МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
«МИФИ»

Е.Б. Сандаков, Ю.Н. Гордеев

ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

Учебно-методическое пособие

Москва 2012

УДК 514.12(075)
ББК 22.151.5я7
С 18

Сандаков Е.Б., Гордеев Ю.Н. **Векторная алгебра: Учебно-методическое пособие.** – М.: НИЯУ МИФИ, 2012. – 36 с.

Пособие состоит из четырех параграфов, посвященных изучению темы «Векторная алгебра» курса «Аналитическая геометрия». В начале каждого параграфа приведены краткие теоретические сведения (подробные сведения можно найти в пособии [1]), необходимые для решения задач. Далее дано большое число примеров решения задач, которые способствуют лучшему усвоению студентами данного материала.

Предназначено для студентов Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ» всех специальностей, изучающих курс «Аналитическая геометрия». Пособие полностью соответствует программе курса «Аналитическая геометрия», предусмотренной для таких технических и экономических вузов с углубленным изучением высшей математики, как НИЯУ МИФИ.

Рецензент канд. техн. наук, доц. К.К. Гладун

ISBN 978-5-7262-1741-3

© *Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», 2012*

Редактор *М.В. Макарова*
Оригинал-макет изготовлен *С.В. Тялиной*

Подписано в печать 28.11.2012. Формат 60×84 1/16.
Уч.-изд.л. 2,25. Печ.л. 2,25. Тираж 490 экз. Изд. № 010-1. Заказ № 280

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ».
Типография НИЯУ МИФИ.
115409, Москва, Каширское ш., 31.

ОГЛАВЛЕНИЕ

§ 1. Векторы. Линейные операции над ними.
Разложение вектора по базису 4

Задачи для самостоятельного решения 16

§ 2. Скалярное произведение двух векторов.
Проекция вектора на ось 18

Задачи для самостоятельного решения 23

§ 3. Векторное произведение двух векторов. 24

Задачи для самостоятельного решения 29

§ 4. Смешанное произведение трех векторов 30

Задачи для самостоятельного решения 34

Вопросы для самоконтроля 35

Рекомендуемая литература 36

§ 1. Векторы. Линейные операции над ними. Разложение вектора по базису

Вектором называется направленный отрезок. Обозначение: $\overrightarrow{AB}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$, … (рис. 1.1).

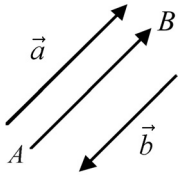


Рис. 1.1

Два вектора называются *одинаково направленными* (*противоположно направленными*), если приведенные к общему началу они располагаются на прямой и их концы принадлежат этой прямой и лежат по одну (по разные стороны) от начала. На рис. 1.1 векторы $\vec{a}$ и $\overrightarrow{AB}$ одинаково направлены, а векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ противоположно направлены. Обозначение: $\vec{x} \uparrow\uparrow \vec{y}$, если $\vec{x}$ и $\vec{y}$ одинаково направлены и $\vec{x} \uparrow\downarrow \vec{y}$, если $\vec{x}$ и $\vec{y}$ противоположно направлены.

Два вектора называются *равными*, если один из них может быть получен из другого с помощью параллельного переноса. На рис. 1.1 $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$. Множество всех равных векторов будем считать одним так называемым *свободным вектором*. Точки приложения вектора могут быть самыми различными. В дальнейшем под словом «вектор» будем понимать именно свободный вектор.

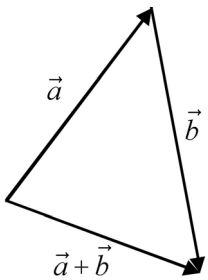


Рис. 1.2

<u>Определение 1.1.</u> *Суммой* $\vec{a}+\vec{b}$ будем называть вектор $\vec{c}$, идущий из начала вектора $\vec{a}$ в конец вектора $\vec{b}$ при условии, что конец вектора $\vec{a}$ совмещен с началом вектора $\vec{b}$ (рис. 1.2). Это правило сложения векторов называется *правилом треугольника*.

Нулевым $\vec{0}$ называется вектор, у которого начало совпадает с концом. Очевидно, $\vec{x} = \vec{0}$ тогда и только тогда, когда длина вектора (обозначение $|\vec{x}|$) равна нулю, т.е. $|\vec{x}| = 0$.

<u>Определение 1.2.</u> *Произведением вектора* $\vec{x} \neq \vec{0}$ *на действительное число* $\lambda \neq 0$ $(\lambda \in R)$ называется вектор $\lambda\vec{x}$, удовлетворяющий условиям:

а) $|\lambda\vec{x}| = |\lambda||\vec{x}|$;

б) при $\lambda > 0$ $(\lambda\vec{x}) \uparrow\uparrow \vec{x}$, при $\lambda < 0$ $(\lambda\vec{x}) \uparrow\downarrow \vec{x}$ (если $\vec{x} = \vec{0}$ или $\lambda = 0$, то $\lambda\vec{x} = \vec{0}$).

Противоположным к $\vec{a}$ называется вектор $(-\vec{a})$, который в сумме с $\vec{a}$ дает нулевой вектор: $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$. Легко проверить $(-\vec{a}) = (-1)\vec{a}$.

Вектор $\vec{a} + (-\vec{b})$ называется *разностью векторов* $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и обозначается $\vec{a} - \vec{b}$. Для нахождения этого вектора можно воспользоваться «правилом треугольника» (рис. 1.3).

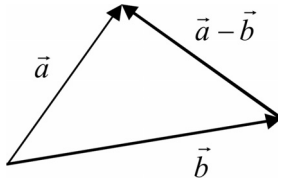


Рис. 1.3

Основные свойства сложения векторов и умножения их на число

<u>Теорема 1.1</u> (основные свойства). Пусть $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ – любые векторы, а λ и μ – любые числа, λ и $\mu \in \boldsymbol{R}$. Тогда:

$\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$ (коммутативность, рис. 1.4); (1.1)

$\vec{x} + (\vec{y} + \vec{z}) = (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z}$ (ассоциативность, рис. 1.5); (1.2)

$\exists\vec{0}$ (нуль вектор): $\forall\vec{x}$ $\vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$; (1.3)

$\forall\vec{x}\,\exists$ вектор $(-\vec{x})$ – противоположный: (1.4)

$\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}$;

$\vec{x} = 1 \cdot \vec{x}$; (1.5)

$\forall\vec{x},\ \forall\lambda,\ \mu \in \boldsymbol{R} : \lambda(\mu\vec{x}) = (\lambda\mu)\vec{x}$, (1.6)

$\forall\vec{x},\ \forall\lambda,\ \mu \in \boldsymbol{R} : (\lambda + \mu)\vec{x} = \lambda\vec{x} + \mu\vec{x}$; (1.7)

$\forall\vec{x},\ \vec{y},\ \forall\lambda \in \boldsymbol{R} : \lambda(\vec{x} + \vec{y}) = \lambda\vec{x} + \lambda\vec{y}$. (1.8)

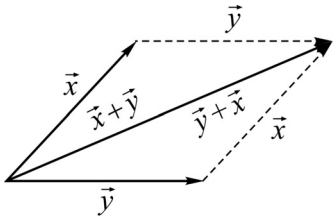


Рис. 1.4

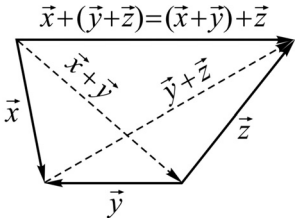


Рис. 1.5

Доказательство. Свойства (1.1)–(1.8) следуют из определений суммы и произведения вектора на число и рис. 1.4–1.7.

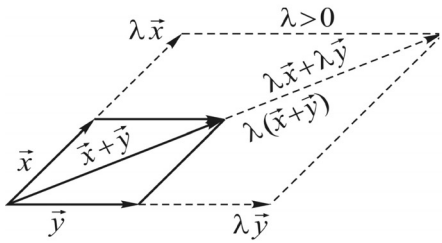


Рис. 1.6

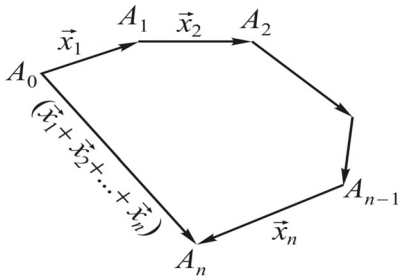


Рис. 1.7

<u>Следствие 1.1:</u> $(-\vec{x})=(-1)\vec{x}$.

<u>Следствие 1.2:</u> $\overrightarrow{A_0A_1}+\overrightarrow{A_1A_2}+\ldots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=\overrightarrow{A_0A_n}$ (см. рис. 1.7).

<u>Следствие 1.3:</u> сложение векторов определяется по правилу параллелограмма (см. рис. 1.4).

<u>Замечание 1.1.</u> У векторов, которые рассматриваем, начальные точки выбраны произвольно (т.е. не различаем равные вектора, получающиеся друг из друга параллельным переносом). Такие векторы иногда называют «скользящими» векторами. (Они определены с точностью до точки приложения при параллельном «скольжении».) Часто в физике, механике и т.д. рассматривают «связные» векторы, т.е. векторы, общая начальная точка приложения для которых фиксирована.

<u>Определение 1.3.</u> Множество V называется *линейным пространством свободных векторов* (*ЛПСВ*), если:

1) для $\forall\vec{x},\ \vec{y}\in V$ определен элемент $\vec{x}+\vec{y}\in V$, называемый суммой векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$;

2) для $\forall\vec{x}\in V$ и $\forall\lambda\in\boldsymbol{R}$ определен $\lambda\vec{x}\in V$, называемый произведением вектора $\vec{x}$ на число λ;

3) для $\forall\vec{x},\ \vec{y},\ \vec{z}\in V$ и $\forall\lambda,\ \mu\in\boldsymbol{R}$ в множестве V выполняются свойства (1.1)–(1.8).

