точке* x *этого отрезка,*

то справедливо равенство[5]

$$\boxed{f(b) - f(a) = f'(c)\,(b - a)},$$

где a *и* b *— концевые точки*[6] *отрезка* I, *а* c *— некоторая внутренняя точка этого отрезка.*

---

[1] Соответственно случаям $f(c) = \sup\limits_I f(x)$ и $f(c) = \inf\limits_I f(x)$.

[2] Как и вообще в любой точке *действительной оси* (и *комплексной плоскости*).

[3] Ее можно найти на с. 68 “Теории аналитических функций” [**44**] французского математика Лагранжа как частный случай того, что сейчас называют *формулой Тейлора с остатком в записи Лагранжа*, о которой ниже (см. с. 233).

[4] Принимающая *действительные* значения.

[5] Записанное в виде $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$, это равенство означает, что прямая, *касательная* к *графику* функции $y = f(x)$ в точке $(c, f(c))$, *параллельна* (или совпадает с) прямой, проведенной через *концевые точки* $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$ *графика*.

[6] Вне зависимости от того, $a < b$ или $a > b$.

<u>Доказательство</u>. Если функция $y = f(x)$ удовлетворяет условиям *теоремы* (а они совпадают с первыми двумя условиями *теоремы Ролля*), то функция

$$y = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a),$$

также удовлетворяющая этим условиям, удовлетворяет еще и третьему условию *теоремы Ролля*: в точках a и b она принимает *одно и то же* значение $f(a)$. По *теореме Ролля* *производная*

$$\left(f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right)' = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

этой функции *равна нулю* в некоторой *внутренней* точке c отрезка I, т. е. $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$. **Q.E.D.**

Следствия из теоремы Лагранжа

1. Формула конечных приращений. Если функция $y = f(x)$ *имеет производную* не только в точке x_0, но и в некоторой ее окрестности, то для любой точки x из этой окрестности *приращение* $\Delta f = f(x) - f(x_0)$ выражается через *приращение* $\Delta x = x - x_0$ <u>*формулой конечных приращений*</u>

$$\boxed{\Delta f = f'(x_0 + \theta\,\Delta x)\,\Delta x,\ \ 0 < \theta < 1}.$$[1]

<u>Доказательство</u>. Взяв в упомянутой *окрестности* точки x_0 любую (отличную от x_0) точку x, достаточно применить

[1] Конкретное значение θ (а оно зависит от приращения Δx) в рамках данной *формулы* не уточняется.

По давней традиции *приращения* $\Delta x = x - x_0$ и $\Delta f = f(x) - f(x_0)$ называют *“конечными”* для указания на их отличие от *“бесконечно малых” приращений* dx и df (так в прежние времена понимали *дифференциалы*), связь между которыми выражается формулой $\boxed{df = f'(x_0)\,dx}$. *“Конечность” приращений* $\Delta x = x - x_0$ и $\Delta f = f(x) - f(x_0)$ следует понимать поэтому в том смысле, что за x может быть взята *любая* точка действительной оси, не выходящая лишь за пределы той *окрестности* точки x_0, в которой функция $y = f(x)$ *имеет производную*.

теорему Лагранжа к функции $y=f(x)$ на отрезке I с *концевыми* точками x_0 и x:

$$\triangle f = f(x)-f(x_0)=f'(c)(x-x_0)=f'(x_0+\theta\triangle x)\triangle x,$$

где c — некоторая точка, *промежуточная* между x_0 и x, а потому представимая в виде $c=x_0+\theta(x-x_0)$, $0<\theta<1$.

2. Критерий постоянства функции на промежутке. *Для того чтобы функция $y=f(x)$ была постоянной на промежутке $I\subset\mathbb{R}$, необходимо и достаточно, чтобы эта функция имела равную нулю производную во всех внутренних точках промежутка I и была непрерывной (слева или справа) в концевых* точках этого промежутка[1].

Доказательство. Если $f(x)=c$ на промежутке I, и x_0 — *внутренняя* точка этого промежутка, то

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{c-c}{x-x_0}=0;$$

если же x_0 — *включаемая* в промежуток I его *конецевая* (например, *правая*), то $f(x_0)=c$ и $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=c$, т. е. выполнено условие *непрерывности слева* функции в точке x_0.

Обратно, если функция $y=f(x)$ во всех *внутренних* точках промежутка I имеет *производную*, равную *нулю*, а в его *концевых* точках[1] *непрерывна слева* или *справа*, то для *любых* двух точек $x_1,x_2\in I$ применение *теоремы Лагранжа* к функции $y=f(x)$ на *отрезке*, *соединяющем* эти точки, дает: $f(x_1)-f(x_2)=0\cdot(x_1-x_2)=0$, т. е. $f(x_1)=f(x_2)$ для *любых* двух точек $x_1,x_2\in I$. **Q.E.D.**

Пример. Функция $y=\arcsin x+\arccos x$ *непрерывна* на *отрезке* $[-1,1]$ (см. с. 159) и имеет *внутри* этого отрезка *производную, равную нулю*; следовательно,

$$\arcsin x+\arccos x = \arcsin 1+\arccos 1=\tfrac{\pi}{2},\ -1\leqslant x\leqslant 1.$$

[1] В том случае, если они *включаются* в промежуток I.

3. Признак возрастания функции на промежутке. *Если функция $y = f(x)$, являясь непрерывной на промежутке I, имеет производную $f'(x) > 0$ в каждой внутренней точке этого промежутка (за возможным исключением конечного числа его точек), то функция $y = f(x)$ является возрастающей на промежутке I.*

Доказательство. Пусть x_1 и x_2 — любые две точки промежутка I, причем $x_1 < x_2$. Если $f'(x) > 0$ в *каждой* точке $x \in (x_1, x_2)$, то применение *теоремы Лагранжа* к функции $y = f(x)$ на *отрезке* $[x_1, x_2]$ дает: $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$, где $x_1 < c < x_2$, так что (поскольку $f'(c) > 0$) выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$.

Если же среди точек, *промежуточных* между x_1 и x_2, есть (для определенности) *две* точки c_1 и c_2, в которых не выполнено условие $f'(x) > 0$, то к неравенству $f(x_1) < f(x_2)$ можно прийти, применяя *теорему Лагранжа* на каждом из отрезков $[x_1, c_1]$, $[c_1, c_2]$, $[c_2, x_2]$ и "складывая" полученные неравенства $f(c_1) - f(x_1) > 0$, $f(c_2) - f(c_1) > 0$, $f(x_2) - f(c_2) > 0$. Тем самым для точек $x_1, x_2 \in I$ доказано выполнение импликации $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$. **Q.E.D.**

3'. Признак убывания функции на промежутке. *Если функция $y = f(x)$, являясь непрерывной на промежутке I, имеет производную $f'(x) < 0$ в каждой внутренней точке этого промежутка (за возможным исключением конечного числа его точек), то функция $y = f(x)$ является убывающей на промежутке I.*

Примеры. *1*. Функция $y = x^3$ для которой $(x^3)' = 3x^2 > 0$ при $x \neq 0$, является *возрастающей* на *действительной оси*.

2. Функция $y = \cos x$, имея *производную* $\cos' x = -\sin x$, отрицательную во всех *внутренних* точках отрезка $[0, \pi]$, является *убывающей* на этом *отрезке*.

4. Каких разрывов не бывает у производной функции. *Если на промежутке* I *функция* $y=f(x)$ *является производной некоторой функции* $y=\varphi(x)$ (*т. е.* $f(x)=\varphi'(x)$ *для всех* $x\in I$), *то функция* $y=f(x)$ *не имеет на промежутке* I *точек устранимого разрыва или разрыва 1-го рода*[1].

<u>Доказательство</u>. Пусть x_0 — точка промежутка I, в которой функция $y=f(x)$ имеет *предел справа* $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=b$. По определению (см. с. 125) это означает, что для любого числа $\varepsilon>0$ существует такое число $\delta>0$, что для всех значений $x\in(x_0,x_0+\delta)$ выполняется неравенство $|f(x)-b|<\varepsilon$. Взяв любое значение $x\in(x_0,x_0+\delta)$ и применив к функции $y=\varphi(x)$ на отрезке $[x_0,x]$ *теорему Лагранжа*[2], получают:

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0}=\frac{\varphi'(c)(x-x_0)}{x-x_0}=f(c), \text{ где } x_0<c<x<x_0+\delta,$$

так что

$$\left|\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0}-b\right|=|f(c)-b|<\varepsilon, \text{ если } x_0<x<x_0+\delta.$$

Это означает, что $b=\lim\limits_{x\to x_0+0}\dfrac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0}$, из чего следует (ввиду существования *производной* $\varphi'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0}$), что $b=\varphi'(x_0)=f(x_0)$. Тем самым установлено, что если функция $y=f(x)=\varphi'(x)$ имеет в точке $x_0\in I$ *предел справа*, то выполняется соотношение $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0)$. В силу таких же рассуждений, если функция $y=f(x)=\varphi'(x_0)$ имеет в точке $x_0\in I$ *предел слева*, то $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0)$. **Q.E.D.**

---

[1] Иначе говоря, если $f(x)=\varphi'(x)$ на промежутке I, то в любой точке x_0 этого промежутка функция $y=f(x)$ либо является *непрерывной* (а если x_0 — *концевая* точка промежутка I, то *непрерывной слева* или *справа*), либо имеет в ней *разрыв 2-го рода*.

[2] Так как функция $y=\varphi(x)$ *имеет производную* ($\varphi'(x)=f(x)$) на промежутке I, она является *непрерывной* на отрезке $[x_0,x]\subset I$.

Теорема Коши[1]. *Если функции*[2] $y=f(x)$ *и* $y=g(x)$:

а) непрерывны на отрезке $I\subset\mathbb{R}$,

б) имеют производные $f'(x)$ *и* $g'(x)$ *во всех внутренних точках* x *этого отрезка, причем* $g'(x)\neq 0$ *в любой из них,*

то

$$\boxed{\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}},^{3},$$

где a *и* b *— концевые точки*[4] *отрезка* I, *а* c *— некоторая внутренняя точка этого отрезка.*

Доказательство[5]. На отрезке I функция

$$y=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\big(g(x)-g(a)\big)$$

удовлетворяет всем трем условиям *теоремы Ролля* (с. 208), в силу которой *производная*

$$\left(f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\big(g(x)-g(a)\big)\right)'=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(x)$$

этой функции *равна нулю* в некоторой *внутренней* точке c отрезка I, т. е. $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(c)$. **Q.E.D.**

Ставший классическим экзаменационный вопрос, не вытекает ли *теорема Коши* из *теоремы Лагранжа*, примененной (на том же отрезке I) к функциям $y=f(x)$ и $y=g(x)$ (с последующим “делением” утверждаемых для них *теоремой Лагранжа* равенств), имеет следующий ответ: рассуждая указанным образом, можно получить лишь равенство $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(c_1)}{g'(c_2)}$, в котором c_1 и c_2 — некоторые *внутренние* точки отрезка I (не обязательно совпадающие).

---

[1] Впервые сформулирована и доказана французским математиком Коши в 1829 г. ([**35**], с. 243).

[2] Принимающие *действительные* значения.

[3] *Знаменатели* в обеих частях этого равенства *не равны нулю* в силу предположения, что $g'(x)\neq 0$ *внутри* отрезка I.

[4] Вне зависимости от того, $a<b$ или $a>b$.

[5] По схеме доказательства *теоремы Лагранжа* (см. с. 210).

IV.5. В чем состоит правило Лопиталя

В письме от 7 июня 1694 г. маркиз де Лопиталь[1], попросил своего наставника в математике Иоганна Бернулли указать *"способ решить уравнение* $y = \dfrac{\sqrt{2a^3x - x^4} - a\sqrt[3]{aax}}{a - \sqrt[4]{ax^3}}$ *при* $x = a$*"*[2]. В ответном письме от 22 июля 1964 г. И.Бернулли сообщил *общее правило* ("règle générale"), состоящее в том, что *"...надо разделить дифференциал числителя дроби на дифференциал знаменателя..."*[3]. С согласия И.Бернулли Лопиталь включил сообщенное ему *правило* (иллюстрируя его тем же примером) в свой учебник ([**13**], с. 308–310), в результате чего и возник и утвердился (к досаде И.Бернулли) термин *"правило Лопиталя"*.

В современной формулировке <u>*правило Лопиталя*</u> (*"раскрытия неопределенностей* $\frac{0}{0}$ *и* $\frac{\infty}{\infty}$*"*) имеет следующий вид.

Пусть в некоторой окрестности точки[4] a *обе функции* $y = f(x)$ *и* $y = g(x)$ *имеют производные, причем* $g'(x) \neq 0$, *и пусть либо*

1) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ *и* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$,

либо

2) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ *и* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$;

тогда из того, что $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = b$, *следует, что* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = b$.[5]

---

[1] Guillaume François Marquis de l'Hôpital (1661–1704), офицер французской кавалерии, по слабости зрения оставивший военную службу и занявшийся математикой. С одобрения Лейбница написал и в 1696 г. издал первый в истории учебник по *дифференциальному исчислению* "Analyse des infiniment petits", имеющийся и в русском переводе [**13**].

[2] Сейчас бы сказали: *найти предел при* $x \to a$. В оригинале (на с. 226 изданной переписки И.Бернулли [**32**]: *"la manière de résoudre l'équation* $y = \dfrac{\sqrt{2a^3x - x^4} - a\sqrt[3]{aax}}{a - \sqrt[4]{ax^3}}$ *lorsque* $x = a$*"* (aa тогда не писали как a^2).

[3] В оригинале (на с. 235 в [**32**]): *"... il faut diviser la différentielle du numérateur de la fraction générale par la différentielle du dénumérateur..."*

[4] *Конечной* или *бесконечной* и *не включаемой* в эту *окрестность*.

[5] При этом b может быть как *конечным* числом, так и $\pm\infty$.

Данное утверждение вытекает из следующего его варианта для *пределов справа*, если учесть, что справедлив и "симметричный" ему вариант для *пределов слева*.

Пусть в некоторой правой окрестности точки[1] a *функции* $y=f(x)$ *и* $y=g(x)$ *имеют производные, причем* $g'(x)\neq 0$, *и пусть либо*

1) $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=0$ *и* $\lim\limits_{x\to a+0} g(x)=0$,

либо

2) $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\infty$ *и* $\lim\limits_{x\to a+0} g(x)=\infty$;

тогда если $\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=b$,[2] *то и* $\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=b$.

Доказательство. Пусть (a,d) — та *правая окрестность* точки a, в которой функции $y=f(x)$ и $y=g(x)$ имеют производные, причем $g'(x)\neq 0$. Если существует $\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=b$,то, взяв любое *положительное* число ε, можно, "уменьшая" окрестность (a,d) (сдвигая точку d влево), можно добиться того, чтобы *для всех* $x\in(a,d)$ выполнялись неравенства

$$b-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{f'(x)}{g'(x)}<b+\frac{\varepsilon}{2}.^{3}$$

Если выполнено условие *1)* $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=0$ и $\lim\limits_{x\to a+0} g(x)=0$, то, взяв (произвольно) точку $x\in(a,d)$ и точку $x_1\in(a,x)$ и применив к функциям $y=f(x)$ и $y=g(x)$ на отрезке $[x_1,x]$ *теорему Коши*, получив таким образом соотношение $\dfrac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)}=\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$, где $x_1<c<x$ (а следовательно, $c\in(a,d)$),

[1] a может быть точкой действительной оси или $-\infty$ (в последнем случае запись $x\to a+0$ означает, что $x\to-\infty$.

[2] b может быть как *конечным* числом, так и $\pm\infty$.

[3] В случае *конечного* b, и неравенства $2\varepsilon<\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ или $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}<-2\varepsilon$ соответственно случаям $b=+\infty$ и $b=-\infty$.

можно заключить (ввиду предыдущих неравенств для $\frac{f'(x)}{g'(x)}$):

$$b-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)}<b+\frac{\varepsilon}{2},^{1} \text{ лишь только } a<x_1<x<d;$$

переход в этих неравенствах к *пределу* при $x_1\to a+0$ (и фиксированном x) дает: $b-\frac{\varepsilon}{2}\leqslant\frac{f(x)}{g(x)}\leqslant b+\frac{\varepsilon}{2}$ (а следовательно, $\left|\frac{f(x)}{g(x)}-b\right|<\varepsilon$)[2] как только $a<x<c$, т. е. $\lim\limits_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=b$.

При условии же *2)* $\lim\limits_{x\to a+0}f(x)=\infty$ и $\lim\limits_{x\to a+0}g(x)=\infty$ также следует применить *теорему Коши*, но на сей раз на отрезке $[x,x_2]$, где $a<x<x_2<d$. Прийдя к неравенствам

$$b-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{f(x)-f(x_2)}{g(x)-g(x_2)}<b+\frac{\varepsilon}{2},^{3}\quad \text{если } a<x<x_2<d,$$

можно, взяв в них x (не меняя x_2) достаточно близким к a (с тем, чтобы значение $\frac{g(x)-g(x_2)}{g(x)}$ было *положительным*)[4] привести их (умножением на $\frac{g(x)-g(x_2)}{g(x)}$) к виду

$$\frac{g(x)-g(x_2)}{g(x)}\Big(b-\frac{\varepsilon}{2}\Big)+\frac{f(x_2)}{g(x)}<\frac{f(x)}{g(x)}<\frac{f(x_2)}{g(x)}+\frac{g(x)-g(x_2)}{g(x)}\Big(b+\frac{\varepsilon}{2}\Big)^{5}.$$

---

[1] С заменой в случае *бесконечного* b этих неравенств неравенством $2\varepsilon<\frac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)}$ при $b=+\infty$ и неравенством $\frac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)}<-2\varepsilon$ при $b=-\infty$.

[2] Соответственно, $\varepsilon<\frac{f(x)}{g(x)}$ при $b=+\infty$ и $\frac{f(x)}{g(x)}<-\varepsilon$ при $b=-\infty$.

[3] С заменой их неравенством $2\varepsilon<\frac{f(x)-f(x_2)}{g(x)-g(x_2)}$ при $b=+\infty$ и неравенством $\frac{f(x)-f(x_2)}{g(x)-g(x_2)}<-2\varepsilon$ при $b=-\infty$.

[4] Следует учесть, что $\lim\limits_{x\to a+0}\frac{g(x)-g(x_2)}{g(x)}=1$.

[5] Соответственно, $2\varepsilon\frac{g(x)-g(x_2)}{g(x)}+\frac{f(x_2)}{g(x)}<\frac{f(x)}{g(x)}$ при $b=+\infty$ и $\frac{f(x)}{g(x)}<-2\varepsilon\frac{g(x)-g(x_2)}{g(x)}+\frac{f(x_2)}{g(x)}$.

Ввиду того, что $\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{g(x)-g(x_2)}{g(x)}=1$, а $\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{f(x_2)}{g(x)}=0$, из этих неравенств следует, что для всех x, достаточно близких к a, выполняются неравенства $b-\varepsilon<\dfrac{f(x)}{g(x)}<b+\varepsilon$,[1] т.е. $\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=b$. **Q.E.D.**

Пример функций $f(x)=x^2\sin\dfrac{1}{x}$ и $g(x)=\sin x$, *бесконечно малых* при $x\to 0$, показывает необратимость *правила Лопиталя*: для этих функций $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$, тогда как $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ *не существует*.

На примере же функций $f(x)=\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$, $g(x)=x$ (обе они *бесконечно малые* при $x\to 0$) видно, что прямое применение *правила Лопиталя* может лишь усложнить "раскрытие неопределенности": $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{g'x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{x^3}$ найти не проще, чем $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{x}$. В данном случае *правило Лопиталя* лучше применить, переходя к *бесконечно большим* (при $x\to 0$) функциям $f(x)=\dfrac{1}{x}$ и $g(x)=\exp\frac{1}{x^2}$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{\exp\frac{1}{x^2}}=0$$

$$\Uparrow$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\frac{1}{x})'}{(\exp\frac{1}{x^2})'}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{x^2}}{-\frac{2}{x^3}\exp\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{2}\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)=0$$

(точно так же получают, что $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2}=0$, а применяя *правило Лопиталя* несколько раз — что $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{x^n}=0$ при $n>2$).

[1] Соответственно, $\varepsilon<\dfrac{f(x)}{g(x)}$ при $b=+\infty$ и $\dfrac{f(x)}{g(x)}<-\varepsilon$ при $b=-\infty$.

V. Высшие производные и дифференциалы

V.1. Как определяют высшие производные и дифференциалы функций

Производными и *дифференциалами высших* (*второго* и следующих) *порядков* называют *производные производных*, *дифференциалы дифференциалов* и т. д.

С пониманием того, что считать *производными высших порядков*, сложностей не возникает[1]: как писал в 1823 г. Коши[2], *"из данной функции $y = f(x)$ в общем случае можно вывести множество новых функций, каждая из которых будет производной предыдущей. Эти новые функции есть то, что называют* производными *различных порядков для y или $f(x)$, с использованием для них обозначений*

$$y',\ y'',\ y''',\ y^{IV},\ y^{V},\ \ldots,\ y^{(n)}$$

или

$$f'(x),\ f''(x),\ f'''(x),\ f^{IV}(x),\ f^{V}(x),\ \ldots,\ f^{(n)}(x).\text{"}$$ [3]

Ясно, что при таком понимании *производной порядка n* для ее существования в *точке x_0 необходимо* (но *не достаточно*), чтобы производная порядка $n-1$ существовала не только в этой *точке*, но и в некоторой ее *окрестности*.

---

[1] Остаются лишь вопросы, в каких точках они существуют, как их вычислять и чему они равны.

[2] Используемые Коши обозначения *производных* не претерпели изменения; надо лишь добавить, что под *производной нулевого порядка* понимают саму *функцию*: $y^{(0)} \overset{\text{def}}{=} y$, $f^{(0)}(x) \overset{\text{def}}{=} f(x)$.

[3] В оригинале ([**35**], с. 69): "*... d'une fonction donnée $y = f(x)$ on pourra déduire en général une multitude de fonctions nouvelles dont chacune sera la dérivée de la précédente. Ces fonctions nouvelles sont ce qu'un nomme les dérivées des diverses ordres de y ou $f(x)$, et on les indique à l'aide des notations*

$$y',\ y'',\ y''',\ y^{IV},\ y^{V},\ \ldots,\ y^{(n)}$$

ou

$$f'(x),\ f''(x),\ f'''(x),\ f^{IV}(x),\ f^{V}(x),\ \ldots,\ f^{(n)}(x)."$$

Так, функция $y=\begin{cases} x^n, & \text{если } x \text{ — \textit{рациональное} число,}\\ 0, & \text{если } x \text{ — \textit{иррациональное} число,}\end{cases}$ имеет (при любом $n>1$) *производную* (равную *нулю*) только в точке $x=0$, а потому *производной второго порядка* (и следующих) эта функция не имеет ни в одной точке.

Формула *производной произведения* $(f\cdot g)'=f'g+fg'$ имеет обобщение на производные высших порядков, называемое *формулой Лейбница*[1]: $\boxed{(f\cdot g)^{(n)}=\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}}$.

Вывести эту *формулу* можно (как это и делал Лейбниц), сводя ее к *формуле бинома Ньютона* $(f+g)^n=\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k f^k g^{n-k}$ (см. с. 26): достаточно заметить, что если *производным* функций f и g сопоставить их *степени* (с теми же *показателями*, что и *порядки* производных), то

а) правой части равенства $(f\cdot g)'=f'g+fg'$ будет соответствовать *первая* степень бинома $f+g$;

б) переход от $(f\cdot g)^{(n-1)}$ к $(f\cdot g)^{(n)}=\big((f\cdot g)^{(n-1)}\big)'$ будет производиться по тому же правилу, что и переход от $(f+g)^{n-1}$ к $(f+g)^n=(f+g)^{n-1}(f+g)$: подобно тому как каждое слагаемое в $(f+g)^{n-1}$ (после раскрытия скобок) при умножении на $f+g$ заменяется двумя, в одном из которых *увеличивается* на единицу *показатель степени* f, а в другом — *показатель степени* g, каждое слагаемое в $(f\cdot g)^{(n-1)}$ (после раскрытия скобок) при взятии производной заменяется двумя, в одном из которых *увеличивается* на единицу *порядок производной* f, а в другом — *порядок производной* g.

[1] Впервые эта *формула* (правда, применительно не к *производным*, а к *дифференциалам*) встречается в письмах 1695 г. Лейбница к И. Бернулли ([**46**], с. 175, 221).

С *дифференциалами* (*второго* и следующих порядков) дело обстоит сложнее, чем с *производными*.

Причина этого такова. Подобно тому как понятие *дифференциала функции* базируется на понятии *приращения функции*, понятие *дифференциала дифференциала функции* $y = f(x)$ в *точке* x_0 базируется на понятии *приращения дифференциала* $\Delta\, df = f'(x_0 + \Delta\, x)dx - f'(x_0)dx$ этой функции в этой точке. Если x является *независимой* переменной, то dx есть не что иное, как *приращение* Δx этой переменной, взятое в точке $x_0 + \Delta x$ *тем же самым*, что и в точке x_0. Если же переменная x является *функцией* $(x = \varphi(t))$ другой переменной, то множители dx при $f'(x_0 + \Delta x)$ и $f'(x_0)$ *различаются* между собой[1], поскольку на сей раз они являются *дифференциалами функции* $(x = \varphi(t))$ в *разных* точках.

Внешне это проявляется в *различии* записи дифференциалов второго и следующих порядков для: *а)* функций *независимой переменной* и *б)* функций *функций*.[2]

Сначала пусть $y = f(x)$ — функция *независимой* переменной x, и пусть эта функция имеет *производную* $f'(x)$, а следовательно, и *дифференциал* $df = f'(x)\Delta x$ (см. с. 187) не только в точке x_0, но и в некоторой ее *окрестности*. Если в точке x_0 и всех *близких* к ней точках взять *одно и то же*[3] приращение Δx, то соответствующее ему *приращение* Δdf *дифференциала* функции $y = f(x)$ (в точке x_0) примет вид: $\Delta df = f'(x_0 + \Delta x)\Delta x - f'(x_0)\Delta x$.

Остается применить схему определения *дифференциала* функции в точке (см. с. 186), чтобы прийти к следующему определению *второго дифференциала* в точке x_0 функции $y = f(x)$ *независимой* переменной x.

---

[1] Исключая случай, когда x есть *линейная* функция $(x = kt + b)$ *независимой* переменной.

[2] Происходит, как говорят, *“нарушение свойства инвариантности формы* (см. с. 197) *для дифференциалов высших порядков”*.

[3] При этом *достаточно малое* по абсолютной величине, чтобы для всех x, *близких* к x_0, точка $x + \Delta x$ не выходила из той *окрестности* точки x_0, где функция $y = f(x)$ имеет *дифференциал*.

Второй дифференциал[1] *функции $y = f(x)$ независимой переменной x в точке x_0 есть обозначаемая d^2y (или d^2f) и зависящая от приращения $\Delta x = x - x_0$ величина, которая:*

а) пропорциональна $(\Delta x)^2$ (т. е. имеет вид $d^2y = a\cdot(\Delta x)^2$);

б) отличается от приращения Δdf дифференциала функции[2] *на бесконечно малую относительно $(\Delta x)^2$, т. е. выполняется соотношение $\Delta df - d^2f = o((\Delta x)^2)$ при $\Delta x \to 0$.*

Функция, у которой есть второй дифференциал в точке x_0, называется дважды дифференцируемой в этой точке.

Например, для функции $y = x^3$ *дифференциал*, отвечеющий *приращению* Δx (взятому в какой-либо точке x) есть $dy = 3x^2\Delta x$ (с. 184), так что его *приращение* в точке x_0 — это $\Delta dy = 3(x_0+\Delta x)^2\Delta x - 3x_0^2\Delta x = 6x_0(\Delta x)^2 + 3(\Delta x)^3$, из чего следует: функция $y = x^3$ является *дважды дифференцируемой* в (произвольно взятой) точке x_0, имея в ней *второй дифференциал* $d^2y = 6x_0(\Delta x)^2$.

> *Функция $y = f(x)$ (независимой переменной x) дважды дифференцируема в точке x_0 тогда и только тогда, когда она имеет в этой точке вторую производную, при этом вторая производная и второй дифференциал функции (в точке x_0) связаны соотношением $d^2f = f''(x_0)(\Delta x)^2$.*

Доказательство. Равенство $f''(x_0) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f'(x_0+\Delta x) - f'(x_0)}{\Delta x}$ (определяющее *вторую производную* функции в точке x_0) равносильно выполнению соотношения

$$f'(x_0+\Delta x) - f'(x_0) - f''(x_0)\Delta x = o(\Delta x) \text{ при } \Delta x \to 0,$$

в свою очередь, равносильного соотношению

[1] Или *дифференциал второго порядка*.

[2] В предположении, что дифференциал df определен во всех *близких* к x_0 точках x и отвечает взятому в каждой из них *приращению* Δx (*одному и тому же* для всех этих точек).

