Министерство образования и науки
Российской Федерации

Национальный исследовательский
ядерный университет „МИФИ“

Д. Г. Орловский

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ. ПРАКТИКУМ
Часть 1

Рекомендовано УМО „Ядерные физика и технологии“
в качестве учебного пособия
для студентов высших учебных заведений

Москва 2010

УДК 517.518.12 (076.5)
ББК 22.161.5я
О-66

Орловский Д. Г. **Определенный интеграл. Практикум. Часть 1.** Учебное пособие. – М.: НИЯУ МИФИ. 2010 – 354 с.

Учебное пособие посвящено практике работы с определенным интегралом. Владение техникой работы с интегралом наряду с техникой дифференцирования является важной составной частью фундаментального образования математиков и физиков-теоретиков. Поэтому наличие пособий по данной тематике представляется актуальным. Особенностью данного пособия является то, что все рассматриваемые задачи приводятся с решениями, поэтому оно может быть использовано для самостоятельного изучения.

Пособие состоит из двух частей. В первой части рассматриваются фундаментальные понятия, связанные с определенным интегралом. Вторая часть пособия посвящена приложениям определенного интеграла.

Настоящее пособие предназначено для студентов университетов, технических и педагогических вузов, вузов с углубленным изучением математики. Оно может быть также использовано преподавателями при проведении семинарских занятий по рассматриваемой в пособии теме.

Подготовлено в рамках Программы создания и развития НИЯУ МИФИ.

Рецензент доцент А. Г. Слесарев

ISBN 978–5–7262–1372–9
ISBN 978–5–7262–1249–4 (Ч. 1)
© Национальный исследовательский ядерный университет „МИФИ“, 2010

Предисловие

Настоящая книга представляет собой учебное пособие по определенному интегралу для студентов физико-математических специальностей высших учебных заведений и университетов. За основу взят известный задачник Б. П. Демидовича [7], являющийся основным по рассматриваемой теме. Особенностью данного пособия является решение всех примеров задачника Демидовича, составляющих его четвертую главу. В связи с этим сохранена нумерация задач, принятая в [7], и поэтому первая задача в пособии имеет номер 2181. Помимо примеров из указанного выше задачника в тексте присутствуют задачи полезные для понимания дальнейшего материала. Они имеют свою нумерацию, и их решения или ответы к ним приведены в конце пособия.

Пособие состоит из двух частей. В первой части рассматриваются фундаментальные понятия, связанные с определенным интегралом. Вторая часть пособия посвящена приложениям определенного интеграла.

В пособии практически нет теоретического материала, упор делается на практическую сторону вопроса. Тем не менее теоретическая сторона предмета важна для правильного понимания предмета. Поэтому читателю рекомендуется одновременно читать и соответствующие разделы учебника. Ссылки на общепринятые учебники и пособия, аналогичные данному, приведены в конце пособия в списке литературы. В качестве учебников можно рекомендовать книги [2] – [5], а в качестве пособий по практическому решению задач издания [6] и [8].

В пособии используются значения некоторых неопределенных интегралов из задачника [7]. Вычисление этих интегралов не приводится, читатель может ознакомиться с решением этих задач в [1].

Данное пособие может быть полезно не только студентам и преподавателям, но и всем тем, кто интересуется высшей математикой.

Глава 1

Понятие определенного интеграла

К понятию определенного интеграла как предела интегральных сумм можно придти, решая различные физические задачи. Рассмотрим, например, вопрос об определении массы стержня переменной плотности.

Пусть стержень постоянного сечения S занимает отрезок $[a; b]$ вещественной оси Ox и его плотность $\rho = \rho(x)$. Разобьем стержень на небольшие участки плоскостями $x = x_i$ $(0 \leqslant i \leqslant n)$, перпендикулярными к оси Ox. Пусть

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

и длина каждого участка $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ настолько мала, что плотность стержня на промежутке $x \in [x_i; x_{i+1}]$ практически постоянна. Это означает, что если мы выберем произвольную точку $\xi_i \in [x_i; x_{i+1}]$, то можно считать, что средняя плотность стержня на выбранном участке $\rho \approx \rho(\xi_i)$. В этом случае масса участка стержня, отвечающего отрезку $[x_i; x_{i+1}]$, равна $\rho(\xi_i) S \Delta x_i$ (величина $S\Delta x_i$ равна объему рассматриваемого участка стрежня, а $\rho(\xi_i)$ – его средняя плотность). Суммируя массы всех участков, получаем приближенно массу стержня:

$$M \approx \sum_{i=0}^{n-1} \rho(\xi_i) S \Delta x_i. \tag{1.1}$$

Когда число отрезков разбиения неограниченно увеличивается и длины всех отрезков уменьшаются так, что величина

$$\lambda(T) = \max_{0 \leqslant i \leqslant n-1} \Delta x_i \to 0,$$

то в пределе мы получаем точное значение массы стержня

$$M = \lim_{\lambda(T) \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \rho(\xi_i) S \Delta x_i.$$

Рассмотренная выше конструкция приводит к понятию определенного интеграла для произвольной функции f, заданной на отрезке $[a; b]$ вещественной оси. Для произвольного натурального числа n рассмотрим разбиение

$$T = \{x_0,\, x_1,\, \ldots\,,\, x_n\}$$

($a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$) отрезка $[a; b]$. Характеристикой этого разбиения назовем величину

$$\lambda(T) = \max_{0 \leqslant i \leqslant n-1} \Delta x_i$$

($\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$). Разметкой разбиения T назовем набор точек

$$\xi = \{\xi_1,\, \ldots\,,\, \xi_n\},$$

для которого $\xi_i \in [x_i; x_{i+1}]$ ($0 \leqslant i \leqslant n-1$). Интегральной суммой функции f на размеченном разбиении (T, ξ) назовем величину

$$S(f; T, \xi) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i.$$

Наконец, определенным интегралом от функции f по отрезку $[a; b]$ назовем предел интегральных сумм при условии, что характеристика разбиения стремится к нулю:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\lambda(T) \to 0} S(f; T, \xi)$$

(если этот предел существует).

Применительно к предыдущему примеру, мы можем сказать, что масса стержня определяется равенством

$$M = \int_a^b \rho(x) S \, dx.$$

Однако здесь нужно сделать несколько замечаний, необходимых для точного изложения предмета. Прежде всего отметим, что проделанные в самом начале рассуждения относительно определения массы стержня по его плотности, не являются математически безупречными. Нет никакого основания считать, что приближенное значение массы (1.1) в пределе даст ее точное значение. Это, конечно, связано с тем, что не было дано точных определений массы и плотности. Без этих определений бессмысленно говорить о задаче восстановления массы стержня по его плотности. Рассмотрим эти понятия подробнее.

Первичным будем считать понятие массы. Можно, конечно, считать первичным понятие плотности. Однако тогда нам придется определить массу как интеграл от плотности. Такой подход уже подразумевает наличие понятия интеграла и нам он не годится. С помощью понятия массы можно определить понятие средней плотности любого участка тела. Под средней плотностью подразумевается такая постоянная плотность, при которой выбранный участок тела имеет ту же массу, что и при переменной плотности. Средняя плотность выбранного участка равна отношению его массы к объему. Рассмотрим сечение стержня плоскостью в точке с координатой x и обозначим массу участка стержня, находящегося между данной плоскостью и плоскостью в точке с координатой a, через $M(x)$. Естественно принять, что $M(a) = 0$. Масса всего стержня равна $M(b)$. Нетрудно видеть, что масса участка стержня, отвечающего отрезку $[x_0; x]$, равна $M(x) - M(x_0)$. Поделив эту величину на объем $S(x - x_0)$, найдем

среднюю плотность рассматриваемого участка:

$$\rho_{\text{ср}} = \frac{M(x) - M(x_0)}{S(x - x_0)}.$$

Легко проверить, что полученная формула сохраняет свою силу и при $x < x_0$.

Плотностью тела в точке x_0 называется предел средней плотности при $x \to x_0$:

$$\rho(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{M(x) - M(x_0)}{S(x - x_0)}.$$

Из определения производной следует, что

$$\rho(x_0) = \frac{1}{S}\, M'(x_0).$$

Заменяя x_0 на x, получаем, что задача определения $M(x)$ равносильна задаче восстановления функции по заданной производной:

$$M'(x) = \rho(x)S.$$

Традиционно, определенный интеграл изучается после неопределенного и читатель должен знать, что полученная задача эффективно решается с помощью неопределенного интегрирования, а функция $M(x)$ – это та из первообразных функции $\rho(x)S$, которая при $x = a$ равна нулю. Теория определенного интеграла дает еще один ответ на поставленный вопрос: оказывается, что интеграл с переменным верхним пределом представляет одну из первообразных подынтегральной функции, причем именно ту, которая при $x = a$ равна нулю. Таким образом,

$$M(x) = \int\limits_a^x \rho(x)S\, dx.$$

Учитывая, что масса стержня $M = M(b)$, получаем обоснование той формулы, о которой шла речь в самом начале:

$$M = \int\limits_a^b \rho(x) S \, dx. \tag{1.2}$$

Нужно сказать, что обоснованию формулы (1.2) предшествует довольно длинный путь развития теории определенного интеграла. Возникает естественный вопрос: в чем состоит смысл нового понятия, если поставленная нами задача об определении массы по плотности уже решена с помощью теории неопределенного интеграла. Не проще ли поступить наоборот: ввести понятие определенного интеграла с помощью формулы Ньютона – Лейбница. Если $F'(x) = f(x)$, то будем считать, что

$$\int\limits_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a).$$

Ответ на заданный вопрос состоит в том, что нам не удастся построить развитую теорию определенного интеграла. Уже ставит в тупик попытка доказать интегрируемость непрерывной функции. Для этого нужна развитая теория определенного интеграла как предела интегральных сумм, а скудной теории неопределенного интеграла оказывается явно недостаточно.

Не следует забывать и о перспективе развития понятия интеграла на многомерные пространства. На плоскости и в трехмерном пространстве нет развитой теории неопределенного интегрирования. Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы определяются исключительно с помощью конструкции, использующей предел интегральных сумм. Построение теории в многомерном пространстве намного сложнее, чем в одномерном. Однако в теории определенного интеграла как на ладони видны те проблемы и способы их решения, которые нетривиальны в пространстве нескольких измерений. Тому, кто изучил теорию определенного интеграла, несложно уже разобраться и в тонкостях кратных интегралов.

Глава 2

Определенный интеграл как предел

Приведем обозначения, которыми мы будем постоянно пользоваться в этом пособии. Частично они уже были использованы во введении. Разбиением отрезка $[a; b]$ называется набор точек

$$T = \{x_0,\, x_1,\, \ldots\,,\, x_n\}$$

этого отрезка, упорядоченный в порядке возрастания:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b.$$

Характеристикой этого разбиения называется величина

$$\lambda(T) = \max_{0 \leqslant i \leqslant n-1} \Delta x_i,$$

где $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ – длина отрезка разбиения $\Delta_i = [x_i; x_{i+1}]$ с номером i $(0 \leqslant i \leqslant n-1)$.

Разметкой разбиения T называется набор точек

$$\xi = \{\xi_0,\, \ldots\,,\, \xi_{n-1}\},$$

для которого $\xi_i \in [x_i; x_{i+1}]$ $(0 \leqslant i \leqslant n-1)$.

Часто нумерацию отрезков начинают не с нуля, а с единицы. В этом случае формулы немного видоизменяются. Отрезок

разбиения с номером i имеет вид $[x_{i-1}; x_i]$, при этом индекс i изменяется от 1 до n и, соответственно, характеристика разбиения

$$\lambda(T) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \Delta x_i,$$

где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, а разметка – набор точек $\xi = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$, для которого $\xi_i \in [x_{i-1}; x_i]$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$.

Этот момент не является существенным тем более, что часто оба способа нумерации используются в одном и том же учебнике.

В традиционном изложении материала курсов высшей математики, не использующем общего понятия предела функции по фильтру, понятие предела интегральных сумм является новой разновидностью предела и аккуратное изложение теории требует точного определения этого понятия. Пусть задана функция размеченных разбиений $\varphi(T, \xi)$. Число A называется ее пределом при $\lambda(T) \to 0$

$$A = \lim_{\lambda(T) \to 0} \varphi(T, \xi),$$

если для любого положительного числа ε найдется такое положительное число δ, что для любого разбиения T с характеристикой $\lambda(T) < \delta$ и любой разметки ξ этого разбиения величина $|\varphi(T, \xi) - A| < \varepsilon$.

Рассмотренный здесь предел функции разбиений обладает большинством свойств, присущих тем пределам, с которыми читатель должен был познакомиться в курсах анализа, изучаемых до теории определенного интеграла. Доказательства этих свойств (единственность, арифметические свойства, предельный переход в неравенствах и т. д.) проводятся практически так же, как и для других понятий предела. Поэтому об этих свойствах часто даже и не упоминают в учебной литературе и считают, что читатель должен сам догадаться об их существовании. В лучшей ситуации находятся студенты, изучившие свойства предела функции по фильтру (хотя бы в простейшей форме). В этом случае необходимость доказательства упомянутых свойств предела отпадает, так как они обоснованы в более общей ситуации.

Желающие ознакомиться с понятием предела по фильтру могут обратиться к книге[2]. Для тех, кто желает проверить насколько прочно они усвоили теорию пределов последовательностей и функций, приведем несколько задач на тему предела функции разбиений.

Задача 1. Доказать, что предел единственен.

Задача 2. Доказать, что

$$\lim_{\lambda(T)\to 0}(\varphi(T,\xi)+\psi(T,\xi)) = \lim_{\lambda(T)\to 0}\varphi(T,\xi) + \lim_{\lambda(T)\to 0}\psi(T,\xi),$$

при условии, что функции φ и ψ имеют пределы.

Задача 3. Доказать, что если функция φ имеет предел при $\lambda(T)\to 0$, то она локально ограничена, т. е. существуют такие положительные числа M и δ, что для всех размеченных разбиений (T,ξ) с характеристикой $\lambda(T)<\delta$ справедливо неравенство

$$|\varphi(T,\xi)| \leqslant M.$$

Задача 4. Доказать критерий Коши: для того чтобы функция φ имела предел при $\lambda(T)\to 0$, необходимо и достаточно, чтобы для любого положительного числа ε нашлось такое положительное число δ, что для всех размеченных разбиений $(T_1,\xi^{(1)})$ и $(T_2,\xi^{(2)})$ с характеристиками $\lambda(T_1)<\delta$, $\lambda(T_2)<\delta$ выполнялось неравенство

$$|\varphi(T_1,\xi^{(1)})-\varphi(T_2,\xi^{(2)})|<\varepsilon.$$

Для функции f, заданной на отрезке $[a;b]$, ее интегральной суммой на размеченном разбиении (T,ξ) называют величину

$$S(f;T,\xi)=\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Если из контекста ясно для какой функции, для какого отрезка и для какой разметки эта интегральная сумма рассматривается, то часто аргументы f,T,ξ в ее обозначении опускают.

Интегральная сумма $S(f;T,\xi)$ является функцией размеченных разбиений и ее предел (если он существует) называется определенным интегралом:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda(T)\to 0} S(f;T,\xi). \tag{2.1}$$

Существуют другие подходы к определению интеграла и не все они являются равносильными. В этой связи интеграл, определение которому было только что дано, называют интегралом Римана. Если интеграл, т. е. предел (2.1) существует, то функция f называется интегрируемой по Риману на отрезке $[a;b]$. Интеграл Римана существует не для любой функции, поэтому для совокупности всех интегрируемых на отрезке $[a;b]$ по Риману функций вводят специальное обозначение $R[a;b]$. Так как мы будем рассматривать только интеграл Римана, то в дальнейшем будем называеть его просто интегралом, а интегрируемую по Риману функцию – просто интегрируемой функцией.

Использовать для вычисления интеграла формулу (2.1) довольно сложно, так как не существует разработанной техники вычисления предела функций разбиений, аналогичной той, которая существует для пределов последовательностей или пределов функций. Однако эту трудность можно обойти, используя решение следующей задачи.

Задача 5. Пусть функция f интегрируема на отрезке $[a;b]$ и $(T_n,\xi^{(n)})$ – такая последовательность размеченных разбиений, для которых их характеристика $\lambda(T_n)\to 0$ при $n\to+\infty$. Тогда

$$\lim_{n\to+\infty} S(f;T_n,\xi^{(n)}) = \int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Согласно утверждению этой задачи вычисление интеграла можно свести к вычислению предела обычной числовой последовательности. На этом пути могут встретится две трудности.

Во-первых, для применения этого утверждения необходимо сначала доказать интегрируемость той функции, интеграл от которой необходимо вычислить. Во-вторых, последовательность интегральных сумм нужно подобрать так, чтобы ее предел можно было вычислить.

Первая проблема решается в теории определенного интеграла. Традиционно доказывается существование интеграла для непрерывных, монотонных и ограниченных функций с конечным числом точек разрыва. Как решается вторая проблема можно увидеть в решениях задач 2184 – 2192. В этих задачах все подынтегральные функции непрерывны (это снимает вопрос о существовании интегралов).

В теории определенного интеграла, наряду с функциями размеченных разбиений, приходится рассматривать также функции неразмеченных разбиений и функции разбиений с несколькими разметками. Пределы таких функций определяются аналогично. Ограничимся здесь пределом функций неразмеченных разбиений и функций разбиений с двумя разметками. Если задана функция разбиений $\varphi(T)$, то число A называется ее пределом при $\lambda(T) \to 0$:

$$A = \lim_{\lambda(T)\to 0} \varphi(T),$$

если для любого положительного числа ε найдется такое положительное число δ, что для любого разбиения T с характеристикой $\lambda(T) < \delta$ величина $|\varphi(T) - A| < \varepsilon$.

Функцию разбиений $\varphi(T)$ можно расматривать как функцию размеченных разбиений (T, ξ), не зависящую от разметки ξ. Легко видеть, что предел φ как функции только T, совпадает с пределом φ, рассматриваемой как функции переменных (T, ξ), причем оба предела существуют или не существуют одновременно. Таким образом, определения этих двух пределов согласованы.

Пусть задана функция $\varphi(T, \xi, \theta)$ разбиения T и двух его разметок ξ и θ. Число A называется ее пределом при $\lambda(T) \to 0$:

$$A = \lim_{\lambda(T)\to 0} \varphi(T, \xi, \theta),$$

если для любого положительного числа ε найдется такое положительное число δ, что для любого разбиения T с характеристикой $\lambda(T) < \delta$ и любых его разметок ξ и θ величина $|\varphi(T, \xi, \theta) - A| < \varepsilon$. Это определение согласовано с определением предела функции разбиения с одной разметкой. Любую функцию размеченного разбиения $\varphi(T, \xi)$ можно рассматривать как функцию разбиения и двух разметок ξ и θ, не зависящую от разметки θ. Пределы φ как функции (T, ξ) и как функции (T, ξ, θ) существуют или не существуют одновременно и равны.

Примером функций неразмеченных разбиений являются суммы Дарбу, имеющие важное значение в теории определенного интеграла. Пусть дано произвольное разбиение

$$T = \{x_0,\, x_1,\, \ldots\,,\, x_n\}$$

отрезка $[a; b]$. Нижней суммой Дарбу (или просто нижней суммой) называется величина

$$\underline{S}(f; T) = \sum_{k=0}^{n-1} m_i \Delta x_i,$$

где

$$m_i = \inf_{[x_i; x_{i+1}]} f(x),$$

а верхней суммой

$$\overline{S}(f; T) = \sum_{k=0}^{n-1} M_i \Delta x_i,$$

где

$$M_i = \sup_{[x_i; x_{i+1}]} f(x).$$

Суммы Дарбу существуют только для функций, ограниченных на отрезке $[a; b]$. Одна из первых теорем теории определенного интеграла – утверждение об ограниченности интегрируемой функции. Это утверждение обычно называют необходимым условием интегрируемости. Отсюда следует, что суммы

Дарбу определены для любой интегрируемой функции. Связь этих сумм с интегралом состоит в следующем: ограниченная функция интегрируема тогда и только тогда, когда существуют и совпадают пределы обеих сумм Дарбу. При этом общее значение этих пределов совпадает с определенным интегралом

$$\lim_{\lambda(T)\to 0} \underline{S}(f;T) = \lim_{\lambda(T)\to 0} \overline{S}(f;T) = \int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Другой пример функции неразмеченных разбиений дает величина

$$\Omega(f;T) = \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i,$$

где $\omega_i = M_i - m_i$ – колебание функции f на отрезке $[x_i; x_{i+1}]$,

$$m_i = \inf_{[x_i;x_{i+1}]} f(x),$$

$$M_i = \sup_{[x_i;x_{i+1}]} f(x).$$

К сожалению, эта функция в учебной литературе не получила никакого названия. Мы будем называть ее интегральным колебанием функции f на отрезке $[a;b]$. Используя интегральное колебание, можно дать следующий критерий интегрируемости: функция f интегрируема на отрезке $[a;b]$ тогда и только тогда, когда она ограничена и

$$\lim_{\lambda(T)\to 0} \Omega(f;T) = 0,$$

Этот критерий интегрируемости является основным в теории определенного интеграла и он доказывается в любом традиционном курсе математического анализа. Нужно отметить, что в ряде учебников величина колебания определяется в другой форме. В

нашей формулировке, колебание функции f на множестве X – это величина, определяемая равенством

$$\omega(f, X) = \sup_{x \in X} f(x) - \inf_{x \in X} f(x), \tag{2.2}$$

другое определение колебания функции:

$$\omega(f, X) = \sup_{x, y \in X} |f(x) - f(y)|. \tag{2.3}$$

Задача 6. Показать, что определения (2.2) и (2.3) равносильны.

Пример предела функции разбиения с двумя разметками рассмотрен в задаче 2193. Эта задача имеет свое применение. На нее опираются доказательства различных формул, относящихся к приложениям определенного интеграла (задача 2193 используется, например, в решении примера 2471).

Приведем еще один критерий интегрируемости, используемый в решении задач 2202 и 2205. Пусть задано положительное число σ и разбиение T некоторого отрезка $[a; b]$. Обозначим через $\mu(f, \sigma; T)$ сумму длин всех тех отрезков разбиения T, на которых колебание функции f не меньше, чем σ. Ограниченная на отрезке $[a; b]$ функция f интегрируема на этом отрезке тогда и только тогда, когда при каждом $\sigma > 0$

$$\lim_{\lambda(T) \to 0} \mu(f, \sigma; T) = 0.$$

Задача 7. Доказать сформулированный выше критерий интегрируемости.

Перейдем к задачам.

2181. Найти интегральную сумму S_n для функции $f(x) = 1 + x$ на сегменте $[-1; 4]$, разбивая его на n равных промежутков и выбирая значения аргумента ξ_i $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ в серединах этих промежутков.

Точки разбиения

$$x_i = -1 + \frac{5i}{n} \quad (0 \leqslant i \leqslant n),$$

точки разметки

$$\xi_i = -1 + \frac{5i}{n} + \frac{5}{2n} \quad (0 \leqslant i \leqslant n-1).$$

Интегральную сумму вычисляем, суммируя арифметическую прогрессию:

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1}(1+\xi_i)\frac{5}{n} = \frac{5}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{5i}{n} + \frac{5}{2n}\right) =$$

$$= \frac{5}{n}\left(\frac{5}{n}\sum_{i=0}^{n-1} i + \frac{5}{2n}\cdot n\right) = \frac{5}{n}\left(\frac{5}{n}\cdot\frac{n(n-1)}{2} + \frac{5}{2}\right) = \frac{25}{2}.$$

В решении следующей задачи используются формулы для сумм степеней натуральных чисел

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}. \tag{2.4}$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \tag{2.5}$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}. \tag{2.6}$$

Формула (2.4) следует из формулы суммы арифметичской прогрессии, а формулы (2.5) и (2.6) легко вывести, пользуясь методом математической индукции.

Задача 8. Доказать формулу (2.5).

Задача 9. Доказать формулу (2.6).

2182. Для данных функций $f(x)$ найти нижнюю $\underline{S}_n$ и верхнюю $\overline{S}_n$ интегральные суммы на соответствующих сегментах, деля их на n равных частей, если

а) $f(x) = x^3$, $\quad -2 \leqslant x \leqslant 3$;
б) $f(x) = \sqrt{x}$, $\quad 0 \leqslant x \leqslant 1$;
в) $f(x) = 2^x$, $\quad 0 \leqslant x \leqslant 10$.

а). Для вычисления интегральных сумм воспользуемся формулами (2.4) – (2.6). Разбиение отрезка на n равных частей осуществляется точками

$$x_i = -2 + \frac{5i}{n} \quad (0 \leqslant i \leqslant n).$$

Так как функция $f(x) = x^3$ возрастает, то

$$m_i = \inf_{[x_i;x_{i+1}]} f(x) = f(x_i) = x_i^3,$$

$$M_i = \sup_{[x_i;x_{i+1}]} f(x) = f(x_{i+1}) = x_{i+1}^3.$$

Длина каждого из отрезков разбиения $\Delta x_i = \dfrac{5}{n}$. Нижняя сумма

$$\underline{S}_n = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i = \frac{5}{n} \sum_{i=0}^{n-1} x_i^3 = \frac{5}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left(-2 + \frac{5i}{n}\right)^3 =$$

$$= \frac{5}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left(-8 + \frac{60i}{n} - \frac{150i^2}{n^2} + \frac{125i^3}{n^3}\right) =$$

$$= \frac{5}{n} \left(-8n + \frac{60}{n} \sum_{i=0}^{n-1} i - \frac{150}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} i^2 + \frac{125}{n^3} \sum_{i=0}^{n-1} i^3\right).$$

Используя формулы (2.4)-(2.6) с заменой n на $n-1$, получаем:

$$\underline{S}_n = \frac{5}{n} \left(-8n + \frac{60(n-1)}{2} - \frac{150(n-1)(2n-1)}{6n} + \right.$$

$$\left. + \frac{125(n-1)^2}{4n}\right) = \frac{65}{4} - \frac{175}{2n} + \frac{125}{4n^2}.$$

Верхняя интегральная сумма легко выражается через нижнюю:

$$\overline{S}_n = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i = \frac{5}{n} \sum_{i=0}^{n-1} x_{i+1}^3 = \frac{5}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^3 =$$

$$= \frac{5}{n}\left(\sum_{i=0}^{n-1} x_i^3 + x_n^3 - x_0^3\right) = \underline{S}_n + \frac{5}{n}\left(x_n^3 - x_0^3\right) =$$

$$= \frac{65}{4} - \frac{175}{2n} + \frac{125}{4n^2} + \frac{5}{n}(27+8) = \frac{65}{4} + \frac{175}{2n} + \frac{125}{4n^2}.$$

б). Разбиение отрезка на n равных частей осуществляется точками

$$x_i = \frac{i}{n} \quad (0 \leqslant i \leqslant n).$$

Так как функция $f(x)$ возрастает, то

$$m_i = \inf_{[x_i;x_{i+1}]} f(x) = f(x_i) = \sqrt{\frac{i}{n}},$$

$$M_i = \sup_{[x_i;x_{i+1}]} f(x) = f(x_{i+1}) = \sqrt{\frac{i+1}{n}}.$$

Длина каждого из отрезков разбиения $\Delta x_i = \dfrac{1}{n}$. Нижняя сумма

$$\underline{S}_n = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\sqrt{\frac{i}{n}} = \frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{i=0}^{n-1}\sqrt{i}.$$

Верхняя сумма

$$\overline{S}_n = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\sqrt{\frac{i+1}{n}} =$$

$$= \frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{i=0}^{n-1}\sqrt{i+1} = \frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{i}.$$

в). Разбиение отрезка на n равных частей осуществляется точками

$$x_i = \frac{10i}{n} \quad (0 \leqslant i \leqslant n).$$

Так как функция $f(x)$ возрастает, то

$$m_i = \inf_{[x_i;x_{i+1}]} f(x) = f(x_i) = 2^{10i/n},$$

$$M_i = \sup_{[x_i;x_{i+1}]} f(x) = f(x_{i+1}) = 2^{10(i+1)/n}.$$

Длина каждого из отрезков разбиения $\Delta x_i = \dfrac{10}{n}$. Нижняя сумма

$$\underline{S}_n = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i = \frac{10}{n} \sum_{i=0}^{n-1} 2^{10i/n} = \frac{10}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left[2^{10/n}\right]^i.$$

Суммируя геометрическую прогрессию со знаменателем $q = 2^{10/n}$, получаем:

$$\underline{S}_n = \frac{10\left(2^{10}-1\right)}{n\left(2^{10/n}-1\right)} = \frac{10230}{n\left(2^{10/n}-1\right)}.$$

Так как

$$M_i = 2^{10(i+1)/n} = 2^{10/n} 2^{10i/n} = 2^{10/n} m_i,$$

то верхняя сумма

$$\overline{S}_n = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i = 2^{10/n} \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i = 2^{10/n} \underline{S}_n = \frac{10230 \cdot 2^{10/n}}{n\left(2^{10/n}-1\right)}.$$

2183. Найти нижнюю интегральную сумму для функции $f(x) = x^4$ на сегменте $[1;2]$, разбивая этот сегмент на n частей, длины которых образуют геометрическую прогрессию. Чему равен предел этой суммы при $n \to +\infty$?

Пусть $x_0, x_1, \ldots, x_n$ – точки разбиения отрезка $[1;2]$, образующие геометрическую прогрессию. Так как нумерация последовательности начинается со значения $n = 0$, то по формуле общего члена геометрической пргрессии $x_n = x_0 q^n$, где q – знаменатель

прогрессии. Из равенств $x_0 = 1$, $x_n = 2$ определяем величину $q = 2^{1/n}$. Таким образом,

$$x_n = 2^{i/n} \quad (0 \leqslant i \leqslant n).$$

В силу возрастания функции f

$$m_i = \inf_{[x_i; x_{i+1}]} f(x) = f(x_i) = x_i^4 = 2^{4i/n},$$

Длина отрезка $[x_i; x_{i+1}]$

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i = 2^{(i+1)n} - 2^{i/n} = 2^{i/n}\left(2^{1/n} - 1\right).$$

Нижняя интегральная сумма

$$\underline{S}_n = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} 2^{4i/n} 2^{i/n}\left(2^{1/n} - 1\right) =$$

$$= \left(2^{1/n} - 1\right) \sum_{i=0}^{n-1} \left(2^{5/n}\right)^i.$$

По формуле суммы геометрической прогрессии

$$\sum_{i=0}^{n-1} \left(2^{5/n}\right)^i = \frac{2^5 - 1}{2^{5/n} - 1} = \frac{31}{2^{5/n} - 1},$$

следовательно,

$$\underline{S}_n = \frac{31\left(2^{1/n} - 1\right)}{2^{5/n} - 1}.$$

Так как при $n \to +\infty$

$$2^{1/n} - 1 \sim \frac{1}{n}\ln 2\,, \quad 2^{5/n} - 1 \sim \frac{5}{n}\ln 2\,,$$

то

$$\lim_{n\to+\infty} \underline{S}_n = 31 \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n}\ln 2}{\frac{5}{n}\ln 2} = \frac{31}{5}.$$

2184. Исходя из определения интеграла, найти

$$\int\limits_0^T (v_0 + gt)dt\,,$$

где v_0 и g – постоянны.

Рассмотрим разбиение отрезка $[0;T]$ на n равных частей точками

$$\tau_i = \frac{Ti}{n}\,, \quad 0 \leqslant i \leqslant n.$$

Выберем точки разметки на левых концах отрезков разбиения:

$$\xi_i = \tau_i\,.$$

Интегральная сумма для функции $f(t) = v_0 + gt$ равна:

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1}(v_0 + g\xi_i)(\tau_{i+1} - \tau_i) = \sum_{i=0}^{n-1}\left(v_0 + g\,\frac{Ti}{n}\right)\frac{T}{n} =$$

$$= \frac{T}{n}\left(v_0 n + \frac{gT}{n}\sum_{i=0}^{n-1} i\right).$$

По формуле суммы арифметической прогрессии

$$\sum_{i=0}^{n-1} i = \frac{(n-1)n}{2}\,,$$

следовательно,

$$S_n = \frac{T}{n}\left(v_0 n + \frac{gT(n-1)n}{2n}\right) = v_0 T + \frac{gT^2(n-1)}{2n}\,.$$

Согласно решению задачи 5

$$\int\limits_0^T (v_0 + gt)dt = \lim_{n\to+\infty}\left(v_0 T + \frac{gT^2(n-1)}{2n}\right) = v_0 T + \frac{gT^2}{2}\,.$$

Вычислить определенные интегралы, рассматривая их как пределы соответствующих интегральных сумм и производя разбиение промежутка интеграции надлежащим образом:

2185. $\int\limits_{-1}^{2} x^2\,dx.$

Разобъем отрезок интегрирования на n равных частей:

$$x_i = -1 + \frac{3i}{n}\,, \quad 0 \leqslant i \leqslant n$$

и выберем точки разметки $\xi_i = x_i$ $(0 \leqslant i \leqslant n-1)$. Длина каждого из отрезков разбиения

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i = \frac{3}{n}\,.$$

Интегральная сумма

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i^2 \Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} \left(-1 + \frac{3i}{n}\right)^2 \frac{3}{n} =$$

$$= \frac{3}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left(1 - \frac{6i}{n} + \frac{9i^2}{n^2}\right) = \frac{3}{n} \left(n - \frac{6}{n} \sum_{i=0}^{n-1} i + \frac{9}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} i^2\right).$$

Для суммы натуральных чисел и суммы их квадратов имеются следующие формулы:

$$\sum_{i=0}^{n-1} i = \frac{(n-1)n}{2}\,, \quad \sum_{i=0}^{n-1} i^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}\,.$$

Они следуют из соотношений (2.4) и (2.5), рассмотренных перед решением задачи 2182. Применяя эти формулы, находим:

$$S_n = \frac{3}{n} \left(n - \frac{6(n-1)n}{2n} + \frac{9(n-1)n(2n-1)}{6n^2}\right) =$$

$$= 3 - \frac{9(n-1)}{n} + \frac{9(n-1)(2n-1)}{2n^2}.$$

Согласно решению задачи 5

$$\int\limits_{-1}^{2} x^2\,dx = \lim_{n\to+\infty}\left(3 - \frac{9(n-1)}{n} + \frac{9(n-1)(2n-1)}{2n^2}\right) = 3\,.$$

2186. $\int\limits_0^1 a^x\,dx \quad (a>0).$

Разобьем отрезок интегрирования на n равных частей:

$$x_i = \frac{i}{n}\,, \quad 0 \leqslant i \leqslant n$$

и выберем точки разметки $\xi_i = x_i$ $(0 \leqslant i \leqslant n-1)$. Длина каждого из отрезков разбиения

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i = \frac{1}{n}\,.$$

Интегральная сумма

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} a^{\xi_i}\Delta x_i = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} a^{i/n} = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\left(a^{1/n}\right)^i\,.$$

Суммируя геометрическую прогрессию с первым членом, равным 1, и знаменателем $q = a^{1/n}$, получаем

$$\sum_{i=0}^{n-1}\left(a^{1/n}\right)^i = \frac{a-1}{a^{1/n}-1}\,.$$

Отсюда следует, что

$$S_n = \frac{a-1}{n\left(a^{1/n}-1\right)}.$$

Так как при $n \to +\infty$ последовательность

$$a^{1/n} - 1 \sim \frac{\ln a}{n}\,,$$

то

$$\int\limits_0^1 a^x\,dx = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{(a-1)n}{n\ln a} = \frac{a-1}{\ln a}\,.$$

В задачах 2187 и 2188 используются следующие формулы суммирования из курса тригонометрии, справедливые при $\alpha \neq$ $\neq 2\pi n$ (n – целое):

$$\sin\alpha + \sin 2\alpha + \ldots + \sin k\alpha = \frac{\sin\dfrac{(k+1)\alpha}{2}\,\sin\dfrac{k\alpha}{2}}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}\,. \qquad (2.7)$$

$$1 + \cos\alpha + \cos 2\alpha + \ldots + \cos k\alpha = \frac{\sin\dfrac{(k+1)\alpha}{2}\,\cos\dfrac{k\alpha}{2}}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}\,. \qquad (2.8)$$

Задача 10. Доказать формулу (2.7).
Задача 11. Доказать формулу (2.8).

2187. $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2} \sin x\,dx.$

Разобьем отрезок интегрирования на n равных частей:

$$x_i = \frac{\pi i}{2n}\,, \quad 0 \leqslant i \leqslant n$$

и выберем точки разметки $\xi_i = x_i$ $(0 \leqslant i \leqslant n-1)$. Длина каждого из отрезков разбиения

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i = \frac{\pi}{2n}\,.$$

Интегральная сумма

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} (\sin \xi_i) \Delta x_i = \frac{\pi}{2n} \sum_{i=0}^{n-1} \sin \frac{\pi i}{2n}\,.$$

Применяя формулу (2.7) с $\alpha = \pi/(2n)$ и $k = n-1$, получаем:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sin \frac{\pi i}{2n} = \frac{\sin \dfrac{\pi}{4} \cdot \sin \dfrac{(n-1)\pi}{4n}}{\sin \dfrac{\pi}{4n}} = \frac{\sin \dfrac{(n-1)\pi}{4n}}{\sqrt{2} \sin \dfrac{\pi}{4n}}\,.$$

Следовательно,

$$S_n = \frac{\pi \sin \dfrac{(n-1)\pi}{4n}}{2\sqrt{2}\, n \sin \dfrac{\pi}{4n}}\,.$$

Так как

$$\lim_{n \to +\infty} \sin \frac{(n-1)\pi}{4n} = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,,$$

а

$$\sin \frac{\pi}{4n} \sim \frac{\pi}{4n} \quad (n \to +\infty)\,,$$

то

$$\int\limits_0^{\pi/2} \sin x\, dx = \lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{\pi \cdot 4n}{2\sqrt{2}\, n \cdot \pi \cdot \sqrt{2}} = 1.$$

2188. $\displaystyle\int\limits_0^x \cos t\, dt.$

Разобъем отрезок $[0; x]$ на n равных частей точками

$$x_i = \frac{xi}{n}\,, \quad 0 \leqslant i \leqslant n$$

и выберем точки разметки $\xi_i = x_i$ $(0 \leqslant i \leqslant n-1)$. Длина каждого из отрезков разбиения

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i = \frac{x}{n}\,.$$

Интегральная сумма

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} (\cos \xi_i) \Delta x_i = \frac{x}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \cos \frac{xi}{n} \,. \tag{2.9}$$

Применяя формулу (2.8) с $\alpha = x/n$ и $k = n-1$, получаем (при достаточно большой величине n значение α мало и не может быть кратно 2π, следовательно формула (2.8) применима):

$$\sum_{i=0}^{n-1} \cos \frac{xi}{n} = \frac{\sin \dfrac{x}{2} \cdot \cos \dfrac{(n-1)x}{2n}}{\sin \dfrac{x}{2n}} \,.$$

Так как

$$\lim_{n \to +\infty} \cos \frac{(n-1)x}{2n} = \cos \frac{x}{2} \,,$$

а

$$\sin \frac{x}{2n} \sim \frac{x}{2n} \quad (n \to +\infty) \,,$$

то из (2.9) находим

$$\int_0^x \cos t \, dt = \lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{x \cdot \sin \dfrac{x}{2} \cdot \cos \dfrac{(n-1)x}{2n} \cdot 2n}{n \cdot x} =$$

$$= 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = \sin x.$$

2189. $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{x^2} \quad (0 < a < b).$

Пусть $x_0 \,, x_1 \,, \ldots \,, x_n$ – произвольное разбиение отрезка $[a; b]$. Выберем точки разметки

$$\xi_i = \sqrt{x_i x_{i+1}} \quad (0 \leqslant i \leqslant n-1).$$

Интегральная сумма

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{\xi_i^2}\,(x_{i+1} - x_i) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{x_i x_{i+1}}\,(x_{i+1} - x_i) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{1}{x_i} - \frac{1}{x_{i+1}}\right) = \left(\frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_1}\right) + \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right) +$$

$$+ \left(\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{x_{n-1}} - \frac{1}{x_n}\right) = \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_n} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}.$$

Следовательно

$$\int\limits_a^b \frac{dx}{x^2} = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}.$$

2190. $\displaystyle\int\limits_a^b x^m\,dx \quad (0 < a < b;\ m \neq -1).$

Рассмотрим разбиение отрезка $[a; b]$ точками, образующими геометрическую прогрессию

$$x_i = aq^i\,, \quad 0 \leqslant i \leqslant n.$$

Из условий $x_0 = a$, $x_n = b$ находим $q = \sqrt[n]{b/a}$. Выберем точки разметки $\xi_i = x_i$ $(0 \leqslant i \leqslant n-1)$. Длина каждого из отрезков разбиения

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i = aq^{i+1} - aq^i = aq^i(q-1)\,.$$

Интегральная сумма

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i^m\,\Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} \left(aq^i\right)^m aq^i(q-1) =$$

$$= a^{m+1}(q-1)\sum_{i=0}^{n-1}\left(q^{m+1}\right)^i .$$

Так как $a < b$ и $m \neq -1$, то величина $q \neq 1$. По формуле суммы геометрической прогрессии

$$\sum_{i=0}^{n-1}\left(q^{m+1}\right)^i = \frac{q^{(m+1)n}-1}{q^{m+1}-1} ,$$

следовательно,

$$S_n = a^{m+1}(q-1)\frac{q^{(m+1)n}-1}{q^{m+1}-1} .$$

Подставляя в эту формулу значение $q = \sqrt[n]{b/a}$, находим:

$$S_n = a^{m+1}\left[\left(\frac{b}{a}\right)^{1/n} - 1\right]\frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{m+1} - 1}{\left(\frac{b}{a}\right)^{(m+1)/n} - 1} =$$

$$= \left(b^{m+1} - a^{m+1}\right)\frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{1/n} - 1}{\left(\frac{b}{a}\right)^{(m+1)/n} - 1}.$$

Так как при $n \to +\infty$

$$\left(\frac{b}{a}\right)^{1/n} - 1 \sim \frac{1}{n}\ln\frac{b}{a} , \quad \left(\frac{b}{a}\right)^{(m+1)/n} - 1 \sim \frac{m+1}{n}\ln\frac{b}{a} ,$$

то

$$\int\limits_a^b x^m\,dx = \left(b^{m+1} - a^{m+1}\right)\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{n}\ln\frac{b}{a}}{\frac{m+1}{n}\ln\frac{b}{a}} = \frac{b^{m+1} - a^{m+1}}{m+1} .$$

2191. $\int\limits_a^b \frac{dx}{x} \quad (0 < a < b).$

Рассмотрим разбиение отрезка $[a; b]$ точками, образующими геометрическую прогрессию

$$x_i = aq^i\,, \quad 0 \leqslant i \leqslant n.$$

Из условий $x_0 = a$, $x_n = b$ находим $q = \sqrt[n]{b/a}$. Точки разметки выберем на левых концах отрезков разбиения:

$$\xi_i = x_i \quad (0 \leqslant i \leqslant n-1).$$

Длина каждого из отрезков разбиения

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i = aq^{i+1} - aq^i = aq^i(q-1)\,.$$

Интегральная сумма

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{\xi_i}\,\Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{aq^i(q-1)}{aq^i} = (q-1)\sum_{i=0}^{n-1} 1 =$$

$$= n(q-1) = n\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{1/n} - 1\right).$$

Так как при $n \to +\infty$

$$\left(\frac{b}{a}\right)^{1/n} - 1 \sim \frac{1}{n}\ln\frac{b}{a}\,,$$

то

$$\int\limits_a^b \frac{dx}{x} \quad (0 < a < b) = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{1}{n}\ln\frac{b}{a}\right) = \ln\frac{b}{a}.$$

2192. Вычислить интеграл Пуассона

$$\int\limits_0^\pi \ln\left(1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2\right) dx$$

при: а) $|\alpha| < 1$; б) $|\alpha| > 1$.

Рассмотрим разбиение отрезка $[0;\pi]$ на n равных частей:

$$x_k = \frac{\pi k}{n}\,, \quad 0 \leqslant k \leqslant n$$

и выберем точки разметки $\xi_k = x_k$ $(0 \leqslant k \leqslant n-1)$. Длина каждого из отрезков разбиения

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i = \frac{\pi}{n}\,.$$

Интегральная сумма

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(1 - 2\alpha\cos\xi_k + \alpha^2\right)\Delta x_i =$$

$$= \frac{\pi}{n}\ln\prod_{k=1}^{n-1}\left(1 - 2\alpha\cos\frac{\pi k}{n} + \alpha^2\right).$$

Квадратное уравнение относительно переменной α

$$1 - 2\alpha\cos\frac{\pi k}{n} + \alpha^2 = 0$$

имеет комплексные корни

$$\alpha = \mathrm{e}^{\frac{i\pi k}{n}}\,, \quad \alpha = \mathrm{e}^{-\frac{i\pi k}{n}}\,,$$

следовательно,

$$S_n = \frac{\pi}{n}\ln\prod_{k=1}^{n-1}\left(\alpha - \mathrm{e}^{\frac{i\pi k}{n}}\right)\left(\alpha - \mathrm{e}^{-\frac{i\pi k}{n}}\right).$$

Рассмотрим последовательности $\{\mathrm{e}^{\frac{i\pi k}{n}}\}_{k=0}^{n-1}$ и $\{\mathrm{e}^{-\frac{i\pi k}{n}}\}_{k=0}^{n-1}$. Их совокупность дает множество всех комплексных корней степени $2n$

из 1, за тем исключением, что точка $z = 1$ встречается дважды, а точка $z = -1$ отсутствует, поэтому

$$\prod_{k=1}^{n-1} \left(\alpha - \mathrm{e}^{\frac{i\pi k}{n}}\right)\left(\alpha - \mathrm{e}^{-\frac{i\pi k}{n}}\right) = \frac{\left(\alpha^{2n} - 1\right)(\alpha - 1)}{\alpha + 1}.$$

Таким образом,

$$S_n = \frac{\pi}{n} \ln \frac{\left(\alpha^{2n} - 1\right)(\alpha - 1)}{\alpha + 1}.$$

а) $|\alpha| < 1$. В этом случае $\alpha^{2n} \to 0$ при $n \to +\infty$ и

$$\int\limits_0^\pi \ln\left(1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2\right) dx = \lim_{n\to+\infty} S_n = 0 \cdot \ln \frac{1-\alpha}{\alpha+1} = 0;$$

б) $|\alpha| > 1$. В этом случае при $n \to +\infty$

$$\ln \frac{\left(\alpha^{2n} - 1\right)(\alpha - 1)}{\alpha + 1} \sim 2n \ln|\alpha|$$

и

$$\int\limits_0^\pi \ln\left(1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2\right) dx = \lim_{n\to+\infty} S_n =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\pi}{n}\left(2n \ln|\alpha|\right) = 2\pi \ln|\alpha| = \pi \ln \alpha^2.$$

Окончательно получаем:

$$\int\limits_0^\pi \ln\left(1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2\right) dx = \begin{cases} 0\,, & |\alpha| < 1\,, \\ \pi \ln \alpha^2\,, & |\alpha| > 1\,. \end{cases}$$

Замечание. При $|\alpha| = 1$ интеграл является несобственным и его нельзя рассматривать как предел интегральных сумм (см. решение задачи 2385).

2193. Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны на $[a;b]$. Рассмотрим произвольное разбиение T отрезка $[a;b]$:

$$T = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$$

$(a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b)$, $\lambda(T)$ – характеристика этого разбиения, $\xi = (\xi_0, \ldots \xi_{n-1})$ и $\theta = (\theta_0, \ldots \theta_{n-1})$ – произвольные разметки разбиения T, т. е. наборы точек, для которых при каждом i $(0 \leqslant i \leqslant n-1)$ $\xi_i \in [x_i; x_{i+1}]$, $\theta_i \in [x_i; x_{i+1}]$. Доказать, что

$$\lim_{\lambda(T)\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\varphi(\theta_i)\Delta x_i = \int\limits_a^b f(x)\varphi(x)\,dx.$$

Для доказательства положим:

$$\sigma(T, \xi, \theta) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\varphi(\theta_i)\Delta x_i,$$

$$s(T, \xi) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\varphi(\xi_i)\Delta x_i.$$

Так как функции f и φ непрерывны на отрезке $[a;b]$, то их произведение также непрерывно, а, следовательно, и интегрируемо на этом отрезке. По определению интеграла

$$\lim_{\lambda(T)\to 0} s(T, \xi) = \int\limits_a^b f(x)\varphi(x)\,dx.$$

Следовательно, достаточно доказать, что

$$\lim_{\lambda(T)\to 0} (\sigma(T, \xi, \theta) - s(T, \xi)) = 0.$$

Проверим определение предела. Пусть $\varepsilon > 0$. Так как функция f непрерывна на отрезке $[a;b]$, то она ограничена на этом

отрезке, т. е. существует такое положительное число M, что при всех $x \in [a;b]$ выполняется неравенство $|f(x)| \leqslant M$. Так как функция $\varphi(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то она равномерно непрерывна на этом отрезке, следовательно, существует такое положительное число δ, что при любом разбиении T отрезка $[a;b]$ с характеристикой $\lambda(T) < \delta$ будет справедливо неравенство

$$|\varphi(\theta_i) - \varphi(\xi_i)| < \frac{\varepsilon}{M(b-a)}$$

при любых $\xi_i \in [x_i; x_{i+1}]$, $\theta_i \in [x_i; x_{i+1}]$. Для такого разбиения

$$|\sigma(T,\xi,\theta) - s(T,\xi)| = \left|\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\left(\varphi(\theta_i) - \varphi(\xi_i)\right)\Delta x_i\right| <$$

$$< \sum_{i=0}^{n-1} M\frac{\varepsilon}{M(b-a)}\,\Delta x_i = \frac{\varepsilon}{(b-a)}\sum_{i=0}^{n-1}\Delta x_i = \frac{\varepsilon}{(b-a)}(b-a) = \varepsilon.$$

Это доказывает утверждение задачи.

Замечание. Величина $s(T,\xi)$ рассматривалась как функция (T,ξ,θ), не зависящая от θ.

2193.1. Пусть $f(x)$ ограничена и монотонна на $[0;1]$. Доказать, что

$$\int\limits_0^1 f(x)\,dx - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Рассмотрим разбиение отрезка $[0;1]$ на n равных частей точками

$$x_k = \frac{k}{n} \quad (0 \leqslant k \leqslant n).$$

1. Пусть функция $f(x)$ монотонно возрастает. В этом случае

$$m_k = \inf_{[x_k;x_{k+1}]} f(x) = f(x_k) = f\left(\frac{k}{n}\right),$$

$$M_k = \sup_{[x_k;x_{k+1}]} f(x) = f(x_{k+1}) = f\left(\frac{k+1}{n}\right).$$

Длина каждого из отрезков разбиения $\Delta x_i = \dfrac{1}{n}$. Нижняя сумма

$$\underline{S}_n = \sum_{k=0}^{n-1} m_i \Delta x_i = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right). \tag{2.10}$$

Меняя в верхней сумме

$$\overline{S}_n = \sum_{k=0}^{n-1} M_i \Delta x_i = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k+1}{n}\right)$$

индекс суммирования k на $k-1$, преобразуем ее к виду

$$\overline{S}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right). \tag{2.11}$$

Вычитая из (2.11) равенство (2.10), получаем:

$$\overline{S}_n - \underline{S}_n = \frac{f(1) - f(0)}{n}.$$

Так как при всех n

$$\underline{S}_n \leqslant \int\limits_0^1 f(x)\,dx \leqslant \overline{S}_n,$$

то

$$\left| \int\limits_0^1 f(x)\,dx - \overline{S}_n \right| \leqslant \left| \overline{S}_n - \underline{S}_n \right| = \frac{f(1) - f(0)}{n}.$$

Заменяя в этой оценке $\overline{S}_n$ по формуле (2.11), имеем неравенство

$$\left| \int\limits_0^1 f(x)\,dx - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leqslant \frac{f(1) - f(0)}{n},$$

из которого непосредствено следует соотношение

$$\int\limits_0^1 f(x)\,dx - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

2. Пусть функция $f(x)$ монотонно убывает. Рассмотрим функцию $\tilde{f}(x) = -f(x)$. Тогда функция $\tilde{f}(x)$ монотонно возрастает. Согласно доказанному в предыдущем пункте

$$\int\limits_0^1 \tilde{f}(x)\,dx - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \tilde{f}\left(\frac{k}{n}\right) = O\left(\frac{1}{n}\right),$$

следовательно,

$$\int\limits_0^1 f(x)\,dx - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = -\left(\int\limits_0^1 \tilde{f}(x)\,dx - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \tilde{f}\left(\frac{k}{n}\right)\right) =$$

$$= -O\left(\frac{1}{n}\right) = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

2193.2. Пусть функция $f(x)$ ограничена и выпукла сверху на сегменте $[a;b]$. Доказать, что

$$(b-a)\,\frac{f(a)+f(b)}{2} \leqslant \int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

Согласно определению выпуклой сверху функции, при всех $x_1\,, x_2 \in [a;b]$, $\lambda_1 \geqslant 0$, $\lambda_1 \geqslant 0$ $(\lambda_1 + \lambda_2 = 1)$ выполняется неравенство

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \geqslant \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2). \qquad (2.12)$$

1. Докажем левое неравенство задачи. Пусть $x \in [a;b]$ и

$$x_1 = a\,, \quad x_2 = b\,, \quad \lambda_1 = \frac{b-x}{b-a}\,, \quad \lambda_2 = \frac{x-a}{b-a}\,.$$

Нетрудно видеть, что $\lambda_1 \geqslant 0$, $\lambda_2 \geqslant 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = x$. Применяя неравенство (2.12), получаем

$$f(x) \geqslant \frac{b-x}{b-a} f(a) + \frac{x-a}{b-a} f(b).$$

Интегрируя последнее неравенство, имеем:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \geqslant \int\limits_a^b \left[\frac{b-x}{b-a} f(a) + \frac{x-a}{b-a} f(b)\right] dx =$$

$$= \int\limits_a^b \left[\frac{bf(a) - af(b)}{b-a} + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\, x\right] dx =$$

$$= \left(\frac{bf(a) - af(b)}{b-a}\, x + \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_a^b =$$

$$= (bf(a) - af(b)) + \frac{(f(b)-f(a))\,(a+b)}{2} =$$

$$= (b-a)\,\frac{f(a)+f(b)}{2}\,.$$

2. Докажем правое неравенство задачи. Пусть $x \in [a;b]$ и

$$x_1 = x\,, \quad x_2 = a + b - x\,, \quad \lambda_1 = \frac{1}{2}\,, \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}\,.$$

Тогда $\lambda_1 \geqslant 0$, $\lambda_2 \geqslant 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = (a+b)/2$. Применяя неравенство (2.12), получаем

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \geqslant \frac{f(x) + f(a+b-x)}{2}\,.$$

Интегрируя последнее неравенство, имеем

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) \geqslant \frac{1}{2}\left(\int\limits_a^b f(x)\,dx + \int\limits_a^b f(a+b-x)\,dx\right).$$

Делая в последнем из интегралов замену $y = a+b-x$, получаем

$$\int\limits_a^b f(a+b-x)\,dx = -\int\limits_b^a f(y)\,dy = \int\limits_a^b f(y)\,dy = \int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Таким образом, полученное неравенство можно записать в следующем виде:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) \geqslant \frac{1}{2}\left(\int\limits_a^b f(x)\,dx + \int\limits_a^b f(x)\,dx\right) = \int\limits_a^b f(x)\,dx,$$

что совпадает с правым неравенством задачи.

2193.3. Пусть $f(x) \in C^{(2)}[1;+\infty)$ и $f(x) \geqslant 0$, $f'(x) \geqslant 0$, $f''(x) \leqslant 0$ при $x \in [1;+\infty)$. Доказать, что

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \frac{f(n)}{2} + \int\limits_1^n f(x)\,dx + O(1)$$

при $n \to +\infty$.

Для доказательства утверждения задачи достаточно установить свойство ограниченности последовательности

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) - \frac{f(n)}{2} - \int\limits_1^n f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n-1} f(k) + \frac{f(n)}{2} - \int\limits_1^n f(x)\,dx.$$

Так как $f''(x) \leqslant 0$, то функция $f(x)$ выпукла сверху, следовательно к ней применимо утверждение задачи 2193.2.

1. Используя левое неравенство задачи 2193.2, получаем

$$\frac{f(k-1)+f(k)}{2} \leqslant \int\limits_{k-1}^{k} f(x)\,dx \quad (k = 2,\, 3,\, \ldots).$$

Суммируя эти неравенства по k (от $k = 2$ до $k = n$) и учитывая свойство аддитивности интеграла, имеем:

$$\frac{f(1)}{2} + \sum_{k=2}^{n-1} f(k) + \frac{f(n)}{2} \leqslant \int\limits_1^n f(x)\,dx.$$

Это неравенство можно переписать в следующем виде:

$$\sum_{k=1}^{n-1} f(k) + \frac{f(n)}{2} - \int\limits_1^n f(x)\,dx \leqslant \frac{f(1)}{2},$$

что равносильно соотношению

$$a_n \leqslant \frac{f(1)}{2}.$$

2. Используя правое неравенство задачи 2193.2, имеем:

$$\int\limits_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} f(x)\,dx \leqslant f(k) \quad (k = 2,\, 3,\, \ldots).$$

Суммируя эти неравенства по k (от $k = 2$ до $k = n-1$) и учитывая свойство аддитивности интеграла, получаем

$$\int\limits_{3/2}^{n-\frac{1}{2}} f(x)\,dx \leqslant \sum_{k=2}^{n-1} f(k). \tag{2.13}$$

По условию задачи $f'(x) \geqslant 0$. Это влечет монотонное возрастание функции $f(x)$, поэтому

$$\int\limits_{n-\frac{1}{2}}^{n} f(x)\,dx \leqslant \int\limits_{n-\frac{1}{2}}^{n} f(n)\,dx = \frac{f(n)}{2}. \tag{2.14}$$

Складывая неравенства (2.13) и (2.14), получаем

$$\int\limits_{3/2}^{n} f(x)\,dx \leqslant \sum_{k=2}^{n-1} f(k) + \frac{f(n)}{2},$$

прибавляя к обеим частям полученного неравенства $f(1)$ и перенося интеграл в другую часть неравенства, приходим к оценке

$$f(1) \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} f(k) + \frac{f(n)}{2} - \int\limits_{3/2}^{n} f(x)\,dx.$$

Учитывая аддитивность интеграла, эту оценку можно записать в следующем виде:

$$f(1) - \int\limits_{1}^{3/2} f(x)\,dx \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} f(k) + \frac{f(n)}{2} - \int\limits_{1}^{n} f(x)\,dx,$$

что равносильно неравенству

$$f(1) - \int\limits_{1}^{3/2} f(x)\,dx \leqslant a_n.$$

Из п. 1 и п. 2 следует ограниченность последовательности $\{a_n\}$. Утверждение задачи доказано.

Замечание. В доказательстве нигде не использовалось условие неотрицательности $f(x)$. Легко видеть, что это условие не является необходимым. Последовательности $\{a_n\}$, построенные для функций $f(x)$ и $f(x) + C$, отличаются на величину $C/2$ и поэтому они одновременно ограничены или неограниченны. Таким образом, если утверждение задачи справедливо для функции $f(x)+C$, то оно справедливо также и для функции $f(x)$ (при любом C). Выбирая $C = -f(1)$ и учитывая возрастание $f(x)$, получаем, что функция $f(x)+C = f(x)-f(1)$ неотрицательна. Это сводит задачу к случаю неотрицательной функции.

2193.4. Пусть $f(x) \in C^{(1)}[a;b]$ и

$$\Delta_n = \int\limits_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right).$$

Найти $\lim\limits_{n\to+\infty} n\Delta_n$.