Укажем примеры линейных пространств свободных векторов.

<u>Пример 1.1.</u> Подмножество V_0, состоящее из одного нулевого вектора, очевидно, является ЛПСВ.

Пример 1.2. Подмножество V_1 всех свободных векторов, параллельных некоторой прямой, является ЛПСВ (условия 1.1–1.8 определения ЛПСВ легко проверяются).

Пример 1.3. Подмножество V_2 всех свободных векторов, параллельных некоторой плоскости, является ЛПСВ (условия 1.1–1.8 легко проверяются).

Пример 1.4. Множество V_3 всех свободных векторов в пространстве, очевидно, является ЛПСВ.

Укажем примеры множеств векторов, по той или иной причине не являющихся ЛПСВ.

Пример 1.5. Множество всех свободных векторов пространства за исключением векторов параллельных некоторой фиксированной прямой l не является линейным пространством (так как в пределах этого множества нельзя складывать векторы, симметричные относительно указанной прямой).

Пример 1.6. Множество $\boldsymbol{X}$ всех векторов пространства, имеющих общее начало, концы которых лежат на фиксированной прямой l, не проходящей через начало координат, не является линейным пространством (так как нулевой вектор не принадлежит множеству $\boldsymbol{X}$).

Определение 1.4. Векторы $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \ldots$ называются *коллинеарными* (обозначаем $\vec{x} \parallel \vec{y}$), если все они параллельны одной прямой. Векторы $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \ldots$ называются компланарными, если все они параллельны одной плоскости.

Из определения следуют следующие очевидные утверждения:

1) нулевой вектор коллинеарен любому вектору;

2) каждый вектор $\vec{x}$ коллинеарен самому себе;

3) если $\vec{x} \parallel \vec{y}$, то и $\vec{y} \parallel \vec{x}$;

4) если $\vec{x} \parallel \vec{y}$ и $\vec{y} \parallel \vec{z}$, то $\vec{x} \parallel \vec{z}$;

5) если несколько векторов коллинеарны между собой, то они и подавно компланарны между собой;

6) любые два вектора компланарны между собой.

Имеют место следующие важные теоремы.

Теорема 1.2 (о разложении). Для $\forall$ вектора $\vec{a}$, коллинеарного любому вектору $\vec{l}_1 \neq \vec{0}$, $\exists$ единственное число $\lambda_1 \in \boldsymbol{R}$: $\vec{a} = \lambda_1 \vec{l}_1$.

Теорема 1.3. Для $\forall$ вектора $\vec{a}$, компланарного $\forall$ двум неколлинеарным векторам $\vec{l}_1$ и $\vec{l}_2$, $\exists$ единственные числа $\lambda_1, \lambda_2 \in \boldsymbol{R}$: $\vec{a} = \lambda_1 \vec{l}_1 + \lambda_2 \vec{l}_2$.

Теорема 1.4. Для $\forall$ вектора $\vec{a}$ и $\forall$ трех некомпланарных векторов $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3$ $\exists$ единственные числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \boldsymbol{R}: \vec{a} = \lambda_1 \vec{l}_1 + \lambda_2 \vec{l}_2 + \lambda_3 \vec{l}_3$.

Линейная зависимость и независимость векторов

Рассмотрим линейное пространство свободных векторов V (например, V_m, где $m = 1, 2, 3$ – фиксированное).

Определение 1.5. Векторы $a_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_k$ из V называются *линейно независимыми* в V, если равенство

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + ... + \alpha_k \vec{a}_k = \vec{0}$$

выполняется только при $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_k = 0$.

Векторы $a_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_k$ из V называются линейно зависимыми в V, если $\exists \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k \in \boldsymbol{R}$ не все одновременно равные нулю $(|\alpha_1| + |\alpha_2| + ... + |\alpha_k| \neq 0)$, такие, что

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + ... + \alpha_k \vec{a}_k = \vec{0}.$$

Определение 1.6. Если $a_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_k \in V$ и $\exists \beta_1, \beta_2, ..., \beta_k \in \boldsymbol{R}$:

$$\vec{a} = \beta_1 \vec{a}_1 + \beta_2 \vec{a}_2 + ... + \beta_k \vec{a}_k,$$

то говорят, что вектор $\vec{a}$ есть *линейная комбинация векторов* $a_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_k$ из V.

Теорема 1.5 (критерий линейной зависимости). Векторы a_1, $\vec{a}_2, ..., \vec{a}_k$ из V линейно зависимы в V тогда и только тогда, когда один из них есть линейная комбинация остальных.

Из определений, теоремы разложения и критерия линейной зависимости получаем выводы.

Вывод 1.1.

1. Линейно зависимыми векторами в V_1 – «прямой», V_2 – «плоскости», V_3 – «пространстве» являются, соответственно:

в V_1 – нулевой вектор $\vec{0}$, в V_2 – любые два коллинеарных вектора, в V_3 – любые три компланарных вектора.

2. Линейно независимыми векторами в V_1, V_2, V_3, соответственно, являются: в V_1 – любой ненулевой вектор, в V_2 – любые два неколлинеарных вектора, в V_3 – любые три некомпланарных вектора.

3. В V_m ($m = 1, 2, 3$) существует m линейно независимых векторов, причем любые ($m + 1$) векторов линейно зависимы в V_m.

Пусть V – линейное пространство свободных векторов (например, V_m, где $m = 1, 2, 3$ – фиксированное).

Определение 1.7. Векторы $\vec{l}_1, \vec{l}_2, ..., \vec{l}_n$ из V называются *базисом* V, если $\vec{l}_1, \vec{l}_2, ..., \vec{l}_n$ линейно независимы в V и для $\forall \vec{x} \in V \exists x_1, ..., x_n \in \boldsymbol{R}$:

$$\vec{x} = x_1 \vec{l}_1 + x_2 \vec{l}_2 + ... + x_n \vec{l}_n .$$

Указанное равенство называется разложением вектора $\vec{x} \in V$ по базису $\vec{l}_1, \vec{l}_2, ..., \vec{l}_n$ из V.

Лемма 1.1. Для любого вектора $\vec{x} \in V$ разложение его по базису $\vec{l}_1, \vec{l}_2, ..., \vec{l}_n$ из V единственно.

Определение 1.8. Числа $x_1, ..., x_n$ в разложении $\vec{x} = x_1 \vec{l}_1 + ... + x_n \vec{l}_n$ вектора $\vec{x} \in V$ по базису $\vec{l}_1, \vec{l}_2, ..., \vec{l}_n$ из V называют *координатами вектора* $\vec{x}$ относительно базиса $\vec{l}_1, \vec{l}_2, ..., \vec{l}_n$ из V. Число n-базисных векторов называют *размерностью* V, обозначают $\dim V = n$.

Из вышеприведенных результатов следует вывод.

Вывод 1.2. Пусть V_1, V_2, V_3 – линейное пространство свободных векторов, расположенных, соответственно, на «заданной прямой», «заданной плоскости», в «пространстве».

Тогда:

1) $\forall \vec{l}_1 \neq 0$, $\vec{l}_1 \in V$ образует базис V_1, $\dim V_1 = 1$;

2) $\forall$ два неколлинеарных вектора $(\vec{l}_1)\nparallel(\vec{l}_2)$ $\vec{l}_1, \vec{l}_2$ образуют базис V_2, $\dim V_2 = 2$;

3) $\forall$ три некомпланарных вектора $\vec{l}_1,\ \vec{l}_2,\ \vec{l}_3 \in V_3$ образуют базис V_3, $\dim V_3 = 3$;

Замечание 1.2. Из вывода следует, что «заданная прямая» одномерна, «заданная плоскость» двумерна, «пространство» в обычном понимании трехмерно.

Определение 1.9. Базис $\vec{l}_1,\ \vec{l}_2, ...,\ \vec{l}_n$ из V называется *ортонормированным* (ОНБ), если векторы $\vec{l}_1,\ \vec{l}_2, ...,\ \vec{l}_n$ попарно ортогональны (перпендикулярны) и по модулю равны единице. Если базис – произвольный, то он называется *косоугольным*, или *аффинным*.

Из сказанного выше следует, что базисом на плоскости являются любые два неколлинеарных вектора. Пусть $\vec{p}$, $\vec{q}$ – базис и $\vec{a}$ – произвольный вектор на плоскости. Тогда (рис. 1.8) найдутся такие числа α и β, что

$$\vec{a} = \alpha\vec{p} + \beta\vec{q}. \qquad (1.9)$$

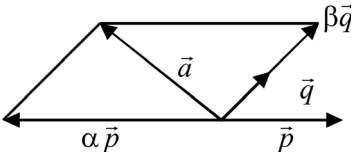


Рис. 1.8

Равенство (1.9) называется *разложением вектора* $\vec{a}$ по базису $\vec{p}$, $\vec{q}$. Числа α, β называются *координатами вектора* $\vec{a}$ в базисе $\vec{p}$, $\vec{q}$.

Вместо (1.9) часто пишут $\vec{a} = (\alpha;\beta)$.

Из сказанного выше также следует, что базисом в пространстве является любая некомпланарная тройка векторов.

Пусть $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ – базис в пространстве, и $\vec{a}$ – произвольный вектор в пространстве. Имеет место разложение по базису, аналогичное формуле (1.9), (рис. 1.9)

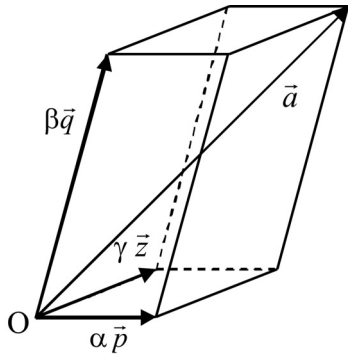


Рис. 1.9

$$\vec{a} = \alpha\vec{p} + \beta\vec{q} + \gamma\vec{r}. \qquad (1.10)$$

Числа α, β, γ называются *координатами вектора* $\vec{a}$ в базисе $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$. Пишут также $\vec{a} = (\alpha, \beta, \gamma)$.