$f'(x_0+\triangle x)\triangle x - f'(x_0)\triangle x - f''(x_0)(\triangle x)^2 = o\big((\triangle x)^2\big)$ при $\triangle x \to 0$, как раз и означающему, что

$$\triangle df - f''(x_0)(\triangle x)^2 = o\big((\triangle x)^2\big) \text{ при } \triangle x \to 0. \ \textbf{Q.E.D.}$$

Так как *дифференциал* dx *независимой* переменной x (в точке x_0) *по определению* (см. с. 197) есть то же самое, что ее *приращение* $\triangle x = x - x_0$ в этой точке, *второй дифференциал* $\boxed{d^2 f = f''(x_0)(\triangle x)^2}$ (в точке x_0) функции $y = f(x)$ *независимой* переменной x можно записать в виде[1] $\boxed{d^2 f = f''(x_0)\,dx^2}$.

Пусть теперь $y = f(x)$ — функция переменной x, которая сама является *функцией* $x = \varphi(t)$ другой (уже *независимой*) переменной t. Если функция $x = \varphi(t)$ имеет в точке t_0 *вторую производную* $\varphi''(t_0)$, а функция $y = f(x)$ имеет в точке $x_0 = \varphi(t_0)$ *вторую производную* $f''(x_0)$,[2] то по *теореме о производной сложной функции* (см. с. 190) *композиция* этих функций $y = f(\varphi(t))$ имеет в *окрестности* точки t_0 *производную* $y' = f'(\varphi(t))\varphi'(t)$, а по правилу *производной произведения* (см. с. 189) — в точке t_0 *вторую производную*

$$y''(t_0) = \big(f'(\varphi(t_0))\,\varphi'(t_0)\big)' = f''(\varphi(t_0))(\varphi'(t_0))^2 + f'(\varphi(t_0))\,\varphi''(t_0).$$

Как следствие, функция $y = f(\varphi(t))$ имеет в точке t_0 *второй дифференциал*

$$d^2 f = y''(t_0)(\triangle t)^2 = f''(\varphi(t_0))(\varphi'(t_0)\triangle t)^2 + f'(\varphi(t_0))\,\varphi''(t_0)(\triangle t)^2,$$

который, если учесть, что $\varphi'(t_0)\triangle t$ и $\varphi''(t_0)(\triangle t)^2$ — это соответственно *дифференциал* dx и *второй дифференциал* $d^2 x$

---

[1] Позволяющем представить *вторую производную* функции (в любой точке x_0, где она существует) в виде $f''(x_0) = \dfrac{d^2 f}{dx^2}$ — отношения *второго дифференциала* функции (в точке x_0) к *квадрату дифференциала независимой* переменной x (везде dx^2 понимается как $(dx)^2$).

[2] Для чего необходимо, чтобы их (первые) *производные* $\varphi'(t)$ и $f'(x)$ существовали в *окрестностях* соответственно точки t_0 и точки x_0.

функции $x=\varphi(t)$ *независимой* переменной t в точке t_0, принимает вид $\boxed{d^2f=f''(x_0)dx^2+f'(x_0)\,d^2x}$, отличный от того, который он имел в случае *независимой* переменной x.

Замечание. При выводе формулы $d^2f=f''(x)dx^2+f'(x)d^2x$ *второго дифференциала* функции $y=f(x)$ *зависимой* переменной $x=\varphi(t)$ было сделано предположение, что t — *независимая* переменная, которое можно теперь снять. Именно, если t тоже есть функция $t=\psi(\tau)$ какой-то переменной τ (временно предполагаемой *независимой*), т.е. $y=f(\varphi(\psi(\tau)))$, то так как $y'(\tau)=f'(\varphi(\psi(\tau)))\varphi'(\psi(\tau))\psi'(\tau)$, а

$$y''(\tau)=f''(\varphi(\psi(\tau)))(\varphi'(\psi(\tau))\psi'(\tau))^2+\\ +f'(\varphi(\psi(\tau)))\big(\varphi''(\psi(\tau))(\psi'(\tau))^2+\varphi'(\psi(\tau))\psi''(\tau)\big),$$

соотношения $t=\psi(\tau)$, $dt=\psi'(\tau)\Delta\tau$, $d^2t=\psi''(\tau)(\Delta\tau)^2$, а также $x=\varphi(t)$, $dx=\varphi'(t)dt$ и $d^2x=\varphi''(t)dt^2+\varphi'(t)d^2t$ позволяют записать:

$$d^2y=y''(\tau)(\Delta\tau)^2=f''(\varphi(\psi(\tau)))(\varphi'(\psi(\tau))\psi'(\tau)\,\Delta\tau)^2+\\ +f'(\varphi(\psi(\tau)))\big(\varphi''(\psi(\tau))(\psi'(\tau)\,\Delta\tau)^2+\varphi'(\psi(\tau))\psi''(\tau)(\Delta\tau)^2\big)=\\ =f''(\varphi(t))(\varphi'(t)\,dt)^2+f'(\varphi(t))\big(\varphi''(t)\,dt^2+\varphi'(t)d^2t\big)=\\ =f''(x)\,dx^2+f'(x)d^2x.$$

Формулу *второго дифференциала* функции $y=f(x)$ *зависимой* переменной x обычно получают, не утруждая себя точным определением *второго дифференциала*, а действуя исключительно по правилу *дифференциала произведения*:

$$d^2f=d(df)=d\big(f'(x)\,dx\big)=d\big(f'(x)\big)\,dx+f'(x)\,d(dx)=\\ =f''(x)\,dx^2+f'(x)\,d^2x.$$

Прием “формального” применения *правил для дифференциалов* (см. с.199) используют и при практическом нахождении *вторых дифференциалов*. Так (в продолжение примера *1* на с. 200),

$$d^2\mathrm{arctg}\,\frac{u}{v}=d\Big(d\Big(\mathrm{arctg}\,\frac{u}{v}\Big)\Big)=d\,\frac{du\cdot v-u\cdot dv}{u^2+v^2}=\\ =\frac{d(du\cdot v-u\cdot dv)(u^2+v^2)-(du\cdot v-u\cdot dv)\,d(u^2+v^2)}{(u^2+v^2)^2}=\\ =\frac{(d^2u\cdot v-u\cdot d^2v)(u^2+v^2)-2uv\,(du^2-dv^2)+2(u^2-v^2)du\,dv}{(u^2+v^2)^2}.$$

Дифференциал порядка n функции $y = f(x)$ в точке x_0 определяется (подобно ее *второму дифференциалу*) как *дифференциал дифференциала порядка* $n-1$. А именно:

Дифференциал порядка n функции $y = f(x)$ *независимой переменной* x *в точке* x_0 *есть обозначаемая* $d^n y$ (*или* $d^n f$) *и зависящая от приращения* $\Delta x = x - x_0$ *величина, которая*:

а) пропорциональна $(\Delta x)^n$ (*т. е. имеет вид* $d^n y = a \cdot (\Delta x)^n$);

б) отличается от приращения $\Delta\, d^{n-1} f$ *дифференциала порядка* $n-1$ *функции*[1] *на бесконечно малую относительно* $(\Delta x)^n$, *т. е.* $\Delta d^{n-1} f - d^n f = o((\Delta x)^n)$ *при* $\Delta x \to 0$.

> *Функция* $y = f(x)$ (*независимой переменной* x) *имеет в точке* x_0 *дифференциал порядка* n *тогда и только тогда, когда она имеет в этой точке производную порядка* n, *при этом производная и дифференциал функции порядка* n (*в точке* x_0) *связаны соотношением* $\boxed{d^n f = f^{(n)}(x_0)(\Delta x)^n}$, *или, что то же самое*[2], $\boxed{d^n f = f^{(n)}(x_0)\, dx^n}$.

Доказательство. Существование у функции $y = f(x)$ n-*й производной* $f^{(n)}(x_0) \overset{\text{def}}{=} \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f^{(n-1)}(x_0 + \Delta x) - f^{(n-1)}(x_0)}{\Delta x}$ означает:

$f^{(n-1)}(x_0 + \Delta x) - f^{(n-1)}(x_0) - f^{(n)}(x_0)\,\Delta x = o(\Delta x)$ при $\Delta x \to 0$,

или (после умножения на $(\Delta x)^{n-1}$)

$f^{(n-1)}(x_0 + \Delta x)(\Delta x)^{n-1} - f^{(n-1)}(x_0)(\Delta x)^{n-1} - f^{(n)}(x_0)(\Delta x)^n = o((\Delta x)^n)$,

т. е. $\Delta d^{n-1} f - f^{(n)}(x_0)(\Delta x)^n = o((\Delta x)^n)$ при $\Delta x \to 0$. **Q.E.D.**

Если $y = f(x)$ есть функция *зависимой* переменной x, то обе записи $d^n f = f^{(n)}(x_0)(\Delta x)^n$ и $d^n f = f^{(n)}(x_0)\, dx^n$ утрачи-

---

[1] При условии, что этот *дифференциал* определен во всех *близких* к x_0 точках x и отвечает взятому в каждой из них *приращению* (одному и тому же) Δx.

[2] Поскольку $dx = \Delta x$ для *независимой* переменной x.

вают силу. Например, если x является *функцией* $x=\varphi(t)$ другой (уже *независимой*) переменной t, то последовательное вычисление производных *сложной функции*[1] $y=f(\varphi(t))$:

$$\begin{aligned}
&y'(t)=f'(\varphi(t))\varphi'(t),\\
&y''(t)=f''(\varphi(t))(\varphi'(t))^2+f'(\varphi(t))\varphi''(t),\\
&y'''(t)=f'''(\varphi(t))(\varphi'(t))^3+f''(\varphi(t))2\varphi'(t)\varphi''(t)+\\
&\qquad\qquad+f''(\varphi(t))\varphi'(t)\varphi''(t)+f'(\varphi(t))\varphi'''(t),\\
&y^{IV}(t)=f^{IV}(\varphi(t))(\varphi'(t))^4+f'''(\varphi(t))3(\varphi'(t))^2\varphi''(t)+\\
&+3\big(f'''(\varphi(t))(\varphi'(t))^2\varphi''(t)+f''(\varphi(t_0))\big((\varphi''(t))^2+\varphi'(t)\varphi'''(t)\big)\big)+\\
&\qquad\qquad+f''(\varphi(t))\varphi'(t)\varphi'''(t)+f'(\varphi(t))\varphi^{IV}(t)
\end{aligned}$$

и последующее умножение их на соответствующие степени *дифференциала* dt *независимой* переменной (т. е. произвольно взятого в точке t *приращения* Δt этой переменной) приводят к формулам *дифференциалов третьего* и *четвертого порядков* функции $y=f(x)$ *зависимой* переменной x:

$$\begin{aligned}
&d^3f=y'''(t)\,dt^3=f'''(x)\,dx^3+3f''(x)\,dx\,d^2x+f'(x)\,d^3x,\\
&d^4f=y^{IV}(t)\,dt^4=f^{IV}(x)\,dx^4+6f'''(x)\,dx^2d^2x+\\
&\qquad\qquad+3f''(x)(d^2x)^2+4f''(x)\,dx\,d^3x+f'(x)\,d^4x.
\end{aligned}$$

К этим же формулам можно прийти “механическим” *дифференцированием* ранее полученной формулы *второго дифференциала* $d^2f=f''(x)\,dx^2+f'(x)\,d^2x$:

$$\begin{aligned}
d^3f&=d\big(d^2f\big)=d\big(f''(x)\,dx^2+f'(x)\,d^2x\big)=\\
&=d\big(f''(x)\big)dx^2+f''(x)\,d\big(dx^2\big)+d\big(f'(x)\big)d^2x+f'(x)\,d\big(d^2x\big)=\\
&=f'''(x)\,dx^3+f''(x)\,2dx\,d^2x+f''(x)\,dx\,d^2x+f'(x)\,d^3x,
\end{aligned}$$

$$d^4f=d\big(f'''(x)\,dx^3+3f''(x)\,dx\,d^2x+f'(x)\,d^3x\big)=\cdots$$

---

[1] В предположении, что функции $x=\varphi(t)$ и $y=f(x)$ имеют производные требуемых порядков (соответственно в точках t и $x=\varphi(t)$).

V.2. Что называют формулой Тейлора

Формула Тейлора (в широком смысле) есть общее название связанных между собой, но разных по приложениям *формул*, позволяющих по значениям функции и ее производных, вычисленным в какой-то *одной точке*, составить представление о поведении функции и ее конкретных значениях в *других точках*.

Исходными объектами в этих *формулах* выступают так называемые *многочлены Те́йлора* $p_n(x-x_0)$ того или иного *порядка* n по *переменной* $x-x_0$, конструируемые (при условии существования у функции $y=f(x)$ в точке x_0 *производной* порядка не ниже n)[1] по правилу:

$$p_n(x-x_0) \stackrel{\text{def}}{=} f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

В наиболее важном для приложений случае точки $x_0=0$ этот многочлен принимает вид

$$p_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x) + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n,$$

и его обычно называют *многочленом Макло́рена* порядка n функции $y=f(x)$.

Рождение *формулы Тейлора* принято датировать выходом в 1715 г. работы Тейлора[2] *“Прямой и обратный метод приращений”* [**54**], в которой (на с. 21–23) он, опираясь на результаты Ньютона, представил *приращение* одного “переменного количества” x в виде *суммы* (точнее, *ряда*) *степеней приращения* другого “переменного количества” z, взятых с коэффициентами, содержащими *производные* (“флюксии”) x, вычисленные при некотором начальном значении z. В свою очередь, Макло́рен[3] на с. 610–611 второго тома “Трактата о флюксиях” [**47**], признавая прироритет Тейлора, дал другой вывод этого представления, беря в качестве начального значения $z=0$.

---

[1] Следует отметить, что если $f^{(n)}(x_0)=0$, то *степень* многочлена $p_n(x-x_0)$ фактически оказывается *меньшей* n.

[2] Taylor, Brook (1685–1731) — английский математик.

[3] Maclaurin, Colin (1698–1746) — шотландский математик.

Например, для функции $y = \cos x$ многочленами Маклорена начальных степеней являются:

$p_0(x) = p_1(x) = 1,$

$p_2(x) = p_3(x) = 1 - \frac{x^2}{2!},$

$p_4(x) = p_5(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!};$

их графики (вместе с графиком самой функции $y = \cos x$) представлены на рис. 15. Наглядно иллюстрируется отмечавшаяся выше возможность того, что многочлен Маклорена порядка n может иметь степень, *меньшую*, чем n.

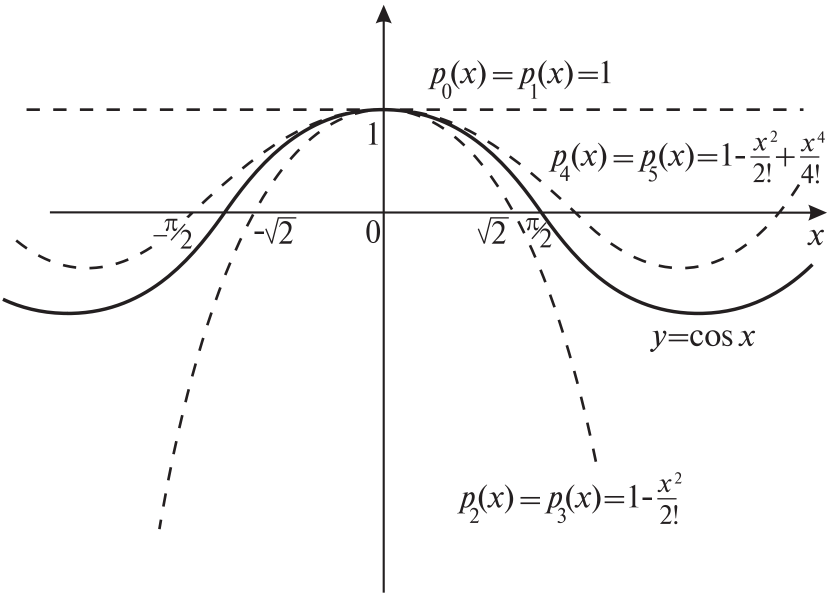


Рис. 15

Асимптотическая формула Тейлора

Для функция $y = f(x)$, имеющей в точке x_0 производную порядка n, верна асимптотическая формула Тейлора

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \\ + o\big((x - x_0)^n\big) \text{ при } x \to x_0.$$[1]

Доказательство. При $n = 1$ утверждение принимает вид: *если функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 производную $f'(x_0)$, то*

$$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = o(x - x_0) \text{ при } x \to x_0,$$

т. е. (в записи $x - x_0 = \triangle x,\ f(x) - f(x_0) = \triangle f$)

$$\triangle f - f'(x_0)\triangle x = o(\triangle x) \text{ при } x \to x_0,$$

что по определению (см. с. 186) означает *дифференцируемость* функции $y = f(x)$ в точке x_0 (равносильную *существованию производной* $f'(x_0)$).

Для доказательства утверждения достаточно, предположив, что оно верно для *какого-то* натурального числа n, вывести его справедливость для числа $n+1$. Это позволяет сделать *правило Лопиталя* (см. с. 215).

Если функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 производную порядка $n+1$, то применение данного *правила* к функциям $y = f(x) - \left[f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}\right]$ и

---

[1] Т. е. $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - \left[f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n\right]}{(x - x_0)^n} = 0.$

Асимптотическими называют формулы, содержащие символы o, O и $\sim$ (см. с. 170, 172). Данную *формулу* называют еще *формулой Те́йлора с остатком в записи Пеа́но*; впервые она встречается (при $x_0 = 0$ с записью *остатка* (ит. *resto*) $o(x^n)$ в виде $x^n\overline{\lim}0$) у Пеано на с. 71–73 его "Лекций по анализу бесконечно малых" [**50**].

$y=(x-x_0)^{n+1}$ позволяет заключить: поскольку

$$\Bigl(f(x)-\Bigl[f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\Bigr]\Bigr)'=$$

$$=f'(x)-\Bigl[0+\frac{f'(x_0)}{1!}1+\cdots+\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(n+1)(x-x_0)^n\Bigr]=$$

$$=f'(x)-\Bigl[f'(x_0)+\frac{f''(x_0)}{1!}(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\Bigr]$$

есть *разность* между функцией $y=f'(x)$ (а она имеет в точке x_0 производную порядка n)[1] и ее *многочленом Тейлора порядка* n, а потому[2]

$$f'(x)-\Bigl[f'(x_0)+\frac{f''(x_0)}{1!}(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\Bigr]=$$

$$=o\bigl((x-x_0)^n\bigr)\ \text{при}\ x\to x_0,$$

так что

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\Bigl(f(x)-\Bigl[f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\Bigr]\Bigr)'}{((x-x_0)^{n+1})'}=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-\Bigl[f'(x_0)+\frac{f''(x_0)}{1!}(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\Bigr]}{(n+1)(x-x_0)^n}=0;$$

в соответствии с *правилом Лопиталя*

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-\Bigl[f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\Bigr]}{(x-x_0)^{n+1}}=0,$$

т. е.

$$f(x)-\Bigl[f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\Bigr]=$$

$$=o\bigl((x-x_0)^{n+1}\bigr)\ \text{при}\ x\to x_0.$$ **Q.E.D.**

[1] Поскольку по предположению функция $y=f(x)$ имеет в точке x_0 производную порядка $n+1$.

[2] В силу сделанного предположения о справедливости доказываемого утверждения для натурального n.

Замечание *1*. *Асимптотическая формула Тейлора* обладает следующим свойством *единственности*.

Если для функции $y = f(x)$ *имеет место асимптотическое равенство*

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n + o\big((x - x_0)^n\big), \ x \to x_0,$$

то (в предположении[1]*, что функция имеет в точке* x_0 *производную порядка* n*) непременно*

$$a_0 = f(x_0), \ a_1 = \frac{f'(x_0)}{1!}, \ \dots, \ a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!},$$

т. е. это асимптотическое равенство на самом деле есть асимптотическая формула Тейлора[2].

Доказательство. Результат вычитания *асимптотической формулы Тейлора* из данного *асимптотического равенства* есть *асимптотическое равенство*

$$0 = \big(a_0 - f(x_0)\big) + \Big(a_1 - \frac{f'(x_0)}{1!}\Big)(x - x_0) + \dots + \\ + \Big(a_n - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\Big)(x - x_0)^n + o\big((x - x_0)^n\big), \ x \to x_0,$$

переход в котором к пределу при $x \to x_0$ дает: $a_0 - f(x_0) = 0$. Поскольку $(x - x_0)$ оказывается общим множителем правой части, сокращение на него преобразует *равенство* в

$$0 = \Big(a_1 - \frac{f'(x_0)}{1!}\Big) + \dots + \\ + \Big(a_n - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\Big)(x - x_0)^{n-1} + o\big((x - x_0)^{n-1}\big), \ x \to x_0,$$

так что (как показывается переход к пределу при $x \to x_0$) $a_1 - \dfrac{f'(x_0)}{1!} = 0$, а следовательно, $(x - x_0)$ опять оказывается общим множителем правой части и т. д. На n-м шаге получают: $a_n - \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!} = 0$, **Q.E.D.**

---

[1] Это существенное предположение (см. замечание *3* ниже).

[2] Первым на этот факт указал Маклорен ([**47**], с. 610–611).

Замечание 2. Обозначения $f(x)-f(x_0)=\triangle f$, $x-x_0=\triangle x$ придают *асимптотической формуле Тейлора* вид

$$\triangle f(x)=f'(x_0)\triangle x+\frac{f''(x_0)}{2!}(\triangle x)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(\triangle x)^n+o\big((\triangle x)^n\big),$$

или, что то же самое,

$$\triangle f(x)=df+\frac{1}{2!}d^2f+\cdots+\frac{1}{n!}d^nf+o\big((\triangle x)^n\big),\ \text{при}\ \triangle x\to 0.$$

Замечание 3. Выполнение (в тех же обозначениях) *асимптотического равенства*

$$\triangle f=a_1\triangle x+\cdots+a_n(\triangle x)^n+o\big((\triangle x)^n\big),\ \triangle x\to 0,$$

обеспечивает существование у функции $y=f(x)$ в точке x_0 лишь *первой* производной и *первого* дифференциала[1], тогда как существование в этой точке *второй* производной и *второго* дифференциала (равно как и следующих) *не гарантировано*. Подтверждает это пример функции

$$f(x)\overset{\text{def}}{=}a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+ \\ +\begin{cases}(x-x_0)^3, & \text{если } x \text{ — рациональное число,}\\ 0, & \text{если } x \text{ — иррациональное число,}\end{cases}$$

для которой (при любом выборе чисел a_0, a_1, a_2) выполняется *асимптотическое равенство*

$$\triangle f=a_1\triangle x+a_2(\triangle x)^2+o\big((\triangle x)^2\big),\ \triangle x\to 0,$$

но которая имеет *производную* $f'(x_0)=\lim\limits_{\triangle x\to 0}\frac{\triangle f}{\triangle x}=a_1$ и *дифференциал* $df=a_1\triangle x$ *только* в точке x_0,[2] Следует подчеркнуть: $a_2(\triangle x)^2$ в данном случае — это не $\frac{1}{2!}d^2f$: рассматриваемая функция *не имеет* в точке x_0 (как и в любой другой точке) ни *второй производной*, ни *второго дифференциала*.

При $x_0=0$ *асимптотическая формула Тейлора* имеет вид

[1] При этом $f'(x_0)=a_1$, $df=a_1\triangle x$.

[2] В любой другой точке x эта функция *не является непрерывной*, а потому (с. 187) *не имеет производной*.

$$\boxed{f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o\bigl(x^n\bigr) \text{ при } x \to 0}$$

и чаще называется *асимптотической формулой Макло́рена* (см. с. 227).

Так же, как и более общая *формула Тейлора*, это на самом деле не одна *формула*, а (в случае, если функция $y = f(x)$ имеет в точке 0 *производные всех порядков*) *последовательность* все более точных (но и все более громоздких) *асимптотических формул*:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + o(x) \quad (\textit{формула 1-го порядка}),$$

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + o(x^2) \quad (\textit{формула 2-го порядка}),$$

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + o(x^3) \quad (\textit{формула 3-го порядка}),$$

. . . .

(все при $x \to 0$).

Пять главных асимптотических разложений

Важнейшую роль в анализе и его приложениях играют следующие *асимптотические формулы Маклорена* (или, как еще говорят, *асимптотические разложения*):

$$\exp x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n),$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\bigl(x^{2n+2}\bigr)^{[1]},$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\bigl(x^{2n+1}\bigr)^{[1]},$$

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n),$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1}x + \frac{\alpha\cdot(\alpha-1)}{1\cdot 2}x^2 + \cdots + \frac{\alpha\cdot(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{1\cdot 2\cdots n}x^n + o(x^n).$$

---

[1] Так как можно считать, что предшествующий многочлен является для данной функции *многочленом Маклорена порядка*, на единицу *бо́льшего*, чем *степень* этого многочлена.

Примером их применения может служить нахождение *главной части* функции $y = \sin(\sin x) - x\sqrt[3]{1-x^2}$ при $x \to 0$, сводящееся (см. с. 177) к отысканию таких чисел c и λ, что $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(\sin x) - x\sqrt[3]{1-x^2}}{c\cdot x^\lambda} = 1$.

Применяя второе и последнее из *пяти главных асимптотических разложений*, ограничиваясь при этом степенями x, *не выше третьей*, можно прийти к следующим:

$$\sin(\sin x) = \sin x - \frac{(\sin x)^3}{3!} + o\big((\sin x)^3\big) =$$
$$= x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) - \frac{(x+o(x))^3}{3!} + o\big(x^3\big) =$$
$$= x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3),$$

$$x\sqrt[3]{1-x^2} = x\left(1 + \frac{\frac{1}{3}}{1}(-x^2) + o(x^2)\right) = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

Становится ясно, что взятой точности асимптотических разложений (до *третьей* степени x) для решения данной задачи оказывается недостаточно. Повышение их точности до *пятой* степени x приводит к следующим:

$$\sin(\sin x) = \sin x - \frac{(\sin x)^3}{3!} + \frac{(\sin x)^5}{5!} + o\big((\sin x)^5\big) =$$
$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5) - \frac{(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3))^3}{3!} + \frac{(x+o(x))^5}{5!} + o\big(x^5\big) =$$
$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5) - \frac{x^3 - 3\frac{x^5}{3!} + o(x^5)}{3!} + \frac{x^5 + o(x^5)}{5!} + o(x^5) =$$
$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} + o(x^5),$$

$$x\sqrt[3]{1-x^2} = x\left(1 + \frac{\frac{1}{3}}{1}(-x^2) + \frac{\frac{1}{3}(-\frac{2}{3})}{1\cdot 2}x^4 + o(x^4)\right) =$$
$$= x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{9} + o(x^5),$$

$$\sin(\sin x) - x\sqrt[3]{1-x^2} = \frac{19x^5}{90} + o(x^5).$$

Окончательно: искомая *главная часть* есть $\frac{19}{90}x^5$.

Формула Тейлора с остатками в записи Лагранжа и Коши

Остатком формулы Тейлора называют *разность* между *функцией* и ее *многочленом Тейлора* (того или иного *порядка* n):

$$r_n(x-x_0) \stackrel{\text{def}}{=} f(x)-\Big[f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\Big].$$

Асимптотическая формула Тейлора (см. с. 229) утверждает[1], что величина $r_n(x-x_0)$ при $x\to x_0$ стремится к нулю быстрее, чем $(x-x_0)^n$, но не дает никакой информации о конкретных значениях этой величины в отдельно взятых точках $x\neq x_0$. Получить такую информацию позволяет следующая *формула Тейлора с остатками* в записи *Лагранжа* и *Коши*.

Если функция $y=f(x)$ имеет производную порядка $n+1$ не только в точке x_0, но и в некоторой ее окрестности, то для любого (отличного от x_0) значения x из этой окрестности имеет место формула Те́йлора

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+r_n(x-x_0)$$

с остатком $r_n(x-x_0)$ в записи:

либо Лагра́нжа[2] $\boxed{r_n(x-x_0)=\dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}$, *где c — некоторое значение, промежуточное между x_0 и x,*

либо Коши́[3] $\boxed{r_n(x-x_0)=\dfrac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{n!}(1-\theta)^n(x-x_0)^{n+1}}$,

где $0<\theta<1$.[4]

---

[1] В предположении, что функция $y=f(x)$ имеет в точке x_0 *производную порядка n*.

[2] Впервые встречающейся у Лагранжа ([**44**], с. 68).

[3] Предложенной Коши ([**35**], с. 259–260).

[4] Дополнительной информации о значениях c и θ нет.