Пусть

$$x_k = a + k\,\frac{b-a}{n} \quad (0 \leqslant k \leqslant n).$$

Точки x_k образуют разбиение отрезка $[a;b]$ на n равных частей. Длина каждого из отрезков разбиения

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n}.$$

В силу свойств аддитивности и линейности интеграла

$$\Delta_n = \int\limits_a^b f(x)\,dx - \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\frac{b-a}{n} = \sum_{k=1}^{n}\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx -$$

$$-\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} dx = \sum_{k=1}^{n}\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx - \sum_{k=1}^{n}\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(x_k)\,dx =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} (f(x) - f(x_k))\,dx. \tag{2.15}$$

Положим

$$\widetilde{m}_k = \inf_{[x_{k-1};x_k]} f'(x),$$

$$\widetilde{M}_k = \sup_{[x_{k-1};x_k]} f'(x).$$

Пусть точка $x \in [x_{k-1};x_k]$. По теореме Лагранжа

$$f(x) - f(x_k) = f'(\xi_k)(x - x_k), \tag{2.16}$$

где точка ξ_k лежит между точками x и x_k, в частности, $\xi_k \in \in [x_{k-1}; x_k]$. Учитывая, что величина $x - x_k$ неположительна, получаем из (2.16) оценку

$$\widetilde{M}_k(x - x_k) \leqslant f(x) - f(x_k) \leqslant \widetilde{m}_k(x - x_k).$$

Интегрируя последнее неравенство, имеем

$$-\frac{\widetilde{M}_k(x_k - x_{k-1})^2}{2} \leqslant \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} (f(x) - f(x_k))\, dx \leqslant -\frac{\widetilde{m}_k(x_k - x_{k-1})^2}{2}.$$

Так как величина $x_k - x_{k-1} = (b - a)/n$, то полученное соотношение можно записать в следующем виде:

$$-\frac{\widetilde{M}_k(b - a)^2}{2n^2} \leqslant \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} (f(x) - f(x_k))\, dx \leqslant -\frac{\widetilde{m}_k(b - a)^2}{2n^2}. \qquad (2.17)$$

Из (2.15) и (2.17) следует, что

$$-\frac{(b - a)^2}{2n^2} \sum_{k=1}^{n} \widetilde{M}_k \leqslant \Delta_n \leqslant -\frac{(b - a)^2}{2n^2} \sum_{k=1}^{n} \widetilde{m}_k.$$

Внося под знаки сумм величину $\dfrac{b - a}{n} = \Delta x_k$, получаем неравенство

$$-\frac{b - a}{2n} \sum_{k=1}^{n} \widetilde{M}_k \Delta x_k \leqslant \Delta_n \leqslant -\frac{b - a}{2n} \sum_{k=1}^{n} \widetilde{m}_k \Delta x_k$$

и после умножения на n, приходим к оценке

$$-\frac{b - a}{2} \sum_{k=1}^{n} \widetilde{M}_k \Delta x_k \leqslant n\Delta_n \leqslant -\frac{b - a}{2} \sum_{k=1}^{n} \widetilde{m}_k \Delta x_k. \qquad (2.18)$$

Так как функция $f'(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то она интегрируема на этом отрезке и поэтому ее суммы Дарбу при

$n \to +\infty$ сходятся к определенному интегралу:

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \widetilde{m}_k \Delta x_k = \int\limits_a^b f'(x)\,dx,$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \widetilde{M}_k \Delta x_k = \int\limits_a^b f'(x)\,dx.$$

По теореме о пределе промежуточной последовательности из соотношения (2.18), получаем

$$\lim_{n\to+\infty} n\Delta_n = -\frac{b-a}{2} \int\limits_a^b f'(x)\,dx.$$

Так как по формуле Ньютона – Лейбница

$$\int\limits_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a),$$

то искомый предел

$$\lim_{n\to+\infty} n\Delta_n = \frac{1}{2}(b-a)\left(f(a) - f(b)\right).$$

2194. Показать, что разрывная функция

$$f(x) = \operatorname{sgn}\left(\sin\frac{\pi}{x}\right)$$

интегрируема на промежутке $[0;1]$.

Покажем, что выполнен критерий интегрируемости

$$\lim_{\lambda(T)\to 0} \Omega(f;T) = 0,$$

где $\Omega(f;T)$ – интегральное колебание функции f на отрезке $[0;1]$.

Проверим определение предела функции разбиения $\Omega(f;T)$. Пусть $\varepsilon > 0$. Выберем положительное число a так, чтобы оно удовлетворяло неравенствам

$$a < \varepsilon/8\,, \quad a < 1.$$

Функция f ограничена ($|f(x)| \leqslant 1$), множество точек разрыва функции f состоит из всех точек вида

$$x = \frac{1}{n}\,, \quad n = 1,\, 2,\, 3,\, \ldots$$

и точки $x = 0$. Отсюда следует, что на отрезке $[a;1]$ функция f может иметь только конечное число точек разрыва и поэтому интегрируема на этом отрезке. В силу критерия интегрируемости существует такое число $\delta_0 > 0$, что для любого разбиения $\widetilde{T}$ отрезка $[a;1]$ с характеристикой $\lambda(\widetilde{T}) < \delta_0$ справедливо неравенство

$$\Omega(f;\widetilde{T}) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Выберем $\delta = \min\{\delta_0, a\}$ и рассмотрим произвольное разбиение

$$T = \{x_0,\, x_1,\, \ldots\,,\, x_n\}$$

отрезка $[0;1]$ с характеристикой $\lambda(T) < \delta$. Пусть k – номер отрезка разбиения, на который попадает точка $x = a$, т. е.

$$x_k \leqslant a \leqslant x_{k+1}.$$

Тогда $\Omega(f;T) = S_1 + S_2 + S_3$, где

$$S_1 = \sum_{i=0}^{k-1} \omega_i \Delta x_i, \quad S_2 = \omega_k \Delta x_k, \quad S_3 = \sum_{i=k+1}^{n-1} \omega_i \Delta x_i.$$

Так как $|f(x)| \leqslant 1$, то колебание функции f на любом отрезке не больше 2, следовательно, при любом i величина $\omega_i \leqslant 2$ и

$$S_1 \leqslant 2 \sum_{i=0}^{k-1} \Delta x_i = 2x_k \leqslant 2a < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Аналогично

$$S_2 \leqslant 2\Delta x_k \leqslant 2\lambda(T) < 2\delta \leqslant 2a < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Пусть

$$\widetilde{T} = \{a,\, x_{k+1},\, x_{k+2},\, \ldots\, , x_n\},$$

тогда $\widetilde{T}$ – разбиение отрезка $[a; 1]$ и его характеристика

$$\lambda(\widetilde{T}) \leqslant \lambda(T) < \delta \leqslant \delta_0.$$

Следовательно, $\Omega(f; \widetilde{T}) < \dfrac{\varepsilon}{2}$ и величина

$$S_3 \leqslant \Omega(f; \widetilde{T}) < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Отсюда получаем, что

$$\Omega(f; T) = S_1 + S_2 + S_3 < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Таким образом, для любого положительного числа ε существует такое положительное число δ, что для любого разбиения T отрезка $[0; 1]$ с характеристикой разбиения $\lambda(T) < \delta$ справедливо неравенство $\Omega(f; T) < \varepsilon$, т. е.

$$\lim_{\lambda(T)\to 0} \Omega(f; T) = 0.$$

Интегирируемость функции f установлена.

Замечание. Для читателей, знакомых с мерой Лебега, решение данной задачи должно быть элементарным. Лебег установил следующий критерий интегрируемости ограниченной функции по Риману: множество точек разрыва этой функции должно иметь лебеговсую меру, равную нулю. Так как любое счетное множество имеет меру Лебега, равную нулю, а множество точек разрыва рассматриваемой в задаче функции счетно, то отсюда сразу следует интегрируемость этой функции по Риману.

2195. Показать, что функция Римана

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{если } x \text{ иррационально;} \\ 1/n\,, & \text{если } x = m/n, \end{cases}$$

где m и n ($n \geqslant 1$) – взаимно простые целые числа, интегрируема на любом конечном промежутке.

Рассмотрим произвольный отрезок $[a;b]$ и покажем, что выполнен критерий интегрируемости

$$\lim_{\lambda(T)\to 0} \Omega(f;T) = 0,$$

где $\Omega(f;T)$ – интегральное колебание функции f на отрезке $[a;b]$.

Проверим определение предела. Пусть $\varepsilon > 0$, подберем натуральное число N так, чтобы

$$N > \frac{2(b-a)}{\varepsilon}.$$

Количество чисел вида m/n с взаимно простыми m и n, для которых знаменатель дроби $n \leqslant N$ и которые попадают на отрезок $[a;b]$, конечно. Обозначим это число k_N и положим

$$\delta = \frac{\varepsilon}{4k_N}\,.$$

Пусть $T = \{x_0,\, x_1,\, \ldots\,,\, x_n\}$ – произвольное разбиение отрезка $[a;b]$ с характеристикой $\lambda(T) < \delta$.

Сгруппируем слагаемые, входящие в $\Omega(f;T)$, в две суммы

$$\Omega(f;T) = \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i = S_1 + S_2.$$

К S_1 отнесем те слагаемые, которые отвечают отрезкам разбиения, содержащим числа вида m/n с взаимно простыми m и n, для которых $n \leqslant N$. Во вторую сумму S_2 отнесем оставшиеся слагаемые.

Из явной формулы, задающей функцию Римана, следует, что колебание этой функции на любом промежутке не превосходит 1, следовательно $\omega_i \leqslant 1$. Так как количество чисел вида m/n с взаимно простыми m и n, для которых $n \leqslant N$ и которые попадают на отрезок $[a;b]$, равно k_N и каждое такое число может принаждежать не более чем двум (соседним) отрезкам, то

$$S_1 \leqslant 2k_N\lambda(T) < 2k_N\delta = 2k_N\frac{\varepsilon}{4k_N} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

На промежутках, отвечаюших второй сумме, любое ненулевое значение функии $\varphi(x)$ меньше, чем $1/N$ и поэтому величина $\omega_i < 1/N$. Учитывая выбор числа N, получаем, что

$$S_2 < \frac{1}{N}(b-a) < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a) = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Таким образом, для любого разбиения T отрезка $[a;b]$ с характеристикой $\lambda(T) < \delta$

$$\Omega(f;T) = S_1 + S_2 < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{\lambda(T)\to 0} \Omega(f;T) = 0,$$

что равносильно интегрируемости функции $\varphi(x)$ на отрезке $[a;b]$. Утверждение задачи доказано.

2196. Показать, что функция

$$f(x) = \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right],$$

если $x \neq 0$ и $f(0) = 0$, интегрируема на сегменте $[0;1]$.

Покажем, что выполнен критерий интегрируемости

$$\lim_{\lambda(T)\to 0} \Omega(f;T) = 0,$$

где $\Omega(f;T)$ – интегральное колебание функции f на отрезке $[0;1]$.

Проверим определение предела. Пусть $\varepsilon > 0$. Выберем положительное число a так, чтобы оно удовлетворяло неравенствам

$$a < \varepsilon/4\,, \quad a < 1.$$

Функция f ограничена ($0 \leqslant f(x) \leqslant 1$), множество точек разрыва функции f состоит из всех точек вида

$$x = \frac{1}{n}\,, \quad n = 2,\, 3,\, 4,\, \ldots$$

и точки $x = 0$. Отсюда следует, что на отрезке $[a;1]$ функция f может иметь только конечное число точек разрыва и поэтому интегрируема на этом отрезке. В силу критерия интегрируемости существует такое число $\delta_0 > 0$, что для любого разбиения $\widetilde{T}$ отрезка $[a;1]$ с характеристикой $\lambda(\widetilde{T}) < \delta_0$ справедливо неравенство

$$\Omega(f;\widetilde{T}) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Выберем $\delta = \min\{\delta_0, a\}$ и рассмотрим произвольное разбиение

$$T = \{x_0,\, x_1,\, \ldots\,,\, x_n\}$$

отрезка $[0;1]$ с характеристикой $\lambda(T) < \delta$. Пусть k – номер отрезка разбиения, на который попадает точка $x = a$, т. е.

$$x_k \leqslant a \leqslant x_{k+1}.$$

Тогда $\Omega(f;T) = S_1 + S_2 + S_3$, где

$$S_1 = \sum_{i=0}^{k-1} \omega_i \Delta x_i, \quad S_2 = \omega_k \Delta x_k, \quad S_3 = \sum_{i=k+1}^{n-1} \omega_i \Delta x_i.$$

Так как $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$, то колебание функции f на любом отрезке не больше 1, следовательно, при любом i величина $\omega_i \leqslant 1$ и

$$S_1 \leqslant \sum_{i=0}^{k-1} \Delta x_i = x_k \leqslant a < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Аналогично

$$S_2 \leqslant \Delta x_k \leqslant \lambda(T) < \delta \leqslant a < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Пусть

$$\widetilde{T} = \{a,\, x_{k+1},\, x_{k+2},\, \ldots\, , x_n\},$$

тогда $\widetilde{T}$ – разбиение отрезка $[a; 1]$ и его характеристика

$$\lambda(\widetilde{T}) \leqslant \lambda(T) < \delta \leqslant \delta_0.$$

Следовательно, $\Omega(f; \widetilde{T}) < \dfrac{\varepsilon}{2}$ и величина

$$S_3 \leqslant \Omega(f; \widetilde{T}) < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Отсюда получаем, что

$$\Omega(f; T) = S_1 + S_2 + S_3 < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Таким образом, для любого положительного числа ε существует такое положительное число δ, что для любого разбиения T отрезка $[0; 1]$ с характеристикой разбиения $\lambda(T) < \delta$ справедливо неравенство $\Omega(f; T) < \varepsilon$, т. е.

$$\lim_{\lambda(T)\to 0} \Omega(f; T) = 0.$$

Интегирируемость функции f установлена.

Замечание. Функция, рассматриваемая в этой задаче, имеет свойства, аналогичные свойствам функции из задачи 2194: она ограничена и имеет те же точки разрыва (кроме точки $x = 1$). Соответственно и доказательство интегрируемости этой функции практически идентично доказательству из задачи 2194.

2197. Доказать, что функция Дирихле

$$\chi(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{если } x \text{ иррационально;} \\ 1\,, & \text{если } x \text{ рационально,} \end{cases}$$

не интегрируема на любом промежутке.

Рассмотрим произвольный отрезок $[a;b]$ и покажем, что для функции Дирихле не выполнен критерий интегрируемости:

$$\lim_{\lambda(T)\to 0} \Omega(f;T) = 0,$$

где $\Omega(f;T)$ – интегральное колебание функции f на отрезке $[a;b]$.

В самом деле, на любом промежуке есть как рациональные, так и иррациональные числа, поэтому колебание функции Дирихле на любом промежутке равно 1. Следовательно для любого разбиения

$$T = \{x_0,\, x_1,\, \ldots\,,\, x_n\}$$

и любого i величина $\omega_i = 1$. Отсюда получаем, что

$$\Omega(f;T) = \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i = b - a$$

и, таким образом,

$$\lim_{\lambda(T)\to 0} \Omega(f;T) = b - a \neq 0.$$

2198. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на $[a;b]$,

$$x_i = a + \frac{i}{n}\,(b-a) \quad (i = 0,\, 1,\, \ldots\,,\, n),$$

$$M_i = \sup_{[x_i;x_{i+1}]} f(x) \quad (i = 0,\, 1,\, \ldots\,,\, n-1),$$

$(n = 1,\, 2,\, \ldots)$, а функция $f_n(x)$ определена следующим образом:

$$f_n(x) = \begin{cases} M_i\,, & x_i \leqslant x < x_{i+1} \quad (0 \leqslant i \leqslant n-2); \\ M_n\,, & x_{n-1} \leqslant x \leqslant x_n\,. \end{cases}$$

Доказать, что

$$\lim_{n\to+\infty} \int\limits_a^b f_n(x)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Так как на отрезке $[x_i; x_{i+1}]$ функция $f_n(x)$ может отличаться от постоянной M_i только в одной точке $x = x_{i+1}$, то

$$\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f_n(x)\,dx = \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} M_i dx = M_i \Delta x_i,$$

где $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$.

В силу аддитивности интеграла

$$\int\limits_a^b f_n(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f_n(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i = \overline{S}_n,$$

где $\overline{S}_n$ – верхняя суммы Дарбу функции f.

Так как функция f интегрируема на отрезке $[a; b]$, то

$$\lim_{n\to+\infty} \overline{S}_n = \int\limits_a^b f(x)\,dx,$$

следовательно,

$$\lim_{n\to+\infty} \int\limits_a^b f_n(x)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

2199. Доказать, что если функция $f(x)$ интегрируема на $[a; b]$, то существует последовательность непрерывных функций $\varphi_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ такая, что

$$\int\limits_a^c f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \int\limits_a^c \varphi_n(x)\,dx$$

при $a \leqslant c \leqslant b$.

Рассмотрим разбиение отрезка $[a; b]$ на n равных частей

$$x_i = a + \frac{i}{n}(b - a) \quad (0 \leqslant i \leqslant n).$$

Пусть

$$M_i = \sup_{[x_i;x_{i+1}]} f(x) \quad (i = 0,\, 1,\, \ldots\,,\, n-1),$$

а функция $f_n(x)$ определена следующим образом:

$$f_n(x) = \begin{cases} M_i\,, & x_i \leqslant x < x_{i+1} \quad (0 \leqslant i \leqslant n-2); \\ M_n\,, & x_{n-1} \leqslant x \leqslant x_n\,. \end{cases}$$

Согласно решению задачи 2198

$$\lim_{n\to+\infty} \int\limits_a^b f_n(x)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx,$$

что равносильно равенству

$$\lim_{n\to+\infty} \int\limits_a^b (f_n(x) - f(x))\,dx = 0.$$

Из определения функции $f_n(x)$ следует, что всюду

$$f_n(x) \geqslant f(x),$$

поэтому последнее равенство равносильно соотношению

$$\lim_{n\to+\infty} \int\limits_a^b |\,f_n(x) - f(x)|\,dx = 0. \tag{2.19}$$

Построим функцию $\varphi_n(x)$ следующим образом. Рассмотрим интервалы с центрами в точках разбиения

$$I_i = \left(x_i - \frac{b-a}{2n^2}\,; x_i + \frac{b-a}{2n^2}\right) \quad (i = 1,\, 2,\, \ldots\, n-1).$$

Так как расстояние между соседними точками разбиения равно $(b-a)/n$, то эти интервалы не пересекаются. Вне каждого интервала I_i функция $\varphi_n(x)$ совпадает с $f_n(x)$, а внутри этого интервала она совпадает с линейной функцией, принимающей на концах интервала те же значения, что и функция $f_n(x)$ (рис. 2.1).

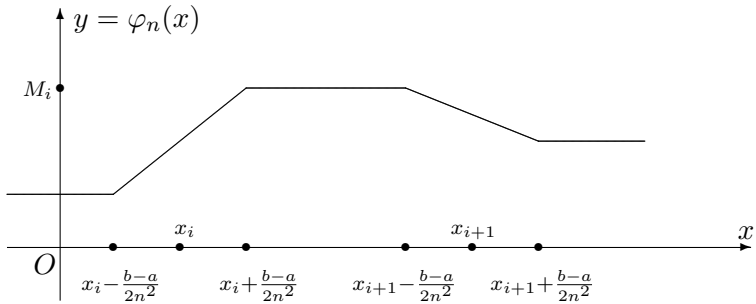

Рис. 2.1

Построенная таким образом функция $\varphi_n(x)$ непрерывна. Покажем, что последовательность $\{\varphi_n(x)\}$ является искомой. Сначала установим равенство

$$\lim_{n\to+\infty} \int\limits_a^b |\,\varphi_n(x) - f_n(x)|\,dx = 0. \tag{2.20}$$

Так как функция $f(x)$ интегрируема на $[a;b]$, то она ограничена на $[a;b]$, т. е. существует такая положительная постоянная M, что при всех $x \in [a;b]$ справедливо неравенство $|f(x)| \leqslant M$. Из формулы, определяющей функцию $f_n(x)$, непосредственно следует, что также и $|f_n(x)| \leqslant M$ при всех $x \in [a;b]$.

Любая линейная функция $y(x) = Ax + B$ обладает тем свойством, что на произвольном отрезке $[\alpha;\beta]$ все ее значения заключены между ее значениями на концах отрезка. Отсюда следует, что для линейной функции $y(x)$ при всех $x \in [\alpha;\beta]$

$$|y(x)| \leqslant \max\{|y(\alpha)|, |y(\beta)|\}.$$

В соответствии со своим определением функция $\varphi_n(x)$ вне интервалов I_i совпадает с $f_n(x)$ и поэтому удовлетворяет неравенству $|\varphi_n(x)| \leqslant M$. Внутри этих интервалов $\varphi_n(x)$ линейна и ее

значения на концах интервалов совпадают со значениями функции $f_n(x)$. Отсюда следует, что значения $\varphi_n(x)$ внутри интервалов лежат между теми значениями функции $f_n(x)$, которые она принимает на концах этих интервалов. Таким образом, внутри интервалов также выполняется неравенство $|\varphi_n(x)| \leqslant M$.

Учитывая, что вне интервалов, на которых функция $f_n(x)$ заменяется линейной, функции $f_n(x)$ и $\varphi_n(x)$ совпадают, получаем:

$$\int\limits_a^b |\,\varphi_n(x) - f_n(x)|\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int\limits_{x_i - \frac{b-a}{2n^2}}^{x_i + \frac{b-a}{2n^2}} |\,\varphi_n(x) - f_n(x)|\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{n-1} \left(\int\limits_{x_i - \frac{b-a}{2n^2}}^{x_i + \frac{b-a}{2n^2}} |\,\varphi_n(x)|\,dx + \int\limits_{x_i - \frac{b-a}{2n^2}}^{x_i + \frac{b-a}{2n^2}} |\,f_n(x)|\,dx \right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{M(b-a)}{n^2} + \frac{M(b-a)}{n^2} \right) =$$

$$= 2M(b-a) \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n^2} = 2M(b-a)\frac{n-1}{n^2}.$$

Так как

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n-1}{n^2} = 0,$$

то отсюда следует соотношение (2.20).

Пусть $a \leqslant c \leqslant b$, тогда

$$\left| \int\limits_a^c \varphi_n(x)\,dx - \int\limits_a^c f(x)\,dx \right| = \left| \int\limits_a^c (\varphi_n(x) - f(x))\,dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_a^c |\varphi_n(x) - f(x)|\,dx \leqslant \int\limits_a^b |\varphi_n(x) - f(x)|\,dx =$$

$$= \int\limits_a^b |(\varphi_n(x) - f_n(x)) + (f_n(x) - f(x))|\, dx \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_a^b (|\varphi_n(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)|)\, dx =$$

$$= \int\limits_a^b |\varphi_n(x) - f_n(x)|\, dx + \int\limits_a^b |f_n(x) - f(x)|\, dx \to 0$$

при $n \to +\infty$ согласно (2.19) и (2.20). Следовательно,

$$\lim_{n\to+\infty} \int\limits_a^c \varphi_n(x)\, dx = \int\limits_a^c f(x)\, dx.$$

2200. Доказать, что если ограниченная функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a; b]$, то абсолютная величина ее $|f(x)|$ также интегрируема на $[a; b]$, причем

$$\left| \int\limits_a^b f(x)\, dx \right| \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|\, dx. \tag{2.21}$$

Проверим критерий интегируемости для функции $|f(x)|$. Рассмотрим произвольное разбиение отрезка $[a; b]$:

$$T = \{x_0\,, x_1\,, \ldots\,, x_n\}$$

$(a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b)$.

Пусть

$$m_i = \inf_{[x_i; x_{i+1}]} f(x), \quad M_i = \sup_{[x_i; x_{i+1}]} f(x),$$

$$\widetilde{m}_i = \inf_{[x_i; x_{i+1}]} |f(x)|, \quad \widetilde{M}_i = \sup_{[x_i; x_{i+1}]} |f(x)|$$

и $\omega_i = M_i - m_i$ – колебание функции $f(x)$ на отрезке $[x_i; x_{i+1}]$, а $\widetilde{\omega}_i = \widetilde{M}_i - \widetilde{m}_i$ – колебание функции $|f(x)|$ на том же отрезке $(0 \leqslant i \leqslant n-1)$.

Так как функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a; b]$, то величина

$$\Omega(f; T) = \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i \to 0 \tag{2.22}$$

при $\lambda(T) \to 0$, где $\lambda(T)$ – характеристика разбиения T:

$$\lambda(T) = \max_{0 \leqslant i \leqslant n-1} \Delta x_i,$$

$(\Delta x_i = x_{i+1} - x_i)$.

Для колебания произвольной функции $f(x)$ на любом множестве X справедливо следующее представление:

$$\omega(f) = \sup_{x \in \mathrm{X}} f(x) - \inf_{x \in \mathrm{X}} f(x) = \sup_{x,\, y \in \mathrm{X}} |f(x) - f(y)|.$$

Так как при всех x и y

$$\big||f(x)| - |f(y)|\big| \leqslant |f(x) - f(y)|,$$

то

$$\omega(|f|) = \sup_{x,\, y \in \mathrm{X}} \big||f(x)| - |f(y)|\big| \leqslant \sup_{x,\, y \in \mathrm{X}} |f(x) - f(y)| = \omega(f).$$

Отсюда следует, что

$$\Omega(|f|; T) = \sum_{i=0}^{n-1} \widetilde{\omega}_i \Delta x_i \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i = \Omega(f; T),$$

т. е. для любого разбиения T

$$0 \leqslant \Omega(|f|; T) \leqslant \Omega(f; T).$$

Следовательно, ввиду (2.22)

$$\lim_{\lambda(T)\to 0} \Omega(|f|;T) = 0,$$

что равносильно интегрируемости функции $|f(x)|$.

Остается доказать неравенство (2.21). Интегрируя очевидные неравенства

$$-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|$$

по отрезку $[a;b]$, получаем

$$-\int\limits_a^b |f(x)|\,dx \leqslant \int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|\,dx,$$

что равносильно (2.21).

2201. Пусть функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на сегменте $[a;b]$, т. е. интеграл

$$\int\limits_a^b |f(x)|\,dx$$

существует. Является ли эта функция интегрируемой на отрезке $[a;b]$?

Рассмотреть пример:

$$f(x) = \begin{cases} 1\,, & \text{если } x \text{ рационально;} \\ -1\,, & \text{если } x \text{ иррационально.} \end{cases}$$

Из интегрируемости модуля функции не следует интегрируемость самой функции. Это можно видеть на предлагаемом примере. Величина модуля функции постоянна: $|f(x)| = 1$, что влечет существование интеграла от модуля функции на любом отрезке $[a;b]$. В то же время, для любого разбиения T произвольного отрезка $[a;b]$ величины

$$m_i = \inf_{[x_i;x_{i+1}]} f(x) = -1, \quad M_i = \sup_{[x_i;x_{i+1}]} f(x) = 1$$

(на любом промежутке существуют как рациональные так и иррациональные числа). Поэтому суммы Дарбу

$$\underline{S}(f;T) = \sum_{k=0}^{n-1} m_i \Delta x_i = -\sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_i = -(b-a),$$

$$\overline{S}(f;T) = \sum_{k=0}^{n-1} M_i \Delta x_i = \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_i = (b-a).$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{\lambda(T)\to 0} \underline{S}(f;T) \neq \lim_{\lambda(T)\to 0} \overline{S}(f;T)$$

и поэтому функция $f(x)$ не интегрируема на $[a;b]$.

2202. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на $[a;b]$ и $A \leqslant \leqslant f(x) \leqslant B$ при $a \leqslant x \leqslant b$, а функция $\varphi(x)$ определена и непрерывна на сегменте $[A;B]$. Доказать, что функция $\varphi\left(f(x)\right)$ интегрируема на $[a;b]$.

Рассмотрим сложную функцию $F(x) = \varphi(f(x))$. Применим критерий интегрируемости из задачи 7: функция $F(x)$ интегируема на $[a;b]$, если при каждом $\sigma > 0$

$$\lim_{\lambda(T)\to 0} \mu(F,\sigma;T) = 0,$$

где $\mu(F,\sigma;T)$ – суммарная длина всех тех отрезков $\Delta_i = [x_i;x_{i+1}]$ разбиения T, на которых колебание функции $\omega(F,\Delta_i) \geqslant \sigma$.

Так как $\sigma > 0$, то в силу непрерывности функции $\varphi(x)$ на отрезке $[A;B]$, найдется такое положительное чмсло E, что на любом промежутке $[\alpha;\beta] \subset [A;B]$, длина которого $\beta - \alpha < E$, колебание $\omega(\varphi,[\alpha;\beta]) < \sigma$.

Проверим определение предела функции $\mu(F,\sigma;T)$. Пусть $\varepsilon > 0$, как как функция f интегрируема на $[a;b]$, то согласно критерию интегрируемости из задачи 7 существует такое положительное число δ, что для любого разбиения $T = \{x_0\,, x_1\,, \ldots\,, x_n\}$

с характеристикой $\lambda(T) < \delta$ будет выполняться неравенство

$$\sum_{\omega(f,\Delta_i)\geqslant E} \Delta x_i = \mu(f, E; T) < \varepsilon.$$

Покажем, что определенное таким образом число δ отвечает числу ε в определении предела функции $\mu(F, \sigma; T)$.

В самом деле, на тех отрезках $\Delta_i = [x_i; x_{i+1}]$, где колебание функции f меньше E, колебание сложной функции $\varphi(f)$ будет меньше σ (в силу выбора числа E).

Таким образом,

$$\omega(\varphi(f), \Delta_i) \geqslant \sigma$$

только для тех i, для которых

$$\omega(f, \Delta_i) \geqslant E,$$

Следовательно,

$$\mu(F, \sigma; T) = \sum_{\omega(\varphi(f),\Delta_i)\geqslant\sigma} \Delta x_i \leqslant \sum_{\omega(f,\Delta_i)\geqslant E} \Delta x_i = \mu(f, E; T) < \varepsilon.$$

Таким образом, сложная функция $\varphi(f)$ удовлетворяет выбранному критерию интегрируемости.

2203. Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ интегрируемы, то обязательно ли функция $f(\varphi(x))$ также интегрируема?

Рассмотреть пример:

$$f(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{если } x = 0; \\ 1\,, & \text{если } x \neq 0, \end{cases}$$

а $\varphi(x)$ – функция Римана,

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{если } x \text{ иррационально}; \\ 1/n\,, & \text{если } x = m/n, \end{cases}$$

где m и n $(n \geqslant 1)$ – взаимно простые целые числа.

Указанный в задаче пример показывает, что необязательно. Функция f ограничена и имеет одну точку разрыва ($x = 0$). Отсюда следует, что эта функция интегрируема на любом отрезке. Функция Римана $\varphi(x)$ также интегрируема на любом отрезке (задача 2195). Сложная функция, как нетрудно видеть, совпадает с функцией Дирихле

$$f(\varphi(x)) = \begin{cases} 0\,, & \text{если } x \text{ иррационально;} \\ 1\,, & \text{если } x \text{ рационально,} \end{cases}$$

и не интегрируема ни на каком отрезке (задача 2197).

2204. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[A; B]$. Доказать, что $f(x)$ обладает свойством интегральной непрерывности, т. е.

$$\lim_{h \to 0} \int\limits_a^b |f(x+h) - f(x)|\, dx = 0, \tag{2.23}$$

где $[a; b] \subset [A; B]$.

Доказательство проведем поэтапно. Прежде всего докажем утверждение задачи для характеристической функции отрезка

$$f(x) = \chi([\alpha; \beta]; x) = \begin{cases} 1\,, & \text{если } x \in [\alpha; \beta]; \\ 0\,, & \text{если } x \notin [\alpha; \beta]. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что при достаточно малых $h > 0$ (таких, что смещенный отрезок $[\alpha + h; \beta + h]$ лежит на исходном промежутке $[A; B]$) функция $f(x+h) - f(x)$ равна -1 при $x \in [\alpha; \alpha + h)$, равна 1 при $x \in (\beta; \beta + h]$ и равна нулю при остальных значениях аргумента. Аналогично, при достаточно малых $h < 0$ функция $f(x + h) - f(x)$ равна 1 при $x \in [\alpha + h; \alpha)$, равна -1 при $x \in (\beta + h; \beta]$ и равна нулю при остальных значениях аргумента. Отсюда следует, что всюду $|f(x + h) - f(x)| \leqslant 1$ и $f(x + h) - f(x) \neq 0$ только на двух промежутках общей длиной $2h$ и поэтому для любого отрезка $[a; b]$ (независимо от его

расположения по отношению к отрезку $[\alpha;\beta]$)

$$\int\limits_a^b |f(x+h)-f(x)|\,dx \leqslant 2h.$$

Из последнего неравенства следует (2.23).

На втором этапе распространим утверждение задачи на ступенчатые функции (т. е. линейные комбинации характеристических функций). Пусть

$$f(x)=\sum_{k=1}^n c_k f_k(x),$$

где $f_k(x)=\chi([\alpha_k;\beta_k];x)$ – характеристическая функция отрезка $[\alpha_k;\beta_k]$, тогда

$$\int\limits_a^b |f(x+h)-f(x)|\,dx = \int\limits_a^b \left|\sum_{k=1}^n c_k\left(f_k(x+h)-f_k(x)\right)\right| dx \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_a^b \sum_{k=1}^n |c_k|\,|f_k(x+h)-f_k(x)|\;dx =$$

$$= \sum_{k=1}^n |c_k| \int\limits_a^b |f_k(x+h)-f_k(x)|\;dx.$$

Согласно предыдущему пункту доказательства при любом k

$$\lim_{h\to 0}\int\limits_a^b |f_k(x+h)-f_k(x)|\,dx = 0,$$

поэтому из последнего неравенства следует, что (2.23) справедливо для любой ступенчатой функции.

Наконец предположим, что $f(x)$ – произвольная интегрируемая на $[A;B]$ функция и $[a;b] \subset [A;B]$, тогда $f(x)$ интегрируема и на отрезке $[a;b]$. Пусть

$$f_n(x) = \begin{cases} M_i\,, & x_i \leqslant x < x_{i+1} \quad (0 \leqslant i \leqslant n-2); \\ M_n\,, & x_{n-1} \leqslant x \leqslant x_n\,, \end{cases}$$

где

$$x_i = a + \frac{i}{n}\,(b-a) \quad (0 \leqslant i \leqslant n).$$

и

$$M_i = \sup_{[x_i;x_{i+1}]} f(x) \quad (i = 0,\, 1,\, \ldots\,,\, n-1).$$

В задаче 2199 для этой функции установлены следующие свойства:

1. Существует такая положительная постоянная M, что при всех $x \in [a;b]$ и всех n

$$|f(x)| \leqslant M\,, \quad |f_n(x)| \leqslant M.$$

2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx = 0.$

Рассмотрим ступенчатую функцию

$$\widetilde{f_n}(x) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \chi([x_i;x_{i+1}];x).$$

Из свойства 1 функции $f_n(x)$ и из определения чисел M_i следует, что при любом i величина $M_i \leqslant M$ и поэтому при всех $x \in [a;b]$ и всех n

$$|\widetilde{f_n}(x)| \leqslant M.$$

Нетрудно видеть, что функции $\widetilde{f_n}(x)$ и $f_n(x)$ могут отличаться только в конечном числе точек разбиения $\{x_i\}$ отрезка $[a;b]$ $(0 \leqslant$

$\leqslant i \leqslant n$). Следовательно,

$$\int\limits_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx = \int\limits_a^b |\widetilde{f_n}(x) - f(x)|\,dx.$$

Поэтому свойство 2 справедливо и для последовательность функций $\widetilde{f_n}(x)$, т. е.

$$\lim_{n\to+\infty} \int\limits_a^b |\widetilde{f_n}(x) - f(x)|\,dx = 0.$$

Пусть $\varepsilon > 0$, подберем n так, чтобы

$$\int\limits_a^b |\widetilde{f_n}(x) - f(x)|\,dx < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{2.24}$$

Выполняя замену $x + h$ на x, используя свойство аддитивности интеграла и неравенства $|f(x)| \leqslant M$, $|\widetilde{f_n}(x)| \leqslant M$, получаем следующую оценку:

$$\left| \int\limits_a^b \left|\widetilde{f_n}(x+h) - f(x+h)\right| dx - \int\limits_a^b \left|\widetilde{f_n}(x) - f(x)\right| dx \right| =$$

$$= \left| \int\limits_{a+h}^{b+h} \left|\widetilde{f_n}(x) - f(x)\right| dx - \int\limits_a^b \left|\widetilde{f_n}(x) - f(x)\right| dx \right| =$$

$$= \left| \int\limits_a^{a+h} \left|\widetilde{f_n}(x) - f(x)\right| dx + \int\limits_b^{b+h} \left|\widetilde{f_n}(x) - f(x)\right| dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant 2M \left| \int\limits_a^{a+h} dx \right| + 2M \left| \int\limits_b^{b+h} dx \right| = 4M|\,h|. \tag{2.25}$$

Из соотношений (2.24) и (2.25) получаем, что

$$\int\limits_a^b \left|\widetilde{f_n}(x+h) - f(x+h)\right| dx =$$

$$= \left| \left(\int\limits_a^b \left|\widetilde{f_n}(x+h) - f(x+h)\right| dx - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \int\limits_a^b \left|\widetilde{f_n}(x) - f(x)\right| dx \right) + \int\limits_a^b \left|\widetilde{f_n}(x) - f(x)\right| dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \int\limits_a^b \left|\widetilde{f_n}(x+h) - f(x+h)\right| dx - \int\limits_a^b \left|\widetilde{f_n}(x) - f(x)\right| dx \right| +$$

$$+ \left| \int\limits_a^b \left|\widetilde{f_n}(x) - f(x)\right| dx \right| < 4M|\,h| + \frac{\varepsilon}{4}. \qquad (2.26)$$

Используя неравенства (2.24) и (2.26), приходим к соотношению

$$\int\limits_a^b |f(x+h) - f(x)|\ dx = \int\limits_a^b \left| \left(f(x+h) - \widetilde{f_n}(x+h) \right) + \right.$$

$$\left. + \left(\widetilde{f_n}(x+h) - \widetilde{f_n}(x) \right) + \left(\widetilde{f_n}(x) - f(x) \right) \right|\ dx \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_a^b \left| f(x+h) - \widetilde{f_n}(x+h) \right| dx + \int\limits_a^b \left| \widetilde{f_n}(x+h) - \widetilde{f_n}(x) \right| dx +$$

$$+ \int\limits_a^b \left| \widetilde{f_n}(x) - f(x) \right| dx < 4M|\,h| + \frac{\varepsilon}{4} + \int\limits_a^b \left| \widetilde{f_n}(x+h) - \widetilde{f_n}(x) \right| dx +$$

$$+\frac{\varepsilon}{4} = 4M|\,h| + \frac{\varepsilon}{2} + \int\limits_a^b \left|\widetilde{f_n}(x+h) - \widetilde{f_n}(x)\right| dx. \qquad (2.27)$$

Так как $\widetilde{f_n}(x)$ является ступенчатой функцией, то согласно доказанному выше,

$$\lim_{h\to 0} \int\limits_a^b |\widetilde{f_n}(x+h) - \widetilde{f_n}(x)|\, dx = 0,$$

следовательно, существует такое положительное число h_1, что при любом h, удовлетворяющем неравенству $|h| < h_1$,

$$\int\limits_a^b |\widetilde{f_n}(x+h) - \widetilde{f_n}(x)|\, dx < \frac{\varepsilon}{4}. \qquad (2.28)$$

Положим $h_2 = \dfrac{\varepsilon}{16M}$, тогда при $|h| < h_2$ величина

$$4M|\,h| < \frac{\varepsilon}{4}. \qquad (2.29)$$

Определим величину $h_\varepsilon = \min\{h_1, h_2\}$, тогда при любом h, удовлетворяющем неравенству $|h| < h_\varepsilon$, справедливы оба неравенства (2.28) и (2.29). Подставляя эти неравества в соотношение (2.27), находим, что при $|h| < h_\varepsilon$

$$\int\limits_a^b |f(x+h) - f(x)|\; dx < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon.$$

Справедливость соотношения (2.23) для произвольной интегрируемой функции доказана.

2205. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a; b]$. Доказать, что равенство

$$\int\limits_a^b f^2(x)\, dx = 0$$

имеет место тогда и только тогда, когда $f(x) = 0$ во всех точках непрерывности функции $f(x)$, принадлежащих сегменту $[a; b]$.

1. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a; b]$,

$$\int\limits_a^b f^2(x)\,dx = 0$$

и x_0 – точка непрерывности функции f.

Допустим противное: $f(x_0) \neq 0$. Тогда $f^2(x_0) > 0$ и в силу непрерывности функции $f^2(x)$ в точке $x = x_0$ существуют такие положительные числа δ и m, что при всех $x \in \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta) \cap [a; b]$ выполняется неравенство $f^2(x) \geqslant m$. Отсюда следует, что неравенство $f^2(x) \geqslant m$ выполнено на некотором отрезке $[\alpha; \beta]$ положительной длины и поэтому

$$\int\limits_a^b f^2(x)\,dx \geqslant \int\limits_\alpha^\beta f^2(x)\,dx \geqslant m \int\limits_\alpha^\beta dx = m(\beta - \alpha) > 0.$$

Это противоречит условию задачи. Поэтому наше допущение неверно, т. е. $f(x_0) = 0$.

2. Обратное утверждение сложнее и для его доказательства потребуются две леммы.

Лемма 1. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a; b]$, то для каждого положительного числа σ найдется такой отрезок $[\alpha; \beta]$, лежащий строго внутри отрезка $[a; b]$, что колебание функции f на этом отрезке

$$\omega(f, [\alpha; \beta]) < \sigma.$$

Лемма 2. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a; b]$, то она непрерывна хотя бы в одной точке $x_0 \in [a; b]$.

Докажем лемму 1. С этой целью воспользуемся критерием интегрируемости, сформулированным в задаче 7: функция $f(x)$ интегируема на $[a; b]$, если при каждом $\sigma > 0$

$$\lim_{\lambda(T) \to 0} \mu(f, \sigma; T) = 0, \tag{2.30}$$

где $\mu(f, \sigma; T)$ – суммарная длина всех тех отрезков $\Delta_i = [x_i; x_{i+1}]$ разбиения T, на которых колебание функции $\omega(f, \Delta_i) \geqslant \sigma$.

Так как функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a; b]$, то согласно этому критерию, для любого положительного числа σ справедливо равенство (2.30). Из определения предела следует, что найдется такое разбиение $T = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ отрезка $[a; b]$, для которого сумма длин тех отрезков разбиения, на которых колебание функции f не меньше σ, будет меньше, чем $(b - a)/2$. Отсюда следует, что отрезки, на которых колебание функции f не меньше σ, не исчерпывают весь отрезок $[a; b]$. Следовательно, найдется такой отрезок $[\alpha; \beta]$ разбиения T, на котором колебание функции f меньше σ. Так как при уменьшении множества колебание функции на этом множестве может только уменьшиться, то отрезок $[\alpha; \beta]$ можно считать лежащим строго внутри отрезка $[a; b]$.

Докажем лемму 2. Применяя лемму 1 к отрезку $[a; b]$ и числу $\sigma = 1$, найдем отрезок $[a_1; b_1]$, который лежит строго внутри отрезка $[a; b]$ и для которого

$$\omega(f, [a_1; b_1]) < 1.$$

На следующем шаге применим лемму 1 к отрезку $[a_1; b_1]$ и числу $\sigma = 1/2$ и найдем отрезок $[a_2; b_2]$, который лежит строго внутри отрезка $[a_1; b_1]$ и для которого

$$\omega(f, [a_2; b_2]) < \frac{1}{2}.$$

Предположим, что мы нашли отрезок $[a_n; b_n]$, который лежит строго внутри отрезка $[a_{n-1}; b_{n-1}]$ и для которого

$$\omega(f, [a_n; b_n]) < \frac{1}{n}.$$

Применяя лемму 1 к отреку $[a_n; b_n]$ и числу $\sigma = 1/(n + 1)$, найдем отрезок $[a_{n+1}; b_{n+1}]$, который лежит строго внутри отрезка $[a_n; b_n]$ и для которого

$$\omega(f, [a_{n+1}; b_{n+1}]) < \frac{1}{n+1}.$$

На основании метода индукции можно считать определенной последовательность строго вложенных отрезков $[a_n; b_n]$, для которых при всех n

$$\omega(f, [a_n; b_n]) < \frac{1}{n}.$$

По теореме о последовательности вложенных отрезков существует точка x_0, принадлежащая всем отрезкам. Покажем, что функция $f(x)$ непрерывна в этой точке. В самом деле, пусть $\varepsilon > 0$, подберем натуральное число n так, чтобы $n > 1/\varepsilon$. Так как последовательность отрезков является строго вложенной, то x_0 – внутренняя точка для всех отрезков. Следовательно, существует такое положительное число δ, что интервал $(x_0 - \delta; x_0 + \delta) \subset [a_n; b_n]$. Тогда при всех $x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ величина

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant \omega(f, [a_n; b_n]) < \frac{1}{n} < \varepsilon,$$

что доказывает непрерывность функции $f(x)$ в точке $x = x_0$.

Перейдем к доказательству утверждения задачи. Пусть функция f равна нулю во всех точках непрерывности. Рассмотрим произвольное разбиение $T = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ отрезка $[a; b]$. По лемме 2 на каждом из отрезков разбиения $\Delta_i = [x_i; x_{i+1}]$ найдется точка непрерывности функции f, т. е. точка, в которой функция f равна нулю. Так как функция $f^2(x) \geqslant 0$, то отсюда следует, что при любом i $(0 \leqslant i \leqslant n-1)$ величина

$$m_i = \inf_{\Delta_i} f^2(x) = 0.$$

Поэтому для любого разбиения нижняя сумма Дарбу функции $f^2(x)$

$$\underline{S}(T) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i = 0$$

$(\Delta x_i = x_{i+1} - x_i)$. В силу интегрируемости функции $f^2(x)$

$$\int_a^b f^2(x)\, dx = \lim_{\lambda(T) \to 0} \underline{S}(T) = 0.$$

Замечание. Утверждение задачи можно сформулировать в другом, более естественном виде: если функция $F(x)$ интегрируема и неотрицательна на сегменте $[a;b]$, то

$$\int\limits_a^b F(x)\,dx = 0$$

тогда и только тогда, когда $F(x) = 0$ во всех точках непрерывности функции $F(x)$, принадлежащих сегменту $[a;b]$.

Доказательство этого утверждения можно получить, заменив в тесте решения задачи выражения $f(x)$ и $f^2(x)$ на $F(x)$.

Впрочем, этот результат можно вывести и из утверждения задачи. Его нужно применить к функции $f(x) = \sqrt{F(x)}$ и учесть следующие обстоятельства.

1. $F(x)$ и $\sqrt{F(x)}$ интегрируемы или нет одновременно. Если интегрируема функция $\sqrt{F(x)}$, то интегрируемость $F(x)$ следует из арифметических свойств интегрируемых функций. Если интегрируема функция $F(x)$, то интегрируемость $\sqrt{F(x)}$ следует из непрерывности функции $\varphi(x) = \sqrt{x}$ и утверждения задачи 2202.

2. Множество нулей функций $F(x)$ и $\sqrt{F(x)}$ совпадают.

3. В силу непрерывности функций $\varphi(x) = \sqrt{x}$, $\psi(x) = x^2$ и теоремы о непрерывности сложной функции множества точек непрерывности функций $F(x)$ и $\sqrt{F(x)}$ совпадают.

Глава 3

Формула Ньютона – Лейбница

Основной способ вычисления определенных интегралов состоит в применении формулы Ньютона – Лейбница. Если функция f непрерывна на отрезке $[a;b]$, то у нее существует первообразная F и

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \tag{3.1}$$

Формула (3.1) и называется формулой Ньютона – Лейбница. Часто правую часть записывают следующим образом:

$$F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b.$$

Формула (3.1) принципиально решает вопрос вычисления определенного интеграла, сводя его нахождение к вычислению неопределенного интеграла, и в этой связи ее часто называют основной формулой интегрального исчисления.

На практике эту формулу часто приходится применять, когда известно, что функция $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, но формула, дающая явный первообразной $F(x)$, справедлива только в интервале $(a;b)$. Можно установить, что первообразной f на всем отрезке $[a;b]$ является продолжение F по непрерывности в точки $x = a$ и $x = b$. Таким образом, формула (3.1) заменяется на

следующую:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b-0) - F(a+0). \tag{3.2}$$

Задача 12. Пусть функция $f \in C[a;b]$ и $F'(x) = f(x)$ в интервале $(a;b)$. Доказать, что функция F имеет конечные пределы при $x \to a$ и $x \to b$ и справедлива формула (3.2).

Формула (3.2) применяется в решениях задач 2213(б), 2216(б, в), 2217, 2264, 2275, 2276. Отметим также задачу 2301, где эта формула распространяется на более общий случай.

Техника вычисления неопределенного интеграла достаточно разработана в курсах математического анализа. Многие формулы этой техники можно перенести непосредственно и на определенный интеграл. К ним, в первую очередь, относятся формулы интегрирования по частям

$$\int\limits_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b f'(x)g(x)\,dx \tag{3.3}$$

и формула замены переменной

$$\int\limits_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = \int\limits_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,dt. \tag{3.4}$$

Формула (3.3) применима для любых $f, g \in C^1[a;b]$. Для применимости формулы (3.4) достаточно, чтобы функция f была непрерывна на области значений функции φ, а функция $\varphi \in$ $\in C^1[a;b]$.

На первый взгляд, формула замены переменной (в применении к определенному интегралу) кажется ущербной, так как по первоначальному определению интеграла нужно предполагать, что $a < b$ и $\varphi(a) < \varphi(b)$, что резко сужает класс замен

по сравнению с неопределенным интегралом. Простой выход из создавшегося положения дает расширение понятия интеграла: принимается, что для любой функции f

$$\int\limits_a^a f(x)\,dx = 0,$$

а при $a > b$

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = -\int\limits_b^a f(x)\,dx.$$

При таком расширении понятия интеграла оказывается, что для справедливости формулы (3.4) достаточно, чтобы функция f была непрерывна на области значений функции φ, а $\varphi \in C^1[a;b]$ либо $\varphi \in C^1[b;a]$.

Формулу (3.4) часто называют также формулой подстановки. В некоторых учебниках понятия замены и подстановки различают. Переход от интеграла в левой части равенства (3.4) к интегралу в правой части этого равенства назывют заменой $\varphi(x) = t$, если же мы делаем переход от интеграла в правой части к интегралу, находящемуся в левой части равенства, то эту процедуру называют подстановкой $t = \varphi(x)$. Мы не будем делать такого различия.

Формула замены переменной допускает важное обобщение. Эта формула справедлива для любой интегрируемой функции f при условии, что функция g строго монотонна. Доказательство этого утверждения можно найти в классических курсах анализа.

Одну из важных теорем интегрального исчисления представляет теорема о дифференцировании интеграла по переменному верхнему пределу. Если функция f интегрируема на отрезке $[a;b]$, то интегралом с переменным верхним пределом называется

функция, заданная формулой

$$F(x) = \int\limits_{x_0}^{x} f(\xi)\, d\xi, \tag{3.5}$$

где x_0 – некоторая точка отрезка $[a; b]$. Функция F непрерывна на отрезке $[a; b]$, а в точках непрерывности подынтегральной функции f дифференцируема, причем

$$F'(x) = f(x). \tag{3.6}$$

Эта теорема имеет много применений. Прежде всего отметим, что из нее непосредственно следует, что у любой непрерывной на отрезке $[a; b]$ функции существует (на этом же отрезке) первообразная. Формула Ньютона – Лейбница тоже является непосредственным следствием этой теоремы. С практической точки зрения, мы имеем формулу дифференцирования интеграла

$$\frac{d}{dx} \int\limits_{x_0}^{x} f(\xi)\, d\xi = f(x), \tag{3.7}$$

справедливую для любой непрерывной функции f.

Из формулы (3.7), несложно получить несколько более общую формулу

$$\frac{d}{dx} \int\limits_{a(x)}^{b(x)} f(\xi)\, d\xi = f(b(x))b'(x) - f(a(x))a'(x). \tag{3.8}$$

Для справедливости этой формулы в некотором интервале $x \in \in (\alpha; \beta)$ достаточно, чтобы функция f была непрерывна на некотором "объемлющем" отрезке $[A; B]$, причем при всех $x \in (\alpha; \beta)$ отрезок $[a(x); b(x)] \subset [A; B]$, а функции $a(x)$ и $b(x)$ непрерывно дифференцируемы на $(\alpha; \beta)$.

Задача 13. Доказать формулу (3.8).

Формула (3.8) используется при решении задач 2231 – 2236 и 2256.

Важным свойством определенного интеграла является свойство аддитивности

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx. \qquad (3.9)$$

При расширенном понимании интеграла формула (3.9) оказывается верной для любого взаимного расположения точек a, b и c. Достаточно, чтобы функция f была интегрируема на какомнибудь отрезке, содержащем эти три точки. Формулу (3.9) приходится применять для вычисления интегралов, содержащих модули (задачи 2211, 2218, 2238, 2242). Она необходима и в том случае, когда подынтегральная функция задана разными формулами на разных участках отрезка интегрирования (задача 2237).

Отметим геометрическую интерпретацию определенного интеграла. Если функция f неотрицательна на отрезке $[a;b]$, то интеграл от нее равен площади фигуры, ограниченной прямыми $x = a$, $x = b$, $y = 0$ и графиком функции f. В общем случае интеграл равен разности площадей двух фигур. Одна из них ограничена частью графика функции, лежащей над осью абсцисс, а другая – частью графика, лежащей под осью абсцисс. Этот момент отмечен на рис. 3.1 – 3.13.

Применяя формулу Ньютона – Лейбница, найти определенные интегралы и нарисовать соответствующие криволинейные площади.

2206. $\int\limits_{-1}^{8} \sqrt[3]{x}\,dx.$

$$\int\limits_{-1}^{8} \sqrt[3]{x}\,dx = \frac{3}{4}\,x^{4/3}\Big|_{-1}^{8} = \frac{45}{4}.$$

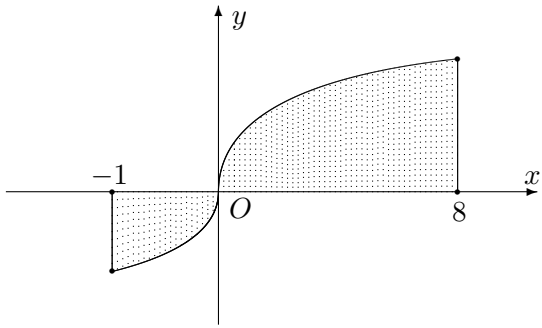

Рис. 3.1

Интеграл равен разности площадей фигур, расположенных над осью абсцисс и под осью абсцисс (рис. 3.1).

2207. $\int\limits_0^{\pi} \sin x\, dx.$

$$\int\limits_0^{\pi} \sin x\, dx = -\cos x\Big|_0^{\pi} = 2.$$

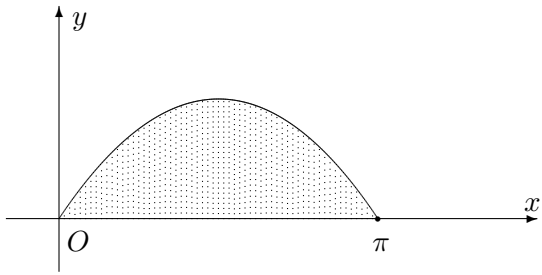

Рис. 3.2

2208. $\int\limits_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}.$

$$\int\limits_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x \Big|_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}.$$

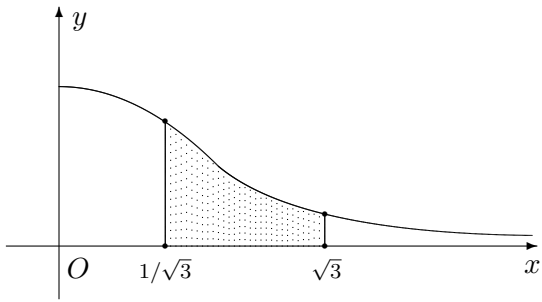

Рис. 3.3

2209. $\displaystyle\int\limits_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$

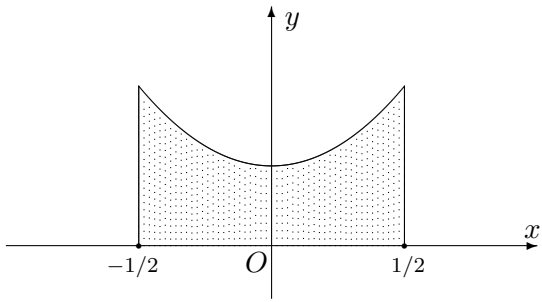

Рис. 3.4

$$\int\limits_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x \Big|_{-1/2}^{1/2} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}.$$

2210. $\displaystyle\int\limits_{\operatorname{sh} 1}^{\operatorname{sh} 2} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}.$

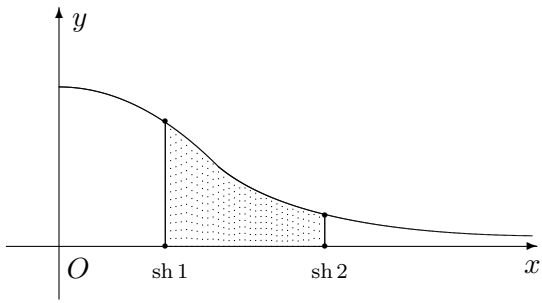

Рис. 3.5

$$\int\limits_{\operatorname{sh} 1}^{\operatorname{sh} 2} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln(x + \sqrt{1+x^2}\,)\Big|_{\operatorname{sh} 1}^{\operatorname{sh} 2}.$$

Так как функция $y = \ln(x+\sqrt{1+x^2}\,)$ является обратной к функции $x = \operatorname{sh} y$, то

$$\ln(x + \sqrt{1+x^2}\,)\Big|_{x=\operatorname{sh} 1} = 1\,, \quad \ln(x + \sqrt{1+x^2}\,)\Big|_{x=\operatorname{sh} 2} = 2,$$

и поэтому

$$\int\limits_{\operatorname{sh} 1}^{\operatorname{sh} 2} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = 2 - 1 = 1.$$

2211. $\displaystyle\int\limits_{0}^{2} |1-x|\,dx.$

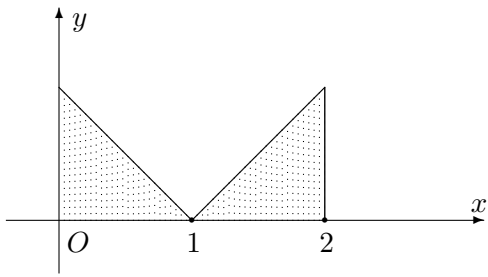

Рис. 3.6

$$\int\limits_0^2 |1-x|\,dx = \int\limits_0^1 |1-x|\,dx + \int\limits_1^2 |1-x|\,dx = \int\limits_0^1 (1-x)\,dx +$$

$$+ \int\limits_1^2 (x-1)\,dx = \left(x - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 + \left(\frac{x^2}{2} - x\right)\Bigg|_1^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

2212. $\displaystyle\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2 - 2x\cos\alpha + 1} \qquad (0 < \alpha < \pi).$

Подынтегральную функцию можно представить в виде

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x\cos\alpha + 1} = \frac{1}{(x-\cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha},$$

ее график представлен на рис. 3.7.

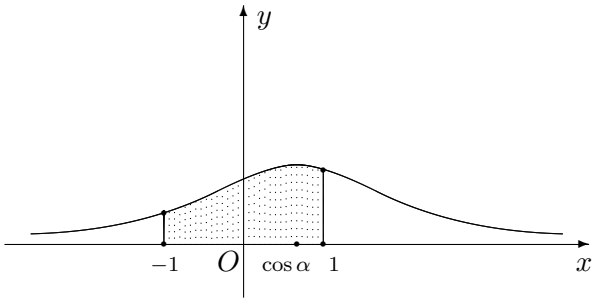

Рис. 3.7

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2 - 2x\cos\alpha + 1} = \int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{(x-\cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha} =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} \frac{d(x-\cos\alpha)}{(x-\cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha} = \frac{1}{\sin\alpha}\operatorname{arctg}\frac{x-\cos\alpha}{\sin\alpha}\Bigg|_{-1}^{1} =$$

$$= \frac{1}{\sin\alpha}\left[\operatorname{arctg}\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} + \operatorname{arctg}\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}\right] =$$

$$= \frac{1}{\sin\alpha}\left[\operatorname{arctg}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{arctg}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right] =$$

$$= \frac{1}{\sin\alpha}\left[\frac{\alpha}{2} + \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)\right] = \frac{\pi}{2\sin\alpha}.$$

2213. $\displaystyle\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{dx}{1+\varepsilon\cos x} \qquad (0 \leqslant \varepsilon < 1).$

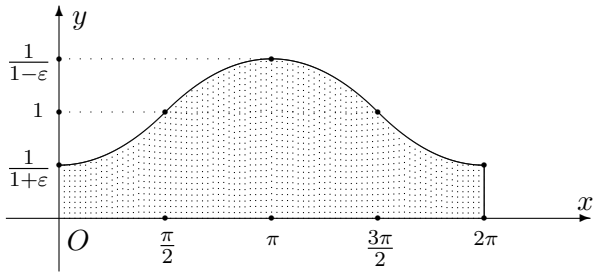

Рис. 3.8

а). При $\varepsilon = 0$

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{1+\varepsilon\cos x} = \int\limits_0^{2\pi} dx = 2\pi.$$

б). При $0 < \varepsilon < 1$ неопределенный интеграл вычислен в задаче 2028,а:

$$\int \frac{dx}{1+\varepsilon\cos x} = \frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\ \mathrm{arctg}\left(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\ \mathrm{tg}\,\frac{x}{2}\right) + C.$$

Первообразная имеет разрыв при $x = \pi$, поэтому для применения формулы Ньютона – Лейбница, определенный интеграл надо разбить на два:

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{1+\varepsilon\cos x} = \int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{1+\varepsilon\cos x} + \int\limits_{\pi}^{2\pi} \frac{dx}{1+\varepsilon\cos x} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\ \mathrm{arctg}\left(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\ \mathrm{tg}\,\frac{x}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi} +$$

$$+ \frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\ \mathrm{arctg}\left(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\ \mathrm{tg}\,\frac{x}{2}\right)\Bigg|_{\pi}^{2\pi} =$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} + \frac{\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}.$$

Нетрудно видеть, что при $\varepsilon = 0$ последняя формула дает правильный ответ и для предыдущего случая. Таким образом, при $0 \leqslant \varepsilon < 1$

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{1+\varepsilon\cos x} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}.$$

2214. $\displaystyle\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{(1-2ax+a^2)(1-2bx+b^2)}}$ $\quad (|a| < 1,\ |b| < 1,$ $ab > 0)$.