Замечание 1.3. Два вектора равны тогда и только тогда, когда равны их соответствующие координаты.

На плоскости и в пространстве справедлива следующая теорема.

Теорема 1.6. При сложении любых двух векторов их соответствующие координаты относительно любого базиса складываются, а при умножении вектора на любое число $\lambda \in R$ все координаты этого вектора умножаются на это число λ.

В дальнейшем все определения, теоремы и свойства будут сформулированы для пространства. Они автоматически справедливы и для плоскости (достаточно опустить одну координату).

Аффинная (косоугольная) система координат в пространстве определяется выбором начальной точки O (началом координат) и какого-либо базиса $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ пространства.

Координатами точки M в данной аффинной системе координат называются координаты вектора $\overrightarrow{OM}$ в выбранном базисе $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$. Если $\overrightarrow{OM} = x\vec{p} + y\vec{q} + z\vec{r}$, то пишут $M(x; y; z)$. Если вектор $\vec{a}$ задан своими началом и концом, т.е. $\vec{a} = \overrightarrow{M_1M_2}$ (причем известны координаты точек $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$ в заданной системе координат $O\vec{p}\vec{q}\vec{r}$), то координаты вектора $\vec{a}$ находятся по формулам: $\vec{a} = \ = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$.

Чаще всего будем иметь дело с декартовой прямоугольной системой координат в пространстве, которая определяется заданием начальной точки O (началом координат) и какого-либо ортонормированного базиса (ОНБ) $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Обычно этот ортонормированный базис обозначают $\vec{i}; \vec{j}; \vec{k}$. В нем $\vec{i}; \vec{j}; \vec{k}$ взаимно-перпендикулярны и по длине равны единице. Обозначим через α, β, γ углы, образованные вектором $\vec{a}$ $(\vec{a} \neq \vec{0})$ с базисными векторами $\vec{i}; \vec{j}; \vec{k}$ (рис. 1.10).

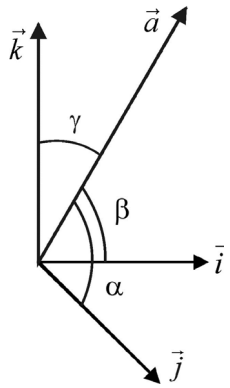


Рис. 1.10

Если $\vec{a}=(x;\ y;\ z)$ в базисе $\vec{i};\ \vec{j};\ \vec{k}$, то $x=|\vec{x}|\cos\alpha$; $y=|\vec{y}|\cos\beta$; $z=|\vec{z}|\cos\gamma$. По теореме Пифагора $|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Следовательно, $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$, $\cos\alpha$; $\cos\beta$; $\cos\gamma$ называются *направляющими косинусами вектора* $\vec{a}$.

Ортом ненулевого вектора $\vec{a}$ (обозначается $\vec{e}_{\vec{a}}$) называется единичный вектор, направление которого совпадает с $\vec{a}$.

Координаты орта вектора $\vec{a}$ имеют вид: $\vec{e}_{\vec{a}}=(\cos\alpha;\ \cos\beta;\ \cos\gamma)$.

<u>Задача 1.1.</u> Точки K и Z служат серединами сторон $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{CD}$ параллелограмма $ABCD$.

Выразите векторы $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{CD}$ через векторы $\overrightarrow{AK}$ и $\overrightarrow{AK}$.

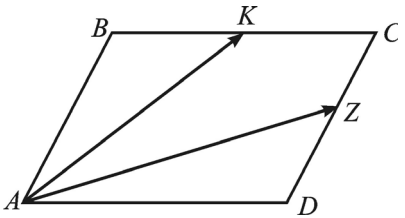


Рис. 1.11

Решение. Из определения равенства векторов, суммы векторов и умножения вектора на число следует (рис. 1.11), что

$$\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BK}=-\overrightarrow{CD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC},$$

$$\overrightarrow{AZ}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DZ}=\overrightarrow{BC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}.$$

Разрешая получившуюся систему:

$$\begin{cases}\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AK};\\ \overrightarrow{BC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AZ}\end{cases}$$

относительно векторов $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{CD}$, получим:

$$\overrightarrow{BC}=\frac{4\overrightarrow{AZ}-2\overrightarrow{AK}}{3};\ \overrightarrow{CD}=\frac{2\overrightarrow{AZ}-4\overrightarrow{AK}}{3}.$$

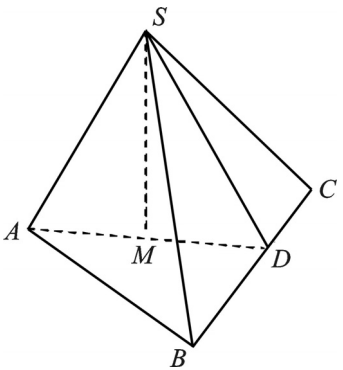


Рис. 1.12

<u>Задача 1.2.</u> Пусть M – точка пересечения медиан грани ABC треугольной пирамиды $SABC$. Разложите вектор $\overrightarrow{SM}$ по базису $\overrightarrow{e_1}=\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{e_2}=\overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{e_3}=\overrightarrow{SC}$.

Решение. Из рис. 1.12 имеем (согласно определению суммы векторов) $\overrightarrow{SM} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AM}$.

Так как точка M является точкой пересечения медиан треугольника ABC, то $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$.

Следовательно, $\overrightarrow{SM} = \overrightarrow{SA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$. (1.11)

С другой стороны, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{SD} - \overrightarrow{SA}$. Так как $\overrightarrow{SD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC})$, то

$$AD = \frac{1}{2}\overrightarrow{SB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SA}. \qquad (1.12)$$

Подставляя (1.12) в (1.11), получим

$$\overrightarrow{SM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC}) = \frac{1}{3}\vec{e}_1 + \frac{1}{3}\vec{e}_2 + \frac{1}{3}\vec{e}_3.$$

<u>Задача 1.3.</u> На плоскости даны три вектора $\vec{a} = (5; 16)$, $\vec{b} = (2; 1)$, $\vec{c} = (1; 2)$. Найдите разложение каждого из них по двум другим.

Решение. Заметим, что векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$ неколлинеарны. Следовательно, векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют базис на плоскости. Запишем разложение вектора $\vec{a}$ по базису $\vec{b}$, $\vec{c}$ с неизвестными коэффициентами $\alpha, \beta : \vec{a} = \alpha\vec{b} + \beta\vec{c}$, т.е.

$$(5; 16) = \alpha(2; 1) + \beta(1; 2) = (2\alpha; \alpha) + (\beta; 2\beta) = (2\alpha + \beta); \alpha + 2\beta).$$

Приравнивая соответствующие координаты получим:

$$\begin{cases} 5 = 2\alpha + \beta; \\ 16 = \alpha + 2\beta. \end{cases}$$

Решая эту систему, найдем $\alpha = -2$; $\beta = 9$. Итак,

$$\vec{a} = -2\vec{b} + 9\vec{c}. \qquad (1.13)$$

Из равенства (1.13) находим:

$$\vec{b} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{9}{2}\vec{c}, \quad \vec{c} = \frac{1}{9}\vec{a} + \frac{2}{9}\vec{c}.$$

Это разложения векторов $\vec{b}$ и $\vec{c}$, соответственно, по базисам $\vec{a}, \vec{c}$ и $\vec{a}, \vec{b}$.

Задача 1.4. Даны точки $A(1;\ 0;\ 2)$, $B(-1;\ 1;\ 0)$, $C(3;\ 5;\ -2)$. Найдите:

а) координаты вектора $2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}$;

б) орт и направляющие косинусы вектора $\overrightarrow{AB}$;

в) какой-нибудь вектор, направленный по биссектрисе внутреннего угла B треугольника ABC.

Решение.

А. $\overrightarrow{AB}=(-1-1;\ 1-0;\ 0-2)=(-2;\ 1;\ -2)$;

$\overrightarrow{BC}=(3-(-1);\ 5-1;\ -2-0)=(4;\ 4;\ -2)$;

$2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}=(-2\cdot 2-4;\ 2\cdot 1-4;\ 2(-2)-(-2))=(-8;\ -2;\ -2)$.

Б. Орт вектора $\overrightarrow{AB}$ обозначим $\overrightarrow{e_{AB}}$:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{4+1+4}=3;\qquad \overrightarrow{e_{AB}}=\frac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}=\left\{-\frac{2}{3};\frac{1}{3};-\frac{2}{3}\right\};$$

$$\cos\alpha=-\frac{2}{3};\ \cos\beta=\frac{1}{3};\ \cos\gamma=-\frac{2}{3}.$$

В. Найдем орты векторов $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC}$:

$$\overrightarrow{e_{BA}}=-\overrightarrow{e_{AB}}=\left\{\frac{2}{3};-\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right\};$$

$$\overrightarrow{e_{BC}}=\frac{\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BC}\right|}=\frac{\overrightarrow{BC}}{2\sqrt{4+4+1}}=\left\{\frac{2}{3};\frac{2}{3};-\frac{1}{3}\right\}.$$

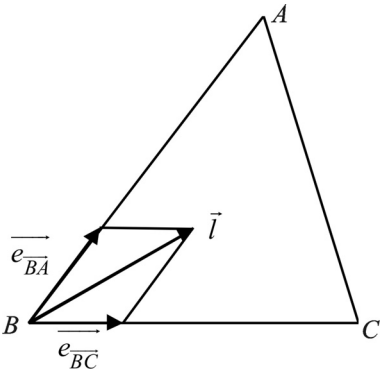


Рис. 1.13

Вектор $\vec{e}=\overrightarrow{e_{AB}}+\overrightarrow{e_{BC}}$ направлен по биссектрисе внутреннего угла B треугольника ABC (так как является диагональю ромба) (рис. 1.13).

$$\vec{e}=\left(\frac{4}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right).$$

Вместо вектора $\vec{e}$ можно взять вектор $\vec{e}'=(4;\ 1;\ 1)$, коллинеарный вектору $\vec{e}$ и одинаково с ним направленный.