<u>*Доказательство*</u>[1]. Пусть x, $x \neq x_0$ — произвольно взятое, но *фиксированное* значение переменной из той *окрестности* точки x_0, в которой функция имеет производную порядка $n+1$. Обозначая z *переменную*, пробегающую *отрезок* I с концевыми точками x_0 и x, вводят вспомогательную функцию $y = \varphi(z)$, конструируемую путем замены в определении *остатка* точки x_0 на *переменную* z:

$$\varphi(z) = f(x) - \Big[f(z) + \frac{f'(z)}{1!}(x-z) + \dots + \frac{f^{(n)}(z)}{n!}(x-z)^n\Big];$$

полагают также $\psi(z) = (x-z)^p$, где p может быть *любым натуральным* числом. Поскольку отрезок I принадлежит той *окрестности* точки x_0, в которой функция $y = f(x)$ по предположению имеет производную порядка $n+1$, для пары функций $y = \varphi(z)$ и $y = \psi(z)$ выполнены (даже с избытком) условия *теоремы Коши* (см. с. 214): обе функции имеют *производные* $\varphi'(z)$ и $\psi'(z)$ в любой точке отрезка I, причем $\psi'(z) \neq 0$ во всех *внутренних* точках z этого отрезка. Согласно этой *теореме* для некоторой *внутренней* точки c отрезка I выполняется равенство $\dfrac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{\psi(x) - \psi(x_0)} = \dfrac{\varphi'(c)}{\psi'(c)}$. Но по самому определению функций $y = \varphi(z)$ и $y = \psi(z)$ *левая* часть этого равенства есть $\dfrac{0 - r_n(x-x_0)}{0 - (x-x_0)^p}$, а с учетом того, что

$$\varphi'(z) = -\Big[f(z) + \frac{f'(z)}{1!}(x-z) + \frac{f''(z)}{2!}(x-z)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(z)}{n!}(x-z)^n\Big]' =$$

$$= -f'(z) - \frac{f''(z)}{1!}(x-z) + f'(z) - \frac{f'''(z)}{2!}(x-z)^2 + \frac{f''(z)}{2!}2(x-z) -$$

$$- \frac{f^{(n+1)}(z)}{n!}(x-z)^n + \frac{f^{(n)}(z)}{n!}n(x-z)^{n-1} =$$

$$= -\frac{f^{(n+1)}(z)}{n!}(x-z)^n$$

[1] Взятое у Г. М. Фихтенгольца ([**24**], с. 255–257), использовавшего, в свою очередь, рассуждения и обозначения Коши ([**35**], с. 259–261).

и $\psi'(z) = \big((x-z)^p\big)' = -p(x-z)^{p-1}$, его *правая* часть есть $\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!p}(x-c)^{n-p+1}$. В результате равенство $\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{\psi(x)-\psi(x_0)} = \frac{\varphi'(c)}{\psi'(c)}$ приобретает вид $\frac{r_n(x-x_0)}{(x-x_0)^p} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!p}(x-c)^{n-p+1}$, или, что то же самое,

$$r_n(x-x_0) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!p}(x-c)^{n-p+1}(x-x_0)^p.$$

Так как на выбор *натурального* числа p до сих пор не было никаких ограничений, можно взять $p=n+1$, приходя к равенству $r_n(x-x_0) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ — *записи Лагранжа остатка формулы Тейлора*; с другой стороны, взяв $p=1$, приходят к равенству $r_n(x-x_0) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n(x-x_0)$, равносильному[1] $r_n(x-x_0) = \frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{n!}(1-\theta)^n(x-x_0)^{n+1}$, т. е. *записи Коши остатка формулы Тейлора*.[2] **Q.E.D.**

В важнейшем для приложений случае $x_0=0$ установленная *формула Тейлора* переходит в *формулу Макло́рена*

$$\boxed{f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + r_n(x)}$$

с остатком $r_n(x)$ *в записи Лагра́нжа* $\boxed{r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}}$ (c — некоторое значение, *промежуточное* между 0 и x), либо *в записи Коши́* $\boxed{r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{n!}(1-\theta)^n x^{n+1}}$ $(0<\theta<1)$.

---

[1] С учетом того, что любое число c, *промежуточное* между x_0 и x, представимо в виде $c = x_0+\theta(x-x_0)$, где $0<\theta<1$.

[2] Перебирая другие значения p, можно прийти к другим формам записи *остатка*, однако они не имеют заметного применения в анализе.

Наглядным примером ее применения может служить оценка погрешности приближенных формул

$$\cos x \approx \begin{cases} 1 - \dfrac{x^2}{2}, \\ 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} \end{cases} \quad \text{на отрезке } -\tfrac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \tfrac{\pi}{2}.$$

Поскольку $1 - \frac{x^2}{2}$ является для функции $y = \cos x$ *многочленом Маклорена* как *порядка 2*, так и *порядка 3*, *формула Маклорена с остатком в записи Лагранжа* позволяет представить разность $\cos x - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)$ и как $\frac{\cos''' c}{3!}x^3$, и как $\frac{\cos^{IV} c}{4!}x^4$, где значение c (а оно в обоих случаях *не обязательно одно и то же*) заключено между 0 и x. Погрешность $\sup\limits_{|x| \leqslant \frac{\pi}{2}} \left|\cos x - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)\right|$ приближенной формулы $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$ оценивается сверху в первом случае величиной $\frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3$, а во втором — примерно в два с половиной раза меньшей $\frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^4$. Подобным образом рассматривая $1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$ как *многочлен Маклорена 4-го* и одновременно *5-го порядков* для функции $y = \cos x$ и представляя разность $\cos x - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)$ и как $\frac{\cos^{V} c}{5!}x^5$, и как $\frac{\cos^{VI} c}{6!}x^6$, можно оценить погрешность приближенной формулы $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$ для $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ как величиной $\frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^5$, так и почти вчетверо меньшей $\frac{1}{6!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^6$.

Формула Маклорена с остатком (и в записи *Лагранжа*, и в записи *Коши*) может служить основой для получения *разложений Маклорена*[1] — представления функций в виде суммы всех степеней x (*степенного ряда*)

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

---

[1] Чем изначально и занимался Маклорен (вслед за Тейлором).

А именно, если для какой-то функции $y = f(x)$, имеющей при $x = 0$ производные *всех* порядков, удается установить, что *остатки формулы Маклорена*

$$r_1(x) = f(x) - \left[f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x\right],$$

$$r_2(x) = f(x) - \left[f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2\right],$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$r_n(x) = f(x) - \left[f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n\right],$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

для некоторого конкретного значения $x \neq 0$ (или множества таких значений) образуют *бесконечно малую* последовательность[1] $\{r_n(x)\}$, т. е. $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n(x) = 0$, а следовательно,

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty}\left[f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n\right],$$

то последнее равенство записывают в виде

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

и называют *разложением Маклорена* функции $y = f(x)$ для данного конкретного значения (или множества значений) переменной x.

Как обращаться с *разложениями Маклорена*, изучают в разделе анализа *“Степенные ряды”*. Здесь же на примере вывода *пяти главных разложений Маклорена* будут продемонстрировано, в каких случаях какой из остатков *формулы Маклорена* — в записи *Лагранжа* или *Коши* — оказывается более эффективным.

1. Для функции $y = \exp x$ *формула Маклорена с остатком в записи Лагранжа* принимает (при любом $x \neq 0$) вид

$$\exp x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{\exp^{(n+1)} c}{(n+1)!}x^{n+1},$$

[1] Пример того, что так бывает не всегда, приведен на с. 244.

где значение c (зависящее от x и от n) лежит между 0 и x, можно сделать[1] вывод: $\left|\frac{\exp^{(n+1)} c}{(n+1)!}x^{n+1}\right| < \frac{\exp|x|}{(n+1)!}|x|^{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, а поэтому (ввиду произвольности выбора значения x) для любого $x\in(-\infty,+\infty)$ выполняется равенство[2]

$$\exp x = \lim_{n\to+\infty}\Big(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\Big),$$

т. е. имеет место *разложение Маклорена экспоненты*

$$\boxed{\exp x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots, \quad -\infty<x<+\infty}.$$

2. Так как $\sin^{(2k)}x=(-1)^k\sin x$, а $\sin^{(2k+1)}x=(-1)^k\cos x$, *многочлен Маклорена порядка* $2n+2$ для функции $y=\sin x$ есть $x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, а потому применение *формулы Маклорена* с *остатком в записи Лагранжа* дает:

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\frac{(-1)^{n+1}\cos c}{(2n+3)!}\,x^{2n+3},$$

где для произвольно взятого значения x значение c является промежуточным между 0 и x; так как[1]

$$\left|\frac{(-1)^{n+1}\cos c}{(2n+3)!}\,x^{2n+3}\right|\leqslant\frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0,$$

справедливо *разложение Маклорена синуса*:

$$\boxed{\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots,\ -\infty<x<+\infty}.$$

3. Так же, как это было проделано для *синуса*, из *формулы Маклорена* с *остатком в записи Лагранжа* выводится *разложение Маклорена* для *косинуса*:

$$\boxed{\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots,\ -\infty<x<+\infty}.$$

---

[1] С учетом того, что $\left\{\frac{|x|^n}{n!}\right\}$ при любом x есть *бесконечно малая* последовательность (см. с. 79).

[2] Что не является новостью (см. с. 96).

4. Поскольку для функции $y=\ln(1+x)$ выполняются соотношения

$y'(x)=\frac{1}{1+x}, \quad y'(0)=1;$

$y''(x)=\frac{(-1)\cdot 1}{(1+x)^2}, \quad y''(0)=(-1)\cdot 1;$

$y'''(x)=\frac{(-1)^2\cdot 1\cdot 2}{(1+x)^3}, \quad y'''(0)=(-1)^2\cdot 1\cdot 2;$

. . . .

$y^{(n)}(x)=\frac{(-1)^{n-1}\cdot 1\cdot 2\cdots(n-1)}{(1+x)^n}, \quad y^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}\cdot 1\cdot 2\cdots(n-1);$

$y^{(n+1)}(x)=\frac{(-1)^n\cdot 1\cdot 2\cdots(n-1)\cdot n}{(1+x)^{n+1}},$

формула Маклорена для этой функции имеет вид

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+r_n(x),$$

где $r_n(x)=\begin{cases}\dfrac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+c)^{n+1}} & (\textit{остаток} \text{ в записи } \textit{Лагранжа}),\\ \dfrac{(-1)^n(1-\theta)^n x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1}} & (\textit{остаток} \text{ в записи } \textit{Коши}).\end{cases}$

Чтобы из этой *формулы* вывести *разложение Маклорена логарифма*

$$\boxed{\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots, \ -1<x\leqslant 1},$$

следует доказать, что любого фиксированного значения x из промежутка $(-1,1]$ *остатки* $r_1(x), r_2(x), \ldots, r_n(x), \ldots$ образуют *бесконечно малую* последовательность. Оказывается, что сделать это, опираясь лишь на *одну* из двух приведенных записей этих остатков — *Лагранжа* или *Коши* — невозможно: запись *Лагранжа* эффективна при $0<x\leqslant 1$, но не при $-1<x<0$, тогда как запись *Коши* эффективна при $0<|x|<1$, но не при $x=1$.

Именно, если $0<x\leqslant 1$, то применение для *остатка* записи *Лагранжа* дает:

$$|r_n(x)| = \left|\frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+c)^{n+1}}\right| \leqslant \frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0;$$

стоит отметить, что при $-1 < x < 0$ значение c (а оно при фиксированном x зависит от n) оказывается *отрицательным*, и о поведении величины $(1+c)^n$ при $n \to +\infty$ нельзя извлечь никакой информации.

Если же $0 < |x| < 1$, то применение для *остатка* записи *Коши*[1]

$$|r_n(x)| = \left|\frac{(-1)^n (1-\theta)^n x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1}}\right| = \frac{(1-\theta)^n}{(1+\theta x)^n} \frac{|x|}{1+\theta x} |x|^n <$$

$$< \frac{|x|}{1-|x|} |x|^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Тем самым для любого значения x из промежутка $(-1,1]$ выполняется соотношение

$$\ln(1+x) = \lim_{n\to+\infty}\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}\right),$$

т. е. для $x \in (-1,1]$ имеет место *разложение Маклорена*

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots$$

(в частности, $\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \cdots$).

5. Для функции $y = (1+x)^\alpha$ (α предполагается *нецелым положительным* числом)

$y'(0) = \alpha;$

$y'(0) = \alpha(\alpha-1);$

. . . .

$y^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1),$

$y^{(n+1)}(\theta x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)(1+\theta x)^{\alpha-n-1},$

---

[1] С учетом того, что из неравенств $0<\theta<1$ и $-1<x<1$ вытекают: *а)* неравенство $\theta x > -|x|$, а следовательно и неравенство $1+\theta x > 1-|x|$; *б)* неравенство $-\theta < \theta x$, а следовательно и неравенство $1-\theta < 1+\theta x$.

поэтому *формула Маклорена* для этой функции с *остатком в записи Коши* принимает вид

$$(1+x)^\alpha = 1+\frac{\alpha}{1}x+\frac{\alpha\cdot(\alpha-1)}{1\cdot 2}x^2+\dots+\frac{\alpha\cdot(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{1\cdot 2\cdots n}x^n+r_n(x),$$

где

$$r_n(x)=\frac{\alpha\cdot(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(\alpha-n)}{1\cdot 2\cdots n}(1+\theta x)^{\alpha-n-1}(1-\theta)^n x^{n+1}.$$

Записав $|r_n(x)|$ в виде

$$|r_n(x)|=\frac{\alpha\cdot|1-\alpha|\cdot|2-\alpha|\cdots|n-\alpha|}{1\cdot 2\cdots n}\,\frac{(1-\theta)^n}{(1+\theta x)^n}\,\frac{(1+\theta x)^\alpha}{1+\theta x}\,|x|^{n+1},$$

следует заметить:

а) поскольку $\dfrac{|n-\alpha|}{n}<1$ при $n>\alpha$, последовательность *положительных* чисел

$$\frac{\alpha\cdot|1-\alpha|}{1},\ \frac{\alpha\cdot|1-\alpha||2-\alpha|}{1\cdot 2},\ \dots\ ,\ \frac{\alpha\cdot|1-\alpha||2-\alpha|\cdots|n-\alpha|}{1\cdot 2\cdots n},\ \dots$$

является (начиная с некоторого "номера" n) *убывающей*, а следовательно, *ограниченной*;

б) так как $0<\theta<1$, при выполнении неравенства $-1<x$ выполняются также неравенства $0<1-\theta<1+\theta x$, в силу которых последовательность $\left\{\dfrac{(1-\theta)^n}{(1+\theta x)^n}\right\}$ является *ограниченной*;

в) если $-1<x<1$, то $\dfrac{(1+\theta x)^\alpha}{1+\theta x}<\dfrac{(1+|x|)^\alpha}{1-|x|}$, а последовательность $\left\{|x|^n\right\}$ является *бесконечно малой*.

С учетом этих замечаний для любого значения $x\in(-1,1)$ выполняется соотношение $\lim\limits_{n\to+\infty}r_n(x)=0$, а следовательно, и соотношение

$$(1+x)^\alpha=\lim_{n\to+\infty}\Big(1+\frac{\alpha}{1}x+\frac{\alpha\cdot(\alpha-1)}{1\cdot 2}x^2+\dots+\frac{\alpha\cdot(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{1\cdot 2\cdots n}x^n\Big),$$

что (по определению) означает справедливость *разложения Маклорена степени*

$$\boxed{(1+x)^\alpha=1+\frac{\alpha}{1}x+\frac{\alpha\cdot(\alpha-1)}{1\cdot 2}x^2+\frac{\alpha\cdot(\alpha-1)(\alpha-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+\cdots\ ,\ \ |x|<1}\,.$$

Не следует думать, что если функция $y=f(x)$ имеет при $x=0$ производные всех порядков, то для нее непременно имеет место *разложение Маклорена*

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots \qquad (*)$$

(если не для всех, то хотя бы для некоторых значений x)[1]. То, что это не всегда так, показывает предложенный Коши ([**35**], с. 394) пример функции $f(x)\overset{\mathrm{def}}{=}\begin{cases}\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right), & \text{если } x\neq 0,\\ 0, & \text{если } x=0,\end{cases}$

для которой (см. с. 218)

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{x^3}\exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right), & \text{если } x\neq 0,\\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)=0, & \text{если } x=0.\end{cases}$$

Поскольку производная любого порядка этой функции при $x\neq 0$ представляет собой *сумму* (взятых с числовыми коэффициентами) *произведений* отрицательных степеней x на $\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$, а $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\exp(-\frac{1}{x^2})}{x^n}=0$ при любом $n\geqslant 1$ (см. с. 218), *значение нуль* при $x=0$ имеет не только сама *функция* и ее *производная*, но также ее *вторая* и *все последующие производные*: $f(0)=0,\ f'(0)=0,\ f''(0)=0,\ f'''(0)=0,\ \ldots$ Как следствие для данной функции:

а) многочлен Маклорена (любого порядка) есть *нуль*;

б) асимптотическая формула Маклорена имеет (для произвольно взятого $n=1,2,\ldots$) вид $\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)=o(x^n)$, $x\to 0$, так что у функции нет *главной части* вида $c\cdot x^\lambda$ при $x\to 0$;

в) от *формулы Маклорена с остатком* (в любой записи) нет никакого проку (*остаток* совпадает с самой *функцией*);

г) равенство $(*)$ имеет место лишь при $x=0$.

---

[1] Помимо не представляющего интереса значения $x=0$.

V.3. Каковы достаточные условия локального экстремума функции[1]

1. *Если функция* $y = f(x)$ *непрерывна в точке* x_0, а в *левой и правой окрестностях этой точки имеет производную* $f'(x)$, *сохраняющую знак, но меняющую его при переходе из левой окрестности в правую, то* x_0 *является для функции точкой строгого локального экстремума*: *максимума, если знак производной меняется с плюса на минус, и минимума, если он меняется с минуса на плюс.*

Доказательство. Взяв произвольно точку x в любой из указанных окрестностей и применяя к функции $y = f(x)$ на отрезке I с концевыми точками x_0 и x *теорему Лагранжа* (см. с. 209), *разность* $f(x) - f(x_0)$ можно представить в виде $f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0)$, где c — точка, *промежуточная* между x_0. Остается заметить, что (поскольку точка c лежит в той же окрестности точки x_0, что и точка x) если *производная* функции при переходе из *левой* окрестности точки x_0 в *правую* меняет знак, например, с *минуса* на *плюс*, то (с учетом того, что с *минуса* на *плюс* меняет знак и разность $x - x_0$) *разность* $f(x) - f(x_0)$ остается *положительной*, а потому x_0 оказывается точкой *строгого локального минимума* функции $y = f(x)$. **Q.E.D.**

2. *Если в точке* x_0 *функция* $y = f(x)$ *имеет производную, равную нулю, и вторую производную, которая отлична от нуля, то в точке* x_0 *у функции есть строгий локальный экстремум*: *максимум, если* $f''(x_0) < 0$, *и минимум, если* $f''(x_0) > 0$.

Это утверждение есть у Лагранжа ([**44**], с. 210–211).

---

[1] Необходимое условие экстремума обсуждалось выше (см. с. 207). Определения разновидностей *экстремумов* приведены на с. 206.

<u>*Доказательство*</u>. Применение *асимптотической формулы Тейлора* (см. с. 229) при $n=2$ дает при $x \to x_0$

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+o\big((x-x_0)^2\big),$$

из чего следует (поскольку $f'(x_0)=0$), что

$$f(x)-f(x_0)=(x-x_0)^2\Big[\frac{f''(x_0)}{2!}+o(1)\Big] \text{ при } x \to x_0,$$

а так как $\lim\limits_{x\to x_0}\Big[\frac{f''(x_0)}{2!}+o(1)\Big]=\frac{f''(x_0)}{2!}\neq 0$, *разность* $f(x)-f(x_0)$ оказывается для любого x из достаточно малой *окрестности* точки x_0 числом *того же знака*, что и число $f''(x_0)$, в силу чего x_0 оказывается для функции $y=f(x)$ точкой *строгого локального максимума*, если $f''(x_0)<0$, и точкой *строгого локального минимума*, если $f''(x_0)>0$ **Q.E.D.**

3. *Если функция $y=f(x)$ имеет в точке x_0:*
а) производные $f'(x_0)$, $f''(x_0)$, ... $f^{(n-1)}(x_0)$, равные нулю,
б) производную $f^{(n)}(x_0)$, отличную от нуля,
то в случае четного n у функции в точке x_0 есть *строгий локальный экстремум: максимум, если $f^{(n)}(x_0)<0$, и минимум, если $f^{(n)}(x_0)>0$;* в случае же *нечетного n экстремума* у функции в точке x_0 *нет.*

Это утверждение приведено у Лагранжа на с. 211–213 его монографии [**44**].

<u>*Доказательство*</u>. Так как в сделанных предположениях относительно функции ее *многочлен Тейлора* порядка n есть $p_n(x-x_0)=f(x_0)+\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$, соответствующую *асимптотическую формулу Тейлора*

$$f(x)=p_n(x-x_0)+o\big((x-x_0)^n\big),\ x\to x_0,$$

можно записать в виде

$$f(x)-f(x_0)=(x-x_0)^n\Big[\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}+o(1)\Big],\ x\to x_0.$$

Так как $\lim\limits_{x\to x_0}\Big[\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}+o(1)\Big]=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\neq 0$, то в случае *четного n разность* $f(x)-f(x_0)$ оказывается для любого x из достаточно малой *окрестности* точки x_0 числом *того же знака*, что и число $f^{(n)}(x_0)$, в силу чего x_0 оказывается для функции $y=f(x)$ точкой *строгого локального максимума*: *максимума*, если $f^{(n)}(x_0)<0$, и *минимума*, если $f^{(n)}(x_0)>0$; при *нечетном* же n *разность* $f(x)-f(x_0)$ меняет (вместе с $(x-x_0)^n$) знак при переходе через точку x_0, так что *экстремума* в этой точке у функции $y=f(x)$ нет. **Q.E.D.**

Три вышеприведенные утверждения дают достаточные условия наличия экстремума во *внутренней* точке x_0 множества задания функции. Следующие аналоги первого из утверждений относится к случаю, когда функция $y=f(x)$ задана (или рассматривается) на *промежутке*, и x_0 является его *концевой* точкой (*включаемой* в этот промежуток).

1′. *Если x_0 — левая* концевая точка *промежутка, а функция $y=f(x)$* имеет производную *постоянного знака в правой окрестности* этой точки, *являясь* непрерывной *справа в самой точке x_0, то x_0* есть точка *строгого локального экстремума* данной функции на данном *промежутке*: *максимума или минимума соответственно тому, является производная $f'(x)$ отрицательной* или *положительной в правой окрестности* точки x_0.

Доказательство. Взяв в *правой окрестности* точки x_0 любую точку x и применив к функции $y=f(x)$ на отрезке $[x_0,x]$ *теорему Лагранжа*, *разность* $f(x)-f(x_0)$ можно записать в виде $f(x)-f(x_0)=f'(c)(x-x_0)$, где c — точка, *промежуточная* между x_0 и x. Из этого следует, что разность $f(x)-f(x_0)$ для любого взятого x имеет тот же знак, что и *производная* в *правой окрестности* точки x_0. **Q.E.D.**

1″. *Если* x_0 — *правая концевая точка промежутка* I, *а функция* $y = f(x)$ *имеет производную постоянного знака в левой окрестности этой точки, являясь непрерывной слева в самой этой точке, то* x_0 *есть точка строгого локального экстремума данной функции на данном промежутке: максимума или минимума соответственно тому, является производная положительной или отрицательной в левой окрестности точки* x_0.

Примеры. *1.* $y = x^{\frac{1}{3}}(1-x)^{\frac{2}{3}}$. Данная функция имеет при всех значениях x, кроме $x = 0$ и $x = 1$, *производную*
$y' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}(1-x)^{\frac{2}{3}} - \frac{2}{3}x^{\frac{1}{3}}(1-x)^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}(1-x)^{-\frac{1}{3}}\big((1-x) - 2x\big)$, которая *обращается в нуль* только при $x = \frac{1}{3}$, поэтому возможными *точками экстремума* данной функции являются лишь точки $x = 0$, $x = 1$ и $x = \frac{1}{3}$. В каждой из этих точек функция *непрерывна*, но:

при прохождении через точку $x = 0$ производная остается *положительной*, так что функция *возрастает*[2] в окрестности этой точки и потому *не имеет* в ней *экстремума*;

при прохождении через точку $x = \frac{1}{3}$ (слева направо) производная *меняет знак* с *плюса* на *минус*, поэтому $x = \frac{1}{3}$ есть точка *строгого локального максимума* данной функции;

при прохождении через точку $x = 1$ (слева направо) производная *меняет знак* с *минуса* на *плюс*, в силу чего $x = 1$ есть точка *строгого локального минимума* функции.

2. $y = x - \ln(1+x)$. Данная функция определена на промежутке $-1 < x < +\infty$ и имеет в любой его точке *производную* $y' = 1 - \frac{1}{x+1}$, равную нулю лишь при $x = 0$. Поскольку

---

[2] См. с. 212, *признак возрастания функции на промежутке.*

$y''=\frac{1}{(x+1)^2}>0$, значение $x=0$ есть точка *строгого локального минимума* данной функции.

3. $y = x-\ln(x^2+1)$. Данная имеет в любой точке действительной оси *производную* $y' = 1-\frac{2x}{x^2+1}$, *равную нулю* лишь при $x=1$. *Вторая производная* $y'' = 2\,\frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}$ также *равна нулю* при $x=1$. Поскольку *третья производная* $y'''=\frac{4x(3-x^2)}{(x^2+1)^3}$ *не равна нулю* при $x=1$, следует вывод: функция не имеет точек экстремума на действительной оси.

4. Найти *наибольшее* и *наименьшее* значения функции $y=\frac{1-x+x^2}{1+x-x^2}$ на отрезке[1] $0\leqslant x\leqslant 1$. В любой точке данного *отрезка* функция имеет *производную*

$$y'=\frac{(-1+2x)(1+x-x^2)-(1-2x)(1-x+x^2)}{(1+x-x^2)^2}=\frac{2(2x-1)}{(1+x-x^2)^2},$$

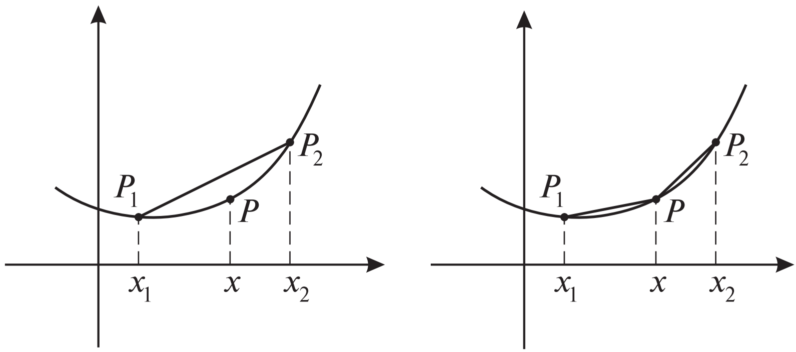
равную нулю при $x=\frac{1}{2}$, *отрицательную* при $x<\frac{1}{2}$ и *положительную* при $x>\frac{1}{2}$. В соответствии с *утверждениями 1, 1'* и *1''* следует вывод: значение $x=\frac{1}{2}$ является для функции $y=\frac{1-x+x^2}{1+x-x^2}$ на отрезке $0\leqslant x\leqslant 1$ точкой *строгого локального минимума*, а значения $x=0$ и $x=1$ (*концевые* точки отрезка) — точками *строгого локального максимума*. Подсчет значений функции при $x=\frac{1}{2}$, $x=0$ и $x=1$ приводит к заключению: *наименьшее* значение $y=\frac{3}{5}$ функция принимает во *внутренней* точке $x=\frac{1}{2}$ отрезка $[0,1]$; *наибольшее* значение $y=1$ функция принимает в *концевых* точках $x=0$ и $x=1$ этого отрезка.

---

[1] На этом *отрезке* функция *непрерывна*, поэтому существование *наибольшего* и *наименьшего* значений функции на этом отрезке обеспечивается свойством *достижения* непрерывной функцией на отрезке ее *точной верхней* и *точной нижней граней* (см. с. 147, *теорема 2*).

V.4. Какую функцию называют выпуклой на промежутке

Функцию $y = f(x)$ называют выпуклой вниз на промежутке I, если при любом выборе точек $x_1 < x < x_2$ этого промежутка точка $P(x, f(x))$ лежит под отрезком, соединяющим точки $P_1(x_1, f(x_1))$ и $P_2(x_2, f(x_2))$ (рис. 16, а). Часто это выражают словами: *дуга графика функции между точками $P_1(x_1, f(x_1))$ и $P_2(x_2, f(x_2))$ лежит ниже соединяющего эти точки отрезка — хорды* графика.



а) *б)*

Рис. 16

Формульным выражением данного требования[1] служит выполнение для любых значений $x_1 < x < x_2$, $x_1, x_2 \in I$, *неравенства* $\dfrac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} < \dfrac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$, означающего, что "угловой коэффициент" отрезка P_1P *меньше* "углового коэффициента" отрезка PP_2 (рис. 16, *б*).

[1] С учетом того, что для точек (x, y) *хорды* графика выполняется *равенство* $\frac{y - f(x_1)}{x - x_1} = \frac{f(x_2) - y}{x_2 - x}$.

Заменяя это *неравенство* противоположно направленным, получают определение функции, *выпуклой вверх* на промежутке I, при этом функция $y = f(x)$ оказывается *выпклой вверх* на каком-либо *промежутке* в том и только в том случае, когда на этом же промежутке *выпуклой вниз* является функция $y = -f(x)$.

Замечание. Данные определения часто называют определениями *строгой выпуклости* функции (*вниз* или *вверх*), тогда как *выпуклость* понимают в более широком смысле, соответствующем замене в вышеприведенных определениях *строгих* неравенств *нестрогими*[1]. В рамках *анализа* удобнее все же оперировать *выпуклостью* в строгом смысле.