Знаменатель подынтегральной функции

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{(1-2ax+a^2)(1-2bx+b^2)}}$$

обращается в нуль в точках

$$x_1 = \frac{a^2+1}{2a}, \quad x_2 = \frac{b^2+1}{2b}.$$

Согласно известному неравенству Коши ($2|\alpha\beta| \leqslant \alpha^2 + \beta^2$) оба корня по модулую больше единицы. Отсюда следует, что на промежуток интегрирования они не попадают. По условию задачи числа a и b имеют один знак, следовательно, либо оба корня меньше, чем -1 (при $a < 0$ и $b < 0$), либо оба корня больше, чем 1 (при $a > 0$ и $b > 0$).

Полагая $A = 1/(2\sqrt{ab})$, подынтегральную функцию запишем в следующем виде:

$$f(x) = \frac{A}{\sqrt{(x-x_1)(x-x_2)}}.$$

Дифференцируя это равенство, находим:

$$f'(x) = -\frac{A\left(x - \dfrac{x_1+x_2}{2}\right)}{[(x-x_1)(x-x_2)]^{3/2}}.$$

Среднее арифметическое $(x_1+x_2)/2$ чисел x_1 и x_2 находится между этими числами. Отсюда следует, что если оба корня x_1 и x_2 меньше -1, то также и $(x_1+x_2)/2<-1$, поэтому величина $x-(x_1+x_2)/2$ положительна на отрезке $[-1;1]$. Таким образом, $f'(x)<0$ и функция $f(x)$ убывает. Аналогично, если оба корня больше 1, то также и $(x_1+x_2)/2>1$, поэтому величина $x-$ $-(x_1+x_2)/2$ отрицательна на отрезке $[-1;1]$ и, соответственно, $f'(x)>0$, следовательно, в этом случае функция $f(x)$ возрастает на $[-1;1]$.

График криволинейной трапеции для случая $a>0$, $b>0$ (оба корня больше 1) представлен на рис. 3.9. График криволинейной трапеции для случая $a<0$, $b<0$ (оба корня меньше -1) представлен на рис. 3.10.

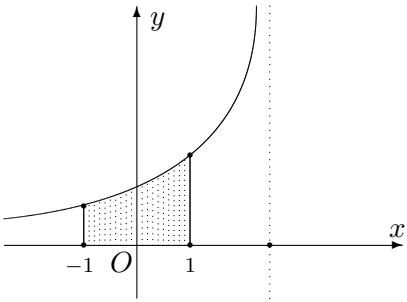

Рис. 3.9

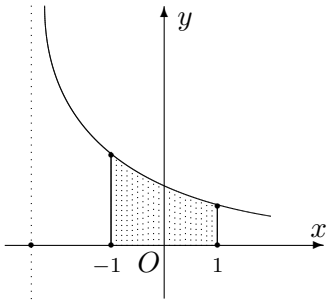

Рис. 3.10

Вычислим интеграл для случая $a<0$, $b<0$. Для этого воспользуемся подстановкой Эйлера:

$$\sqrt{(x-x_1)(x-x_2)}=t(x-x_1)\,,$$

$$t=\sqrt{\frac{x-x_2}{x-x_1}}\,,\quad x=\frac{x_1\,t^2-x_2}{t^2-1}\,,\quad dx=\frac{2(x_2-x_1)t\,dt}{(t^2-1)^2}\,,$$

$$x-x_1=\frac{x_1-x_2}{t^2-1}\,,\quad \sqrt{(x-x_1)(x-x_2)}=t(x-x_1)=t\,\frac{x_1-x_2}{t^2-1}\,.$$

Вычислим новые пределы интегрирования:

$$x=-1 \Rightarrow t=\sqrt{\frac{-1-x_2}{-1-x_1}}=\sqrt{\frac{a(1+2b+b^2)}{b(1+2a+a^2)}}=\frac{1+b}{1+a}\sqrt{\frac{a}{b}}\,,$$

$$x=1 \Rightarrow t=\sqrt{\frac{1-x_2}{1-x_1}}=\sqrt{\frac{a(1-2b+b^2)}{b(1-2a+a^2)}}=\frac{1-b}{1-a}\sqrt{\frac{a}{b}}\,.$$

Здесь учтено, что по условию задачи $|a|<1$, $|b|<1$. После замены получаем:

$$I=2A\int\limits_{\frac{1+b}{1+a}\sqrt{\frac{a}{b}}}^{\frac{1-b}{1-a}\sqrt{\frac{a}{b}}}\frac{dt}{1-t^2}=\left(A\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|\right)\Bigg|_{\frac{1+b}{1+a}\sqrt{\frac{a}{b}}}^{\frac{1-b}{1-a}\sqrt{\frac{a}{b}}}=$$

$$=A\ln\left|\frac{\left(1+\frac{1-b}{1-a}\sqrt{\frac{a}{b}}\right)\left(1-\frac{1+b}{1+a}\sqrt{\frac{a}{b}}\right)}{\left(1-\frac{1-b}{1-a}\sqrt{\frac{a}{b}}\right)\left(1+\frac{1+b}{1+a}\sqrt{\frac{a}{b}}\right)}\right|=$$

$$=A\ln\left|\frac{1+\frac{2(a-b)}{1-a^2}\sqrt{\frac{a}{b}}-\frac{1-b^2}{1-a^2}\cdot\frac{a}{b}}{1-\frac{2(a-b)}{1-a^2}\sqrt{\frac{a}{b}}-\frac{1-b^2}{1-a^2}\cdot\frac{a}{b}}\right|=$$

$$=A\ln\left|\frac{(1-a^2)b-2\sqrt{ab}(a-b)-(1-b^2)a}{(1-a^2)b+2\sqrt{ab}(a-b)-(1-b^2)a}\right|=$$

$$=A\ln\left|\frac{(1+ab)(b-a)-2\sqrt{ab}(a-b)}{(1+ab)(b-a)+2\sqrt{ab}(a-b)}\right|=$$

$$=A\ln\left|\frac{1+ab+2\sqrt{ab}}{1+ab-2\sqrt{ab}}\right|==A\ln\left(\frac{1+\sqrt{ab}}{1-\sqrt{ab}}\right)^2=$$

$$= 2A \ln \frac{1+\sqrt{ab}}{1-\sqrt{ab}} = \frac{1}{\sqrt{ab}} \ln \frac{1+\sqrt{ab}}{1-\sqrt{ab}}.$$

Здесь учтено, что вследствие отрицательности b

$$\sqrt{\frac{a}{b}} \cdot b = -\sqrt{ab}.$$

Рассмотрим случай $a > 0$, $b > 0$. Пусть $a_1 = -a$, $b_1 = -b$. Сделаем в исходном интеграле замену x на $-x$, получим:

$$I = \int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{(1-2ax+a^2)(1-2bx+b^2)}} =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{(1-2a_1x+a^2)(1-2b_1x+b^2)}}.$$

Так как $a_1 < 0$ и $b_1 < 0$, то

$$I = \frac{1}{\sqrt{a_1b_1}} \ln \frac{1+\sqrt{a_1b_1}}{1-\sqrt{a_1b_1}} = \frac{1}{\sqrt{ab}} \ln \frac{1+\sqrt{ab}}{1-\sqrt{ab}},$$

т. е. полученный выше результат сохраняет свою силу и в этом случае. Таким образом, при $|a| < 1$, $|b| < 1$, $ab > 0$

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{(1-2ax+a^2)(1-2bx+b^2)}} = \frac{1}{\sqrt{ab}} \ln \frac{1+\sqrt{ab}}{1-\sqrt{ab}}.$$

2215. $\displaystyle\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{dx}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x} \qquad (ab \neq 0).$

Вид графика подынтегральной функции (и соответствующей криволинейной трапеции) зависит от соотношений параметров a и b. Все возможные случаи представлены на рис. 3.11, рис. 3.12 и рис. 3.13.

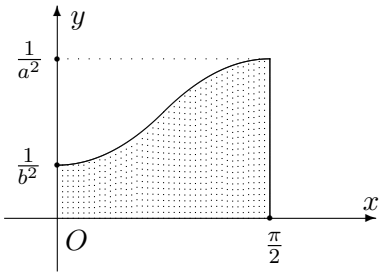

Рис. 3.11. Случай $|a| < |b|$

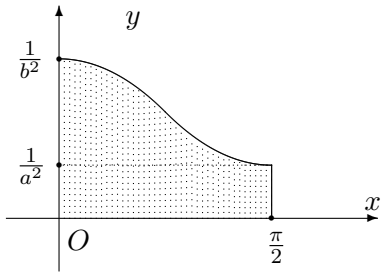

Рис. 3.12. Случай $|a| > |b|$

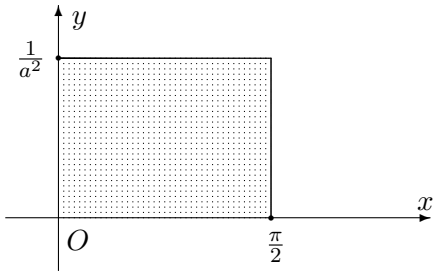

Рис. 3.13. Случай $|a| = |b|$

Неопределенный интеграл вычислен в задаче 2030:

$$\int \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} = \frac{1}{ab} \operatorname{arctg}\left(\frac{a \operatorname{tg} x}{b}\right) + C.$$

По формуле Ньютона – Лейбница

$$\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} = \frac{1}{ab} \operatorname{arctg}\left(\frac{a \operatorname{tg} x}{b}\right)\Bigg|_0^{\pi/2} =$$

$$= \frac{1}{ab} \cdot \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{\pi}{2|ab|}.$$

2216. Объяснить, почему формальное применение формулы Ньютона – Лейбница приводит к неверным результатам, если:

$$\text{а)} \int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x}\,; \quad \text{б)} \int\limits_{0}^{2\pi} \frac{\sec^2 x\,dx}{2+\operatorname{tg}^2 x}\,; \quad \text{в)} \int\limits_{-1}^{1} \frac{d}{dx}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right) dx\,;$$

а). Подынтегральная функция $f(x) = 1/x$ имеет разрывную первообразную $F(x) = \ln|x|$. Формула Ньютона – Лейбница

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x} = \ln|x|\Big|_{-1}^{1} = 0$$

дает неверный результат, подынтегральная функция не является ограниченной и интеграл не существует;

б). Подынтегральная функция

$$f(x) = \frac{\sec^2 x}{2+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x(2+\operatorname{tg}^2 x)} = \frac{1}{2\cos^2 x + \sin^2 x}$$

имеет разрывную первообразную

$$F(x) = \int \frac{dx}{\cos^2 x(2+\operatorname{tg}^2 x)} = \int \frac{d(\operatorname{tg} x)}{2+\operatorname{tg}^2 x} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right) + C.$$

График этой функции представлен на рис. 3.14.

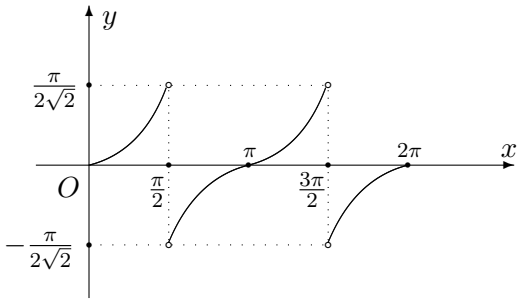

Рис. 3.14

Применение формулы Ньютона – Лейбница в виде

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{\sec^2 x\,dx}{2+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = 0$$

дает ошибочный результат вследствие разрывов первообразной. Тем не менее в данном примере подынтегральная функция всюду за исключением точек $x = \pi/2$ и $x = 3\pi/2$ совпадает с непрерывной функцией

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{2\cos^2 x + \sin^2 x}.$$

Следовательно, функция $f(x)$ интегрируема и

$$\int\limits_0^{2\pi} f(x)\,dx = \int\limits_0^{2\pi} \tilde{f}(x)\,dx.$$

Для корректного вычисления интеграла проще всего разбить его на три

$$\int\limits_0^{2\pi} f(x)\,dx = \int\limits_0^{\pi/2} f(x)\,dx + \int\limits_{\pi/2}^{3\pi/2} f(x)\,dx + \int\limits_{3\pi/2}^{2\pi} f(x)\,dx.$$

На каждом из трех промежутков $[0;\pi/2]$, $[\pi/2;3\pi/3]$ и $[3\pi/2;2\pi]$ формула Ньютона – Лейбница применима. Таким образом,

$$\int\limits_0^{2\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}x}{\sqrt{2}}\right)\Bigg|_0^{\pi/2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}x}{\sqrt{2}}\right)\Bigg|_{\pi/2}^{3\pi/2} +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}x}{\sqrt{2}}\right)\Bigg|_{3\pi/2}^{2\pi} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} + \frac{\pi}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \pi\sqrt{2};$$

в). Подынтегральная функция

$$f(x) = \frac{d}{dx}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right)$$

имеет разрывную первообразную

$$F(x) = \operatorname{arctg}\frac{1}{x}.$$

График этой функции представлен на рис. 3.15.

Прямое применение формулы Ньютона – Лейбница

$$\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,dx = \left(\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right)\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

дает ошибочный результат вследствие разрыва первообразной. Для корректного вычисления интеграла проще всего разбить его на два

$$\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int\limits_{-1}^{0} f(x)\,dx + \int\limits_{0}^{1} f(x)\,dx.$$

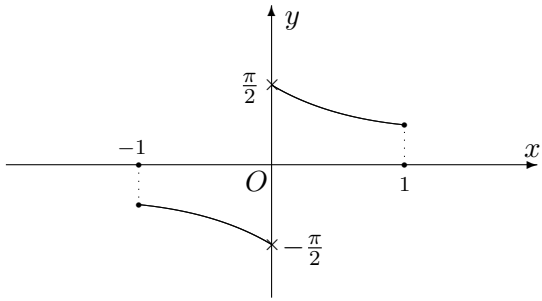

Рис. 3.15

На каждом из отрезков $[-1;0]$ и $[0;1]$ формула Ньютона – Лейбница применима. Следовательно,

$$\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,dx = \left(\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right)\Bigg|_{-1}^{0} + \left(\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right)\Bigg|_{0}^{1} =$$

$$= \left(-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right) + \left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}.$$

2217. Найти

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+2^{1/x}}\right) dx.$$

Подынтегральная функция

$$f(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+2^{1/x}}\right)$$

имеет разрывную первообразную

$$F(x) = \frac{1}{1+2^{1/x}}.$$

График этой функции представлен на рис. 3.16.

Прямое применение формулы Ньютона – Лейбница

$$\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,dx = \left(\frac{1}{1+2^{1/x}}\right)\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}$$

дает ошибочный результат вследствие разрыва первообразной.

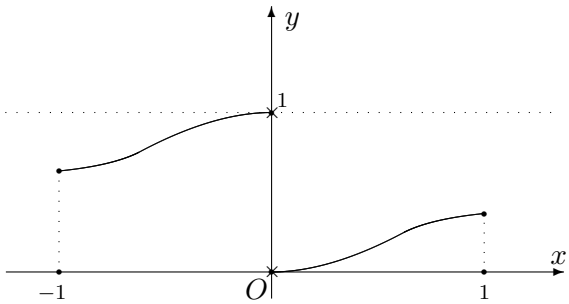

Рис. 3.16

Для корректного вычисления интеграла лучше разбить его на два

$$\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int\limits_{-1}^{0} f(x)\,dx + \int\limits_{0}^{1} f(x)\,dx.$$

На каждом из отрезков $[-1;0]$ и $[0;1]$ формула Ньютона – Лейбница применима. Следовательно,

$$\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,dx = \left(\frac{1}{1+2^{1/x}}\right)\Bigg|_{-1}^{0} + \left(\frac{1}{1+2^{1/x}}\right)\Bigg|_{0}^{1} =$$

$$= \left(1 - \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - 0\right) = \frac{2}{3}.$$

2218. Найти

$$\int\limits_0^{100\pi} \sqrt{1-\cos 2x}\; dx.$$

$$\int\limits_0^{100\pi} \sqrt{1-\cos 2x}\; dx = \int\limits_0^{100\pi} \sqrt{2\sin^2 x}\; dx = \sqrt{2}\int\limits_0^{100\pi} |\sin x|\, dx =$$

$$= \sqrt{2}\sum_{k=0}^{49}\left[\int\limits_{2\pi k}^{\pi+2\pi k} |\sin x|\, dx + \int\limits_{\pi+2\pi k}^{2\pi(k+1)} |\sin x|\, dx\right] =$$

$$= \sqrt{2}\sum_{k=0}^{49}\left[\int\limits_{2\pi k}^{\pi+2\pi k} \sin x\, dx - \int\limits_{\pi+2\pi k}^{2\pi(k+1)} \sin x\, dx\right] =$$

$$=\sqrt{2}\sum_{k=0}^{49}\left[-\cos x\Big|_{2\pi k}^{\pi+2\pi k} + \cos x\Big|_{\pi+2\pi k}^{2\pi(k+1)}\right] = \sqrt{2}\sum_{k=0}^{49} 4 = 200\sqrt{2}.$$

С помощью определенных интегралов найти:

2219.

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n-1}{n^2}\right).$$

Рассмотрим на отрезке $[0;1]$ функцию $f(x) = x$. Если выбрать разбиение отрезка на n равных частей

$$x_i = \frac{i}{n}, \quad 0 \leqslant i \leqslant n-1$$

и точки разметки

$$\xi_i = \frac{i}{n}, \quad 0 \leqslant i \leqslant n-1,$$

то интегральная сумма

$$s_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1}\frac{i}{n}\cdot\frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n-1}{n^2}.$$

Таким образом,

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\dots+\frac{n-1}{n^2}\right)=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}s_n=\int\limits_0^1 x\,dx=\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1=\frac{1}{2}.$$

2220.

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{n+n}\right).$$

Рассмотрим на отрезке $[0;1]$ функцию $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$. Если выбрать разбиение отрезка на n равных частей

$$x_i=\frac{i}{n}\,,\quad 0\leqslant i\leqslant n-1$$

и точки разметки

$$\xi_i=\frac{i+1}{n}\,,\quad 0\leqslant i\leqslant n-1\,,$$

то интегральная сумма

$$s_n=\sum_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)\Delta x_i=\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{1}{1+\frac{i+1}{n}}\right)\frac{1}{n}=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{n+i+1}=$$

$$=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{n+n}.$$

Таким образом,

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{n+n}\right)=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}s_n=\int\limits_0^1\frac{dx}{1+x}=\left.\ln(1+x)\right|_0^1=\ln 2\,.$$

2221.

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\dots+\frac{n}{n^2+n^2}\right).$$

Рассмотрим на отрезке $[0;1]$ функцию $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$. Если выбрать разбиение отрезка на n равных частей

$$x_i=\frac{i}{n}\,,\quad 0\leqslant i\leqslant n-1$$

и точки разметки

$$\xi_i=\frac{i+1}{n}\,,\quad 0\leqslant i\leqslant n-1\,,$$

то интегральная сумма

$$s_n=\sum_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)\Delta x_i=\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{1}{1+\left(\frac{i+1}{n}\right)^2}\right)\frac{1}{n}=$$

$$=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{n}{n^2+(i+1)^2}=\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\dots+\frac{n}{n^2+n^2}.$$

Таким образом,

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\dots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}s_n=\int\limits_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\ \operatorname{arctg}x\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}\,.$$

2222.

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\dots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right).$$

Рассмотрим на отрезке $[0;\pi]$ функцию $f(x)=\sin x$. Если выбрать разбиение отрезка на n равных частей

$$x_i=\frac{i\pi}{n}\,,\quad 0\leqslant i\leqslant n-1$$

и точки разметки

$$\xi_i=\frac{i\pi}{n}\,,\quad 0\leqslant i\leqslant n-1\,,$$

то интегральная сумма

$$s_n=\sum_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)\Delta x_i=\sum_{i=0}^{n-1}\left(\sin\frac{i\pi}{n}\right)\frac{\pi}{n}=$$

$$=\frac{\pi}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\dots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right).$$

Таким образом,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\dots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\lim_{n\to+\infty}s_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\sin x\,dx=-\frac{1}{\pi}\cos x\Big|_0^{\pi}=\frac{2}{\pi}\,.$$

2223.

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1^p+2^p+\dots+n^p}{n^{p+1}}\quad(p>0).$$

Рассмотрим на отрезке $[0;1]$ функцию $f(x)=x^p$. Если выбрать разбиение отрезка на n равных частей

$$x_i=\frac{i}{n}\,,\quad 0\leqslant i\leqslant n-1$$

и точки разметки

$$\xi_i=\frac{i+1}{n}\,,\quad 0\leqslant i\leqslant n-1\,,$$

то интегральная сумма

$$s_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{i+1}{n}\right)^p \cdot \frac{1}{n} = \frac{1^p + 2^p + \dots + n^p}{n^{p+1}}.$$

Таким образом,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1^p + 2^p + \dots + n^p}{n^{p+1}} = \lim_{n\to+\infty} s_n =$$

$$= \int\limits_0^1 x^p\,dx = \left.\frac{x^{p+1}}{p+1}\right|_0^1 = \frac{1}{p+1}\,.$$

2224.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{1+\frac{2}{n}} + \dots + \sqrt{1+\frac{n}{n}}\right).$$

Рассмотрим на отрезке $[0;1]$ функцию $f(x) = \sqrt{1+x}$. Если выбрать разбиение отрезка на n равных частей

$$x_i = \frac{i}{n}\,, \quad 0 \leqslant i \leqslant n-1$$

и точки разметки

$$\xi_i = \frac{i+1}{n}\,, \quad 0 \leqslant i \leqslant n-1\,,$$

то интегральная сумма

$$s_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{1+\frac{i+1}{n}} \cdot \frac{1}{n} =$$

$$= \frac{1}{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{1+\frac{2}{n}} + \dots + \sqrt{1+\frac{n}{n}}\right).$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\dots+\sqrt{1+\frac{n}{n}}\right)=\lim_{n\to+\infty}s_n=$$

$$=\int\limits_0^1\sqrt{1+x}\,dx=\frac{2}{3}(1+x)^{3/2}\Big|_0^1=\frac{2}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right).$$

Найти:

2225. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

В силу свойства непрерывности показательной и логарифмической функций

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=e^A,$$

где

$$A=\lim_{n\to+\infty}\ln\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}.$$

Так как

$$\ln\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\ln\left(\frac{n!}{n^n}\right)^{1/n}=\frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}\cdots\frac{n}{n}\right)=$$

$$=\frac{1}{n}\left(\ln\frac{1}{n}+\ln\frac{2}{n}+\dots+\ln\frac{n}{n}\right),$$

то

$$A=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\left(\ln\frac{1}{n}+\ln\frac{2}{n}+\dots+\ln\frac{n}{n}\right).$$

Для вычисления последнего предела рассмотрим на промежутке $(0;1]$ функцию $f(x)=\ln x$. Эта функция интегрируема

в несобственном смысле. Несобственный интеграл нетрудно вычислить с помощью интегрирования по частям

$$\int\limits_0^1 \ln x\,dx = \left. x\ln x\right|_0^1 - \int\limits_0^1 dx = -1.$$

Так как функция $f(x)$ монотонна, то согласно решению задачи 2388

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int\limits_0^1 f(x)\,dx = -1,$$

но

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n}\left(\ln\frac{1}{n} + \ln\frac{2}{n} + \cdots + \ln\frac{n}{n}\right).$$

Следовательно, $A = -1$, т. е.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}.$$

Замечание. Решение этой задачи использует ссылку на решение задачи 2388. Хотя эта задача решается позже, такая ссылка законна, так как задача 2388 рассматривается независимо. Конечно, текст решения задачи 2388 (для полноты) можно было привести и здесь, однако повторение одного и того же материала дважды не имеет большого смысла, так как желающие могут прочитать соответствующий текст, обратившись к главе 4 настоящего пособия.

2226. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left[\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right)\right]$.

Величина

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right)\frac{b-a}{n}$$

представляет собой интегральную сумму функции f на отрезке $[a;b]$ для разбиения на n равных частей

$$x_k = a + k\,\frac{b-a}{n}\,, \quad 0 \leqslant k \leqslant n$$

и точками разметки

$$\xi_k = x_{k+1}.$$

Предел последовательности $\{s_n\}$ для интегрируемой функции должен совпадать с определенным интегралом от функции f по отрезку $[a;b]$. Отсюда следует, что

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right)\right] =$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{s_n}{b-a} = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Замечание. В формулировке задачи пропущено условие интегрируемости функции f на отрезке $[a;b]$. Без этого условия рассматриваемый предел, вообще говоря, не существует.

Отбрасывая равномерно бесконечно малые высших порядков, найти пределы следующих сумм:

2227.

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\sin\frac{\pi}{n^2} + \left(1+\frac{2}{n}\right)\sin\frac{2\pi}{n^2} + \cdots\right.$$

$$\left.\cdots + \left(1+\frac{n-1}{n}\right)\sin\frac{(n-1)\pi}{n^2}\right].$$

Наряду с последовательностью

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)\sin\frac{\pi}{n^2} + \left(1+\frac{2}{n}\right)\sin\frac{2\pi}{n^2} + \cdots$$

$$\cdots + \left(1+\frac{n-1}{n}\right)\sin\frac{(n-1)\pi}{n^2}$$

рассмотрим также последовательность

$$s_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)\frac{\pi}{n^2} + \left(1 + \frac{2}{n}\right)\frac{2\pi}{n^2} + \dots + \left(1 + \frac{n-1}{n}\right)\frac{(n-1)\pi}{n^2}.$$

Оценим разность $a_n - s_n$. Для этого воспользуемся формулой Тэйлора для функции $y = \sin x$ с дополнительным членом в форме Лагранжа

$$\sin x = x - \frac{\cos\xi}{6}\,x^3,$$

из которой следует, что при всех вещественных x

$$|\sin x - x| \leqslant \frac{|x|^3}{6}. \tag{3.10}$$

С помощью неравенства (3.10) получаем, что

$$|a_n - s_n| = \left|\sum_{k=1}^{n-1}\left(1 + \frac{k}{n}\right)\left(\sin\frac{k\pi}{n^2} - \frac{k\pi}{n^2}\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n-1}\left(1 + \frac{k}{n}\right)\left(\frac{k\pi}{n^2}\right)^3 = \frac{\pi^3}{6n^6}\sum_{k=1}^{n-1}\left(1 + \frac{k}{n}\right)k^3.$$

Так как величина $k \leqslant n - 1$, то

$$1 + \frac{k}{n} \leqslant 2.$$

С другой стороны, согласно формуле (2.6)

$$1^3 + 2^3 + \dots + (n-1)^3 = \frac{(n-1)^2 n^2}{4}.$$

Таким образом,

$$|a_n - s_n| \leqslant \frac{\pi^3}{3n^6}\sum_{k=1}^{n-1}k^3 = \frac{\pi^3(n-1)^2}{12n^4}.$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{n\to+\infty}(a_n - s_n) = 0$$

и вместо вычисления предела последовательности a_n мы можем вычислить предел последовательности s_n.

Рассмотрим на отрезке $[0;1]$ функцию $f(x) = \pi x(1+x)$. Величина s_n представляет интегральную сумму этой функции для разбиения отрезка $[0;1]$ на n равных частей

$$x_i = \frac{i}{n}, \quad 0 \leqslant i \leqslant n$$

с точками разметки

$$\xi_i = x_i, \quad 0 \leqslant i \leqslant n-1.$$

Поэтому

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \int\limits_0^1 \pi x(1+x)\,dx = \pi\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{5\pi}{6}.$$

Таким образом, искомый предел

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{5\pi}{6}.$$

2228. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sin\frac{\pi}{n}\right)\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{2+\cos\frac{k\pi}{n}}$.

Так как при $n \to +\infty$ последовательность

$$\sin\frac{\pi}{n} \sim \frac{\pi}{n},$$

то предел рассматриваемой последовательности

$$a_n = \left(\sin\frac{\pi}{n}\right)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2+\cos\frac{k\pi}{n}}$$

совпадает с пределом последовательности

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2+\cos\frac{k\pi}{n}} \cdot \frac{\pi}{n}$$

Последовательность s_n является интегральной суммой функции

$$f(x) = \frac{1}{2+\cos x}$$

на отрезке $[0;\pi]$, отвечающей разбиению на n равных частей

$$x_i = \frac{k\pi}{n}, \quad 0 \leqslant k \leqslant n$$

с точками разметки $\xi_i = x_{k+1}$ $(0 \leqslant k \leqslant n-1)$

$$s_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{2+\cos x} = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{1+\frac{1}{2}\cos x}.$$

Первообразная подынтегральной функции вычислена в задаче 2028 (в этой задаче нужно выбрать $\varepsilon = 1/2$):

$$\int \frac{dx}{1+\frac{1}{2}\cos x} = \frac{4}{\sqrt{3}}\ \mathrm{arctg}\left(\frac{\mathrm{tg}(x/2)}{\sqrt{3}}\right) + C.$$

Применяя формулу Ньютона – Лейбница, находим

$$\int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{1+\frac{1}{2}\cos x} = \frac{4}{\sqrt{3}}\ \mathrm{arctg}\left(\frac{\mathrm{tg}(x/2)}{\sqrt{3}}\right)\Bigg|_0^{\pi} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

Таким образом,

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} s_n = \frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

2229. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{(nx+k)(nx+k+1)}}{n^2} \qquad (x>0).$

Предварительно выведем неравенство, которое потребуется в дальнейшем. Применим к функции $f(x) = \sqrt{1+x}$ формулу Тэйлора в форме Лагранжа. Получим

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2\sqrt{1+\xi}}\,x,$$

где величина ξ находится между нулем и x. В частности, $\xi \geqslant 0$, если $x \geqslant 0$. Отсюда следует, что

$$\sqrt{1+x} - 1 \leqslant \frac{x}{2} \quad (x \geqslant 0). \tag{3.11}$$

Рассмотрим последовательности

$$a_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \sqrt{(nx+k)(nx+k+1)}\,, \quad s_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(x+\frac{k}{n}\right).$$

Оценим разность $a_n - s_n$:

$$|a_n - s_n| = \frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\left(x+\frac{k}{n}\right)\left(x+\frac{k+1}{n}\right)} - \sum_{k=1}^{n}\left(x+\frac{k}{n}\right)\right| =$$

$$= \frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n}\left(x+\frac{k}{n}\right)\sqrt{1+\frac{1/n}{x+k/n}} - \sum_{k=1}^{n}\left(x+\frac{k}{n}\right)\right| =$$

$$= \frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n}\left(x+\frac{k}{n}\right)\left(\sqrt{1+\frac{1/n}{x+k/n}} - 1\right)\right|.$$

Согласно неравенству (3.11)

$$\sqrt{1+\frac{1/n}{x+k/n}}-1\leqslant\frac{1/n}{2\,(x+k/n)},$$

поэтому

$$|a_n-s_n|\leqslant\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(x+\frac{k}{n}\right)\frac{1/n}{2\,(x+k/n)}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2n}=\frac{1}{2n}.$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{n\to+\infty}(a_n-s_n)=0,$$

и вычисление предела последовательности a_n можно заменить вычислением предела последовательности s_n.

Величина s_n представляет интегральную сумму функции

$$f(t)=x+t$$

на отрезке $t\in[0;1]$, отвечающую разбиению этого отрезка на n равных частей

$$t_k=\frac{k}{n}\,,\quad 0\leqslant k\leqslant n$$

и точкам разметки

$$\xi_k=\frac{k+1}{n}\,,\quad 0\leqslant k\leqslant n-1\,.$$

Таким образом,

$$s_n=\sum_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)\Delta t_i$$

и, следовательно,

$$\lim_{n\to+\infty}a_n=\lim_{n\to+\infty}s_n=\int\limits_0^1(x+t)\,dt=\left.\frac{(x+t)^2}{2}\right|_0^1=x+\frac{1}{2}.$$

2230. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{2^{1/n}}{n+1}+\dfrac{2^{2/n}}{n+\frac{1}{2}}+\dots+\dfrac{2^{n/n}}{n+\frac{1}{n}}\right).$

Рассмотрим последовательности

$$a_n=\frac{2^{1/n}}{n+1}+\frac{2^{2/n}}{n+\frac{1}{2}}+\dots+\frac{2^{n/n}}{n+\frac{1}{n}}\,,$$

$$s_n=\frac{1}{n}\left(2^{1/n}+2^{2/n}+\dots+2^{n/n}\right).$$

Оценим их разность

$$|a_n-s_n|=\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{2^{k/n}}{n+\frac{1}{k}}-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}2^{k/n}\right|=$$

$$=\frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n}2^{k/n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{kn}}-1\right)\right|=$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}2^{k/n}\frac{\frac{1}{kn}}{1+\frac{1}{kn}}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{2^{k/n}}{1+kn}.$$

Так как $2^{k/n}\leqslant 2$, а $\dfrac{1}{1+kn}\leqslant\dfrac{1}{1+n}$,
то

$$|a_n-s_n|\leqslant\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+n}=\frac{2}{1+n}$$

и, следовательно, $a_n-s_n\to 0$ при $n\to+\infty$, поэтому вместо вычисления предела последовательности a_n можно вычислить предел последовательности s_n.

Величина s_n является интегральной суммой для функции $f(x)=2^x$ на отрезке $[0;1]$, отвечающей разбиению этого отрезка на n равных частей

$$x_k=\frac{k}{n}\,,\quad 0\leqslant k\leqslant n$$

с точками разметки $\xi_k = x_{k+1}$ $(0 \leqslant k \leqslant n-1)$. Отсюда следует, что последовательность s_n сходится к интегралу

$$\int\limits_0^1 2^x\,dx = \left.\frac{2^x}{\ln 2}\right|_0^1 = \frac{1}{\ln 2}.$$

Таким образом,

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} s_n = \frac{1}{\ln 2}.$$

Для решения задач 2231 – 2236 нужно использовать формулу (3.8):

$$\frac{d}{dx}\int\limits_{a(x)}^{b(x)} f(\xi)\,d\xi = f(b(x))b'(x) - f(a(x))a'(x).$$

2231. Найти:

$$\frac{d}{dx}\int\limits_a^b \sin x^2\,dx\,, \quad \frac{d}{da}\int\limits_a^b \sin x^2\,dx\,, \quad \frac{d}{db}\int\limits_a^b \sin x^2\,dx\,.$$

По формуле (3.8)

$$\frac{d}{dx}\int\limits_a^b \sin x^2\,dx = 0\,,$$

$$\frac{d}{da}\int\limits_a^b \sin x^2\,dx = -\sin^2 a\,,$$

$$\frac{d}{db}\int\limits_a^b \sin x^2\,dx = \sin^2 b\,.$$

2232. Найти:

$$\text{а)}\ \frac{d}{dx}\int\limits_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}\,dt\,;\quad \text{б)}\ \frac{d}{dx}\int\limits_{x^2}^{x^3}\frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}\,;\quad \text{в)}\ \frac{d}{dx}\int\limits_{\sin x}^{\cos x}\cos(\pi t^2)\,dt\,;$$

а). По формуле (3.8)

$$\frac{d}{dx}\int\limits_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}\,dt = 2x\sqrt{1+x^4}\,.$$

б). По формуле (3.8)

$$\frac{d}{dx}\int\limits_{x^2}^{x^3}\frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} = \frac{3x^2}{\sqrt{1+x^{12}}} - \frac{2x}{\sqrt{1+x^8}}\,.$$

в). По формуле (3.8)

$$\frac{d}{dx}\int\limits_{\sin x}^{\cos x}\cos(\pi t^2)\,dt = -\cos(\pi\cos^2 x)\sin x - \cos(\pi\sin^2 x)\cos x =$$

$$= -\cos(\pi - \pi\sin^2 x))\sin x - \cos(\pi\sin^2 x)\cos x =$$

$$= \cos(\pi\sin^2 x))\sin x - \cos(\pi\sin^2 x)\cos x =$$

$$= (\sin x - \cos x)\cos(\pi\sin^2 x)).$$

2233. Найти:

$$\text{а)}\ \lim_{x\to 0}\frac{\int\limits_0^x \cos x^2\,dx}{x}\,;\quad \text{б)}\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\int\limits_0^x (\operatorname{arctg} x)^2\,dx}{\sqrt{x^2+1}}\,;$$

$$\text{в)}\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\int\limits_0^x \mathrm{e}^{x^2}\,dx\right)^2}{\int\limits_0^x \mathrm{e}^{2x^2}\,dx}\,;$$

а). Применяя правило Лопиталя и используя формулу дифференцирования интеграла с переменным верхним пределом, находим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int\limits_0^x \cos x^2\,dx}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x^2}{1}=1\,.$$

б). Применяя правило Лопиталя и используя формулу дифференцирования интеграла с переменным верхним пределом, находим

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int\limits_0^x (\operatorname{arctg} x)^2\,dx}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\operatorname{arctg} x)^2}{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}=\frac{\pi^2}{4}\,.$$

в). Применяя дважды правило Лопиталя и формулу дифференцирования интеграла с переменным верхним пределом, находим

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\int\limits_0^x \mathrm{e}^{x^2}dx\right)^2}{\int\limits_0^x \mathrm{e}^{2x^2}dx}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\left(\int\limits_0^x \mathrm{e}^{x^2}dx\right)e^{x^2}}{\mathrm{e}^{2x^2}}=$$

$$=2\lim_{x\to+\infty}\frac{\int\limits_0^x \mathrm{e}^{x^2}dx}{\mathrm{e}^{x^2}}=2\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{x^2}}{2x\mathrm{e}^{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0\,.$$

2233.1. Пусть $f(x)\in C[0;+\infty)$ и $f(x)\to A$ при $x\to+\infty$. Найти

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^1 f(nx)\,dx.$$

Делая замену переменной $t=nx$, находим

$$\int\limits_0^1 f(nx)\,dx=\frac{1}{n}\int\limits_0^n f(t)\,dt.$$

Применяя правило Лопиталя и используя формулу дифференцирования интеграла с переменным верхним пределом, получаем

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int\limits_0^x f(t)\,dt=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int\limits_0^x f(t)\,dt}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{1}=A.$$

Следовательно, также и

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int\limits_0^n f(t)\,dt=A.$$

Таким образом, искомый предел равен A.

2234. Доказать, что $\int\limits_0^x \mathrm{e}^{x^2}dx\sim\frac{1}{2x}\,\mathrm{e}^{x^2}$ при $x\to\infty$.

Применяя правило Лопиталя и используя формулу дифференцирования интеграла с переменным верхним пределом, находим:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\int\limits_0^x \mathrm{e}^{x^2}dx}{\frac{1}{2x}\,\mathrm{e}^{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\mathrm{e}^{x^2}}{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{x^2}\,\mathrm{e}^{x^2}+2\mathrm{e}^{x^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{2x^2-1}=1,$$

что доказывает утверждение задачи.

2235. Найти

$$\lim_{x\to+0}\frac{\int\limits_0^{\sin x}\sqrt{\operatorname{tg}x}\;dx}{\int\limits_0^{\operatorname{tg}x}\sqrt{\sin x}\;dx}.$$

Применяя правило Лопиталя и используя формулу диффе-

ренцирования (3.8), находим:

$$\lim_{x\to+0}\frac{\int\limits_0^{\sin x}\sqrt{\operatorname{tg}x}\,dx}{\int\limits_0^{\operatorname{tg}x}\sqrt{\sin x}\,dx}=\lim_{x\to+0}\frac{\sqrt{\operatorname{tg}(\sin x)}\,\cos x}{\sqrt{\sin(\operatorname{tg}x)}\,\dfrac{1}{\cos^2 x}}=1\,.$$

2236. Пусть $f(x)$ – непрерывная положительная функция. Доказать, что функция

$$\varphi(x)=\frac{\int\limits_0^x tf(t)\,dt}{\int\limits_0^x f(t)\,dt}$$

возрастает при $x\geqslant 0$.

Для доказательства покажем, что при $x\geqslant 0$ производная $\varphi'(x)\geqslant 0$. Согласно правилу дифференцирования интеграла с переменным верхним пределом

$$\varphi'(x)=\frac{xf(x)\int\limits_0^x f(t)\,dt-\left(\int\limits_0^x tf(t)\,dt\right)f(x)}{\left(\int\limits_0^x f(t)\,dt\right)^2}.$$

Так как $f(x)>0$, то достаточно установить неравенство

$$x\int\limits_0^x f(t)\,dt-\int\limits_0^x tf(t)\,dt\geqslant 0. \tag{3.12}$$

Оно получается следующим образом. При всех $t\in[0;x]$ справедливо неравенство

$$xf(t)\geqslant tf(t).$$

Интегрируя его на отрезке $[0;x]$, получаем (3.12). Таким образом, утверждение задачи доказано.

2237. Найти:

$$\text{а)} \int\limits_0^2 f(x)\,dx\,, \text{ если } f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 2-x & \text{при } 1 < x \leqslant 2; \end{cases}$$

$$\text{б)} \int\limits_0^1 f(x)\,dx\,, \text{ если } f(x) = \begin{cases} x & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant t, \\ t\,\dfrac{1-x}{1-t} & \text{при } t \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

$$\text{а)} \int\limits_0^2 f(x)\,dx = \int\limits_0^1 f(x)\,dx + \int\limits_1^2 f(x)\,dx =$$

$$= \int\limits_0^1 x^2 dx + \int\limits_1^2 (2-x)dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 + \left(2x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}\,.$$

$$\text{б)} \int\limits_0^1 f(x)\,dx = \int\limits_0^t f(x)\,dx + \int\limits_t^1 f(x)\,dx =$$

$$= \int\limits_0^t x\,dx + \int\limits_t^1 t\,\frac{1-x}{1-t}\,dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}\Big|_0^t + \frac{t}{1-t}\left(x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_t^1 = \frac{t^2}{2} + \frac{(1-t)t}{2} = \frac{t}{2}\,.$$

2238. Вычислить и построить графики интегралов $I = I(\alpha)$,

рассматривая их как функции параметра α, если:

$$\text{а) } I = \int\limits_0^1 x|x-\alpha|\,dx;$$

$$\text{б) } I = \int\limits_0^\pi \frac{\sin^2 x}{1+2\alpha\cos x+\alpha^2}\,dx;$$

$$\text{в) } I = \int\limits_0^\pi \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{1-2\alpha\cos x+\alpha^2}}.$$

а). Если $\alpha < 0$, то

$$I(\alpha) = \int\limits_0^1 x(x-\alpha)\,dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{\alpha x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{\alpha}{2}.$$

При $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$

$$I(\alpha) = \int\limits_0^\alpha (\alpha x - x^2)dx + \int\limits_\alpha^1 (x^2 - \alpha x)dx =$$

$$= \left(\frac{\alpha x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^\alpha + \left(\frac{x^3}{3} - \frac{\alpha x^2}{2}\right)\Bigg|_\alpha^1 = \frac{\alpha^3}{3} - \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{3}.$$

При $\alpha > 1$

$$I(\alpha) = \int\limits_0^1 x(\alpha - x)dx = \left(\frac{\alpha x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{3}.$$

График интеграла представлен на рис. 3.17.

б). При $\alpha = 0$

$$I = \int\limits_0^\pi \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^\pi (1-\cos 2x)dx =$$

$$= \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x\right)\Bigg|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}.$$

При $\alpha \neq 0$ делаем замену $t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$:

$$I = \begin{cases} \dfrac{8}{(\alpha-1)^2}\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{t^2 dt}{(1+t^2)^2(t^2+A^2)}, & \alpha \neq 1; \\ 2\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{t^2 dt}{(1+t^2)^2}, & \alpha = 1, \end{cases}$$

где $A = \dfrac{\alpha+1}{\alpha-1}$.

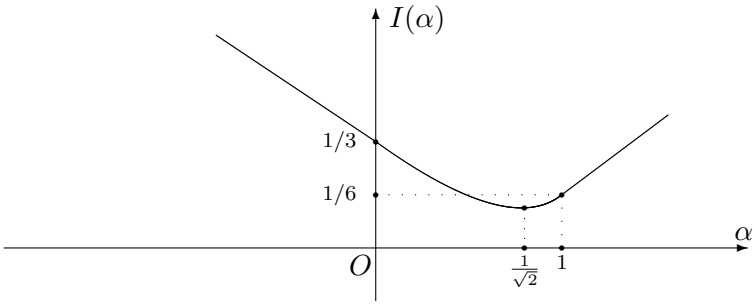

Рис. 3.17

Вычисляем полученные интегралы. Рассмотрим случай $\alpha \neq$ $\neq 1$. Найдем разложение подынтегральной функции на элементарные дроби относительно переменной $u = t^2$:

$$\frac{t^2}{(1+t^2)^2(t^2+A^2)} = \frac{u}{(1+u)^2(u+A^2)} =$$

$$= \frac{a}{1+u} + \frac{b}{(1+u)^2} + \frac{c}{u+A^2}.$$

Для неизвестных коэффициентов a, b, c получаем систему

$$\begin{cases} a + c = 0; \\ (1 + A^2)a + b + 2c = 1; \\ A^2 a + A^2 b + c = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим:

$$a = \frac{A^2}{(1 - A^2)^2}, \quad b = \frac{1}{1 - A^2}, \quad c = -\frac{A^2}{(1 - A^2)^2}$$

(при любом α величина $A = (\alpha + 1)/(\alpha - 1) \neq 1$ и при любом $\alpha \neq 0$ значение $A \neq -1$). Используя формулу понижения (задача 1921), получаем:

$$\int \frac{dt}{(1 + t^2)^2} = \frac{t}{2(1 + t^2)} + \frac{1}{2} \int \frac{dt}{1 + t^2} = \frac{t}{2(1 + t^2)} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t + C.$$

Таким образом,

$$I = \frac{8}{(\alpha - 1)^2} \left[a \int\limits_0^{+\infty} \frac{dt}{1 + t^2} + b \int\limits_0^{+\infty} \frac{dt}{(1 + t^2)^2} + c \int\limits_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + A^2} \right] =$$

$$= \frac{8}{(\alpha - 1)^2} \left[a \operatorname{arctg} t + \frac{b}{2} \left(\frac{t}{1 + t^2} + \operatorname{arctg} t \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{c}{|A|} \operatorname{arctg} \frac{t}{|A|} \right] \Bigg|_0^{+\infty} = \frac{2\pi}{(\alpha - 1)^2} \left(2a + b + \frac{2c}{|A|} \right).$$

Подставляя сюда значения коэффициентов a, b и c, находим

$$I = \frac{2\pi(1 - |A|)^2}{(\alpha - 1)^2 (1 - A^2)^2}.$$

Нетрудно видеть, что при $|\alpha| > 1$ величина $A > 0$ и

$$I = \frac{2\pi}{(\alpha - 1)^2 (1 + A)^2} = \frac{\pi}{2\alpha^2}.$$

При $|\alpha| < 1$ величина $A < 0$, следовательно

$$I = \frac{2\pi}{(\alpha-1)^2(1-A)^2} = \frac{\pi}{2}.$$

При $\alpha = -1$ значение $A = 0$ и величина I также равна $\pi/2$.

Осталось вычислить значение интеграла I при $\alpha = 1$. После интегрирования по частям получаем

$$I = 2\int\limits_0^{+\infty} \frac{t^2 dt}{(1+t^2)^2} = -\int\limits_0^{+\infty} t\, d\left(\frac{1}{1+t^2}\right) =$$

$$= -\frac{t}{1+t^2}\Bigg|_0^{+\infty} + \int\limits_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = 0 + \operatorname{arctg} t\Bigg|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}.$$

Окончательно получаем:

$$I = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}, & |\alpha| \leqslant 1; \\ \dfrac{\pi}{2\alpha^2}, & |\alpha| > 1. \end{cases}$$

График функции $I = I(\alpha)$ приведен на рис. 3.18;

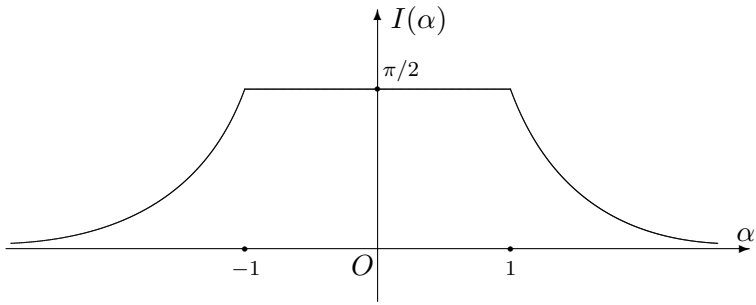

Рис. 3.18

в). Если $\alpha = 0$, то

$$I = \int\limits_0^{\pi} \sin x\, dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = 2.$$

При $\alpha \neq 0$

$$I = \frac{1}{2\alpha} \int\limits_0^{\pi} \frac{d(1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2)}{\sqrt{1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2}} = \frac{1}{\alpha}\sqrt{1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2}\Big|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{|1+\alpha| - |1-\alpha|}{\alpha} = \begin{cases} 2\,, & |\alpha| \leqslant 1; \\ \dfrac{2}{|\alpha|}\,, & |\alpha| > 1. \end{cases}$$

График функции $I = I(\alpha)$ приведен на рис. 3.19.

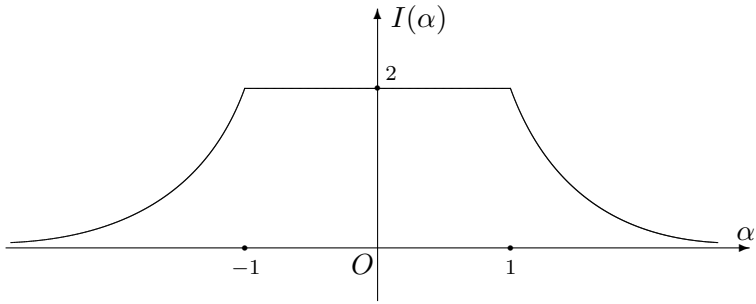

Рис. 3.19

Применяя формулу интегрирования по частям, найти следующие определенные интегралы:

2239. $\int\limits_0^{\ln 2} xe^{-x}dx.$

$$\int\limits_0^{\ln 2} xe^{-x}dx = -\int\limits_0^{\ln 2} x\,d\left(e^{-x}\right) = -xe^{-x}\Big|_0^{\ln 2} + \int\limits_0^{\ln 2} e^{-x}dx =$$

$$= -\frac{\ln 2}{2} - e^{-x}\Big|_0^{\ln 2} = -\frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\ln\frac{e}{2}.$$

2240. $\int\limits_0^{\pi} x\sin x\,dx.$

$$\int\limits_0^{\pi} x\sin x\,dx = -\int\limits_0^{\pi} x\,d(\cos x) = -x\cos x\Big|_0^{\pi} +$$

$$+\int\limits_0^{\pi} \cos x\,dx = \pi + \sin x\Big|_0^{\pi} = \pi.$$

2241. $\int\limits_0^{2\pi} x^2\cos x\,dx.$

$$\int\limits_0^{2\pi} x^2\cos x\,dx = \int\limits_0^{2\pi} x^2 d(\sin x) = x^2\sin x\Big|_0^{2\pi} - 2\int\limits_0^{2\pi} x\sin x\,dx =$$

$$= 2\int\limits_0^{2\pi} x\,d(\cos x) = 2x\cos x\Big|_0^{2\pi} -$$

$$-2\int\limits_0^{2\pi} \cos x\,dx = 4\pi - 2\sin x\Big|_0^{2\pi} = 4\pi.$$

2242. $\int\limits_{1/e}^{e} |\ln x|\,dx$. Интегрируя по частям, находим

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C.$$

Отсюда следует, что

$$\int\limits_{1/e}^{e} |\ln x|\,dx = -\int\limits_{1/e}^{1} \ln x\,dx + \int\limits_{1}^{e} \ln x\,dx = -(x\ln x - x)\Big|_{1/e}^{1} +$$

$$+(x\ln x - x)\Big|_{1}^{e} = \left(1 - \frac{2}{e}\right) + 1 = 2\left(1 - \frac{1}{e}\right).$$

2243. $\int\limits_{0}^{1} \arccos x\,dx$.

$$\int\limits_{0}^{1} \arccos x\,dx = x\arccos x\Big|_{0}^{1} + \int\limits_{0}^{1} \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \int\limits_{0}^{1} \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2}\Big|_{0}^{1} = 1.$$

2244. $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}} x\,\mathrm{arctg}\,x\,dx$.

$$\int\limits_{0}^{\sqrt{3}} x\,\mathrm{arctg}\,x\,dx = \int\limits_{0}^{\sqrt{3}} \mathrm{arctg}\,x\,d\left(\frac{x^2}{2}\right) =$$

$$= \frac{x^2}{2}\ \operatorname{arctg} x\Big|_0^{\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2 dx}{1+x^2} =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\int\limits_0^{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\,(x - \operatorname{arctg} x)\Big|_0^{\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Применяя подходящую замену переменной, найти следующие интегралы:

2245. $\displaystyle\int\limits_{-1}^{1} \frac{x\,dx}{\sqrt{5-4x}}.$

После замены

$$t = \sqrt{5-4x}\,, \quad x = \frac{1}{4}(5-t^2)\,, \quad dx = -\frac{1}{2}\,t\,dt$$

получаем:

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{x\,dx}{\sqrt{5-4x}} = -\frac{1}{8}\int\limits_3^1 (5-t^2)dt =$$

$$= \frac{1}{8}\int\limits_1^3 (5-t^2)dt = \frac{1}{8}\left(5t - \frac{t^3}{3}\right)\Big|_1^3 = \frac{1}{6}\,.$$

2246. $\displaystyle\int\limits_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx.$

Полагая $x = a\sin t$ при $0 \leqslant t \leqslant \pi/2$, получаем:

$$\int\limits_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx = a^4\int\limits_0^{\pi/2} \sin^2 t\cos^2 t\,dt = \frac{a^4}{4}\int\limits_0^{\pi/2} \sin^2 2t\,dt =$$

$$= \frac{a^4}{8}\int\limits_0^{\pi/2}(1-\cos 4t)dt = \frac{a^4}{8}\left(t-\frac{\sin 4t}{4}\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{\pi a^4}{16}.$$

2247. $\displaystyle\int\limits_0^{0,75}\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}.$

Первообразная подынтегральной функции вычислена в задаче 1858:

$$\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1-x+\sqrt{2(1+x^2)}}{1+x}\right| + C.$$

Согласно формуле Ньютона – Лейбница имеем:

$$\int\limits_0^{0,75}\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1-x+\sqrt{2(1+x^2)}}{1+x}\right|\Bigg|_0^{0,75} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{1+5\sqrt{2}}{7} + \frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{7(1+\sqrt{2})}{1+5\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{7(1+\sqrt{2})(5\sqrt{2}-1)}{49} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{9+4\sqrt{2}}{7}.$$

2248. $\displaystyle\int\limits_0^{\ln 2}\sqrt{\mathrm{e}^x-1}\,dx.$

После замены

$$t = \mathrm{e}^x\,, \quad x = \ln t\,, \quad dx = -\frac{dt}{t}$$

получаем

$$\int\limits_0^{\ln 2}\sqrt{\mathrm{e}^x-1}\,dx = \int\limits_1^2\frac{\sqrt{t-1}}{t}\,dt.$$

Последний интеграл рационализируется подстановкой

$$u = \sqrt{t-1}\,, \quad t = u^2 + 1\,, \quad dt = 2u\,du.$$

Применение этой подстановки приводит к следующему результату:

$$\int\limits_1^2 \frac{\sqrt{t-1}}{t}\,dt = 2\int\limits_0^1 \frac{u^2 du}{1+u^2} = 2\int\limits_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+u^2}\right) du =$$

$$= 2(u - \operatorname{arctg} u)\Big|_0^1 = 2 - \frac{\pi}{2}.$$

Следовательно,

$$\int\limits_0^{\ln 2} \sqrt{\mathrm{e}^x - 1}\,dx = 2 - \frac{\pi}{2}.$$

2249. $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx.$

Выполняя последовательно замены $t = \sqrt{x}$ и $u = \arcsin t$, получаем:

$$\int\limits_0^1 \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx = 2\int\limits_0^1 \frac{\arcsin t}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = 2\int\limits_0^{\pi/2} u\,du = u^2\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi^2}{4}.$$

2250. $\displaystyle\int\limits_{-1}^1 \frac{1+x^2}{1+x^4}\,dx.$

Первообразная подынтегральной функции вычислена в задаче 1712:

$$\int \frac{1+x^2}{1+x^4}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{x\sqrt{2}} + C.$$

Так как она разрывна при $x = 0$, то определенный интеграл необходимо разбить на два:

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{1+x^2}{1+x^4}\,dx = \int\limits_{-1}^{0} \frac{1+x^2}{1+x^4}\,dx + \int\limits_{0}^{1} \frac{1+x^2}{1+x^4}\,dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x^2-1}{x\sqrt{2}}\Bigg|_{-1}^{0} + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x^2-1}{x\sqrt{2}}\Bigg|_{0}^{1} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} + \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

2251. Объяснить, почему формальная замена $x = \varphi(t)$ приводит к неверным результатам, если:

а) $\displaystyle\int\limits_{-1}^{1} dx$, где $t = x^{2/3}$; б) $\displaystyle\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2}$, где $x = \dfrac{1}{t}$;

в) $\displaystyle\int\limits_{0}^{\pi} \frac{dx}{1+\sin^2 x}$, где $\operatorname{tg} x = t$.

а). Из формулы замены находим $x = \pm t^{3/2}$ и формальная (точнее, необдуманная) замена (при любом выборе знака) дает

$$\int\limits_{-1}^{1} dx = \pm\frac{3}{2}\int\limits_{1}^{1} t^{1/2}dt = 0,$$

в то время как прямое вычисление приводит к другому результату:

$$\int\limits_{-1}^{1} dx = x\Big|_{-1}^{1} = 2.$$

Надуманность этого примера очевидна. Необходимым условием любой замены является вычисление новых пределов интегрирования. Выполнение этого действия сразу ставит все на свои места. При выборе формулы $x = t^{3/2}$ нельзя найти такое значение

переменной t, которое бы дало величину $x = -1$. Аналогично, при выборе формулы замены $x = -t^{3/2}$ нет такого значения переменной t, которое бы дало величину $x = 1$. На промежутке $x \in [-1; 0]$ необходимо выбирать $x = -t^{3/2}$, а на отрезке $x \in [0; 1]$ величина $x = t^{3/2}$. Поэтому правильный подход состоит в том, чтобы интеграл разбить на два:

$$\int\limits_{-1}^{1} dx = \int\limits_{-1}^{0} dx + \int\limits_{0}^{1} dx.$$

В первом интеграле величина x неположительна и нужно сделать замену $x = -t^{3/2}$:

$$\int\limits_{-1}^{0} dx = -\frac{3}{2}\int\limits_{1}^{0} t^{1/2}dt = \frac{3}{2}\int\limits_{0}^{1} t^{1/2}dt = t^{3/2}\Big|_{0}^{1} = 1.$$

Во втором интеграле значения x неотрицательны и поэтому $x = t^{3/2}$:

$$\int\limits_{0}^{1} dx = \frac{3}{2}\int\limits_{0}^{1} t^{1/2}dt = t^{3/2}\Big|_{0}^{1} = 1.$$

Таким образом,

$$\int\limits_{-1}^{1} dx = 1 + 1 = 2.$$

б). Непосредственное вычисление дает

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x\Big|_{-1}^{1} = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Формальная замена дает другой результат:

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2} = -\int\limits_{-1}^{1} \frac{dt}{1+t^2} = -\frac{\pi}{2}.$$

Обратная замена дается формулой $t = 1/x$. Эта функция разрывна при $x = 0$, лежащей внутри отрезка интегрирования, поэтому формула замены переменной неприменима к данному случаю. Тем не менее указанную замену можно осуществить, если разбить исходный интеграл на два:

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2} = \int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{1+x^2}$$

и в каждом из полученных интегралов, воспользоваться заменой $x = 1/t$, сводя интегралы к несобственным:

$$\int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = -\int\limits_{-1}^{-\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{dt}{1+t^2} =$$

$$= \operatorname{arctg} t \Big|_{-\infty}^{-1} = -\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4},$$

$$\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{1+x^2} = -\int\limits_{+\infty}^{1} \frac{dt}{1+t^2} = \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arctg} t \Big|_{1}^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

Таким образом,

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

в). Выполняя формально указанную замену

$$\operatorname{tg} x = t\,, \quad x = \operatorname{arctg} t\,, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}\,,$$

$$\sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{t^2}{1+t^2}\,,$$

приходим к следующему результату:

$$\int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{1+\sin^2 x} = \int\limits_0^{0} \frac{dt}{2t^2+1} = 0.$$

Однако функция $t = \operatorname{tg} x$ разрывна в точке $x = \pi/2$, лежащей внутри отрезка интегрирования, и формальное примение формулы замены переменной неправомочно. Полученный ответ, как мы сейчас увидим, неверен. Для корректного применения формулы замены, исходный интеграл нужно разбить на два:

$$\int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{1+\sin^2 x} = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\sin^2 x} + \int\limits_{\pi/2}^{\pi} \frac{dx}{1+\sin^2 x},$$

и в каждом из полученных интегралов сделать замену $t = \operatorname{tg} x$, сводя эти интегралы к несобственным:

$$\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\sin^2 x} = \int\limits_0^{+\infty} \frac{dt}{2t^2+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(t\sqrt{2})\Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

$$\int\limits_{\pi/2}^{\pi} \frac{dx}{1+\sin^2 x} = \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dt}{2t^2+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(t\sqrt{2})\Big|_{-\infty}^{0} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

Таким образом, окончательно

$$\int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{1+\sin^2 x} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} + \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

2252. Можно ли в интеграле $\int\limits_0^3 x\sqrt[3]{1-x^2}\,dx$ положить $x = \sin t$?