Задача 1.5. Даны три вершины параллелограмма $A(-2;\ 1)$, $B(1;\ 3)$, $C(4;\ 0)$. Найдите четвертую вершину D.

Решение. Так как $ABCD$ – параллелограмм то (рис. 1.14) $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$, но $\overrightarrow{BA} = (-2-1;\ 1-3) = (-3;\ -2)$. Следовательно, $\overrightarrow{CD} = (-3;\ -2)$. Обозначим через x и y координаты вершины D параллелограмма $ABCD$, т.е. $D(x, y)$. Тогда $\overrightarrow{CD} = (x-4;\ y-0)$.

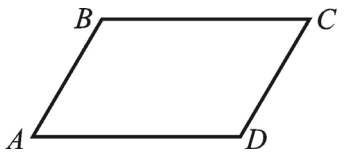


Рис. 1.14

Так как, с другой стороны, $\overrightarrow{CD} = (-3;\ -2)$, , отсюда имеем:

$$x - 4 = -3; \quad y = -2.$$

Таким образом, координаты вершины D есть пара чисел (1; –2).

Задача 1.6. К вершине куба приложены три силы, равные по величине 1, 2, 3 и направленные по диагоналям граней куба, проходящим через эту вершину. Найдите величину равнодействующей этих трех сил.

Решение. Направим от вершины O по ребрам куба вектора $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Тогда данные силы примут вид (рис. 1.15):

$$\overrightarrow{F_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} + \vec{j}),$$

$$\overrightarrow{F_2} = \frac{2}{\sqrt{2}}(\vec{i} + \vec{k}),$$

$$\overrightarrow{F_3} = \frac{3}{\sqrt{2}}(\vec{k} + \vec{j}).$$

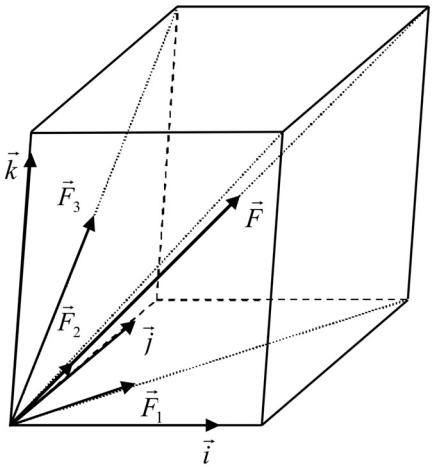


Рис. 1.15

Равнодействующая этих трех сил $\vec{F}$ равна

$$\vec{F} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3} = \frac{3\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}}{\sqrt{2}}, \text{ или } \vec{F} = \left(\frac{3}{\sqrt{2}};\ \frac{4}{\sqrt{2}};\ \frac{5}{\sqrt{2}}\right).$$

Следовательно, величина равнодействующей этих трех сил равна длине вектора $\vec{F}$, или

$$\left|\vec{F}\right| = \sqrt{\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{4}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right)^2} = 5.$$

Задача 1.7. Даны три некомпланарных вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Проверьте, будут ли линейно зависимы векторы:

$$\vec{\ell} = \vec{c}; \quad \vec{m} = \vec{a} - \vec{b} - \vec{c} \quad \text{и} \quad \vec{n} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}.$$

В случае положительного ответа указать линейную зависимость, их связывающую.

Решение. Рассмотрим соотношения $\lambda_1\vec{\ell} + \lambda_2\vec{m} + \lambda_3\vec{n} = \vec{0}$.

Подставляя в это равенство выражения для $\vec{\ell}, \vec{m}$ и $\vec{n}$, получим:

$$\lambda_1\vec{c} + \lambda_2(\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}) + \lambda_3(\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}) = \vec{0}.$$

Запишем последнее равенство и виде:

$$(\lambda_1 + \lambda_2)\vec{a} - (\lambda_2 + \lambda_3)\vec{b} + (\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3)\vec{c} = \vec{0}.$$

Так как $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ линейно независимы (по условию они некомпланарны), то

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0; \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0; \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0. \end{cases}$$

Очевидно $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = -1$ являются ненулевым решением последней системы. Следовательно, $\vec{\ell}, \vec{m}$ и $\vec{n}$ линейно зависимы. Кроме того, $2\vec{\ell} + \vec{m} - \vec{n} = \vec{0}$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Определите начало вектора $\vec{a} = (2; 3; 1)$, если конец его совпадает с точкой $M(-2; 1; 3)$.

2. В треугольнике ABC даны: $A(-1; -3; 2)$, $\overrightarrow{AB} = (3; 1; 1)$ и $\overrightarrow{BC} = (1; -2; 5)$. Найдите координаты точек B, C и длину стороны AC.

3. Вектор $\vec{b}$ составляет с осями OX и OY углы $\alpha = 60°$, $\beta = 120°$ соответственно. Какой угол он составляет с осью OZ? Найдите координаты этого вектора, если $|\vec{b}| = 4$.

4. Найдите модуль и направляющие косинусы вектора $\vec{a} = (2; 3; 6)$.

5. Определите, может ли вектор $\vec{a}$ составлять с координатными осями углы:

а) $\alpha = 30°$, $\beta = 60°$, $\gamma = 150°$;

б) $\alpha = 45°$, $\beta = 60°$, $\gamma = 120°$.

6. Два вектора $\overrightarrow{AB} = (2; -3; 6)$ и $\overrightarrow{AC} = (-1; 2; -1)$ являются сторонами треугольника ABC. Найдите векторы, совпадающие с медианами этого треугольника.

7. Два вектора $\vec{a} = (4; -3; 0)$ и $\vec{b} = (2; -4; 4)$ приложены к одной точке. Определите координаты вектора c, направленного по биссектрисе угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, при условии $|\vec{c}| = 4\sqrt{3}$.

8. На плоскости даны два вектора $\vec{p} = (1; 2)$, $\vec{q} = (0, 3)$. Найдите разложение вектора $\vec{a} = (2; 5)$ по базису $\vec{p}$, $\vec{q}$.

9. Даны три вектора $\vec{p} = (2;1;0)$, $\vec{q} = (1; -1; 2)$, $\vec{r} = (2; 2; -1)$. Найдите разложение вектора $\vec{c} = (3; 7; -7)$ по базису $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$.

10. Найдите координаты центра тяжести треугольника с вершинами $A(2; 3; 4)$; $B(3; 1; 2)$ и $C(4; -1; 3)$

11. К одной и той же точке приложены две силы P и Q, действующие под углом в 120°, причем $|P| = 7$ и $|Q| = 4$. Найти величину равнодействующей силы R.

12. Найдите равнодействующую пяти компланарных сил, равных по величине и приложенных к одной и той же точке, зная, что углы между каждыми двумя последовательными силами равны 72°.

13. Докажите, что для любых трех векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и любых трех чисел α, β, γ векторы $\alpha\vec{a} - \beta\vec{b}$; $\gamma\vec{b} - \alpha\vec{c}$; $\beta\vec{c} - \gamma\vec{a}$ линейно зависимы.

14. Даны три некомпланарных вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Проверьте, будут ли линейно зависимы векторы:

а) $\vec{\ell} = 2\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$; $\vec{m} = 2\vec{b} - \vec{c} - \vec{a}$ и $\vec{n} = 2\vec{c} - \vec{a} - \vec{b}$;

б) $\vec{\ell} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$; $\vec{m} = \vec{b} + \vec{c}$ и $\vec{n} = \vec{c} - \vec{a}$.

15. В случае положительного ответа указать линейную зависимость, их связывающую.

§ 2. Скалярное произведение двух векторов. Проекция вектора на ось

Скалярным произведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется действительное число (скаляр) (обозначение $(\vec{a}, \vec{b})$), равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними, т.е.

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi,$$

где φ – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Проекцией вектора $\vec{a}$ на ось вектора $\vec{b}$ называется число: $np_{\vec{b}}\vec{a} = |\vec{a}| \cos\varphi$.

С помощью понятия проекции скалярное произведение двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ принимает вид:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{b}|\, np_{\vec{b}}\vec{a} = |\vec{a}|\, np_{\vec{a}}\vec{b}. \qquad (2.1)$$

Справедливы следующие свойства скалярного произведения для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и любого $\lambda \in R$:

1) $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$;

2) $(\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{c}) + (\vec{b}, \vec{c})$;

3) $(\lambda\vec{a}, \vec{b}) = \lambda(\vec{a}, \vec{b})$;

4) $(\vec{a}, \vec{b}) = 0$ тогда и только тогда, когда вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ортогональны между собой (критерий ортогональности двух векторов);

5) $(\vec{a}, \vec{a}) > 0$ для любого $\vec{a} \neq \vec{0}$.

Найдем *выражение скалярного произведения* через координаты перемножаемых векторов в ортонормированном базисе.

Если в ортонормированном базисе $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ сомножители $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеют координаты $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$, $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$, то их скалярное произведение вычисляется по формуле $(\vec{a}, \vec{b}) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$.

<u>Задача 2.1.</u> Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi = \frac{2\pi}{3}$, $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$. Найдите b: 1) $(\vec{a}, \vec{b})$; 2) $(3\vec{a} - 2\vec{b}; \vec{a} + 2\vec{b})$; 3) $(3\vec{a} - 2\vec{b})^2$.