Критерий выпуклости функции. *Функция $y = f(x)$, имеющая производную $f'(x)$ в каждой точке x промежутка I, является выпуклой вниз (вверх) на данном промежутке в том и только в том случае, когда производная функции возрастает (убывает) на этом промежутке.*[2]

Доказательство. *а)* Если *производная* функции *возрастает* на промежутке I, то применение для произвольно взятых значений $x_1 < x < x_2$, $x_1, x_2 \in I$, *теоремы Лагранжа* на отрезках $[x_1, x]$ и $[x, x_2]$ приводит к соотношениям

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} = f'(c_1), \quad \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} = f'(c_2), \quad x_1 < c_1 < x < c_2 < x_2,$$

из которых следует, что для функции $y = f(x)$ выполнены

[1] В этом случае приходится мириться с тем, что любая *линейная* функция оказывается *выпуклой*, причем одновременно *вниз* и *вверх*, на любом промежутке действительной оси.

[2] Стоит отметить, что функция, *выпуклая* (*вниз* или *вверх*), не обязательно имеет *производную* в каждой точке промежутка ее *выпуклости*, однако непременно является *непрерывной* и имеет *левую* и *правую производные* в каждой *внутренней* точке этого промежутка (см. [**3**], с. 60).

требования

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} < \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}, \quad x_1 < x < x_2, \; x_1, x_2 \in I,$$

ее *выпуклости вниз* на промежутке I.

б) Наоборот, если для функции $y = f(x)$ выполнено последнее требование, то взяв произвольно значения

$$x_1 < x_1+\triangle x_1 < x_0 < x_2+\triangle x_2 < x_2 \text{ (рис. 17)}$$

(x_1, x_0 и x_2 рассматриваются как *постоянные*, а $\triangle x_1 > 0$ и $\triangle x_2 < 0$ как *переменные*), можно записать неравенства

$$\frac{f(x_1+\triangle x_1)-f(x_1)}{(x_1+\triangle x_1)-x_1} < \frac{f(x_0)-f(x_1+\triangle x_1)}{x_0-(x_1+\triangle x_1)},$$

$$\frac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1} < \frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0},$$

$$\frac{f(x_2+\triangle x_2)-f(x_0)}{(x_2+\triangle x_2)-x_0} < \frac{f(x_2)-f(x_2+\triangle x_2)}{x_2-(x_2+\triangle x_2)}.$$

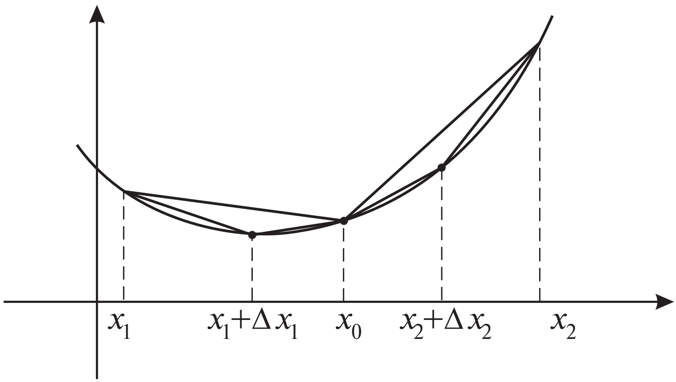


Рис. 17

Остается перейти в первом из них к пределу при $\triangle x_1 \to 0$, а в последнем — при $\triangle x_2 \to 0$, чтобы получить в результате:

$$f'(x_1) \leqslant \frac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1} < \frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0} \leqslant f'(x_2). \quad \textbf{Q.E.D.}$$

В соединении с *признаком возрастания функции* (см. с. 212) доказанный критерий дает следующее

Достаточное условие выпуклости функции. *Функция, вторая производная которой положительна (отрицательна) на промежутке, является выпуклой вниз (выпуклой вверх) на этом промежутке*[1].

Если функция $y = f(x)$, имеющая производную на промежутке I, является выпуклой вниз (выпуклой вверх) на данном промежутке, то для любого $x_0 \in I$ прямая $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$, касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке $P_0(x_0, f(x_0))$, лежит (в пределах значений $x \in I,\ x \neq x_0$) под (над) графиком.

Доказательство. Взяв любое значение $x \in I,\ x \neq x_0$, и применяя к функции $y = f(x)$ на отрезке с конецевыми точками x_0, x *теорему Лагранжа*, *разность* между ординатами $y = f(x)$ (точки *графика*) и $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ (точки *касательной*) можно записать в виде

$$f(x) - \big[f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)\big] = \big(f'(c) - f'(x_0)\big)(x - x_0),$$

где значение c является *промежуточным* между x_0 и x. Если функция *выпукла вниз* на промежутке I, то согласно доказанному *критерию выпуклости функции производная* функции *возрастает* на промежутке I, в силу чего

$$f'(c) - f'(x_0) < 0 \text{ и одновременно } x - x_0 < 0, \text{ если } x < x_0,$$

$$f'(c) - f'(x_0) > 0 \text{ и одновременно } x - x_0 > 0, \text{ если } x > x_0,$$

так что указанная *разность* для всех $x \in I,\ x \neq x_0$, оказывается *положительной*. **Q.E.D.**

---

[1] На самом деле достаточно, чтобы *вторая производная* существовала и была *положительной* (*отрицательной*) во всех точках промежутка, кроме *конечного* их числа, но при этом *первая производная* была *непрерывной* на всем промежутке.

Значение x_0 переменной x называют <u>*точкой перегиба*</u> функции $y=f(x)$, если

а) в левой и правой окрестностях значения x_0 функция имеет разные направления выпуклости,

б) график функции имеет *касательную прямую* в точке $P_0(x_0, f(x_0))$.

<u>Примеры</u>. *1*. Функция $y = \sqrt[3]{x}$, имея *вторую производную* $y'' = \frac{-2}{9\sqrt[3]{x^5}}$, *положительную* при $x < 0$, и *отрицательную* при $x > 0$, является *выпуклой вниз* слева от значения $x = 0$ и *выпуклой вверх* справа от этого значения. С учетом того, что $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}-0}{x-0} = \infty$, ось y является *“вертикальной” касательной* к графику функции в *начале координат* (см. с. 203), поэтому значение $x = 0$ есть *точка перегиба* функции $y = \sqrt[3]{x}$.

2. Поскольку у функции $y = \operatorname{arctg} x$ *вторая производная* $y'' = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$ *положительна* при $x < 0$ и *отрицательна* при $x > 0$, данная функция является *выпуклой вниз* слева от значения $x = 0$ и *выпуклой вверх* справа от этого значения. Так как *график* этой функции имеет в начале координат *касательную прямую* $(y = x)$, значение $x = 0$ является *точкой перегиба* функции $y = \operatorname{arctg} x$.

3. Функция $y = \begin{cases} \sqrt[3]{x}, & \text{если } x \leqslant 0, \\ \operatorname{arctg} x, & \text{если } x \geqslant 0, \end{cases}$ является *выпуклой вниз* слева от значения $x = 0$ и *выпуклой вверх* справа от этого значения; тем не менее значение $x = 0$ *не является точкой перегиба* для данной функции: у ее графика *нет касательной прямой* в точке $(0, 0)$, имея в этой точке *левую касательную* $x = 0$ и *правую касательную* $y = x$ (так что в точке $(0, 0)$ происходит не “перегиб”, а “перелом” графика).

V.5. В чем суть метода хорд и касательных

Применение этого метода *приближеного решения* уравнения $f(x)=0$ требует некоторой подготовительной работы, целью которой является нахождение такого *отрезка* $[a,b]$, на *концах* которого функция $y=f(x)$ имеет значения *разных знаков*, а ее *производные* $f'(x)$ и $f''(x)$ на всем этом отрезке *сохраняют знак*. В этом случае[1] между точками a и b есть ровно один корень $x=\xi$ уравнения $f(x)=0$. Можно при этом считать, что обе производные $f'(x)$ и $f''(x)$ *положительны* на отрезке $[a,b]$,[2] в силу чего $f(a)<0$, $f(b)>0$, и функция $y=f(x)$ *выпукла вниз* на отрезке $[a,b]$.

В качестве *первых* (после a и b) *приближений* искомого *корня* (с *недостатком* и с *избытком*) берут точки x_1 и $\widetilde{x}_1$, в которых *ось* x пересекается соответственно:

прямой, проходящей через точки $(a,f(a))$ и $(b,f(b))$, и

прямой, *касательной* к графику функции в точке $(b,f(b))$.

Так как уравнениями этих прямых являются соответственно $y=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$ и $y=f'(b)(x-b)+f(b)$, точки x_1 и $\widetilde{x}_1$ находятся из равенств $0=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x_1-a)+f(a)$ и $0=f'(b)(\widetilde{x}_1-b)+f(b)$:

$$\boxed{x_1=a-\frac{f(a)}{f(b)-f(a)}(b-a), \quad \widetilde{x}_1=b-\frac{f(b)}{f'(b)}},$$

[1] По *теореме о прохождении непрерывной функции через нуль* (см. с. 145) с учетом *строгой монотонности* функции $y=f(x)$ на отрезке $[a,b]$ (см. с. 212).

[2] Если обе эти производные *отрицательны*, то следует перейти к уравнению $-f(x)=0$, а если $f'(x)<0$ и $f''(x)>0$ или же $f'(x)>0$ и $f''(x)<0$, то соответственно к уравнениям $f(-x)=0$ и $-f(-x)=0$ с заменой при этом отрезка $[a,b]$ отрезком $[-b,-a]$.

причем[1] $f(x_1) < 0$, а $f(\widetilde{x}_1) > 0$, так что $x_1 < \xi < \widetilde{x}_1$ (рис. 18).

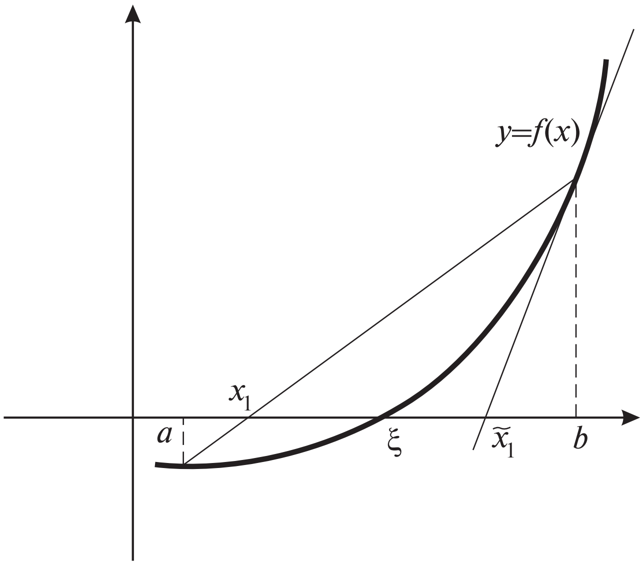


Рис. 18

Если разность $\widetilde{x}_1 - x_1$ не превосходит заказанную *точность* вычисления *корня*, в качестве его *приближения* может быть взято *любое* значение $\xi \in (x_1, \widetilde{x}_1)$; в противном случае переходят ко *вторым приближениям* x_2 и $\widetilde{x}_2$ искомого *корня*, действуя в точности по описанной схеме с заменой лишь точек a и b соответственно на x_1 и $\widetilde{x}_1$:

$$\boxed{x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f(b) - f(x_1)}(b - x_1), \quad \widetilde{x}_2 = \widetilde{x}_1 - \frac{f(\widetilde{x}_1)}{f'(\widetilde{x}_1)}},$$

при этом[1] $f(x_2) < 0$ и $f(\widetilde{x}_2) > 0$, так что $x_1 < x_2 < \xi < \widetilde{x}_2 < \widetilde{x}_1$.

[1] В силу того, что график *выпуклой вниз* функции лежит *ниже* хорды, но *выше* касательной.

Описанный процесс можно продолжать *неограниченное* число раз, получая две последовательности:

возрастающую $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, *ограниченную сверху*[1],

убывающую $\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \ldots, \widetilde{x}_n, \ldots$, *ограниченную снизу*[1],

для всех элементов которых будут выполняться неравенства $f(x_n) < 0$, а $f(\widetilde{x}_n) > 0$, а потому и неравенства $x_n < \xi < \widetilde{x}_n$.

По *теореме о сходимости ограниченных монотонных последовательностей* (см. с. 77) обе последовательности $\{x_n\}$ и $\{\widetilde{x}_n\}$ *сходятся* к (неизвестным пока) числам $x = \lim x_n$ и $\widetilde{x} = \lim \widetilde{x}_n$, к которым сходятся и последовательности $\{x_{n+1}\}$ и $\{\widetilde{x}_{n+1}\}$ (см. с. 66, *свойство 2*), а так как по построению

$$\boxed{x_{n+1} = x_1 - \frac{f(x_n)}{f(b) - f(x_n)}(b - x_n), \quad \widetilde{x}_{n+1} = \widetilde{x}_n - \frac{f(\widetilde{x}_n)}{f'(\widetilde{x}_n)}},$$

переход в этих равенствах к пределам $x = \lim x_n = \lim x_{n+1}$ и $\widetilde{x} = \lim \widetilde{x}_n = \lim \widetilde{x}_{n+1}$ приводит к равенствам

$$x = x - \frac{f(x)}{f(b) - f(x)}(b - x_n), \quad \widetilde{x} = \widetilde{x} - \frac{f(\widetilde{x})}{f'(\widetilde{x})},$$

из которых следует, что $f(x) = f(\widetilde{x}) = 0$, а потому $x = \widetilde{x} = \xi$.

Это означает, что последовательности $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ (*возрастающая*) и $\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \ldots, \widetilde{x}_n, \ldots$ (*убывающая*) имеют *общим пределом* искомый корень ξ уравнения $f(x) = 0$. Задав сколь угодно малую величину "допустимой погрешности" $\varepsilon > 0$, можно поэтому быть уверенным, что вычисленные на n-ом шаге описанного процесса значения x_n и $\widetilde{x}_n$ будут удовлетворять неравенствам $|\widetilde{x}_n - x_n| < \varepsilon$ и $x_n < \xi < \widetilde{x}_n$, в силу чего значения x_n и $\widetilde{x}_n$ могут быть взяты за *приближения* искомого корня $x = \xi$ уравнения $f(x) = 0$ (соответственно с *недостатком* и с *избытком*) с гарантией, что *погрешность* окажется *меньшей* числа ε.

---

[1] Искомым *корнем* ξ уравнения $f(x) = 0$.

V.6. Что понимают под гладкой линией на плоскости

<u>*Гладкая линия*</u> на координатной плоскости — это *образ* какого-либо *промежутка* I действительной оси при отображении его в плоскость парой функций $x = x(t)$, $y = y(t)$, имеющих на этом промежутке *непрерывные производные*[1] $\dot{x} = \dot{x}(t)$, $\dot{y} = \dot{y}(t)$, удовлетворяющие условию $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 > 0$, т. е. *не равные обе нулю* ни в одной точке промежутка I.

Наглядно *гладкая линия* на координатной плоскости есть *след*, оставляемый *движущейся точкой* плоскости с данной зависимостью $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ ее *координат* x, y от *времени* t (в течение промежутка I; рис. 19), при условии, что *вектор скорости* движения $\{\dot{x}, \dot{y}\}$ *не обращается в нуль*, и координаты $\dot{x} = \dot{x}(t)$, $\dot{y} = \dot{y}(t)$ этого вектора являются *непрерывными* функциями переменной $t \in I$.

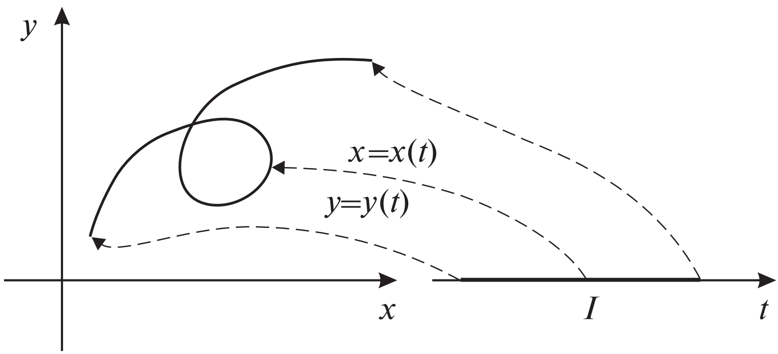


Рис. 19

[1] Предложенное Ньютоном ([**19**], с. 257) обозначение *производных* (*"флюксий"* в его терминологии) *точками* над символами функций (в количестве, равном *порядку* производной), сейчас используется только для производных по переменной t, понимаемой как *время*.

Не требуя выполения условия $\dot{x}^2+\dot{y}^2>0$, можно получить *линию*, не заслуживающую эпитета “гладкая”. Например, функции

$$x=\begin{cases}0, \text{ если } t<0,\\ t^2, \text{ если } t\geqslant 0,\end{cases}\qquad y=\begin{cases}t^2, \text{ если } t<0,\\ 0, \text{ если } t\geqslant 0,\end{cases}$$

имеющие (на всей действительной оси) *непрерывные производные*

$$\dot{x}=\begin{cases}0, \text{ если } t<0,\\ 2t, \text{ если } t\geqslant 0,\end{cases}\qquad \dot{y}=\begin{cases}2t, \text{ если } t<0,\\ 0, \text{ если } t\geqslant 0,\end{cases}$$

отображают *отрезок* $[-1,1]$ на *ломаную*, идущую от точки $(0,1)$ вниз по оси y до точки $(0,0)$, а затем вправо по оси x до точки $(1,0)$.

В силу данного определения *гладкая линия* (на координатной плоскости) есть *подмножество* $L\subset\mathbb{R}^2$, обладающее тем свойством, что для его точек (x,y) установлен *порядок следования* их друг за другом[1] по правилу $\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}$, $t\in I$, называемому *параметризацией*[2] *гладкой линии* L.

Например, *гладкая линия*, которую задает пара функций $x=a\cos t$, $y=b\sin t$ (a и b — *положительные* числа), есть:

если $0\leqslant t\leqslant\pi$ — *верхняя половина эллипса* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, обходимая от точки $(a,0)$ к точке $(-a,0)$;[3]

если $0\leqslant t\leqslant 2\pi$ — весь этот эллипс, обходимый (один раз) от точки $(a,0)$ “против хода часовой стрелки”;

если $0\leqslant t<2\pi$ (соответственно, $0<t<2\pi$) — этот эллипс, но *разомкнутый* в точке $(a,0)$ (соответственно, с *исключенной* точкой $(a,0)$);

если $-\pi\leqslant t\leqslant 3\pi$ — этот же эллипс, *дважды* обходимый от точки $(-a,0)$ “против хода часовой стрелки”.

---

[1] Соответствующий *порядку следования* точек t промежутка I.

[2] *Параметризация* одновременно задает *гладкую линию* и ее *обход*.

[3] Переход к паре функций $x=a\cos(-t)$, $y=b\sin(-t)$ (при том же изменении t от 0 до π) дает *нижнюю половину* этого *эллипса* (обходимую от точки $(a,0)$ к точке $(-a,0)$).

Если (x_0, y_0) — какая-либо точка *гладкой линии* L,[1] т. е. $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$ для некоторого $t_0 \in I$, то, по крайней мере, одна из производных $\dot{x}(t)$ или $\dot{y}(t)$ *не равна нулю* при $t = t_0$, а следовательно, *сохраняет знак* в *окрестности* точки t_0. Соответствующая функция $x = x(t)$ или $y = y(t)$ оказывается в этом случае *строго монотонной* в указанной окрестности, и потому имеет *обратную* $t = t(x)$ или $t = t(y)$. Следует вывод: любая *гладкая линия* L в *окрестности* каждой своей точки (x_0, y_0) представляет собой *график функции*[2] либо $y = y(t(x))$, либо $x = x(t(y))$, причем эта функция имеет[3] *производную*: либо

$$y'_x = (y(t(x)))' = \dot{y}(t(x))\,t'(x) = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} \quad (\text{где } t = t(x)),$$

либо

$$x'_y = (x(t(y)))' = \dot{x}(t(y))\,t'(y) = \frac{\dot{x}(t)}{\dot{y}(t)} \quad (\text{где } t = t(y)).$$

Можно утверждать поэтому (см. с. 202), что уравнение в записи $\boxed{\dfrac{y - y(t_0)}{\dot{y}(t_0)} = \dfrac{x - x(t_0)}{\dot{x}(t_0)}}$, т. е. $y = \frac{\dot{y}(t_0)}{\dot{x}(t_0)}(x - x_0) + y_0$ или же $x = \frac{\dot{x}(t_0)}{\dot{y}(t_0)}(y - y_0) + x_0$, есть уравнение *касательной прямой* к *гладкой линии* L в точке $(x_0, y_0) = (x(t_0), y(t_0))$.

Например, *касательная прямая* к *эллипсу* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ в какой-либо его точке $(x_0, y_0) = (a\cos t_0, b\sin t_0)$ имеет уравнение $\frac{y - b\sin t_0}{b\cos t_0} = \frac{x - a\cos t_0}{-a\sin t_0}$, или $\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$.

---

[1] Имеющей *параметризацию* $L : \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in I.$

[2] Про такую функцию говорят, что она задана <u>*параметрически*</u> — через *переменную* (*параметр*) t: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \ t \in I.$

[3] В силу *теорем о производной сложной и обратной функции* (см. с. 190, 191).

Если у функций $x=x(t)$ и $y=y(t)$ есть *вторые производные* $\ddot{x}=\ddot{x}(t)$ и $\ddot{y}=\ddot{y}(t)$, то у функции $y=y(t(x))$ и/или $x=x(t(y))$ существует и *вторая производная*

$$y''_{xx}=(y'_x)'_x=(\dot{y'_x})\,t'(x)=\left(\dot{\frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}}\right)\frac{1}{\dot{x}(t)}=\frac{\ddot{y}(t)\dot{x}(t)-\ddot{x}(t)\dot{y}(t)}{(\dot{x}(t))^2}\frac{1}{\dot{x}(t)}$$

и/или

$$x''_{yy}=(x'_y)'_y=(\dot{x'_y})\,t'(y)=\left(\dot{\frac{\dot{x}(t)}{\dot{y}(t)}}\right)\frac{1}{\dot{y}(t)}=\frac{\ddot{x}(t)\dot{y}(t)-\ddot{y}(t)\dot{x}(t)}{(\dot{y}(t))^2}\frac{1}{\dot{y}(t)}$$

(в первом случае $t=t(x)$, а во втором $t=t(y)$).

Кратко формулы *первой* и *второй производных* функций $y=y(x)$ и $x=x(y)$ при их *параметрическом* задании $\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}$ записывают в виде

$$\boxed{y'=\frac{\dot{y}}{\dot{x}},\quad y''=\frac{\ddot{y}\dot{x}-\dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3};\qquad x'=\frac{\dot{x}}{\dot{y}},\quad x''=\frac{\ddot{x}\dot{y}-\dot{x}\ddot{y}}{\dot{y}^3}}\,.$$

Например, функции $y=y(x)$ и $x=x(y)$, определяемые принадлежностью точки (x,y) *эллипсу* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, имеют *производные*[1]:

$$y'=\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=\frac{b\cos t}{-a\sin t},\qquad x'=\frac{\dot{x}}{\dot{y}}=\frac{-a\sin t}{b\cos t},$$

$$y''=\frac{\ddot{y}\dot{x}-\dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3}=\frac{(-b\sin t)(-a\sin t)-b\cos t(-a\cos t)}{(-a\sin t)^3}=\frac{-b}{a^2\sin^3 t},$$

$$x''=\frac{\ddot{x}\dot{y}-\dot{x}\ddot{y}}{\dot{y}^3}=\frac{(-a\cos t)\,b\cos t-(-a\sin t)(-b\sin t)}{(b\cos t)^3}=\frac{-a}{b^2\cos^3 t}.$$

---

[1] Значение t в них определяется (с точностью до слагаемого, кратного 2π) по правилу: $t=\begin{cases}\arcsin\frac{y}{b}, & \text{если } x>0,\\ \arccos\frac{x}{a}, & \text{если } y>0,\\ \pi-\arcsin\frac{y}{b}, & \text{если } x<0,\\ 2\pi-\arccos\frac{x}{a}, & \text{если } y<0.\end{cases}$

V.7. Как вычисляют дифференциал длины гладкой линии

Длину $l(a,b)$ *участка* гладкой линии L: $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ $t \in I$, между ее точками P_a и P_b, отвечающими значениям $t = a$ и $t = b$ промежутка I, определяют как *точную верхнюю грань длин* всевозможных *вписанных* в этот *участок ломаных*[1].

Из данного определения вытекает, что если $a < b < c$, то $l(a,b) + l(b,c) = l(a,c)$ — свойство *аддитивности длины*[2].

Хотя получить формулу *длины* $l(a,b)$ участка гладкой линии методами лишь *дифференциального исчисления* (без привлечения *интегрального*) не удается, можно вычислить *дифференциал* dl *длины* $l(a,t)$ (участка гладкой линии с переменной конечной точкой) как функции переменной t.

Приращение $\triangle l$ этой функции, отвечающее приращению $\triangle t > 0$ в какой-либо точке t_0, есть длина *участка* гладкой линии между точками P_{t_0} и $P_{t_0 + \triangle t}$, т. е. (согласно данному выше определению) *точная верхняя грань длин* всевозможных *ломаных*, вписанных в этот *участок*.

---

[1] Последовательными вершинами любой такой *ломаной* служат точки *гладкой линии*, отвечающие значениям $t = t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}, t_n$, при произвольном выборе значений $t_1, \ldots, t_{n-1}, t_n \in I$ (и числа n этих значений), подчиненном лишь условию $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$. Под *длиной* ломаной понимают *сумму длин* составляющих ее *прямолинейных отрезков*.

[2] Вот его *доказательство*: любая *ломаная*, вписанная в участок гладкой дуги между точками P_a и P_b, продолженная *ломаной*, вписанной в участок между точками P_b и P_c, есть *ломаная*, вписанная в участок между точками P_a и P_c, при этом любая *ломаная*, вписанная в участок гладкой дуги между точками P_a и P_c, добавлением к ней вершины в точке P_b преобразуется (с неуменьшением длины) в ломанную указанного вида. Остается применить свойство *аддитивности* для *ломаных*, вытекающим из самого определения *длины* ломаной.

Для начала надо найти длину $\widehat{\triangle l}$ такой *ломаной*. Так как ее *вершинами* служат точки

$$(x(t_0),y(t_0)),\ (x(t_1),y(t_1)),\ \dots\ ,\ (x(t_{n-1}),y(t_{n-1})),\ (x(t_n),y(t_n)),$$

где $t_0 < t_1 < \ \cdots\ < t_{n-1} < t_n = t_0 + \triangle t$ (рис. 20), *длина* этой *ломаной* вычисляется как *сумма длин* составляющих ее *прямолинейных отрезков*:

$$\widehat{\triangle l} = \sqrt{(x(t_1)-x(t_0))^2+(y(t_1)-y(t_0))^2} + \ \cdots$$
$$\cdots\ + \sqrt{(x(t_n)-x(t_{n-1}))^2+(y(t_n)-y(t_{n-1}))^2}\,.$$

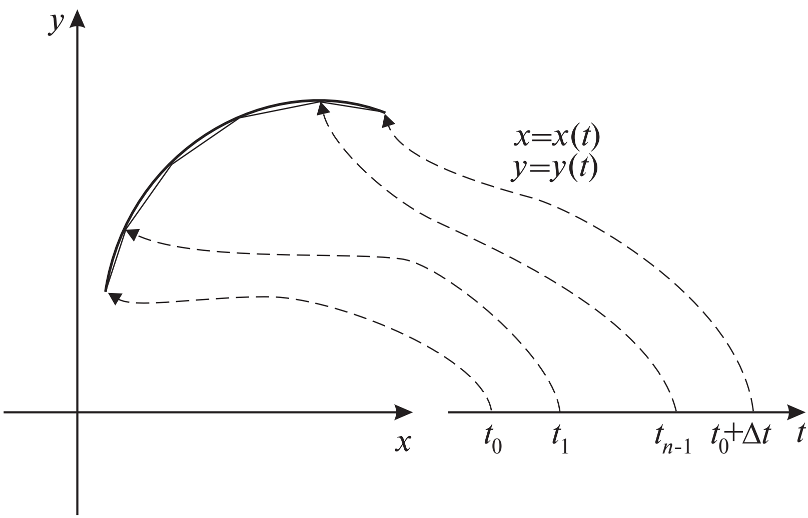


Рис. 20

Преобразуя правую часть последнего равенства, применив к каждой из разностей, стоящих под знаками радикалов *теорему Лагранжа* (см. с. 209), можно прийти к равенству

$$\widehat{\triangle l} = \sqrt{(\dot{x}(c_1))^2+(\dot{y}(\widetilde{c}_1))^2}\,(t_1-t_0) + \ \cdots$$
$$\cdots\ + \sqrt{(\dot{x}(c_n))^2+(\dot{y}(\widetilde{c}_n))^2}\,(t_n-t_{n-1}),$$

где c_1 и $\widetilde{c}_1$ — некоторые (*внутренние*) точки *отрезка* $[t_0, t_1]$,

. . . .

c_n и $\widetilde{c}_n$ — некоторые (*внутренние*) точки *отрезка* $[t_{n-1}, t_n]$.