Нельзя, так как в интеграле величина x меняется в пределах от 0 до 3, а все значения функции $x = \sin t$ не превосходят 1.

2253. Можно ли в интеграле

$$\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$$

при замене переменной $x = \sin t$ в качестве новых пределов взять числа π и $\pi/2$?

Функция $x = \sin t$ непрерывно дифференцируема и обратима на отрезке $[\pi/2; \pi]$. При этом $x(\pi) = 0$ и $x(\pi/2) = 1$, следовательно, такая замена допустима.

2254. Доказать, что если $f(x)$ непрерывна на $[a; b]$, то

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = (b-a)\int\limits_0^1 f(a+(b-a)x)dx.$$

Делая замену переменной $x = a + (b-a)t$, получаем:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = (b-a)\int\limits_0^1 f(a+(b-a)t)dt.$$

Заменяя в последнем интеграле букву t на букву x, получаем утверждение задачи.

2255. Доказать равенство

$$\int\limits_0^a x^3 f(x^2)dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{a^2} xf(x)dx \quad (a > 0).$$

Выполняя замену переменной $x^2 = t$ и учитывая, что $a > 0$, получаем

$$\int\limits_0^a x^3 f(x^2)dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{a^2} tf(t)dt.$$

Заменяя в последнем интеграле букву t на букву x, получаем утверждение задачи.

2256. Пусть $f(x)$ – непрерывная функция на сегменте $[A;B] \supset \supset [a;b]$. Найти

$$\frac{d}{dx}\int\limits_a^b f(x+y)dy$$

при $[a+x;b+x] \subset [A;B]$.

Сделаем замену переменной $t = x + y$, получим

$$\int\limits_a^b f(x+y)dy = \int\limits_{a+x}^{b+x} f(t)\,dt.$$

Дифференцируя полученное равенство по формуле (3.8), находим

$$\frac{d}{dx}\int\limits_a^b f(x+y)dy = \frac{d}{dx}\int\limits_{a+x}^{b+x} f(t)\,dt = f(b+x) - f(a+x).$$

2257. Доказать, что если $f(x)$ непрерывна на $[0;1]$, то

$$\text{а)}\ \int\limits_0^{\pi/2} f(\sin x)\,dx = \int\limits_0^{\pi/2} f(\cos x)\,dx;$$

$$\text{б)}\ \int\limits_0^{\pi} xf(\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int\limits_0^{\pi} f(\sin x)\,dx.$$

а). Делая замену $x = \dfrac{\pi}{2} - t$, получаем

$$\int\limits_0^{\pi/2} f(\sin x)\,dx = -\int\limits_{\pi/2}^{0} f(\cos t)\,dt = \int\limits_0^{\pi/2} f(\cos t)\,dt.$$

Заменяя в последнем интеграле букву t на букву x, получаем требуемое утверждение задачи.

б). Делая замену $x = \pi - t$, получим

$$\int\limits_0^\pi xf(\sin x)\,dx = -\int\limits_\pi^0 (\pi - t)f(\sin t)\,dt = \int\limits_0^\pi (\pi - t)f(\sin t)\,dt =$$

$$= \int\limits_0^\pi (\pi - x)f(\sin x)\,dx = \pi\int\limits_0^\pi f(\sin x)\,dx - \int\limits_0^\pi xf(\sin x)\,dx.$$

Отсюда следует, что

$$2\int\limits_0^\pi xf(\sin x)\,dx = \pi\int\limits_0^\pi f(\sin x)\,dx$$

или

$$\int\limits_0^\pi xf(\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int\limits_0^\pi f(\sin x)\,dx.$$

2258. Доказать, что для непрерывной на $[-l; l]$ функции $f(x)$ имеем:

$$1)\int\limits_{-l}^{l} f(x)\,dx = 2\int\limits_0^l f(x),$$

если функция $f(x)$ четная, и

$$2)\int\limits_{-l}^{l} f(x)\,dx = 0,$$

если функция $f(x)$ нечетная. Дать геометрическую интерпретацию этих фактов.

1. Разбиваем интеграл на два:

$$\int\limits_{-l}^{l} f(x)\,dx = \int\limits_{-l}^{0} f(x)\,dx + \int\limits_{0}^{l} f(x)\,dx.$$

В первом интеграле делаем замену $t = -x$. Используя четность подынтегральной функции, получаем

$$\int\limits_{-l}^{0} f(x)\,dx = -\int\limits_{l}^{0} f(-t)\,dt = \int\limits_{0}^{l} f(t)\,dt = \int\limits_{0}^{l} f(x)\,dx.$$

Отсюда следует, что

$$\int\limits_{-l}^{l} f(x)\,dx = \int\limits_{0}^{l} f(x)\,dx + \int\limits_{0}^{l} f(x)\,dx = 2\int\limits_{0}^{l} f(x)\,dx.$$

2. Разбиваем интеграл на два:

$$\int\limits_{-l}^{l} f(x)\,dx = \int\limits_{-l}^{0} f(x)\,dx + \int\limits_{0}^{l} f(x)\,dx.$$

В первом интеграле делаем замену $t = -x$. Используя нечетность подынтегральной функции, получаем

$$\int\limits_{-l}^{0} f(x)\,dx = -\int\limits_{l}^{0} f(-t)\,dt = -\int\limits_{0}^{l} f(t)\,dt = -\int\limits_{0}^{l} f(x)\,dx.$$

Таким образом,

$$\int\limits_{-l}^{l} f(x)\,dx = -\int\limits_{0}^{l} f(x)\,dx + \int\limits_{0}^{l} f(x)\,dx = 0.$$

Приведем геометрическую интерпретацию результатов. Рассмотрим случай четной неотрицательной функции f, ее график симметричен относительно оси ординат. Величина

$$S_1 = \int\limits_{-l}^{0} f(x)\,dx$$

равна площади под графиком функции на отрезке $[-l; 0]$, а величина

$$S_2 = \int\limits_{0}^{l} f(x)\,dx$$

равна площади под графиком функции на отрезке $[0; l]$. В силу симметрии графика функции $S_1 = S_2$. Величина

$$S = \int\limits_{-l}^{l} f(x)\,dx$$

равна площади под графиком функции на отрезке $[-l; l]$, т. е. $S = S_1 + S_2$, но так как $S_1 = S_2$, то $S = 2S_2$ (рис. 3.20).

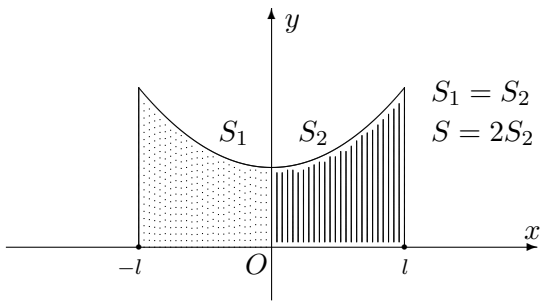

Рис. 3.20

В случае нечетной функции f ее график симметричен относительно начала координат (рис. 3.21).

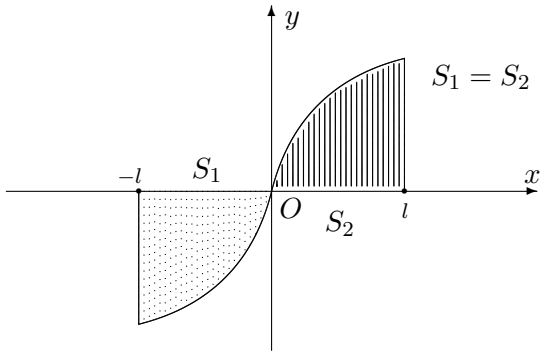

Рис. 3.21

Пусть функция f неотрицательна на отрезке $[0; l]$, тогда на отрезке $[-l; 0]$ она неположительна и интеграл

$$\int\limits_{-l}^{0} f(x)\,dx = -S_1,$$

где S_1 – площадь фигуры, заключеной между графиком функции на отрезке $[-l; 0]$ и осью абсцисс. Площадь фигуры, заключеной между графиком функции на отрезке $[0; l]$ и осью абсцисс

$$S_2 = \int\limits_{0}^{l} f(x)\,dx.$$

В силу симметрии графика функции относительно начала координат $S_1 = S_2$. Следовательно, интеграл от f по всему отрезку

$$\int\limits_{-l}^{l} f(x)\,dx = -S_1 + S_2 = 0.$$

2259. Доказать, что одна из первообразных четной функции есть функция нечетная, а всякая первообразная нечетной функции есть функция четная.

1. Пусть функция f четна. Одной из ее первообразных является интеграл с переменным верхним пределом

$$F(x) = \int\limits_0^x f(t)\,dt.$$

Покажем, что эта первообразная нечетна. Делая в интеграле замену $u = -t$ и используя четность f, получаем

$$F(-x) = \int\limits_0^{-x} f(t)\,dt = -\int\limits_0^x f(-u)\,du =$$

$$= -\int\limits_0^x f(u)\,du = -\int\limits_0^x f(t)\,dt = -F(x).$$

2. Пусть функция f нечетна, тогда любая ее первообразная имеет вид

$$F(x) = \int\limits_0^x f(t)\,dt + C.$$

Делая в интеграле замену $u = -t$ и используя нечетность f, получаем

$$F(-x) = \int\limits_0^{-x} f(t)\,dt + C = -\int\limits_0^x f(-u)\,du + C =$$

$$= \int\limits_0^x f(u)\,du + C = \int\limits_0^x f(t)\,dt + C = F(x).$$

2260. Вычислить интеграл

$$\int\limits_{1/2}^{2} \left(1 + x - \frac{1}{x}\right) \mathrm{e}^{x+(1/x)} dx,$$

введя новую переменную $t = x + \dfrac{1}{x}$.

График функции $t = x + \dfrac{1}{x}$ приведен на рис. 3.22.

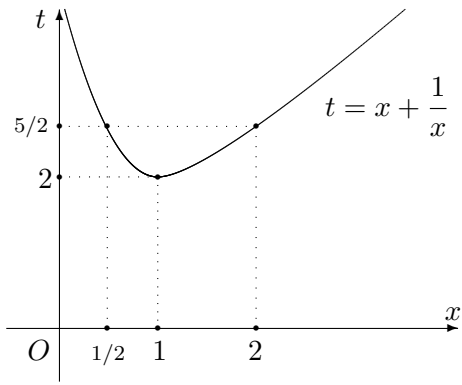

Рис. 3.22

На концах отрезка интегрирования значения функции равны $5/2$. На промежутке $x \in [1/2; 1]$ функция убывает, а на отрезке $[1; 2]$ функция возрастает, точка $x = 1$, $t = 2$ является точкой минимума. Решая уравнение замены относительно x, приходим к квадратному уравнению $x^2 - tx + 1 = 0$, что дает

$$x = \frac{t \pm \sqrt{t^2 - 4}}{2}.$$

Знак минус отвечает левой ветви графика функции ($x \in [1/2; 1]$), а знак плюс – правой ветви ($x \in [1; 2]$). Для осуществления ука-

занной замены интеграл нужно разбить на два:

$$\int\limits_{1/2}^{2}\left(1+x-\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{x+(1/x)}dx=\int\limits_{1/2}^{1}\left(1+x-\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{x+(1/x)}dx+$$

$$+\int\limits_{1}^{2}\left(1+x-\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{x+(1/x)}dx.$$

В первом интеграле

$$x=\frac{t-\sqrt{t^2-4}}{2}\,,\quad \frac{1}{x}=\frac{t+\sqrt{t^2-4}}{2}\,,$$

$$dx=\frac{1}{2}\left(1-\frac{t}{\sqrt{t^2-4}}\right)dt\,,\quad x-\frac{1}{x}=-\sqrt{t^2-4}.$$

Таким образом,

$$\int\limits_{1/2}^{1}\left(1+x-\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{x+(1/x)}dx=\int\limits_{5/2}^{2}(1-\sqrt{t^2-4}\,)\,\mathrm{e}^{t}\,\frac{\sqrt{t^2-4}-t}{2\sqrt{t^2-4}}\,dt=$$

$$=\int\limits_{2}^{5/2}\frac{\mathrm{e}^{t}(\sqrt{t^2-4}-1)(\sqrt{t^2-4}-t)}{2\sqrt{t^2-4}}\,dt.$$

Во втором интеграле

$$x=\frac{t+\sqrt{t^2-4}}{2}\,,\quad \frac{1}{x}=\frac{t-\sqrt{t^2-4}}{2}\,,$$

$$dx=\frac{1}{2}\left(1+\frac{t}{\sqrt{t^2-4}}\right)dt\,,\quad x-\frac{1}{x}=\sqrt{t^2-4}.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{1}^{2}\left(1+x-\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{x+(1/x)}dx=\int\limits_{2}^{5/2}(1+\sqrt{t^2-4}\,)\,\mathrm{e}^{t}\,\frac{\sqrt{t^2-4}+t}{2\sqrt{t^2-4}}\,dt=$$

$$= \int\limits_{2}^{5/2} \frac{\mathrm{e}^t(\sqrt{t^2-4}+1)(\sqrt{t^2-4}+t)}{2\sqrt{t^2-4}}\,dt.$$

Складывая полученные интегралы, находим:

$$\int\limits_{1/2}^{2} \left(1+x-\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{x+(1/x)}dx = \int\limits_{2}^{5/2} \frac{t^2+t-4}{\sqrt{t^2-4}}\,\mathrm{e}^t\,dt =$$

$$= \int\limits_{2}^{5/2} \left(\frac{t}{\sqrt{t^2-4}}+\sqrt{t^2-4}\right)\mathrm{e}^t\,dt = \int\limits_{2}^{5/2} d\left(\mathrm{e}^t\,\sqrt{t^2-4}\right) =$$

$$= \mathrm{e}^t\,\sqrt{t^2-4}\,\Big|_{2}^{5/2} = \frac{3}{2}\,\mathrm{e}^{5/2}.$$

2261. В интеграле

$$\int\limits_{0}^{2\pi} f(x)\cos x\,dx$$

выполнить замену переменной $\sin x = t$.

На всем промежутке интегрирования функция $t = \sin x$ не имеет обратной, поэтому рассматриваемый интеграл разбиваем на три:

$$\int\limits_{0}^{2\pi} f(x)\cos x\,dx = \int\limits_{0}^{\pi/2} f(x)\cos x\,dx +$$

$$+ \int\limits_{\pi/2}^{3\pi/2} f(x)\cos x\,dx + \int\limits_{3\pi/2}^{2\pi} f(x)\cos x\,dx$$

и делаем указанную замену в каждом из полученных интегралов.

На отрезке $[0;\pi/2]$ обратной функцией к $t=\sin x$ является функция $x=\arcsin t$, при этом $\cos x\,dx=dt$. Таким образом,

$$\int\limits_0^{\pi/2} f(x)\cos x\,dx=\int\limits_0^1 f(\arcsin t)\,dt.$$

На участке $[\pi/2;3\pi/2]$ обратной к $t=\sin x$ является функция $x=\pi-\arcsin t$. Из равенства $t=\sin x$ снова получаем $\cos x\,dx=$ $=dt$, поэтому

$$\int\limits_{\pi/2}^{3\pi/2} f(x)\cos x\,dx=\int\limits_1^{-1} f(\pi-\arcsin t)\,dt=-\int\limits_{-1}^{1} f(\pi-\arcsin t)\,dt=$$

$$=-\int\limits_{-1}^{0} f(\pi-\arcsin t)\,dt-\int\limits_0^1 f(\pi-\arcsin t)\,dt.$$

На промежутке $[3\pi/2;2\pi]$ функция $t=\sin x$ имеет обратную $x=2\pi+\arcsin t$. По прежнему $\cos x\,dx=dt$ и

$$\int\limits_{3\pi/2}^{2\pi} f(x)\cos x\,dx=\int\limits_{-1}^{0} f(2\pi+\arcsin t)\,dt.$$

Складывая полученные интегралы, находим:

$$\int\limits_0^{2\pi} f(x)\cos x\,dx=\int\limits_0^1 f(\arcsin t)\,dt-\int\limits_{-1}^{0} f(\pi-\arcsin t)\,dt-$$

$$-\int\limits_0^1 f(\pi-\arcsin t)\,dt+\int\limits_{-1}^{0} f(2\pi+\arcsin t)\,dt=$$

$$= \int\limits_0^1 [f(\arcsin t) - f(\pi - \arcsin t)]\, dt +$$

$$+ \int\limits_{-1}^0 [f(2\pi + \arcsin t) - f(\pi - \arcsin t)]\, dt.$$

2262. Вычислить интеграл

$$\int\limits_{e^{-2\pi n}}^1 \left| \left[\cos\left(\ln \frac{1}{x} \right) \right]' \right| dx,$$

где n – натуральное число.

После замены $t = \ln(1/x)$ получаем, что искомый интеграл

$$I = \int\limits_{e^{-2\pi n}}^1 \left| \sin\left(\ln \frac{1}{x} \right) \right| \frac{dx}{x} = \int\limits_0^{2\pi n} |\sin t|\, dt =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\int\limits_{2\pi k}^{\pi + 2\pi k} |\sin t|\, dt + \int\limits_{\pi + 2\pi k}^{2\pi + 2\pi k} |\sin t|\, dt \right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\int\limits_{2\pi k}^{\pi + 2\pi k} \sin t\, dt - \int\limits_{\pi + 2\pi k}^{2\pi + 2\pi k} \sin t\, dt \right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \left(-\cos x \Big|_{2\pi k}^{\pi + 2\pi k} + \cos x \Big|_{\pi + 2\pi k}^{2\pi + 2\pi k} \right) = \sum_{k=0}^{n-1} 4 = 4n.$$

2263. Найти

$$\int\limits_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x}\, dx.$$

Искомый интеграл

$$I = \int\limits_0^\pi x \frac{\sin x}{2 - \sin^2 x}\, dx = \int\limits_0^\pi x f(\sin x) dx,$$

где

$$f(u) = \frac{u}{2 - u^2}.$$

Согласно решению задачи 2257(б)

$$\int\limits_0^\pi x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int\limits_0^\pi f(\sin x) dx.$$

Применяя эту формулу и делая замену $v = \cos x$, получаем

$$I = \frac{\pi}{2} \int\limits_0^\pi \frac{\sin x}{2 - \sin^2 x}\, dx = -\frac{\pi}{2} \int\limits_0^\pi \frac{d(\cos x)}{1 + \cos^2 x} = \frac{\pi}{2} \int\limits_{-1}^1 \frac{dv}{1 + v^2} =$$

$$= \frac{\pi}{2} \operatorname{arctg} v \Big|_{-1}^1 = \frac{\pi^2}{4}.$$

2264. Найти интеграл

$$\int\limits_{-1}^3 \frac{f'(x)}{1 + f^2(x)}\, dx,$$

если

$$f(x) = \frac{(x+1)^2 (x-1)}{x^3 (x-2)}.$$

Неопределенный интеграл

$$\int \frac{f'(x)}{1 + f^2(x)}\, dx = \int \frac{d(f(x))}{1 + [f(x)]^2} = \operatorname{arctg} f(x) + C.$$

Рассмотрим одну из первообразных подынтегральной функции

$$F(x) = \operatorname{arctg} \frac{(x+1)^2(x-1)}{x^3(x-2)}.$$

График этой функции представлен на рис. 3.23.

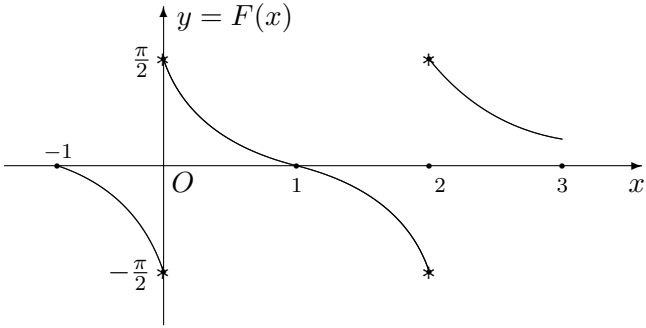

Рис. 3.23

Функция $F(x)$ имеет две точки разрыва ($x = 0$ и $x = 2$) на промежутке интегрирования $[-1; 3]$, поэтому для вычисления определенного интеграла необходимо разбить его на три:

$$\int\limits_{-1}^{3} \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\,dx = \int\limits_{-1}^{0} \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\,dx +$$

$$+ \int\limits_{0}^{2} \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\,dx + \int\limits_{2}^{3} \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\,dx.$$

Для вычисления каждого из полученных интегралов можно применить формулу Ньютона – Лейбница:

$$\int\limits_{-1}^{0} \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\,dx = \operatorname{arctg} \frac{(x+1)^2(x-1)}{x^3(x-2)}\Bigg|_{-1}^{0} = -\frac{\pi}{2},$$

$$\int\limits_0^2 \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\,dx = \operatorname{arctg}\frac{(x+1)^2(x-1)}{x^3(x-2)}\Bigg|_0^2 = -\pi,$$

$$\int\limits_2^3 \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\,dx = \operatorname{arctg}\frac{(x+1)^2(x-1)}{x^3(x-2)}\Bigg|_2^3 = \operatorname{arctg}\frac{32}{27} - \frac{\pi}{2}.$$

Таким образом, окончательно, получаем

$$\int\limits_{-1}^3 \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\,dx = \operatorname{arctg}\frac{32}{27} - 2\pi.$$

2265. Доказать, что если $f(x)$ – непрерывная периодическая функция, определенная при $-\infty < x < +\infty$ и имеющая период T, то

$$\int\limits_a^{a+T} f(x)\,dx = \int\limits_0^T f(x)\,dx, \tag{3.13}$$

где a – любое число.

Докажем предварительно, что при любых A и B

$$\int\limits_{A+T}^{B+T} f(x)\,dx = \int\limits_A^B f(x)\,dx. \tag{3.14}$$

Для этого выполним замену переменной $x = y + T$ в интеграле, находящимся в левой части равенства (3.14). Используя T-периодичность функции f, получим

$$\int\limits_{A+T}^{B+T} f(x)\,dx = \int\limits_A^B f(y+T)\,dy = \int\limits_A^B f(y)\,dy = \int\limits_A^B f(x)\,dx.$$

Для доказательства утверждения задачи воспользуемся свойством аддитивности определенного интеграла:

$$\int\limits_a^{a+T} f(x)\,dx = \int\limits_a^0 f(x)\,dx + \int\limits_0^T f(x)\,dx + \int\limits_T^{a+T} f(x)\,dx =$$

$$= \int\limits_0^T f(x)\,dx + \int\limits_T^{a+T} f(x)\,dx - \int\limits_0^a f(x)\,dx.$$

Согласно равенству (3.14) с $A = 0$, $B = a$

$$\int\limits_T^{a+T} f(x)\,dx - \int\limits_0^a f(x)\,dx = 0,$$

следовательно,

$$\int\limits_a^{a+T} f(x)\,dx = \int\limits_0^T f(x)\,dx.$$

2266. Доказать, что при n нечетном функции

$$F(x) = \int\limits_0^x \sin^n t\,dt\,, \quad G(x) = \int\limits_0^x \cos^n t\,dt$$

периодические с периодом 2π; а при n четном каждая из этих функций есть сумма линейной функции и периодической функции.

Для решения этой задачи потребуется следующее утверждение

Лемма. Пусть при некоторых $T > 0$, $A \in \mathbf{R}$ и всех $x \in \mathbf{R}$

$$f(x+T) = f(x) + A.$$

Тогда

$$f(x) = \varphi(x) + \frac{A}{T}\,x\,,$$

где $\varphi(x)$ – периодическая функция с периодом T.

Для доказательства леммы рассмотрим функцию

$$\varphi(x) = f(x) - \frac{A}{T}\,x.$$

Достаточно доказать, что эта функция T-периодична. В самом деле,

$$\varphi(x+T) - \varphi(x) = \left(f(x+T) - \frac{A}{T}\,(x+T)\right) -$$

$$- \left(f(x) - \frac{A}{T}\,x\right) = f(x+T) - A - f(x) = 0.$$

Лемма доказана.

Используя аддитивность интеграла и тождество (3.13) задачи 2265, получаем следующие соотношения:

$$F(x+2\pi) - F(x) = \int\limits_0^{x+2\pi} \sin^n t\,dt - \int\limits_0^{x} \sin^n t\,dt =$$

$$= \int\limits_x^{x+2\pi} \sin^n t\,dt = \int\limits_0^{2\pi} \sin^n t\,dt. \qquad (3.15)$$

$$G(x+2\pi) - G(x) = \int\limits_0^{x+2\pi} \cos^n t\,dt - \int\limits_0^{x} \cos^n t\,dt =$$

$$= \int\limits_x^{x+2\pi} \cos^n t\,dt = \int\limits_0^{2\pi} \cos^n t\,dt. \qquad (3.16)$$

1. Пусть n нечетно, т. е. $n = 2k+1$, где k – целое число, тогда после замен $u = \cos t$, $v = \sin t$ получаем:

$$\int\limits_0^{2\pi} \sin^n t\,dt = -\int\limits_0^{2\pi} \sin^{2k} t\,d(\cos t) =$$

$$= -\int\limits_0^{2\pi} (1-\cos^2 t)^k \, d(\cos t) = -\int\limits_1^1 (1-u)^k \, du = 0.$$

$$\int\limits_0^{2\pi} \cos^n t \, dt = \int\limits_0^{2\pi} \cos^{2k} t \, d(\sin t) =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} (1-\sin^2 t)^k \, d(\sin t) = \int\limits_0^0 (1-v)^k \, dv = 0.$$

Из этих равенств и соотношений (3.15) и (3.16) следует, что при всех $x \in \mathbf{R}$:

$$F(x+2\pi) = F(x)\,, \quad G(x+2\pi) = G(x).$$

2. Пусть n четно. Обозначим

$$A_1 = \int\limits_0^{2\pi} \sin^n t \, dt\,, \quad A_2 = \int\limits_0^{2\pi} \cos^n t \, dt.$$

Из соотношений (3.15) и (3.16) получаем, что при всех $x \in \mathbf{R}$:

$$F(x+2\pi) = F(x) + A_1\,, \quad G(x+2\pi) = G(x) + A_2.$$

Поэтому утверждение задачи следует из доказанной выше леммы.

2267. Доказать, что функция

$$F(x) = \int\limits_{x_0}^{x} f(t) \, dt,$$

где $f(x)$ – непрерывная периодическая функция с периодом T, в общем случае, есть сумма линейной функции и периодической функции периода T.

Согласно аддитивности интеграла и тождеству (3.13) задачи 2265

$$F(x+T)-F(x)=\int\limits_{x_0}^{x+T} f(t)\,dt-\int\limits_{x_0}^{x} f(t)\,dt=\int\limits_{x}^{x+T} f(t)\,dt=\int\limits_{0}^{T} f(t)\,dt.$$

Полагая

$$A=\int\limits_{0}^{T} f(t)\,dt,$$

получаем, что при всех $x\in\mathbf{R}$

$$F(x+T)=F(x)+A.$$

Таким образом, функция $F(x)$ удовлетворяет условиям леммы задачи 2266 и, следовательно, является суммой линейной функции и T-периодической.

Вычислить интегралы:

2268. $\int\limits_{0}^{1} x(2-x^2)^{12}dx.$

Делая замену $t=2-x^2$, получаем

$$\int\limits_{0}^{1} x(2-x^2)^{12}dx=-\frac{1}{2}\int\limits_{2}^{1} t^{12}dt=\frac{1}{2}\int\limits_{1}^{2} t^{12}dt=$$

$$=\left.\frac{t^{13}}{26}\right|_{1}^{2}=\frac{8191}{26}=315\frac{1}{26}.$$

2269. $\int\limits_{-1}^{1} \frac{x\,dx}{x^2+x+1}.$

Выделяя полный квадрат из квадратного трехчлена и делая замену $t = x + \frac{1}{2}$, получаем

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{x\,dx}{x^2+x+1} = \int\limits_{-1/2}^{3/2} \frac{\left(t-\frac{1}{2}\right)dt}{t^2+\frac{3}{4}} = \int\limits_{-1/2}^{3/2} \frac{t\,dt}{t^2+\frac{3}{4}} - \frac{1}{2}\int\limits_{-1/2}^{3/2} \frac{dt}{t^2+\frac{3}{4}} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(t^2+\frac{3}{4}\right)\Bigg|_{-1/2}^{3/2} - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t}{\sqrt{3}}\Bigg|_{-1/2}^{3/2} = \frac{1}{2}\ln 3 - \frac{\pi}{2\sqrt{3}}.$$

2270. $\int\limits_{1}^{e} (x\ln x)^2 dx.$

Интегируя два раза по частям, получаем:

$$\int\limits_{1}^{e} (x\ln x)^2 dx = \int\limits_{1}^{e} \ln^2 x\, d\left(\frac{x^3}{3}\right) = \frac{1}{3}x^3\ln^2 x\Bigg|_1^e - \frac{2}{3}\int\limits_{1}^{e} x^2\ln x\,dx =$$

$$= \frac{e^3}{3} - \frac{2}{3}\int\limits_{1}^{e} \ln x\, d\left(\frac{x^3}{3}\right) = \frac{e^3}{3} - \frac{2}{3}\left[\frac{1}{3}x^3\ln x\Bigg|_1^e - \frac{1}{3}\int\limits_{1}^{e} x^2 dx\right] =$$

$$= \frac{e^3}{3} - \frac{2}{9}e^3 + \frac{2}{9}\left(\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_1^e = \frac{e^3}{9} + \frac{2}{27}\left(e^3-1\right) = \frac{5}{27}e^3 - \frac{2}{27}.$$

2271. $\int\limits_{1}^{9} x\sqrt[3]{1-x}\,dx.$

После замены

$$t = \sqrt[3]{1-x}\,, \quad x = 1-t^3\,, \quad dx = -3t^2 dt$$

получаем

$$\int\limits_{1}^{9} x\sqrt[3]{1-x}\,dx = -3\int\limits_{0}^{-2}(1-t^3)t^3 dt = 3\int\limits_{-2}^{0}(t^3-t^6)dt =$$

$$= 3\left(\frac{t^4}{4} - \frac{t^7}{7}\right)\Bigg|_{-2}^{0} = -\frac{468}{7} = -66\frac{6}{7}.$$

2272. $\displaystyle\int\limits_{-2}^{-1} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$

Выполним замену переменной $t = 1/x$. Учитывая, что при $x < 0$ величина $\sqrt{x^2} = |x| = -x$, получаем

$$\int\limits_{-2}^{-1} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \int\limits_{-1/2}^{-1} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t\Bigg|_{-1/2}^{-1} = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{3}.$$

2273. $\displaystyle\int\limits_{0}^{1} x^{15}\sqrt{1+3x^8}\,dx.$

Выполняем замену переменной

$$t = \sqrt{1+3x^8}\,, \quad x^8 = \frac{t^2-1}{3}\,, \quad 8x^7\,dx = \frac{2}{3}\,t\,dt\,, \quad x^7dx = \frac{t\,dt}{12}\,,$$

$$x^{15}dx = (x^8)x^7dx = \left(\frac{t^2-1}{3}\right)\frac{t\,dt}{12} = \frac{(t^2-1)t\,dt}{36}.$$

Получаем

$$\int\limits_{0}^{1} x^{15}\sqrt{1+3x^8}\,dx = \frac{1}{36}\int\limits_{1}^{2}(t^2-1)t^2dt = \frac{1}{36}\left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_{1}^{2} = \frac{29}{270}.$$

2274. $\displaystyle\int\limits_{0}^{3} \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}\,dx.$

Интегрируя по частям, получаем

$$\int\limits_{0}^{3} \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}\,dx = x\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}\,\Bigg|_{0}^{3} -$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_0^3 \frac{\sqrt{x}\,dx}{1+x} = \pi - \frac{1}{2}\int\limits_0^3 \frac{\sqrt{x}\,dx}{1+x}.$$

Оставшийся интеграл рационализируется заменой $t = \sqrt{x}$:

$$\int\limits_0^3 \frac{\sqrt{x}\,dx}{1+x} = 2\int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{t^2 dt}{1+t^2} = 2\int\limits_0^{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right) dt =$$

$$=2(t - \operatorname{arctg} t)\Big|_0^{\sqrt{3}} = 2\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right).$$

Окончательно получаем

$$\int\limits_0^3 \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}\,dx = \pi - \frac{1}{2}\cdot 2\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}.$$

2275. $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{(2+\cos x)(3+\cos x)}.$

Вычислим сначала неопределенный интеграл. Для этого выполним универсальную подстановку:

$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

После подстановки получаем

$$\int \frac{dx}{(2+\cos x)(3+\cos x)} = \int \frac{(1+t^2)dt}{(3+t^2)(2+t^2)} =$$

$$= \int \left(\frac{2}{3+t^2} - \frac{1}{2+t^2}\right) dt = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}} -$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}} + C = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{2}} + C.$$

На отрезке интегрирования $[0; 2\pi]$ первообразная

$$F(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\sqrt{2}}$$

имеет одну точку разрыва $x = \pi$, поэтому для вычисления определенного интеграла этот интеграл нужно разбить на два:

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{(2+\cos x)(3+\cos x)} = \int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{(2+\cos x)(3+\cos x)} +$$

$$+ \int\limits_{\pi}^{2\pi} \frac{dx}{(2+\cos x)(3+\cos x)} = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\sqrt{3}} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\sqrt{2}} \right) \Bigg|_0^{\pi} + \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\sqrt{2}} \right) \Bigg|_{\pi}^{2\pi} =$$

$$= \frac{2\pi}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

2276. $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$.

Неопределенный интеграл вычислен в задаче 2035:

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\sqrt{2}} + C.$$

Первообразная подынтегральной функции

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\sqrt{2}}$$

на промежутке интегрирования $[0; 2\pi]$ имеет четыре точки разрыва $x = \pi/4$, $x = 3\pi/4$, $x = 5\pi/4$ и $x = 7\pi/4$, поэтому для

вычисления определенный интеграл нужно разбить на пять интегралов:

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x} = \int\limits_0^{\pi/4} \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x} + \int\limits_{\pi/4}^{3\pi/4} \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x} +$$

$$+ \int\limits_{3\pi/4}^{5\pi/4} \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x} + \int\limits_{5\pi/4}^{7\pi/4} \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x} + \int\limits_{7\pi/4}^{2\pi} \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}.$$

Применяя к каждому из них формулу Ньютона – Лейбница, находим:

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\sqrt{2}}\right)\Bigg|_0^{\pi/4} +$$

$$+ \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\sqrt{2}}\right)\Bigg|_{\pi/4}^{3\pi/4} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\sqrt{2}}\right)\Bigg|_{3\pi/4}^{5\pi/4} +$$

$$+ \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\sqrt{2}}\right)\Bigg|_{5\pi/4}^{7\pi/4} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\sqrt{2}}\right)\Bigg|_{7\pi/4}^{2\pi} =$$

$$= \frac{\pi}{2\sqrt{2}} + \frac{\pi}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \frac{4\pi}{\sqrt{2}} = 2\pi\sqrt{2}.$$

2277. $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2} \sin x \sin 2x \sin 3x \, dx.$

Так как

$$\sin x \sin 2x \sin 3x = \frac{1}{2}(\cos x - \cos 3x) \sin 3x =$$

$$= \frac{1}{2} \sin 3x \cos x - \frac{1}{2} \sin 3x \cos 3x = \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{4} \sin 4x - \frac{1}{4} \sin 6x,$$

то

$$\int\limits_0^{\pi/2} \sin x \sin 2x \sin 3x\, dx = \frac{1}{4} \int\limits_0^{\pi/2} (\sin 2x + \sin 4x - \sin 6x) dx =$$

$$= \left(-\frac{1}{8} \cos 2x - \frac{1}{16} \cos 4x + \frac{1}{24} \cos 6x \right) \Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{1}{6}.$$

2278. $\int\limits_0^{\pi} (x \sin x)^2 dx.$

$$\int\limits_0^{\pi} (x \sin x)^2 dx = \frac{1}{2} \int\limits_0^{\pi} x^2 (1 - \cos 2x) dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_0^{\pi} x^2 dx - \frac{1}{2} \int\limits_0^{\pi} x^2 \cos 2x\, dx =$$

$$= \frac{x^3}{6} \Bigg|_0^{\pi} - \frac{1}{2} \int\limits_0^{\pi} x^2 \cos 2x\, dx = \frac{\pi^3}{6} - \frac{1}{2} \int\limits_0^{\pi} x^2 \cos 2x\, dx.$$

Согласно решению задачи 2067

$$\int x^2 \cos 2x\, dx = \frac{1}{2} x^2 \sin 2x + \frac{1}{2} x \cos 2x - \frac{1}{4} \sin 2x + C,$$

поэтому

$$\int\limits_0^{\pi} x^2 \cos 2x\, dx = \left(\frac{1}{2} x^2 \sin 2x + \frac{1}{2} x \cos 2x - \frac{1}{4} \sin 2x \right) \Bigg|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}.$$

Отсюда находим:

$$\int\limits_0^{\pi} (x \sin x)^2 dx = \frac{\pi^3}{6} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^3}{6} - \frac{\pi}{4}.$$

2279. $\int\limits_0^{\pi} e^x \cos^2 x\, dx.$

$$\int\limits_0^{\pi} e^x \cos^2 x\, dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi} e^x(1+\cos 2x)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi} e^x dx + \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi} e^x \cos 2x\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\, e^x\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi} e^x \cos 2x\, dx = \frac{1}{2}\,(e^{\pi}-1) + \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi} e^x \cos 2x\, dx.$$

Согласно решению задачи 1828

$$\int e^x \cos 2x\, dx = \frac{\cos 2x + 2\sin 2x}{5}\, e^x + C,$$

следовательно,

$$\int\limits_0^{\pi} e^x \cos 2x\, dx = \frac{\cos 2x + 2\sin 2x}{5}\, e^x\Big|_0^{\pi} = \frac{1}{5}(e^{\pi}-1).$$

Таким образом,

$$\int\limits_0^{\pi} e^x \cos^2 x\, dx = \frac{1}{2}\,(e^{\pi}-1) + \frac{1}{10}(e^{\pi}-1) = \frac{3}{5}\,(e^{\pi}-1)\,.$$

2280. $\int\limits_0^{\ln 2} \operatorname{sh}^4 x\, dx.$

Так как

$$\operatorname{sh}^4 x = \left(\frac{\operatorname{ch} 2x - 1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(\operatorname{ch}^2 2x - 2\operatorname{ch} 2x + 1) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{\operatorname{ch} 4x + 1}{2} - 2\operatorname{ch} 2x + 1\right) = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\operatorname{ch} 2x + \frac{1}{8}\operatorname{ch} 4x,$$

то

$$\int\limits_0^{\ln 2} \operatorname{sh}^4 x\, dx = \int\limits_0^{\ln 2} \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{2}\operatorname{ch} 2x + \frac{1}{8}\operatorname{ch} 4x\right) dx =$$

$$= \left(\frac{3}{8}\, x - \frac{1}{4}\operatorname{sh} 2x + \frac{1}{32}\operatorname{sh} 4x\right)\Bigg|_0^{\ln 2} = \frac{3}{8}\ln 2 - \frac{225}{1024}.$$

С помощью формул понижения вычислить интегралы, зависящие от параметра n, принимающего целые положительные значения:

2281. $I_n = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^n x\, dx.$

Согласно решению задачи 2011, а) из [7]:

$$\int \sin^n x\, dx = -\frac{\cos x \sin^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x\, dx.$$

Так как при $n \geqslant 2$

$$\frac{\cos x \sin^{n-1} x}{n}\Bigg|_0^{\pi/2} = 0,$$

то

$$I_n = \frac{n-1}{n}\, I_{n-2} \quad (n \geqslant 2). \tag{3.17}$$

Далее вычисляем

$$I_0 = \int\limits_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{2},$$

$$I_1 = \int\limits_0^{\pi/2} \sin x\, dx = -\cos x\Bigg|_0^{\pi/2} = 1$$

и из рекуррентного соотношения (3.17) находим:

$$I_n = \begin{cases} \dfrac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \cdot \dfrac{\pi}{2}, & n = 2k; \\ \dfrac{(2k)!!}{(2k+1)!!}, & n = 2k+1. \end{cases}$$

2282. $I_n = \int\limits_0^{\pi/2} \cos^n x\, dx.$

Согласно решению задачи 2011, б) из [7]:

$$\int \cos^n x\, dx = \frac{\sin x \cos^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x\, dx.$$

Так как при $n \geqslant 2$

$$\left.\frac{\sin x \cos^{n-1} x}{n}\right|_0^{\pi/2} = 0,$$

то

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \quad (n \geqslant 2). \tag{3.18}$$

Далее вычисляем:

$$I_0 = \int\limits_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{2},$$

$$I_1 = \int\limits_0^{\pi/2} \cos x\, dx = \sin x \Big|_0^{\pi/2} = 1$$

и из рекуррентного соотношения (3.18) находим:

$$I_n = \begin{cases} \dfrac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \cdot \dfrac{\pi}{2}, & n = 2k; \\ \dfrac{(2k)!!}{(2k+1)!!}, & n = 2k+1. \end{cases}$$

2283. $I_n = \int\limits_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^{2n} x\, dx.$

После преобразований получаем

$$I_n = \int\limits_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^{2n} x\, dx = \int\limits_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^{2n-2} x \cdot \operatorname{tg}^2 x\, dx =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^{2n-2} x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^{2n-2} x \frac{dx}{\cos^2 x} - \int\limits_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^{2n-2} x\, dx.$$

Полагая $t = \operatorname{tg} x$, находим

$$\int\limits_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^{2n-2} x \frac{dx}{\cos^2 x} = \int\limits_0^1 t^{2n-2} x\, dt = \left. \frac{t^{2n-1}}{2n-1} \right|_0^1 = \frac{1}{2n-1}.$$

Следовательно,

$$I_n = \frac{1}{2n-1} - I_{n-1}. \tag{3.19}$$

Так как

$$I_0 = \int\limits_0^{\pi/4} dx = \frac{\pi}{4},$$

то из рекуррентного соотношения (3.19) находим

$$I_n = (-1)^n \left[\frac{\pi}{4} - \left(1 - \frac{1}{3} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \right) \right].$$

2284. $I_n = \int\limits_0^1 (1 - x^2)^n\, dx.$

После тождественных преобразований и интегрирования по частям получаем уравнение для искомого интеграла:

$$I_n = \int\limits_0^1 (1-x^2)^n\,dx = \int\limits_0^1 (1-x^2)^{n-1}(1-x^2)\,dx = \int\limits_0^1 (1-x^2)^{n-1}\,dx -$$

$$= \int\limits_0^1 (1-x^2)^{n-1}x^2\,dx = I_{n-1} + \frac{1}{2n}\int\limits_0^1 x\,d\left((1-x^2)^n\right) = I_{n-1} +$$

$$+ \frac{1}{2n}\,x(1-x^2)^n\Big|_0^1 - \frac{1}{2n}\int\limits_0^1 (1-x^2)^n\,dx = I_{n-1} - \frac{1}{2n}\,I_n.$$

Решая уравнение относительно I_n получаем рекуррентное соотношение

$$I_n = \frac{2n}{2n+1}\,I_{n-1}. \tag{3.20}$$

Так как

$$I_0 = \int\limits_0^1 dx = 1,$$

то последовательно используя рекуррентное соотношение (3.20) n раз, получаем

$$I_n = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}.$$

Данное выражение можно преобразовать. Умножая числитель и знаменатель на $(2n)!!$ и упрощая, находим:

$$I_n = \frac{[(2n)!!]^2}{(2n+1)!!(2n)!!} =$$

$$= \frac{[2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot (2n)]^2}{[3\cdot 5\cdot 7\cdot \ldots \cdot (2n+1)][2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot (2n)]} =$$

$$= \frac{[(2\cdot 1)(2\cdot 2)(2\cdot 3)\cdot\ldots\cdot(2\cdot n)]^2}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot\ldots\cdot(2n)\cdot(2n+1)} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

В этой форме ответ приведен в задачнике Б.П. Демидовича.

2285. $I_n = \int\limits_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Замена $x = \sin t$ (точнее $t = \arcsin x$) дает

$$I_n = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^n t\, dt.$$

Полученный интеграл вычислен в задаче 2281. Подставляя значение этого интеграла получаем окончательный ответ:

$$I_n = \begin{cases} \dfrac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & n = 2k; \\ \dfrac{(2k)!!}{(2k+1)!!}, & n = 2k+1. \end{cases}$$

2286. $I_n = \int\limits_0^1 x^m (\ln x)^n\, dx$.

Интегрируя по частям, находим

$$I_n = \int\limits_0^1 (\ln x)^n\, d\left(\frac{x^{m+1}}{m+1}\right) = \frac{x^{m+1}}{m+1}(\ln x)^n\Big|_0^1 -$$

$$-\frac{n}{m+1}\int\limits_0^1 x^m (\ln x)^{n-1}\, dx = -\frac{n}{m+1}\, I_{n-1},$$

что дает следующее рекуррентное соотношение

$$I_n = -\frac{n}{m+1}\, I_{n-1}. \tag{3.21}$$

Так как

$$I_0 = \int\limits_0^1 x^m dx = \left.\frac{x^{m+1}}{m+1}\right|_0^1 = \frac{1}{m+1},$$

то из (3.21) получаем

$$I_n = \frac{(-1)^n n!}{(m+1)^n}\, I_0 = \frac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}}.$$

2287. $I_n = \int\limits_0^{\pi/4} \left(\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}\right)^{2n+1} dx.$

Воспользовавшись известными из курса тригонометрии равенствами:

$$\sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right),$$

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right),$$

получаем, что

$$I_n = \int\limits_0^{\pi/4} \left[\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right]^{2n+1} dx.$$

Выполняя в полученном интеграле замену $t = \frac{\pi}{4} - x$, находим

$$I_n = -\int\limits_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^{2n+1} t\, dt.$$

Этой формулой воспользуемся для вывода рекуррентного соотношения. Выполняя тождественные преобразования и делая в одном из получающихся интегралов замену $u = \operatorname{tg} t$, имеем

$$I_n = -\int\limits_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^{2n-1} t \cdot \operatorname{tg}^2 t\, dt = -\int\limits_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^{2n-1} t \left(\frac{1}{\cos^2 t} - 1\right) dt =$$

$$= -\int\limits_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^{2n-1} t \, \frac{dt}{\cos^2 t} + \int\limits_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^{2n-1} t \, dt = -\int\limits_0^1 u^{2n-1} du - I_{n-1} =$$

$$= -\left.\frac{u^{2n}}{2n}\right|_0^1 - I_{n-1} = -\frac{1}{2n} - I_{n-1}.$$

Таким образом, искомое рекуррентное соотношение имеет следующий вид:

$$I_n = -I_{n-1} - \frac{1}{2n}. \tag{3.22}$$

Интеграл I_0 вычисляется заменой $v = \cos t$:

$$I_0 = -\int\limits_0^{\pi/4} \operatorname{tg} t \, dt = -\int\limits_0^{\pi/4} \frac{\sin t}{\cos t} \, dt = \int\limits_1^{1/\sqrt{2}} \frac{dv}{v} = \ln|v| \Big|_1^{1/\sqrt{2}} = -\ln\sqrt{2}.$$

Применяя рекуррентное соотношение (3.22) n раз и учитывая вычисленное значение интеграла I_0, находим

$$I_n = (-1)^n \left[-\ln\sqrt{2} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n}\right)\right].$$

2288. Пользуясь формулой Эйлера

$$\mathrm{e}^{ix} = \cos x + i \sin x,$$

показать, что

$$\int\limits_0^{2\pi} \mathrm{e}^{inx} \mathrm{e}^{-imx} dx = \begin{cases} 0, & \text{если } m \neq n, \\ 2\pi, & \text{если } m = n \end{cases}$$

(n и m – целые).

Согласно формуле Эйлера

$$\mathrm{e}^{inx} \mathrm{e}^{-imx} = (\cos nx + i \sin nx)(\cos mx - i \sin mx) =$$

$$= (\cos nx \cos mx + \sin nx \sin mx) +$$
$$+ i(\sin nx \cos mx - \cos nx \sin mx) =$$
$$= \cos(n-m)x + i \sin(n-m)x,$$

следовательно,

$$\int\limits_0^{2\pi} \mathrm{e}^{inx} \mathrm{e}^{-imx} dx = \int\limits_0^{2\pi} \cos(n-m)x \, dx + i \int\limits_0^{2\pi} \sin(n-m)x \, dx.$$

Определенные интегралы вычисляем по формуле Ньютона – Лейбница:

$$\int\limits_0^{2\pi} \cos(n-m)x \, dx = \begin{cases} \dfrac{\sin(n-m)x}{n-m} \Bigg|_0^{2\pi}, & m \neq n, \\ x \Big|_0^{2\pi}, & m = n \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ 2\pi, & m = n. \end{cases}$$

$$\int\limits_0^{2\pi} \sin(n-m)x \, dx = \begin{cases} -\dfrac{\cos(n-m)x}{n-m} \Bigg|_0^{2\pi}, & m \neq n, \\ 0 \Big|_0^{2\pi}, & m = n \end{cases} = 0.$$

Отсюда находим

$$\int\limits_0^{2\pi} \mathrm{e}^{inx} \mathrm{e}^{-imx} dx = \begin{cases} 0, & \text{если } m \neq n, \\ 2\pi, & \text{если } m = n. \end{cases}$$

2289. Показать, что

$$\int\limits_a^b \mathrm{e}^{(\alpha+i\beta)x} \, dx = \frac{\mathrm{e}^{b(\alpha+i\beta)} - \mathrm{e}^{a(\alpha+i\beta)}}{\alpha + i\beta}$$

(α и β – постоянные).

Применяя формулу Эйлера, находим

$$\int\limits_a^b \mathrm{e}^{(\alpha+i\beta)x}\,dx = \int\limits_a^b (\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x + i\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x)\,dx =$$

$$= \int\limits_a^b \mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x\,dx + i\int\limits_a^b \mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x\,dx.$$

Согласно решению задач 1828 и 1829 из [7]

$$\int\limits_a^b \mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x\,dx = \frac{\alpha\cos\beta x + \beta\sin\beta x}{\alpha^2+\beta^2}\,\mathrm{e}^{\alpha x}\Big|_a^b,$$

$$\int\limits_a^b \mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x\,dx = \frac{\alpha\sin\beta x - \beta\cos\beta x}{\alpha^2+\beta^2}\,\mathrm{e}^{\alpha x}\Big|_a^b.$$

Таким образом,

$$\int\limits_a^b \mathrm{e}^{(\alpha+i\beta)x}\,dx =$$

$$= \frac{(\alpha\cos\beta x + \beta\sin\beta x) + i(\alpha\sin\beta x - \beta\cos\beta x)}{\alpha^2+\beta^2}\,\mathrm{e}^{\alpha x}\Big|_a^b. \qquad (3.23)$$

С другой стороны, применяя формулу Эйлера и выполняя деление комплексных чисел, получаем:

$$\frac{\mathrm{e}^{(\alpha+i\beta)x}}{\alpha+i\beta} = \frac{cos\beta x + i\sin\beta x}{\alpha+i\beta}\,\mathrm{e}^{\alpha x} =$$

$$= \frac{(cos\beta x + i\sin\beta x)(\alpha - i\beta)}{\alpha^2+\beta^2}\,\mathrm{e}^{\alpha x} =$$

$$= \frac{(\alpha\cos\beta x + \beta\sin\beta x) + i(\alpha\sin\beta x - \beta\cos\beta x)}{\alpha^2+\beta^2}\,\mathrm{e}^{\alpha x}. \qquad (3.24)$$

Из равенств (3.23) и (3.24) следует, что

$$\int\limits_a^b \mathrm{e}^{(\alpha+i\beta)x}\,dx = \left.\frac{\mathrm{e}^{(\alpha+i\beta)x}}{\alpha+i\beta}\right|_a^b = \frac{\mathrm{e}^{b(\alpha+i\beta)} - \mathrm{e}^{a(\alpha+i\beta)}}{\alpha+i\beta}.$$

Пользуясь формулами Эйлера:

$$\cos x = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{ix} + \mathrm{e}^{-ix}\right), \quad \sin x = \frac{1}{2i}\left(\mathrm{e}^{ix} - \mathrm{e}^{-ix}\right),$$

вычислить интегралы (m и n – целые положительные числа):

2290. $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{2m} x\cos^{2n} x\,dx.$

Проще всего данный интеграл можно вычислить с помощью метода рекуррентных соотношений. Пусть

$$I(m,n) = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^{2m} x\cos^{2n} x\,dx.$$

Интегируя по частям, получаем:

$$I(m,n) = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^{2m} x\cos^{2n-1} x\,d(\sin x) = \sin^{2m+1} x\cos^{2n-1} x\Big|_0^{\pi/2} -$$

$$- \int\limits_0^{\pi/2} \left[2m\sin^{2m} x\cos^{2n} x - (2n-1)\sin^{2m+2} x\cos^{2n-2} x\right] dx =$$

$$= -2m\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{2m} x\cos^{2n} x\,dx + (2n-1)\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{2m+2} x\cos^{2n-2} x\,dx =$$

$$= -2mI(m,n) + (2n-1)I(m+1,n-1).$$

Решая полученное уравнение относительно $I(m,n)$, получаем искомое рекуррентное соотношение:

$$I(m,n) = \frac{2n-1}{2m+1}\, I(m+1,n-1). \tag{3.25}$$

Применяя соотношение (3.25) n раз, приходим к равенству

$$I(m,n) = \frac{(2n-1)!!}{(2m+1)(2m+3\ldots(2m+2n-1))}\, I(m+n,0) =$$

$$= \frac{(2n-1)!!(2m-1)!!}{(2m+2n-1)!!}\, I(m+n,0). \tag{3.26}$$

Согласно решению задачи 2281

$$I(m+n,0) = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^{2m+2n} x\, dx = \frac{(2m+2n-1)!!}{(2m+2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2}$$

и соотношение (3.26) дает

$$I(m,n) = \frac{(2n-1)!!(2m-1)!!}{(2m+2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Полученную формулу можно преобразовать следующим образом. Так как при любом натуральном k

$$(2k)!! = (2\cdot 1)(2\cdot 2)(2\cdot 3)\ldots(2\cdot k) = 2^k k!\,,$$

$$(2k-1)!! = 1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2k-1) =$$

$$= \frac{[1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2k-1)][2\cdot 4\cdot \ldots \cdot (2k)]}{(2k)!!} =$$

$$= \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot \ldots \cdot (2k-1)\cdot (2k)}{2^k k!} = \frac{(2k)!}{2^k k!}\,,$$

то

$$I(m,n) = \frac{(2n)!(2m)!}{(2^n n!)(2^m m!)2^{m+n}(m+n)!} \cdot \frac{\pi}{2} =$$

$$= \frac{\pi(2n)!(2m)!}{2^{2n+2m+1}(m+n)!m!n!}. \qquad (3.27)$$

Замечание. Использование формул Эйлера, как можно видеть, усложняет решение задачи. Сначала необходимо свести задачу к вычислению интеграла по отрезку $[0; 2\pi]$. Выполняя подстановку $x = \pi - t$, находим

$$\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{2m} x \cos^{2n} x\, dx = \int\limits_{\pi/2}^{\pi} \sin^{2m} t \cos^{2n} t\, dt = \int\limits_{\pi/2}^{\pi} \sin^{2m} x \cos^{2n} x\, dx,$$

следовательно, в силу аддитивности интеграла,

$$\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{2m} x \cos^{2n} x\, dx = \frac{1}{2} \int\limits_0^{\pi} \sin^{2m} x \cos^{2n} x\, dx.$$

В силу π-периодичности подынтегральной функции и формулы (3.13) задачи 2265

$$\int\limits_0^{\pi} \sin^{2m} x \cos^{2n} x\, dx = \int\limits_{\pi}^{2\pi} \sin^{2m} x \cos^{2n} x\, dx$$

и, таким образом,

$$I(m,n) = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^{2m} x \cos^{2n} x\, dx = \frac{1}{4} \int\limits_0^{2\pi} \sin^{2m} x \cos^{2n} x\, dx.$$

Применяя формулы Эйлера и формулу бинома Ньютона, получаем:

$$\int\limits_0^{2\pi} \sin^{2m} x \cos^{2n} x\, dx = \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{\mathrm{e}^{ix} - \mathrm{e}^{-ix}}{2i}\right)^{2m} \left(\frac{\mathrm{e}^{ix} + \mathrm{e}^{-ix}}{2}\right)^{2n} dx =$$

$$= \frac{(-1)^m}{2^{2m+2n}} \int\limits_0^{2\pi} \left(\sum_{k=0}^{2m} (-1)^k C_{2m}^k \mathrm{e}^{ikx} \mathrm{e}^{-i(2m-k)x} \right) \times$$

$$\times \left(\sum_{s=0}^{2n} C_{2n}^s \mathrm{e}^{isx} \mathrm{e}^{-i(2n-s)x} \right) dx =$$

$$= \frac{(-1)^m}{2^{2m+2n}} \sum_{k=0}^{2m} \sum_{s=0}^{2n} (-1)^k C_{2m}^k C_{2n}^s \int\limits_0^{2\pi} \mathrm{e}^{i(2k+2s)x} \mathrm{e}^{-i(2m+2n)x} dx.$$

Согласно решению задачи 2288

$$\int\limits_0^{2\pi} \mathrm{e}^{i(2k+2s)x} \mathrm{e}^{-i(2m+2n)x} dx = \begin{cases} 0, & \text{если } k+s \neq m+n, \\ 2\pi, & \text{если } k+s = m+n. \end{cases}$$

Таким образом, во внутренней сумме, от нуля может быть отлично только слагаемое с индексом $s = m + n - k$, поэтому

$$\int\limits_0^{2\pi} \sin^{2m} x \cos^{2n} x \, dx = \frac{\pi(-1)^m}{2^{2m+2n-1}} \sum_{k=0}^{2m} (-1)^k C_{2m}^k C_{2n}^{m+n-k}$$

(наличие множителя C_{2n}^{m+n-k} гарантирует, что при $k > m + n$ слагаемое, отвечающее отрицательному индексу s, отсутствует в сумме, так как по определению биномиальных коэффициентов величина $C_n^k = 0$ при $k < 0$). Отсюда следует, что

$$I(m,n) = \frac{\pi(-1)^m}{2^{2m+2n+1}} \sum_{k=0}^{2m} (-1)^k C_{2m}^k C_{2n}^{m+n-k}. \tag{3.28}$$

В справочнике ([9], с. 617, ф-ла (20)) приведено тождество, которое после замены n на m и a на $m + n$ принимает вид:

$$\sum_{k=0}^{2m} (-1)^k C_{2m}^k C_{2n}^{m+n-k} = (-1)^m \frac{C_{m+n}^n C_{2m+2n}^{m+n}}{C_{2m+2n}^{2n}} =$$

$$= \frac{(-1)^m (2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!}. \tag{3.29}$$

Если подставить (3.29) в (3.28), получим формулу (3.27). Впрочем этот факт можно представить по другому: из сравнения формул (3.27) и (3.28) следует тождество (3.29) для биномиальных коэффициентов.

2291. $\displaystyle\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin nx}{\sin x}\,dx.$

Так как подынтегральная функция четна, то согласно задаче 2258

$$\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin nx}{\sin x}\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin nx}{\sin x}\,dx.$$

С другой стороны, эта же функция 2π-периодична и в соответствие с решением задачи 2265

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin nx}{\sin x}\,dx = \int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin nx}{\sin x}\,dx,$$

следовательно, искомый интеграл

$$\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin nx}{\sin x}\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin nx}{\sin x}\,dx.$$

Применяя формулу Эйлера, находим:

$$\frac{\sin nx}{\sin x} = \frac{\mathrm{e}^{inx} - \mathrm{e}^{-inx}}{\mathrm{e}^{ix} - \mathrm{e}^{-ix}}. \tag{3.30}$$

Суммируя геометрическую прогрессию с первым членом a^{n-1} и знаменателем $q = b/a$, приходим к равенству

$$\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}\, b^k = \frac{a^n - b^n}{a - b}.$$

Полагая в этом равенстве $a = \mathrm{e}^{ix}$, $b = \mathrm{e}^{-ix}$ и учитывая (3.30), получаем

$$\frac{\sin nx}{\sin x} = \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{i(n-1-2k)x}$$

и после интегрирования, имеем

$$\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin nx}{\sin x}\,dx = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\int\limits_0^{2\pi} \mathrm{e}^{i(n-1-2k)x}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\int\limits_0^{2\pi} \mathrm{e}^{inx}\mathrm{e}^{-i(2k+1)x}\,dx. \qquad (3.31)$$

Если n четное число, то при любом целом k величина $2k+1 \neq \neq n$ и согласно решению задачи 2288 все интегралы, стоящие под знаком суммы в правой части равенства (3.31), равны нулю.