Решение. **1.** $(\vec{a},\vec{b}) = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\frac{2\pi}{3} = 3\cdot 4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -6.$

2. $(3\vec{a}-2\vec{b};\ \vec{a}+2\vec{b}) = 3(\vec{a},\ \vec{a}) + 6(\vec{a},\ \vec{b}) - 2(\vec{b},\ \vec{a}) - 4(\vec{b},\ \vec{b}) =$

$= 3|\vec{a}|^2 + 4(\vec{a},\ \vec{b}) - 4|\vec{b}|^2 = 3\cdot 3^2 + 4\cdot 3\cdot 4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) - 4\cdot 4^2 = -61.$

Здесь были использованы свойства 1)–3) скалярного произведения.

3. $(3\vec{a}-2\vec{b})^2 = (3\vec{a}-2\vec{b};\ 3\vec{a}-2\vec{b}) = 9(\vec{a},\ \vec{a}) - 12(\vec{a},\ \vec{b}) + 4(\vec{b},\ \vec{b}) =$

$= 9|\vec{a}|^2 - 12|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\left(-\frac{1}{2}\right) + 4|\vec{b}|^2 = 9\cdot(3)^2 - 12\cdot 3\cdot 4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) + 4\cdot 4^2 = 217.$

<u>Задача 2.2.</u> Даны два вектора $\vec{a} = (1;\ -1;\ 0)$ и $\vec{b} = (2;\ 0;\ -1)$. Найдите: 1) угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{a}-2\vec{b}$; 2) проекцию вектора $\vec{b}$ на направление вектора $\vec{a}+\vec{b}$.

Решение. **1.** Из определения скалярного произведения двух векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ следует, что угол между этими векторами может быть найден по формуле

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{x},\ \vec{y})}{|\vec{x}|\cdot|\vec{y}|}.$$

Согласно этой формуле угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{a}-2\vec{b}$ вычисляется по формуле

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{a},\ \vec{a}-2\vec{b})}{|\vec{a}|\cdot|\vec{a}-2\vec{b}|}.$$

Так как $\vec{a}-2\vec{b} = (1-4;\ -1;\ 0-2(-1)) = (-3;\ -1;\ 2),$

$$|\vec{a}-2\vec{b}| = \sqrt{9+1+4} = \sqrt{14}$$

и $|\vec{a}| = \sqrt{2},$ то $\cos\varphi = \frac{-3+1+0}{\sqrt{2}\sqrt{14}} = -\frac{1}{\sqrt{7}}$

2. Из формулы (2.1) имеем:

$$np_{\vec{a}+\vec{b}}\vec{b} = \frac{(\vec{b},\ \vec{a}+\vec{b})}{|\vec{a}+\vec{b}|}.$$

Так как $\vec{a}+b=(1+2;\ -1+0;\ 0-1)=(3;\ -1;\ -1)$ и $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=$ $=\sqrt{9+1+1}=\sqrt{11},$ то

$$np_{\vec{a}+\vec{b}}\vec{b}=\frac{3\cdot 2+(-1)\cdot 0+(-1)\cdot(-1)}{\sqrt{11}}=\frac{7}{\sqrt{11}}.$$

<u>Задача 2.3.</u> Даны вершины треугольника $A(-1;\ -2;\ 4)$, $B(-4;\ -2;\ 0)$, $C(3;\ -2;\ 1)$. Найдите: 1) внешний угол при вершине C; 2) проекцию медианы $\overrightarrow{AM}$ на сторону $\overrightarrow{BC}$.

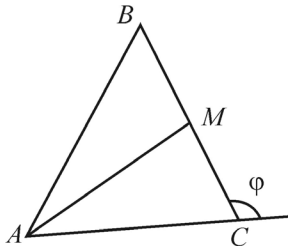


Рис. 2.1

Решение. **1.** Внешний угол φ при вершине C равен углу между векторами $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{CB}$ (рис. 2.1). Из формулы скалярного произведения между двумя векторами следует, что

$$\cos\varphi=\frac{(\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{CB})}{\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CB}\right|}.$$

Так как

$$\overrightarrow{AC}=(3-(-1);\ -2-(-2);\ 1-4)=(4;\ 0;\ -3),$$

$$\overrightarrow{CB}=(-4-3;\ -2-(-2);\ 0-1)=(-7;\ 0;\ -1)$$

и $$\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{16+9}=5,\quad \left|\overrightarrow{CB}\right|=\sqrt{49+1}=5\sqrt{2},$$

то $$\cos\varphi=\frac{-28+3}{5\cdot 5\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Следовательно, $\varphi=\dfrac{3\pi}{4}$.

2. Так как M – середина отрезка $[B,\ C]$, то координаты точки M имеют вид $M\left(\dfrac{-4+3}{2};\ \dfrac{-2-2}{2};\ \dfrac{0+1}{2}\right)$, или $M\left(\dfrac{1}{2};\ -2;\ \dfrac{1}{2}\right)$, и

$$np_{\overrightarrow{BC}}\overrightarrow{AM}=\frac{(\overrightarrow{AM},\ \overrightarrow{BC})}{\left|\overrightarrow{BC}\right|}.$$

Так как $\overrightarrow{AM}=\left(-\dfrac{1}{2}-(-1);\ -2-(-2);\ \dfrac{1}{2}-4\right)=\left(\dfrac{1}{2};\ 0;\ -\dfrac{7}{2}\right)$, $\overrightarrow{BC}=$ $=(3-(-4);\ -2-(-2);\ 1-0)=(7;\ 0;\ 1)$ и $\left|\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{49+1}=\sqrt{50},$ то

$$np_{\overrightarrow{BC}}\overrightarrow{AM}=\frac{\frac{1}{2}\cdot 7+0+1\left(-\frac{7}{2}\right)}{\sqrt{50}}=0,$$

т.е. медиана $\overrightarrow{AM}$ перпендикулярна стороне BC.

<u>Задача 2.4.</u> Докажите, что вектор $\vec{p}=(\vec{a},\vec{c})\vec{b}-(\vec{a},\vec{b})\vec{c}$ перпендикулярен вектору $\vec{a}$.

Решение. Из свойств скалярного произведения следует, что два вектора перпендикулярны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю. Преобразуем $(\vec{p},\vec{a})$, пользуясь линейностью скалярного произведения по первому аргументу:

$$(\vec{p},\vec{a})=((\vec{a},\vec{c})\vec{b}-(\vec{a},\vec{b})\vec{c},\vec{a})=(\vec{a},\vec{c})(\vec{b},\vec{a})-(\vec{a},\vec{b})(\vec{c},\vec{a}).$$

Последнее выражение равно нулю в силу симметрии скалярного произведения.

<u>Задача 2.5.</u> Вектор $\vec{a}$, перпендикулярный к векторам $\vec{b}=$ $=7\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}$ и $\vec{c}=2\vec{i}+3\vec{j}+8\vec{k}$, образует с осью OZ тупой угол. Найдите его координаты, зная, что $|\vec{a}|=\sqrt{6}$.

Решение. Пусть γ – угол между вектором $\vec{a}$ и осью OZ, или, что тоже самое, угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{k}$.

Пусть, далее, $\vec{a}=(x;\,y;\,z)$. Поскольку $\vec{k}=(0;\,0;\,1)$, то $(\vec{a},\vec{k})=$ $=x\cdot 0+y\cdot 0+z\cdot 1=z$. С другой стороны, так как $|\vec{k}|=1$, то $(\vec{a},\vec{k})=$ $=|\vec{a}|\cdot|\vec{k}|\cos\gamma=|\vec{a}|\cos\gamma$. Следовательно, $z=|\vec{a}|\cos\gamma$. По условию задачи γ – тупой угол, т.е. $\cos\gamma<0$. Тогда $z<0$.

Ввиду того, что $|\vec{a}|=\sqrt{6}$, имеем:

$$x^2+y^2+z^2=6. \tag{2.2}$$

Из условий задачи следует $(\vec{a},\vec{b})=(\vec{a},\vec{c})=0$, т.е.

$$\begin{cases}7x-3y+z=0;\\ 2x+3y+8z=0.\end{cases} \tag{2.3}$$

Выразим из системы (2.3) x и y через z

$$x = -z, \quad y = -2z. \tag{2.4}$$

Подставляя эти значения x и y в (2.2), получим

$$z = \pm 1.$$

Так как, $z < 0$, то $z = -1$.

Подставляя это значение z в (2.4) имеем:

$$x = 1, \quad y = 2.$$

Следовательно, $\vec{a} = (1;\ 2;\ -1)$.

<u>Задача 2.6.</u> Найдите проекцию вектора $\vec{a} = (1;\ -2;\ 3)$ на ось, составляющую с координатными осями OY и OZ углы $\beta = 60°$, $\gamma = 45°$, а с осью OX – тупой угол α.

Решение. Пусть $\vec{e} = (x;\ y;\ z)$ – единичный направляющий вектор данной оси. Так как $x = |\vec{e}|\cos\alpha = \cos\alpha$, $y = |\vec{e}|\cos\beta = \cos\beta = \frac{1}{2}$, $z = |\vec{e}|\cos\gamma = \cos\gamma = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (следует из определения направляющих косинусов вектора $\vec{a}$ (см. § 1)), отсюда: $1 = |\vec{a}|^2 = x^2 + y^2 + z^2 =$ $= \cos^2\alpha + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}$.

Следовательно, $\cos^2\alpha = \frac{1}{4}$, т.е. $\cos\alpha = \pm\frac{1}{2}$.

По условию α – тупой угол, т.е. $\cos\alpha < 0$. Тогда $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$, и $\vec{e} = \left(-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2};\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Из формулы следует, что

$$пр_{\vec{e}}\vec{a} = \frac{(\vec{a}, \vec{e})}{|\vec{e}|} = (\vec{a}, \vec{e}) = 1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) + (-2)\cdot\frac{1}{2} + 3\cdot\frac{\sqrt{2}}{3} = \frac{3}{2}\left(\sqrt{2} - 1\right).$$

<u>Задача 2.7.</u> Найдите угол α при вершине равнобедренного треугольника, зная, что медианы BK и AE, проведенные из концов основания этого треугольника, взаимно-перпендикулярны.