Пусть теперь ε — любое (сколь угодно малое) *положительное* число. В силу *непрерывности* на промежутке I *производных* $\dot{x} = \dot{x}(t)$, $\dot{y} = \dot{y}(t)$ существует такое *положительное* число δ, что при выполнении неравенств $0 < \Delta t < \delta$ неравенства

$$|\dot{x}(t) - \dot{x}(t_0)| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ и } |\dot{y}(t) - \dot{y}(t_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

выполняются при *любом* значении t между t_0 и $t_0 + \Delta t$.

Основываясь на этих неравенствах, можно утверждать: каждая из величин $\sqrt{(\dot{x}(c_1))^2 + (\dot{y}(\widetilde{c}_1))^2}$, ... , $\sqrt{(\dot{x}(c_n))^2 + (\dot{y}(\widetilde{c}_n))^2}$ отличается от величины $\sqrt{(\dot{x}(t_0))^2 + (\dot{y}(t_0))^2}$ *меньше*, чем на ε (рис. 21)[1].

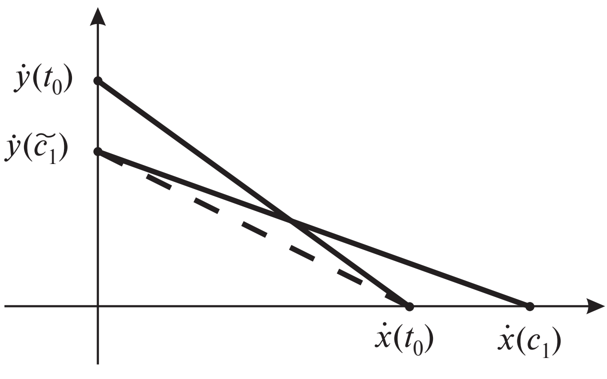


Рис. 21

[1] Так как длина каждого из двух отрезков, изображенных на рис. 21 *сплошной* линией, отличается от длины *пунктирного* отрезка *меньше*, чем на $\frac{\varepsilon}{2}$, длины указанных двух отрезков различаются между собой *меньше*, чем на ε.

В соответствии с этим оказывается, что

$$\Big|\widehat{\triangle l}-\sqrt{(\dot x(t_0))^2+(\dot y(t_0))^2}\,\triangle t\Big|=$$

$$=\Big|\sqrt{(\dot x(c_1))^2+(\dot y(\widetilde c_1))^2}\,(t_1-t_0)-\sqrt{(\dot x(t_0))^2+(\dot y(t_0))^2}\,(t_1-t_0)+$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+\sqrt{(\dot x(c_n))^2+(\dot y(\widetilde c_n))^2}\,(t_n-t_{n-1})-\sqrt{(\dot x(t_0))^2+(\dot y(t_0))^2}\,(t_n-t_{n-1})\Big|<$$

$$<\varepsilon\cdot(t_1-t_0)\ +\cdots+\ \varepsilon\cdot(t_n-t_{n-1})=\varepsilon\cdot\triangle t,$$

т. е. *длина* $\widehat{\triangle l}$ любой *ломаной*, вписанной в выделенный участок[1] гладкой линии, и величина $\sqrt{(\dot x(t_0))^2+(\dot y(t_0))^2}\,\triangle t$ различаются *меньше*, чем на $\varepsilon\cdot\triangle t$.

Следует вывод: *длина* $\triangle l \overset{\text{def}}{=} \sup\widehat{\triangle l}$ *участка гладкой линии* $L:\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t),\end{cases}$ $t\in I$, *соответствующего изменению* t *от* t_0 *до* $t_0+\triangle t$, *отличается от величины* $\sqrt{(\dot x(t_0))^2+(\dot y(t_0))^2}\,\triangle t$, *пропорциональной* $\triangle t$, *не больше*, чем на $\varepsilon\cdot\triangle t$, а это (в силу произвольности выбора числа $\varepsilon>0$) *означает, что величина* $\sqrt{(\dot x(t_0))^2+(\dot y(t_0))^2}\,\triangle t$, *и есть дифференциал длины гладкой линии* L (в *точке, отвечающей значению* $t=t_0$); *ввиду произвольности значения* $t_0\in I$ <u>*дифференциалу длины*</u> *гладкой линии* L *можно придать вид*[2]

$$\boxed{dl=\sqrt{(\dot x(t))^2+(\dot y(t))^2}\,dt}\,.$$

В случае *гладкой линии*, являющейся *графиком функции* $y=f(x)$ (имеющей *непрерывную производную* на промежутке I оси x), роль переменной (параметра) t выполняет x, и *дифференциал длины* dl преобразуется к виду

---

[1] Отвечающий изменению t в пределах *отрезка* $[t_0, t_0+\triangle t]$.

[2] Поскольку $dt=\triangle t$ (в силу *независимости* переменной t).

$$\boxed{dl = \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx}.$$

При задании *гладкой линии* L в *полярных координатах*: $\begin{cases} r = r(t), \\ \varphi = \varphi(t), \end{cases}$ $t \in I$, выразить *дифференциал длины* позволяют

формулы перехода $\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \end{cases}$ в соответствии с которыми

$\begin{cases} \dot{x} = \dot{r}\cos\varphi + r(-\sin\varphi)\dot{\varphi}, \\ \dot{y} = \dot{r}\sin\varphi + r(\cos\varphi)\dot{\varphi}, \end{cases}$ $\quad \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2$, а потому

$$\boxed{dl = \sqrt{(\dot{r}(t))^2 + (r(t)\dot{\varphi}(t))^2}\, dt};$$

в случае же задания *гладкой линии* уравнением $r = r(\varphi)$ (роль *параметра* t выполняет *полярный угол* φ)

$$\boxed{dl = \sqrt{(r'(\varphi))^2 + (r(\varphi))^2}\, d\varphi}.$$

Кривизна гладкой линии

Кривизной *гладкой линии* L: $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ $t \in I$, в точке P_{t_0} (отвечающей значению t_0 из промежутка I) называют взятый по абсолютной величине *предел*, к которому стремится при $\Delta t \to 0$ отношение $\frac{\Delta\alpha}{\Delta l}$ величины *угла*, на который поворачивается *касательная* к гладкой линии L при переходе от точки P_{t_0} к точке $P_{t_0+\Delta t}$, к *длине* участка гладкой линии между этими точками (рис. 22, а): $k \overset{\text{def}}{=} \left| \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta l} \right|$.

Для получения *формулы кривизны* гладкой линии L необходимо потребовать, чтобы задающие ее функции $x = x(t)$ и $y = y(t)$ имели на промежутке I (изменения переменной t) *вторые производные* $\ddot{x}(t)$ и $\ddot{y}(t)$.

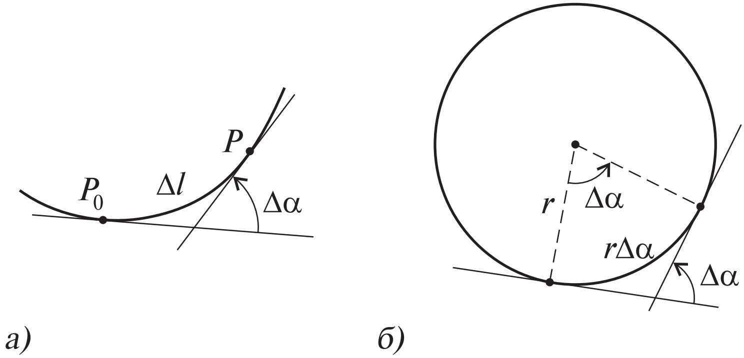


Рис. 22

Поскольку *касательная* к гладкой линии L в точке P_{t_0} имеет уравнение $\dfrac{y-y(t_0)}{\dot y(t_0)}=\dfrac{x-x(t_0)}{\dot x(t_0)}$, угол $\alpha=\alpha(t_0)$ ее наклона к оси x равен $\begin{cases}\operatorname{arctg}\dfrac{\dot y(t_0)}{\dot x(t_0)}, & \text{если } \dot x(t_0)\neq 0,^{1}\\ \operatorname{arcctg}\dfrac{\dot x(t_0)}{\dot y(t_0)}, & \text{если } \dot y(t_0)\neq 0,^{2}\end{cases}$ а потому

$$\Delta\alpha=\begin{cases}\operatorname{arctg}\dfrac{\dot y(t_0+\Delta t)}{\dot x(t_0+\Delta t)}-\operatorname{arctg}\dfrac{\dot y(t_0)}{\dot x(t_0)}=\operatorname{arctg}'\dfrac{\dot y(t_0)}{\dot x(t_0)}\,\Delta t+o(\Delta t),\\ \operatorname{arcctg}\dfrac{\dot x(t_0+\Delta t)}{\dot y(t_0+\Delta t)}-\operatorname{arcctg}\dfrac{\dot x(t_0)}{\dot y(t_0)}=\operatorname{arcctg}'\dfrac{\dot x(t_0)}{\dot y(t_0)}\,\Delta t+o(\Delta t);\end{cases}$$

в любом случае $\Delta\alpha=\dfrac{\ddot y(t_0)\,\dot x(t_0)-\dot y(t_0)\,\ddot x(t_0)}{(\dot x(t_0))^2+(\dot y(t_0))^2}\,\Delta t+o(\Delta t)$ при $\Delta t\to 0$.

Следует вывод:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\alpha}{\Delta l}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\frac{\ddot y(t_0)\,\dot x(t_0)-\dot y(t_0)\,\ddot x(t_0)}{(\dot x(t_0))^2+(\dot y(t_0))^2}\,\Delta t+o(\Delta t)}{\sqrt{(\dot x(t_0))^2+(\dot y(t_0))^2}\,\Delta t+o(\Delta t)}=\frac{\ddot y(t_0)\,\dot x(t_0)-\dot y(t_0)\,\ddot x(t_0)}{((\dot x(t_0))^2+(\dot y(t_0))^2)^{\frac{3}{2}}},$$

а потому *кривизна* гладкой линии $L\colon\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t),\end{cases}$ $t\in I$, в точке,

---

[1] А следовательно, и $\dot x(t_0+\Delta t)\neq 0$ при любом достаточно малом Δt.

[2] А следовательно, и $\dot y(t_0+\Delta t)\neq 0$ при любом достаточно малом Δt.

отвечающей значению $t=t_0$, вычисляется по формуле

$$\boxed{k=\frac{|\ddot{y}(t_0)\dot{x}(t_0)-\dot{y}(t_0)\ddot{x}(t_0)|}{((\dot{x}(t_0))^2+(\dot{y}(t_0))^2)^{\frac{3}{2}}}}.$$

В частности, если *гладкая линия* L задана как *график функции* $y=f(x)$, имеющей на промежутке I оси x *вторую производную*, то для *кривизны* этой *гладкой линии* в любой ее точке $(x_0, f(x_0))$ справедлива формула $\boxed{k=\frac{|f''(x_0)|}{(1+(f'(x_0))^2)^{\frac{3}{2}}}}$.

Обратную *кривизне* величину $r=\frac{1}{k}$ называют *радиусом кривизны* (данной *гладкой линии* в данной ее точке). Объясняется это тем, что *окружность* радиуса r имеет (в любой точке) *кривизну* $k=\frac{1}{r}$; рис. 22, *б*).

Например, в произвольно взятой точке $(a\cos t_0, b\sin t_0)$ *эллипса* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (с. 259) его *кривизна* равна

$$k=\frac{ab}{(a^2\sin^2 t_0+b^2\cos^2 t_0)^{\frac{3}{2}}}$$

а так как

$$a^2\sin^2 t_0+b^2\cos^2 t_0=\frac{a^2(1-\cos 2t_0)}{2}+\frac{b^2(1+\cos 2t_0)}{2}=$$
$$=\frac{a^2+b^2}{2}-\frac{a^2-b^2}{2}\cos 2t_0,$$

то в случае[1] $a>b$) *наибольшее* значение $k=\frac{1}{b}$ *кривизны* наблюдается в точках $(\pm a, 0)$ (при $t_0=0$ и $t_0=\pi$), а *наименьшее* $k=\frac{1}{a}$ — в точках $(0,\pm b)$ (при $t_0=\frac{\pi}{2}$ и $t_0=\frac{3\pi}{2}$).

[1] Соответствующем традиционному изображению этого *эллипса* (с *фокусами*, расположенными на оси x).

Приложение I

Как формируется символический язык

Логика[1] (в той ее части, которую называют *формальной*) есть наука о *формах* языкового *выражения мысли* и способах построения *умозаключений*.

Высказывания и предикаты

Исходное понятие *формальной логики* – *высказывание*[2]. Ему можно дать следующее *пояснение*.

Высказывание есть мысленное образование, грамматически являющееся повествовательным предложением, а по содержащемуся в нем смыслу – истиной или ложью[3].

Записываться *высказывания* могут словами, формулами, их сочетаниями, а выделяться кавычками или скобками (которые могут опускаться). Вот некоторые примеры:

“*Квадрат имеет пять вершин*”; $2\times 2 = 11$; $2 < 3$;
“*Волга впадает в Каспийское море*”; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$;
“*В 1947 г. на Земле разбился корабль инопланетян*”.

Вопрос о том, является ли *высказыванием* (*истинным* или *ложным*) данное *повествовательное предложение*, решается в зависимости от того, как понят его смысл. Например, предложение “*Дождь идет*” становится *высказыванием* лишь при конкретизации места и времени наблюдения; напротив, предложение “*Речка движется и не движется*” (слова из некогда популярной песни) является *ложным высказыванием* даже без уточнения, о какой речке идет речь. *Высказывание* “$2\times 2 = 11$” при записи чисел в *троичной* системе становится *истинным*.

---

[1] Основоположником *логики* (греч. $\lambda\acute{o}\gamma o\varsigma$ – *слово, разум*) считают древнегреческого философа Аристотеля ($A\rho\iota\sigma\tau o\tau\acute{\varepsilon}\lambda\eta\varsigma$, 384–322 гг. до Р.Х.). Принципы логики были изложены им в его “Аналитиках” [**1**].

[2] *Высказывания* называют еще *суждениями* и *утверждениями*.

[3] Чем именно – *истиной* или *ложью* – в момент обсуждения может оставаться неизвестным.

Анализируя *высказывания*, в каждом из них можно выделить *предметы* и то, что *говорится* об этих *предметах*. Если *предметы*, входящие в *высказывание* (все или часть из них) заменить *буквенными символами*, придав им смысл *предметных переменных*, то в результате возникает то, что называют *высказывательной формой*.

Например, *высказывание* "$2 < 3$" (в котором *предметами* служат *числа* 2 и 3, а *говорится* о них то, что первое *меньше* второго) приводит к *высказывательным формам* "$x < 3$", "$2 < y$" и "$x < y$" (первые две содержат *одну*, а третья – *две предметные переменные*). Наоборот, придание переменым x и y значений, например, $x = 5$, $y = 7$, преобразует полученные *высказывательные формы* в *высказывания*: "$5 < 3$" (*ложное*), "$2 < 7$" и "$5 < 7$" (оба *истинные*).

Следует подчеркнуть: *высказывательная форма* не является *высказываением*, но становится им (оказываясь либо *истинным*, либо *ложным*) после присвоения *предметным переменным* каких-либо (допустимых по смыслу) *конкретных значений*.

Отличие *высказывательной формы* от *высказывания* часто сравнивают ([**22**], с. 34) с отличием *бланка документа* от *документа* как такового: *бланк документа* не является *документом*, но становится им после заполнения всех предусмотренных граф.

Так как после вычленения из *высказывания* участвующих в нем *предметов* от него остается то, что *говорится* об этих предметах (т. е. *сказуемое*), *высказывательные формы* называют еще *предика́тами*[1]. Далее термины *высказывательная форма* и *предикат* будут считаться синонимами.

[1] Лат. praedicatum – *сказанное*. Чаще *предикат* определяют более отвлеченно как *функцию* одной или нескольких переменных, значениями которой являются (в зависимости от *значений* переменных) конкретные *высказывания*.

В зависимости от числа *предметных переменных* различают *одноместные*, *двухместные* и т. д. *предикаты*.

Одноместный предикат выражает некое *свойство*: оно выполняется в точности для тех значений *предметной переменной*, для которых значение предиката есть *истинное высказывание*. Например, предикат "$x > 0$" выражает *свойство* числа быть *положительным*.

Предикаты с бо́льшим числом предметных переменных выражают *отношения*; например, *двухместный* предикат "$x < y$" выражает отношение *меньше*, а *трехместный* предикат "$(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = 0$" — отношение *компланарности* трех векторов. Присвоение всем (или некоторым) *предметным переменным*, входящим в *предикат*, конкретных значений превращает *предикат* в *высказывание* (или в *предикат* с меньшим числом предметных переменных).

Элементарный раздел *формальной логики* — *логика высказываний* (или *исчисление высказываний*) — вырабатывает правила составления конструкций из *высказываний* (а также *предикатов*) посредством *логических связок* — специальных символов, роль которых подобна той, какую в грамматике играют *средства соединения предложений*. Существенно, что при составлении этих конструкций отдельные *высказывания* (и *предикаты*) воспринимают как *неделимые целые*, в силу чего уместно обозначение их *однобуквенными символами*[1] $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, ... Эти *символы* берут на себя роль *высказывательных переменных*[2]: вместо каждого из них может быть подставлено *любое* конкретное *высказывание*, в силу чего каждому из них (независимо от других) можно приписать значение "истина" или "ложь".

[1] С добавлением к ним в случае *предикатов* символов *предметных переменных*: $\mathcal{A}(x)$, $\mathcal{B}(x,y)$, $\mathcal{C}(\varepsilon,\delta)$, ...

[2] А символы $\mathcal{A}(x)$, $\mathcal{B}(x,y)$, $\mathcal{C}(\varepsilon,\delta)$, ... — *предикатных переменных*.

Логические связки и формулы логики высказываний

Стандартный набор *логических связок*[1] — это символы операций *отрицания* $\neg$, *конъюнкции* $\wedge$, *дизъюнкции* $\vee$, *импликации* $\Rightarrow$ *и эквивалентности* $\Leftrightarrow$ со следующими описаниями их действий на *высказывания*.

<u>Отрицание</u> $\neg\mathcal{A}$ (читается: "не $\mathcal{A}$") *высказывания* $\mathcal{A}$ есть новое *высказывание*, которое считают *истинным*, если высказывание $\mathcal{A}$ *ложно*, и *ложным*, если высказывание $\mathcal{A}$ *истинно*.

<u>Конъюнкция</u> $\mathcal{A}\wedge\mathcal{B}$ (читается: "$\mathcal{A}$ *и* $\mathcal{B}$") *высказываний* $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ есть *высказывание*, считающееся *истинным* лишь в том случае, когда *истинны оба* высказывания $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$.

<u>Дизъюнкция</u> $\mathcal{A}\vee\mathcal{B}$ (читается: "$\mathcal{A}$ *или* $\mathcal{B}$") *высказываний* $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ есть *высказывание*, считающееся *истинным* в том и только в том случае, когда *истинно хотя бы одно* из высказываний $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$.

<u>Импликация</u> $\mathcal{A}\Rightarrow B$ (читается: "*если* $\mathcal{A}$, *то* $\mathcal{B}$" или "*из* $\mathcal{A}$ *следует* $\mathcal{B}$") *высказываний* $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ (в этом порядке[2]) есть *высказывание*, считающееся *истинным* во *всех случаях*, кроме одного: когда высказывание $\mathcal{A}$ *истинно*, а $\mathcal{B}$ *ложно*.

<u>Эквивалентность</u> $\mathcal{A}\Leftrightarrow B$ (читается: "$\mathcal{A}$ *равносильно* $\mathcal{B}$") *высказываний* $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ есть *высказывание*, считающееся *истинным* тогда и только тогда, когда высказывания $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ либо *оба истинны*, либо *оба ложны*.

---

[1] Связка $\neg$ ставится *перед* высказыванием, а остальные — *между* двумя высказываниями. Названия *связок* происходят от лат. *conjunctio — соединение* , *disjunctio — разобщение*, *implicatio — сплетение*, *aequus — равный*, а *valens — сильный*. Для обозначения *конъюнкции* часто используют значок & (так называемый *амперсанд*); *импликацию* обозначают также символами $\supset$, $\to$, а *эквивалентность* — символами $\leftrightarrow$, $\backsim$, $\equiv$.

[2] При этом $\mathcal{A}$ называют <u>*посылкой*</u>, а $\mathcal{B}$ — <u>*заключением*</u> импликации.

Перечисленные операции являются *логическими аналогами* того, что в грамматике называют *средствами соединения предложений*: *частицы "не", союзов "и"* и *"или", союзных оборотов "если ... , то ..."* и *" ... в том и только в том случае, когда ..."*.

Главное требование при определении *логических связок* – гарантировать *символическую запись* от *разночтений* и *противоречий*, свойственных обычным *языкам общения*. Платой за это является *неполное* соответствие *логических связок* их *грамматическим аналогам*. В частности, соединение двух высказываний *импликацией* не предполагает (в отличие от *союзного оборота "если ..., то ..."*) *причинно-следственной связи* между фактами, сообщаемыми этими *высказываниями*, а лишь *отрицает* возможность *ложности* второго *высказывания* при *истинности* первого.

Два замечания к определениям *логических связок*.

1. Так как результатами действий *логических связок* на *высказывания* также являются *высказывания*, они, в свою очередь, могут подвергаться действию *логических связок* с образованием более сложных *сочетаний высказываний*.

2. Так как действия *логических связок* не учитывают *конкретное содержание* соединяемых ими *высказываний*, применять *логические связки* можно и к *высказывательным переменным*.

Под *формулами логики высказываний* понимают как отдельные *высказывательные переменные* $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$, ... , так и *результаты применения* к ним и уже образованным *формулам* (взятым в круглые скобки) *логических связок*[1]:

$$\neg\mathcal{A},\ \neg(\neg\mathcal{A}),\ (\neg\mathcal{A})\Leftrightarrow\mathcal{B},\ \mathcal{A}\wedge(\mathcal{B}\vee\mathcal{E}),\ \mathcal{A}\Rightarrow(\mathcal{A}\Rightarrow(\neg\mathcal{C})),$$

$$(\mathcal{A}\wedge(\mathcal{B}\vee\mathcal{C}))\Leftrightarrow(\neg D),\ (\mathcal{A}\vee(\mathcal{B}\wedge(\neg\mathcal{A})))\Rightarrow((\neg\mathcal{A})\Leftrightarrow\mathcal{B}),\ \ldots$$

---

[1] Разумеется, с учетом описанных выше правил их расстановки: $\wedge\mathcal{A}$, $\mathcal{A}\neg\mathcal{B}$, $\mathcal{A}\vee\wedge\mathcal{D}$, $(\mathcal{A}\vee\neg)\Rightarrow(\mathcal{A}\wedge\mathcal{E})$, $\mathcal{A}\Rightarrow(\Leftrightarrow\mathcal{B})$ – это *не формулы логики высказываний*.

Каждую *формулу логики высказываний* можно рассматривать как *функцию* тех *высказывательных переменных*, которые входят в эту *формулу*, а так как значениями этой *функции* (при подстановке вместо *высказывательных переменных* конкретных *высказываний*) оказывается то или иное *высказывание*, каждую *формулу логики высказываний* можно, в свою очередь, воспринимать как *высказывательную переменную*, используя для нее *однобуквенное обозначение*, т. е. запись типа $\mathcal{F} = (\mathcal{A} \wedge (\mathcal{B} \vee \mathcal{C}))$.

Наоборот, любую *высказывательную переменную*, входящую в *формулу логики высказываний*, можно заменить произвольно взятой *формулой логики высказываний*, приходя в результате к новой *формуле логики высказываний*.

Две формулы логики высказываний $\mathcal{A}$ *и* $\mathcal{B}$ *считаются* <u>*взаимозаменяемыми*</u> (<u>*логически эквивалентными*</u>) *с обозначением этого* $\mathcal{A} = \mathcal{B}$, *если при одних и тех же комбинациях значений*[1] *входящих в них высказывательных переменных значения*[1] *этих формул совпадают*[2].

Сами определения действий *логических связок* $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$ и $\Leftrightarrow$ дают простые примеры *взаимозаменяемых формул логики высказываний*:

$\boxed{\mathcal{A} \wedge \mathcal{B} = \mathcal{B} \wedge \mathcal{A},\ \mathcal{A} \vee \mathcal{B} = \mathcal{B} \vee \mathcal{A}}$ (*перестановочность* соединеных знаками $\wedge$ или $\vee$ *высказывательных переменных*[3]);

$\boxed{\neg(\neg\mathcal{A}) = \mathcal{A}}$ (правило <u>*двойного отрицания*</u>);

$\boxed{\neg(\mathcal{A} \Rightarrow B) = \mathcal{A} \wedge (\neg\mathcal{B})}$ (правило <u>*отрицания импликации*</u>);

---

[1] *“Истина”* или *“ложь”*.

[2] Следует подчеркнуть: знак = не является *логической связкой*, так что $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ – это не *формула логики высказываний*, а сообщение либо о *взаимозаменяемости* двух *формул логики высказываний*, либо о том, что для одной из них выбрано новое обозначение.

[3] Равно как и *формул логики высказываний*.

$\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B} = (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \vee ((\neg \mathcal{A}) \wedge (\neg \mathcal{B}))$.

В более сложных случаях *взаимозаменяемость* формул логики высказываний устанаваливают, составляя *таблицы значений* этих формул по типу следующей, посредством которой выводят <u>*закон Де Мóргана*</u>[1] $\boxed{\neg(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) = (\neg \mathcal{A}) \vee (\neg \mathcal{B})}$:

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$	$\neg \mathcal{A}$	$\neg \mathcal{B}$	$\neg(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B})$	$(\neg \mathcal{A}) \vee (\neg \mathcal{B})$
и	и	и	л	л	л	л
и	л	л	л	и	и	и
л	и	л	и	л	и	и
л	л	л	и	и	и	и

В первых (в данном случае двух) столбцах перебираются всевозможные комбинации[2] значений (“истина”, “ложь”) исходных *высказывательных переменных* (или *формул*), а в последних двух – значения формул, *взаимозаменяемость* которых (а она согласно определению *взаимозаменяемости* формул равносильна *совпадению* этих столбцов) подлежит доказательству[3].

Посредством подобных таблиц устанавливается, в частности, *взаимозаменяемость* формул $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ и $\neg \mathcal{A} \vee \mathcal{B}$, а также формул $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$ и $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A})$, свидетельствующую об избыточности списка *логических связок*: *импликация* и *эквивалентность* допускают выражение через *отрицание*, *конъюнкцию* и *дизъюнкцию*.

---

[1] De Morgan Augustus (1806–1871) – шотландский логик и математик. Парный ему *закон Де Мóргана* гласит: $\boxed{\neg(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) = (\neg \mathcal{A}) \wedge (\neg \mathcal{B})}$.

[2] В данном случае таких комбинаций *четыре*, а при доказательстве того, например, что

$$(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \vee \mathcal{C} = (\mathcal{A} \vee \mathcal{C}) \wedge (\mathcal{B} \vee \mathcal{C}) \quad \text{и} \quad (\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \wedge \mathcal{C} = (\mathcal{A} \wedge \mathcal{C}) \vee (\mathcal{B} \vee \mathcal{C}),$$

их уже *восемь*.

[3] Промежуточные столбцы играют вспомогательную роль.

На самом деле все пять перечисленных логических связок можно выразить через одну – *штрих Ше́ффера*[1] $|$, соединение $\mathcal{A}|\mathcal{B}$ которым высказываний $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ определяют как высказывание, *истинное* во *всех* случаях, *кроме* того, когда *истинны оба* высказывания $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$:

$$\neg\mathcal{A} = \mathcal{A}|\mathcal{A}, \quad \mathcal{A}\wedge\mathcal{B} = (\mathcal{A}|\mathcal{B})\big|(\mathcal{A}|\mathcal{B}), \quad \mathcal{A}\vee\mathcal{B} = (\mathcal{A}|\mathcal{A})\big|(\mathcal{B}|\mathcal{B}),$$
$$\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B} = \mathcal{A}\big|(\mathcal{B}|\mathcal{B}), \quad \mathcal{A}\Leftrightarrow\mathcal{B} = (\mathcal{A}|\mathcal{B})\big|((\mathcal{A}|\mathcal{A})\big|(\mathcal{B}|\mathcal{B})).$$

Формула логики высказываний $\mathcal{B}$ считается <u>логическим следствием</u> (одной или нескольких) формул логики высказываний $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n$ с обозначением этого $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n \models \mathcal{B}$ или $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n \supset \mathcal{B}$, если всякий раз, когда значение "истина" имеет каждая из формул $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n$, значение "истина" имеет и формула $\mathcal{B}$.

Следует отметить: значки $\models$ и $\supset$ (употребляемые в указанном смысле) не являются *логическими связками*[2].

Другим обозначением *логического следования* формулы $\mathcal{B}$ из формул $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n$ служит запись

$$\frac{\begin{array}{c}\mathcal{A}_1\\ \cdots\\ \mathcal{A}_n\end{array}}{\mathcal{B}} \quad \text{или} \quad \frac{\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n}{\mathcal{B}}.$$

Тавтологии

Среди *формул логики высказываний* особо выделяют те, которые имеют значение "истина" при *любой* комбинации значений входящих в них *высказывательных переменных*. Формулы с таким свойством называют <u>*тавтологиями*</u>[3].