Если же n нечетно, то согласно решению той же задачи равны нулю все интегралы кроме одного, отвечающего индексу $k = = (n-1)/2$, причем этот интеграл равен 2π. Отсюда следует, что

$$\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin nx}{\sin x}\,dx = \begin{cases} 0, & \text{если } n \text{ четное}, \\ \pi, & \text{если } n \text{ нечетное}. \end{cases}$$

2292. $\displaystyle\int\limits_0^{\pi} \frac{\cos(2n+1)x}{\cos x}\,dx.$

Так как подынтегральная функция четна, то согласно задаче 2258

$$\int\limits_0^{\pi} \frac{\cos(2n+1)x}{\cos x}\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(2n+1)x}{\cos x}\,dx.$$

С другой стороны, эта же функция 2π-периодична и в соответствие с решением задачи 2265

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(2n+1)x}{\cos x}\,dx = \int\limits_{0}^{2\pi} \frac{\cos(2n+1)x}{\cos x}\,dx,$$

следовательно, искомый интеграл

$$\int\limits_{0}^{\pi} \frac{\cos(2n+1)x}{\cos x}\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{\cos(2n+1)x}{\cos x}\,dx.$$

Применяя формулу Эйлера, находим:

$$\frac{\cos(2n+1)x}{\cos x} = \frac{\mathrm{e}^{i(2n+1)x} + \mathrm{e}^{-i(2n+1)x}}{\mathrm{e}^{ix} + \mathrm{e}^{-ix}}. \tag{3.32}$$

Суммируя геометрическую прогрессию с первым членом a^{2n} и знаменателем $q = -b/a$, приходим к равенству

$$\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k a^{2n-k}\, b^k = \frac{a^{2n+1} + b^{2n+1}}{a+b}.$$

Полагая в этом равенстве $a = \mathrm{e}^{ix}$, $b = \mathrm{e}^{-ix}$ и учитывая (3.32), получаем

$$\frac{\cos(2n+1)x}{\cos x} = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \mathrm{e}^{i(2n-2k)x}$$

и после интегрирования, имеем

$$\int\limits_{0}^{\pi} \frac{\cos(2n+1)x}{\cos x}\,dx = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \int\limits_{0}^{2\pi} \mathrm{e}^{i(2n-2k)x}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \int\limits_{0}^{2\pi} \mathrm{e}^{i(2n)x}\mathrm{e}^{-i(2k)x}\,dx. \tag{3.33}$$

Согласно задаче 2288 все интегралы, стоящие под знаком суммы в правой части равенства (3.33), кроме интеграла с индексом $k = n$, равны нулю, а оставшийся интеграл равен 2π. Следовательно,

$$\int\limits_0^\pi \frac{\cos(2n+1)x}{\cos x}\,dx = (-1)^n\pi.$$

2293. $\displaystyle\int\limits_0^\pi \cos^n x \cos nx\,dx.$

С помощью формулы Эйлера и бинома Ньютона находим:

$$\cos^n x \cos nx = \left(\frac{\mathrm{e}^{ix}+\mathrm{e}^{-ix}}{2}\right)^n \left(\frac{\mathrm{e}^{inx}+\mathrm{e}^{-inx}}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2^{n+1}}\left(\sum_{k=0}^n C_n^k \mathrm{e}^{i(n-k)x}\mathrm{e}^{-ikx}\right)\left(\mathrm{e}^{inx}+\mathrm{e}^{-inx}\right) =$$

$$= \frac{1}{2^{n+1}}\left(\sum_{k=0}^n C_n^k \mathrm{e}^{i(n-2k)x}\right)\left(\mathrm{e}^{inx}+\mathrm{e}^{-inx}\right) =$$

$$= \frac{1}{2^{n+1}}\left(\sum_{k=0}^n C_n^k \mathrm{e}^{i(2n-2k)x} + \sum_{k=0}^n C_n^k \mathrm{e}^{-2ikx}\right).$$

Заменяя в первой сумме индекс суммирования k на $n-k$ и учитывая, что $C_n^{n-k} = C_n^k$, получаем:

$$\cos^n x \cos nx = \frac{1}{2^{n+1}}\left(\sum_{k=0}^n C_n^{n-k}\mathrm{e}^{2ikx} + \sum_{k=0}^n C_n^k \mathrm{e}^{-2ikx}\right) =$$

$$= \frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=0}^n C_n^k\left(\mathrm{e}^{2ikx}+\mathrm{e}^{-2ikx}\right).$$

Так как

$$\mathrm{e}^{2ikx}+\mathrm{e}^{-2ikx} = 2\cos 2kx,$$

то, окончательно, находим:

$$\cos^n x \cos nx = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cos 2kx. \tag{3.34}$$

Интегрируя соотношение (3.34), получаем:

$$\int_0^\pi \cos^n x \cos nx \, dx = \frac{1}{2^n} \left(\int_0^\pi dx + \sum_{k=1}^{n} C_n^k \int_0^\pi \cos 2kx \, dx \right) =$$

$$= \frac{1}{2^n} \left(\pi + \sum_{k=1}^{n} C_n^k \left. \frac{\sin 2kx}{2k} \right|_0^\pi \right) = \frac{\pi}{2^n}.$$

2294. $\int_0^\pi \sin^n x \sin nx \, dx.$

С помощью формулы Эйлера и бинома Ньютона находим

$$\sin^n x \sin nx = \left(\frac{\mathrm{e}^{ix} - \mathrm{e}^{-ix}}{2i} \right)^n \left(\frac{\mathrm{e}^{inx} - \mathrm{e}^{-inx}}{2i} \right) =$$

$$= \frac{1}{(2i)^{n+1}} \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k \mathrm{e}^{i(n-k)x} \mathrm{e}^{-ikx} \right) \left(\mathrm{e}^{inx} - \mathrm{e}^{-inx} \right) =$$

$$= \frac{1}{(2i)^{n+1}} \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k \mathrm{e}^{i(n-2k)x} \right) \left(\mathrm{e}^{inx} - \mathrm{e}^{-inx} \right) =$$

$$= \frac{1}{(2i)^{n+1}} \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k \mathrm{e}^{i(2n-2k)x} - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k \mathrm{e}^{-2ikx} \right).$$

Заменяя в первой сумме индекс суммирования k на $n-k$ и учитывая, что $C_n^{n-k} = C_n^k$, получаем

$$\sin^n x \sin nx =$$

$$= \frac{1}{(2i)^{n+1}} \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_n^{n-k} \mathrm{e}^{2ikx} - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k \mathrm{e}^{-2ikx} \right) =$$

$$= \frac{1}{(2i)^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k \left((-1)^n \mathrm{e}^{2ikx} - \mathrm{e}^{-2ikx} \right).$$

1. Пусть n четно, тогда $(-1)^n = 1$, учитывая, что

$$\mathrm{e}^{2ikx} - \mathrm{e}^{-2ikx} = 2i \sin 2kx,$$

а слагаемое с индексом $k = 0$ равно нулю, получаем

$$\sin^n x \sin nx = \frac{1}{(2i)^n} \sum_{k=1}^{n} (-1)^k C_n^k \sin 2kx. \tag{3.35}$$

Интегрируя соотношение (3.35), получаем

$$\int_0^\pi \sin^n x \sin nx \, dx = \frac{1}{(2i)^n} \sum_{k=1}^{n} (-1)^k C_n^k \left(-\frac{\cos 2kx}{2k} \right) \Bigg|_0^\pi = 0.$$

2. Пусть n четно и $n = 2m - 1$, тогда $(-1)^n = -1$. Учитывая равенство

$$\mathrm{e}^{2ikx} + \mathrm{e}^{-2ikx} = 2 \cos 2kx,$$

получаем

$$\sin^n x \sin nx = \frac{(-1)^{m+1}}{2^n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k \cos 2kx. \tag{3.36}$$

Интегрируя (3.36), находим

$$\int_0^\pi \sin^n x \sin nx \, dx = \frac{(-1)^{m+1}}{2^n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k \int_0^\pi \cos 2kx \, dx =$$

$$= \frac{(-1)^{m+1}}{2^n} \left(\int_0^\pi dx + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k C_n^k \int_0^\pi \cos 2kx \, dx \right) =$$

$$= \frac{(-1)^{m+1}}{2^n}\left(\pi + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k C_n^k \ \frac{\sin 2kx}{2k}\Big|_0^{\pi}\right) = \frac{(-1)^{m+1}\pi}{2^n}.$$

Таким образом получаем следующую формулу:

$$\int\limits_0^{\pi} \sin^n x \sin nx\, dx = \begin{cases} 0\,, & n = 2m, \\ \dfrac{(-1)^{m+1}\,\pi}{2^n}\,, & n = 2m-1. \end{cases}$$

Нетрудно убедиться, что эту формулу можно записать более компактно:

$$\int\limits_0^{\pi} \sin^n x \sin nx\, dx = \frac{\pi}{2^n}\ \sin\frac{\pi n}{2}.$$

Найти интегралы (n – натуральное число):

2295. $\int\limits_0^{\pi} \sin^{n-1} x \cos(n+1)x\, dx.$

По формуле косинуса суммы

$$\int\limits_0^{\pi} \sin^{n-1} x \cos(n+1)x\, dx =$$

$$= \int\limits_0^{\pi} \sin^{n-1} x(\cos nx \cos x - \sin nx \sin x)dx =$$

$$= \int\limits_0^{\pi} \sin^{n-1} x \cos nx \cos x\, dx - \int\limits_0^{\pi} \sin^n x \sin nx\, dx. \qquad (3.37)$$

Интегрируя по частям, получаем:

$$\int\limits_0^{\pi} \sin^{n-1} x \cos nx \cos x\, dx = \int\limits_0^{\pi} \cos nx\, d\left(\frac{\sin^n x}{n}\right) =$$

$$= \frac{\cos nx \sin^n x}{n}\Bigg|_0^\pi + \int\limits_0^\pi \sin^n x \sin nx\, dx =$$

$$= \int\limits_0^\pi \sin^n x \sin nx\, dx. \qquad (3.38)$$

Подставляя (3.38) в (3.37), получаем ответ:

$$\int\limits_0^\pi \sin^{n-1} x \cos(n+1)x\, dx = 0.$$

2296. $\int\limits_0^\pi \cos^{n-1} x \sin(n+1)x\, dx.$

По формуле синуса суммы

$$\int\limits_0^\pi \cos^{n-1} x \sin(n+1)x\, dx =$$

$$= \int\limits_0^\pi \cos^{n-1} x(\sin nx \cos x + \cos nx \sin x)dx =$$

$$= \int\limits_0^\pi \cos^n x \sin nx\, dx + \int\limits_0^\pi \cos^{n-1} x \cos nx \sin x\, dx. \qquad (3.39)$$

Интегрируя по частям, получаем:

$$\int\limits_0^\pi \cos^{n-1} x \cos nx \sin x\, dx = -\int\limits_0^\pi \cos nx\, d\left(\frac{\cos^n x}{n}\right) =$$

$$= -\frac{\cos nx \cos^n x}{n}\Bigg|_0^\pi - \int\limits_0^\pi \cos^n x \sin nx\, dx =$$

$$= -\int\limits_0^{\pi} \cos^n x \sin nx \, dx. \qquad (3.40)$$

Подставляя (3.40) в (3.39), получаем ответ:

$$\int\limits_0^{\pi} \cos^{n-1} x \sin(n+1)x \, dx = 0.$$

2297. $\int\limits_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-ax} \cos^{2n} x \, dx.$

Используя формулу Эйлера и бином Ньютона, находим

$$\cos^{2n} x = \left(\frac{\mathrm{e}^{ix} + \mathrm{e}^{-ix}}{2}\right)^{2n} = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k \mathrm{e}^{i(2n-k)x} \mathrm{e}^{-ikx} =$$

$$= \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k \mathrm{e}^{i(2n-2k)x} =$$

$$= \frac{1}{2^{2n}} \left(\sum_{k=0}^{n} C_{2n}^k \mathrm{e}^{i(2n-2k)x} + \sum_{k=n+1}^{2n} C_{2n}^k \mathrm{e}^{i(2n-2k)x} \right).$$

Преобразуем каждую из полученных двух сумм. В первой сумме заменим индекс суммирования k на $n-k$, получим

$$\sum_{k=0}^{n} C_{2n}^k \mathrm{e}^{i(2n-2k)x} = \sum_{k=0}^{n} C_{2n}^{n-k} \mathrm{e}^{2ikx}.$$

Во второй сумме индекс k заменим на $k-n$. Учитывая свойство симметрии биномиальных коэффициентов $C_{2n}^{k+n} = C_{2n}^{2n-(k+n)} = C_{2n}^{n-k}$, имеем:

$$\sum_{k=n+1}^{2n} C_{2n}^k \mathrm{e}^{i(2n-2k)x} = \sum_{k=1}^{n} C_{2n}^{k+n} \mathrm{e}^{-2ikx} = \sum_{k=1}^{n} C_{2n}^{n-k} \mathrm{e}^{-2ikx}.$$

Таким образом,

$$\cos^{2n} x = \frac{1}{2^{2n}} \left(\sum_{k=0}^{n} C_{2n}^{n-k} \mathrm{e}^{2ikx} + \sum_{k=1}^{n} C_{2n}^{n-k} \mathrm{e}^{-2ikx} \right) =$$

$$= \frac{1}{2^{2n}} \left(C_{2n}^{n} + \sum_{k=1}^{n} C_{2n}^{n-k} \left(\mathrm{e}^{2ikx} + \mathrm{e}^{-2ikx} \right) \right).$$

Учитывая равенство

$$\mathrm{e}^{2ikx} + \mathrm{e}^{-2ikx} = 2\cos 2kx,$$

получаем, окончательно, следующую формулу:

$$\cos^{2n} x = \frac{1}{2^{2n}} \left(C_{2n}^{n} + 2\sum_{k=1}^{n} C_{2n}^{n-k} \cos 2kx \right). \tag{3.41}$$

Умножая (3.41) на e^{-ax} и интегрируя, находим

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-ax} \cos^{2n} x \, dx =$$

$$= \frac{1}{2^{2n}} \left(C_{2n}^{n} \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-ax} \, dx + 2\sum_{k=1}^{n} C_{2n}^{n-k} \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-ax} \cos 2kx \, dx \right).$$

Первый из полученных в правой части интегралов – табличный:

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-ax} \, dx = -\left. \frac{\mathrm{e}^{-ax}}{a} \right|_0^{2\pi} = \frac{1 - \mathrm{e}^{-2a\pi}}{a}.$$

Для остальных интегралов первообразная вычислена в задаче 1828 из [7]. Используя решение этой задачи, находим

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-ax} \cos 2kx \, dx =$$

$$= \frac{-a\cos 2kx + 2k\sin 2kx}{a^2+4k^2}\,\mathrm{e}^{-ax}\Big|_0^{2\pi} = \frac{a\left(1-\mathrm{e}^{-2a\pi}\right)}{a^2+4k^2}.$$

Отсюда следует, что

$$\int\limits_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-ax}\cos^{2n}x\,dx = \frac{1-\mathrm{e}^{-2a\pi}}{2^{2n}a}\left(C_{2n}^n + 2\sum_{k=1}^{n} C_{2n}^{n-k}\frac{a^2}{a^2+4k^2}\right).$$

Полученный ответ можно немного преобразовать. Для того, чтобы получить ответ, который приведен в задачнике Б.П. Демидовича, нужно заменить индекс суммирования k на $n-k$. Окончательно получаем:

$$\int\limits_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-ax}\cos^{2n}x\,dx =$$

$$= \frac{1-\mathrm{e}^{-2a\pi}}{2^{2n}a}\left(C_{2n}^n + 2\sum_{k=1}^{n} C_{2n}^{k}\frac{a^2}{a^2+4(n-k)^2}\right).$$

2298. $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2} \ln\cos x\cdot\cos 2nx\,dx.$

Интегрируя по частям, получаем

$$I_n = \int\limits_0^{\pi/2} \ln\cos x\cdot\cos 2nx\,dx = \frac{1}{2n}\int\limits_0^{\pi/2} \ln\cos x\,d(\sin 2nx) =$$

$$= \frac{(\ln\cos x)\cdot\sin 2nx}{2n}\Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{2n}\int\limits_0^{\pi/2} \sin 2nx\ \operatorname{tg} x\,dx =$$

$$= \frac{1}{2n}\int\limits_0^{\pi/2} \sin 2nx\ \operatorname{tg} x\,dx = \frac{1}{2n}\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sin 2nx\cdot\sin x}{\cos x}\,dx =$$

$$\frac{1}{4n}\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\cos(2n-1)x-\cos(2n+1)x}{\cos x}\,dx=$$

$$=\frac{1}{4n}\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\cos(2n-1)x}{\cos x}\,dx-\frac{1}{4n}\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\cos(2n+1)x}{\cos x}\,dx.$$

Обозначим

$$J_n=\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\cos(2n+1)x}{\cos x}\,dx,$$

тогда искомый интеграл можно записать в следующем виде:

$$I_n=\frac{1}{4n}(J_{n-1}-J_n).$$

Преобразуем выражение для интеграла J_n. Делая замену $t = \pi - x$ и меняя букву t обратно на x, получаем

$$J_n=\int\limits_{\pi/2}^{\pi}\frac{\cos(2n+1)t}{\cos t}\,dt=\int\limits_{\pi/2}^{\pi}\frac{\cos(2n+1)x}{\cos x}\,dx.$$

Отсюда (и из аддитивности интеграла) следует, что

$$J_n=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi}\frac{\cos(2n+1)x}{\cos x}\,dx.$$

Последний интеграл вычислен в задаче 2292. Используя значение этого интеграла, получаем

$$J_n=\frac{(-1)^n\pi}{2}.$$

Подставляя это в выражение для интеграла I_n, находим

$$I_n=\frac{1}{4n}\left(\frac{(-1)^{n-1}\pi}{2}-\frac{(-1)^n\pi}{2}\right)=\frac{(-1)^{n-1}\pi}{4n}.$$

2299. Применяя многократное интегрирование по частям, вычислить интеграл Эйлера:

$$B(m,n)=\int\limits_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx,$$

где m и n – целые положительные числа.

Интегрируя по частям, получаем рекуррентное соотношение

$$B(m,n)=\frac{1}{m}\int\limits_0^1 (1-x)^{n-1}\,d(x^m)=\left.\frac{x^m(1-x)^{n-1}}{m}\right|_0^1+$$

$$+\frac{n-1}{m}\int\limits_0^1 x^m(1-x)^{n-2}\,dx=\frac{n-1}{m}\,B(m+1,n-1).$$

Применяя это соотношение последовательно $n-1$ раз, приходим к равенству

$$B(m,n)=\frac{(n-1)!}{m(m+1)\ldots(m+n-2)}\,B(m+n-1,1).$$

Согласно определению интеграла Эйлера

$$B(m+n-1,1)=\int\limits_0^1 x^{m+n-2}\,dx=\left.\frac{x^{m+n-1}}{m+n-1}\right|_0^1=\frac{1}{m+n-1},$$

следовательно,

$$B(m,n)=\frac{(n-1)!}{m(m+1)\ldots(m+n-2)(m+n-1)}=$$

$$=\frac{(n-1)!(m-1)!}{(m+n-1)!}.$$

2300. Многочлены Лежандра $P_n(x)$ определяются формулой:

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\,\frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2-1)^n\right]\quad (n=0,1,2\ \ldots).$$

Доказать, что

$$\int\limits_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)\,dx = \begin{cases} 0\,, & \text{если } m \neq n, \\ \dfrac{2}{2n+1}\,, & \text{если } m = n. \end{cases}$$

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$w_n(x) = (x^2-1)^n.$$

По формуле разности квадратов $w_n(x) = (x+1)^n(x-1)^n$, поэтому применяя формулу Лейбница для производной произведения, имеем:

$$w_n^{(k)}(x) = \sum_{s=0}^{k} C_k^s \left[(x+1)^n\right]^{(k-s)} \left[(x-1)^n\right]^{(s)}.$$

Если $k < n$, то также $s < n$ и $k - s < n$, поэтому

$$\begin{aligned} &\left[(x+1)^n\right]^{(k-s)} = n(n-1)\ldots(n-(k-s)+1))(x+1)^{n-(k-s)}\,, \\ &\left[(x-1)^n\right]^{(s)} = n(n-1)\ldots(n-s+1))(x+1)^{n-s)}\,. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что при всех $k < n$ значения $w_n^{(s)}(\pm 1) = 0$, т. е.

$$\begin{cases} w_n(-1) = 0\,, w_n'(-1) = 0\,, \ldots\,, w_n^{(n-1)}(-1) = 0\,, \\ w_n(1) = 0\,, w_n'(1) = 0\,, \ldots\,, w_n^{(n-1)}(1) = 0\,. \end{cases} \tag{3.42}$$

Пусть

$$I_n(k,s) = \int\limits_{-1}^{1} x^k w_n^{(s)}(x)\,dx.$$

Предположим, что $k \geqslant 1$ и $1 \leqslant s \leqslant n$. Интегрируя по частям и учитывая (3.42), получаем:

$$I_n(k,s) = \int\limits_{-1}^{1} x^k\,d\left(w_n^{(s-1)}(x)\right) = x^k w_n^{(s-1)}(x)\Big|_{-1}^{1} -$$

$$-k\int\limits_{-1}^{1} x^{k-1} w_n^{(s-1)}(x)\,dx =$$

$$= -k\int\limits_{-1}^{1} x^{k-1} w_n^{(s-1)}(x)\,dx = -kI_n(k-1, s-1).$$

Применяя последовательно k раз полученное рекуррентное соотношение

$$I_n(k,s) = -kI_n(k-1, s-1) \quad (k \geqslant 1\,,\ 1 \leqslant s \leqslant n) \tag{3.43}$$

при $s = n$ и учитывая равенства (3.42), находим

$$I_n(k,n) = (-1)^k k! I_n(0, n-k) = (-1)^k k! \int\limits_{-1}^{1} w_n^{(n-k)}(x)\,dx =$$

$$= (-1)^k k! w_n^{(n-k-1)}(x)\Big|_{-1}^{1} = 0.$$

Следовательно, при $k < n$

$$\int\limits_{-1}^{1} x^k w_n^{(n)}(x)\,dx = 0.$$

Так как $w_n^{(n)}(x) = 2^n n! P_n(x)$, то также

$$\int\limits_{-1}^{1} x^k P_n(x)\,dx = 0 \quad (k < n). \tag{3.44}$$

Пусть, теперь $P_m(x)$ и $P_n(x)$ – два многочлена Лежандра с $m \neq n$, тогда без ограничения общности можно считать, что n обозначает большую из их степеней, т. е. $m < n$. В этом случае

$$P_m(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k$$

и

$$\int\limits_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)\,dx = \sum_{k=0}^{m} a_k \int\limits_{-1}^{1} x^k P_n(x)\,dx = 0,$$

так как вследствие равенства (3.44) равно нулю каждое слагаемое последней суммы ($k \leqslant m < n$).

Осталось вычислить интеграл от квадрата многочлена Лежандра. Для этого сначала вычислим его старший коэффициент. Пусть

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

Так как функция $w_n(x) = x^{2n} + \dots$, то

$$w_n^{(n)}(x) = 2n(2n-1)\dots(n+1)x^n + \dots = \frac{(2n)!}{n!}\,x^n + \dots$$

и

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} w_n^{(n)}(x) = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}\,x^n + \dots\,,$$

следовательно,

$$a_n = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}. \tag{3.45}$$

Переходим к вычислению интеграла. Используя свойство (3.44), получаем:

$$\int\limits_{-1}^{1} P_n^2(x)\,dx = \int\limits_{-1}^{1} P_n(x)P_n(x)\,dx = \int\limits_{-1}^{1} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right) P_n(x)\,dx =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} a_k \int\limits_{-1}^{1} x^k P_n(x)\,dx + a_n \int\limits_{-1}^{1} x^n P_n(x)\,dx = a_n \int\limits_{-1}^{1} x^n P_n(x)\,dx.$$

Так как $P_n(x) = w_n^{(n)}(x)/(2^n n!)$, то

$$\int\limits_{-1}^{1} P_n^2(x)\,dx = \frac{a_n}{2^n n!} \int\limits_{-1}^{1} x^n w_n^{(n)}(x) = \frac{a_n}{2^n n!}\, I_n(n,n).$$

Для вычисления $I_n(n,n)$ воспользуемся рекуррентным соотношением (3.43) при $k = s = n$. Применяя это соотношение последовательно n раз, получаем

$$I_n(n,n) = (-1)^n n! I_n(0,0).$$

Отсюда следует, что

$$\int\limits_{-1}^{1} P_n^2(x)\,dx = \frac{(-1)^n a_n}{2^n}\, I_n(0,0).$$

Интеграл $I_n(0,0)$ сводится к интегралу задачи 2284:

$$I_n(0,0) = \int\limits_{-1}^{1} (x^2-1)^n\,dx = 2\int\limits_{0}^{1} (x^2-1)^n\,dx =$$

$$= 2(-1)^n \int\limits_{0}^{1} (1-x^2)^n\,dx = 2(-1)^n \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{(-1)^n 2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

Таким образом, с учетом формулы (3.45),

$$\int\limits_{-1}^{1} P_n^2(x)\,dx = \frac{(-1)^n a_n}{2^n} \cdot \frac{(-1)^n 2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{a_n 2^{n+1}(n!)^2}{(2n+1)!} =$$

$$= \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} \cdot \frac{2^{n+1}(n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{2(2n)!}{(2n+1)!} = \frac{2}{2n+1}.$$

2301. Пусть функция $f(x)$ собственно интегрируема на $[a;b]$ и $F(x)$ – функция такая, что $F'(x) = f(x)$ всюду в $[a;b]$, за исключением, быть может, конечного числа внутренних точек c_i $(i = 1, \ldots, p)$ и точек a и b, где функция $F(x)$ терпит разрыв 1-го рода (“обобщенная первообразная”). Доказать, что

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx = F(b-0) - F(a+0) - \sum_{i=1}^{p} \left[F(c_i+0) - F(c_i-0)\right].$$

Лемма. Предположим, что функция $f(x)$ интегрируема на $[a;b]$, $F'(x) = f(x)$ во всех точках интервала $(a;b)$ и существуют $F(a+0)$, $F(b-0)$. Тогда

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b-0) - F(a+0). \tag{3.46}$$

Доказательство леммы проведем в два этапа. На первом этапе покажем, что для любых чисел α и β, удовлетворяющих неравенствам $a < \alpha < \beta < b$ выполняется формула Ньютона – Лейбница

$$\int\limits_\alpha^\beta f(x)\,dx = F(\beta) - F(\alpha)$$

(непрерывность $f(x)$ не предполагается). Рассмотрим произвольное разбиение

$$T = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$$

($\alpha = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = \beta$) отрезка $[\alpha;\beta]$ и запишем легко проверяемое тождество

$$\sum_{i=0}^{n-1} [F(x_{i+1}) - F(x_i)] = F(\beta) - F(\alpha). \tag{3.47}$$

Так как функция $F(x)$ дифференцируема в интервале $(a;b)$, то при каждом i $(0 \leqslant i \leqslant n-1)$ она удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа на отрезке $[x_i;x_{i+1}]$, следовательно,

$$F(x_{i+1}) - F(x_i) = F'(\xi_i)(x_{i+1} - x_i),$$

где $\xi_i \in (x_i;x_{i+1})$. Так как $F' = f$, то тождество (3.47) принимает следующий вид:

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) = F(\beta) - F(\alpha).$$

В полученном равенстве слева стоит интегральная сумма функции f на отрезке $[\alpha;\beta]$, поэтому в пределе, когда характеристика разбиения стремится к нулю, получаем требуемое равенство

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = F(\beta) - F(\alpha). \tag{3.48}$$

На втором этапе получим из формулы (3.48) формулу (3.46). Для этого достаточно доказать, что при $\alpha \to a+0$, $\beta \to b-0$:

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx \to \int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx.$$

В самом деле, из интегрируемости функции f следует ее ограниченность, т. е. существует такая постоянная $M > 0$, что при всех $x \in [a;b]$ все значения $|f(x)| \leqslant M$. Следовательно,

$$\left|\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx - \int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx\right| = \left|\int\limits_{a}^{\alpha} f(x)\,dx + \int\limits_{\beta}^{b} f(x)\,dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\int\limits_{a}^{\alpha} f(x)\,dx\right| + \left|\int\limits_{\beta}^{b} f(x)\,dx\right| \leqslant M(\alpha - a) + M(b - \beta) \to 0$$

при $\alpha \to a+0$, $\beta \to b-0$. Лемма доказана.

Переходим к решению задачи. Применим лемму к отрезкам

$[a; c_1]$, $[c_1; c_2]$, ... , $[c_{p-1}; c_p]$, $[c_p; b]$, получим:

$$\int\limits_a^{c_1} f(x)\,dx = F(c_1 - 0) - F(a + 0),$$

$$\int\limits_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx = F(c_2 - 0) - F(c_1 + 0),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\int\limits_{c_{p-1}}^{c_p} f(x)\,dx = F(c_p - 0) - F(c_{p-1} + 0),$$

$$\int\limits_{c_p}^{b} f(x)\,dx = F(b - 0) - F(c_p + 0).$$

Складывая эти равенства и используя аддитивность интеграла, получаем

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b - 0) - F(a + 0) - \sum_{i=1}^{p} \left[F(c_i + 0) - F(c_i - 0)\right].$$

Утверждение задачи доказано.

2302. Пусть функция $f(x)$ собственно интегрируема на сегменте $[a; b]$ и

$$F(x) = \int\limits_a^x f(\xi)\,d\xi + C$$

– ее неопределенный интеграл.

Доказать, что функция $F(x)$ непрерывна и во всех точках непрерывности функции $f(x)$ имеет место равенство

$$F'(x) = f(x).$$

Что можно сказать о производной функции $F(x)$ в точках разрыва функции $f(x)$?

Рассмотреть примеры:

а) $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = 1$ $(n = \pm 1, \pm 2, \dots)$ и $f(x) = 0$ при $x \neq \dfrac{1}{n}$;
б) $f(x) = \operatorname{sgn} x$.

Утверждение задачи является составной частью любого традиционного курса математического анализа и его доказательство приводится во всех общепринятых учебниках (см., например, [2], с. 365; [3], с. 115; [4], с. 467; [5], с. 364). Поэтому рассмотрим только примеры, которые показывают, что в точках разрыва функции $f(x)$ функция $F(x)$ может как иметь производную, так и не иметь ее.

а). Функция $F(x) = C$ дифференцируема всюду (в том числе и в точках разрыва функции f) и ее производная $F'(x) = 0$. В точках разрыва $F'(x) \neq f(x)$.

б). Функция $F(x) = |x| + C$ дифференцируема всюду, кроме точки разрыва функции $f(x)$ (точка $x = 0$).

Найти неопределенные интегралы от ограниченных разрывных функций:

2303. $\displaystyle\int \operatorname{sgn} x\, dx.$

Рассмотрим первообразную, заданную формулой

$$F(x) = \int\limits_0^x \operatorname{sgn} t\, dt.$$

При $x > 0$

$$F(t) = \int\limits_0^x dt = x.$$

Так как подынтегральная функция нечетна, то согласно решению задачи 2259 $F(x)$ четна, следовательно, $F(x) = |x|$ и

$$\int \operatorname{sgn} x\, dx = |x| + C.$$

2304. $\int \operatorname{sgn}(\sin x)\,dx.$

Рассмотрим первообразную, заданную формулой

$$F(x) = \int\limits_0^x \operatorname{sgn}(\sin x)\,dt.$$

Покажем, что $F(x)$ периодическая функция с периодом 2π. В самом деле, из свойства аддитивности интеграла следует, что

$$F(x+2\pi) - F(x) = \int\limits_x^{x+2\pi} \operatorname{sgn}(\sin x)\,dt.$$

Так как подынтегральная функция имеет период 2π, то согласно решению задачи 2265:

$$\int\limits_x^{x+2\pi} \operatorname{sgn}(\sin x)\,dt = \int\limits_0^{2\pi} \operatorname{sgn}(\sin x)\,dt = \int\limits_0^{\pi} dt - \int\limits_{\pi}^{2\pi} dt = \pi - \pi = 0.$$

Таким образом, $F(x+2\pi) = F(x)$ при всех вещественных x, что доказывает 2π-периодичность $F(x)$.

Так как подынтегральная функция нечетна, то согласно решению задачи 2259 $F(x)$ четна. Из четности и 2π-периодичности функции $F(x)$ следует, что она однозначно определяется своими значениями на промежутке $x \in [0;\pi]$. При этих значениях аргумента

$$F(x) = \int\limits_0^x dt = x.$$

Отметим, что такими же свойствами обладает функция

$$y = \arccos(\cos x),$$

она 2π-периодична, четна и на отрезке $[0;\pi]$

$$\arccos(\cos x) = x.$$

Следовательно, $F(x) = \arccos(\cos x)$ и, соответственно,

$$\int \operatorname{sgn}(\sin x)\,dx = \arccos(\cos x) + C.$$

2305. $\int [x]\,dx$ $(x \geqslant 0)$.

Вычислим

$$F(x) = \int\limits_0^x [t]\,dt.$$

Если $k < x < k+1$, где k – целое число, то $F'(x) = [x] = k$ и, следовательно,

$$F(x) = kx + c_k.$$

Так как на промежутке $x \in (k-1; k)$ функция $F(x) = (k-1)x+$ $+c_{k-1}$, то из условия непрерывности $F(x)$ в точке $x = k$ следует, что $(k-1)k + c_{k-1} = k^2 + c_k$. Отссюда получаем рекуррентное соотношение для последовательности $\{c_k\}$:

$$c_k = c_{k-1} - k.$$

В интервале $(0; 1)$ функция $F(x) = 0$, следовательно, $c_0 = 0$. Применяя полученное рекуррентное соотношение k раз и учитывая, что $c_0 = 0$, получаем

$$c_k = -(1 + 2 + \ldots + k).$$

Суммируя арифметичческую прогрессию, находим

$$c_k = -\frac{k(k+1)}{2},$$

т. е. в интервале $(k; k+1)$, а в силу непрерывности $F(x)$ и на промежутке $[k; k+1)$, функция $F(x) = kx - k(k+1)/2$. Заменяя здесь $k = [x]$, получаем окончательный ответ:

$$F(x) = [x]x - \frac{1}{2}\,[x]([x]+1),$$

поэтому

$$\int [x]\,dx = [x]x - \frac{1}{2}\,[x]([x]+1) + C \quad (x \geqslant 0).$$

2306. $\int x[x]\,dx$ $(x \geqslant 0)$.

Пусть

$$F(x) = \int\limits_0^x t[t]\,dt.$$

Если $k < x < k+1$, где k – целое число, то $F'(x) = x[x] = kx$ и, следовательно,

$$F(x) = \frac{kx^2}{2} + c_k.$$

Приравнивая предельные значения $F(k-0)$ и $F(k+0)$, получаем равенство

$$\frac{(k-1)k^2}{2} + c_{k-1} = \frac{k^3}{2} + c_k,$$

из которого находим рекуррентное соотношение для последовательности $\{c_k\}$:

$$c_k = c_{k-1} - \frac{k^2}{2}.$$

В интервале $(0;1)$ функция $F(x) = 0$, следовательно, $c_0 = 0$. Применяя полученное рекуррентное соотношение k раз и учитывая, что $c_0 = 0$, получаем

$$c_k = -\frac{1}{2}\,(1^2 + 2^2 + \ldots + k^2).$$

Согласно формуле (2.5)

$$1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}.$$

Таким образом, в интервале $(k;k+1)$, а в силу непрерывности $F(x)$ и на промежутке $[k;k+1)$, функция

$$F(x) = \frac{kx^2}{2} - \frac{k(k+1)(2k+1)}{12}.$$

Заменяя здесь $k = [x]$, получаем окончательный ответ:

$$F(x) = \frac{[x]x^2}{2} - \frac{[x]([x]+1)(2[x]+1)}{12},$$

поэтому

$$\int x[x]\,dx = \frac{[x]x^2}{2} - \frac{[x]([x]+1)(2[x]+1)}{12} + C \quad (x \geqslant 0).$$

2307. $\int (-1)^{[x]}\,dx.$

Положим

$$F(x) = \int\limits_0^x (-1)^{[t]}\,dt.$$

Подынтегральная функция $f(x) = (-1)^{[x]}$ периодична с периодом $T = 2$. Покажем, что функция $F(x)$ также периодична и имеет такой же период. В самом деле, в силу аддитивности интеграла

$$F(x+2) - F(x) = \int\limits_x^{x+2} (-1)^{[t]}\,dt.$$

Так как подынтегральная функция имеет период 2, то согласно решению задачи 2265:

$$\int\limits_x^{x+2} (-1)^{[t]}\,dt = \int\limits_0^2 (-1)^{[t]}\,dt = \int\limits_0^1 dt - \int\limits_1^2 dt = 0.$$

Таким образом, $F(x+2) = F(x)$ при всех вещественных x и она однозначно определяется своими значениями на промежутке $x \in [0; 2]$.

Если $x \in [0; 1)$, то

$$F(x) = \int\limits_0^x dt = x,$$

при $x \in [1;2)$ в силу свойства аддитивности интеграла

$$F(x) = \int\limits_0^1 dt - \int\limits_1^x dt = 1 - (x-1) = 2 - x.$$

Учитывая непрерывность функции $F(x)$, получаем, что

$$F(x) = \begin{cases} x, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 2 - x, & 1 \leqslant x \leqslant 2. \end{cases}$$

В элементарной математике есть функция, которая задается аналогичным образом. Это функция $y = \arccos(\cos x)$, она 2π-периодична и на отрезке длиной в период определяется равенством

$$\arccos(\cos x) = \begin{cases} x, & 0 \leqslant x \leqslant \pi, \\ 2\pi - x, & \pi \leqslant x \leqslant 2\pi. \end{cases}$$

Отсюда следует, что графики этих функций подобны с коэффициентом подобия, равным π, следовательно

$$F(x) = \frac{1}{\pi} \arccos(\cos \pi x),$$

и поэтому

$$\int (-1)^{[x]}\, dx = \frac{1}{\pi} \arccos(\cos \pi x) + C.$$

2308. $\int\limits_0^x f(t)\, dt$, где $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } |x| < l, \\ 0, & \text{если } |x| > l. \end{cases}$

1. Пусть $x \leqslant l$, тогда в силу свойства аддитивности интеграла

$$\int\limits_0^x f(t)\, dt = \int\limits_0^{-l} f(t)\, dt + \int\limits_{-l}^x f(t)\, dt =$$

$$= -\int\limits_{-l}^0 f(t)\, dt - \int\limits_x^{-l} f(t)\, dt = -\int\limits_{-l}^0 dt - 0 = -l.$$

2. Пусть $-l \leqslant x \leqslant l$, тогда

$$\int\limits_0^x f(t)\,dt = \int\limits_0^x dt = x.$$

3. Пусть $x \geqslant l$, тогда в силу свойства аддитивности интеграла

$$\int\limits_0^x f(t)\,dt = \int\limits_0^l f(t)\,dt + \int\limits_l^x f(t)\,dt = \int\limits_0^l dt + 0 = l.$$

Следовательно,

$$\int\limits_0^x f(t)\,dt = \begin{cases} -l, & x \leqslant -l, \\ x, & -l \leqslant x \leqslant l \\ l, & x \geqslant l. \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что эта же функция задается формулой

$$y = \frac{1}{2}\,(|\,l + x| - |\,l - x|),$$

таким образом,

$$\int\limits_0^x f(t)\,dt = \frac{1}{2}\,(|\,l + x| - |\,l - x|).$$

Вычислить определенные интегралы от ограниченных разрывных функций:

2309. $\displaystyle\int\limits_0^3 \operatorname{sgn}(x - x^3)\,dx.$

Подынтегральная функция

$$\operatorname{sgn}(x - x^3) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, \\ -1, & 1 < x < 3, \end{cases}$$

следовательно,

$$\int\limits_0^3 \operatorname{sgn}(x-x^3)\,dx = \int\limits_0^1 dx - \int\limits_1^3 dx = 1-2=-1.$$

2310. $\int\limits_0^2 [\mathrm{e}^x]\,dx.$

Нетрудно видеть, что подынтегральная функция

$$[\mathrm{e}^x] = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant x < \ln 2, \\ 2, & \ln 2 \leqslant x < \ln 3, \\ 3, & \ln 3 \leqslant x < \ln 4, \\ 4, & \ln 4 \leqslant x < \ln 5, \\ 5, & \ln 5 \leqslant x < \ln 6, \\ 6, & \ln 6 \leqslant x < \ln 7, \\ 7, & \ln 7 \leqslant x \leqslant 2. \end{cases}$$

Отсюда получаем:

$$\int\limits_0^2 [\mathrm{e}^x]\,dx = \int\limits_0^{\ln 2} dx + 2\int\limits_{\ln 2}^{\ln 2} dx + 3\int\limits_{\ln 3}^{\ln 4} dx + 4\int\limits_{\ln 4}^{\ln 5} dx + 5\int\limits_{\ln 5}^{\ln 6} dx +$$

$$+6\int\limits_{\ln 6}^{\ln 7} dx + 7\int\limits_{\ln 7}^{2} dx = \ln 2 + 2(\ln 3 - \ln 2) + 3(\ln 4 - \ln 3) +$$

$$+4(\ln 5 - \ln 4) + 5(\ln 6 - \ln 5) + 6(\ln 7 - \ln 6) + 7(2 - \ln 7) =$$

$$= \ln 2 + \ln\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \ln\left(\frac{4}{3}\right)^3 + \ln\left(\frac{5}{4}\right)^4 + \ln\left(\frac{6}{5}\right)^5 +$$

$$+\ln\left(\frac{7}{6}\right)^6 + \ln\left(\frac{e^2}{7}\right)^7 = \ln\frac{e^{14}}{7!} = 14 - \ln 7!\,.$$

2311. $\displaystyle\int\limits_0^6 [x]\sin\frac{\pi x}{6}\,dx.$

Подынтегральная функция

$$[x]\sin\frac{\pi x}{6}=\begin{cases} 0, & 0\leqslant x<1,\\ \sin\dfrac{\pi x}{6}, & 1\leqslant x<2,\\ 2\sin\dfrac{\pi x}{6}, & 2\leqslant x<3,\\ 3\sin\dfrac{\pi x}{6}, & 3\leqslant x<4,\\ 4\sin\dfrac{\pi x}{6}, & 4\leqslant x<5,\\ 5\sin\dfrac{\pi x}{6}, & 5\leqslant x<6,\end{cases}$$

следовательно,

$$\int\limits_0^6 [x]\sin\frac{\pi x}{6}\,dx=\int\limits_1^2 \sin\frac{\pi x}{6}\,dx+2\int\limits_2^3 \sin\frac{\pi x}{6}\,dx+3\int\limits_3^4 \sin\frac{\pi x}{6}\,dx+$$

$$+4\int\limits_4^5 \sin\frac{\pi x}{6}\,dx+5\int\limits_5^6 \sin\frac{\pi x}{6}\,dx=-\frac{6}{\pi}\cos\frac{\pi x}{6}\Big|_1^2-\frac{12}{\pi}\cos\frac{\pi x}{6}\Big|_2^3-$$

$$-\frac{18}{\pi}\cos\frac{\pi x}{6}\Big|_3^4-\frac{24}{\pi}\cos\frac{\pi x}{6}\Big|_4^5-\frac{30}{\pi}\cos\frac{\pi x}{6}\Big|_5^6=-\frac{6}{\pi}\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-$$

$$-\frac{12}{\pi}\left(0-\frac{1}{2}\right)-\frac{18}{\pi}\left(-\frac{1}{2}-0\right)-$$

$$-\frac{24}{\pi}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right)-\frac{30}{\pi}\left(-1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{30}{\pi}.$$

2312. $\displaystyle\int\limits_0^{\pi} x\,\mathrm{sgn}(\cos x)\,dx.$

$$\int\limits_0^{\pi} x\,\mathrm{sgn}(\cos x)\,dx = \int\limits_0^{\pi/2} x\,\mathrm{sgn}(\cos x)\,dx + \int\limits_{\pi/2}^{\pi} x\,\mathrm{sgn}(\cos x)\,dx =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/2} x\,dx - \int\limits_{\pi/2}^{\pi} x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^{\pi/2} - \frac{x^2}{2}\Big|_{\pi/2}^{\pi} = \frac{\pi^2}{8} - \left(\frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi^2}{8}\right) = -\frac{\pi^2}{4}.$$

2313. $\int\limits_1^{n+1} \ln[x]\,dx,$ где n – натуральное число.

Согласно свойству аддитивности определенного интеграла

$$\int\limits_1^{n+1} \ln[x]\,dx = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_k^{k+1} \ln[x]\,dx = \sum_{k=1}^{n} (\ln k) \int\limits_k^{k+1} dx = \sum_{k=1}^{n} \ln k =$$

$$= \ln 1 + \ln 2 + \ldots + \ln n = \ln(1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n) = \ln n!.$$

2314. $\int\limits_0^{1} \mathrm{sgn}\,[\sin(\ln x)]\;dx.$

$$\int\limits_0^{1} \mathrm{sgn}\,[\sin(\ln x)]\;dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \int\limits_{\mathrm{e}^{-\pi(k+1)}}^{\mathrm{e}^{-\pi k}} (-1)^{k-1}\,dx =$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^{k-1} \left(\mathrm{e}^{-\pi k} - \mathrm{e}^{-\pi(k+1)}\right) = -\left(1 - \mathrm{e}^{-\pi}\right) \sum_{k=0}^{+\infty} \left(-\mathrm{e}^{-\pi}\right)^k.$$

Суммируя геометрическую прогрессию, находим

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left(-\mathrm{e}^{-\pi}\right)^k = \frac{1}{1 + \mathrm{e}^{-\pi}}.$$

Таким образом,

$$\int\limits_0^1 \operatorname{sgn}\left[\sin(\ln x)\right]\,dx = -\frac{1-\mathrm{e}^{-\pi}}{1+\mathrm{e}^{-\pi}} = -\frac{\mathrm{e}^{\pi/2}-\mathrm{e}^{-\pi/2}}{\mathrm{e}^{\pi/2}+\mathrm{e}^{-\pi/2}} = -\operatorname{th}\frac{\pi}{2}.$$

2315. Найти

$$\int\limits_E |\cos x|\sqrt{\sin x}\,dx,$$

где E – множество тех значений сегмента $[0;4\pi]$, для которых подынтегральное выражение имеет смысл.

Так как $E=[0;\pi]\cup[2\pi;3\pi]$, то

$$\int\limits_E |\cos x|\sqrt{\sin x}\,dx = \int\limits_0^{\pi} |\cos x|\sqrt{\sin x}\,dx + \int\limits_{2\pi}^{3\pi} |\cos x|\sqrt{\sin x}\,dx =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/2} \cos x\sqrt{\sin x}\,dx - \int\limits_{\pi/2}^{\pi} \cos x\sqrt{\sin x}\,dx +$$

$$+ \int\limits_{2\pi}^{5\pi/2} \cos x\sqrt{\sin x}\,dx - \int\limits_{5\pi/2}^{3\pi} \cos x\sqrt{\sin x}\,dx.$$

Неопределенный интеграл вычисляется с помощью замены $t=\sin x$:

$$\int \cos x\sqrt{\sin x}\,dx = \int \sqrt{t}\,dt = \frac{2}{3}\,t^{3/2} + C = \frac{2}{3}\,\sin^{3/2} x + C.$$

По формуле Ньютона – Лейбница

$$\int\limits_E |\cos x|\sqrt{\sin x}\,dx = \frac{2}{3}\sin^{3/2} x\Big|_0^{\pi/2} - \frac{2}{3}\sin^{3/2} x\Big|_{\pi/2}^{\pi} +$$

$$+ \frac{2}{3}\sin^{3/2} x\Big|_{2\pi}^{5\pi/2} - \frac{2}{3}\sin^{3/2} x\Big|_{5\pi/2}^{3\pi} = \frac{8}{3}.$$

Глава 4

Теоремы о среднем

Средним значением функции f на отрезке $[a;b]$ называется величина

$$M[f] = \frac{1}{b-a} \int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Среднее значение любой интегрируемой функции всегда лежит между ее точной нижней гранью и точной верхней гранью. В общепринятых курсах анализа показывается, что для непрерывной функции среднее значение является одним из ее значений: $M[f] = f(\xi)$, где $\xi \in [a;b]$. Однако положение точки ξ можно уточнить.

Задача 14. Доказать, что если функция $f \in C[a;b]$, то существует такая точка $\xi \in (a,b)$, что

$$M[f] = f(\xi).$$

На практике часто встречается необходимость оценить знак или величину интеграла от произведения двух функций. В учебных курсах обычно приводятся две теоремы о такого рода оценках, которые называются традиционно первой и второй теоремами о средних значениях.

Первая теорема о среднем утверждает, что

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = \mu \int\limits_a^b g(x)\,dx, \tag{4.1}$$

где

$$\inf_{a\leqslant x\leqslant b} f(x) \leqslant \mu \leqslant \sup_{x\in[a;b]} f(x).$$

Для справедливости соотношения (4.1) достаточно, чтобы функции f и g были интегрируемы на $[a;b]$, а функция g, дополнительно, либо неотрицательной, либо неположительной на $[a;b]$. Если функция f непрерывна на отрезке $[a;b]$, то число μ является одним из ее значений.

Вторая теорема о среднем обобщает две формулы Бонне. Если функции f и g интегрируемы на $[a;b]$, а g монотонно неубывает и неотрицательна на $[a;b]$, то существует такая точка $\xi \in [a;b]$, что

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a) \int\limits_a^\xi f(x)\,dx. \tag{4.2}$$

В том случае, когда f и g интегрируемы на $[a;b]$, а g монотонно невозрастает и неотрицательна на $[a;b]$, то применима другая формула:

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = g(b) \int\limits_\xi^b f(x)\,dx. \tag{4.3}$$

От условия неотрицательности функции g можно отказаться, тогда формулы (4.2) и (4.3) нужно видоизменить. Если функции f и g интегрируемы на $[a;b]$, а функция g монотонна на $[a;b]$, то существует такая точка $\xi \in [a;b]$, что

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a) \int\limits_a^\xi f(x)\,dx + g(b) \int\limits_\xi^b f(x)\,dx. \tag{4.4}$$

Формула (4.4) носит название второй теоремы о среднем. Относительно этой формулы можно сделать следующее замечание. Если изменить значения функции g в точках $x = a$ и $x = b$, взяв вместо них произвольные числа A и B, удовлетворяющие условиям

$$A \geqslant g(a+0), \quad B \leqslant g(b-0), \quad \text{если } g \text{ убывает},$$

$$A \leqslant g(a+0), \quad B \geqslant g(b-0), \quad \text{если } g \text{ возрастает},$$

то значение интеграла не изменится, а функция g останется монотонной. Поэтому справедлива несколько более общая формула

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = A\int\limits_a^\xi f(x)\,dx + B\int\limits_\xi^b f(x)\,dx$$

(значение ξ зависит, разумеется, от выбора чисел A и B). Эту формулу часто записывают только для предельного случая

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a+0)\int\limits_a^\xi f(x)\,dx + g(b-0)\int\limits_\xi^b f(x)\,dx. \quad (4.5)$$

Так как в формулу (4.5) входят только предельные значения $g(a+0)$ и $g(b-0)$, то достаточно чтобы функция g была монотонна только в интервале $(a;b)$.

В некоторых примерах можно пользоваться более простыми свойствами интеграла. Приведем их в виде задач.

Задача 15. Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a;b]$, неотрицательна и не тождественно равна нулю. Тогда

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx > 0.$$

Задача 16. Пусть функции $f, g \in C[a;b]$, при всех $x \in [a;b]$ выполнено неравенство $f(x) \geqslant g(x)$ и функции f не совпадает с g хотя бы в одной точке. Тогда

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx > \int\limits_a^b g(x)\,dx.$$

Переходим к задачам.

2316. Определить знаки следующих интегралов:

$$\text{а)} \int\limits_0^{2\pi} x\sin x\,dx; \quad \text{б)} \int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx;$$

$$\text{в)} \int\limits_{-2}^{2} x^3 2^x\,dx; \quad \text{г)} \int\limits_{1/2}^{1} x^2 \ln x\,dx.$$

а). Определить знак интеграла проще всего вычислив его значение. Интегрируя по частям, получаем

$$\int\limits_0^{2\pi} x\sin x\,dx = -\int\limits_0^{2\pi} x\,d(\cos x) =$$

$$= -\,x\cos x\Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \cos x\,dx = -2\pi + \sin x\Big|_0^{2\pi} = -2\pi < 0.$$

б). Разобьем интеграл на два

$$I = \int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx = \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx + \int\limits_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx$$

и во втором интеграле сделаем замену $y = x - \pi$:

$$I = \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx - \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin y}{\pi + y}\,dy =$$

$$= \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx - \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin x}{\pi + x}\,dx = \pi \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin x}{x(\pi + x)}\,dx.$$

В полученном интеграле подынтегральная функция непрерывна, неотрицательна и не равна тождественно нулю, следовательно, этот интеграл положителен. Таким образом,

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx > 0.$$

в). Разобьем интеграл на два

$$I = \int\limits_{-2}^{2} x^3 2^x\,dx = \int\limits_{-2}^{0} x^3 2^x\,dx + \int\limits_0^{2} x^3 2^x\,dx$$

и в первом интеграле сделаем замену $y = -x$:

$$I = -\int\limits_0^{2} y^3 2^{-y}\,dy + \int\limits_0^{2} x^3 2^x\,dx =$$

$$= -\int\limits_0^{2} x^3 2^{-x}\,dx + \int\limits_0^{2} x^3 2^x\,dx = \int\limits_0^{2} x^3 \left(2^x - 2^{-x}\right)\,dx.$$

В полученном интеграле подынтегральная функция непрерывна, неотрицательна и не равна тождественно нулю, следовательно, этот интеграл положителен. Таким образом,

$$\int\limits_{-2}^{2} x^3 2^x\,dx > 0.$$

г). В интеграле стоит непрерывная, неположительная и не равная тождественно нулю функция, следовательно, этот инте-

грал отрицателен:

$$\int\limits_{1/2}^{1} x^2 \ln x \, dx < 0.$$

2317. Какой интеграл больше:

а) $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{10} x \, dx$ или $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^2 x \, dx$?

б) $\int\limits_0^{1} \mathrm{e}^{-x} \, dx$ или $\int\limits_0^{1} \mathrm{e}^{-x^2} \, dx$?

в) $\int\limits_0^{\pi} \mathrm{e}^{-x^2} \cos^2 x \, dx$ или $\int\limits_{\pi}^{2\pi} \mathrm{e}^{-x^2} \cos^2 x \, dx$?

а). Функции $f(x) = \sin^{10} x$ и $g(x) = \sin^2 x$ непрерывны на отрезке $[0; \pi/2]$, всюду на этом отрезке $f(x) \leqslant g(x)$ и $f(x) \not\equiv g(x)$, следовательно, интеграл от $f(x)$ меньше, чем интеграл от $g(x)$, т. е.

$$\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{10} x \, dx < \int\limits_0^{\pi/2} \sin^2 x \, dx.$$

б). Функции $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$ и $g(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ непрерывны на отрезке $[0; 1]$, всюду на этом отрезке $f(x) \leqslant g(x)$ и $f(x) \not\equiv g(x)$, следовательно, интеграл от $f(x)$ меньше, чем интеграл от $g(x)$, т. е.

$$\int\limits_0^{1} \mathrm{e}^{-x} \, dx < \int\limits_0^{1} \mathrm{e}^{-x^2} \, dx.$$

в). Пусть

$$I_1 = \int\limits_0^{\pi} \mathrm{e}^{-x^2} \cos^2 x \, dx \,, \quad I_2 = \int\limits_{\pi}^{2\pi} \mathrm{e}^{-x^2} \cos^2 x \, dx.$$

Сделаем в интеграле I_2 замену $y = x - \pi$, получим

$$I_2 = \int\limits_0^{\pi} \mathrm{e}^{-(\pi+y)^2} \cos^2 y\, dy = \int\limits_0^{\pi} \mathrm{e}^{-(\pi+x)^2} \cos^2 x\, dx.$$

Отсюда следует, что

$$I_1 - I_2 = \int\limits_0^{\pi} \mathrm{e}^{-x^2} \cos^2 x\, dx - \int\limits_0^{\pi} \mathrm{e}^{-(\pi+x)^2} \cos^2 x\, dx =$$

$$= \int\limits_0^{\pi} \left[\mathrm{e}^{-x^2} - \mathrm{e}^{-(\pi+x)^2}\right] \cos^2 x\, dx.$$

В последнем интеграле подынтегральная функция непрерывна, неотрицательна и не равна тождественно нулю, поэтому этот интеграл положителен. Следовательно, $I_1 > I_2$, т. е.

$$\int\limits_0^{\pi} \mathrm{e}^{-x^2} \cos^2 x\, dx > \int\limits_{\pi}^{2\pi} \mathrm{e}^{-x^2} \cos^2 x\, dx.$$

2318. Определить средние значения данных функций в указанных промежутках:

а) $f(x) = x^2$	на	$[0; 1]$;
б) $f(x) = \sqrt{x}$	на	$[0; 100]$;
в) $f(x) = 10 + 2\sin x + 3\cos x$	на	$[0; 2\pi]$;
г) $f(x) = \sin x \sin(x + \varphi)$	на	$[0; 2\pi]$.

а) $M[f] = \int\limits_0^1 x^2\, dx = \left.\dfrac{x^3}{3}\right|_0^1 = \dfrac{1}{3}.$

б) $M[f] = \dfrac{1}{100} \int\limits_0^{100} \sqrt{x}\, dx = \left.\dfrac{x^{3/2}}{150}\right|_0^{100} = \dfrac{20}{3} = 6\dfrac{2}{3}.$

в) $M[f] = \dfrac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}(10 + 2\sin x + 3\cos x)\,dx =$

$$= \frac{1}{2\pi}[10x - 2\cos x + 3\sin x]\Big|_0^{2\pi} = 10.$$

г) $M[f] = \dfrac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\sin x\sin(x+\varphi)\,dx = \dfrac{1}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi}[\cos\varphi - \cos(2x+$

$$+\varphi)]dx = \frac{1}{4\pi}\left[x\cos\varphi - \frac{1}{2}\sin(2x+\varphi)\right]\Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{2}\cos\varphi.$$

2319. Найти среднее значение длины фокального радиуса-вектора эллипса

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\varphi} \quad (0 < \varepsilon < 1).$$

По определению среднего значения

$$M[r] = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{p}{1 - \varepsilon\cos\varphi}\,d\varphi.$$

Полученный интеграл можно свести к интегралу, вычисленному ранее. Для этого сделаем замену $\varphi = \pi - t$, получим

$$M[r] = \frac{p}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{dt}{1 + \varepsilon\cos\varphi}.$$

Согласно решению задачи 2265

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{dt}{1 + \varepsilon\cos\varphi} = \int\limits_0^{2\pi}\frac{dt}{1 + \varepsilon\cos\varphi},$$

а в соответствии с решением задачи 2213

$$\int\limits_0^{2\pi}\frac{dt}{1 + \varepsilon\cos\varphi} = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}.$$

Следовательно,

$$M[r] = \frac{p}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}.$$

Замечание. Из курса аналитической геометрии известно, что величина

$$\frac{p}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$$

совпадает с длиной меньшей полуоси эллипса. Таким образом, среднее значение длины фокального радиуса-вектора эллипса равно длине малой полуоси этого эллипса.

2320. Найти среднее значение скорости свободно падающего тела, начальная скорость которого равна v_0.

Обозначим через v_1 конечную скорость тела. Если t_1 – время падения, то ускорение свободного падения

$$g = \frac{v_1 - v_0}{t_1}$$

и закон изменения скорости тела имеет следующий вид:

$$v(t) = v_0 + gt = v_0 + \frac{v_1 - v_0}{t_1}\, t.$$

Среднее значение скорости

$$M[v] = \frac{1}{t_1}\int\limits_0^{t_1} v(t)\,dt = \frac{1}{t_1}\int\limits_0^{t_1}\left(v_0 + \frac{v_1 - v_0}{t_1}\, t\right)dt =$$

$$= \frac{1}{t_1}\left[v_0 t + \frac{v_1 - v_0}{2t_1}\, t^2\right]\Bigg|_0^{t_1} = v_0 + \frac{v_1 - v_0}{2} = \frac{v_0 + v_1}{2}.$$

2321. Сила переменного тока меняется по закону

$$i = i_0 \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi\right),$$

где i_0 – амплитуда, t – время, T – период и φ – начальная фаза. Найти среднее значение квадрата силы тока.