Решение. По условию задачи $(\overrightarrow{BK}, \overrightarrow{AE}) = 0$. Введем следующие обозначения: $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$, $|\vec{a}| = |\vec{b}| = \lambda$. Тогда $\overrightarrow{BK} = \frac{\vec{a}}{2} - \vec{b}$, $\overrightarrow{AE} = \frac{\vec{b}}{2} - \vec{a}$ (рис. 2.2). Так как $(\overrightarrow{BK}, \overrightarrow{BE}) = 0$, то:

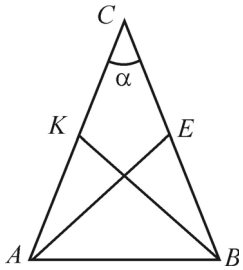


Рис. 2.2

$$0 = \left(\frac{\vec{a}}{2} - \vec{b}, \frac{\vec{b}}{2} - \vec{a}\right) = \frac{5}{4}\left(\vec{a}, \vec{b}\right) - \frac{1}{2}(\vec{a}, \vec{a}) - \frac{1}{2}\left(\vec{b}, \vec{b}\right) =$$

$$= \frac{5}{4}\left(\vec{a}, \vec{b}\right) - \lambda^2,$$

т.е. $\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \frac{4}{5}\lambda^2$. Из определения скалярного произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеем $\cos\alpha = \frac{\left(\vec{a}, \vec{b}\right)}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{\left(\vec{a}, \vec{b}\right)}{\lambda^2} = \frac{4}{5}$.

Следовательно, $\alpha = \arccos\frac{4}{5}$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Вектор $\vec{c}$ образует с векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ углы, равные $\varphi = \frac{\pi}{3}$. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ взаимно ортогональны и $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$, $|\vec{c}| = 2$. Вычислите:

а) $(\vec{a} + 2\vec{b}, \vec{b} - 2\vec{a})$;

б) $(\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c})^2$;

в) $\text{Пр}_{\vec{c}}(\vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c})$.

2. Известно, что $|\vec{a}| = 6$; $|\vec{b}| = 4$, а угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен $\varphi = \frac{\pi}{3}$. Определите скалярное произведение векторов $\vec{p} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$ и $\vec{q} = 3\vec{a} + 5\vec{b}$.

3. Вектор $\vec{a} = (2;\ 1;\ 3)$ коллинеарен вектору $\vec{b}$. Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равно 28. Определите координаты вектора $\vec{b}$.

4. Найдите проекцию вектора $\vec{a}$, имеющего длину a и направленного по биссектрисе угла XOY на ось, совпадающую с биссектрисой угла XOZ.

5. Найдите проекцию вектора $\vec{a} = (2;\ 3;\ 5)$ на ось, составляющую с осями координат равные тупые углы.

6. Даны вершины треугольника $A(-1;\ -2;\ 4)$, $B(-4;\ -2;\ 0)$, $C(3;\ -2;\ 1)$. Найдите:

а) внутренний угол при вершине A;

б) внешний угол при вершине C;

в) проекцию медианы AM на сторону BC.

7. Какой угол образуют единичные вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если известно, что векторы $\vec{p} = \vec{a} + 2\vec{b}$ и $\vec{q} = 5\vec{a} - 4\vec{b}$ взаимно ортогональны?

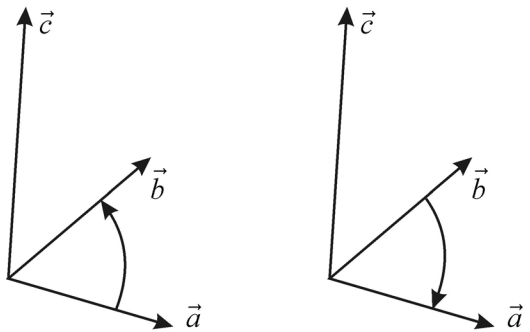
8. Даны вершины $A(1;\ 0)$, $B(2;\ -1)$, $C(1;\ 3)$ треугольника ABC. Найдите разложение вектора высоты BH этого треугольника по векторам AC и AB.

9. Даны векторы $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ и $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$, совпадающие со сторонами треугольника ABC. Найдите разложение по базису $\vec{b}$, $\vec{c}$ вектора, приложенного к вершине $\vec{b}$ этого треугольника и совпадающего с его высотой BH.

§ 3. Векторное произведение двух векторов

Упорядоченная тройка некомпланарных векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называется *правой* (*левой*) *тройкой*, если кратчайший поворот от первого вектора ко второму из конца третьего вектора виден против часовой стрелки (по часовой стрелке), (рис. 3.1).

Векторным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор, обозначаемый $[\vec{a}, \vec{b}]$ и удовлетворяющий условиям:



Правая тройка Левая тройка Рис. 3.1

1) $\left|[\vec{a},\vec{b}]\right| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi,$ где φ – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ $0 \le \varphi \le 2\pi,$ т.е. длина векторного произведения $[\vec{a},\vec{b}]$ равно площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, приведенных к общему началу;

2) $[\vec{a},\vec{b}] \perp \vec{a};$ $[\vec{a},\vec{b}] \perp \vec{b},$ т.е. вектор $[\vec{a},\vec{b}]$ перпендикулярен плоскости, проходящей через вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, приведенных к общему началу;

3) направление вектора $[\vec{a},\vec{b}]$ такое, что тройка векторов $\vec{a};$ $\vec{b};$ $[\vec{a},\vec{b}]$ – правая.

Справедливы следующие свойства векторного произведения двух векторов:

1) $[\vec{a},\vec{b}] = -[\vec{b},\vec{a}]$ (антикоммутативность);

2) $[\alpha\vec{a}+\beta\vec{b},\vec{c}] = \alpha[\vec{a},\vec{c}]+\beta[\vec{b},\vec{c}]$ (линейность по первому аргументу);

3) $[\vec{a},\lambda\vec{b}+\mu\vec{c}] = \lambda[\vec{a},\vec{b}]+\mu[\vec{a},\vec{c}]$ (линейность по второму аргументу);

4) два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда $[\vec{a},\vec{b}] = \vec{0}$ (критерий коллинеарности двух векторов).

Найдем выражение векторного произведения двух векторов через координаты перемножаемых векторов. Пусть $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ – правый

ортонормированный базис (ОНБ) и $\vec{a}=(x_1;\, y_1;\, z_1)$, $\vec{b}=(x_2;\, y_2;\, z_2)$ – два заданных вектора. Тогда

$$[\vec{a},\, \vec{b}]=\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\vec{k}, \qquad (3.1)$$

где $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ называется определителем матрицы $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ второго порядка.

Равенство (3.1) можно записать в виде

$$[\vec{a},\, \vec{b}]=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}. \qquad (3.2)$$

Под $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ понимается определитель матрицы третьего порядка $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

Определитель третьего порядка вычисляется по формуле

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \qquad (3.3)$$

<u>Задача 3.1.</u> Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен $\frac{\pi}{6}$, $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=4$. Вычислите: 1) $|[\vec{a},\, \vec{b}]|$; 2) $|[3\vec{a}+\vec{b},\, 2\vec{b}-\vec{a}]|$.

Решение. **1.** Из определения векторного произведения двух векторов следует, что

$$|[\vec{a},\, \vec{b}]|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi=3\cdot 4\cdot\sin\frac{\pi}{6}=3\cdot 4\cdot\frac{1}{2}=6.$$

2. Найдем векторное произведение

$$\left[3\vec{a}+\vec{b},\, 2\vec{b}-\vec{a}\right]=6\left[\vec{a},\,\vec{b}\right]-3\left[\vec{a},\,\vec{a}\right]+2\left[\vec{b},\,\vec{b}\right]-\left[\vec{b},\,\vec{a}\right]=7\left[\vec{a},\,\vec{b}\right],$$

где были использованы свойства линейности векторного произведения, антикоммутативности и критерий коллинеарности двух векторов. Тогда $\left|[3\vec{a}+\vec{b},\, 2\vec{b}-\vec{a}]\right|=7\left|[\vec{a},\,\vec{b}]\right|=7\cdot 6=42.$

<u>Задача 3.2.</u> Даны точки $A(1;\,2;\,0)$, $B(3;\,0;\,-3)$, $C(5;\,2;\,6)$. Найдите: 1) единичный вектор $\vec{n}$, перпендикулярный плоскости треугольника ABC; 2) площадь треугольника ABC.

Решение. **1.** Из определения векторного произведения двух векторов следует, что одним из векторов, перпендикулярных плоскости треугольника ABC, является вектор $\vec{N}=\left[\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AC}\right]$. Так как $\overrightarrow{AB}=(3-1;\,0-2;\,-3-0)=(2;\,-2;\,-3)$, $\overrightarrow{AC}=(5-1;\,2-2;\,6-0)=(4;\,0;\,6)$.

Векторное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ найдем по формуле (3.2)

$$\vec{N}=\left[\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AC}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -2 & -3\\ 4 & 0 & 6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-2 & -3\\ 0 & 6\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}2 & -3\\ 4 & 6\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}2 & -2\\ 4 & 0\end{vmatrix}\vec{k}=$$

$$=-12\vec{i}-(12+12)\vec{j}+8\vec{k}=-12\vec{i}-24\vec{j}+8\vec{k},$$

$$\left|\vec{N}\right|=\sqrt{144+576+64}=28.$$

Тогда $\vec{n}=\pm\dfrac{\vec{N}}{\left|\vec{N}\right|}=\pm\dfrac{\vec{N}}{28}=\pm\left(\dfrac{3}{7}\vec{i}+\dfrac{6}{7}\vec{j}-\dfrac{2}{7}\vec{k}\right).$

2. Из определения векторного произведения векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ следует, что модуль вектора $\left[\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AC}\right]$ равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$. Отсюда получаем, что площадь треугольника ABC равна $\dfrac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AC}\right]\right|$. Так как $\left|\left[\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AC}\right]\right|=\left|\vec{N}\right|=28$, то $S_{ABC}=14$.