Наглядно это свойство проявляется на примере тавтологии $\mathcal{R}\vee\mathcal{S}\vee\neg\mathcal{R}\vee\neg\mathcal{S}$, позволяющей дать гарантированно сбывающийся прогноз погоды: "*То ли дождик, то ли снег, то ли будет, то ли нет*" (**[15]**, с. 60).

---

[1] H. Sheffer. Trans. Amer. Math. Soc., 1913, v. 14, 481–488.

[2] $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n \models \mathcal{B}$ (или $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n \supset \mathcal{B}$) – это не *формула логики высказываний*.

[3] Греч. $\tau\alpha\upsilon\tau o\lambda o\gamma\iota\alpha$ – *повторение уже прежде сказанного*.

Значение *тавтологий* подчеркивается еще одним их названием — *законы логики высказываний*. Вот самые известные из них (с их классическими названиями):

$\mathcal{A} \vee (\neg\mathcal{A})$ — *закон исключенного третьего* (“tertium non datur”);

$\neg(\mathcal{A} \wedge (\neg\mathcal{A}))$ — *закон противоречия*;

$(\neg(\neg\mathcal{A})) \Leftrightarrow \mathcal{A}$ — *закон двойного отрицания*;

$(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \Leftrightarrow ((\neg\mathcal{B}) \Rightarrow (\neg\mathcal{A}))$ — *закон контрапозиции*;

$((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C})) \Rightarrow (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{C})$ — *закон цепного умозаключения*;

$(\mathcal{A} \wedge (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})) \Rightarrow \mathcal{B}$ — *закон modus ponens*[1];

$((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge (\neg\mathcal{B})) \Rightarrow (\neg\mathcal{A})$ — *закон modus tollens*[1].

Противоположностью *тавтологий* являются *противоречия* — *формулы логики высказываний*, имеющие значение “ложь” при любой комбинации значений (“истина”, “ложь”) входящих в них *высказывательных переменных*. Логическая связка $\neg$, помещенная перед *противоречием*, превращает его в *тавтологию* и наоборот.

Наиболее важными для производства *умозаключений* — вывода из одних высказываний других — являются *тавтологии* с *эквивалентностью* и *импликацией*: на них базируются следующие критерии *взаимозаменяемости* и *логического следования* формул логики высказываний.

1. Для того чтобы формулы логики высказываний $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ были взаимозаменяемы ($\mathcal{A} = \mathcal{B}$), необходимо и достаточно, чтобы формула $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$ была тавтологией.

2. Для того чтобы из двух формул логики высказываний $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ вторая была логическим следствием первой (т. е. $\mathcal{A} \models \mathcal{B}$), необходимо и достаточно, чтобы формула $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ была тавтологией.

2´. Формула логики высказываний $\mathcal{B}$ является логическим следствием формул $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n$ (т. е. $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n \models \mathcal{B}$) тогда и только тогда, когда формула $(\mathcal{A}_1 \wedge \cdots \wedge \mathcal{A}_n) \Rightarrow \mathcal{B}$ есть тавтология.

[1] Лат. modus — *способ*; pono — *устанавливать*; tollo — *устранять*.

<u>*Доказательства*</u>. *1*. Пусть $\mathcal{A} = \mathcal{B}$, т. е. при *всех* комбинациях значений ("истина", "ложь") входящих в формулы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ высказывательных переменных значения ("истина", "ложь") данных формул совпадают. В соответствии с определением действия *логической связки* $\Leftrightarrow$ это означает, что формула $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$ является *тождественно истинной*, т. е. *тавтологией*.

Наоборот, пусть формула $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$ является *тавтологией*, т. е. ее значение есть "истина" при всех комбинациях значений ("истина", "ложь") входящих в эту формулу высказывательных переменных. По самому определению логической связки $\Leftrightarrow$ это возможно лишь в том случае, когда всякий раз значения ("истина", "ложь") формул $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ *совпадают*, т. е. эти формулы *взаимозаменяемы* ($\mathcal{A} = \mathcal{B}$).

2. Пусть $\mathcal{A} \models \mathcal{B}$, т. е. всякий раз, когда формула $\mathcal{A}$ имеет значение "истина", это же значение ("истина") имеет и формула $\mathcal{B}$. В соответствии с определением действия *логической связки* $\Rightarrow$ это означает, что формула $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$ всегда, т. е при *всех* комбинациях входящих в нее (а следовательно и в формулы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$) высказывательных переменных, имеет значение "истина" и потому является *тавтологией*.

Наоборот, пусть формула $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ является *тавтологией*, т. е. при всех значениях входящих в нее высказывательных переменных она имеет значение "истина". В соответствии с определением действия *логической связки* $\Rightarrow$ отсюда следует, что всякий раз, когда значение формулы $\mathcal{A}$ есть "истина", это же значение ("истина") имеет и формула $\mathcal{B}$. формула $\mathcal{B}$ есть *логическое следствие* формулы $\mathcal{A}$.

Доказательство части *2'* критерия проводится теми же рассуждениями, что и в части *2*, с заменой лишь формулы $\mathcal{A}$ формулой $\mathcal{A}_1 \wedge \cdots \wedge \mathcal{A}_n$.

Прямые и косвенные доказательства

По своему строению *математические теоремы* имеют вид *импликаций* $\mathcal{A} \Rightarrow B$, в которых $\mathcal{A}$ (т. е. *посылка*) есть *условие* теоремы, а $\mathcal{B}$ (*заключение*) – ее *утверждение*[1].

Доказательства теорем бывают *прямые* и *косвенные*.

Прямое доказательство теоремы состоит (схематически) в составлении *списка утверждений*, начинает который *условие* теоремы, а продолжают те или иные *истинные утверждения* (уже известные или устанавливаемые по ходу дела), подбор которых во многом предопределяет успех или неуспех доказательства. Собственно *доказательство* – это получение *логических следствий* из составленного списка утверждений[2]; доказательство считается законченным, когда в качестве *логического следствия* получено *заключение* теоремы.

Вот пример теоремы с *прямым* ее доказательством.

Признак делимости на три (на девять). *Если сумма цифр числа*[3] *делится на три* (*на девять*), *то и само число делится на три* (*на девять*).

Доказательство. Список утверждений, на котором строится *доказательство*, открывает *условие* теоремы

$\mathcal{A}_1$: "*Сумма цифр* $m_j + \cdots + m_1 + m_0$ *числа* $m_j \cdots m_1 m_0$ $(= m_j \cdot 10^j + \cdots + m_1 \cdot 10 + m_0)$ *делится на три* (*на девять*)".

Его продолжают утверждения ("теоремы"):

---

[1] Например, суть теоремы "$2 \times 2 = 4$" (см. с. 30, **T1**) состоит в том, что "$2 \overset{\text{def}}{=} 1{+}1,\ 3 \overset{\text{def}}{=} 2{+}1,\ 4 \overset{\text{def}}{=} 3{+}1$" (посылка) $\Rightarrow$ "$2{\times}2 = 4$" (заключение).

[2] В *формальных* теориях (см. с. 7) — по правилам *логического следования* выражающих эти утверждения *логических формул*, в *неформальных* (см. с. 8) — на основе *интуитивной логики*.

[3] Имеются в виду *натуральные* числа, записанные в *десятичной* системе: $m_j \cdots m_1 m_0 = m_j \cdot 10^j + \cdots + m_1 \cdot 10 + m_0$ $(m_0, \ldots, m_1, m_0$ – цифры от 0 до 9).

$\mathcal{A}_2$: *“Разность* $(m_j{\cdot}10^j{+}\cdots{+}m_1{\cdot}10{+}m_0){-}(m_j{+}\cdots{+}m_1{+}m_0)$ *между числом и суммой цифр числа делится на девять”*[1];

$\mathcal{A}_3$: *“Если оба числа* n' *и* n'' *делятся на число* k*, то число* $n'+n''$ *тоже делится на* k*”*[2].

Выбор в утверждении $\mathcal{A}_3$ значений $n'=m_j+\cdots+m_1+m_0$, $n''=m_j\cdot 10^j+\cdots+m_1\cdot 10+m_0$ и $k=3$ $(k=9)$ приводит (с учетом утверждений $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$) к утверждению $\mathcal{B}$: *“Число* $m_j\cdot 10^j+\cdots+m_1\cdot 10+m_0$ *делится на три* (*на девять*)”, как раз и составляющему *утверждение* теоремы.

Замечание. Разумеется, верна (и доказывается по этой же схеме) теорема, *обратная* данной: *“Если число делится на три* (*на девять*) *то и сумма цифр этого числа делится на три* (*на девять*)*”.*

Косвенное доказательство[3] теоремы начинается (как и *прямое*) с составления *списка утверждений*, но только первыми двумя ($\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$) в этом списке стоят *условие* теоремы и *отрицание* ее *утверждения*. Доказательство считается законченным, если в качестве *логических следствий* из составленного списка удается получить два *противоречащих* друг другу утверждения.

Иррациональность числа $\sqrt{2}$. *Если* x *– рациональное число, т. е.* $x=\dfrac{m}{n}$ (*отношение целых чисел*), *то* $x^2\neq 2$.

---

[1] *Доказательство* “теоремы” $\mathcal{A}_2$: *формула разности степеней* (с. 33) позволяет записать *разность* между *числом* и *суммой* его *цифр* в виде

$$(m_j\cdot 10^j+\cdots+m_1\cdot 10+m_0)-(m_j+\cdots+m_1+m_0)=$$
$$=m_j(10^j-1)+\cdots+m_1(10-1)=$$
$$=m_j 9\,(10^{j-1}+\cdots+1)+\cdots+m_1 9.\ \textbf{Q.E.D.}$$

[2] *Доказательство* “теоремы” $\mathcal{A}_3$: если $n'=k\cdot\widetilde{n}'$ и $n''=k\cdot\widetilde{n}''$, то (см. аксиому **А 3** на с. 28) $n'+n''=k\cdot(\widetilde{n}'+\widetilde{n}'')$. **Q.E.D.**

[3] Или *доказательство “от противного”.*

Доказательство (косвенное)[1]. За исходные утверждения берут, соответственно, *условие* теоремы

$\mathcal{A}_1$: “*x – рациональное число* $\left(\text{т. е. } x=\dfrac{m}{n}\right)$”

и *отрицание* ее *заключения*

$\mathcal{A}_2$: “$x^2=2$”,

причем оба эти утверждения можно записать в виде одного

$\mathcal{A}_3$: “$2n^2=m^2$”.

Поскольку $(-x)^2=x^2$ (см. с. 31, **T10**), целые числа m и n в записи $x=\dfrac{m}{n}$ можно считать *положительными*, а так как при сокращении этих чисел на общий множитель равенство $2n^2=m^2$ сохраняется, можно также считать выполненным утверждение

$\mathcal{A}_4$: “*Числа m и n не имеют общих множителей*”.

Далее следует добавить “теорему”

$\mathcal{A}_5$: “*Если квадрат натурального числа k – четное число, то и само число k является четным*”[2].

Из утверждений $\mathcal{A}_3$ и $\mathcal{A}_5$ вытекает утверждение

$\mathcal{A}_6$: “*m – четное число* $(m=2j)$”,

а из утверждений $\mathcal{A}_3$, $\mathcal{A}_6$ и $\mathcal{A}_5$ – сначала утверждение

$\mathcal{A}_7$: “$2n^2=4j^2$ (*а следовательно, n^2 – четное число*)”,

а затем утверждение

$\mathcal{A}_8$: “*n – четное число*”.

Из утверждений $\mathcal{A}_6$ и $\mathcal{A}_8$ вытекает утверждение

$\mathcal{A}_9$: “*Числа m и n имеют общий множитель*”,

противоречащее утверждению $\mathcal{A}_4$. Полученное *противоречие* завершает доказательство теоремы.

---

[1] И подчеркнуто детализированное.

[2] *Доказательство* “теоремы” $\mathcal{A}_5$ (косвенное). Пусть k^2 – *четное* число (*условие* “теоремы”), а $k=2j-1$ – *нечетное* число (*отрицание утверждения* “теоремы”). Возведение в квадрат дает: $k^2=4j^2-4j+1$, т. е. k^2 – *нечетное* число – *противоречие*.

Кванторы и их действия на предикаты

Есть два пути перехода от *высказывательных форм* (*предикатов*) к *высказываниям* (или же *предикатам* с меньшим числом *предметных переменных*). Первый путь состоит в придании входящим в предикат *предметным переменным* (всем или некоторым) тех или иных *конкретных значений*.

Например, в случае *двухместного предиката* "$x < y$"[1] присвоение его *предметным переменным*[2] значений $x = 2$, $y = 3$ переводит этот *предикат* в *высказывание* (истинное) "$2 < 3$"[3], присвоение же конкретного значения (например, $y = 0$) лишь одному из *предметных переменных* превращает данный *двухместный предикат* в *одноместный* "$x < 0$"[4].

Другой путь превращения *предиката* в *высказывание* (или в *предикат* с меньшим числом предметных переменных) состоит в действии на него *кванторами* — записываемыми перед предикатом комбинациями значка $\forall$ (*квантора всеобщности*) или $\exists$ (*квантора существования*) и символа *предметной переменной*, на которую *действует* квантор.

Понятие *кванторов* (от. лат. quanto – *сколько*) было введено в 80-х гг. XIX в. (в трудах немецких и американских логиков) как способ дать *количественную оценку* того *суждения*, которое выражает подвергаемый действию кванторов *предикат*. Общепринятые сейчас *значки кванторов* $\forall$ и $\exists$ (были в ходу и другие) — это перевернутые начальные буквы (в заглавном варианте) нем. и англ. alle, all – *все* и existieren, exist – *существовать*.

<u>*Действие кванторов*</u> (*всеобщности* и *существования*) на *одноместный предикат* $\mathcal{A}(x)$ состоит в следующем.

---

[1] Выражающего *отношение* "быть меньше, чем" (см. с. 24).

[2] Коими в данном случае являются *действительные числа*.

[3] А, соответственно, значений $x = -2$, $y = -3$ — в *высказывание* "$-2 < -3$" (ложное)

[4] Выражающий *свойство* числа "быть отрицательным".

$\forall x \mathcal{A}(x)$ *по определению есть высказвание*, заключающееся в том, что *предикат* $\mathcal{A}(x)$ *превращается в истинное высказывание при подстановке вместо переменной* x *любого (допустимого для данного предиката) ее значения.*

$\exists x \mathcal{A}(x)$ *по определению есть высказвание*, заключающееся в том, что *предикат* $\mathcal{A}(x)$ *превращается в истинное высказывание при подстановке вместо переменной* x *какого-то (по крайней мере, одного) конкретного ее значения.*

Например, *предикат* "$\sin x = 1$" под действием *квантора всеобщности* переходит в *высказывание*[1] $\forall x(\sin x = 1)$, которое *ложно*, тогда как в результате действия на этот предикат *квантора существования* он переходит в *высказывание*[2] $\exists x(\sin x = 1)$, являющееся *истинным*.

Словесная запись действия кванторов многовариантна: слова "любой" и "существует" допускают замену синонимами типа "каков бы ни был", "хотя бы для одного" и т. п.

В случае, если *предметная переменная* предиката $\mathcal{A}(x)$ принимает лишь *конечный*, набор значений $x=a$, $x=b$, ..., $x=p$, действия на предикат $\mathcal{A}(x)$ *кванторов всеобщности* и *существования* сводятся соответственно к *конъюнкции* и *дизъюнкции* высказываний $\mathcal{A}(a)$, $\mathcal{A}(b)$, ..., $\mathcal{A}(p)$:

$$\forall x \mathcal{A}(x) = \mathcal{A}(a) \wedge \mathcal{A}(b) \wedge \cdots \wedge \mathcal{A}(p) \quad \exists x \mathcal{A}(x) = \mathcal{A}(a) \vee \mathcal{A}(b) \vee \cdots \vee \mathcal{A}(p);$$

суть различия левых и правых частей этих равенств в том, что левые части определены и когда переменная x пробегает *бесконечное* множество значений.

Для отделения символов *квантора* от подвергаемого его действию *предиката* могут использоваться только *круглые скобки*: $\forall x(x<y)$, $(\forall x)(x<y)$, $(\exists x)\mathcal{A}(x)$ и т. п.; никакие другие *знаки препинания* (*двоеточия* и проч.) *не допускаются*.

[1] *"Синус любого числа равен единице".*

[2] *"Есть число, синус которого равен единице".*

Иногда удобно *ограничивать* действие кванторов, требуя, чтобы *предметная переменная* (по которой действует квантор) пробегала не *все* множество возможных ее значений, а лишь некоторое его *подмножество*. Квантор в этом случае называют <u>*ограниченным*</u>.

В частности, если значениями *предметных переменных* служат *действительные числа*, необходимость *ограничить* действие кванторов только *положительными* или же *целыми неотрицательными* значениями[1] реализуется записью кванторов в виде $(\forall\sigma)_{\sigma>0}$ и $(\exists\sigma)_{\sigma>0}$ (обычно сокращаемой[2] до $\forall\sigma>0$ и $\exists\sigma>0$, а также договоренностью обозначать латинскими буквами i,j,k,l,m,n (с индексами или без) переменные, принимающие исключительно *целые* (обычно *неотрицательные*) значения.

*Результатом действия на двухместный предикат $\mathcal{A}(x,y)$ квантора всеобщности по переменной x является одноместный предикат $\forall x(\mathcal{A}(x,y))$ (*с предметной переменной *y), имеющий значение "*истина*" в точности для тех значений $y=y_0$, для которых *одноместный предикат* $\mathcal{A}(x,y_0)$ имеет значение "*истина*" при *всех* значениях переменной x.*

Результатом действия на двухместный предикат $\mathcal{A}(x,y)$ квантора существования по переменной x является одноместный предикат $\exists x(\mathcal{A}(x,y))$ (с предметной переменной y), имеющий значение "истина" для тех и только тех значений $y=y_0$, для которых одноместный предикат $\mathcal{A}(x,y_0)$ имеет значение "истина" хотя бы при одном значении переменной x.

---

[1] А такая необходимость часто возникает при записи утверждений *математического анализа*.

[2] Действия таких кванторов на предикат $\mathcal{A}(\sigma)$, записываемые в виде $\forall\sigma>0(\mathcal{A}(\sigma))$ и $\exists\sigma>0(\mathcal{A}(\sigma))$, можно эквивалентно выразить формулами $\forall\sigma(\sigma>0\Rightarrow\mathcal{A}(\sigma))$ и $\exists\sigma(\sigma>0\wedge\mathcal{A}(\sigma))$.

Например, в случае *двухместного предиката* “$x<y$” результатом действия на него *квантора всеобщности* по переменной x является *одноместный предикат* $\forall x(x<y)$, выражающий *свойство* (действительного) числа y “*быть больше любого действительного числа*”. Так как чисел y с таким свойством нет, оба *высказывания* $\exists y\forall x(x<y)$ (“*существует число, бо́льшее любого числа*”) и $\forall y\forall x(x<y)$ (“*любое число больше любого числа*”) *ложные*.

Под действием же *квантора существования* по переменной y двухместный предикат “$x<y$” переходит в *одноместный* $\exists y(x<y)$, выражающий *свойство* (действительного) числа x “*быть меньше некоторого действительного числа*”. Оба *высказывания* $\exists x\exists y(x<y)$ (“*существует число, бо́льшее некоторого числа*”) и $\forall x\exists y(x<y)$ (“*для любого числа существует бо́льшее его число*”) оказываются при этом *истинными*.[1]

Относительно действия кванторов на *многоместные предикаты* можно сформулировать следующее *правило*:

n-местный предикат $\mathcal{A}(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)$ под действием на него кванторов а) всеобщности или б) существования по переменной x_n переходит в $(n-1)$-местные предикаты[2]:

$$\text{а) } (\forall x_n)\mathcal{A}(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) \quad \text{и} \quad \text{б) } (\exists x_n)\mathcal{A}(x_1, \ldots, x_{n-1} x_n);$$

значение “истина” эти предикаты имеют в точности для тех наборов конкретных значений переменных $x_1, \ldots, x_{n-1}$, для которых высказывание $\mathcal{A}(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)$ оказывается истинным соответственно а) при любом и б) хотя бы при одном из допустимых значений переменной x_n.

---

[1] В связи с последним высказыванием стоит отметить, что *аксиому Архимеда* **А 9** (см. с. 29) можно выразить следующей формулой с *ограниченными* кванторами: $\forall a>0\exists n(a<n)$.

[2] Для которых x_n уже не является *предметной переменной*.

Формулы логики предикатов

Формулами логики предикатов называют конструкции, создаваемые из *предикатных переменных* (место которых могут занимать конкретные предикаты) по тем же правилам, что и *формулы логики высказываний* (см. с. 273), но с участием не только *логических связок*, но и *символов действий кванторов*[1].

Примером *формулы логики предикатов* может служить определение так называемого *квантора существования и единственности*, в качестве символа которого используют сочетание $\exists!$ символов *квантора существования* $\exists$ и *предиката определенности* ! (*“определено”*)[2]:

$$\exists! x \mathcal{A}(x) \overset{\text{def}}{=} \bigl(\exists x \mathcal{A}(x)\bigr) \wedge \Bigl(\forall x \forall y \bigl((\mathcal{A}(x) \wedge \mathcal{A}(y)) \Rightarrow (x = y)\bigr)\Bigr);$$

в соответствии с этим описанием результатом действия квантора $\exists! x$ на *одноместный предикат* $\mathcal{A}(x)$ есть *высказывание*: *“существует значение переменной x, при котором $\mathcal{A}(x)$ есть “истина”, и это значение x является единственным”*.

В качестве другого примера можно предложить формульное определение *периодической* *функции* $y = f(x)$:

$$\exists x\bigl(!f(x)\bigr) \wedge \exists t\Bigl(t \neq 0 \wedge \forall x\Bigl(!f(x) \Rightarrow \bigl(f(x+t) = f(x) \wedge f(x-t) = f(x)\bigr)\Bigr)\Bigr)$$

(первая часть формулы говорит о том, что *множество определения* функции *не пусто*, а вторая – что у этой функции есть *период*).

Предметные переменные, входящие в *формулу логики предикатов*, разделяют на *связаные* (тем или иным *квантором*) и *свободные* – те, на которые в данной формуле действие кванторов не распространяется. Формула, в которой все переменные являются *связанными*, есть *высказывание*.

---

[1] По этой причине *формулы логики предикатов* называют еще *кванторными формулами*.

[2] Если x – *предметная переменная*, а f – символ *функции*, то запись $!f(x)$ означает: *“определено значение $f(x)$”*.

Например, в вышеприведенной формуле, задающей определение *периодической функции*, переменные (числовые) x и t являются *связанными*, а переменная f (функциональная) — *свободной*. Те значения этой *функциональной переменной*, для которых записанная формула имеет значение "истина", и есть *периодические функции*.

Формулами логики предикатов можно выразить так называемые *категорические суждения* аристотелевого учения о *силлогизмах*[1] [**1**], не допускающие выражения в виде *формул логики высказываний*:

"$\mathcal{A}$ присуще всем $\mathcal{B}$" (*общеутвердительное суждение*):

$\forall x\big(\mathcal{B}(x) \Rightarrow \mathcal{A}(x)\big)$;

"$\mathcal{A}$ не присуще ни одному $\mathcal{B}$" (*общеотрицательное суждение*):

$\forall x\big(\mathcal{B}(x) \Rightarrow \neg\mathcal{A}(x)\big)$;

"$\mathcal{A}$ присуще некоторым $\mathcal{B}$" (*частноутвердительное суждение*):

$\exists x\big(\mathcal{B}(x) \wedge \mathcal{A}(x)\big)$;

"$\mathcal{A}$ не присуще некоторым $\mathcal{B}$" (*частноотрицательное суждение*):

$\exists x\big(\mathcal{A}(x) \wedge \neg\mathcal{B}(x)\big)$;

здесь $\mathcal{A}(x)$ и $\mathcal{B}(x)$ – *одноместные предикаты*, выражающие *свойства* предмета (индивида) x обладать соответственно признаком $\mathcal{A}$ или $\mathcal{B}$.

Понятия *взаимозаменяемости* и *логического следования* для *формул логики предикатов* вводятся так же, как и для *формул логики высказываний* — путем сравнения их значений для всевозможных комбинаций значений входящих в них переменных.

Простейшие примеры *взаимозаменяемости* формул логики предикатов отражают свойство *перестановочности* рядом стоящих *одноименных* кванторов:

$$\forall x \forall y \mathcal{A}(x,y) = \forall y \forall x \mathcal{A}(x,y), \;\; \exists x \exists y \mathcal{A}(x,y) = \exists y \exists x \mathcal{A}(y,x);$$

логическое следование иллюстрируют примеры:

$$\forall x \mathcal{A}(x) \models \mathcal{A}(a), \qquad \mathcal{A}(a) \models \exists x \mathcal{A}(x),$$ [2]

а также

$$\exists x \forall y \mathcal{A}(x,y) \models \forall y \exists x \mathcal{A}(y,x);$$

---

[1] Греч. $\sigma\iota\lambda\lambda o\gamma\acute{\iota}\zeta o\mu\alpha\iota$ – *делать умозаключения*.

[2] Где a — какое-либо *конкретное* значение *переменной* x.

то, что формулы $\exists x\forall y\mathcal{A}(x,y)$ и $\forall y\exists x\mathcal{A}(y,x)$ не являются *взаимозаменяемыми*, видно на примере $\mathcal{A}(x,y) =$ “$x<y$”[1].

В сжатом виде правила обращения с *формулами логики предикатов* можно свести к следующим положениям.

1. При действии на n-местный предикат стоящего перед ним в формуле *квантора* одна из *предметных переменных* этого предиката (та, по которой действует квантор), *связывается, в то время как остальные образуют набор предметных переменных* образующегося $(n-1)$-*местного предиката, который в свою очередь может быть подвергнут действию квантора или логической связки.*

Иллюстрацией может служить символическая запись *аксиомы* **А6** из списка аксиом, определяющих *систему действительных чисел*[2]: $\forall a\forall b\big((a\neq 0)\Rightarrow \exists! x(ax=b)\big)$.

В этой формуле *трехместный предикат* $(ax = b)$ под действием *квантора существования и единственности* переходит в *двухместный предикат* $\exists! x(ax = b)$ (с *предметными переменными* a и b); в соединении (*связкой* $\Rightarrow$) с *одноместным предикатом* $(a \neq 0)$ он образует *двухместный предикат* $\big((a \neq 0) \Rightarrow \exists! x(ax = b)\big)$, который под действием двух *кванторов всеобщности* переходит в *высказывание*, выражающее суть *аксиомы* **А6**: “*Каковы бы ни были действительные числа a и b, если $a \neq 0$, то существует единственное действительное число x, для которого $ax=b$*”.

---

[1] Другим свидетельством этого факта служит различие свойств *непрерывности* и *равномерной непрерывности* функции на множестве (см. с. 149–150): из *равномерной непрерывности* функции на множестве вытекает ее *непрерывность* на этом множестве. Обратное же верно лишь для *некоторых* множеств (см. с. 150–152, 153).

[2] См. с. 29. Можно обойтись без *квантора существования и единственности*, записав формулу в виде

$$\forall a\forall b\Big((a\neq 0)\Rightarrow \big(\exists x(ax=b)\wedge \forall y\forall z\big((ay=b)\wedge(az=b)\Rightarrow(y=z)\big)\big)\Big).$$

2. Любая связываемая действием квантора предметная переменная допускает любое переобозначение (*всюду в формуле, где она подвергается действию квантора*):

$$\big(\exists x \mathcal{A}(x)\big) \wedge \Big(\forall x \forall y \big((\mathcal{A}(x) \wedge \mathcal{A}(y)) \Rightarrow (x = y)\big)\Big) =$$
$$= \big(\exists w \mathcal{A}(w)\big) \wedge \Big(\forall u \forall v \big((\mathcal{A}(u) \wedge \mathcal{A}(v)) \Rightarrow (u = v)\big)\Big).$$

3. Рядом стоящие в формуле одноименные кванторы можно менять местами. Переставлять же рядом стоящие разноименные кванторы (*а также кванторы, разделенные частями формулы*) *нельзя.*

Прокомментировать это (уже отмечавшееся выше) правило можно сравнение *формул* $\exists\delta\forall\varepsilon\mathcal{A}(\varepsilon,\delta)$ и $\forall\varepsilon\exists\delta\mathcal{A}(\varepsilon,\delta)$.

Высказывание, которое выражает *формула*[1] $\exists\delta\forall\varepsilon\mathcal{A}(\varepsilon,\delta)$, является *истинным* в том и только в том случае, когда $\mathcal{A}(\varepsilon,\delta)$ есть “истина” для *какого-то* значения δ *сразу для всех* значений ε; *истинность* же *высказывания*, выражаемого формулой $\forall\varepsilon\exists\delta\mathcal{A}(\varepsilon,\delta)$, означает, что $\mathcal{A}(\varepsilon,\delta)$ есть “истина” для *произвольно взятого* значения ε и *какого-то* (уже, возможно, *зависящего* от взятого значения ε) значения δ.