По определению среднего значения

$$M[i^2] = \frac{1}{T}\int\limits_0^T i^2(t)\,dt = \frac{i_0^2}{T}\int\limits_0^T \sin^2\left(\frac{2\pi t}{T}+\varphi\right)dt =$$

$$= \frac{i_0^2}{2T}\int\limits_0^T \left[1-\cos\left(\frac{4\pi t}{T}+2\varphi\right)\right]dt =$$

$$= \frac{i_0^2}{2T}\left[t-\frac{T}{4\pi}\sin\left(\frac{4\pi t}{T}+2\varphi\right)\right]\Bigg|_0^T = \frac{i_0^2}{2}.$$

2321.1. Пусть $f(x)\in C[0;+\infty)$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$. Найти

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int\limits_0^x f(x)\,dx.$$

Рассмотреть пример $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

Применяя правило Лопиталя и учитывая, что

$$\left(\int\limits_0^x f(x)\,dx\right)' = f(x),$$

находим

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int\limits_0^x f(x)\,dx = \lim_{x\to+\infty}\frac{\int\limits_0^x f(x)\,dx}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{1} = A.$$

Проверим полученную формулу на примере функции $f(x) = \operatorname{arctg} x$. Первообразную этой функции находим, интегрируя по частям

$$\int \operatorname{arctg} x\,dx = x\operatorname{arctg} x - \int\frac{x\,dx}{1+x^2} = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$$

Отсюда следует, что

$$\int_0^x f(x)\,dx = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$$

и

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(x)\,dx = \lim_{x\to+\infty}\left[\operatorname{arctg} x - \frac{\ln(1+x^2)}{2x}\right] = \frac{\pi}{2}.$$

Этой же величине равен и $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2322. Пусть

$$\int_0^x f(t)\,dt = xf(\theta x).$$

Найти θ, если:

а) $f(t) = t^n \quad (n > -1)$; б) $f(t) = \ln t$; в) $f(t) = \mathrm{e}^t$.

Чему равны $\lim\limits_{x\to+0}\theta$ и $\lim\limits_{x\to+\infty}\theta$?

а) $\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x t^n\,dt = \frac{x^{n+1}}{n+1}$.

Уравнение для θ имеет вид

$$\frac{x^{n+1}}{n+1} = x(\theta x)^n,$$

решая это уравнение, находим

$$\theta = \sqrt[n]{\frac{1}{n+1}}.$$

В данном случае величина θ не зависит от x и поэтому

$$\lim_{x\to+0}\theta = \lim_{x\to+\infty}\theta = \theta = \sqrt[n]{\frac{1}{n+1}}.$$

б). Интегрируя по частям, находим:

$$\int\limits_0^x f(t)\,dt = \int\limits_0^x \ln t\,dt = t\ln t\Big|_0^x - \int\limits_0^x dt = x\ln x - x = x\ln\frac{x}{e}.$$

Уравнение для θ имеет вид

$$x\ln\frac{x}{\mathrm{e}} = x\ln(\theta x),$$

решая это уравнение, находим:

$$\theta = \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

В данном случае величина θ также не зависит от x и поэтому

$$\lim_{x\to+0}\theta = \lim_{x\to+\infty}\theta = \theta = \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

в) $\displaystyle\int\limits_0^x f(t)\,dt = \int\limits_0^x \mathrm{e}^t\,dt = \mathrm{e}^x - 1.$

Уравнение для θ имеет вид

$$\mathrm{e}^x - 1 = x\mathrm{e}^{\theta x},$$

решая это уравнение, находим

$$\theta = \frac{1}{x}\ln\frac{\mathrm{e}^x - 1}{x}.$$

Предел θ при $x \to +0$ находим, применяя трижды правило Лопиталя,

$$\lim_{x\to+0}\theta = \lim_{x\to+0}\frac{\ln\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x}}{x} = \lim_{x\to+0}\frac{\dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x-1} - \dfrac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to+0}\frac{x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + 1}{(\mathrm{e}^x-1)x} =$$

$$= \lim_{x\to+0}\frac{x\mathrm{e}^x}{x\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x - 1} = \lim_{x\to+0}\frac{\mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x}{2\mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x} = \frac{1}{2}.$$

Аналогично вычисляется и предел на $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty}\theta=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\dfrac{e^x-1}{x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{e^x}{e^x-1}-\dfrac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{xe^x-e^x+1}{(e^x-1)x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{xe^x}{xe^x+e^x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+xe^x}{2e^x+xe^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+x}{2+x}=1.$$

Пользуясь первой теоремой о среднем, оценить интегралы:

2323. $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi}\frac{dx}{1+0{,}5\cos x}$.

По первой теореме о среднем

$$\int\limits_0^{2\pi}\frac{dx}{1+0{,}5\cos x}=\frac{2\pi}{1+0{,}5\cos\xi}.$$

Так как $-1\leqslant\cos\xi\leqslant1$, то $1/2\leqslant1+0{,}5\cos\xi\leqslant3/2$ и

$$\frac{4\pi}{3}\leqslant\frac{2\pi}{1+0{,}5\cos\xi}\leqslant4\pi,$$

следовательно,

$$\frac{4\pi}{3}\leqslant\int\limits_0^{2\pi}\frac{dx}{1+0{,}5\cos x}\leqslant4\pi.$$

2324. $\displaystyle\int\limits_0^{1}\frac{x^9}{\sqrt{1+x}}\,dx$.

По первой теореме о среднем

$$\int\limits_0^{1}\frac{x^9}{\sqrt{1+x}}\,dx=\frac{1}{\sqrt{1+\xi}}\int\limits_0^{1}x^9\,dx=\frac{1}{10\sqrt{1+\xi}},$$

где $\xi \in [0;1]$. Неравенства $0 \leqslant \xi \leqslant 1$ влекут за собой оценку

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{1+\xi}} \leqslant 1$$

и, таким образом,

$$\frac{1}{10\sqrt{2}} \leqslant \int\limits_0^1 \frac{x^9}{\sqrt{1+x}}\,dx \leqslant \frac{1}{10}.$$

2325. $\displaystyle\int\limits_0^{100} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x+100}\,dx.$

По первой теореме о среднем

$$\int\limits_0^{100} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x+100}\,dx = \frac{1}{\xi+100}\int\limits_0^{100} \mathrm{e}^{-x}\,dx = \frac{1-\mathrm{e}^{-100}}{\xi+100},$$

где $\xi \in [0;100]$. Из неравенств $0 \leqslant \xi \leqslant 100$, следует оценка

$$\frac{1-\mathrm{e}^{-100}}{200} \leqslant \frac{1-\mathrm{e}^{-100}}{\xi+100} \leqslant \frac{1-\mathrm{e}^{-100}}{100},$$

т. е.

$$\frac{1-\mathrm{e}^{-100}}{200} \leqslant \int\limits_0^{100} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x+100}\,dx \leqslant \frac{1-\mathrm{e}^{-100}}{100}.$$

2326. Доказать равенства:

$$\text{а)}\ \lim_{n\to+\infty}\int\limits_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx = 0; \quad \text{б)}\ \lim_{n\to+\infty}\int\limits_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx = 0;$$

а). Так как

$$0 \leqslant \int\limits_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx \leqslant \int\limits_0^1 x^n\,dx = \frac{1}{n+1},$$

то отсюда следует, что при $n \to +\infty$

$$\int\limits_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx \to 0.$$

б). Проверим определение предела. Пусть $\varepsilon > 0$. Выберем в интервале $(0; \pi/2)$ точку x_ε так, чтобы

$$\frac{\pi}{2} - x_\varepsilon < \frac{\varepsilon}{2}$$

и разобьем рассматриваемый интеграл на два

$$I_n = I_n^{(1)} + I_n^{(2)},$$

где

$$I_n^{(1)} = \int\limits_0^{x_\varepsilon} \sin^n x\,dx, \quad I_n^{(2)} = \int\limits_{x_\varepsilon}^{\pi/2} \sin^n x\,dx.$$

Оценим первый из полученных интегралов. Пусть

$$q = \sin x_\varepsilon.$$

В силу монотонного возрастания функции $y = \sin x$

$$I_n^{(1)} \leqslant \int\limits_0^{x_\varepsilon} \sin^n x_\varepsilon\,dx = \int\limits_0^{x_\varepsilon} q^n\,dx = q^n \int\limits_0^{x_\varepsilon} dx \leqslant q^n \int\limits_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{2}\,q^n.$$

Так как $0 < q < 1$, то последовательность

$$a_n = \frac{\pi}{2}\,q^n \to 0$$

при $n \to +\infty$. Следовательно, по определению предела, существует такое натуральное n_ε, что при всех $n \geqslant n_\varepsilon$ будет справедливо неравенство

$$\left|\frac{\pi}{2}\,q^n\right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

и, соответственно,

$$I_n^{(1)} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Оценим второй интеграл. Так как $|\sin x| \leqslant 1$, то

$$I_n^{(2)} \leqslant \int\limits_{x_\varepsilon}^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{2} - x_\varepsilon < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда получаем, что при всех $n \geqslant n_\varepsilon$

$$-\varepsilon < 0 \leqslant I_n = I_n^{(1)} + I_n^{(2)} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

и поэтому $-\varepsilon < I_n < \varepsilon$, т. е.

$$|I_n - 0| < \varepsilon.$$

Таким образом, действительно

$$\lim_{n\to+\infty} \int\limits_0^{\pi/2} \sin^n x\, dx = 0.$$

2326.1. Найти:

$$\text{а)}\ \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_0^1 \frac{dx}{\varepsilon x^2 + 1}\,; \quad \text{б)}\ \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} f(x)\,\frac{dx}{x}\,,$$

где $a > 0$, $b > 0$ и $f(x) \in C[0;1]$.

а). По теореме о среднем

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\varepsilon x^2 + 1} = \frac{1}{\varepsilon\xi^2 + 1},$$

где $\xi \in [0;1]$. Из неравенства $0 \leqslant \xi \leqslant 1$ следует, что

$$\frac{1}{1+\varepsilon} \leqslant \frac{1}{\varepsilon\xi^2 + 1} \leqslant 1,$$

т. е.

$$\frac{1}{1+\varepsilon} \leqslant \int\limits_0^1 \frac{dx}{\varepsilon x^2+1} \leqslant 1.$$

Переходя здесь к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_0^1 \frac{dx}{\varepsilon x^2+1} = 1.$$

б). По теореме о среднем

$$\int\limits_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} f(x)\,\frac{dx}{x} = f(\xi) \int\limits_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{dx}{x} = f(\xi)\ln\frac{b}{a},$$

где ξ находится между точками $a\varepsilon$ и $b\varepsilon$ и, поэтому

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \xi = 0.$$

В силу непрерывности функции $f(x)$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} f(x)\,\frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0} f(\xi)\ln\frac{b}{a} = f(0)\ln\frac{b}{a}.$$

2327. Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$ и $\varphi(x)$ непрерывна на $[a;b]$ и дифференцируема на $(a;b)$, причем

$$\varphi'(x) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad a < x < b.$$

Доказать вторую теорему о среднем, применяя интегрирование по частям и используя первую теорему о среднем.

Положим

$$F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt,$$

В силу свойств интеграла с переменным верхним пределом, функция $F(x)$ непрерывно дифференцируема и $F'(x) = f(x)$, следовательно,

$$I = \int\limits_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = \int\limits_a^b \varphi(x)\,dF(x).$$

Интегрируя по частям, получаем:

$$I = \varphi(x)F(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b F(x)\varphi'(x)\,dx.$$

Так как

$$F(b) = \int\limits_a^b f(t)\,dt = \int\limits_a^b f(x)\,dx,$$

а $F(a) = 0$, то

$$I = \varphi(b)\int\limits_a^b f(x)\,dx - \int\limits_a^b F(x)\varphi'(x)\,dx. \tag{4.6}$$

Функция $F(x)$ непрерывна (более того, непрерывно дифференцируема), а функция $\varphi'(x) \leqslant 0$ и интегрируема, следовательно, применима первая теорема о среднем:

$$\int\limits_a^b F(x)\varphi'(x)\,dx = F(\xi)\int\limits_a^b \varphi'(x)\,dx =$$

$$= \left(\int\limits_a^\xi f(x)\,dx\right)[\varphi(b) - \varphi(a)] \tag{4.7}$$

($\xi \in [a; b]$). Подставляя (4.7) в (4.6), получаем:

$$\int\limits_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = \varphi(b)\int\limits_a^b f(x)\,dx - [\varphi(b) - \varphi(a)]\int\limits_a^\xi f(x)\,dx =$$

$$= \varphi(a) \int\limits_a^{\xi} f(x)\,dx + \varphi(b) \left(\int\limits_a^{b} f(x)\,dx - \int\limits_a^{\xi} f(x)\,dx \right) =$$

$$= \varphi(a) \int\limits_a^{\xi} f(x)\,dx + \varphi(b) \int\limits_{\xi}^{b} f(x)\,dx,$$

т. е. при некотором $\xi \in [a; b]$

$$\int\limits_a^{b} f(x)\varphi(x)\,dx = \varphi(a) \int\limits_a^{\xi} f(x)\,dx + \varphi(b) \int\limits_{\xi}^{b} f(x)\,dx.$$

Полученная формула и представлет вторую теорему о среднем.

Замечание. В условии задачи пропущено условие интегрируемости функции $\varphi'(x)$. Это условие существенно в том доказательстве, которое требуется провести согласно условию задачи.

Пользуясь второй теоремой о среднем, оценить интегралы:

2328. $\displaystyle\int\limits_{100\pi}^{200\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx.$

В силу свойства аддитивности интеграла

$$I = \int\limits_{100\pi}^{200\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx = \sum_{k=100}^{199} \int\limits_{\pi k}^{\pi(k+1)} \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

Производя замену $t = x - \pi k$, получаем

$$\int\limits_{\pi k}^{\pi(k+1)} \frac{\sin x}{x}\,dx = (-1)^k \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin t\,dt}{t + \pi k},$$

следовательно,

$$I = \sum_{k=100}^{199} (-1)^k \int_0^{\pi} \frac{\sin t\, dt}{t + \pi k}.$$

Группируя в последней сумме по два слагаемых, имеем

$$I = \sum_{n=50}^{99} \left(\int_0^{\pi} \frac{\sin t\, dt}{t + 2\pi n} - \int_0^{\pi} \frac{\sin t\, dt}{t + \pi(2n+1)} \right) =$$

$$= \pi \sum_{n=50}^{99} \int_0^{\pi} \frac{\sin t\, dt}{(t + 2\pi n)(t + \pi(2n+1))}.$$

Функция

$$\varphi_n(t) = \frac{1}{(t + 2\pi n)(t + \pi(2n+1))}$$

убывает и, применяя вторую теорему о среднем, находим

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t\, dt}{(t + 2\pi n)(t + \pi(2n+1))} = \int_0^{\pi} \sin t\, \varphi_n(t)\, dt =$$

$$= \varphi_n(0) \int_0^{\xi_n} \sin t\, dt = \varphi_n(0)\,(1 - \cos \xi_n) = \frac{1 - \cos \xi_n}{2\pi^2 n(2n+1)}.$$

($\xi_n \in [0; \pi]$).

Таким образом,

$$I = \frac{1}{\pi} \sum_{n=50}^{99} \frac{1 - \cos \xi_n}{2n(2n+1)}.$$

Учитывая. что $0 \leqslant 1 - \cos \xi_n \leqslant 2$, $2n \geqslant 100$, $2n+1 > 100$, получаем

$$I < \frac{1}{\pi} \sum_{n=50}^{99} \frac{2}{100 \cdot 100} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{2}{100 \cdot 100} \right) \cdot 50 = \frac{1}{100\pi}.$$

Следовательно,

$$0 \leqslant I < \frac{1}{100\pi},$$

т. е.

$$0 \leqslant \int\limits_{100\pi}^{200\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx < \frac{1}{100\pi}.$$

2329. $\displaystyle\int\limits_a^b \frac{\mathrm{e}^{-\alpha x}}{x}\,\sin x\,dx \qquad (\alpha \geqslant 0;\ 0 < a < b).$

Функция $\varphi(x) = \mathrm{e}^{-\alpha x}/x$ монотонно убывает. Применяя вторую теорему о среднем, получаем

$$\int\limits_a^b \frac{\mathrm{e}^{-\alpha x}}{x}\,\sin x\,dx = \frac{\mathrm{e}^{-\alpha a}}{a}\int\limits_a^\xi \sin x\,dx = \frac{\mathrm{e}^{-\alpha a}}{a}(\cos a - \cos\xi).$$

Так как $|\cos a - \cos\xi| \leqslant 2$ и $\mathrm{e}^{-\alpha a} \leqslant 1$, то

$$\left|\int\limits_a^b \frac{\mathrm{e}^{-\alpha x}}{x}\,\sin x\,dx\right| \leqslant \frac{2}{a}.$$

2330. $\displaystyle\int\limits_a^b \sin x^2\,dx \qquad (0 < a < b).$

После замены переменной $t = \sqrt{x}$, получаем

$$\int\limits_a^b \sin x^2\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_{a^2}^{b^2} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt.$$

В полученном интеграле функция $\varphi(t) = 1/\sqrt{t}$ убывает. Применяя вторую теорему о среднем, получаем

$$\frac{1}{2}\int\limits_{a^2}^{b^2} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt = \frac{1}{2a}\int\limits_{a^2}^{\xi} \sin t\,dt = \frac{\cos a^2 - \cos\xi^2}{2a}.$$

Так как $|\cos a^2 - \cos \xi^2| \leqslant 2$, то

$$\left|\frac{\cos a^2 - \cos \xi^2}{2a}\right| \leqslant \frac{1}{a},$$

а, следовательно, и

$$\left|\int\limits_a^b \sin x^2\, dx\right| \leqslant \frac{1}{a}.$$

2331. Пусть функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ интегрируемы на промежутке $[a; b]$ вместе со своими квадратами. Доказать неравенство Коши – Буняковского:

$$\left\{\int\limits_a^b \varphi(x)\psi(x)\, dx\right\}^2 \leqslant \int\limits_a^b \varphi^2(x)\, dx \int\limits_a^b \psi^2(x)\, dx. \qquad (4.8)$$

Рассмотрим неотрицательную функцию переменной t:

$$f(t) = \int\limits_a^b (t\varphi(x) + \psi(x))^2\, dx =$$

$$= t^2 \int\limits_a^b \varphi^2(x)\, dx + 2t \int\limits_a^b \varphi(x)\psi(x)\, dx + \int\limits_a^b \psi^2(x)\, dx = At^2 + Bt + C,$$

где

$$A = \int\limits_a^b \varphi^2(x)\, dx\,, \quad B = 2\int\limits_a^b \varphi(x)\psi(x)\, dx\,, \quad C = \int\limits_a^b \psi^2(x)\, dx.$$

а) $A \neq 0$. В этом случае функция $f(t) = At^2 + Bt + C$ представляет собой квадратный трехчлен, который неотрицателен на

всей числовой прямой. Это может быть только в том случае, когда его дискриминант

$$D = B^2 - 4AC \leqslant 0,$$

т. е.

$$4\left(\int\limits_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx\right)^2 \leqslant 4\left(\int\limits_a^b \varphi^2(x)\,dx\right)\left(\int\limits_a^b \psi^2(x)\,dx\right),$$

что равносильно неравенству (4.8).

б) $A = 0$. В этом случае неотрицательна на всей числовой прямой функция $f(t) = Bt + C$. Это возможно тогда и только тогда, когда $B = 0$ и $C \geqslant 0$. Неравенство (4.8) в этом случае принимает вид

$$0^2 \leqslant 0 \cdot C$$

и, очевидно, выполнено.

2332. Пусть функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема на сегменте $[a; b]$ и $f(a) = 0$.

Доказать неравенство

$$M^2 \leqslant (b-a)\int\limits_a^b f'^2(x)\,dx,$$

где

$$M = \sup_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x)|.$$

Так как $f(a) = 0$, то

$$f(x) = \int\limits_a^x f'(t)\,dt.$$

Применяя к интегралу, стоящему в правой части последнего равенства неравенство Коши – Буняковского (см. задачу 2331), получаем:

$$|f(x)|^2 = \left(\int\limits_a^x f'(t)\cdot 1\,dt\right)^2 \leqslant \int\limits_a^x |f'(t)|^2 dt \int\limits_a^x 1^2\,dt =$$

$$= (x-a)\int\limits_a^x |f'(t)|^2 dt \leqslant (b-a)\int\limits_a^b |f'(t)|^2 dt = (b-a)\int\limits_a^b |f'(x)|^2 dx.$$

Переходя в неравенстве

$$|f(x)|^2 \leqslant (b-a)\int\limits_a^b |f'(x)|^2 dx$$

к точной верхней грани, получаем

$$\left(\sup_{a\leqslant x\leqslant b} |f(x)|\right)^2 \leqslant (b-a)\int\limits_a^b |f'(x)|^2 dx,$$

что доказывает утверждение задачи.

2333. Доказать равенство

$$\lim_{n\to+\infty} \int\limits_n^{n+p} \frac{\sin x}{x}\,dx = 0 \quad (p>0).$$

Применяя вторую теорему о среднем (с учетом убывания функции $\varphi(x) = 1/x$), получаем:

$$\int\limits_n^{n+p} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{1}{n}\int\limits_n^{\xi} \sin x\,dx = \frac{\cos n - \cos\xi}{n}.$$

Из этого равенства получаем, что при любом $p > 0$

$$\left| \int\limits_{n}^{n+p} \frac{\sin x}{x}\, dx \right| \leqslant \frac{2}{n},$$

откуда и следует, что

$$\lim_{n \to +\infty} \int\limits_{n}^{n+p} \frac{\sin x}{x}\, dx = 0.$$

Глава 5

Несобственные интегралы

Несобственные интегралы представляют обобщение понятия интеграла на случай неограниченного промежутка интегрирования или неограниченной подынтегральной функции. Для удобства дальнейших формулировок введем понятие локально интегрируемой функции. Пусть X – некоторое подмножество вещественнной прямой. Функцию f, определенную на X, будем называть локально интегрируемой на X, если эта функция интегрируема на любом отрезке, содержащимся в X.

Рассмотрим сначала простейшие несобственные интегралы по промежуткам $[a;+\infty)$, $[a;b)$, $(-\infty;b]$ и $(a;b]$.

Пусть функция f определена и локально интегрируема на промежутке $X = [a;+\infty)$, тогда несобственным интегралом по промежутку X называют величину

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_a^b f(x)\,dx. \tag{5.1}$$

Если предел в правой части равенства (5.1) существует, то интеграл называют сходящимся, в противном случае его называют расходящимся. Если функции f непрерывна, а F – первообразная этой функции на промежутке X, то несобственный интеграл

(5.1) можно вычислить по формуле Ньютона – Лейбница:

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^{+\infty}, \tag{5.2}$$

где под правой частью равенства (5.2) понимается величина

$$F(x)\Big|_a^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} F(x) - F(a).$$

Задача 17. Доказать формулу (5.2).

Сходимость интеграла не зависит от выбора нижнего предела интегрирования. Это свойство составляет содержание следующей задачи.

Задача 18. Если интеграл (5.1) сходится, то при любом $A \geqslant a$ сходится интеграл

$$\int\limits_A^{+\infty} f(x)\,dx. \tag{5.3}$$

Обратно, если при некотором $A \geqslant a$ сходится интеграл (5.3), то сходится и интеграл (5.1).

Пусть функция f определена и локально интегрируема на промежутке $X = [a; b)$, тогда несобственным интегралом по промежутку X называют величину

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{c\to b-0} \int\limits_a^c f(x)\,dx. \tag{5.4}$$

Если предел в правой части равенства (5.4) существует, то несобственный интеграл называют сходящимся, в противном случае его называют расходящимся. Если функции f непрерывна, а F – первообразная этой функции на промежутке X, то несобственный интеграл (5.4) можно вычислить по формуле Ньютона –

Лейбница:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b, \tag{5.5}$$

где под правой частью равенства (5.5) понимается величина

$$F(x)\Big|_a^b = \lim_{x\to b-0} F(x) - F(a).$$

Задача 19. Доказать формулу (5.5).

Сходимость интеграла не зависит от выбора нижнего предела интегрирования. Если сходится интеграл (5.4), то при любом $a' \in \in [a;b)$ также сходится и интеграл по промежутку $[a';b)$. Обратно, если при некотором $a' \in [a;b)$ сходится интеграл по промежутку $[a';b)$, то сходится и интеграл (5.4).

Аналогичным образом определяются другие несобственные интегралы. Несобственный интеграл по промежутку $X=(-\infty;b]$:

$$\int\limits_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Несобственный интеграл от функции, определенной на $X=(a;b]$:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{c\to a+0} \int\limits_c^b f(x)\,dx.$$

Если функции f непрерывна, а F – первообразная этой функции на промежутке X, то

$$\int\limits_{-\infty}^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_{-\infty}^b = F(b) - \lim_{x\to-\infty} F(x),$$

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - \lim_{x\to a+0} F(x).$$

Сходимость интегралов по промежуткам $(-\infty; b]$ и $(a; b]$ не зависит от выбора верхнего предела интегрирования.

Для несобственных интегралов по промежуткам $[a; b)$ и $(a; b]$ используется то же самое обозначение, что и для собственного (определенного) интеграла по отрезку $[a; b]$. Это не приводит к недоразумениям: в том случае, когда существует собственный интеграл, оба несобственных интеграла равены собственному.

Задача 20. Пусть функция f интегрируема на отрезке $[a; b]$, тогда несобственные интегралы от f по промежуткам $[a; b)$ и $(a; b]$ существуют и совпадают с определеным интегралом по отрезку $[a; b]$.

Для промежутка $X = (-\infty; +\infty)$ несобственный интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int\limits_{c}^{+\infty} f(x)\,dx, \tag{5.6}$$

где c – произвольная точка. Интеграл называют сходящимся, если сходятся оба интеграла в правой части равенства (5.6). Сходимость интеграла и его значение не зависят от выбора точки c. Если функции f непрерывна на всей числовой прямой, а F – первообразная этой функции, то

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = F(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} F(x) - \lim_{x\to-\infty} F(x).$$

Если подынтегральная функция f на промежутке интегрирования $[a; b]$ не определена в одной или нескольких точках, то выбирают такое разбиение $T = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ отрезка $[a; b]$, чтобы на каждом из отрезков разбиения функция f не была определена только в одной точке и полагают

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx. \tag{5.7}$$

Интеграл называют сходящимся, если сходятся все несобственные интегралы, входящие в правую часть равенства (5.7). Сходимость интеграла и его величина не зависят от выбора разбиения T.

При определении интеграла по промежутку $[a; +\infty)$, содержащему конечное число точек, в которых подынтегральная функция не определена, поступают следующим образом. Выбирают точку b настолько большой, чтобы функция f была определена во всех точках промежутка $[b; +\infty)$ и полагают

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx + \int\limits_b^{+\infty} f(x)\,dx \tag{5.8}$$

(несобственный интеграл по промежутку $[a; b]$ был определн выше формулой (5.7). Сходимость и значение несобственного интеграла (5.8) не зависят от выбора точки b.

Так же определяется интеграл и по промежутку $(-\infty; b]$, содержащему конечное число точек, в которых функция f не определена. Выбирают точку a так, чтобы на промежутке $(-\infty; a]$ функция f была определена во всех точках и полагают

$$\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\,dx + \int\limits_a^b f(x)\,dx. \tag{5.9}$$

Сходимость и значение несобственного интеграла (5.9) не зависят от выбора точки a.

Наконец, при определении интеграла по всей числовой прямой от функции, которая не определена в конечном числе точек, выбирают числа a и b так, чтобы все эти точки содержались на отрезке $[a; b]$ и полагают

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int\limits_a^b f(x)\,dx + \int\limits_b^{+\infty} f(x)\,dx. \tag{5.10}$$

Сходимость и значение несобственного интеграла (5.10) не зависят от выбора чисел a и b.

Использование формулы Ньютона – Лейбница для вычисления несобственных интегралов не вносит новых принципиальных моментов по сравнению с вычислением собственных интегралов. Дополнительно имеется лишь технический аспект, связанный с умением вычислять пределы функций. С помощью этой формулы вычисляются интегралы в задачах 2334 – 2347, 2349, 2350.

Для вычисления несобственных интегралов тоже можно применять технику, разработанную для неопределенных и собственных интегралов. К ней прежде всего относятся формулы интегрирования по частям и замены переменной.

Проще всего переносится на несобственные интегралы формула интегрирования по частям. Так как произвольный несобственный интеграл представим в виде суммы простейших, то достаточно рассмотреть этот вопрос для простейших интегралов. Для несобственного интеграла вида (5.1)

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_a^{+\infty} - \int\limits_a^{+\infty} f'(x)g(x)\,dx. \qquad (5.11)$$

Задача 21. Пусть функции f и g непрерывно дифференцируемы на промежутке $[a;+\infty)$ и в формуле (5.11) существуют две из трех величин: два несобственных интеграла и подстановка на бесконечности. Тогда существует третья из этих величин и справедливо равенство (5.11).

Для остальных несобственнных интегралов формулы интегрирования по частям выглядят аналогично. Например, для несобственного интеграла (5.4)

$$\int\limits_a^{b} f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_a^{b} - \int\limits_a^{b} f'(x)g(x)\,dx. \qquad (5.12)$$

В этой главе интегрирование по частям в несобственном интеграле применяется только в задачах 2348 и 2352 для интеграла

вида (5.1). При решении остальных задач, в случае необходимости, мы применяем интегрировние по частям в неопределенном интеграле.

Принципиальных трудностей в переносе формулы замены переменной на несобственный интеграл нет. Каждая из формул замены получается с помощью предельного перехода из формулы замены переменной для определенного интеграла. При этом для любого из четырех простейших несобственных интегралов может получиться также любой из них. Таким образом, мы имеем 16 вариантов этой формулы и проблема заключается в том, чтобы постараться записать их, по возможности, одной формулой. Мы можем это сделать, используя символическую запись. Пусть $<\alpha;\beta>$ обозначает любой из четырех промежутков $[0;+\infty)$, $[a;b)$, $(-\infty;b]$, $(a;b]$ так, что буквы α и β могут обозначать соответствующую бесконечность, а символы $<$, $>$ используются для обозначения одной из двух скобок – либо квадратной, либо круглой. Формула замены имеет вид

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = \int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\,dt. \tag{5.13}$$

В этой формуле значения $\varphi(\alpha)$ и $\varphi(\beta)$ также следует понимать символически: если функция φ не определена при $x=\alpha$ или при $x=\beta$ (в частности, если один из этих символов обозначает бесконечность), то под значением функции φ в этой точке понимается соответствующий предел. Для справедливости формулы (5.13) достаточно, чтобы функция $\varphi \in C^1 <\alpha;\beta>$, а функция f была непрерывна на области значений функции φ. В качестве примера приведем формулу замены переменной, преобразующей интеграл типа (5.1) в интеграл типа (5.2):

$$\int\limits_{a}^{+\infty} f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = \int\limits_{\varphi(a)}^{\varphi(+\infty)} f(t)\,dt, \tag{5.14}$$

где

$$\varphi(+\infty) = \lim_{x\to+\infty} \varphi(x). \tag{5.15}$$

Задача 22. Пусть функция $\varphi \in C^1[a;+\infty)$ и существует предел (5.15), а функция f непрерывна на области значений функции φ. Тогда справедлива формула (5.15).

Так же, как и для определеного интеграла, формула (5.13) обобщается для прозвольной интегрируемой функции f: если функция f интегрируема на любом отрезке, содержащемся в промежутке $<\varphi(\alpha);\varphi(\beta)>$, несобственный интеграл в правой части равенства (5.13) сходится и функция φ строго монотонна, то справедлива формула (5.13).

Отдельную тему составляет исследование несобственных интегралов на сходимость. Из определения сходимости следует, что это исследование достаточно уметь проводить для четырех простейших несобственных интегралов по промежуткам $[a;+\infty)$, $[a;b)$, $(-\infty;b]$, $(a;b]$.

Наиболее разработана техника исследования интегралов от знакопостоянных функций. Для них имеется обширная система различных признаков сравнения. Все они основаны на следующем свойстве несобственных интегралов: если на промежутке интегрирования выполнено неравенство

$$0 \leqslant f(x) \leqslant g(x),$$

то из сходимости интеграла от g следует сходимость интеграла от f, а из расходимости интеграла от f следует расходимость интеграла от g.

Для компактности формулировок обозначим символом ω особую точку для каждого из этих четырех интегралов. В порядке их перечисления, это, соответственно, $\omega = +\infty$, $\omega = b$, $\omega = a$ и $\omega = -\infty$. В этих признаках фигурируют такие обозначения, как o, O и $\sim$. Напомним их определение.

Функция $f = o(g)$ при $x \to \omega$, если в некоторой окрестности точки ω (кроме, быть может, самой точки ω) $f = gh$, где h –

некоторая бесконечно малая функция при $x \to \omega$ (т. е. имеющая нулевой предел при $x \to \omega$).

Функция $f = O(g)$ при $x \to \omega$, если в некоторой окрестности точки ω (кроме, быть может, самой точки ω) $f = gh$, где h – некоторая локально ограниченная при $x \to \omega$ функция.

Функция $f \sim g$ при $x \to \omega$ (эквивалентность), если в некоторой окрестности точки ω (кроме, быть может, самой точки ω) $f = gh$, где h – имеющая при $x \to \omega$ предел, равный 1.

Достаточные условия выполнимости этих соотношений можно дать в терминах пределов. Если существует

$$C = \lim_{x \to \omega} \frac{f(x)}{g(x)},$$

то при $C = 0$ функция $f = o(g)$ (отсюда следует, что также и одновременно $f = O(g)$). При $C \neq 0$ выполнены оба соотношения $f = O(g)$ и $g = O(f)$. При $C = 1$ справедлива эквивалентность $f \sim g$.

Важным свойством для исследования сходимости интегралов является наличие у подынтегральной функции степенной асимптотики при $x \to \omega$. Для исследования простейших интегралов удобно использовать асимптотическую формулу со степенным показателем в знаменателе. При $x \to +\infty$, $x \to b - 0$, $x \to +\infty$ и $x \to a + 0$ мы будем использовать, соответственно, следующие формы асимптотики:

$$f(x) \sim \frac{C}{x^p} \quad (C \neq 0), \tag{5.16}$$

$$f(x) \sim \frac{C}{(b-x)^p} \quad (C \neq 0), \tag{5.17}$$

$$f(x) \sim \frac{C}{|x|^p} \quad (C \neq 0), \tag{5.18}$$

$$f(x) \sim \frac{C}{(x-a)^p} \quad (C \neq 0). \tag{5.19}$$

Если функция имеет степенную асимптотику, то параметры C и p определяются однозначно. Значение p, входящее в формулы (5.16)–(5.19), мы будем называть порядком асимптотики.

Перейдем к формулировке признаков сравнения.

1. Пусть $f(x) = o(g(x))$ при $x \to \omega$. Если интеграл от функции g сходится, то интеграл от f также сходится. Если интеграл от функции f расходится, то интеграл от g также расходится.

2. Пусть $f(x) = O(g(x))$ при $x \to \omega$. Если интеграл от функции g сходится, то интеграл от f также сходится. Если интеграл от функции f расходится, то интеграл от g также расходится.

3. Пусть существует

$$C = \lim_{x \to \omega} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Если интеграл от функции g сходится, то интеграл от f также сходится. Если интеграл от функции f расходится, то интеграл от g также расходится. Если величина $C \neq 0$, то интегралы от функций f и g сходятся или расходятся одновременно.

4. Если $f \sim g$ при $x \to \omega$, то интегралы от функций f и g сходятся или расходятся одновременно.

5. Пусть подынтегральная функция f в несобственном интеграле по одному из промежутков $[a; +\infty)$, $[a; b)$, $(-\infty; b]$ или $(a; b]$ имеет соответствующую степенную асимптотику (5.16), (5.17), (5.18) или (5.19). Тогда для интегралов по промежуткам $[a; +\infty)$ и $(-\infty; b]$ интеграл сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leqslant 1$, а для интегралов по промежуткам $[a; b)$ и $(a; b]$ интеграл сходится при $p < 1$ и расходится при $p \geqslant 1$.

Если подынтегральная функция меняет знак на промежутке интегрирования, то признаки сравнения, вообще говоря, не применимы. Однако может оказаться полезным вместо самой функции рассматривать ее модуль. Если сходится интеграл от модуля функции, то такой несобственный интеграл называют абсолютно сходящимся. Можно показать, что если интеграл абсолютно сходится, то он сходится. К интегралу от модуля функции

признаки сравнения применимы. Это дает возможность исследования интегралов от знакопеременных функция с помощью признаков сравнения. Однако такой подход имеет существенное ограничение, его можно использовать только для доказательства сходимости. Интеграл от модуля функции может расходится, но интеграл от самой функции может сходиться. Такие интегралы называют условно сходящимися.

Из критериев сходимости, пригодных для произвольных функций, наиболее важным является критерий Коши. Для любого из четырех основных промежутков $[a;+\infty)$, $[a;b)$, $(-\infty;b]$, $(a;b]$ сходимость интеграла равносильна существованию предела

$$\lim_{x\to\omega} F(x)$$

любой одной из первообразных F подынтегральной функции f в особой точке ω. Критерий Коши существования этого предела и называется критерием Коши сходимости соответствующего несобственного интеграла. При формулировке критерия нужно учитывать, что по формуле Ньютона – Лейбница

$$F(x_2) - F(x_1) = \int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx.$$

Так для сходимости интеграла по промежутке $[a;+\infty)$, получаем следующее условие: для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $D > a$, что при всех $x_1, x_2 \in (D;+\infty)$ выполнено неравенство

$$\left|\int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx\right| < \varepsilon.$$

Задача 23. Сформулировать критерий Коши для интеграла по промежутку $[a;b)$.

Задача 24. Сформулировать критерий Коши для интеграла по промежутку $(-\infty;b]$.

Задача 25. Сформулировать критерий Коши для интеграла по промежутку $(a; b]$.

Задача 26. Пусть функция f ограничена и локально интегрируема на промежутке $[a; b)$. Доказать, что несобственный интеграл от функции f по промежутку $[a; b)$ сходится.

Задача 27. Пусть функция f ограничена и локально интегрируема на промежутке $(a; b]$. Доказать, что несобственный интеграл от функции f по промежутку $(a; b]$ сходится.

Задача 28. Пусть функция f непрерывна и ограничена на промежутке $[a;b)$. Доказать, что несобственный интеграл от функции f по промежутку $[a; b)$ сходится.

Задача 29. Пусть функция f непрерывна и ограничена на промежутке $(a;b]$. Доказать, что несобственный интеграл от функции f по промежутку $(a; b]$ сходится.

Часто в приложениях встречаются несобственные интегралы, содержащие произведение двух функций. Для таких интегралов разработаны признаки Абеля и Дирихле. Приведем их формулировки. Пусть Δ обозначает один из четырех основных промежутков: $[a; +\infty)$, $[a; b)$, $(-\infty; b]$ или $(a; b]$.

Признак Абеля. Пусть сходится интеграл

$$\int\limits_{\Delta} f(x)\,dx,$$

а функция g монотонна и ограничена на Δ. Тогда интеграл

$$\int\limits_{\Delta} f(x)g(x)\,dx \tag{5.20}$$

сходится.

Признак Дирихле. Пусть функция f локально интегрируема на промежутке Δ, и имеет ограниченную на Δ первообразную, а функция g монотонна и имеет нулевой предел в особой точке

$$\lim_{x\to\omega} g(x) = 0.$$

Тогда интеграл (5.20) сходится.

Замечание. Так как две первообразные одной функции отличаются на постоянную, то проверку ограниченности можно проводить для любой из них.

Если несобственный интеграл расходится, то иногда ему можно все же приписать определенную величину, называемую главным значением интеграла. Пусть функция f локально интегрируема на множестве $X = [a; c) \cup (c; b]$. Главным значением несобственного интеграла по отрезку $[a; b]$ называют величину

$$\text{v.p.} \int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0+0} \left(\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int\limits_{c+\varepsilon}^b f(x)\,dx \right).$$

Если несобственный интеграл сходится, то главное значение интеграла существует и равно несобственному интегралу.

Задача 30. Пусть $a < c < b$, показать, что

$$\text{v.p.} \int\limits_a^b \frac{dx}{x-c} = \ln \frac{b-c}{c-a}.$$

Задача 31. Пусть $a < c < b$ и n – натуральное, $n \geqslant 2$, показать, что при нечетном n

$$\text{v.p.} \int\limits_a^b \frac{dx}{(x-c)^n} = \frac{1}{n-1} \left[\frac{1}{(a-c)^{n-1}} - \frac{1}{(b-c)^{n-1}} \right],$$

а при четном n главное значение этого интеграла равно $+\infty$.

Аналогичным образом можно ввести понятие главного значения и для других видов несобственных интегралов. Пусть функция f локально интегрируема на множестве $X = [a; b) \cup (b; +\infty)$, причем несобственный интеграл от f по промежутку $[c; +\infty)$ сходится при любом $c > b$. Тогда

$$\text{v.p.} \int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0+0} \left(\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx + \int\limits_{b+\varepsilon}^{+\infty} f(x)\,dx \right).$$

Можно ввести понятие главного значения и для сходимости на бесконечности. Пусть функция f локально интегрируема на всей числовой прямой, тогда

$$\text{v.p.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{D\to+\infty} \int\limits_{-D}^{D} f(x)\,dx.$$

Вычислить интегралы:

2334. $\displaystyle\int\limits_{a}^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ $(a > 0)$.

$$\int\limits_{a}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_{a}^{+\infty} = \frac{1}{a}\,.$$

2335. $\displaystyle\int\limits_{0}^{1} \ln x\,dx$.

Согласно решению задачи 1791 из [1]

$$\int\limits_{0}^{1} \ln x\,dx = \Big(x\ln x - x\Big)\Big|_{0}^{1} = -1\,.$$

2336. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \Big(\operatorname{arctg} x\Big)\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \pi\,.$$

2337. $\displaystyle\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \Big(\arcsin x\Big)\Big|_{-1}^{1} = \pi\,.$$

2338. $\displaystyle\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x-2}.$

$$\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x-2} = \frac{1}{3}\int\limits_{2}^{+\infty}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+2}\right)dx =$$

$$= \left(\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|\right)\Bigg|_{2}^{+\infty} = \frac{2}{3}\,\ln 2\,.$$

2339. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+x+1)^2}.$

Согласно решению задачи 1921 из [1]

$$\int \frac{dx}{(x^2+x+1)^n} = \frac{2x+1}{3(n-1)(x^2+x+1)^{n-1}} +$$

$$+\frac{2(2n-3)}{3(n-1)}\int \frac{dx}{(x^2+x+1)^{n-1}}.$$

Применяя эту формулу для $n=2$, находим

$$\int \frac{dx}{(x^2+x+1)^2} = \frac{2x+1}{3(x^2+x+1)} + \frac{2}{3}\int \frac{dx}{x^2+x+1}.$$

Оставшийся интеграл сводим к табличному, выделяя в знаменателе полный квадрат:

$$\int \frac{dx}{x^2+x+1} = \int \frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+x+1)^2} =$$

$$= \left(\frac{2x+1}{3(x^2+x+1)} + \frac{4}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right) \Bigg|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}\,.$$

2340. $\displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$.

Согласно решению задачи 1881 из [1]

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3} = \left(\frac{1}{6} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} \right) \Bigg|_{0}^{+\infty} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

2341. $\displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx$.

Согласно решению задачи 1712 из [1]

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x^2-1}{x\sqrt{2}} \right) \Bigg|_{0}^{+\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

2342. $\displaystyle\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$.

Интеграл рационализируется заменой

$$y = \sqrt{1-x}, \quad x = 1-y^2, \quad dx = -2y\,dy.$$

После замены получаем:

$$\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}} = 2\int\limits_{0}^{1} \frac{dy}{1+y^2} = \Big(2 \operatorname{arctg} y\Big) \Big|_{0}^{1} = \frac{\pi}{2}\,.$$

2343. $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^5+x^{10}}}.$

Делая последовательно замены $y = 1/x^5$ и $u = y + \frac{1}{2}$, получаем:

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^5+x^{10}}} = \frac{1}{5}\int\limits_0^1 \frac{dy}{\sqrt{y^2+y+1}} =$$

$$= \frac{1}{5}\int\limits_0^1 \frac{d\left(y+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}} = \frac{1}{5}\int\limits_{1/2}^{3/2} \frac{du}{\sqrt{u^2+\frac{3}{4}}} =$$

$$= \frac{1}{5}\ln\left(u+\sqrt{u^2+\frac{3}{4}}\right)\Bigg|_{1/2}^{3/2} = \frac{1}{5}\ln\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right).$$

2344. $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\,dx.$

Применяя интегрирование по частям, вычислим неопределенный интеграл:

$$\int \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int \ln x\; d\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = -\frac{\ln x}{2(1+x^2)} +$$

$$+\int \frac{dx}{2x(1+x^2)} = -\frac{\ln x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2}\right)dx =$$

$$= -\frac{\ln x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\ln x - \ln(1+x^2) + C.$$

Следовательно,

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\,dx = \left[-\frac{\ln x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\ln x - \ln(1+x^2)\right]\Bigg|_0^{+\infty}.$$

Для вычисления предела в нуле сгруппируем вместе первое и второе слагаемые

$$\lim_{x\to 0}\left[-\frac{\ln x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{2}\ln x-\ln(1+x^2)\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\ln x}{2(1+x^2)}-\lim_{x\to 0}\ln(1+x^2)=0.$$

Для того, чтобы вычислить предел на бесконечности, сгруппируем второе и третье слагаемые

$$\lim_{x\to +\infty}\left[-\frac{\ln x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{2}\ln x-\ln(1+x^2)\right]=$$

$$=-\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{2}\lim_{x\to +\infty}\ln\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=0.$$

Таким образом,

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\,dx=0.$$

Замечание. Если в интеграле сделать замену $t=1/x$, то получим

$$I=\int\limits_0^{+\infty}\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\,dx=-\int\limits_0^{+\infty}\frac{t\ln t}{(1+t^2)^2}\,dt=-I.$$

Отсюда непосредственно (без вычисления интеграла) следует, что $I=0$.

2345. $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg} x}{(1+x^2)^{3/2}}\,dx.$

Согласно решению задачи 1684 из [1]

$$\int\frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}}=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{(1+x^2)^{3/2}} = d\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right).$$

Интегрируя дважды по частям, получаем:

$$\int \frac{\operatorname{arctg} x}{(1+x^2)^{3/2}}\,dx = \int \operatorname{arctg} x\, d\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \frac{x\operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}} -$$

$$-\int \frac{x}{(1+x^2)^{3/2}}\,dx = \frac{x\operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}} - \int x\, d\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) =$$

$$= \frac{x\operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} + \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}} =$$

$$= \frac{x\operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} + \sqrt{1+x^2} + C.$$

Таким образом,

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{(1+x^2)^{3/2}}\,dx = \left[\frac{x\operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} + \sqrt{1+x^2}\right]\Bigg|_0^{+\infty} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x\operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} + \sqrt{1+x^2}\right] - 1.$$

Для вычисления предела сгруппируем второе и третье слагаемые

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x\operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} + \sqrt{1+x^2}\right] =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x\operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right] = \frac{\pi}{2}.$$

Искомый интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{(1+x^2)^{3/2}}\,dx = \frac{\pi}{2} - 1.$$

2346. $\int\limits_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax} \cos bx\, dx \ (a > 0).$

Согласно решению задачи 1828 из [1]

$$\int\limits_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax} \cos bx\, dx = \frac{-a\cos bx + b\sin bx}{a^2+b^2}\, \mathrm{e}^{-ax} + C,$$

следовательно,

$$\int\limits_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax} \cos bx\, dx = \left[\frac{-a\cos bx + b\sin bx}{a^2+b^2}\, \mathrm{e}^{-ax}\right]\Bigg|_0^{+\infty} = \frac{a}{a^2+b^2}.$$

2347. $\int\limits_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax} \sin bx\, dx \ (a > 0).$

Согласно решению задачи 1829 из [1]

$$\int\limits_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax} \sin bx\, dx = -\frac{a\sin bx + b\cos bx}{a^2+b^2}\, \mathrm{e}^{-ax} + C,$$

следовательно,

$$\int\limits_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax} \cos bx\, dx = \left[-\frac{a\sin bx + b\cos bx}{a^2+b^2}\, \mathrm{e}^{-ax}\right]\Bigg|_0^{+\infty} = \frac{b}{a^2+b^2}.$$

С помощью формул понижения вычислить следующие несобственные интегралы (n – натуральное число):

2348. $I_n = \int\limits_0^{+\infty} x^n \mathrm{e}^{-x} dx.$

Интегрируя по частям, находим

$$I_n = -\int\limits_0^{+\infty} x^n d\left(\mathrm{e}^{-x}\right) = -x^n \mathrm{e}^{-x}\Big|_0^{+\infty} +$$

$$+n\int\limits_0^{+\infty} x^{n-1}\mathrm{e}^{-x}dx = 0 + nI_{n-1} = nI_{n-1}.$$

Это дает рекуррентное соотношение

$$I_n = nI_{n-1}.$$

Так как

$$I_0 = \int\limits_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}dx = -\mathrm{e}^{-x}\Big|_0^{+\infty} = 1,$$

то, применяя рекуррентное соотношение n раз, получаем:

$$I_n = nI_{n-1} = n(n-1)I_{n-2} = \cdots = n!I_0 = n!.$$

Следовательно,

$$\int\limits_0^{+\infty} x^n\mathrm{e}^{-x}dx = n!$$

2349. $I_n = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{dx}{(ax^2+2bx+c)^n} \quad (ac-b^2>0).$

Согласно решению задачи 1921 с заменой b на $2b$

$$\int \frac{dx}{(ax^2+2bx+c)^n} = \frac{ax+b}{2(n-1)\Delta(ax^2+2bx+c)^{n-1}} +$$

$$+\frac{(2n-3)a}{2(n-1)\Delta}\int \frac{dx}{(ax^2+2bx+c)^{n-1}},$$

где $\Delta = ac-b^2$. Таким образом,

$$I_n = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(ax^2+2bx+c)^n} =$$

$$= \left[\frac{ax+b}{2(n-1)\Delta(ax^2+2bx+c)^{n-1}}\right]\Bigg|_{-\infty}^{+\infty} +$$

$$+\frac{(2n-3)a}{2(n-1)\Delta}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(ax^2+2bx+c)^{n-1}} = \frac{(2n-3)a}{2(n-1)\Delta}\,I_{n-1}.$$

Это приводит к рекуррентному соотношению

$$I_n = \frac{(2n-3)a}{(2n-2)\Delta}\,I_{n-1}.$$

Применяя полученное соотношение $n-1$ раз, находим:

$$I_n = \frac{(2n-3)a(2n-5)a\ldots 3a\cdot a}{(2n-2)\Delta(2n-4)\Delta\ldots(4\Delta)(2\Delta)}\,I_1 =$$

$$= \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\left(\frac{a}{\Delta}\right)^{n-1} I_1.$$

Так как $ac-b^2>0$, то после замены $y = x+\frac{b}{a}$ имеем:

$$I_1 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{ax^2+2bx+c} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\left(x+\dfrac{b}{a}\right)}{a\left(x+\dfrac{b}{a}\right)^2+\dfrac{ac-b^2}{a}} =$$

$$= \frac{1}{a}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{du}{u^2+\dfrac{ac-b^2}{a^2}} = \frac{1}{a}\left[\frac{a}{\sqrt{ac-b^2}}\operatorname{arctg}\frac{au}{\sqrt{ac-b^2}}\right]\Bigg|_{-\infty}^{+\infty} =$$

$$= \frac{\pi\operatorname{sgn}a}{\sqrt{ac-b^2}}.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(ax^2+2bx+c)^n} = \frac{(2n-3)!!\pi a^{n-1}\operatorname{sgn}a}{(2n-2)!!(ac-b^2)^{n-\frac{1}{2}}}.$$

2350. $I_n = \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x(x+1)\dots(x+n)}$.

Разложим подынтегральную функцию на элементарные дроби

$$\frac{1}{x(x+1)\dots(x+n)} = \frac{c_0}{x} + \frac{c_1}{x+1} + \dots + \frac{c_n}{x+n}.$$

Приводя к общему знаменателю и освобождаясь от него, получаем тождество

$$1 = c_0(x+1)\dots(x+n) + \dots$$

$$\dots + c_k x(x+1)\dots(x+k-1)(x+k+1)\dots(x+n) + \dots$$

$$\dots + c_n x(x+1)\dots(x+n-1).$$

Полагая в этом тождестве $x = -k$ и учитывая, что все слагаемые в правой части кроме k-го (слагаемые нумеруются с нуля) равны нулю, имеем:

$$1 = c_k(-k)(-k+1)\dots(-1)(1)(2)\dots(n-k),$$

откуда находим

$$c_k = \frac{(-1)^k}{k!(n-k)!} = \frac{(-1)^k C_n^k}{n!}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{x(x+1)\dots(x+n)} = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k C_n^k}{x+k}.$$

Интегрируя это равенство, получаем

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x(x+1)\dots(x+n)} = \left[\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k \ln(x+k)\right]\Bigg|_1^{+\infty} =$$

$$= \frac{1}{n!} \lim_{x\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k \ln(x+k) - \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k \ln(k+1).$$

Из формулы бинома Ньютона следует, что

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = (1-1)^n = 0,$$

Поэтому

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k \ln(x+k) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k \ln(x+k) - \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k \right) \ln(x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k \left(\ln(x+k) - \ln(x) \right) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k \ln \frac{x+k}{x}.$$

Таким образом,

$$\lim_{x\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k \ln(x+k) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k \lim_{x\to+\infty} \ln \frac{x+k}{x} = 0$$

и искомый интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(x+1)\dots(x+n)} = -\frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k \ln(k+1) =$$

$$= \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} C_n^k \ln(k+1) = \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} C_n^k \ln(k+1)$$

(слагаемое, отвечающее $k = 0$, равно нулю).

2351. $I_n = \int_0^1 \frac{x^n \, dx}{\sqrt{(1-x)(1+x)}}.$

Замена $t = \arcsin x$ $(x = \sin t)$ дает

$$I_n = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^n t\, dt.$$

Согласно решению задачи 2882

$$I_n = \begin{cases} \dfrac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \cdot \dfrac{\pi}{2}, & n = 2k, \\[2ex] \dfrac{(2k)!!}{(2k+1)!!}, & n = 2k+1. \end{cases}$$

2352. $I_n = \displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{\operatorname{ch}^{n+1} x}.$

Используя свойства гиперболических функций и интегрируя по частям, получаем:

$$I_n = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^{n+1} x}\, dx = I_{n-2} - \int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^{n+1} x}\, dx =$$

$$= I_{n-2} + \frac{1}{n} \int\limits_0^{+\infty} \operatorname{sh} x\, d\left(\frac{1}{\operatorname{ch}^n x}\right) = I_{n-2} +$$

$$+ \frac{1}{n} \left[\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^n x}\Bigg|_0^{+\infty} - \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{\operatorname{ch}^{n-1} x} \right] =$$

$$= I_{n-2} + \frac{1}{n}\left[0 - I_{n-2}\right] = \frac{n-1}{n}\, I_{n-2}.$$

Таким образом, для рассматриваемого интеграла имеет место рекуррентное соотношение

$$I_n = \frac{n-1}{n}\, I_{n-2}.$$

Нетрудно вычислить интегралы при $n = 0$ и $n = 1$:

$$I_0 = \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{\operatorname{ch} x} = \int\limits_0^{+\infty} \frac{d(\operatorname{sh} x)}{\operatorname{ch}^2 x} =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} \frac{d(\operatorname{sh} x)}{1 + \operatorname{sh}^2 x} = \operatorname{arctg}(\operatorname{sh} x)\Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}.$$

$$I_1 = \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x\Big|_0^{+\infty} = 1.$$

Далее воспользуемся рекуррентным соотношением. При $n = 2k$ применим рекуррентное соотношение k раз, получаем

$$I_n = I_{2k} = \frac{2k-1}{2k} I_{2k-2} = \ldots = \frac{(2k-1)(2k-3)\ldots 3 \cdot 1}{(2k)(2k-2)\ldots 4 \cdot 2} I_0 =$$

$$= \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{(n-1)!!}{n!!} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

При $n = 2k+1$ применим рекуррентное соотношение k раз:

$$I_n = I_{2k+1} = \frac{2k}{2k+1} I_{2k-1} = \ldots$$

$$\ldots = \frac{(2k)(2k-2)\ldots 4 \cdot 2}{(2k+1)(2k-1)\ldots 5 \cdot 3} I_1 = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} \cdot 1 = \frac{(n-1)!!}{n!!}.$$

Следовательно,

$$I_n = \begin{cases} \dfrac{(n-1)!!}{n!!} \cdot \dfrac{\pi}{2}, & n \text{ – четное}, \\[2ex] \dfrac{(n-1)!!}{n!!}, & n \text{ – нечетное}. \end{cases}$$

2353. а) $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2} \ln \sin x \, dx$; б) $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2} \ln \cos x \, dx$.

Пусть

$$I_1 = \int\limits_0^{\pi/2} \ln\sin x\,dx\,, \quad I_2 = \int\limits_0^{\pi/2} \ln\cos x\,dx.$$

Покажем, что $I_1 = I_2$, для этого в I_2 сделаем замену $x = \dfrac{\pi}{2} - t$:

$$I_2 = -\int\limits_{\pi/2}^{0} \ln\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) dt = \int\limits_0^{\pi/2} \ln\sin t\,dt = I_1.$$

Обозначим общее значение этих интегралов через I. Тогда

$$2I = I_1 + I_2 = \int\limits_0^{\pi/2} \ln\sin x\,dx + \int\limits_0^{\pi/2} \ln\cos x\,dx =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/2} [\ln\sin x + \ln\cos x]\,dx = \int\limits_0^{\pi/2} \ln(\sin x\cos x)\,dx =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/2} \ln\frac{\sin 2x}{2}\,dx = \int\limits_0^{\pi/2} [\ln\sin 2x - \ln 2]\,dx =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/2} \ln\sin 2x\,dx - \frac{\pi}{2}\ln 2.$$

Преобразуем интеграл в правой части последнего равенства, делая замену $2x = t$:

$$\int\limits_0^{\pi/2} \ln\sin 2x\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi} \ln\sin t\,dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2} \ln\sin t\,dt + \frac{1}{2}\int\limits_{\pi/2}^{\pi} \ln\sin t\,dt.$$

Если во втором из полученных интегралов сделать замену $z = \pi - t$, получим

$$\int\limits_{\pi/2}^{\pi} \ln\sin t\,dt = -\int\limits_{\pi/2}^{0} \ln\sin(\pi - z)dz = \int\limits_{0}^{\pi/2} \ln\sin z\,dz.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{0}^{\pi/2} \ln\sin 2x\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\pi/2} \ln\sin t\,dt + \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\pi/2} \ln\sin z\,dz = \frac{1}{2}\,I + \frac{1}{2}\,I = I,$$

что приводит к уравнению

$$2I = I - \frac{\pi}{2}\,\ln 2.$$

Решая полученное уравнение, находим:

$$I = -\frac{\pi}{2}\,\ln 2,$$

т. е.

$$\int\limits_{0}^{\pi/2} \ln\sin x\,dx = \int\limits_{0}^{\pi/2} \ln\cos x\,dx = -\frac{\pi}{2}\,\ln 2.$$

2354. Найти

$$\int\limits_{E} \mathrm{e}^{-x/2}\,\frac{|\sin x - \cos x|}{\sqrt{\sin x}}\,dx,$$

где E – множество тех значений x интервала $(0; +\infty)$, для которых подынтегральное выражение имеет смысл.

Прежде всего, вычислим неопределенный интеграл от подынтегральной функции с опущенным знаком модуля:

$$\int \mathrm{e}^{-x/2}\,\frac{\sin x - \cos x}{\sqrt{\sin x}}\,dx =$$

$$= \int \left(\mathrm{e}^{-x/2}\sqrt{\sin x} - \mathrm{e}^{-x/2}\frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} \right) dx =$$

$$= \int \left(-2\mathrm{e}^{-x/2}\sqrt{\sin x} \right)' dx = -2\mathrm{e}^{-x/2}\sqrt{\sin x} + C.$$

Область определения подынтегральной функции

$$E = \bigcup_{n=0}^{\infty} (2\pi n; \pi + 2\pi n)$$

и рассматриваемый интеграл

$$\int\limits_E \mathrm{e}^{-x/2}\frac{|\sin x - \cos x|}{\sqrt{\sin x}}\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_{2\pi n}^{\pi+2\pi n} \mathrm{e}^{-x/2}\,\frac{|\sin x - \cos x|}{\sqrt{\sin x}}\, dx.$$

На промежутке $[2\pi n; \pi/4 + 2\pi n]$ модуль $|\sin x - \cos x| = -(\sin x - \cos x)$, а на участке $[\pi/4 + 2\pi n; \pi + 2\pi n]$ величина $|\sin x - \cos x| = \sin x - \cos x$. Следовательно, учитывая найденный выше неопределенный интеграл, имеем:

$$\int\limits_{2\pi n}^{\pi+2\pi n} \mathrm{e}^{-x/2}\,\frac{|\sin x - \cos x|}{\sqrt{\sin x}}\, dx = \left(2\mathrm{e}^{-x/2}\sqrt{\sin x}\right)\Big|_{2\pi n}^{\pi/4+2\pi n} -$$

$$- \left(2\mathrm{e}^{-x/2}\sqrt{\sin x}\right)\Big|_{\pi/4+2\pi n}^{\pi+2\pi n} = 2\sqrt[4]{8}\,\mathrm{e}^{-\pi/8}\mathrm{e}^{-\pi n}.$$

Таким образом,

$$\int\limits_E \mathrm{e}^{-x/2}\,\frac{|\sin x - \cos x|}{\sqrt{\sin x}}\, dx = 2\sqrt[4]{8}\,\mathrm{e}^{-\pi/8}\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-\pi n}.$$

Суммируя геометрическую прогрессию, находим:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-\pi n} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\mathrm{e}^{-\pi}\right)^n = \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-\pi}}$$

и искомый интеграл

$$\int\limits_E e^{-x/2}\frac{|\sin x-\cos x|}{\sqrt{\sin x}}\,dx=\frac{2\sqrt[4]{8}\,e^{-\pi/8}}{1-e^{-\pi}}.$$

2355. Доказать равенство

$$\int\limits_0^{+\infty} f\left(ax+\frac{b}{x}\right)dx=\frac{1}{a}\int\limits_0^{+\infty} f\left(\sqrt{x^2+4ab}\right)dx,$$

где $a>0$ и $b>0$, предполагая, что интеграл в левой части равенства имеет смысл.