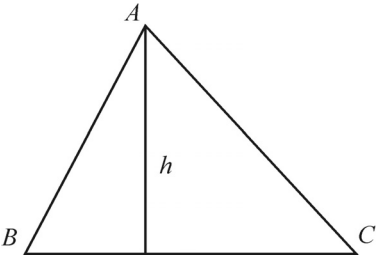


Рис. 3.2

Задача 3.3. В базисе $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ даны вершины треугольника $A(1;\ 0;\ 1)$, $B(1;\ 1;\ 0)$, $C(2;\ 3;\ 1)$. Вычислите длину его высоты, опущенной из вершины A на сторону BC.

Решение. Из соотношения $s = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{BC}\right| \cdot h$ (рис. 3.2) следует: $h = \frac{2S}{\left|\overrightarrow{BC}\right|}$. Вектор $\overrightarrow{BC} = (2-1;\quad 3-1;\ 1-0) = (1;\ 2;\ 1)$. Тогда $\left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$.

С другой стороны, площадь треугольника ABC равна $S = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right]\right|$. Так как $\overrightarrow{BA} = (1-1;\ 0-1;\ 1-0) = (0;\ -1;\ 1)$ и $\overrightarrow{BC} = (1;\ 2;\ 1)$, то

$$\left[\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\vec{k}$$

(в силу (3.2), (3.3)).

Следовательно, $\left[\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right] = -3\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, т.е. $\left[\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right] = (-3;\ 1;\ 1)$.

Получаем $S = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right]\right| = \frac{1}{2}\sqrt{9+1+1} = \frac{\sqrt{11}}{2}$. Окончательно, $h = \frac{2S}{\left|\overrightarrow{BC}\right|} = \sqrt{\frac{11}{6}}$.

Задача 3.4. Вектор $\vec{a}$, перпендикулярный к векторам $\vec{b} = (2;\ 4;\ 1)$ и $\vec{c} = (4;\ 2;\ -1)$, образует с осью OX острый угол. Зная, что $|\vec{a}| = \sqrt{6}$, найдите его координаты.

Решение. Пусть $\vec{a} = (x;\ y;\ z)$. Так как векторы $\vec{a}$ и $[\vec{b}, \vec{c}]$ оба перпендикулярны к одной и той же плоскости, проходящей через

векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$, приведенные к общему началу, то векторы $\vec{a}$ и $[\vec{b}, \vec{c}]$ коллинеарны. Следовательно, они отличаются только числовым множителем, т.е. $\vec{a} = \lambda[\vec{b}, \vec{c}]$, где число λ подлежит определению. Так как (см. (3.2), (3.3))

$$[\vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \vec{k} = -6\vec{i} + 6\vec{j} - 12\vec{k},$$

то $\vec{a} = (-6\lambda;\ 6\lambda;\ -12\lambda)$. Тогда $|\vec{a}| = \sqrt{36\lambda^2 + 36\lambda^2 + 144\lambda^2} = 6\sqrt{6}\,|\lambda|$. По условию $|\vec{a}| = \sqrt{6}$, следовательно, $|\lambda| = \dfrac{1}{6}$ или $\lambda = \pm\dfrac{1}{6}$. Таким образом, $\vec{a} = \pm\dfrac{1}{6}[\vec{b}, \vec{c}] = \pm(-1;\ 1;\ -2)$.

Вектор $\vec{a}$ по условию образует острый угол с OX, из этого вытекает, что первая координата вектора $\vec{a}$ должна быть положительной. Итак, окончательно $\vec{a} = (1;\ -1;\ 2)$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен $3\pi/4$, $|\vec{b}| = 2$, $|\vec{a}| = 1$. Вычислите $[3\vec{a} - \vec{b}, 2\vec{a} + \vec{b}]^2$.

2. Определите модуль векторного произведения векторов $\vec{p} = 4\vec{a} - 2\vec{b}$ и $\vec{q} = 7\vec{a} - 9\vec{b}$, если $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$, а угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен $\varphi = \dfrac{5\pi}{6}$.

3. Даны два вектора $\vec{a} = (3;\ -1;\ -2)$ и $\vec{b} = (1;\ 2;\ -1)$. Найдите координаты векторного произведения векторов $\vec{p} = 2\vec{a} - \vec{b}$ и $\vec{q} = \vec{a} + 2\vec{b}$.

4. Найдите единичные векторы, перпендикулярные плоскости, натянутой на векторы $\vec{a} = (2;\ -1;\ 3)$, $\vec{b} = (2;\ 0;\ 3)$.

5. Найдите направляющие косинусы вектора, перпендикулярного к векторам $\vec{a} = (-1; 3; 2)$ и $\vec{b} = (2; 3; 2)$, если он образует тупой угол с осью OY.

6. Даны точки $A(-1; -3; 2)$, $B(2; 4; 5)$ и $C(1; -2; 6)$. Найдите площадь треугольника ABC.

7. Вектор $\vec{x}$, перпендикулярный к оси OY и вектору $\vec{a} = (8; -15; 6)$, образует острый угол с осью OZ. Найдите его координаты, если $|\vec{x}| = 10$.

8. Найдите площадь треугольника ABC, если $\overrightarrow{AB} = 2\vec{p} + \vec{q}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{p} - 3\vec{q}$, $|\vec{p}| = 2$, $|\vec{q}| = 1$, а угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$ равен $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$.

9. Даны вершины треугольника $A(1; -1; 2)$, $B(5; -6; 2)$, $C(1; 3; -1)$. Найдите длину высоты BH треугольника ABC, опущенной из вершины B на сторону AC.

§ 4. Смешанное произведение трех векторов

Смешанное произведение трех векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ определяется по формуле $\left(\left[\vec{a}, \vec{b}\right], \vec{c}\right)$ и обозначается $\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)$. Другими словами, смешанное произведение трех векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ есть число, равное скалярному произведению векторов $\left[\vec{a}, \vec{b}\right]$ и $\vec{c}$.

Смешанное произведение трех векторов обладает следующими свойствами:

1) смешанное произведение равно нулю, если один из сомножителей – нулевой вектор, или имеется два одинаковых сомножителя;

2) от перемены мест двух сомножителей смешанное произведение меняет знак;

3) смешанное произведение линейно по каждому сомножителю, т.е.

а) $\left(\lambda\vec{a} + \mu\vec{d}, \vec{b}, \vec{c}\right) = \lambda(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) + \mu(\vec{d}, \vec{b}, \vec{c})$;

б) $\left(\vec{a}, \lambda\vec{b} + \mu\vec{d}, \vec{c}\right) = \lambda(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) + \mu(\vec{a}, \vec{d}, \vec{c})$;

в) $\left(\vec{a}, \vec{b}, \lambda\vec{c} + \mu\vec{d}\right) = \lambda(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) + \mu(\vec{a}, \vec{b}, \vec{d})$;

4) $\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) = \begin{cases} +\text{объем } V, \text{ если } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} - \text{правая тройка;} \\ -\text{объем } V, \text{ если } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} - \text{левая тройка,} \end{cases}$

где V – параллелепипед, построенный на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, которые приведены к общему началу;

5) критерий компланарности трех векторов: три вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение $\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)$ равно нулю.

Приведем выражение смешанного произведения трех векторов через координаты перемножаемых векторов в ортонормированном базисе. Пусть $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – правый ортонормированный базис и $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$, $\vec{c} = (c_1; c_2; c_3)$ – заданные векторы с координатами в данном базисе. Тогда

$$\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \qquad (4.1)$$

<u>Задача 4.1.</u> Даны три вектора $\vec{a} = (2; -1; 0)$, $\vec{b} = (0; 1; 1)$, $\vec{c} = (-1; 1; 1)$. Выясните, правая это тройка или левая и образуют они базис или нет.

Решение. Воспользуемся свойствами 4 и 5 смешанного произведения. Согласно формуле (4.1) имеем:

$$\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) =$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 0 + 1 + 0 = 1 > 0.$$

Так как смешанное произведение $\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) \neq 0$, то векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ некомпланарны (согласно свойству 5) и поэтому образуют базис. Кроме того, тройка векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ является правой тройкой векторов (в силу свойства 4).

Задача 4.2. Вектор $\vec{c}$ перпендикулярен к векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 30°. Зная, что $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = 3$, $|\vec{c}| = 3$ вычислите $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

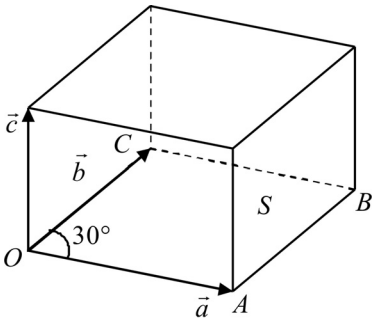


Рис. 4.1

Решение. Смешанное произведение $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ согласно свойству 4 равно $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \pm$ объем V, где V – параллелепипед, построенный на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, приведенных к общему началу O. (рис. 4.1).

Объем $V = S_{OABC} \cdot h$, так как $h = |\vec{c}| = 3$ ($\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$ по условию)

$$S_{OABC} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin 30° = 6 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = 9.$$

Следовательно, $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \pm 27$, причем знак «+» берется в случае, если $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют правую тройку и знак «–», если $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют левую тройку.

Задача 4.3. Вычислите объем тетраэдра (треугольной пирамиды), вершины которого находятся в точках $A(1; 1; 1)$, $B(2; 1; 1)$, $C(3; 2; 2)$ и $D(2; 3; 4)$.