Следует подчеркнуть: то, что в последнем случае переменная δ оказывается (вообще говоря) *функцией* переменной ε, сообщается самим строением *формулы* $\forall\varepsilon\exists\delta\mathcal{A}(\varepsilon,\delta)$, и внесение непосредственно в *формулу* указания[2] $\delta = \delta(\varepsilon)$, является не просто излишним, но прямым нарушением норм символической записи.

4. Квантор и стоящую перед ним связку отрицания можно поменять местами, заменяя квантор на противоположный (*квантор существования на квантор всеобщности и наоборот*):

---

[1] Для конкретного *двухместного предиката* $\mathcal{A}(\varepsilon,\delta)$.

[2] Да еще с постановкой за ним (для “большей выразительности”) *двоеточия*, *не входящего* в алфавит символического языка.

$$\neg\forall x\exists y\mathcal{A}(x,y)=\exists x\neg\exists y\mathcal{A}(x,y)=\exists x\forall y\neg A(x,y).$$

Это правило вкупе с правилами отрицания формул логики высказываний (см. с. 273–275) позволяет чисто механически переходить от *утверждений* (при записи их *формулами логики предикатов*) к *отрицаниям* этих утверждений; вне *формульной записи* этот переход может оказаться не таким простым и таит опасность ошибок. Вот, например, построение *отрицания* утверждения "*существует единственное значение* x, *обладающее свойством* $\mathcal{A}(x)$" (см. с. 286):

$$\begin{aligned}\neg\exists!x\mathcal{A}(x)&=\neg\Big(\big(\exists x\mathcal{A}(x)\big)\wedge\big(\forall x\forall y\big((\mathcal{A}(x)\wedge\mathcal{A}(y))\Rightarrow(x=y)\big)\big)\Big)=\\&=\big(\neg\exists x\mathcal{A}(x)\big)\vee\big(\neg\forall x\forall y\big((\mathcal{A}(x)\wedge\mathcal{A}(y))\Rightarrow(x=y)\big)\big)=\\&=\big(\forall x\neg\mathcal{A}(x)\big)\vee\big(\exists x\exists y\neg\big((\mathcal{A}(x)\wedge\mathcal{A}(y))\Rightarrow(x=y)\big)\big)=\\&=\big(\forall x\neg\mathcal{A}(x)\big)\vee\big(\exists x\exists y\big(\mathcal{A}(x)\wedge\mathcal{A}(y)\wedge(x\neq y)\big)\big)\end{aligned}$$

("*либо свойство* $\mathcal{A}(x)$ *не выполняется ни для одного значения переменной* x, *либо существуют* (*по крайней мере*) *два разных значения этой переменной, обладающие данным свойством*").

Перечисленные правила описывают (да и то весьма поверхностно) лишь наиболее элементарную часть *исчисления предикатов* – теоретической основы *символической записи* математических утверждений. На более высоком уровне различают не один, а целый спектр *символических языков*, специализированных по отдельным математическим теориям, различающиеся по уровню сложности, возможностям и выразительности[1].

---

[1] Подробно об этом можно прочитать, например, у Д. Гильберта и П. Бернайса [**5**], А. Н. Колмогорова и А. Г. Драгалина [**10**], Ю. И. Манина [**15**], Э. Мендельсона [**17**], Р. Р. Столла [**21**]. Знающие люди считают необходимым предварительно прочесть Введение из книги А. Черча [**26**] (это Введение занимает 49 страниц убористого текста, и его сопровождают 45 страниц примечаний).

Символический язык, применяемый в анализе

Для формульной записи утверждений математического анализа весьма удобным и легко усвояемым начинающими оказывается "просторечный диалект" языка L_1Real – символического языка *первого* порядка, значениями *предметных переменных* в котором являются *действительные числа*.

Его <u>*алфавит*</u> (набор допустимых *символов*) составляют:

символы (действительных) *переменных* и *констант*[1];

символы функций (любого числа переменных)[2];

символы предикатов: *одноместных*, выражающих *свойства*[3], и *двухместных*, выражающих *отношения*[4];

логические связки[5] $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ и *кванторы* $\forall, \exists$.

скобки: *открывающая* (и *закрывающая*)[6].

---

[1] Ими служат строчные буквы латинского и греческого алфавитов (снабженные индексами, штрихами и проч. или без них); причем для *констант* чаще используют буквы начальной части латинского алфавита, а также обычную *цифровую* запись. *Константа* – это фиксированное *действительное число*, тогда как *переменная* пробегает (если не оговорено противное) множество всех *действительных чисел*.

[2] Обычно это буквы $f, g, \varphi, \psi, \ldots$ (с дополнительными значками или без них), а также привычные специальные символы: $\sin, \exp, \sqrt{\ }$ и т. п. *Операции* (сложения, умножения, ...), являющиеся частными случаями *функций* (двух переменных) имеют обычные обозначения. *Константы* можно понимать как "функции без переменных".

[3] Например, *свойство "быть положительным"* обозначается символом >0, а *свойство "быть элементом"* – символом $\in$. Записи любого *свойства* можно придать вид $\in A$, где A – множество всех тех значений переменной ("свободной" или "зависимой"), для которых выполняется данное *свойство* (в частности, вместо $x>0$ иногда пишут $x\in\mathbb{R}_+$).

[4] *Равенства* $=$, *быть больше* $>$ и т. п.; $x\neq y$ есть сокращенная запись предиката $\neg(x=y)$.

[5] Варианты их написания приведены на с. 272.

[6] А также *запятые* и *многоточия* (в записях типа $f(x_1,\ldots,x_n)$).

Символы *переменных* и *констант* вместе с составляемыми по обычным правилам *комбинациями* этих символов с символами *функций*[1] образуют набор *термов*[2] языка. Сочетания же *термов* с символами *предикатов*, *логическими связками* и *кванторами* (по правилам составления *формул логики предикатов* (см. с. 286)) образуют *формулы* языка, оперировать которыми надлежит по правилам, частично представленным на с. 288–290 (и подробно излагаемым в [**5**, **10**, **15**, **17**, **21**, **26**]). В совокупности все упомянутые здесь правила составляют *синтаксис*[3] языка.

Термин "язык *первого* порядка" имеет тот смысл, что *кванторы* (в формулах языка) могут действовать лишь по *предметным переменным*, но не по *переменным функциям* и *переменным предикатам* (*свойствам* и *отношениям*).

Это требование ограничивает выразительные возможности языка. Не удается, например, дать *формульную запись аксиомы непрерывности* (см. с. 30), определений *предела* и *непрерывности* функции в точке "через последовательности" (см. с. 109, 110) и даже утверждения "*z есть натуральное число*"[4].

Замечание *1*. Сократить запись формул позволяет использование *ограниченных кванторов* (см. с. 284).

Замечание *2*. Возможно допущение *комплексных* значений переменных и констант. Дело в том, что любой терм (математическое выражение) с *комплексными* величинами

---

[1] В том числе *операций*.

[2] Попросту говоря, *математических выражений*.

[3] Греч. $\sigma\iota\nu\tau\alpha\xi\iota\varsigma$ – *построение, порядок*.

[4] Его формульная запись $\forall X\big((1\in X)\wedge\forall x(x\in X\Rightarrow x{+}1\in X)\Rightarrow z\in X\big)$ ("*каким бы ни было множество действительных чисел, из того, что этому множеству принадлежит единица, и вместе с любым числом ему принадлежит и сумма этого числа с единицей, следует, что этому множеству принадлежит и число z*") включает *запрещенное* (в языке L_1Real) действие квантора по *переменному подмножеству* $X\subset\mathbb{R}$.

можно выразить через *действительные* величины. Например, если $z=x+iy$, а $z_0=x_0+iy_0$, то терм $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$ есть эквивалентная запись терма $|z-z_0|$.

Пример. Из символов *переменной* x, *констант* a и b, *функций* f и $|\ |$ (модуль) и операции *вычитания* можно составить *термы* $|x-a|$ и $|f(x)-b|$. Добавив к ним *термы* (символы *переменных*) δ и ε (оговарив, что допустимыми значениями этих *переменных* являются *положительные* числа), их можно скомбинировать с символом *отношения* $<$, и *логической связкой* $\Rightarrow$, получив *формулу* $(0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-b|<\varepsilon)$. Присоединив к ней (посредством *логических связок* $\wedge$ и $\Rightarrow$) *формулы* $\varepsilon>0$, $\delta>0$ и действуя *кванторами*, можно сконструировать *формулу*[1]

$$\forall\varepsilon\big(\varepsilon>0 \Rightarrow \exists\delta(\delta>0 \wedge \forall x(0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-b|<\varepsilon))\big),$$

означающую по определению (см. с. 101), что "*число b является пределом функции $y=f(x)$ при стремлении переменной x к числу a (или пределом этой функции в точке a)*".

Разумеется, не все (правильно составленные) *формулы* языка являются содержательными, т. е. несут какой-либо смысл[2]. Способность составлять *синтаксически правильные* и *осмысленные символические формулы* есть такой же необходимый элемент современного математического образования, как умение грамотно и толково изъясняться (хотя бы на родном языке) для цивилизованного человека.

---

[1] Или в эквивалентной записи с *ограниченными* кванторами

$$\forall\varepsilon>0\,\exists\delta>0\,\forall x(0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-b|<\varepsilon).$$

[2] Подобно тому как отнюдь не всякий набор записанных друг за другом *букв* (например, русского алфавита) является *словом* (русского языка), так же как не всякий грамматически правильно составленный набор слов оказывается осмысленным предложением. Подробно о смысле математических текстов можно прочитать у Ю.И.Манина ([**15**], с. 150–160).

Приложение II

Примеры символической записи в анализе

В соответствии с принятым *алфавитом* (см. с. 291) будут использоваться следующие обозначения.

Строчные латинские и греческие буквы (с индексами и без) служат символами *действительных*[1] *переменных* и *констант*. Исключение составляют буква f, используемая как символ *функции*, а также буквы i (если это не *мнимая единица*), j, k, l, m, n, считающиеся символами *целых неотрицательных* переменных и констант. Заглавными латинскими буквами обозначаются *множества* действительных чисел.

Формулы $\neg(x = y)$, $\neg(x < y)$, $\neg(x > y)$ и $\neg(x \in X)$ (*отрицания* отношений *равенства*, *меньше*, *больше* и свойства *принадлежности*) сокращенно записываются в виде[2] $x \neq y$, $x \geqslant y$, $x \leqslant y$ и $x \notin X$.

Запись $!f(a)$ (*предикат определенности*) подразумевает: “*для функции* $y = f(x)$ *определено значение* $f(a)$”.

Следует учитывать особенность[3] построения *отрицаний* формул (например, неравенств), если в них входят *функции*:

$$\neg(a \leqslant b) = (a > b),$$

тогда как

$$\neg(f(a) \leqslant b) = (f(a) > b) \vee \neg(!f(a));$$

Дело в том, что запись $f(a) \leqslant b$ фактически есть сокращенная запись утверждения “*значение* $f(a)$ *определено, и оно не больше* b”, выражаемого формулой $(!f(a)) \wedge (f(a) \leqslant b)$; *отрицанием* же последней формулы как раз и является формула $\neg(!f(a)) \vee (f(a) > b)$.

---

[1] А иногда *комплексных* (см. с. 292, замечание *2*).

[2] *Скобки* в формулах ставятся лишь по мере необходимости.

[3] Уже обсуждавшуюся в сноске на с. 102.

1. “*Для множества* X *число* a *служит* <u>*нижней границей*</u>”:

$$\forall x(x \in X \Rightarrow a \leqslant x).$$

1′. “*Число* a <u>*не является нижней границей*</u> *для множества* X” (*отрицание* предыдущего)[1]:

$$\exists x(x \in X \wedge x < a).$$

2. “*Множество* X <u>*ограничено снизу*</u>” (*имеет нижнюю границу*):

$$\exists a \forall x(x \in X \Rightarrow a \leqslant x).$$

2′. “*Множество* X <u>*не ограничено сверху*</u>”:

$$\forall a \exists x(x \in X \wedge x < a).$$

3. “*Для множества* X *число* b *служит* <u>*верхней границей*</u>”:

$$\forall x(x \in X \Rightarrow x \leqslant b).$$

3′. “*Число* b <u>*не является верхней границей*</u> *для множества* X”:

$$\exists x(x \in X \wedge x > b).$$

4. “*Множество* X <u>*ограничено сверху*</u>”:

$$\exists b \forall x(x \in X \Rightarrow x \leqslant b).$$

4′. “*Множество* X <u>*не ограничено сверху*</u>”:

$$\forall b \exists x(x \in X \wedge x > b).$$

5. “*Множество* X <u>*ограничено*</u>”:

$$\exists a \exists b \forall x(x \in X \Rightarrow a \leqslant x \leqslant b)^2 \text{ (или } \exists c > 0 \forall x(x \in X \Rightarrow |x| \leqslant c))^3.$$

5′. “*Множество* X <u>*не ограничено*</u>”:

$$\forall a \forall b \exists x(x \in X \wedge (x < a \vee x > b)) \text{ (или } \forall c > 0 \exists x(x \in X \wedge |x| > c))^2.$$

6. “*Число* $\overline{\mathrm{x}}$ *есть* <u>*точная верхняя грань*</u> *множества* X” $\left(\overline{\mathrm{x}} = \sup X\right)$:

$$(\forall x(x \in X \Rightarrow x \leqslant \overline{\mathrm{x}})) \wedge (\forall \varepsilon > 0 \exists x(x \in X \wedge x > \overline{\mathrm{x}} - \varepsilon)).$$

---

[1] С учетом правила $\neg(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) = \mathcal{A} \wedge (\neg \mathcal{B})$ (см. с. 274).

[2] $a \leqslant x \leqslant b$ есть краткая запись формулы $(a \leqslant x) \wedge (x \leqslant b)$.

[3] В этом варианте записи x может быть *комплексной* переменной (соответственно X – множеством *комплексных* чисел).

Сформулировать на языке *первого* порядка *теорему*: *“Любое непустое и ограниченное сверху множество имеет точную верхнюю грань”* (с. 42) не удается, поскольку не обойтись без запрещенного в языках *первого* порядка действия *квантора* по *переменному множеству*:

$$\forall X\big((\exists x(x\in X)\wedge\exists b\forall x(x\in X\Rightarrow x\leqslant b)\big)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\exists\overline{\mathrm{x}}\big((\forall x(x\in X\Rightarrow x\leqslant\overline{\mathrm{x}}))\wedge(\forall\varepsilon>0\,\exists x(x\in X\wedge x>\overline{\mathrm{x}}-\varepsilon))\big).$$

6′. “Число $\overline{\mathrm{x}}$ не является <u>точной верхней гранью</u> множества X”[1]:

$$(\exists x(x\in X\wedge x>\overline{\mathrm{x}}))\vee(\exists\varepsilon>0\forall x(x\notin X\vee x\leqslant\overline{\mathrm{x}}-\varepsilon)).$$

7. “Число $\underline{\mathrm{x}}$ есть <u>точная нижняя грань</u> множества X” $\big(\underline{\mathrm{x}}=\inf X\big)$:

$$(\forall x(x\in X\Rightarrow\overline{\mathrm{x}}\leqslant x))\wedge(\forall\varepsilon>0\exists x(x\in X\wedge x<\underline{\mathrm{x}}+\varepsilon)).$$

8. “a есть <u>внутренняя</u> точка *множества A”* (*имеет окрестность, принадлежащую этому множеству*):

$$\exists\delta>0\forall x(|x-a|<\delta\Rightarrow x\in A).$$

8′. “a не является <u>внутренней</u> точкой *множества A”*:

$$\forall\delta>0\exists x(|x-a|<\delta\wedge x\notin A).$$

9. “Множество A является <u>открытым</u>” (*каждая его точка является внутренней*):

$$\forall a\big(a\in A\Rightarrow\exists\delta>0\forall x(|x-a|<\delta\Rightarrow x\in A)\big).$$

10. “Точка a является <u>граничной</u> для *множества A”* (*в любой ее окрестности* есть точка, *принадлежащая* множеству A, *и точка, ему не принадлежащая*):

$$\forall\delta>0\,\exists x\,\exists y\big(|x-a|<\delta\wedge|y-a|<\delta\wedge x\in A\wedge y\notin A).$$

11. “Точка a является <u>предельной</u> точкой[2] *для множества A”* (*в любой ее окрестности есть отличная от нее точка, принадлежащая множеству A*):

---

[1] *Либо $\overline{\mathrm{x}}$ не является верхней границей для множества X, либо у множества X есть верхняя граница, меньшая, чем $\overline{\mathrm{x}}$.*

[2] Иногда называемой еще *точкой <u>сгущения</u>, точкой <u>накопления</u>.*

$$\forall\delta>0\,\exists x\big(0<|x-a|<\delta\wedge x\in A\big).$$

12. “*a есть* <u>*изолированная*</u> точка множества A” (*существует окрестность* точки a, в которой, эта точка является *единственной*, принадлежащей множеству A):

$$\exists\delta>0\,\forall x\big((|x-a|<\delta\wedge x\in A)\Rightarrow(x=a)\big).$$

13. “A – <u>*дискретное*</u> множество” (*каждая его точка является изолированной*):

$$\forall a\big(a\in A\Rightarrow\exists\delta>0\,\forall x\big((|x-a|<\delta\wedge x\in A)\Rightarrow(x=a)\big)\big).$$

14. “*Множество* $I\subset\mathbb{R}$ *является* <u>*промежутком*</u>”:

$$\big(\exists x\exists y(x\in I\wedge y\in I\wedge x\neq y)\big)\wedge$$
$$\wedge\big(\forall x\forall y(x\in I\wedge y\in I\wedge x<y)\Rightarrow\forall t(x<t<y\Rightarrow t\in I)\big),$$

или

$$\big(\exists x\exists y(x\in I\wedge y\in I\wedge x\neq y)\big)\wedge$$
$$\big(\forall x\forall y\forall\theta(x\in I\wedge y\in I\wedge 0<\theta<1)\Rightarrow\theta x+(1-\theta)\in I\big)^1.$$

15. “*Последовательность* (действительных чисел) $\{x_n\}$ <u>*ограничена*</u> а) <u>*снизу*</u>, б) <u>*сверху*</u>”:

$$\text{а) }\exists a\forall n(a\leqslant x_n),\qquad \text{б) }\exists b\forall n(x_n\leqslant b).$$

15′. “*Последовательность* (действительных чисел) $\{x_n\}$ <u>*не ограничена*</u> а) <u>*снизу*</u>, б) <u>*сверху*</u>”:

$$\text{а) }\forall a\exists n(x_n<a),\qquad \text{б) }\forall b\exists n(x_n>b).$$

16. “*Последовательность* $\{x_n\}$ <u>*ограничена*</u>”:

$$\exists a\exists b\forall n(a\leqslant x_n\leqslant b)^2,\qquad \exists c>0\,\forall n(|x_n|\leqslant c)^3.$$

16′. “*Последовательность* $\{x_n\}$ <u>*не ограничена*</u>”:

$$\forall a\forall b\exists n(x_n<a\vee x_n>b)^2,\qquad \forall c>0\exists n(|x_n|>c)^3.$$

---

[1] *Множество* I *содержит более одной точки, и вместе с каждыми двумя принадлежащими ему точками содерит и все точки, промежуточные между ними.*

[2] Только для последовательностей $\{x_n\}$ *действительных* чисел.

[3] Для последовательностей $\{x_n\}$ как *действительных*, так и *действительных* или *мнимых* (т. е. *комплексных*) чисел.

17. “*Последовательность* (*действительных чисел*) $\{x_n\}$ *является* *<u>монотонной</u>*: *а*) *<u>возрастающей</u>*, *б*) *<u>неубывающей</u>*, *в*) *<u>убывающей</u>*, *г*) *<u>невозрастающей</u>*”:

$$\text{а) } \forall n(x_n < x_{n+1}), \quad \text{б) } \forall n(x_n \leqslant x_{n+1}),$$
$$\text{в) } \forall n(x_n > x_{n+1}), \quad \text{г) } \forall n(x_n \geqslant x_{n+1}).$$

17′. “*Последовательность* (*действительных чисел*) $\{x_n\}$ *<u>не является монотонной</u>*”:

$$\exists n \exists m(x_n < x_{n+1} \land x_m > x_{m+1}).$$

17″. “*Последовательность* (*действительных чисел*) $\{x_n\}$ *является* *<u>возрастающей</u>*, начиная с некоторого номера”:

$$\exists n_0 \forall n(n > n_0 \Rightarrow x_n < x_{n+1}).$$

18. “*Число* x *является* *<u>пределом</u>* последовательности $\{x_n\}$” $\big(x = \lim x_n\big)$:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n(n > n_0 \Rightarrow |x_n - x| < \varepsilon).$$

19. “*Последовательность* $\{x_n\}$ *является* *<u>сходящейся</u>*”:

$$\exists x \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n(n > n_0 \Rightarrow |x_n - x| < \varepsilon).$$

19′. “*Последовательность* $\{x_n\}$ *является* *<u>расходящейся</u>*” (*отрицание* предыдущего):

$$\forall x \exists \varepsilon > 0 \forall n_0 \exists n(n > n_0 \land |x_n - x| \geqslant \varepsilon).$$

20. “$\{x_n\}$ – *<u>бесконечно малая</u>* последовательность”:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n(n > n_0 \Rightarrow |x_n| < \varepsilon).$$

21. “$\{x_n\}$ – *<u>бесконечно большая</u>* последовательность” $\big(\lim x_n = \infty\big)$:

$$\forall \mu > 0 \exists n_0 \forall n(n > n_0 \Rightarrow |x_n| > \mu).$$

22. “*Последовательность* (*действительных чисел*) $\{x_n\}$ *имеет* *<u>бесконечный предел</u>* $+\infty$”[1] $\big(\lim x_n = +\infty\big)$:

$$\forall \mu > 0 \exists n_0 \forall n(n > n_0 \Rightarrow x_n > \mu).$$

---

[1] Или, как еще говорят, “*расходится к* $+\infty$”.

23. "*Последовательность (действительных чисел) $\{x_n\}$ имеет* <u>*бесконечный предел*</u> $-\infty$"[1] $\big(\lim x_n = -\infty\big)$:

$$\forall\mu>0\,\exists n_0\forall n\,(n>n_0\Rightarrow x_n<-\mu).$$

24. "*Число x является* <u>*предельной точкой*</u> (<u>*частичным пределом*</u>) последовательности $\{x_n\}$"[2]:

$$\forall\varepsilon>0\,\forall n_0\,\exists n\,(n>n_0\wedge|x_n-x|<\varepsilon).$$

24′. "*Число x* <u>*не является предельной точкой*</u> (<u>*частичным пределом*</u>) последовательности $\{x_n\}$"[3]:

$$\exists\varepsilon>0\,\exists n_0\forall n\,(n\leqslant n_0\vee|x_n-x|\geqslant\varepsilon).$$

25. "*Число $\overline{x}$ есть* <u>*точная верхняя грань*</u> последовательности (действительных чисел) $\{x_n\}$" $\big(\overline{x}=\sup x_n\big)$:

$$\big(\forall n\,(x_n\leqslant\overline{x})\big)\wedge\big(\forall\varepsilon>0\,\exists n\,(x_n>\overline{x}-\varepsilon)\big).$$

26. "*Число $\overline{x}$ является* <u>*верхним пределом*</u> последовательности (действительных чисел) $\{x_n\}$" $\big(\overline{x}=\overline{\lim}x_n=\limsup x_n\big)$:

$$\forall\varepsilon>0\Big(\big(\forall n_0\,\exists n\,(n>n_0\wedge|x_n-\overline{x}|<\varepsilon)\big)\wedge$$
$$\wedge\big(\exists n_0\forall n\,(n>n_0\Rightarrow x_n<\overline{x}+\varepsilon)\big)\Big)^4.$$

27. Утверждения "$\sup x_n = +\infty$" и "$\overline{\lim}x_n = +\infty$" (или "$\limsup x_n = +\infty$") для последовательности (действительных чисел) $\{x_n\}$ *равносильны* и выражаются формулой

$$\forall\mu>0\,\exists n\,(x_n>\mu).$$

---

[1] Или, как еще говорят, "*расходится к* $-\infty$".

[2] *В любой окрестности точки x есть элементы последовательности $\{x_n\}$ со сколь угодно большими номерами.*

[3] *Существует окрестность точки x, в которую попадает не более конечного числа элементов последовательности $\{x_n\}$.*

[4] *Какова бы ни была окрестность точки $\overline{x}$, в ней есть элементы последовательности $\{x_n\}$ со сколь угодно большими номерами, при этом справа от этой окрестности может находиться не более конечного числа элементов этой последовательности.*

28. “*Число* $\underline{x}$ *есть* <u>*точная нижняя грань*</u> *последовательности* (*действительных чисел*) $\{x_n\}$” $\left(\underline{x} = \inf x_n\right)$:

$$\left(\forall n\,(x_n \geqslant \underline{x})\right) \wedge \left(\forall \varepsilon > 0\, \exists n\,(x_n < \underline{x} + \varepsilon)\right).$$

29. “*Число* $\underline{x}$ *является* <u>*нижним пределом*</u> *последовательности* (*действительных чисел*) $\{x_n\}$” $\left(\underline{x} = \underline{\lim} x_n = \liminf x_n\right)$:

$$\forall \varepsilon > 0 \left(\left(\forall n_0\, \exists n\,(n > n_0 \wedge |x_n - \underline{x}| < \varepsilon)\right) \wedge \right.$$
$$\left. \wedge \left(\exists n_0 \forall n\,(n > n_0 \Rightarrow x_n > \underline{x} - \varepsilon)\right)\right)^1.$$

30. Утверждения “$\inf x_n = -\infty$” и “$\underline{\lim} x_n = -\infty$” (или “$\liminf x_n = -\infty$”) для последовательности (действительных чисел) $\{x_n\}$ *равносильны* и выражаются формулой

$$\forall \mu > 0\, \exists n\,(x_n < -\mu).$$

31. “$\{x_n\}$ – <u>*фундаментальная*</u> *последовательность*”:

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists n_0 \forall n \forall j\,(n > n_0 \Rightarrow |x_n - x_{n+j}| < \varepsilon),$$

или

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists n_0 \forall n \forall m\,(n > n_0 \wedge m > n_0 \Rightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon).$$

31′. “*Последовательность* $\{x_n\}$ <u>*не является фундаментальной*</u>”:

$$\exists \varepsilon > 0\, \forall n_0 \exists n \exists j\,(n > n_0 \wedge |x_n - x_{n+j}| \geqslant \varepsilon),$$

или

$$\exists \varepsilon > 0\, \forall n_0 \exists n \exists m\,(n > n_0 \wedge m > n_0 \wedge |x_n - x_m| \geqslant \varepsilon).$$

<u>Замечание *1*</u>. Сформулировать на языке *первого* порядка *критерий Коши*: “*Для того, чтобы последовательность* $\{x_n\}$ *была сходящейся, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной*” (см. с. 91) не удается, поскольку не обойтись без запрещенного в языках *первого* порядка действия *квантора* по *переменной функции*[2]:

$$\forall \{x_n\} \left(\left(\exists x \forall \varepsilon > 0\, \exists n_0 \forall n\,(n > n_0 \Rightarrow |x_n - x| < \varepsilon)\right) \Leftrightarrow \right.$$
$$\left. \Leftrightarrow \left(\forall \varepsilon > 0\, \exists n_0 \forall n \forall j\,(n > n_0 \Rightarrow |x_n - x_{n+j}| < \varepsilon)\right)\right).$$

---

[1] *Какова бы ни была окрестность точки* a, *в ней есть элементы последовательности* $\{x_n\}$ *со сколь угодно большими номерами, при этом слева от этой окрестности может находиться не более конечного числа элементов этой последовательности*.

[2] *Натуральной* переменной, т. е. *последовательности*.

Замечание *2*. Утверждение “$\lim x_n \neq x$” следует отличать от *отрицания* утверждения “$\lim x_n = x$”. Первое подразумевает существование у последовательности $\{x_n\}$ предела (конечного или бесконечного), не равного x:

$$\bigl(\exists z\,(z\neq x \wedge \forall\varepsilon>0\,\exists n_0\forall n\,(n>n_0 \Rightarrow |x_n-z|<\varepsilon))\bigr)\vee$$
$$\vee\bigl(\forall\mu>0\,\exists n_0\forall n\,(n>n_0 \Rightarrow |x_n|>\mu)\bigr);$$

второе же, выражаемое более простой формулой (*отрицание n° 18*)

$$\exists\varepsilon>0\,\forall n_0\,\exists n\,(n>n_0 \wedge |x_n-x|\geqslant\varepsilon),$$

предполагает как *существование* у последовательности $\{x_n\}$ какого-то *предела*, *отличного от* x, так и *отсутствие* у нее *предела*.