Рассмотрм на положительной полуоси функцию

$$y=ax+\frac{b}{x}\,,$$

график которой представлен на рис. 5.1.

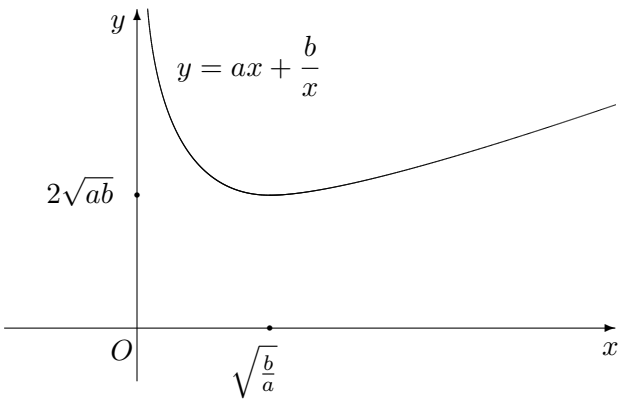

Рис. 5.1

Он имеет асимптоты $x=0$ и $y=ax$. В точке $x=\sqrt{b/a}$ функция имеет единственный экстремум $y=2\sqrt{ab}$, являющийся строгим минимумом. На промежутках $(0;\sqrt{b/a}\,]$ и $[\sqrt{b/a};+\infty)$

эта функция имеет обратные, которые обозначим, соответственно, $x_1(y)$ и $x_2(y)$. Их явный вид легко найти, решая уравнение

$$y = ax + \frac{b}{x}$$

относительно переменной x. Приводя к общему знаменателю, получаем квадратное уравнение $ax^2 - yx + b = 0$. Решая его, находим:

$$x_1(y) = \frac{y - \sqrt{y^2 - 4ab}}{2a}, \quad x_2(y) = \frac{y + \sqrt{y^2 - 4ab}}{2a}.$$

Рассматриваемый интеграл разбиваем на два:

$$\int\limits_0^{+\infty} f\left(ax + \frac{b}{x}\right) dx = \int\limits_0^{\sqrt{b/a}} f\left(ax + \frac{b}{x}\right) dx + \int\limits_{\sqrt{b/a}}^{+\infty} f\left(ax + \frac{b}{x}\right) dx.$$

В первом интеграле сделаем подстановку $x = x_1(y)$, а во втором – замену $x = x_2(y)$. В обоих случаях $ax + b/x = y$ (по определению обратной функции). После замены получаем:

$$\int\limits_0^{\sqrt{b/a}} f\left(ax + \frac{b}{x}\right) dx = \int\limits_{+\infty}^{2\sqrt{ab}} f(y) x_1'(y) dy =$$

$$= \frac{1}{2a} \int\limits_{+\infty}^{2\sqrt{ab}} f(y) \left(1 - \frac{y}{\sqrt{y^2 - 4ab}}\right) dy =$$

$$= \frac{1}{2a} \int\limits_{2\sqrt{ab}}^{+\infty} f(y) \left(\frac{y}{\sqrt{y^2 - 4ab}} - 1\right) dy.$$

$$\int\limits_{\sqrt{b/a}}^{+\infty} f\left(ax + \frac{b}{x}\right) dx = \int\limits_{2\sqrt{ab}}^{+\infty} f(y) x_2'(y) dy =$$

$$= \frac{1}{2a} \int\limits_{2\sqrt{ab}}^{+\infty} f(y) \left(1 + \frac{y}{\sqrt{y^2 - 4ab}}\right) dy.$$

Складывая полученные выражения, находим

$$\int\limits_0^{+\infty} f\left(ax + \frac{b}{x}\right) dx = \frac{1}{a} \int\limits_{2\sqrt{ab}}^{+\infty} f(y) \frac{y}{\sqrt{y^2 - 4ab}} dy.$$

В полученном справа интеграле сделаем замену

$$t = \sqrt{y^2 - 4ab}\,, \quad y = \sqrt{t^2 + 4ab}\,, \quad dt = \frac{y}{\sqrt{y^2 - 4ab}} dy,$$

после которой получаем

$$\int\limits_{2\sqrt{ab}}^{+\infty} f(y) \frac{y}{\sqrt{y^2 - 4ab}} dy = \int\limits_0^{+\infty} f(\sqrt{t^2 + 4ab}\,)\, dt.$$

Меняя переменную интегрирования t на x, получаем требуемое равенство:

$$\int\limits_0^{+\infty} f\left(ax + \frac{b}{x}\right) dx = \frac{1}{a} \int\limits_0^{+\infty} f(\sqrt{t^2 + 4ab}\,)\, dt =$$

$$= \frac{1}{a} \int\limits_0^{+\infty} f(\sqrt{x^2 + 4ab}\,)\, dx.$$

2356. Средним значением функции $f(x)$ на интервале $(0;+\infty)$ называется число

$$M[f] = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \int\limits_0^x f(\xi)\, d\xi.$$

Найти средние значения следующих функций:

$$\text{а) } f(x) = \sin^2 x + \cos^2(x\sqrt{2}\,);$$

$$\text{б) } f(x) = \operatorname{arctg} x;$$

$$\text{в) } f(x) = \sqrt{x}\sin x.$$

а). Используя формулы понижения

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2},$$

получаем:

$$M[f] = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \int\limits_0^x \left(\sin^2\xi + \cos^2(\xi\sqrt{2}\,)\right) d\xi =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2x} \int\limits_0^x \left(2 - \cos 2\xi + \cos(2\sqrt{2}\xi)\right) d\xi =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2x} \left[2\xi - \frac{1}{2}\sin 2\xi + \frac{1}{2\sqrt{2}}\sin(2\sqrt{2}\xi)\right]\Bigg|_0^x =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2x} \left(2x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{2\sqrt{2}}\sin(2\sqrt{2}x)\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(1 - \frac{\sin 2x}{4x} + \frac{\sin(2\sqrt{2}x)}{4\sqrt{2}x}\right) = 1 - 0 + 0 = 1.$$

б). Используя интегрирование по частям, находим:

$$M[f] = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \int\limits_0^x \operatorname{arctg}\xi\, d\xi =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \left[\xi \operatorname{arctg}\xi\Big|_0^x - \int\limits_0^x \frac{\xi\, d\xi}{1+\xi^2}\right] =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\left[x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+\xi^2)\Big|_0^x\right] =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\left[x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right] =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left[\operatorname{arctg} x - \frac{\ln(1+x^2)}{2x}\right] = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}.$$

в). Воспользуемся формула Бонне (4.3):

$$\int\limits_a^b f(\xi)\varphi(\xi)\,d\xi = \varphi(b)\int\limits_\theta^b f(\xi)\,d\xi,$$

где $\theta \in [a;b]$. Применяя эту теорему для функций

$$f(\xi) = \sin\xi\,, \quad \varphi(\xi) = \sqrt{\xi},$$

на отрезке $[0;x]$, получаем

$$\int\limits_0^x \sqrt{\xi}\sin\xi\,d\xi = \sqrt{x}\int\limits_\theta^x \sin\xi\,d\xi = \sqrt{x}\,(\cos\theta - \cos x)\,,$$

($\theta \in [0;x]$). Так как величина $|(\cos\theta - \cos x)| \leqslant 2$, то полученное соотношение позволяет оценить интеграл следующим образом:

$$\left|\int\limits_0^x \sqrt{\xi}\sin\xi\,d\xi\right| \leqslant \sqrt{x}\,|(\cos\theta - \cos x)| \leqslant 2\sqrt{x}.$$

Отсюда следует, что

$$\left|\frac{1}{x}\int\limits_0^x \sqrt{\xi}\sin\xi\,d\xi\right| \leqslant \frac{2}{\sqrt{x}}$$

и поэтому

$$M[f] = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \int\limits_0^x \sqrt{\xi}\sin\xi\, d\xi = 0.$$

2357. Найти:

$$\text{а)}\ \lim_{x\to 0} x \int\limits_x^1 \frac{\cos t}{t^2}\, dt\,; \quad \text{б)}\ \lim_{x\to\infty} \frac{\int\limits_0^x \sqrt{1+t^4}\, dt}{x^3}\,;$$

$$\text{в)}\ \lim_{x\to 0} \frac{\int\limits_x^{+\infty} t^{-1}\mathrm{e}^{-t} dt}{\ln\frac{1}{x}}\,; \quad \text{г)}\ \lim_{x\to 0} x^{\alpha} \int\limits_x^1 \frac{f(t)}{t^{\alpha+1}}\, dt\,,$$

где $\alpha > 0$ и $f(t)$ – непрерывная функция на сегменте $[0;1]$.

а). По правилу Лопиталя и формуле (3.8)

$$\lim_{x\to 0} x \int\limits_x^1 \frac{\cos t}{t^2}\, dt = \lim_{x\to 0} \frac{\int\limits_x^1 \frac{\cos t}{t^2}\, dt}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(-\frac{\cos x}{x^2}\right)}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to 0} \cos x = 1.$$

б). По правилу Лопиталя и формуле (3.8)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\int\limits_0^x \sqrt{1+t^4}\, dt}{x^3} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1+x^4}}{3x^2} = \frac{1}{3}.$$

в). По правилу Лопиталя и формуле (3.8)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int\limits_x^{+\infty} t^{-1}\mathrm{e}^{-t} dt}{\ln\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(-\frac{1}{x}\,\mathrm{e}^{-x}\right)}{\left(-\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to 0} \mathrm{e}^{-x} = 1.$$

г). По правилу Лопиталя и формуле (3.8)

$$\lim_{x\to 0} x^{\alpha} \int\limits_{x}^{1} \frac{f(t)}{t^{\alpha+1}}\,dt = \lim_{x\to 0} \frac{\int\limits_{x}^{1} \frac{f(t)}{t^{\alpha+1}}\,dt}{x^{-\alpha}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\left(-\frac{f(x)}{x^{\alpha+1}}\right)}{\left(-\frac{\alpha}{x^{\alpha+1}}\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{\alpha} = \frac{f(0)}{\alpha}.$$

Исследовать сходимость интегралов:

2358. $\displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{x^4 - x^2 + 1}.$

подынтегральная функция

$$f(x) = \frac{x^2}{x^4 - x^2 + 1}$$

непрерывна и имеет степенную асимптотику

$$f(x) \sim \frac{1}{x^2}\,, \quad x \to \infty.$$

Так как порядок асимптотики больше 1, то рассматриваемый интеграл сходится.

2359. $\displaystyle\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2+1}}.$

подынтегральная функция

$$f(x) = \frac{1}{x\sqrt[3]{x^2+1}}$$

непрерывна и имеет степенную асимптотику

$$f(x) \sim \frac{1}{x^{5/3}}\,, \quad x \to \infty.$$

Так как порядок асимптотики больше 1, то рассматриваемый интеграл сходится.

2360. $\displaystyle\int\limits_0^2 \frac{dx}{\ln x}$.

Разобьем интеграл на три так, чтобы в каждом было по одной особенности:

$$\int\limits_0^2 \frac{dx}{\ln x} = \int\limits_0^{1/2} \frac{dx}{\ln x} + \int\limits_{1/2}^1 \frac{dx}{\ln x} + \int\limits_1^2 \frac{dx}{\ln x}.$$

Первый интеграл

$$\int\limits_0^{1/2} \frac{dx}{\ln x}$$

сходится так как подынтегральная функция непрерывна и ограничена на промежутке $(0; 1/2]$ (см. решение задачи 29). Во втором и третьем интегралах подынтегральная функция имеет степенную асимптотику при $x \to 1$:

$$f(x) = \frac{1}{\ln x} \sim \frac{1}{x-1}.$$

Так как порядок асимптотики равен 1, то интегралы

$$\int\limits_{1/2}^1 \frac{dx}{\ln x}, \quad \int\limits_1^2 \frac{dx}{\ln x}$$

расходятся. Отсюда следует, что расходится и рассматриваемый интеграл.

Замечание. Для сходимости интеграла с несколькими особенностями нужно, чтобы сходились все интегралы, каждый из которых имеет только одну особенность, поэтому для доказательства расходимости досточно было рассмотреть один из расходящихся интегралов.

2361. $\int\limits_0^{+\infty} x^{p-1}\mathrm{e}^{-x}dx.$

Разобьем интеграл на два

$$\int\limits_0^{+\infty} x^{p-1}\mathrm{e}^{-x}dx = \int\limits_0^{1} x^{p-1}\mathrm{e}^{-x}dx + \int\limits_1^{+\infty} x^{p-1}\mathrm{e}^{-x}dx.$$

В первом из полученных интегралов подынтегральная функция непрерывна и имеет степенную асимптотику при $x \to 0$:

$$f(x) = x^{p-1}\mathrm{e}^{-x} \sim \frac{1}{x^{1-p}}.$$

Отсюда следует, что интеграл по промежутку $(0;1]$ сходится тогда и только тогда, когда $1-p<1$, т. е. $p>0$.

При исследовании второго интеграла можно воспользоваться тем, что при любом p

$$x^{p-1} = o(\mathrm{e}^{x/2}), \quad x \to +\infty$$

и поэтому

$$f(x) = x^{p-1}\mathrm{e}^{-x} = o(\mathrm{e}^{-x/2}), \quad x \to +\infty.$$

Так как интеграл

$$\int\limits_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-x/2}dx$$

сходится, то сходится (при любом p) и интеграл

$$\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Таким образом, рассматриваемый интеграл сходится тогда и только тогда, когда $p>0$.

2362. $\displaystyle\int\limits_0^1 x^p \ln^q \frac{1}{x}\, dx.$

Интеграл от функции

$$f(x) = x^p \ln^q \frac{1}{x}$$

разобьем на два:

$$\int\limits_0^1 x^p \ln^q \frac{1}{x}\, dx = \int\limits_0^{1/2} x^p \ln^q \frac{1}{x}\, dx + \int\limits_{1/2}^1 x^p \ln^q \frac{1}{x}\, dx.$$

Исследуем на сходимость первый из них

$$I_1 = \int\limits_0^{1/2} x^p \ln^q \frac{1}{x}\, dx$$

и рассмотрим три случая.

а) $p < -1$. Подберем положительное число ε так, чтобы число $p + \varepsilon$ также удовлетворяло неравенству $p + \varepsilon < -1$ (рис. 5.2). Для этого можно, например, взять $\varepsilon = (-p-1)/2$ (в этом случае точка $x = p + \varepsilon$ лежит ровно посередине между точками $x = p$ и $x = -1$).

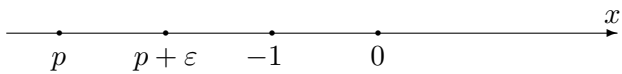

Рис. 5.2

Положим $\alpha = -p - \varepsilon$. Так как $\varepsilon > 0$, то при любом q

$$x^\varepsilon = o\left(\ln^q \frac{1}{x}\right), \quad x \to 0,$$

следовательно, при $x \to 0$

$$\frac{1}{x^\alpha} = x^{p+\varepsilon} = o\left(x^p \ln^q \frac{1}{x}\right) = o(f(x)).$$

Величина $p+\varepsilon<-1$, поэтому $\alpha>1$ и интеграл

$$\int\limits_0^{1/2} \frac{dx}{x^\alpha}$$

расходится, следовательно, расходится и интеграл от функции $f(x)$.

б) $p=-1$. После замены $u=\ln\dfrac{1}{x}$, получаем:

$$\int\limits_0^{1/2} f(x)\,dx = \int\limits_0^{1/2} x^{-1}\ln^q\frac{1}{x}\;dx = \int\limits_{\ln 2}^{+\infty} u^q du = \int\limits_{\ln 2}^{+\infty} \frac{du}{u^{-q}}.$$

Условие сходимости последнего интеграла: $-q>1$, т. е. $q<$ <-1.

в) $p>-1$. Подберем положительное число ε так, чтобы число $p-\varepsilon$ также удовлетворяло неравенству $p-\varepsilon>-1$ (рис. 5.3). Для этого можно, например, взять $\varepsilon=(p+1)/2$ (в этом случае точка $x=p-\varepsilon$ лежит ровно посередине между точками $x=-1$ и $x=p$).

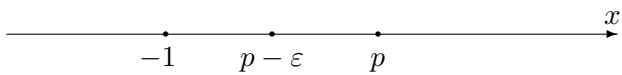

Рис. 5.3

Положим $\alpha=-p+\varepsilon$. Так как $\varepsilon>0$, то при любом q

$$\ln^q\frac{1}{x} = o\left(\frac{1}{x^\varepsilon}\right), \quad x\to 0,$$

следовательно, при $x\to 0$

$$f(x)=x^p\ln^q\frac{1}{x} = o(x^{p-\varepsilon}) = o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right).$$

Величина $p - \varepsilon > -1$, поэтому $\alpha < 1$ и интеграл

$$\int\limits_0^{1/2} \frac{dx}{x^\alpha}$$

сходится, следовательно, сходится и интеграл от функции $f(x)$.

Резюмируя, получаем, что интеграл I_1 сходится при $p > -1$ и при $p = -1$, $q < -1$. В остальных случаях этот интеграл расходится.

Перейдем ко второму интегралу

$$I_2 = \int\limits_{1/2}^{1} x^p \ln^q \frac{1}{x}\, dx.$$

Подынтегральная функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[1/2; 1)$ и имеет степенную асимптотику при $x \to 1$:

$$f(x) = x^p \ln^q \frac{1}{x} \sim \ln^q \frac{1}{x} = (-\ln x)^q \sim (1-x)^q = \frac{1}{(1-x)^{-q}}.$$

Отсюда следует, что интеграл I_2 сходится при $q > -1$ и расходится при $q \leqslant 1$.

Для сходимости рассматриваемого интеграла необходимо и достаточно, чтобы сходились оба интеграла I_1 и I_2. Учитывая проведенное выше исследование, получаем, что интеграл

$$\int\limits_0^{1} x^p \ln^q \frac{1}{x}\, dx$$

сходится при $p > -1$, $q > -1$ и расходится во всех остальных случаях.

2363. $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^m}{1+x^n}\, dx \quad (n \geqslant 0).$

Интеграл от функции

$$f(x) = \frac{x^m}{1 + x^n}$$

разобьем на два

$$\int\limits_0^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_0^1 f(x)\,dx + \int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Рассмотрим первый интеграл

$$I_1 = \int\limits_0^1 f(x)\,dx.$$

Подынтегральная функция непрерывна и имеет степенную асимптотику

$$f(x) \sim \begin{cases} \dfrac{1}{x^{-m}}\,, & n > 0 \\ \dfrac{1}{2x^{-m}}\,, & n = 0. \end{cases}$$

Условие сходимости интеграла: $-m < 1$ (т. е. $m > -1$). Таким образом, интеграл I_1 сходится при $m > -1$ и расходится при $m \leqslant -1$.

Рассмотрим второй интеграл

$$I_2 = \int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Подынтегральная функция непрерывна и также имеет степенную асимптотику при $x \to \infty$:

$$f(x) \sim \frac{1}{x^{n-m}}.$$

Условие сходимости второго интеграла: $n - m > 1$.

Суммируя результаты по сходимости интегралов I_1 и I_2, получаем, что рассматриваемый интеграл сходится при $m > -1$, $n - m > 1$ и расходится во всех остальных случаях.

2364. $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} ax}{x^n}\,dx \qquad (a \neq 0).$

Интеграл от функции

$$f(x) = \frac{\operatorname{arctg} ax}{x^n}$$

разобьем на два

$$\int\limits_0^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_0^{1} f(x)\,dx + \int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Рассмотрим первый интеграл

$$I_1 = \int\limits_0^{1} f(x)\,dx.$$

Подынтегральная функция непрерывна и имеет степенную асимптотику при $x \to 0$:

$$f(x) \sim \frac{a}{x^{n-1}}.$$

Следовательно, первый интеграл сходится тогда и только тогда, когда $n - 1 < 1$, т. е. $n < 2$.

Рассмотрим второй интеграл

$$I_2 = \int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Подынтегральная функция непрерывна и имеет степенную асимптотику при $x \to +\infty$:

$$f(x) \sim \frac{\pi \operatorname{sgn} a}{2x^n},$$

поэтому интеграл I_2 сходится при $n > 1$ и расходится при $n \leqslant 1$.

Учитывая условия сходимости интегралов I_1 и I_2, получаем, что рассматриваемый интеграл сходится при $1 < n < 2$ и расходится в остальных случаях.

2365. $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^n}\,dx.$

Интеграл от функции

$$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x^n}$$

разобьем на два

$$\int\limits_0^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_0^{1} f(x)\,dx + \int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Рассмотрим первый интеграл

$$I_1 = \int\limits_0^{1} f(x)\,dx.$$

Подынтегральная функция непрерывна и имеет степенную асимптотику при $x \to 0$. Функция $\ln(1+x) \sim x$ при $x \to 0$ и поэтому

$$f(x) \sim \frac{1}{x^{n-1}}\,, \quad x \to 0.$$

Отсюда следует, что первый интеграл сходится только если $n - 1 < 1$, т. е. при $n < 2$. Таким образом, условие сходимости I_1 имеет вид $n < 2$.

Исследуем на сходимость второй интеграл

$$I_2 = \int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$$

и рассмотрим три случая:

а) $n < 1$. В этом случае интеграл

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^n}$$

расходится. С другой стороны, так как $1 = o(\ln(1+x))$ при $x \to$ $\to +\infty$, то

$$\frac{1}{x^n} = o\left(\frac{\ln(1+x)}{x^n}\right) = o\left(f(x)\right)$$

при $x \to +\infty$, поэтому расходится и интеграла I_2.

б) $n = 1$. Подынтегральная функция

$$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x} \sim \frac{\ln x}{x}\,, \quad x \to +\infty.$$

Делая замену $u = \ln x$, получаем

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x} = \int\limits_0^{+\infty} u\,du = +\infty,$$

что доказывает расходимость интеграла от функции $\ln x/x$, а следовательно, и интеграла от $f(x)$.

в) $n > 1$. В этом случае можно подобрать такое положительное число ε, что также и $n - \varepsilon > 1$ (рис. 5.4). Для этого можно, например, взять $\varepsilon = (n-1)/2$ (в этом случае точка $x = n - \varepsilon$ лежит ровно посередине между точками $x = 1$ и $x = n$).

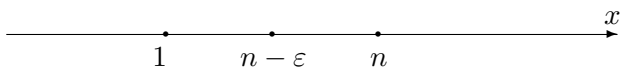

Рис. 5.4

Положим $\alpha = n - \varepsilon$. Так как $\varepsilon > 0$, то

$$\ln(1+x) = o(x^{\varepsilon})\,, \quad x \to +\infty,$$

следовательно, при $x \to +\infty$

$$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x^n} = o\left(\frac{1}{x^{n-\varepsilon}}\right) = o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right).$$

Величина $\alpha = n - \varepsilon > 1$, поэтому интеграл

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$$

сходится, следовательно, сходится и интеграл от функции $f(x)$.

Подводя итоги исследования интегралов I_1 и I_2, получаем следующий результат. Интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^n}\,dx$$

сходится при $1 < n < 2$ и расходится в остальных случаях.

2366. $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^m \operatorname{arctg} x}{2+x^n}\,dx \qquad (n \geqslant 0).$

Интеграл от функции

$$f(x) = \frac{x^m \operatorname{arctg} x}{2+x^n}$$

разобьем на два

$$\int\limits_0^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_0^1 f(x)\,dx + \int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Исследуем на сходимость первый интеграл

$$I_1 = \int\limits_0^1 f(x)\,dx.$$

Подынтегральная функция непрерывна и имеет степенную асимптотику при $x \to 0$:

$$f(x) \sim \begin{cases} \dfrac{1}{2x^{-m-1}}, & n > 0 \\ \dfrac{1}{3x^{-m-1}}, & n = 0. \end{cases}$$

Следовательно, интеграл I_1 сходится при $-m-1 < 1$, что равносильно условию $m > -2$.

Рассмотрим второй интеграл

$$I_2 = \int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Подынтегральная функция непрерывна и имеет степенную асимптотику при $x \to +\infty$:

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2x^{n-m}},$$

поэтому интеграл I_2 сходится только при условии $n - m > 1$.

Суммируя сказанное выше о сходимости интегралов I_1 и I_2, получаем, что рассматриваемый интеграл сходится при $m > -2$, $n - m > 1$ и расходится в остальных случаях.

2367. $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{1+x^n}\,dx \qquad (n \geqslant 0).$

При $a = 0$ подынтегральная функция

$$f(x) = \frac{1}{1+x^n}$$

непрерывна на полуоси $[0; +\infty)$ и при $x \to +\infty$ имеет степенную асимптотику

$$f(x) \sim \begin{cases} \dfrac{1}{x^n}, & n > 0 \\ \dfrac{1}{2}, & n = 0. \end{cases}$$

Отсюда следует, что при $n > 1$ интеграл сходится, а при $n \leqslant 1$ интеграл расходится.

Рассмотрим случай $a \neq 0$. Если $n = 0$, мы имеем интеграл

$$I = \frac{1}{2} \int\limits_0^{+\infty} \cos ax \, dx = \left(\frac{1}{2a} \sin ax \right) \Bigg|_0^{+\infty} = \frac{1}{2a} \left(\lim_{x \to +\infty} \sin ax \right).$$

Так как предел функции $\sin ax$ при $x \to +\infty$ не существует (для последовательности точек $x_n = \pi n/a$ предел последовательности значений функции равен нулю, а для последовательности точек $x_n = (\pi + 4\pi n)/2a$ предел соответствующей последовательности значений функции равен единице), то рассматриваемый интеграл расходится .

Если $n > 0$, то применим признак Дирихле: подынтегральная функция $f(x) = g(x)h(x)$, где функция $g(x) = \cos ax$ имеет ограниченную первообразную

$$G(x) = \frac{\sin ax}{a},$$

($|G(x)| \leqslant 1/|a|$) а функция

$$h(x) = \frac{1}{1 + x^n}$$

монотонно стремится к нулю при $x \to +\infty$. Отсюда следует, что рассматриваемый интеграл сходится.

Таким образом, если $a = 0$, то при $n > 1$ интеграл сходится, а при $n \leqslant 1$ расходится. Если же $a \neq 0$, то при $n > 0$ интеграл сходится, а при $n = 0$ расходится.

2368. $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} \, dx.$

Исследуемый интеграл разобъем на два

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} \, dx = \int\limits_0^{1} \frac{\sin^2 x}{x} \, dx + \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} \, dx.$$

В первом из них

$$I_1 = \int\limits_0^1 \frac{\sin^2 x}{x}\,dx$$

подынтегральная функция

$$f(x) = \frac{\sin^2 x}{x}$$

непрерывна на $(0;1]$ и имеет конечный предел в особой точке

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x} = 0.$$

Отсюда следует, что подынтегральная функция при $x \in (0;1]$ совпадает с функцией

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin^2 x}{x}, & x \in (0;1]; \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

непрерывной на $[0;1]$. Согласно решению задачи 20 интеграл I_1 сходится.

Рассмотрим второй интеграл

$$I_2 = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}\,dx.$$

Применяя формулу $\sin^2 x = (1-\cos 2x)/2$, получаем

$$I_2 = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x} - \frac{1}{2}\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\,I_3 - \frac{1}{2}\,I_4,$$

где

$$I_3 = \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x}\,, \quad I_4 = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x}\,dx.$$

Интеграл I_3 расходится, а интеграл I_4 сходится по признаку Дирихле: функция $\cos 2x$ имеет ограниченную первообразную $(\sin 2x)/2$, функция $1/x$ монотонно убывает к нулю на $+\infty$. Отсюда следует, что интеграл I_2 расходится (если допустить противное, то из равенства $I_2 = (I_3 - I_4)/2$ следует, что интеграл $I_3 = 2I_2 + I_4$ сходится).

2369. $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^p x \cos^q x}$.

Интеграл от функции

$$f(x) = \frac{1}{\sin^p x \cos^q x}$$

разобьем на два

$$\int\limits_0^{\pi/2} f(x)\,dx = \int\limits_0^{\pi/4} f(x)\,dx + \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} f(x)\,dx.$$

Рассмотрим первый интеграл

$$I_1 = \int\limits_0^{\pi/4} f(x)\,dx.$$

Подынтегральная функция непрерывна и имеет степенную асимптотику при $x \to 0$:

$$f(x) \sim \frac{1}{x^p}.$$

Следовательно, интеграл I_1 сходится при $p < 1$ и расходится при $p \geqslant 1$.

Рассмотрим второй интеграл

$$I_2 = \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} f(x)\,dx.$$

Подынтегральная функция непрерывна и также имеет степенную асимптотику

$$f(x) = \frac{1}{\sin^p x \sin^q \left(\frac{\pi}{2} - x\right)} \sim \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^q}, \quad x \to \frac{\pi}{2}.$$

Отсюда следует, что интеграл I_2 сходится при $q < 1$ и расходится при $q \geqslant 1$.

Таким образом, рассматриваемый интеграл сходится при $p < < 1$, $q < 1$ и расходится в остальных случаях.

2370. $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{1 - x^4}}$.

Интеграл от функции

$$f(x) = \frac{x^n}{\sqrt{1 - x^4}}$$

разобьем на два

$$\int\limits_0^1 f(x)\,dx = \int\limits_0^{1/2} f(x)\,dx + \int\limits_{1/2}^1 f(x)\,dx.$$

Рассмотрим первый интеграл

$$I_1 = \int\limits_0^{1/2} f(x)\,dx.$$

Подынтегральная функция непрерывна и имеет степенную асимптотику при $x \to 0$:

$$f(x) \sim \frac{1}{x^{-n}}.$$

Условие сходимости первого интеграла: $-n < 1$, что равносильно $n > -1$.

Рассмотрим второй интеграл

$$I_2 = \int\limits_{1/2}^{1} f(x)\,dx.$$

Подынтегральная функция непрерывна и также имеет степенную асимптотику при $x \to 1$:

$$f(x) = \frac{x^n}{\sqrt{(1-x)(1+x)(1+x^2)}} \sim \frac{1}{2(1-x)^{1/2}}.$$

Отсюда следует, что второй интеграл сходится при любом n. Таким образом, интеграл

$$\int\limits_{0}^{1} \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^4}}$$

сходится тогда и только тогда, когда $n > -1$.

2370.1. $\displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+x}}$.

Интеграл от функции

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3+x}}$$

разобьем на два

$$\int\limits_{0}^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_{0}^{1} f(x)\,dx + \int\limits_{1}^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Рассмотрим первый интеграл

$$I_1 = \int\limits_{0}^{1} f(x)\,dx.$$

Подынтегральная функция непрерывна и имеет степенную асимптотику при $x \to 0$:

$$f(x) \sim \frac{1}{x^{1/2}}.$$

Отсюда следует, что интеграл I_1 сходится.

Рассмотрим второй интеграл

$$I_2 = \int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Подынтегральная функция непрерывна и также имеет степенную асимптотику при $x \to +\infty$:

$$f(x) \sim \frac{1}{x^{3/2}}.$$

Таким образом, второй интеграл также сходится. Следовательно, рассматриваемый интеграл сходится.

2371. $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^p + x^q}.$

Интеграл от функции

$$f(x) = \frac{1}{x^p + x^q}$$

разобьем на два

$$\int\limits_0^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_0^1 f(x)\,dx + \int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Рассмотрим первый интеграл

$$I_1 = \int\limits_0^1 f(x)\,dx.$$

Подынтегральная функция непрерывна и имеет степенную асимптотику при $x \to 0$:

$$f(x) \sim \begin{cases} \dfrac{1}{x^{\min(p,q)}}\,, & q \neq p\,; \\ \dfrac{1}{2x^{\min(p,q)}}\,, & q = p\,. \end{cases}$$

Отсюда следует, что интеграл I_1 сходится тогда и только тогда, когда $\min(p,q) < 1$.

Рассмотрим второй интеграл

$$I_2 = \int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Подынтегральная функция непрерывна и также имеет степенную асимптотику при $x \to +\infty$:

$$f(x) \sim \begin{cases} \dfrac{1}{x^{\max(p,q)}}\,, & q \neq p\,; \\ \dfrac{1}{2x^{\max(p,q)}}\,, & q = p\,. \end{cases}$$

Таким образом, I_2 сходится тогда и только тогда, когда величина $\max(p,q) > 1$.

Окончательно получаем, что рассматриваемый интеграл сходится если $\min(p,q) < 1$, $\max(p,q) > 1$ и расходится в остальных случаях.

2372. $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2}\,dx.$

Интеграл от функции

$$f(x) = \frac{\ln x}{1-x^2}$$

разобьем на два

$$\int\limits_0^1 f(x)\,dx = \int\limits_0^{1/2} f(x)\,dx + \int\limits_{1/2}^1 f(x)\,dx.$$

Рассмотрим первый интеграл

$$I_1 = \int\limits_0^{1/2} f(x)\,dx.$$

Подынтегральная функция непрерывна и при $x \to 0$

$$f(x) \sim \ln x = o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right).$$

Так как интеграл

$$\int\limits_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

сходится, то сходится и I_1.

Рассмотрим второй интеграл

$$I_2 = \int\limits_{1/2}^1 f(x)\,dx.$$

Подынтегральная функция непрерывна и при $x \to 1$ существует конечный предел функции $f(x)$, который можно найти, например, по правилу Лопиталя:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{1-x^2} = \lim_{x\to 1} \frac{(1/x)}{(-2x)} = -\frac{1}{2}.$$

Таким образом, функция f на промежутке $[1/2; 1)$ совпадает с функцией

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln x}{1-x^2}, & x \in [1/2; 1); \\ -1/2, & x = 1, \end{cases}$$

непрерывной на отрезке $[1/2; 1]$. Из решения задачи 20 следует сходимость интеграла I_2.

Таким образом, рассматриваемый интеграл сходится.

2373. $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}}\,dx.$

Подынтегральная функция непрерывна на $(0; \pi/2]$. При $x \to$ $\to 0$ функция $\ln(\sin x) \sim \ln x$. Это легко проверить с помощью правила Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\sin x)}{\ln x} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\dfrac{\cos x}{\sin x}\right)}{\left(\dfrac{1}{x}\right)} = \frac{\lim\limits_{x\to 0} \cos x}{\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)} = 1.$$

Отсюда следует, что при $x \to 0$

$$\frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}} \sim \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$$

и сходимость рассматриваемого интеграла равносильна сходимости интеграла

$$I = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx.$$

Рассмотрим вопрос о сходимости интеграла I. Известно, что при любом $\varepsilon > 0$, функция $\ln x = o(1/x^{\varepsilon})$ при $x \to 0$, в частности

$$\ln x = o\left(\frac{1}{x^{1/4}}\right).$$

Отсюда следует, что при $x \to 0$

$$\frac{\ln x}{\sqrt{x}} = o\left(\frac{1}{x^{3/4}}\right).$$

Так как интеграл

$$\int\limits_0^{\pi/2} \frac{1}{x^{3/4}}\,dx$$

сходится, то сходится и интеграл I. Таким образом, интеграл

$$\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}}\,dx$$

сходится.

2374. $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x}$.

Интеграл от функции

$$f(x) = \frac{1}{x^p \ln^q x}$$

разобьем на два

$$\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_1^{2} f(x)\,dx + \int\limits_2^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Рассмотрим первый интеграл

$$I_1 = \int\limits_1^{2} f(x)\,dx.$$

Подынтегральная функция непрерывна и при $x \to 1$ имеет степенную асимптотику

$$f(x) \sim \frac{1}{(x-1)^q}.$$

Условие сходимости интеграла I_1: $q < 1$.

Исследуем на сходимость второй интеграл

$$I_2 = \int\limits_2^{+\infty} f(x)\,dx$$

и рассмотрим три случая.

а) $p < 1$. В этом случае можно подобрать такое положительное число ε, что также и $p + \varepsilon < 1$ (рис. 5.5). Для этого можно, например, взять $\varepsilon = (1 - p)/2$ (в этом случае точка $x = p + \varepsilon$ лежит ровно посередине между точками $x = p$ и $x = 1$).

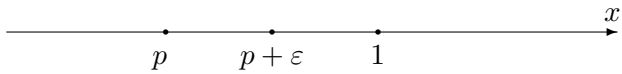

Рис. 5.5

Положим $\alpha = p + \varepsilon$. Так как $\varepsilon > 0$, то при $x \to +\infty$

$$\frac{1}{x^{\varepsilon}} = o\left(\frac{1}{\ln^q x}\right)$$

(при любом q), следовательно, при $x \to +\infty$

$$\frac{1}{x^{\alpha}} = \frac{1}{x^p} \cdot \frac{1}{x^{\varepsilon}} = \frac{1}{x^p} \cdot o\left(\frac{1}{\ln^q x}\right) = o\left(\frac{1}{x^p \ln^q x}\right) = o(f(x)).$$

Величина $\alpha = p + \varepsilon < 1$, поэтому интеграл

$$\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$$

расходится, следовательно, расходится и интеграл от функции $f(x)$.

б) $p = 1$. Подынтегральная функция

$$f(x) = \frac{1}{x\,\ln^q x}.$$

Делая замену $u = \ln x$, получаем

$$\int\limits_2^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x\,\ln^q x} = \int\limits_{\ln 2}^{+\infty} \frac{du}{u^q}.$$

Условие сходимости интеграла: $q > 1$.

в) $p > 1$. В этом случае можно подобрать такое положительное число ε, что также и $p - \varepsilon > 1$ (рис. 5.6). Для этого можно, например, взять $\varepsilon = (p-1)/2$ (в этом случае точка $x = p - \varepsilon$ лежит ровно посередине между точками $x = 1$ и $x = p$).

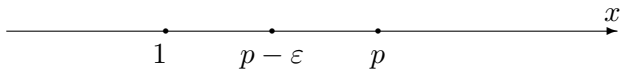

Рис. 5.6

Положим $\alpha = p - \varepsilon$. Так как $\varepsilon > 0$, то при $x \to +\infty$

$$\frac{1}{\ln^q x} = o\left(x^{\varepsilon}\right)$$

(при любом q), следовательно, при $x \to +\infty$

$$f(x) = \frac{1}{x^p} \cdot \frac{1}{\ln^q x} = \frac{1}{x^p} \cdot o\left(x^{\varepsilon}\right) = o\left(\frac{x^{\varepsilon}}{x^p}\right) = o\left(\frac{1}{x^{p-\varepsilon}}\right) = o\left(\frac{1}{x^{\alpha}}\right).$$

Величина $\alpha = p - \varepsilon > 1$, поэтому интеграл

$$\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$$

сходится, следовательно, сходится и интеграл от функции $f(x)$.

Суммируя полученные результаты, получаем, что интеграл

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x}$$

сходится при $p > 1$, $q < 1$ и расходится в остальных случаях.

2375. $\displaystyle\int\limits_{\mathrm{e}}^{+\infty} \frac{dx}{x^p (\ln x)^q (\ln \ln x)^r}$.

Прежде всего отметим, что в случае $p = 1$ с помощью замены переменной $u = \ln x$ рассматриваемый интеграл сводится к интегралу задачи 2374:

$$\int\limits_{\mathrm{e}}^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^q(\ln\ln x)^r} = \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{du}{u^q \ln^r u}$$

с заменой p на q, а q на r. Из решения этой задачи следует, то при $p = 1$ рассматриваемый интеграл сходится тогда и только тогда, когда $q > 1$, $r < 1$.

Исследуем вопрос сходимости интеграла при $p \neq 1$. Интеграл от функции

$$f(x) = \frac{1}{x^p(\ln x)^q(\ln\ln x)^r}$$

разобьем на два

$$\int\limits_{\mathrm{e}}^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_{\mathrm{e}}^{10} f(x)\,dx + \int\limits_{10}^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Рассмотрим первый интеграл

$$I_1 = \int\limits_{\mathrm{e}}^{10} f(x)\,dx.$$

Подынтегральная функция непрерывна на промежутке $(\mathrm{e}; 10]$. При $x \to \mathrm{e}$ функции $x^p \to \mathrm{e}^p$, $\ln x \to 1$. Функция $\varphi(x) = \ln\ln x$ при $x = \mathrm{e}$ равна нулю, а ее производная

$$\varphi'(x) = \frac{1}{x\ln x}$$

имеет значение $\varphi'(e) = 1/\mathrm{e}$, следовательно,

$$\ln\ln x \sim \frac{x - \mathrm{e}}{\mathrm{e}}, \quad x \to \mathrm{e}.$$

Таким образом, функция $f(x)$ имеет степенную асимптотику при $x \to \mathrm{e}$

$$f(x) \sim \frac{\mathrm{e}^{r-p}}{(x-\mathrm{e})^r}.$$

Условие сходимости интеграла I_1: $r < 1$.

Исследуем на сходимость второй интеграл

$$I_2 = \int\limits_{10}^{+\infty} f(x)\,dx$$

и рассмотрим два случая.

а) $p < 1$. В этом случае можно подобрать такое положительное число ε, что также и $p + \varepsilon < 1$ (рис. 5.5). Для этого можно, например, взять $\varepsilon = (1-p)/2$ (в этом случае точка $x = p + \varepsilon$ лежит ровно посередине между точками $x = p$ и $x = 1$).

Положим $\alpha = p + \varepsilon$. Так как $\varepsilon > 0$, то при $x \to +\infty$

$$\frac{1}{x^\varepsilon} = o\left(\frac{1}{(\ln x)^q (\ln\ln x)^r}\right)$$

(при любых q и r), следовательно, при $x \to +\infty$

$$\frac{1}{x^\alpha} = \frac{1}{x^p} \cdot \frac{1}{x^\varepsilon} = \frac{1}{x^p} \cdot o\left(\frac{1}{(\ln x)^q (\ln\ln x)^r}\right) =$$

$$= o\left(\frac{1}{x^p (\ln x)^q (\ln\ln x)^r}\right) = o(f(x)).$$

Величина $\alpha = p + \varepsilon < 1$, поэтому интеграл

$$\int\limits_{10}^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$$

расходится, следовательно, расходится и интеграл от функции $f(x)$.

б) $p > 1$. В этом случае можно подобрать такое положительное число ε, что также и $p - \varepsilon > 1$ (рис. 5.6). Для этого можно, например, взять $\varepsilon = (p-1)/2$ (в этом случае точка $x = p - \varepsilon$ лежит ровно посередине между точками $x = 1$ и $x = p$).

Положим $\alpha = p - \varepsilon$. Так как $\varepsilon > 0$, то при $x \to +\infty$

$$\frac{1}{(\ln x)^q (\ln\ln x)^r} = o\left(x^{\varepsilon}\right)$$

(при любых q и r), следовательно, при $x \to +\infty$

$$f(x) = \frac{1}{x^p} \cdot \frac{1}{(\ln x)^q (\ln\ln x)^r} = \frac{1}{x^p} \cdot o\left(x^{\varepsilon}\right) =$$

$$= o\left(\frac{x^{\varepsilon}}{x^p}\right) = o\left(\frac{1}{x^{p-\varepsilon}}\right) = o\left(\frac{1}{x^{\alpha}}\right).$$

Величина $\alpha = p - \varepsilon > 1$, поэтому интеграл

$$\int\limits_{10}^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$$

сходится, следовательно, сходится и интеграл от функции $f(x)$.

Суммируя полученные результаты, получаем, что интеграл

$$\int\limits_{e}^{+\infty} \frac{dx}{x^p (\ln x)^q (\ln\ln x)^r}$$

сходится при $p > 1$, $r < 1$ и $p = 1$, $q > 1$, $r < 1$. Во всех остальных случаях интеграл расходится.

2376. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{|x-a_1|^{p_1}|x-a_2|^{p_2}\ldots|x-a_n|^{p_n}}$

$(a_1 < a_2 < \ldots < a_n)$.

Обозначим через $f(x)$ подынтегральную функцию

$$f(x) = \frac{1}{|x-a_1|^{p_1}|x-a_2|^{p_2}\ldots|x-a_n|^{p_n}}.$$

Зафиксируем набор точек b_0, b_1, ..., b_n так, чтобы выполнялись неравенства

$$b_0 < a_1 < b_1 < a_2 < \ldots < b_{i-1} < a_i < b_i < \ldots < b_{n-1} < a_n < b_n,$$

тогда

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{b_0} f(x)\,dx +$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\left(\int\limits_{b_{i-1}}^{a_i} f(x)\,dx + \int\limits_{a_i}^{b_i} f(x)\,dx\right) + \int\limits_{b_n}^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Для сходимости интеграла необходимо и достаточно, чтобы сходились все интегралы, входящие в полученное разложение. Так как при $x \to \infty$

$$f(x) \sim \frac{1}{|x|^{p_1+p_2+\ldots+p_n}},$$

то условием сходимости интегралов

$$\int\limits_{-\infty}^{b_0} f(x)\,dx, \quad \int\limits_{b_n}^{+\infty} f(x)\,dx$$

является неравенство $p_1 + p_2 + \ldots + p_n > 1$.

При $x \to a_i$

$$f(x) \sim \frac{C_i}{|x - a_i|^{p_i}},$$

где

$$C_i = \prod_{j \neq i} |a_i - a_j|^{-p_j}.$$

Отсюда следует, что каждый из интегралов

$$\int\limits_{b_{i-1}}^{a_i} f(x)\,dx, \quad \int\limits_{a_i}^{b_i} f(x)\,dx$$

сходится тогда и только тогда, когда $p_i < 1$.

Таким образом, рассматриваемый интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{|x-a_1|^{p_1}|x-a_2|^{p_2}\ldots|x-a_n|^{p_n}}$$

сходится при $p_1 < 1$, $p_2 < 1$, $\ldots$, $p_n < 1$, $p_1 + p_2 + \ldots + p_n > 1$ и расходится в остальных случаях.

2376.1. $\int\limits_{0}^{+\infty} x^{\alpha}|x-1|^{\beta}dx.$

Интеграл от функции

$$f(x) = x^{\alpha}|x-1|^{\beta}$$

разобьем на четыре

$$\int\limits_{0}^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_{0}^{1/2} f(x)\,dx + \int\limits_{1/2}^{1} f(x)\,dx + \int\limits_{1}^{2} f(x)\,dx + \int\limits_{2}^{+\infty} f(x)\,dx.$$

На промежутке $(0; 1/2]$ функция $f(x)$ непрерывна и при $x \to 0$

$$f(x) \sim x^{\alpha} = \frac{1}{x^{-\alpha}},$$

поэтому интеграл

$$\int\limits_{0}^{1/2} f(x)\,dx$$

сходится при условии $-\alpha < 1$, т. е. при $\alpha > -1$.

На промежутках $[1/2; 1)$ и $(1; 2]$ функция $f(x)$ также непрерывна и при $x \to 1$

$$f(x) \sim \frac{1}{|x-1|^{-\beta}},$$

поэтому интегралы

$$\int\limits_{1/2}^{1} f(x)\,dx, \quad \int\limits_{1}^{2} f(x)\,dx$$

сходятся только при $-\beta < 1$, что равносильно $\beta > -1$.

На полуоси $[2; +\infty)$ подынтегральная функция нерерывна и при $x \to +\infty$

$$f(x) \sim \frac{1}{x^{-\alpha-\beta}}.$$

Следовательно, интеграл

$$\int\limits_{2}^{+\infty} f(x)\,dx$$

сходится тогда и только тогда, когда $-\alpha - \beta > 1$, т. е. если выполнено условие $\alpha + \beta < -1$.

С учетом приведенного анализа, получаем, что рассматриваемый интеграл сходится при $\alpha > -1$, $\beta > -1$, $\alpha + \beta < -1$ и расходится в остальных случаях.

2377. $\displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{P_m(x)}{P_n(x)}\,dx$, где $P_m(x)$ и $P_n(x)$ – взаимно простые многочлены соответственно степеней m и n.

Если многочлен $P_n(x)$ имеет на промежутке интегрирования $[0; +\infty)$ корень $x = a$, то в разбиение несобственного интеграла в сумму элементарных несобственных интегралов, содержащих по одной особенности подынтегральной функции, будет входить интеграл вида

$$\int\limits_{a}^{b} \frac{P_m(x)}{P_n(x)}\,dx.$$

Если s – кратность корня $x = a$ ($s \geqslant 1$), то при $x \to a$

$$\frac{P_m(x)}{P_n(x)} \sim \frac{C}{(x-a)^s},$$

где $C \neq 0$. Так как $s \geqslant 1$, то интеграл расходится. Таким образом, для сходимости рассматриваемого несобственного интеграла необходимо, чтобы многочлен $P_n(x)$ не имел нулей на промежутке интегрирования. Предположим, что это условие выполнено, тогда подынтегральная функция непрерывна на $[0; +\infty)$ и при $x \to +\infty$

$$\frac{P_m(x)}{P_n(x)} \sim \frac{C}{x^{n-m}}$$

с некоторой постоянной $C \neq 0$. Следовательно, рассматриваемый интеграл сходится тогда и только тогда, когда $n - m > 1$, т. е. $n > m + 1$.

Подводя итог, получаем, что интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{P_m(x)}{P_n(x)}\, dx$$

сходится в том и только в том случае, когда многочлен $P_n(x)$ не имеет корней в промежутке $[0; +\infty)$ и $n > m + 1$.

Исследовать на абсолютную и условную сходимость следующие интегралы:

2378. $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx.$

Интеграл от функции

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

разобьем на два

$$\int\limits_0^{+\infty} f(x)\, dx = \int\limits_0^{1} f(x)\, dx + \int\limits_1^{+\infty} f(x)\, dx.$$

Рассмотрим первый интеграл

$$I_1 = \int\limits_0^1 f(x)\,dx.$$

Так как $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, то согласно решению задачи 20, несобственный интеграл I_1 совпадает с собственным интегралом от непрерывной функции

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & 0 < x \leqslant 1 \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

Отсюда следует, что I_1 сходится абсолютно.

Перейдем ко второму интегралу

$$I_2 = \int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx.$$

а). Сходимость интеграла I_2 следует из признака Дирихле: функция $y = \sin x$ имеет ограниченную первообразную $-\cos x$, а функция $y = 1/x$ монотонно стремится к нулю при $x \to \infty$.

б). Покажем что интеграл не сходится абсолютно. Воспользуемся тем, что $|\sin x| \geqslant \sin^2 x$ (это неравенство следует из неравенства $|\sin x| \leqslant 1$), тогда имеем:

$$\int\limits_1^{+\infty} |f(x)|\,dx = \int\limits_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\,dx \geqslant \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}\,dx =$$

$$= \int\limits_1^{+\infty} \frac{1-\cos 2x}{2x}\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x} - \frac{1}{2}\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x}\,dx.$$

Первый из полученных интегралов расходится, а второй сходится по признаку Дирихле: функция $y = \cos 2x$ имеет ограниченную первообразную $\sin 2x/2$, а функция $y = 1/x$ монотонно стремится к нулю при $x \to +\infty$. Так как разность расходящегося и сходящегося интегралов есть интеграл расходящийся, то отсюда следует, что интеграл I_2 не является абсолютно сходящимся.

Подводя итог, получаем, что рассматриваемый в задаче интеграл сходится условно.

2379. $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\cos x}{x+100}\,dx.$

Подынтегральная функция непрерывна на $[0; +\infty)$, поэтому сходимость интеграла не зависит от выбора начальной точки интегрирования и вместо исходного интеграла можно рассмотреть интеграл

$$I = \int\limits_{100}^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\cos x}{x+100}\,dx.$$

Для доказательства сходимости интеграла I воспользуемся признаком Дирихле. Функция $f(x) = \cos x$ имеет ограниченную первообразную $F(x) = \sin x$, а функция

$$g(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+100}$$

имеет нулевой предел на бесконечности и монотонно убывает. Последнее утверждение о монотонности легко проверить, вычислив производную:

$$g'(x) = \frac{100 - x}{2\sqrt{x}(x+100)^2} \leqslant 0,$$

так как $x \geqslant 100$ (именно из соображения монотонности и был выбран новый нижний предел интегрирования, равный 100).

Для исследования интеграла I на абсолютную сходимость, воспользуемся неравенством $|\cos x| \geqslant \cos^2 x$, следующим из неравенства $|\cos x| \leqslant 1$:

$$\int\limits_{100}^{+\infty} \left| \frac{\sqrt{x}\cos x}{x+100} \right| dx = \int\limits_{100}^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\,|\cos x|}{x+100}\, dx \geqslant \int\limits_{100}^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\,\cos^2 x}{x+100}\, dx =$$

$$= \int\limits_{100}^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\,(1+\cos 2x)}{2(x+100)}\, dx = \frac{1}{2}\int\limits_{100}^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\, dx}{x+100} + \frac{1}{2}\int\limits_{100}^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\cos 2x}{x+100}\, dx.$$

Первый из полученных в правой части последнего равенства интегралов расходится, так как при $x \to +\infty$

$$\frac{\sqrt{x}}{x+100} \sim \frac{1}{x^{1/2}}.$$

Второй интеграл сходится по признаку Дирихле: функция $y = \cos 2x$ имеет ограниченную первообразную $y = \sin 2x/2$, а функция

$$g(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+100},$$

как показано выше, имеет нулевой предел на бесконечности и монотонно убывает. Так как разность расходящегося и сходящегося интегралов является расходящимся интегралом, то интеграл

$$\int\limits_{100}^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\,\cos^2 x}{x+100}\, dx$$

расходится, следовательно, расходится и интеграл

$$\int\limits_{100}^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\,|\cos x|}{x+100}\, dx,$$

т. е. I не является абсолютно сходящимся.

Подводя итог, получаем, что рассматриваемый в задаче интеграл сходится условно.

2380. $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} x^p \sin(x^q)\,dx \qquad (q \neq 0).$

После замены переменной $t = x^q$ получаем:

$$\int\limits_0^{+\infty} x^p \sin(x^q)\,dx = \begin{cases} \dfrac{1}{q}\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}\,dt\,, & q > 0\,; \\[2ex] -\dfrac{1}{q}\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}\,dt\,, & q < 0\,, \end{cases}$$

где

$$\alpha = \frac{q-p-1}{q}.$$

В любом из двух случаях ($q > 0$ или $q < 0$) задача сводится к исследованию интеграла

$$I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}\,dt.$$

Полученный интеграл от функции

$$f(t) = \frac{\sin t}{t^\alpha}$$

разобьем на два

$$\int\limits_0^{+\infty} f(t)\,dt = \int\limits_0^{1} f(t)\,dt + \int\limits_1^{+\infty} f(t)\,dt.$$

Рассмотрим первый интеграл

$$I_1 = \int\limits_0^{1} f(t)\,dt.$$

Подынтегральная функция непрерывна, причем при $t \to 0$

$$f(t) \sim \frac{1}{t^{\alpha-1}}.$$

Отсюда следует, что интеграл I_1 сходится тогда и только тогда, когда $\alpha - 1 < 1$, т. е. при $\alpha < 2$. При этом в силу положительности функции $f(t)$ на промежутке интегрирования понятия сходимости и абсолютной сходимости совпадают.

Перейдем ко второму интегралу

$$I_2 = \int\limits_1^{+\infty} f(t)\,dt$$

и рассмотрим вопрос о его сходимости. При $\alpha > 0$ к интегралу применим признак Дирихле. Функция $y = \sin t$ имеет ограниченную первообразную $y = -\cos t$, а функция $y = 1/t^\alpha$ монотонно убывает к нулю на бесконечности. Таким образом, при $\alpha > 0$ интеграл I_2 сходится.

При $\alpha = 0$

$$I_2 = \int\limits_1^{+\infty} \sin t\,dt = \lim_{D\to+\infty} \int\limits_1^{D} \sin t\,dt =$$

$$= \lim_{D\to+\infty} \Big(-\cos t\Big)\Big|_0^D = 1 - \lim_{D\to+\infty} \cos D.$$

Так как $\lim\limits_{D\to+\infty} \cos D$ не существует, то интеграл расходится.

При $\alpha < 0$ интеграл расходится. Для доказательства этого факта проверим, что не выполнен критерий Коши сходимости интеграла, т. е. при некотором $\varepsilon > 0$ для любого $D \geqslant 1$ найдутся такие $D_1, D_2 \in (D; +\infty)$, что

$$\left| \int\limits_{D_1}^{D_2} f(t)\,dt \right| \geqslant \varepsilon.$$

В самом деле, пусть $\varepsilon = 2$ и $D \geqslant 1$, подберем натуральное число n так, чтобы точки $D_1 = 2\pi n$ и $D_2 = \pi + 2\pi n$ попали в интервал $(D; +\infty)$ (для этого достаточно выбрать $n > D/2\pi$). Учитывая, что при $t \geqslant 1$ величина $1/t^\alpha \geqslant 1$ ($\alpha < 0$), имеем:

$$\left| \int\limits_{D_1}^{D_2} f(t)\,dt \right| = \left| \int\limits_{2\pi n}^{\pi+2\pi n} \frac{\sin t}{t^\alpha}\,dt \right| \geqslant \left| \int\limits_{2\pi n}^{\pi+2\pi n} \sin t\,dt \right| = 2 = \varepsilon.$$

Рассмотрим вопрос об абсолютной сходимости интеграла I_2. Если величина $\alpha > 1$, то подынтегральная функция

$$|f(t)| = \frac{|\sin t|}{t^\alpha} \leqslant \frac{1}{t^\alpha},$$

что влечет абсолютную сходимость I_2. Так как при $\alpha \leqslant 0$ интеграл I_2 расходится, то он не может сходиться абсолютно, следовательно, осталось рассмотреть случай $0 < \alpha \leqslant 1$. Покажем, что в этом случае интеграл также не сходится абсолютно. Для этого воспользуемся неравенством $|\sin t| \geqslant \sin^2 t$, вытекающим из неравенства $|\sin t| \leqslant 1$. С помощью этого неравенства получаем:

$$\int\limits_1^{+\infty} |f(t)|\,dt = \int\limits_1^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t^\alpha}\,dt \geqslant \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^\alpha}\,dt = \int\limits_1^{+\infty} \frac{1-\cos 2t}{2t^\alpha}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} - \frac{1}{2}\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos 2t}{t^\alpha}\,dt.$$

Так как $\alpha \leqslant 1$, то первый из полученных интегралов расходится, а второй сходится по признаку Дирихле: функция $y = \cos 2t$ имеет ограниченную первообразную $\sin 2t/2$, а функция $y = 1/t^\alpha$ монотонно стремится к нулю при $x \to +\infty$ ($\alpha > 0$). Так как разность расходящегося и сходящегося интегралов есть интеграл расходящийся, то отсюда следует, что интеграл I_2 не является абсолютно сходящимся.

Подведем итог исследованию сходимости интеграла

$$I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}\, dt.$$

При $\alpha \geqslant 2$ интеграл расходится, при $1 < \alpha \leqslant 2$ интеграл сходится абсолютно, при $0 < \alpha \leqslant 1$ интеграл сходится условно и при $\alpha \leqslant 0$ интеграл расходится.

Переходя к параметрам p и q получаем условия сходимости исходного интеграла

$$\int\limits_0^{+\infty} x^p \sin(x^q)\, dx.$$

При $-1 < (p+1)/q < 0$ интеграл сходится абсолютно, при $0 \leqslant$ $\leqslant (p+1)/q < 1$ интеграл сходится условно, а при $(p+1)/q \geqslant 1$ или $(p+1)/q \leqslant -1$ интеграл расходится.

2380.1. $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2} \sin(\sec x) dx.$

В задаче используется вышедшее из употребления обозначение функции

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}.$$

Подынтегральня функция

$$f(x) = \sin(\sec x)$$

непрерывна на промежутке $[0; \pi/2)$ и ограничена

$$|\sin(\sec x)| \leqslant 1.$$

Из решения задачи 28 следует, что интеграл сходится, причем абсолютно.

2380.2. $\int\limits_0^{+\infty} x^2 \cos(\mathrm{e}^x)\, dx.$

После замены переменной $t = \mathrm{e}^x$ получаем:

$$\int\limits_0^{+\infty} x^2 \cos(\mathrm{e}^x)\, dx = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln^2 t}{t} \cos t\, dt.$$

Так как сходимость интеграла не зависит от выбора нижнего предела интегрирования, то достаточно исследовать на сходимость интеграл

$$I = \int\limits_{10}^{+\infty} \frac{\ln^2 t}{t} \cos t\, dt.$$

Интеграл I сходится по признаку Дирихле. Функция $f(t) = \cos t$ имеет ограниченную первообразную $F(t) = \sin t$, а функция

$$g(t) = \frac{\ln^2 t}{t}$$

монотонно убывает и имеет нулевой предел на бесконечности. Для проверки монотонного убывания можно вычислить производную

$$g'(t) = \frac{\ln t(2 - \ln t)}{t^2}.$$

Из явного вида производной следует, что она отрицательна при $t > \mathrm{e}^2$. Так как $\mathrm{e}^2 \approx 7,389 < 10$, то $g'(t) < 0$ на всем промежутке интегрирования (из этих соображений и был выбран нижний предел интегрирования). Отсюда следует убывание функции $g(t)$.