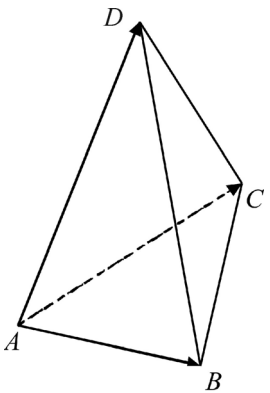


Рис. 4.2

Решение. Нетрудно заметить, что объем этого тетраэдра равен $V = \frac{1}{6} \left| \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD} \right) \right|$ (рис. 4.2). Так как $\overrightarrow{AB} = (2-1; 1-1; 1-1) = (1; 0; 0)$

$$\overrightarrow{AC} = (3-1; 2-1; 2-1) = (2; 1; 1),$$

$$\overrightarrow{AD} = (2-1; 3-1; 4-1) = (1; 2; 3).$$

Согласно формуле (4.1) имеем:

$$V=\frac{1}{6}\cdot\left\|\begin{matrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3\end{matrix}\right\|=\frac{1}{6}\left\|\begin{matrix}1 & 1\\ 2 & 3\end{matrix}\right\|=\frac{1}{6}.$$

Задача 4.4. Докажите, что точки $A(1;\ 2;\ -1)$, $B(0;\ 1;\ 5)$, $C(-1;\ 2;\ 1)$, $D(2;\ 1;\ 3)$ лежат в одной плоскости.

Решение. Точки A, B, C, D лежат в одной плоскости тогда и только тогда, когда компланарны векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$. Согласно критерию компланарности трех векторов (свойство 5) векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$ будут компланарны тогда и только тогда, когда $(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AD})=0$.

Так как $\overrightarrow{AB}=(0-1;\ 1-2;\ 5-(-1))=(-1;\ -1;\ 6)$,

$$\overrightarrow{AC}=(-1-1;\ 2-2;\ 1-(-1))=(-2;\ 0;\ 2),$$

$$\overrightarrow{AD}=(2-1;\ 1-2;\ 3-(-1))=(1;\ -1;\ 4).$$

Согласно формуле (4.1)

$$(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AD})=\begin{vmatrix}-1 & -1 & 6\\ -2 & 0 & 2\\ 1 & -1 & 4\end{vmatrix}=$$

$$=-1\begin{vmatrix}0 & 2\\ -1 & 4\end{vmatrix}-(-1)\begin{vmatrix}-2 & 2\\ 1 & 4\end{vmatrix}+6\begin{vmatrix}-2 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-2-10+12=0.$$

Следовательно, точки A, B, C и D лежат в одной плоскости.

Задача 4.5. Даны вершины тетраэдра $A(2;\ 3;\ 1)$, $B(4;\ 1;\ -2)$, $C(6;\ 3;\ 7)$, $D(-5;\ -4;\ 8)$. Найдите длину его высоты, опущенной из вершины D.

Решение. Так же как и в задаче 4.4, объем V тетраэдра равен $V=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AD}\right)\right|$.

Найдем векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$: $\overrightarrow{AB}=(2;\ -2;\ -3)$, $\overrightarrow{AC}=(4;\ 0;\ 6)$, $\overrightarrow{AD}=(-7;\ -7;\ 7)$. Тогда

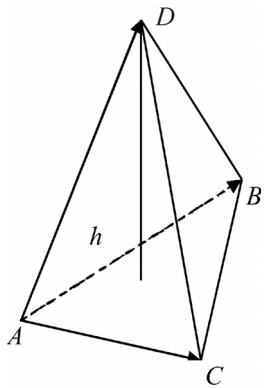


Рис. 4.3

$$V=\frac{1}{6}\cdot\left\|\begin{matrix}2 & -2 & -3\\ -4 & 0 & 6\\ -7 & -7 & 7\end{matrix}\right\|=\frac{1}{6}\left|2\begin{vmatrix}0 & 6\\ -7 & 7\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}4 & 6\\ -7 & 7\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix}4 & 0\\ -7 & -7\end{vmatrix}\right|=$$

$$=\frac{1}{6}\left|84+140+84\right|=\frac{154}{3}.$$

С другой стороны, объем V тетраэдра равен: $V=\frac{1}{3}S_{ABC}\cdot h.$

Отсюда

$$h=\frac{3V}{S_{ABC}}=\frac{154}{S_{ABC}}, \qquad (4.2)$$

S_{ABC} в силу определения векторного произведения двух векторов равна

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -2 & -3\\ 4 & 0 & 6\end{matrix}\right\|=$$

$$=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}-2 & -3\\ 0 & 6\end{matrix}\right|\vec{i}-\begin{vmatrix}2 & -3\\ 4 & 6\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}2 & -2\\ 4 & 0\end{vmatrix}\vec{k}\Bigg|=\frac{1}{2}\left|\left(-12\vec{i}-24\vec{j}+8\vec{k}\right)\right|=$$

$$=\left|\left(-6\vec{i}-12\vec{j}+4\vec{k}\right)\right|=\sqrt{36+144+16}=14.$$

Подставляя это в (4.2), получим $h=\frac{154}{14}=11.$

Задачи для самостоятельного решения

1. Даны координаты векторов $\vec{a}=(1;\,2;\,1)$, $\vec{b}=(1;\,3;\,-2)$ и $\vec{c}=$ $=(1;\,1;\,1)$ в правом базисе $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$. Докажите, что эти три вектора образуют базис. Выясните, правая эта тройка или левая.

2. Даны три таких вектора $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, что $|\vec{a}|=6$, $|\vec{b}|=5$, $|\vec{c}|=2$. Найдите смешанное произведение векторов $\vec{p}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$, $\vec{q}=\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{r}=2\vec{a}+3\vec{c}$, если известно, что $\vec{c}$ ортогонален векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен $\varphi=\frac{\pi}{6}$.

3. Найдите объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a} = \vec{p} + \vec{q} - \vec{r}$, $\vec{b} = \vec{p} + 2\vec{q} - \vec{r}$, $\vec{c} = \vec{p} - \vec{q}$, если вектор $\vec{r}$ ортогонален векторам $\vec{p}$ и $\vec{q}$, угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$ равен $\frac{\pi}{3}$ и $|\vec{p}| = 1$, $|\vec{q}| = 2$, $|\vec{r}| = 3$.

4. Даны точки $A(1; 0; 0)$, $B(-1; 2; 1)$, $C(3; 1; 2)$ и $S(-2; 0; 1)$. Найдите объем тетраэдра $SABC$.

5. Даны вершины тетраэдра $A(-1; -2; 2)$, $B(1; 4; 0)$, $C(-4; 2; 1)$ и $D(-5; -5; 3)$. Найдите длину высоты тетраэдра, опущенной из вершины D на основание ABC.

6. Объем тетраэдра равен $V = 1$. Три вершины его находятся в точках $A(1; -1; 3)$, $B(1; 0; 2)$, $C(-2; 1; 1)$. Найдите координаты его четвертой вершины D, если известно, что она лежит на оси OX.

Вопросы для самоконтроля

1. Может ли быть линейно зависимой система, состоящая из одного вектора?

2. Что такое направляющие косинусы вектора и как их найти?

3. Может ли базис в пространстве состоять из двух векторов?

4. Что такое проекция вектора на ось? Как найти проекцию вектора на ось?

5. В пространстве даны три вектора: $\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\vec{b} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ и $\vec{c} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$. Как определить, образуют ли эти векторы базис в пространстве? А если образуют, то будет он правым или левым?

6. Могут ли одновременно иметь место неравенства: $|\vec{a} + \vec{b}| < |\vec{a}|$ и $|\vec{a} + \vec{b}| < |\vec{b}|$?

7. Если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – данные векторы, то при каких условиях векторы $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$ коллинеарны?

8. $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – неколлинеарные векторы. Найдите условия, при которых $\vec{a} + \vec{b} = \vec{a} - \vec{b}$.

9. Покажите, что сумма n векторов с общим началом в центре правильного n-угольника и концами в его вершинах равна нулевому вектору.

10. Если a и b – числа, то $ab = ba$. Будет ли справедливо это свойство:

а) для скалярного произведения векторов;

б) для векторного произведения векторов?

11. Если a и b – числа, то из равенства $ab = 0$ следует, что хотя бы одно из чисел a или b равно нулю. Будет ли справедливо это свойство:

а) для скалярного произведения векторов;

б) для векторного произведения векторов?

12. Если a и b – числа, то уравнение $ax = b$ при $a \neq 0$ имеет единственное решение. Будет ли справедливо это утверждение, если дано уравнение $(\vec{a}, \vec{x}) = b$, где $\vec{a}$ – ненулевой вектор; b – данное число, а $(\vec{a}, \vec{x})$ – скалярное произведение данного и искомого векторов? Выясните геометрический смысл решений.

13. Пусть $[\vec{a}, \vec{p}] = [\vec{b}, \vec{p}]$ для любого вектора $\vec{p}$. Следует ли отсюда, что $\vec{a} = \vec{b}$?

14. Пусть $(\vec{a}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c})$ при $\vec{c} \neq \vec{0}$. Можно ли сократить это соотношение на $\vec{c}$? Объясните результат.

15. Пусть $[\vec{a}, \vec{c}] = [\vec{b}, \vec{c}]$ при $\vec{c} \neq \vec{0}$. Можно ли сократить это соотношение на $\vec{c}$, т.е. следует ли из предыдущего соотношения, что $\vec{a} = \vec{b}$?

16. Пусть $\vec{a}$ и $\vec{x}$ – произвольные векторы. Всегда ли имеет решение уравнение $(\vec{a}, \vec{x}) = b$, где b – произвольное число? В случае, когда уравнение имеет решение, выясните геометрический смысл.

Рекомендуемая литература

1. Сандаков Е.Б. Основы аналитической геометрии и линейной алгебры. М.: МИФИ, 2005.

2. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М.: Высшая школа, 1998.

3. Ильин В.А., Поздняк Э.Г. Аналитическая геометрия. М.: Наука, 1999.