32. “Число b есть предел функции $y=f(x)$ в точке a”[1] $\bigl(\lim\limits_{x\to a} f(x)=b\bigr)$:

$$\forall\varepsilon>0\,\exists\delta>0\,\forall x\,(0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-b|<\varepsilon).$$

32′. “Число b не является пределом функции $y=f(x)$ в точке a”[1] $\bigl(\neg\text{“}\lim\limits_{x\to a} f(x)=b\text{”}\bigr)$:

$$\exists\varepsilon>0\,\forall\delta>0\,\exists x\,(0<|x-a|<\delta \wedge (|f(x)-b|\geqslant\varepsilon \vee \neg(!\,f(x)))^2.$$

33. “Функция $y=f(x)$ имеет предел[3] *в точке a”*[1]:

$$\exists b\,\forall\varepsilon>0\,\exists\delta>0\,\forall x\,(0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-b|<\varepsilon).$$

33′. “Функция $y=f(x)$ не имеет предела[3] *в точке a”*[1]:

$$\forall b\,\exists\varepsilon>0\,\forall\delta>0\,\exists x\,(0<|x-a|<\delta \wedge (|f(x)-b|\geqslant\varepsilon \vee \neg(!\,f(x)))^2.$$

33″. “Функция $y=f(x)$ определена в окрестности точки[4] *a, но не имеет предела*[3] *в этой точке*”:

$$\bigl(\exists\delta>0\,\forall x\,\bigl(0<|x-a|<\delta \Rightarrow !\,f(x)\bigr)\bigr)\wedge$$
$$\wedge\bigl(\forall b\,\exists\varepsilon>0\,\forall\delta>0\,\exists x\,(0<|x-a|<\delta \wedge |f(x)-b|\geqslant\varepsilon)\bigr).$$

---

[1] Или, как еще говорят, “*при стремлении x к a*”.

[2] С учетом правила $\neg(\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B})=\mathcal{A}\wedge(\neg\mathcal{B})$ (см. с. 274), а также того, что *отрицанием* утверждения “$|f(x)-b|<\varepsilon$” служит утверждение: “*либо $|f(x)-b|\geqslant\varepsilon$, либо значение $f(x)$ не определено*” (см. с. 294).

[3] Под *пределом* (без сопровождения прилагательного *бесконечный*) всюду понимается *конечное* число.

[4] Исключая, возможно, саму эту точку.

Что касается эквивалентного определения *предела функции* в *точке* $\left(\lim\limits_{x\to a} f(x) = b\right)$ – *"через последовательности"* (см. с. 109–110), – то его символическая запись выходит за рамки языка $L_1\mathrm{Real}$, так как требует действия квантора по *переменной функции* (натуральной переменной):

$$\forall\{x_n\}\big((\forall\delta>0\,\exists n_0\forall n\,(n>n_0\Rightarrow 0<|x_n-a|<\delta)\big)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\big(\forall\varepsilon>0\,\exists n_0\forall n\,(n>n_0\Rightarrow|f(x_n)-b|<\varepsilon)\big)\big)^1.$$

34. "Функция $y=f(x)$ имеет в точке a <u>предел слева</u>, равный b_1" $\left(\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=b_1\text{, или } f(a-0)=b_1\right)$:

$$\forall\varepsilon>0\,\exists\delta>0\,\forall x\,(a-\delta<x<a\Rightarrow|f(x)-b_1|<\varepsilon).$$

34′. "Функция $y=f(x)$ при стремлении x к точке a <u>слева</u> стремится к значению b_1 <u>слева</u>" $\left(\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=b_1-0\right)$:

$$\forall\varepsilon>0\,\exists\delta>0\,\forall x\,(a-\delta<x<a\Rightarrow b_1-\varepsilon<f(x)<b_1).$$

34″. "Функция $y=f(x)$ при стремлении x к точке a <u>слева</u> стремится к значению b_1 <u>справа</u>" $\left(\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=b_1+0\right)$:

$$\forall\varepsilon>0\,\exists\delta>0\,\forall x\,(a-\delta<x<a\Rightarrow b_1<f(x)<b_1+\varepsilon).$$

35. "Функция $y=f(x)$ имеет в точке a <u>предел справа</u>, равный b_2" $\left(\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=b_2\text{, или } f(a+0)=b_2\right)$:

$$\forall\varepsilon>0\,\exists\delta>0\,\forall x\,(a<x<a+\delta\Rightarrow|f(x)-b_2|<\varepsilon).$$

35′. "Функция $y=f(x)$ при стремлении x к точке a <u>справа</u> стремится к значению b_2 <u>слева</u>" $\left(\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=b_2-0\right)$:

$$\forall\varepsilon>0\,\exists\delta>0\,\forall x\,(a<x<a+\delta\Rightarrow b_2-\varepsilon<f(x)<b_2).$$

35″. "Функция $y=f(x)$ при стремлении x к точке a <u>справа</u> стремится к значению b_2 <u>справа</u>" $\left(\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=b_2+0\right)$:

$$\forall\varepsilon>0\,\exists\delta>0\,\forall x\,(a<x<a+\delta\Rightarrow b_2<f(x)<b_2+\varepsilon).$$

---

[1] *Для любой последовательности $\{x_n\}$ точек $x_n\neq a$, сходящейся к точке a, соответствующая ей последовательность $\{f(x_n)\}$ (значений функции в точках x_n) сходится к числу a.*

36. *“Число b есть <u>предел</u> функции $y=f(x)$ при x, стремящемся к $+\infty$”* $\bigl(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b\bigr)$:
$$\forall\varepsilon>0\,\exists\mu>0\,\forall x\,(x>\mu\Rightarrow|f(x)-b|<\varepsilon).$$

37. *“Число b есть <u>предел</u> функции $y=f(x)$ при x, стремящемся к $-\infty$”* $\bigl(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b\bigr)$:
$$\forall\varepsilon>0\,\exists\mu>0\,\forall x\,(x<-\mu\Rightarrow|f(x)-b|<\varepsilon).$$

38. “Функция $y=f(x)$ имеет в точке a <u>*бесконечный предел*</u> $+\infty$” $\bigl(\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty\bigr)$:
$$\forall\nu>0\,\exists\delta>0\,\forall x\,(0<|x-a|<\delta\Rightarrow f(x)>\nu).$$

39. “Функция $y=f(x)$ имеет при x, стремящемся к точке x <u>*справа*</u>, <u>*бесконечный предел*</u> $+\infty$” $\bigl(\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=+\infty\bigr)$:
$$\forall\nu>0\,\exists\delta>0\,\forall x\,(a<x<a+\delta\Rightarrow f(x)>\nu).$$

40. “Функция $y=f(x)$ имеет при x, стремящемся к точке x <u>*слева*</u>, <u>*бесконечный предел*</u> $-\infty$” $\bigl(\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=-\infty\bigr)$:
$$\forall\nu>0\,\exists\delta>0\,\forall x\,(a-\delta<x<a\Rightarrow f(x)<-\nu).$$

41. “Функция $y=f(x)$ имеет при x, стремящемся к $-\infty$, <u>*бесконечный предел*</u> $+\infty$” $\bigl(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty\bigr)$:
$$\forall\nu>0\,\exists\mu>0\,\forall x\,(x<-\mu\Rightarrow f(x)>\nu).$$

42. “Функция $y=f(x)$ является <u>*бесконечно большой*</u> при x, стремящемся к ∞” $\bigl(\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty\bigr)$[1]:
$$\forall\nu>0\,\exists\mu>0\,\forall x\,(|x|>\mu\Rightarrow|f(x)|>\nu).$$

43. “Функция $y=f(x)$ является <u>*бесконечно большой*</u> при x, стремящемся к точке a” $\bigl(\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty\bigr)$:
$$\forall\nu>0\,\exists\mu>0\,\forall x\,(0<|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)|>\nu).$$

[1] В обоих случаях ∞ “без знака”.

44. “Число b есть <u>*предел*</u> *функции $y=f(x)$ при a, стремящемся к a* <u>*по множеству*</u> *X”* $\big(\lim\limits_{X\ni x\to a} f(x)=b\big)$:

$\forall\delta>0\,\exists x\big(0<|x-a|<\delta\wedge x\in X\big)\wedge$[1]

$$\wedge\big(\forall\varepsilon>0\,\exists\delta>0\,\forall x((x\in X\wedge 0<|x-a|<\delta)\Rightarrow|f(x)-b|<\varepsilon)\big)$$

45. “Функция $y=f(x)$ <u>*непрерывна в точке*</u> *a”*:

$$\forall\varepsilon>0\,\exists\delta>0\,\forall x\,(|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(a)|<\varepsilon).$$

45′. “Функция $y=f(x)$ <u>*не является непрерывной*</u> в точке a”:

$$\exists\varepsilon>0\,\forall\delta>0\,\exists x\,\big(|x-a|<\delta\wedge \wedge\big(|f(x)-f(a)|\geqslant\varepsilon\vee\neg(!f(x))\vee\neg(!f(a))\big)\big).$$

45″. “Функция $y=f(x)$, определенная как в точке a, так и в ее окрестности, <u>*не является непрерывной*</u> в точке a”:

$$\exists\varepsilon>0\,\forall\delta>0\,\exists x\,\big(|x-a|<\delta\ \wedge|f(x)-f(a)|\geqslant\varepsilon\big).$$

45‴. “Функция $y=f(x)$ <u>*определена*</u> в точке a и ее *окрестности*, но <u>*не является непрерывной*</u> в точке a”[2]:

$$\big(\exists\delta>0\,\forall x\,\big(|x-a|<\delta\Rightarrow!f(x)\big)\big)\wedge \wedge\big(\exists\varepsilon>0\,\forall\delta>0\,\exists x\,\big(|x-a|<\delta\ \wedge|f(x)-f(a)|\geqslant\varepsilon\big)\big).$$

46. “Функция $y=f(x)$ <u>*непрерывна слева*</u> в точке a”:

$$\forall\varepsilon>0\,\exists\delta>0\,\forall x\,(a-\delta<x<a\Rightarrow|f(x)-f(a)|<\varepsilon).$$

47. “Функция $y=f(x)$ <u>*непрерывна справа*</u> в точке a”:

$$\forall\varepsilon>0\,\exists\delta>0\,\forall x\,(a<x<a+\delta\Rightarrow|f(x)-f(a)|<\varepsilon).$$

---

[1] Эту часть *формулы* можно опустить, если заранее оговорено, что a есть *предельная точка* множества X: если вблизи точки a *нет* (отличных от нее) точек множества X, то остальная часть *формулы* имеет значение “истина” (поскольку $(x\in X\wedge 0<|x-a|<\delta)$ при малых значениях δ есть “ложь”), однако говорить о *пределе* функции в *точке* a *по множеству* X в такой ситуации бессмысленно.

[2] В утверждении n° 45″ *изначально дано*, что функция *определена* в *точке* a и ее *окрестности*, а здесь это составляет часть *утверждения*.

48. "Функция $y = f(x)$ <u>непрерывна</u> во <u>всех точках множества</u> X":

$$\forall \widetilde{x} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x ((\widetilde{x} \in X \wedge |x - \widetilde{x}| < \delta) \Rightarrow |f(x) - f(\widetilde{x})| < \varepsilon).$$

49. "Функция $y = f(x)$ <u>непрерывна</u> на <u>множестве</u> X"[1]:

$$\forall \widetilde{x} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x ((\widetilde{x} \in X \wedge x \in X \wedge |x - \widetilde{x}| < \delta) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow |f(x) - f(\widetilde{x})| < \varepsilon).$$

49′. "Функция $y = f(x)$, определенная на множестве X, <u>не является непрерывной</u> на этом <u>множестве</u>"[2]:

$$\exists \widetilde{x} \exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x (\widetilde{x} \in X \wedge x \in X \wedge |x - \widetilde{x}| < \delta \wedge$$
$$\wedge |f(x) - f(\widetilde{x})| \geqslant \varepsilon).$$

50. "Функция $y = f(x)$ <u>равномерно непрерывна</u> на <u>множестве</u> X":

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \forall \widetilde{x} ((\widetilde{x} \in X \wedge x \in X \wedge |x - \widetilde{x}| < \delta) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow |f(x) - f(\widetilde{x})| < \varepsilon).$$

50′. "Функция $y = f(x)$, определенная на множестве X, <u>не является равномерно непрерывной</u> на этом <u>множестве</u>":

$$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x \exists \widetilde{x} (\widetilde{x} \in X \wedge x \in X \wedge |x - \widetilde{x}| < \delta \wedge$$
$$\wedge |f(x) - f(\widetilde{x})| \geqslant \varepsilon).$$

---

[1] Если в предыдущем утверждении для произвольно взятой точки $\widetilde{x} \in X$ значение $f(\widetilde{x})$ сравнивается со значениями $f(x)$ для *всех* точек x из δ*-окрестности* точки $\widetilde{x}$, то в этом – только для тех из них, которые *принадлежат множеству* X. В соответствии с этим функция $y = f(x)$, определенная в *одной* лишь точке a действительной оси *не является непрерывной* в этой *точке* (утверждение n° 45 для нее *ложно*), однако она *непрерывна* на *одноточечном множестве* $X = \{a\}$.

[2] Если изначально не оговорено, что функция *определена* на множестве X, то формула оказывается длиннее:

$$\exists \widetilde{x} \exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x \big(\widetilde{x} \in X \wedge x \in X \wedge |x - \widetilde{x}| < \delta \wedge$$
$$\wedge \big(|f(x) - f(\widetilde{x})| \geqslant \varepsilon \vee \neg(!f(x)) \vee \neg(!f(\widetilde{x}))\big)\big).$$

51. "$f(x) = o(1)$[1], $x \to a$" (*"функция $y = f(x)$ является <u>бесконечно малой</u> при стремлении x к точке a"*):

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x \, (0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon).$$

51′. "$f(x) = o(1)$[1], $x \to a-0$" (*"функция $y = f(x)$ является <u>бесконечно малой</u> при стремлении x к точке a слева"*):

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x \, (a - \delta < x < a \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon).$$

51″. "$f(x) = o(1)$[1], $x \to +\infty$" (*"функция $y = f(x)$ является <u>бесконечно малой</u> при стремлении x к $+\infty$"*):

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \mu > 0 \, \forall x \, (x > \mu \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon).$$

51‴. "$f(x) = o(1)$[1], $x \to \infty$" (*"функция $y = f(x)$ является <u>бесконечно малой</u> при бесконечно больших значениях x"*):

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \mu > 0 \, \forall x \, (|x| > \mu \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon).$$

52. "$f(x) = O(1)$[2], $x \to a$" (*"функция $y = f(x)$ остается <u>ограниченной</u> при стремлении x к точке a"*):

$$\exists c > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x \, (0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x)| \leqslant c).$$

52′. "$f(x) = O(1)$[2], $x \to a+0$" (*"функция $y = f(x)$ остается <u>ограниченной</u> при стремлении x к точке a справа"*):

$$\exists c > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x \, (a < x < a + \delta \Rightarrow |f(x)| \leqslant c).$$

52″. "$f(x) = O(1)$[2], $x \to -\infty$" (*"функция $y = f(x)$ остается <u>ограниченной</u> при стремлении x к $-\infty$"*):

$$\exists c > 0 \, \exists \mu > 0 \, \forall x \, (x < -\mu \Rightarrow |f(x)| \leqslant c).$$

53. "$f(x) = o\big(g(x)\big)$, $x \to a$" (*"функция $y = f(x)$ является <u>бесконечно малой относительно функции</u> $y = g(x)$ при стремлении x к точке a"*):

---

[1] Читается: "*$f(x)$ есть "о малое" от единицы*".

[2] Читается: "*$f(x)$ есть "О большое" от единицы*".

$$\forall\varepsilon>0\,\exists\delta>0\,\forall x\,(0<|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)|\leqslant\varepsilon|g(x)|).$$[1]

53′. "$f(x)=o\big(g(x)\big)$, $x\to a$" ("функция $y=f(x)$ является <u>бесконечно малой относительно функции</u> $y=g(x)$ при бесконечно малых значениях x"):

$$\forall\varepsilon>0\,\exists\delta>0\,\forall x\,(0<|x|<\delta\Rightarrow|f(x)|\leqslant\varepsilon|g(x)|).$$

53″. "$f(x)=o\big(g(x)\big)$, $x\to\infty$" ("функция $y=f(x)$ является <u>бесконечно малой относительно функции</u> $y=g(x)$ при бесконечно больших значениях x"):

$$\forall\varepsilon>0\,\exists\mu>0\,\forall x\,(|x|>\mu\Rightarrow|f(x)|\leqslant\varepsilon|g(x)|).$$

53‴. "$f(x)=o\big(g(x)\big)$, $x\to\infty$" ("функция $y=f(x)$ является <u>бесконечно малой относительно функции</u> $y=g(x)$ при бесконечно больших значениях x из множества X"):

$$\forall\varepsilon>0\,\exists\mu>0\,\forall x\,(|x|>\mu\wedge x\in X\Rightarrow|f(x)|\leqslant\varepsilon|g(x)|).$$

54. "$f(x)=O(g(x))$, $x\to a$"[2]:

$$\exists c>0\,\exists\delta>0\,\forall x\,(0<|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)|\leqslant c|g(x)|).$$[3]

55. "x_0 — точка <u>абсолютного</u> (<u>глобального</u>) <u>максимума</u> функции $y=f(x)$ на множестве X":

$$x_0\in X\wedge\forall x(x\in X\Rightarrow f(x)\leqslant f(x_0)).$$

55′. "x_0 — точка <u>локального максимума</u> функции $y=f(x)$ на множестве X":

---

[1] Если заранее известно, что функция $y=g(x)$ *не обращается в нуль* в окрестности точки a, *нестрогое* неравенство $|f(x)|\leqslant\varepsilon|g(x)|$ в формуле можно заменить *строгим* $\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|<\varepsilon$.

[2] Так и говорят: "*$f(x)$ есть "О большое" от $g(x)$ при стремлении x к точке a*".

[3] В случае не обращения в нуль функции $g(x)$ утверждение означает существование *окрестности* точки a, в которой отношение $\frac{f(x)}{g(x)}$ *ограничено*.

$$x_0 \in X \wedge \exists \delta > 0 \forall x (x \in X \wedge |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) \leqslant f(x_0)).$$

55''. "x_0 *есть точка* *<u>строгого максимума</u>* (*абсолютного*) *функции* $y = f(x)$ на множестве X":

$$x_0 \in X \wedge \forall x (x \in X \wedge x \neq x_0 \Rightarrow f(x) < f(x_0)).$$

55'''. "x_0 есть *точка* *<u>строгого локального максимума</u>* *функции* $y = f(x)$ на множестве X":

$$x_0 \in X \wedge \exists \delta > 0 \forall x (x \in X \wedge 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < f(x_0)).$$

56. "x_0 является *точкой* *<u>устранимого разрыва</u>* для функции $y = f(x)$"[1]:

$$\big(\exists b \forall \varepsilon > 0 \exists \varepsilon > 0 \forall x (0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon)\big) \wedge \\ \wedge \big(f(x_0) \neq b \vee \neg(!f(x_0)\big).$$

57. "x_0 — точка *<u>разрыва 1-го рода</u>* функции $y = f(x)$"[2]:

$$\big(\exists b_1 \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x (x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - b_1| < \varepsilon)\big) \wedge \\ \wedge \big(\exists b_2 \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x (x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow |f(x) - b_2| < \varepsilon)\big) \wedge \\ \wedge \big(b_1 \neq b_2\big).$$

58. "x_0 — точка *<u>разрыва 2-го рода</u>* функции $y = f(x)$"[3]:

$$\big(\exists \delta > 0 \forall x (0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow !f(x))\big) \wedge \\ \wedge \big(\neg\big(\exists b \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x (x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon)\big)\big) \vee \\ \vee \big(\neg\big(\exists b \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x (x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon)\big)\big).$$

---

[1] Функция $y = f(x)$ *имеет предел* в точке x_0, но он *не совпадает* со *значением* функции в этой точке (*либо значение* $f(x_0)$ *не определено*); всюду под *пределом* (без прилагательного *бесконечный*) подразумевается *конечное* число.

[2] Функция $y = f(x)$ *имеет* в точке x_0 *предел слева* и *предел справа*, которые *не совпадают* между собой.

[3] Функция определена в некоторой окрестности точки x_0 (исключая, возможно, саму эту точку) и не имеет в этой точке *либо предела слева*, *либо предела справа*.

59. “Функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 <u>левосторонний разрыв</u> 1-го рода”[1]:

$$\bigl(\exists b_1 \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x (x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - b_1| < \varepsilon)\bigr) \wedge$$
$$\wedge \Bigl(\bigl(\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x (x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)\bigr) \vee$$
$$\vee \bigl(\neg \bigl(\exists \delta > 0 \forall x (x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow !f(x))\bigr)\bigr)\Bigr).$$

60. “Функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 <u>правосторонний разрыв</u> 2-го рода”[2]:

$$\bigl(\exists \delta > 0 \forall x (x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow !f(x))\bigr) \wedge$$
$$\wedge \bigl(\neg \bigl(\exists b \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x (x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon)\bigr)\bigr) \wedge$$
$$\wedge \Bigl(\bigl(\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x (x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)\bigr) \vee$$
$$\vee \bigl(\neg \bigl(\exists \delta > 0 \forall x (x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow !f(x))\bigr)\bigr)\Bigr).$$

61. “Функция $y = f(x)$ <u>*имеет производную*</u> в точке x_0”:

$$\exists a \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \Bigl(0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow \Bigl|\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - a\Bigr| < \varepsilon\Bigr).$$

62. “Функция $y = f(x)$ <u>*дифференцируема*</u> в точке x_0”[3]:

$$\exists a \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \bigl(0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \bigl|f(x) - f(x_0) - a(x - x_0)\bigr| < \varepsilon |x - x_0|\bigr).$$

---

[1] *Функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 предел слева, являясь при этом либо непрерывной справа в точке x_0, либо не удовлетворяющей условию определенности в некоторой правой окрестности точки x_0.*

[2] *Функция $y = f(x)$ определена в правой окрестности точки x_0, но не имеет в этой точке предела справа, при этом функция либо является непрерывной слева в точке x_0, либо не удовлетворяет условию определенности в некоторой левой окрестности точки x_0.*

[3] *Существует число, результат умножения на которое произвольно взятого приращения $\triangle x = x - x_0$ (переменной x в точке x_0) отличается от отвечающего ему приращения функции $\triangle f = f(x) - f(x_0)$ на бесконечно малую относительно $\triangle x$ при стремлении $\triangle x$ к нулю.* Наглядно проявляется эквивалентность *дифференцируемости* функции в точке *существованию производной* функции в этой точке.

Приложение III

Буквы древнегреческого письма

Написание	Название	Передаваемый звук
Α α	а́льфа	[а]
Β β	бе́та	[б]
Γ γ	га́мма	[г]
Δ δ	де́льта	[д]
Ε ε	э псило́н[1]	[е] (краткое)
Ζ ζ	дзе́та	[дз]
Η η	э́та	[е] (долгое)
Θ θ	те́та	[т] (с придыханием)
Ι ι	ио́та	[и]
Κ κ	ка́ппа	[к]
Λ λ	ла́мбда	[л]
Μ μ	мю (ми)	[м]
Ν ν	ню (ни)	[н]
Ξ ξ	кси	[кс]
Ο ο	о микро́н[2]	[о] (краткое)
Π π	пи	[п]
Ρ ρ	ро	[р]
Σ σ, ς (в конце слова)	си́гма	[с]
Τ τ	та́у	[т]
Υ υ	и псило́н[1]	между [и] и [у]
Φ φ	фи	[ф]
Χ χ	хи	[х]
Ψ ψ	пси	[пс]
Ω ω	о ме́га[2]	[о] (долгое)

[1] Греч. *ψιλόν — тонкое, голое, слабое.*

[2] Греч. *μικρόν — маленькое; μέγα — большое.*

Список литературы

1. Аристотель. Аналитики первая и вторая. Госполитиздат, 1952.

2. Больцано Б. Парадоксы безконечнаго. Одесса, 1911.

3. Бурбаки Н. Функции действительного переменного. М.: Наука, 1965.

4. Гарди Г. Интегрирование элементарных функций. М.-Л.: ОНТИ, 1935.

5. Гильберт Д., Бернайс П. Основания математики. Логические исчисления и формализация арифметики. М.: Наука, 1979.

6. Гутер Р.С., Полунов Ю.Л. Джон Непер. М.: Наука, 1980.

7. Дедекинд Р. Непрерывность и ирраціональныя числа. Одесса, 1909.

8. Декарт Р. Геометрия (с приложением избранных работ Ферма и переписки Декарта). М.-Л.: ОНТИ, 1938.

9. Кантор Г. Труды по теории множеств. М.: Наука, 1985.

10. Колмогоров А.Н., Драгалин А.Г. Введение в математическую логику. М.: Изд-во МГУ, 1982.

11. Кольман Э. Бернард Больцано. М.: Изд-во АН СССР, 1955.

12. Ландау Э. Основы анализа. М.: Изд-во иностр. литер., 1947.

13. Де Л'опиталь Г.Ф. Анализ бесконечно малых. М.-Л.: ГТТИ, 1935.

14. Лузин Н.Н. Теория функций действительного переменного. М.: Учпедгиз, 1940.

15. Манин Ю.И. Доказуемое и недоказуемое. М.: Советское радио, 1979.

16. Манин Ю.И. Математика как метафора. М: МЦНМО, 2008.

17. Мендельсон Э. Введение в математическую логику. М.: Наука, 1971.

18. Никифоровский В.А. Из истории алгебры XVI–XVII вв. М: Наука, 1979.

19. Ньютон И. Математические работы. М.-Л.: ОНТИ, 1937.

20. Робинсон А. Введение в теорию моделей и метаматематику алгебры. М.: Наука, 1967.

21. Столл Р.Р. Множества, логика, аксиоматические теории. М.: Просвещение, 1968.

22. Тарский А. Введение в логику и методологию дедуктивных наук. М.: Изд-во иностр. литер., 1948.

23. Успенский Я.В. Очерк истории логарифмов. Петроград: НК, 1923.

24. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. I. М.: Наука, 1966.

25. Френкель А., Бар-Хиллел И. Основания теории множеств. М.: Мир, 1966.

26. Чёрч А. Введение в математическую логику. М.: Изд-во иностр. литер., 1960.

27. Шапиро Г.М. Высшая алгебра. М.: Учпедгиз, 1938.

28. Шенфилд Дж. Математическая логика. М.: Наука, 1975.

29. Эйлер Л. Введение в анализ бесконечных. М.: Физматлит, 1961.

30. Юшкевич А.П. (редактор) Хрестоматия по истории математики. М.: Просвещение, 1977.

31. Argand R. Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques. Paris, 1874.

32. Der Briefwechsel von Johann Bernoulli. Band I. Basel, 1955.

33. Cajori F. A history of mathematics. N.Y., 1931.

34. Cauchy A.-L. Cours d'Analyse de l'École Royale Polytechnique. Paris, 1821.

35. Cauchy A.-L. Œuvres complètes. Sér. II, t. IV. Paris, 1899.

36. Du Bois-Raymond P. Die allgemeine Functionentheorie. Tübingen, 1882.

37. da Cunha J.-A. Principes mathématiques. Bordeaux, 1811.

38. Descartes R. La géométrie, nouvelle édition. Paris, 1927[1].

39. Dugac P. Eléments d'analyse de Karl Weierstrass. Paris, 1972.

40. Gauss C.F. Werke. Göttingen, 1863–1933.

41. Gies J., Gies F. Leonardo of Pisa and the new mathematics of the middle ages. New York, 1969.

42. Hamilton W.R. Lectures on quaternions. London-Cambridge, 1853.

43. Lacroix S.F. Traité des différences et des séries. Paris, 1800.

44. Lagrange J.L. Théorie des fonctions analytiques. Paris, 1813.

45. Landau E. Vorlesungen über Zahlentheorie. Band II. Leipzig, 1927.

46. Leibnizens mathematische Schriften. Folge III, Band III. Halle, 1885.

47. Maclaurin C. A treatise of fluxions. V. II, Edinburgh, 1742.

48. Newton Is. Arithmetica Universalis. Londini, 1707.

49. Ore O. Cardano the gambling scholar. Prinston, N.-J., 1953.

50. Peano G. Lezioni di analisi infinitesimale. V. I. Torino, 1893.

51. Peano G. Notations de logique mathématique. Turin, 1894.

52. Scott J.F. The mathematical work of John Wallis. New York, 1981.

53. Tannery P. Mémoires scientifiques. T. III. Toulouse–Paris, 1915.

54. Taylor B. Methodus incrementorum directa et inversa. Londini, 1715.

55. Wessel C. On the Analytical Representation of Direction. An Attempt Applied Chiefly to Solving Plane and Spherical Polygons. Copenhagen, 1999.

[1] Есть русский перевод [**8**] с интересными примечаниями и приложениями.

Алфавитный указатель

Оглавление

Сергей Владимирович Шведенко

НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА
Числа и множества чисел. Последовательности и их пределы. Пределы и непрерывность функций. Дифференциальное исчисление функций одной переменной

Учебное пособие

Редактор Е.Н. Кочубей

Подписано в печать 15.11.2011.   Формат 60×84 1/16.
Печ.л. 20,25.   Уч.-изд. л. 20,25.
Тираж 350 экз .   Изд. № 1/1 .   Заказ № 55.
Национальный исследовательский ядерный университет “МИФИ”.
115409, Москва, Каширское ш., 31.
ООО «Полиграфический комплекс «Курчатовский».
144000, Московская область, г. Электосталь, ул. Красная, д.42.