Исследуем интеграл на абсолютную сходимость. Та же замена $t = \mathrm{e}^x$ дает:

$$\int\limits_0^{+\infty} |x^2 \cos(\mathrm{e}^x)|\, dx = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln^2 t}{t} |\cos t|\, dt.$$

Сходимость интеграла не зависит от выбора нижнего предела интегрирования, поэтому достаточно исследовать на сходимость интеграл

$$J = \int\limits_{10}^{+\infty} \frac{\ln^2 t}{t} \, |\cos t| \, dt.$$

Покажем, что этот интеграл расходится. Так как $|\cos t| \leqslant 1$, то отсюда имеем неравенство $|\cos t| \geqslant \cos^2 t$ и

$$J \geqslant \int\limits_{10}^{+\infty} \frac{\ln^2 t}{t} \cos^2 t \, dt = \int\limits_{10}^{+\infty} \frac{\ln^2 t}{2t} (1 + \cos 2t) \, dt =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_{10}^{+\infty} \frac{\ln^2 t}{t} \, dt + \frac{1}{2} \int\limits_{10}^{+\infty} \frac{\ln^2 t}{t} \cos 2t \, dt.$$

Так как при $t \to +\infty$

$$\frac{1}{t} = o\left(\frac{\ln^2 t}{t}\right),$$

и интеграл

$$\int\limits_{10}^{+\infty} \frac{dt}{t}$$

расходится, то расходится и первый из полученных интегралов

$$\int\limits_{10}^{+\infty} \frac{\ln^2 t}{t} \, dt.$$

Второй из полученных интегралов

$$\int\limits_{10}^{+\infty} \frac{\ln^2 t}{t} \cos 2t \, dt$$

сходится по признаку Дирихле: функция $y = \cos 2t$ имеет ограниченную первообразную $y = \sin 2t/2$, а функция

$$g(t) = \frac{\ln^2 t}{t}$$

монотонно убывает к нулю при $t \to +\infty$ (это было показано выше при исследовании сходимости интеграла I). Так как сумма расходящегося и сходящегося интегралов есть интеграл расходящийся, то отсюда следует расходимость интеграла J.

Следовательно, рассматриваемый интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} x^2 \cos(\mathrm{e}^x)\, dx$$

сходится условно.

2381. $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^p \sin x}{1 + x^q}\, dx \qquad (q \geqslant 0).$

Интеграл от функции

$$f(x) = \frac{x^p \sin x}{1 + x^q}$$

разобьем на два

$$\int\limits_0^{+\infty} f(x)\, dx = \int\limits_0^{1} f(x)\, dx + \int\limits_1^{+\infty} f(x)\, dx.$$

Исследуем сходимость интеграла

$$I_1 = \int\limits_0^{1} f(x)\, dx.$$

Так как подынтегральная функция $f(x)$ неотрицательна на $(0; 1]$, то понятия сходимости и абсолютной сходимости для интеграла

I_1 совпадают. Функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $(0;1]$ и имеет степенную асимптотику при $x \to 0$

$$f(x) \sim \begin{cases} \dfrac{1}{x^{-p-1}}\,, & q > 0\,, \\ \dfrac{1}{2x^{-p-1}}\,, & q = 0\,. \end{cases}$$

Отсюда следует, что интеграл I_1 сходится тогда и только тогда, когда $-p-1 < 1$, т. е. $p > -2$.

Рассмотрим второй интеграл

$$I_2 = \int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$$

и выясним условия его сходимости.

а) $p < q$. Так как сходимость интеграла не зависит от выбора нижнего предела интегрирования, то вместо интеграла I_2 можно исследовать интеграл

$$J = \int\limits_D^{+\infty} f(x)\,dx,$$

где D мы можем выбрать по своему усмотрению. Выберем это число так, чтобы

$$D > \left(\frac{p}{q-p}\right)^{1/q}.$$

Покажем, что интеграл J сходится. Воспользуемся признаком Дирихле: подынтегральная функция

$$f(x) = f_1(x) f_2(x),$$

где

$$f_1(x) = \sin x\,, \quad f_2(x) = \frac{x^p}{1+x^q}\,.$$

Функция $f_1(x)$ имеет ограниченную первообразную $F_1(x) = -\cos x$, а функция $f_2(x)$ монотонно убывает к нулю при $x \to +\infty$. Для проверки монотонности достаточно найти производную

$$f_2'(x) = \frac{x^{p-1}[p-(q-p)x^q]}{(1+x^q)^2}.$$

В силу выбора числа D величина $f_2'(x) < 0$ на $[D; +\infty)$, что влечет убывание функции $f_2(x)$.

б) $p \geqslant q$. Для этих значений параметров интеграл расходится. Для доказательства этого покажем, что не выполнен критерий Коши сходимости интеграла, т. е. при некотором $\varepsilon > 0$ для любого $D \geqslant 1$ найдутся такие $D_1, D_2 \in (D; +\infty)$, что

$$\left| \int\limits_{D_1}^{D_2} f(t)\,dt \right| \geqslant \varepsilon.$$

Пусть $\varepsilon = 1$ и $D \geqslant 1$. Подберем натуральное число n так, чтобы числа $D_1 = 2\pi n$ и $D_2 = \pi + 2\pi n$ попали в интервал $(D; +\infty)$ (для этого достаточно выбрать $n > D/2\pi$). Воспользуемся разложением подынтегральной функции на множители из предыдущего пункта

$$f(x) = f_1(x) f_2(x),$$

где

$$f_1(x) = \sin x\,, \quad f_2(x) = \frac{x^p}{1+x^q}\,.$$

Величины p и $p-q$ неотрицательны ($p \geqslant q$, $q \geqslant 0$). Отюда следует, что производная

$$f_2'(x) = \frac{x^{p-1}[p+(p-q)x^q]}{(1+x^q)^2}$$

неотрицательна и функция $f_2(x)$ возрастает на $[1; +\infty)$. Следовательно, на всем промежутке интегрирования

$$f_2(x) \geqslant f_2(1) = \frac{1}{2}.$$

Так как на отрезке $[D_1; D_2] = [2\pi n; \pi + 2\pi n]$ обе функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ неотрицательны, то

$$\left| \int\limits_{D_1}^{D_2} f(t)\,dt \right| = \left| \int\limits_{2\pi n}^{\pi+2\pi n} f_1(x) f_2(x)\,dx \right| = \int\limits_{2\pi n}^{\pi+2\pi n} f_1(x) f_2(x)\,dx \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2} \int\limits_{2\pi n}^{\pi+2\pi n} f_1(x)\,dx = \frac{1}{2} \int\limits_{2\pi n}^{\pi+2\pi n} \sin x\,dx = 1 = \varepsilon.$$

Рассмотрим вопрос об абсолютной сходимости интеграла I_2. Так как при $p \geqslant q$ интеграл расходится, то достаточно рассмотреть случай $p < q$.

а) $q > p + 1$. Так как функция $f_1(x) = \sin x$ ограничена, а функция

$$f_2(x) = \frac{x^p}{1 + x^q} \sim \frac{1}{x^{q-p}}\,, \quad x \to +\infty,$$

то

$$|f(x)| = O\left(\frac{1}{x^{q-p}}\right)\,, \quad x \to +\infty$$

и в силу условия $q > p + 1$ интеграл I_2 сходится абсолютно.

б) $p < q \leqslant p + 1$. Так как сходимость интеграла не зависит от выбора нижнего предела интегрирования, то можно исследовать сходимость интеграла

$$\int\limits_{D}^{+\infty} |f(x)|\,dx,$$

где

$$D > \left(\frac{p}{q-p}\right)^{1/q}.$$

Покажем, что этот интеграл расходится. Для этого воспользуемся неравенством $|\sin x| \geqslant \sin^2 x$, вытекающим из неравенства

$|\sin x| \leqslant 1$, получаем:

$$\int\limits_D^{+\infty} |f(x)|\,dx = \int\limits_D^{+\infty} \frac{x^p|\sin x|}{1+x^q}\,dx \geqslant \int\limits_D^{+\infty} \frac{x^p \sin^2 x}{1+x^q}\,dx =$$

$$= \int\limits_D^{+\infty} \frac{x^p(1-\cos 2x)}{2(1+x^q)}\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_D^{+\infty} \frac{x^p}{1+x^q}\,dx - \frac{1}{2}\int\limits_D^{+\infty} \frac{x^p \cos 2x}{1+x^q}\,dx.$$

В первом из полученных интегралов подынтегральная функция

$$\frac{x^p}{1+x^q} \sim \frac{1}{x^{q-p}}$$

и так как $q \leqslant p+1$, то $q-p \leqslant 1$, следовательно, этот интеграл расходится. Второй интеграл сходится по признаку Дирихле: функция $y = \cos 2x$ имеет ограниченную первообразную $y = \sin 2x/2$, а функция

$$f_2(x) = \frac{x^p}{1+x^q}$$

была исследована выше (при доказательстве обычной сходимости интеграла I_2 в п. а, отвечающего случаю $p < q$), эта функция имеет нулевой предел на бесконечности ($p < q$) и монотонно убывает: производная этой функции

$$f_2'(x) = \frac{x^{p-1}[p-(q-p)x^q]}{(1+x^q)^2}$$

отрицательна на промежутке $[D; +\infty)$ в силу выбора числа D. Так как разность расходящегося интеграла и сходящегося есть интеграл расходящийся, то I_2 не может сходиться абсолютно.

Подведем итог исследования. При $q \geqslant 0$ интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^p \sin x}{1+x^q}\,dx$$

сходится абсолютно при $p > -2$, $q > p+1$, сходится условно при $p > -2$, $p < q \leqslant p+1$ и расходится в остальных случаях.

2382. $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin\left(x+\dfrac{1}{x}\right)}{x^n}\,dx.$

Интеграл от функции

$$f(x) = \frac{\sin\left(x+\dfrac{1}{x}\right)}{x^n}$$

разобьем на два

$$\int\limits_0^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_0^{1} f(x)\,dx + \int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$$

и в каждом из интегралов сделаем замену

$$y = x + \frac{1}{x}.$$

Функция, определяющая замену, убывает на промежутке $(0;1]$ от $+\infty$ до 2 и возрастает на $[1;+\infty)$ от 2 до $+\infty$. Формулу обратной замены находим, решая квадратное уравнение $x^2 - yx + 1 = 0$ относительно переменной x:

$$x = \frac{1}{2}\left(y \pm \sqrt{y^2-4}\right).$$

По теореме Виета произведение корней равно 1, следовательно, меньший корень лежит на промежутке $(0;1]$, а больший – на $[1;+\infty)$. Таким образом, в первом интеграле

$$x = \frac{1}{2}\left(y - \sqrt{y^2-4}\right), \quad dx = \frac{\sqrt{y^2-4}-y}{2\sqrt{y^2-4}}\,dy$$

и

$$I_1 = \int\limits_0^1 f(x)\,dx = 2^{n-1} \int\limits_2^{+\infty} \frac{\sin y\,dy}{\sqrt{y^2-4}\left(y-\sqrt{y^2-4}\right)^{n-1}}.$$

Во втором интеграле

$$x = \frac{1}{2}\left(y+\sqrt{y^2-4}\right), \quad dx = \frac{\sqrt{y^2-4}+y}{2\sqrt{y^2-4}}\,dy$$

так, что

$$I_2 = \int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx = 2^{n-1} \int\limits_2^{+\infty} \frac{\sin y\,dy}{\sqrt{y^2-4}\left(y+\sqrt{y^2-4}\right)^{n-1}}.$$

Изучим интеграл I_1. Обозначим подынтегральную функцию

$$F(y) = \frac{\sin y}{\sqrt{y^2-4}\left(y-\sqrt{y^2-4}\right)^{n-1}}$$

и разобьем интеграл на два

$$I_1 = \int\limits_2^{+\infty} F(y)\,dy = \int\limits_2^3 F(y)\,dy + \int\limits_3^{+\infty} F(y)\,dy.$$

Рассмотрим первый интеграл

$$I_{11} = \int\limits_2^3 F(y)\,dy.$$

Подынтегральная функция непрерывна и при $y \to 2$ имеет степенную асимптотику с показателем $1/2$

$$F(y) \sim \frac{\sin 2}{2^n (y-2)^{1/2}},$$

поэтому интеграл I_{11} сходится, причем абсолютно.

Рассмотрим сходимость второго интеграла

$$I_{12} = \int\limits_{3}^{+\infty} F(y)\,dy.$$

а) $n < 2$. Покажем, что интеграл сходится. Воспользуемся признаком Дирихле. Функция $\sin y$ имеет ограниченную первообразную, поэтому достаточно показать, что функция

$$F_1(y) = \frac{1}{\sqrt{y^2-4}\left(y-\sqrt{y^2-4}\right)^{n-1}}$$

монотонно убывает к нулю на бесконечности. Уничтожая иррациональность в знаменателе, преобразуем выражение для этой функции:

$$F_1(y) = \frac{\left(y+\sqrt{y^2-4}\right)^{n-1}}{4^{n-1}\sqrt{y^2-4}}.$$

Из этого выражения следует, что при $y \to +\infty$

$$F_1(y) \sim \frac{1}{2^{n-1}y^{2-n}},$$

следовательно, $F_1(y) \to 0$ при $y \to +\infty$ $(n < 2)$. Для доказательства убывания функции $F_1(y)$ преобразуем ее выражение следующим образом:

$$F_1(y) = \frac{\left(y+\sqrt{y^2-4}\right)^{n-1}}{4^{n-1}\sqrt{y^2-4}} = \frac{y+\sqrt{y^2-4}}{4^{n-1}\sqrt{y^2-4}} \cdot \frac{1}{\left(y+\sqrt{y^2-4}\right)^{2-n}} =$$

$$= \frac{1}{4^{n-1}}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{4}{y^2}}}+1\right)\frac{1}{\left(y+\sqrt{y^2-4}\right)^{2-n}}.$$

Функции

$$u = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4}{y^2}}}, \quad v = \frac{1}{\left(y + \sqrt{y^2 - 4}\right)^{2-n}}$$

положительны и убывают на $[3; +\infty)$, следовательно, убывает и функция $F_1(y)$. Таким образом, условия признака Дирихле выполнены и интеграл сходится.

б) $n \geqslant 2$. Покажем, что в этом случае интеграл I_{12} расходится. Для этого достаточно показать, что не выполнен критерий Коши сходимости интеграла, т. е. при некотором $\varepsilon > 0$ для любого $D \geqslant 3$ найдутся такие $D_1, D_2 \in (D; +\infty)$, что

$$\left| \int\limits_{D_1}^{D_2} F(y)\, dy \right| \geqslant \varepsilon.$$

В предыдущем пункте было показано, что функция

$$F_1(y) \sim \frac{1}{2^{n-1} y^{2-n}}$$

при $y \to +\infty$. Так как $n \geqslant 2$, то функция $F_1(y)$ отделена от нуля при $y \to +\infty$, т. е. существует такое положительное число m и такое число y_0, что при всех $y \in [y_0; +\infty)$ будет выполнено неравенство $F_1(y) \geqslant m$. Пусть $\varepsilon = 2m$ и $D \geqslant 3$. Подберем такое натуральное число n, чтобы точки $D_1 = 2\pi n$ и $D_2 = \pi + 2\pi n$ были больше, чем $\max\{D, y_0\}$. Тогда

$$\left| \int\limits_{D_1}^{D_2} F(y)\, dy \right| = \int\limits_{2\pi n}^{\pi + 2\pi n} F_1(y) \sin y\, dy \geqslant m \int\limits_{2\pi n}^{\pi + 2\pi n} \sin y\, dy = 2m = \varepsilon,$$

что доказывает расходимость интеграла I_{12}.

Рассмотрим, теперь, вопрос об абсолютной сходимости интеграла I_{12}. Так как при $n \geqslant 2$ этот интеграл расходится, то достаточно ограничиться случаем $n < 2$.

а) $n < 1$. Функция $F(y) = F_1(y)\sin y$. При исследовании обычной сходимости интеграла, в пункте а, было показано, что

$$F_1(y) \sim \frac{1}{2^{n-1}y^{2-n}}$$

при $y \to +\infty$. Следовательно,

$$F(y) = O\left(\frac{1}{y^{2-n}}\right)$$

при $y \to +\infty$. Так как $n < 1$, то $2-n > 1$ и интеграл I_{12} сходится абсолютно.

б) $1 \leqslant n < 2$. Воспользуемся неравенством $|\sin y| \geqslant \sin^2 y$, вытекающим из неравенства $|\sin y| \leqslant 1$. Так как функция $F_1(y)$ положительна, то

$$\int\limits_3^{+\infty} |F(y)|\,dy = \int\limits_3^{+\infty} F_1(y)|\sin y|\,dy \geqslant \int\limits_3^{+\infty} F_1(y)\sin^2 y\,dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_3^{+\infty} F_1(y)(1-\cos 2y)\,dy = \frac{1}{2}\int\limits_3^{+\infty} F_1(y)\,dy - \frac{1}{2}\int\limits_3^{+\infty} F_1(y)\cos 2y\,dy.$$

Как уже отмечалось выше, при $y \to +\infty$

$$F_1(y) \sim \frac{1}{2^{n-1}y^{2-n}}.$$

Ввиду того, что $n \geqslant 1$ величина $2-n \leqslant 1$, следовательно, интеграл

$$\int\limits_3^{+\infty} F_1(y)\,dy$$

расходится. С другой стороны, при $n > 2$ функция $F_1(y)$ монотонно убывает к нулю (это также было показано выше), а функ-

ция $\cos 2y$ имеет ограниченную первообразную, поэтому, по признаку Дирихле, интеграл

$$\int\limits_{3}^{+\infty} F_1(y)\cos 2y\,dy$$

сходится. Так как разность расходящегося и сходящегося интегралов есть интеграл расходящийся, то интеграл I_{12} не может сходиться абсолютно.

Суммируя результаты о сходимости интегралов I_{11} и I_{12}, получаем, что интеграл I_1 сходится абсолютно при $n < 1$, сходится условно при $1 \leqslant n < 2$ и расходится при $n \geqslant 2$.

Перейдем к интегралу I_2. Обозначим подынтегральную функцию

$$G(y) = \frac{\sin y}{\sqrt{y^2-4}\left(y+\sqrt{y^2-4}\right)^{n-1}}$$

и разобьем интеграл на два

$$I_2 = \int\limits_{2}^{+\infty} G(y)\,dy = \int\limits_{2}^{3} G(y)\,dy + \int\limits_{3}^{+\infty} G(y)\,dy.$$

Рассмотрим первый интеграл

$$I_{21} = \int\limits_{2}^{3} G(y)\,dy.$$

Подынтегральная функция непрерывна и при $y \to 2$ имеет степенную асимптотику с показателем $1/2$

$$G(y) \sim \frac{\sin 2}{2^n (y-2)^{1/2}},$$

поэтому интеграл I_{21} сходится, причем абсолютно.

Рассмотрим сходимость второго интеграла

$$I_{22} = \int\limits_{3}^{+\infty} G(y)\,dy.$$

Изучение сходимости этого интеграла проводится аналогично исследованию сходимости интеграла I_{12}.

а) $n > 0$. Покажем, что интеграл сходится. Воспользуемся признаком Дирихле. Функция $\sin y$ имеет ограниченную первообразную, поэтому достаточно показать, что функция

$$G_1(y) = \frac{1}{\sqrt{y^2-4}\left(y+\sqrt{y^2-4}\right)^{n-1}}$$

монотонно убывает к нулю на бесконечности. В самом деле, при $y \to +\infty$

$$G_1(y) \sim \frac{1}{2^{n-1}y^n}$$

и так как $n > 0$, то $G_1(y)$ имеет нулевой предел на бесконечности. С другой стороны,

$$G_1(y) = \frac{y+\sqrt{y^2-4}}{\sqrt{y^2-4}\left(y+\sqrt{y^2-4}\right)^{n}} =$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{4}{y^2}}}+1\right)\frac{1}{\left(y+\sqrt{y^2-4}\right)^{n}}.$$

Функции

$$u = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{4}{y^2}}}, \quad v = \frac{1}{\left(y+\sqrt{y^2-4}\right)^{n}}$$

положительны и убывают на $[3;+\infty)$, следовательно, убывает и функция $G_1(y)$. Таким образом, условия признака Дирихле выполнены и интеграл сходится.

б) $n \leqslant 0$. Покажем, что в этом случае интеграл I_{22} расходится. Для этого достаточно показать, что не выполнен критерий Коши сходимости интеграла, т. е. при некотором $\varepsilon > 0$ для любого $D \geqslant 3$ найдутся такие $D_1, D_2 \in (D; +\infty)$, что

$$\left| \int\limits_{D_1}^{D_2} G(y)\, dy \right| \geqslant \varepsilon.$$

Так как

$$G_1(y) \sim \frac{1}{2^{n-1} y^n}$$

при $y \to +\infty$ и $n \leqslant 0$, то функция $G_1(y)$ отделена от нуля при $y \to +\infty$, т. е. существует такое положительное число m и такое число y_0, что при всех $y \in [y_0; +\infty)$ будет выполнено неравенство $G_1(y) \geqslant m$. Пусть $\varepsilon = 2m$ и $D \geqslant 3$. Подберем такое натуральное число n, чтобы точки $D_1 = 2\pi n$ и $D_2 = \pi + 2\pi n$ были больше, чем $\max\{D, y_0\}$. Тогда

$$\left| \int\limits_{D_1}^{D_2} G(y)\, dy \right| = \int\limits_{2\pi n}^{\pi + 2\pi n} G_1(y) \sin y\, dy \geqslant m \int\limits_{2\pi n}^{\pi + 2\pi n} \sin y\, dy = 2m = \varepsilon,$$

что доказывает расходимость интеграла I_{22}.

Рассмотрим вопрос об абсолютной сходимости интеграла I_{22}. Так как при $n \leqslant 0$ этот интеграл расходится, то достаточно ограничиться случаем $n > 0$.

а) $n > 1$. Функция $G(y) = G_1(y) \sin y$. Функция

$$G_1(y) \sim \frac{1}{2^{n-1} y^n}$$

при $y \to +\infty$. Следовательно,

$$G(y) = O\left(\frac{1}{y^n}\right)$$

при $y \to +\infty$. Так как $n > 1$, то интеграл I_{22} сходится абсолютно.

б) $0 < n \leqslant 1$. Воспользуемся неравенством $|\sin y| \geqslant \sin^2 y$, вытекающим из неравенства $|\sin y| \leqslant 1$. Так как функция $G_1(y)$ положительна, то

$$\int\limits_3^{+\infty} |G(y)|\,dy = \int\limits_3^{+\infty} G_1(y)|\sin y|\,dy \geqslant \int\limits_3^{+\infty} G_1(y)\sin^2 y\,dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_3^{+\infty} G_1(y)(1-\cos 2y)\,dy = \frac{1}{2}\int\limits_3^{+\infty} G_1(y)\,dy - \frac{1}{2}\int\limits_3^{+\infty} G_1(y)\cos 2y\,dy.$$

Как уже отмечалось выше, при $y \to +\infty$

$$G_1(y) \sim \frac{1}{2^{n-1}y^n}.$$

Ввиду того, что $n \leqslant 1$ интеграл

$$\int\limits_3^{+\infty} G_1(y)\,dy$$

расходится. С другой стороны, при $n > 0$ функция $G_1(y)$ монотонно убывает к нулю (это также было показано выше), а функция $\cos 2y$ имеет ограниченную первообразную, поэтому, по признаку Дирихле, интеграл

$$\int\limits_3^{+\infty} G_1(y)\cos 2y\,dy$$

сходится. Так как разность расходящегося и сходящегося интегралов есть интеграл расходящийся, то интеграл I_{22} не может сходиться абсолютно.

Подводя итоги проделанного анализа относительно сходимости интегралов I_{21} и I_{22}, получаем, что интеграл I_2 сходится абсолютно при $n > 1$, сходится условно при $0 < n \leqslant 1$ и расходится при $n \leqslant 0$.

Учитывая полученные результаты, касающиеся сходимости интегралов I_1 и I_2, получаем окончательно, что рассматриваемый в задаче интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin\left(x + \dfrac{1}{x}\right)}{x^n}\, dx$$

сходится условно при $0 < n < 2$ и расходится в остальных случаях.

2383. $\displaystyle\int\limits_a^{+\infty} \frac{P_m(x)}{P_n(x)} \sin x\, dx,$

где $P_m(x)$ и $P_n(x)$ – целые многочлены и $P_n(x) > 0$, если $x \geqslant a \geqslant 0$.

Обозначим через $f(x)$ подынтегральную функция

$$f(x) = \frac{P_m(x)}{P_n(x)} \sin x,$$

через $g(x)$ – отношение многочленов

$$g(x) = \frac{P_m(x)}{P_n(x)},$$

так, что

$$f(x) = g(x) \sin x$$

и рассмотрим три случая.

а) $n > m + 1$. Функция $y = \sin x$ ограничена, а отношение многочленов при $x \to +\infty$

$$g(x) = \frac{P_m(x)}{P_n(x)} \sim \frac{C}{x^{n-m}},$$

где постоянная C равна отношению старших коэффициентов многочленов $P_m(x)$ и $P_n(x)$. Отсюда следует, что при $x \to +\infty$

$$f(x) = O\left(\frac{1}{x^{n-m}}\right).$$

Так как $n > m+1$, то величина $n - m > 1$ и, следовательно, рассматриваемый интеграл

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

сходится абсолютно.

б) $m < n \leqslant m+1$. Покажем, что в данном случае интеграл сходится условно. Вычислим производную

$$g'(x) = \frac{P_m'(x)P_n(x) - P_m(x)P_n'(x)}{P_n^2(x)}.$$

Числитель полученного выражения $P_m'(x)P_n(x) - P_m(x)P_n'(x)$ представляет собой многочлен, который может иметь только конечное число корней (случай когда $g(x) = \mathrm{const}$ мы исключаем, так как $m \neq n$). Отсюда следует, что существует такое число A, что при $x \geqslant A$ функция $g'(x)$ не имеет нулей и, таким образом, знакопостоянна. Это влечет монотонность функции $g(x)$ на промежутке $[A; +\infty)$. Более того, так как $m < n$, то функция $g(x)$ имеет нулевой предел на бесконечности. С другой стороны, функция $y = \sin x$ имеет ограниченную первообразную, следовательно, интеграл

$$\int\limits_A^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_A^{+\infty} g(x)\sin x\,dx$$

сходится по признаку Дирихле. Так как сходимость интеграла не зависит от выбора нижнего предела интегрирования, то сходится

и рассматриваемый интеграл

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Интеграл от модуля функции $f(x)$ также можно рассматривать на промежутке $[A;+\infty)$. Для оценки этого интеграла воспользуемся неравенством $|\sin x| \geqslant \sin^2 x$, вытекающим из неравенства $|\sin x| \leqslant 1$. Используя это неравенство, получаем:

$$\int\limits_A^{+\infty} |f(x)|\,dx = \int\limits_A^{+\infty} |g(x)||\sin x|\,dx \geqslant \int\limits_A^{+\infty} |g(x)|\,\sin^2 x\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_A^{+\infty} |g(x)|(1-\cos 2x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_A^{+\infty} |g(x)|\,dx - \frac{1}{2}\int\limits_A^{+\infty} |g(x)|\,\cos 2x\,dx.$$

Рассмотрим первый из полученных интегралов. Как отмечалось выше, на промежутке $[A;+\infty)$ функция

$$g(x) = \frac{P_m(x)}{P_n(x)}$$

при $x \to +\infty$ монотонно стремится к нулю, не являясь тождественно равной нулю. Отсюда следует, что многочлен $P_m(x)$, стоящий в числителе дроби, определяющей функцию g, не может иметь нулей на промежутке $[A;+\infty)$. Таким образом, функция $g(x)$ знакопостоянна на $[A;+\infty)$ (по условию задачи многочлен $P_n(x) > 0$), следовательно, либо $|g(x)| = g(x)$, либо $|g(x)| = -g(x)$. В любом из этих двух случаях сходимость интеграла

$$\int\limits_A^{+\infty} |g(x)|\,dx$$

равносильна сходимости интеграла

$$\int\limits_A^{+\infty} g(x)\,dx,$$

а так как

$$g(x) \sim \frac{C}{x^{n-m}} \quad (C \neq 0),$$

причем $n \leqslant m+1$, то величина $n-m \leqslant 1$ и интеграл от $g(x)$ расходится, следовательно, расходится и интеграл

$$\int\limits_A^{+\infty} |g(x)|\,dx.$$

Во втором интеграле также на всем промежутке интегрирования $|g(x)| = g(x)$ или $|g(x)| = -g(x)$ так, что его сходимость равносильна сходимости интеграла

$$\int\limits_A^{+\infty} g(x)\,\cos 2x\,dx.$$

Функция $\cos 2x$ имеет ограниченную первообразную, а $g(x)$ (как показано выше) монотонно стремится к нулю при $x \to +\infty$. Следовательно, этот интеграл сходится по признаку Дирихле. Так как разность расходящегося и сходящегося интегралов есть интеграл расходящийся, то интеграл

$$\int\limits_A^{+\infty} |f(x)|\,dx$$

расходится.

в) $n \leqslant m$. Докажем, что в этом случае интеграл расходится. Так как при $x \to +\infty$

$$g(x) = \frac{P_m(x)}{P_n(x)} \sim \frac{C}{x^{n-m}} = Cx^{m-n} \quad (C \neq 0)$$

и $n \leqslant m$, то отсюда следует, что функция $g(x)$ при $x \to +\infty$ отделена от нуля, т. е. существует такое положительное число m и такое число B, что при всех $x \in [B; +\infty)$ значения $|g(x)| \geqslant m$, причем сама функция $g(x)$ знакопостоянна. Ввиду того, что сходимость интеграла не зависит от выбора нижнего предела интегрирования, исходный интеграл можно заменить интегралом

$$\int\limits_B^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_B^{+\infty} g(x)\sin x\,dx.$$

Так как на всем промежутке интегрирования $[B; +\infty)$ функция $g(x)$ знакопостоянна, то функция $y = |g(x)|\sin x$ совпадает либо с функцией $y = g(x)\sin x$, либо с функцией $y = -g(x)\sin x$. В любом из этих случаев сходимость интеграла от функции $g(x)\sin x$ будет равносильна сходимости интеграла от функции $|g(x)|\sin x$. Отсюда следует, что исходный интеграл можно заменить на интеграл

$$\int\limits_B^{+\infty} |g(x)|\sin x\,dx.$$

Для доказательства расходимости последнего интеграла достаточно установить, что для него не выполнен критерий Коши, т. е. при некотором $\varepsilon > 0$ для любого $D \geqslant B$ найдутся такие точки $D_1, D_2 \in (D; +\infty)$, что

$$\left|\int\limits_{D_1}^{D_2} |g(x)|\sin x\,dx\right| \geqslant \varepsilon.$$

Пусть $\varepsilon = 2m$ и $D \geqslant B$. Подберем такое натуральное число n, чтобы точки $D_1 = 2\pi n$ и $D_2 = \pi + 2\pi n$ были больше, чем D. Тогда

$$\left|\int\limits_{D_1}^{D_2} |g(x)|\sin x\,dx\right| = \int\limits_{2\pi n}^{\pi+2\pi n} |g(x)|\sin x\,dx \geqslant$$

$$\geqslant m \int\limits_{2\pi n}^{\pi+2\pi n} \sin x\, dx = 2m = \varepsilon,$$

что доказывает расходимость интеграла.

Таким образом, окончательно получаем, что интеграл

$$\int\limits_{a}^{+\infty} \frac{P_m(x)}{P_n(x)} \sin x\, dx$$

абсолютно сходится при $n > m+1$, условно сходится при $m < n \leqslant m+1$ и расходится при $n \leqslant m$.

2384. Если

$$\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\, dx$$

сходится, то обязательно ли $f(x) \to 0$ при $x \to +\infty$?

Рассмотреть примеры:

а) $\int\limits_{0}^{+\infty} \sin(x^2)\, dx$; б) $\int\limits_{0}^{+\infty} (-1)^{[x^2]}\, dx$.

Оба предлагаемых примера показывают, что ответ на поставленный вопрос – отрицательный. Рассмотрим первый пример.

а) $\int\limits_{0}^{+\infty} \sin(x^2)\, dx$.

Данный интеграл представляет собой частный случай интеграла, рассмотренного в задаче 2380. Он отвечает значениям $p = 0$, $q = 2$. Согласно решению задачи 2380, при этих значениях параметров интеграл сходится:

$$\frac{p+q}{q} = \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad 0 \leqslant \frac{p+q}{q} < 1.$$

Однако, предел функции $\sin(x^2)$ при $x \to +\infty$ не существует.

б) $\int\limits_0^{+\infty} (-1)^{[x^2]}\, dx.$

Если при неотрицательном целом n число x удовлетворяет неравенствм $\sqrt{n} \leqslant x < \sqrt{n+1}$, то число x^2 удовлетворяет неравенствам

$$n \leqslant x^2 < n+1$$

и его целая часть $[x^2] = n$. Следовательно,

$$\int\limits_0^{+\infty} (-1)^{[x^2]}\, dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int\limits_{\sqrt{n}}^{\sqrt{n+1}} (-1)^{[x^2]}\, dx =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \int\limits_{\sqrt{n}}^{\sqrt{n+1}} (-1)^n\, dx = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\, b_n\,,$$

где

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}.$$

Ряд

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\, b_n$$

сходится по признаку Лейбница, так как $\{b_n\}$ монотонно стремится к нулю при $n \to +\infty$, однако, функция

$$f(x) = (-1)^{[x^2]} = (-1)^n \quad \text{при} \quad \sqrt{n} \leqslant x < \sqrt{n+1}$$

не имеет предела при $x \to +\infty$.

2384.1. Пусть $f(x) \in C^1[x_0;+\infty)$, $|f'(x)| < C$ при $x_0 \leqslant \leqslant x < +\infty$ и

$$\int\limits_{x_0}^{+\infty} |f(x)|\,dx$$

сходится. Доказать, что $f(x) \to 0$ при $x \to +\infty$.

Согласно формуле Ньютона – Лейбница

$$f^2(x) = f^2(x_0) + \int\limits_{x_0}^{x} [f^2(\xi)]' d\xi = f^2(x_0) + 2\int\limits_{x_0}^{x} f(\xi)f'(\xi)\,d\xi.$$

Из условия задачи следует, что

$$|f(\xi)f'(\xi)| \leqslant C|f(\xi)|.$$

Так как интеграл от $|f|$ сходится, то интеграл

$$\int\limits_{x_0}^{+\infty} f(\xi)f'(\xi)\,d\xi$$

сходится (абсолютно). Отсюда следует. что существует предел

$$\lim_{x\to+\infty} f^2(x) = f^2(x_0) + 2\int\limits_{x_0}^{+\infty} f(\xi)f'(\xi)\,d\xi.$$

В силу непрерывности функции $y = \sqrt{x}$, существует также и предел

$$\lim_{x\to+\infty} |f(x)| = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{f^2(x)} = \sqrt{\lim_{x\to+\infty} f^2(x)}.$$

Однако в силу сходимости интеграла от функции $|f(x)|$ на промежутке $[x_0;+\infty)$, этот предел может быть равен только нулю, а из равенства

$$\lim_{x\to+\infty} |f(x)| = 0$$

следует равенство

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

2385. Можно ли сходящийся несобственный интеграл

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx$$

от неограниченной функции $f(x)$, определенной на $[a;b]$, рассматривать как предел соответствующей интегральной суммы

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

где $x_i \leqslant \xi_i \leqslant x_{i+1}$ и $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$?

Для неограниченной функции предел интегральной суммы не существует. Для доказательства этого факта достаточно показать, что интегральная сумма не удовлетворяет критерию Коши существования предела, т. е. при некотором $\varepsilon > 0$ для любой величины $\delta > 0$ найдутся две интегральные суммы S_1 и S_2 с характеристиками разбиений меньше δ, для которых $|S_1 - S_2| \geqslant \varepsilon$.

В самом деле, пусть $\varepsilon > 0$ фиксировано и δ – произвольное положительное число. Рассмотрим произвольное разбиение отрезка $[a;b]$

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

с характеристикой

$$\max_{0\leqslant i\leqslant n-1} \Delta x_i < \delta$$

и произвольным выбором точек

$$\xi_i \in [x_i; x_{i+1}]\,, \quad 0 \leqslant i \leqslant n-1\,.$$

Так как функция $f(x)$ не ограничена на $[a;b]$, то она не ограничена хотя бы на одном из отрезков разбиения $[x_k; x_{k+1}]$. Следовательно, существует точка ξ на этом отрезке, для которой

$$|f(\xi)| > |f(\xi_k)| + \frac{\varepsilon}{\Delta x_k}.$$

Рассмотрим вторую интегральную сумму, отвечающую тому же разбиению отрезка и с тем же выбором точек $\{\xi_i\}$, в которых вычисляются значения функции, входящие в интегральную сумму, но с одним исключением: вместо точки ξ_k берется точка ξ. Тогда характристика этого разбиения (совпадающая с характристикой первого разбиения) будет также меньше δ, а разность соответствующих интегральный сумм

$$S_1 - S_2 = (f(\xi_k) - f(\xi))\,\Delta x_k.$$

В силу известного числового неравенства $|x-y| \geqslant |x|-|y|$, отсюда имеем:

$$|S_1 - S_2| = |f(\xi) - f(\xi_k)|\Delta x_k \geqslant$$
$$\geqslant (|f(\xi)| - |f(\xi_k)|)\,\Delta x_k \geqslant \frac{\varepsilon}{\Delta x_k}\,\Delta x_k = \varepsilon.$$

Это доказывает отсутствие предела интегральной суммы у неограниченной функции.

2386. Пусть

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx \tag{5.21}$$

сходится и функция $\varphi(x)$ ограничена.

Обязательно ли сходится интеграл

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\varphi(x)\,dx? \tag{5.22}$$

Привести соответствующий пример.

Что можно сказать о сходимости интеграла (5.22), если интеграл (5.21) сходится абсолютно?

1. Ответ на первый вопрос отрицательный. Приведем следующий пример:

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}\,, \quad \varphi(x) = \sin x$$

на промежутке $[0; +\infty)$. Интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$$

сходится (задача 2378), функция $\varphi(x) = \sin x$ ограничена, а интеграл

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\varphi(x)\,dx = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}\,dx$$

расходится (задача 2368).

2. В том случае, когда интеграл (5.21) сходится абсолютно, интеграл (5.22) сходится также абсолютно. В самом деле, так как $|\varphi(x)| \leqslant M$, то $|f(x)\varphi(x)| \leqslant M|f(x)|$ и из сходимости интеграла от $|f|$ следует сходимость интеграла $|f\varphi|$ (а, следовательно, и интеграла от $f\varphi$).

2387. Доказать, что если

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

сходится и $f(x)$ – монотонная функция, то

$$f(x) = O\left(\frac{1}{x}\right).$$

Так как функция $f(x)$ монотонна, то она имеет предел на $+\infty$ и в силу сходимости интеграла этот предел должен быть равен нулю. Отсюда следует, что функция $f(x)$ знакопостоянна.

Для определенности будем считать, что функция $f(x)$ положительна и, следовательно, убывает на $[0; +\infty)$. Обозначим через M интеграл от функции f, тогда

$$M = \int\limits_a^{+\infty} f(t)\,dt \geqslant \int\limits_a^{x} f(t)\,dt \geqslant \int\limits_a^{x} f(x)\,dt = f(x)(x-a).$$

Таким образом,

$$f(x) \leqslant \frac{M}{x-a}$$

и, следовательно,

$$f(x) = O\left(\frac{1}{x}\right)$$

при $x \to +\infty$.

2388. Пусть функция $f(x)$ монотонна в промежутке $0 < x \leqslant 1$ и не ограничена в окрестности точки $x = 0$.

Доказать, что если существует

$$\int\limits_0^1 f(x)\,dx,$$

то

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int\limits_0^1 f(x)\,dx.$$

Из условия задачи следует, что при некотором $\delta > 0$ функция $f(x)$ знакопостоянна на промежутке $(0;\delta)$.

1. Функция $f(x)$ положительна в интервале $(0;\delta)$. Отсюда следует, что $f(x)$ является убывающей, поэтому

$$\int\limits_0^x f(t)\,dt \geqslant \int\limits_0^x f(x)\,dt = xf(x).$$

Так как интеграл

$$\int\limits_0^1 f(x)\,dx$$

сходится, то

$$\lim_{x\to 0}\int\limits_0^x f(t)|\,dt = 0,$$

следовательно,

$$\lim_{x\to 0} x f(x) = 0. \tag{5.23}$$

В силу убывания функции $f(x)$

$$\int\limits_{1/n}^{1} f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n-1} \int\limits_{k/n}^{(k+1)/n} f(x)\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \int\limits_{k/n}^{(k+1)/n} f\left(\frac{k}{n}\right)\,dx = \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}.$$

Аналогично

$$\int\limits_{1/n}^{1} f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n-1} \int\limits_{k/n}^{(k+1)/n} f(x)\,dx \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{k=1}^{n-1} \int\limits_{k/n}^{(k+1)/n} f\left(\frac{k+1}{n}\right)\,dx = \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k+1}{n}\right)\frac{1}{n}.$$

Отсюда получаем, что

$$f(1)\,\frac{1}{n} + \int\limits_{1/n}^{1} f(x)\,dx \leqslant \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n} \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{1/n}^{1} f(x)\,dx + f\left(\frac{1}{n}\right)\frac{1}{n}. \tag{5.24}$$

Из (5.23) следует, что

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\, f\left(\frac{1}{n}\right) = 0,$$

поэтому, переходя в (5.24) к пределу, получаем:

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}=\int\limits_0^1 f(x)\,dx.$$

2. Функция $f(x)$ отрицательна в интервале $(0;\delta)$. Тогда функция $g(x)=-f(x)$ положительна в интервале $(0;\delta)$ и удовлетворяет условиям задачи. Согласно предыдущему пункту

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} g\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}=\int\limits_0^1 g(x)\,dx.$$

Заменяя здесь $g(x)$ на $-f(x)$ и умножая полученное равенство на -1, получаем:

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}=\int\limits_0^1 f(x)\,dx.$$

2389. Доказать, что если функция $f(x)$ монотонна и ограничена в интервале $0<x<a$ и существует несобственный интеграл

$$\int\limits_0^a x^p f(x)\,dx,$$

то

$$\lim_{x\to+0} x^{p+1}f(x)=0.$$

Ввиду ограниченности функции $f(x)$ сходимость несобственного интеграла не зависит от выбора верхнего предела интегрирования. Поэтому, уменьшая, в случае необходимости, значение a, можно считать, что $f(x)$ знакопостоянна в интервале $(0;a)$. Нетрудно также видеть, что если утверждение задачи

справедливо для функции $f(x)$, то оно справедливо и для функции $g(x) = -f(x)$. Поэтому, без ограничения общности, можно считать, что функция $f(x) \geqslant 0$ в интервале $(0; a)$.

1. Функция $f(x)$ убывает в интервале $(0; a)$. Если $p \neq -1$, то

$$\int\limits_0^x t^p f(t)\,dt \geqslant \int\limits_0^x t^p f(x)\,dt = \frac{1}{p+1}\,x^{p+1} f(x),$$

а если $p = -1$, то

$$\int\limits_0^x \frac{1}{t}\,f(t)\,dt \geqslant \int\limits_{x/2}^x \frac{1}{t}\,f(x)\,dt = f(x)\ln 2.$$

Таким образом,

$$0 \leqslant x^{p+1} f(x) \leqslant A_p \int\limits_0^x t^p f(t)\,dt,$$

где

$$A_p = \begin{cases} p+1\,, & p \neq -1; \\ 1/\ln 2\,, & p = -1. \end{cases}$$

Так как несобственный интеграл от функции $x^p f(x)$ сходится, то

$$\lim_{x\to 0} \int\limits_0^x t^p f(t)\,dt = 0,$$

следовательно,

$$\lim_{x\to +0} x^{p+1} f(x) = 0.$$

2. Функция $f(x)$ возрастает в интервале $(0; a)$. Если $p \neq -1$, то

$$\int\limits_0^{2x} t^p f(t)\,dt \geqslant \int\limits_x^{2x} t^p f(t)\,dt \geqslant \int\limits_x^{2x} t^p f(x)\,dt = \frac{2^{p+1}-1}{p+1}\,x^{p+1} f(x),$$

а если $p=-1$, то

$$\int\limits_0^{2x} \frac{1}{t}\, f(t)\, dt \geqslant \int\limits_x^{2x} \frac{1}{t}\, f(t)\, dt \geqslant \int\limits_x^{2x} \frac{1}{t}\, f(x)\, dt = f(x) \ln 2.$$

Отсюда следует, что

$$0 \leqslant x^{p+1} f(x) \leqslant B_p \int\limits_0^{2x} t^p f(t)\, dt,$$

где

$$B_p = \begin{cases} (p+1)/\left(2^{p+1}-1\right), & p \neq -1; \\ 1/\ln 2, & p=-1. \end{cases}$$

Так как несобственный интеграл от функции $x^p f(x)$ сходится, то

$$\lim_{x\to 0} \int\limits_0^{2x} t^p f(t)\, dt = 0,$$

следовательно,

$$\lim_{x\to +0} x^{p+1} f(x) = 0.$$

2390. Показать, что:

$$\text{а) v.p.} \int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x} = 0; \quad \text{б) v.p.} \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1-x^2} = 0; \quad \text{в) v.p.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin x\, dx = 0.$$

а). По определению главного значения

$$\text{v.p.} \int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0} \left(\int\limits_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int\limits_{\varepsilon}^{1} \frac{dx}{x} \right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \left(\ln|x| \Big|_{-1}^{-\varepsilon} + \ln|x| \Big|_{\varepsilon}^{1} \right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left((\ln\varepsilon - 0) + (0 - \ln\varepsilon)\right) = \lim_{\varepsilon\to 0} 0 = 0.$$

б). По определению главного значения

$$\text{v.p.}\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{1-x^2} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int\limits_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{1-x^2} + \int\limits_{1+\varepsilon}^{+\infty}\frac{dx}{1-x^2}\right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\Bigg|_0^{1-\varepsilon} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\Bigg|_{1+\varepsilon}^{+\infty}\right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{2}\ln\frac{2-\varepsilon}{\varepsilon} - \frac{1}{2}\ln\frac{2+\varepsilon}{\varepsilon}\right) = \frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\ln\frac{2-\varepsilon}{2+\varepsilon} = 0.$$

в). По определению главного значения

$$\text{v.p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\sin x\,dx = \lim_{D\to+\infty}\int\limits_{-D}^{D}\sin x\,dx =$$

$$= \lim_{D\to+\infty}(-\cos x)\Big|_{-D}^{D} = \lim_{D\to+\infty} 0 = 0.$$

2391. Доказать, что при $x \geqslant 0$, $x \neq 1$ существует

$$\operatorname{li} x = \text{v.p.}\int\limits_0^x \frac{d\xi}{\ln\xi}.$$

Рассмотрим функцию

$$\varphi(x) = \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}.$$

Нетрудно видеть, что

$$\lim_{x\to 0}\varphi(x) = 1.$$

Кроме того, применяя дважды правило Лопиталя, находим:

$$\lim_{x\to 1}\varphi(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}=\lim_{x\to 1}\frac{1-\dfrac{1}{x}}{\ln x+\dfrac{x-1}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x\ln x+x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\ln x+2}=\frac{1}{2}.$$

Отсюда следует, что несобственный интеграл от $\varphi(x)$ существует и совпадает с обычным интегралом от непрерывной функции

$$\tilde{\varphi}(x)=\begin{cases}1\,, & x=0\\ \varphi(x)\,, & x\neq 0,\ x\neq 1;\\ 1/2\,, & x=1.\end{cases}$$

Таким образом,

$$\text{v.p.}\int\limits_0^x\frac{d\xi}{\ln\xi}=\text{v.p.}\int\limits_0^x\left(\varphi(\xi)+\frac{1}{\xi-1}\right)d\xi=$$

$$=\int\limits_0^x\varphi(\xi)\,d\xi+\text{v.p.}\int\limits_0^x\frac{d\xi}{\xi-1}$$

и достаточно доказать, что существует

$$\text{v.p.}\int\limits_0^x\frac{d\xi}{\xi-1}.$$

Существование этого интеграла проверяется непосредственно, исходя из определения главного значения

$$\text{v.p.}\int\limits_0^x\frac{d\xi}{\xi-1}=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int\limits_0^{1-\varepsilon}\frac{d\xi}{\xi-1}+\int\limits_{1+\varepsilon}^x\frac{d\xi}{\xi-1}\right)=$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\ln|\xi-1|\Big|_0^{1-\varepsilon} + \ln|\xi-1|\Big|_{1+\varepsilon}^{x}\right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left((\ln\varepsilon - 0) + (\ln|x-1| - \ln\varepsilon)\right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\ln|x-1| = \ln|x-1|.$$

Найти следующие интегралы:

2392. v.p. $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2-3x+2}$.

Так как

$$\int\frac{dx}{x^2-3x+2} = \int\left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}\right)dx = \ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right| + C,$$

то

$$\text{v.p.}\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2-3x+2} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int\limits_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{x^2-3x+2} + \int\limits_{1+\varepsilon}^{3/2}\frac{dx}{x^2-3x+2}\right) +$$

$$+\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int\limits_{3/2}^{2-\varepsilon}\frac{dx}{x^2-3x+2} + \int\limits_{2+\varepsilon}^{+\infty}\frac{dx}{x^2-3x+2}\right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\left(\ln\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} - \ln 2\right) + \left(0 - \ln\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\right)\right] +$$

$$+\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\left(\ln\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} - 0\right) + \left(0 - \ln\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)\right] =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\ln\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} - \ln 2\right] + \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\ln\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right] = -\ln 2.$$

2393. v.p. $\int\limits_{1/2}^{2} \frac{dx}{x \ln x}$.

Так как

$$\int \frac{dx}{x \ln x} = \int \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \ln|\ln x| + C,$$

то

$$\text{v.p.} \int\limits_{1/2}^{2} \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int\limits_{1/2}^{1-\varepsilon} \frac{dx}{x \ln x} + \int\limits_{1+\varepsilon}^{2} \frac{dx}{x \ln x} = \right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\left(\ln|\ln(1-\varepsilon)| - \ln\left|\ln \frac{1}{2}\right| \right) + \right.$$

$$\left. + (\ln|\ln 2| - \ln|\ln(1+\varepsilon)|) \right] = \lim_{\varepsilon \to 0} \ln \left| \frac{\ln(1-\varepsilon)}{\ln(1+\varepsilon)} \right|.$$

Здесь учтено, что $\left|\ln \frac{1}{2}\right| = |-\ln 2| = \ln 2$. Предел полученного выражения можно найти, применяя правило Лопиталя:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \ln \left| \frac{\ln(1-\varepsilon)}{\ln(1+\varepsilon)} \right| = \ln \left| \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln(1-\varepsilon)}{\ln(1+\varepsilon)} \right| = \ln \left| \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{-\frac{1}{1-\varepsilon}}{\frac{1}{1+\varepsilon}} \right| = \ln 1 = 0.$$

Следовательно,

$$\text{v.p.} \int\limits_{1/2}^{2} \frac{dx}{x \ln x} = 0.$$

2394. v.p. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+x}{1+x^2}\, dx$.

Так как

$$\int \frac{1+x}{1+x^2}\, dx = \int \frac{dx}{1+x^2} + \int \frac{x\, dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C,$$

то

$$\text{v.p.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+x}{1+x^2}\,dx = \lim_{D\to+\infty} \int\limits_{-D}^{D} \frac{1+x}{1+x^2}\,dx =$$

$$= \lim_{D\to+\infty} 2\operatorname{arctg} D = 2\cdot\frac{\pi}{2} = \pi.$$

2395. $\text{v.p.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{arctg} x\,dx.$

Согласно решению задачи 2258 интеграл от нечетной функции в симметричных пределах равен нулю, следовательно,

$$\text{v.p.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{arctg} x\,dx = \lim_{D\to+\infty} \int\limits_{-D}^{D} \operatorname{arctg} x\,dx = \lim_{D\to+\infty} 0 = 0.$$

Задача 32. Пусть $a < c < b$, функция f непрерывна на $[a;b]$ и равна нулю только в точке $x = c$, причем в некоторой окрестности точки $x = c$ функция f имеет первую производную. Пусть также существует $f''(c)$ и $f'(c) \neq 0$. Доказать, что существует

$$\text{v.p.} \int\limits_{a}^{b} \frac{dx}{f(x)}.$$

Решения и ответы к задачам

Задача 1. Пусть два числа являются пределами одной и той же функции φ. Допустим, что они не совпадают, обозначим через A меньшее из этих чисел, а через B – большее из них. Рассмотрим положительное число $\varepsilon = (B - A)/2$. По определению предела, существуют такие положительные числа δ_1 и δ_1, что для всех размеченных разбиений (T, ξ) с характеристикой $\lambda(T) < \delta_1$ справедливо неравенство

$$|\varphi(T, \xi) - A| < \frac{B - A}{2}, \tag{1}$$

а для всех размеченных разбиений (T, ξ) с характеристикой $\lambda(T) < \delta_2$

$$|\varphi(T, \xi) - B| < \frac{B - A}{2}. \tag{2}$$

Выберем произвольное размеченное разбиение (T, ξ) с характеристикой $\lambda(T) < \min\{\delta_1, \delta_2\}$, тогда для этого разбиения будут справедливы оба неравенства (1) и (2). Из неравенства (1) следует, что

$$\varphi(T, \xi) - A < \frac{B - A}{2} \Longrightarrow \varphi(T, \xi) < \frac{A + B}{2},$$

а из неравенства (2) получаем

$$\varphi(T, \xi) - B > -\frac{B - A}{2} \Longrightarrow \varphi(T, \xi) > \frac{A + B}{2}.$$

Полученное противоречие доказывает утверждение задачи.

Задача 2. Пусть A и B – пределы функций φ и ψ, соответственно, $\chi = \varphi + \psi$, $C = A + B$ и ε – произвольное положительное число. Тогда $\varepsilon/2$ также положительно и, по определению предела, существуют такие положительные числа δ_1 и δ_1, что для всех размеченных разбиений (T, ξ) с характеристикой $\lambda(T) < \delta_1$ справедливо неравенство

$$|\varphi(T, \xi) - A| < \varepsilon/2, \tag{3}$$

а для всех размеченных разбиений (T, ξ) с характеристикой $\lambda(T) < \delta_2$

$$|\psi(T, \xi) - B| < \varepsilon/2. \tag{4}$$

Положим $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, тогда при $\lambda(T) < \delta$ будут выполнены оба неравенства (3) и (4), следовательно,

$$|\chi(T, \xi) - C| = |(\varphi(T, \xi) + \psi(T, \xi)) - (A + B)| =$$

$$= |(\varphi(T, \xi) - A) + (\psi(T, \xi) - B)| \leqslant$$

$$\leqslant |\varphi(T, \xi) - A| + |\psi(T, \xi) - B| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех размеченных разбиений (T, ξ) с характеристикой $\lambda(T) < \delta$

$$|\chi(T, \xi) - C| < \varepsilon,$$

т. е.

$$\lim_{\lambda(T) \to 0} \chi(T, \xi) = C,$$

что доказывает утверждение задачи.

Задача 3. Так как число $\varepsilon = 1$ положительно, то по определению предела существует такое положительное число δ, что для всех размеченных разбиений (T, ξ) с характеристикой $\lambda(T) < \delta$ будет выполнено неравенство

$$|\varphi(T, \xi) - A| < 1,$$

где A – предел функции φ. Но тогда

$$|\varphi(T,\xi)| = |(\varphi(T,\xi) - A) + A| \leqslant |\varphi(T,\xi) - A| + |A| < 1 + |A|.$$

Обозначив $M = 1 + |A|$, получаем, что для всех размеченных разбиений (T,ξ) с характеристикой $\lambda(T) < \delta$

$$|\varphi(T,\xi)| \leqslant M,$$

откуда следует локальная ограниченность функции φ.

Задача 4. Необходимость условия доказывается следующим образом. Пусть некоторое число A является пределом функции φ и $\varepsilon > 0$. Так как число $\varepsilon/2$ также положительно, то, по определению предела, существует такое положительное число δ, что для всех размеченных разбиений (T,ξ) с характеристикой $\lambda(T) < \delta$

$$|\varphi(T,\xi) - A| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Если теперь $(T_1,\xi^{(1)})$ и $(T_2,\xi^{(2)})$ – любые разбиения с характеристиками $\lambda(T_1) < \delta$ и $\lambda(T_2) < \delta$, то

$$\left|\varphi(T_1,\xi^{(1)}) - \varphi(T_2,\xi^{(2)})\right| =$$

$$= \left|\left(\varphi(T_1,\xi^{(1)}) - A\right) + \left(A - \varphi(T_2,\xi^{(2)})\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\varphi(T_1,\xi^{(1)}) - A\right| + \left|\varphi(T_2,\xi^{(2)}) - A\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Необходимость доказана.

Достаточность доказывается сложнее. Пусть функция φ удовлетворяет условиям критерия Коши. Для любого натурального числа n величина $\varepsilon = 1/n$ положительна и, согласно условию критерия Коши, существует такое положительное число δ_n, что что для всех размеченных разбиений $(T_1,\xi^{(1)})$ и $(T_2,\xi^{(2)})$ с характеристиками $\lambda(T_1) < \delta_n$, $\lambda(T_2) < \delta_n$

$$\left|\varphi(T_1,\xi^{(1)}) - \varphi(T_2,\xi^{(2)})\right| < \frac{1}{n}.$$

Определим последовательность $\{\widetilde{\delta}_n\}$ следующим образом:

$$\widetilde{\delta}_1 = \delta_1,\ \widetilde{\delta}_2 = \min\{\delta_1, \delta_2\},\ \ldots,\ \widetilde{\delta}_n = \min\{\delta_1,\ \ldots,\ \delta_n\},\ \ldots.$$

Нетрудно видеть, что все члены последовательности $\{\widetilde{\delta}_n\}$ положительны, а сама последовательность является невозрастающей и при всех n справедливо неравенство $\widetilde{\delta}_n \leqslant \delta_n$, из которого следует, что для всех размеченных разбиений $(T_1, \xi^{(1)})$ и $(T_2, \xi^{(2)})$ с характеристиками $\lambda(T_1) < \widetilde{\delta}_n$, $\lambda(T_2) < \widetilde{\delta}_n$ выполняется такое же неравенство:

$$\left|\varphi(T_1, \xi^{(1)}) - \varphi(T_2, \xi^{(2)})\right| < \frac{1}{n}. \tag{5}$$

Выберем теперь любую последовательность размеченных разбиений $(T_n, \xi^{(n)})$, для которой

$$\lambda(T_n) < \widetilde{\delta}_n, \tag{6}$$

и рассмотрим числовую последовательность

$$y_n = \varphi(T_n, \xi^{(n)}).$$

Она удовлетворяет критерию Коши для числовых последовательностей. Действительно, пусть $\varepsilon > 0$. Возьмем натуральное число N так, чтобы величина $1/N < \varepsilon$. Пусть $m > N$ и $n > N$ и, для определенности, $m \geqslant n$. В силу выбора последовательности разбиений величины

$$\lambda(T_m) < \widetilde{\delta}_m \leqslant \widetilde{\delta}_n, \quad \lambda(T_n) < \widetilde{\delta}_n$$

и в силу (5)

$$|y_n - y_m| = \left|\varphi(T_n, \xi^{(n)}) - \varphi(T_m, \xi^{(m)})\right| < \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

Отсюда следует, что последовательность $\{y_n\}$ сходится, т. е. существует такое число A, что

$$A = \lim_{n\to+\infty} y_n = \lim_{n\to+\infty} \varphi(T_n, \xi^{(n)}).$$

Покажем, что число A является пределом функции φ. Проверим определение предела. Пусть $\varepsilon > 0$, тогда число $\varepsilon/2$ также положительно и, по определению предела числовой последовательности, существует такое натуральное число N_1, что при всех $n > N_1$ будет выполнено неравенство

$$\left|\varphi(T_n, \xi^{(n)}) - A\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Выберем натуральное число N_2 так, чтобы $N_2 > 2/\varepsilon$, тогда в силу (5) для всех размеченных разбиений $(T_1, \xi^{(1)})$ и $(T_2, \xi^{(2)})$ с характеристиками $\lambda(T_1) < \widetilde{\delta}_{N_2}$, $\lambda(T_2) < \widetilde{\delta}_{N_2}$

$$\left|\varphi(T_1, \xi^{(1)}) - \varphi(T_2, \xi^{(2)})\right| < \frac{1}{N_2} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{7}$$

Пусть $N = \max\{N_1, N_2\}+1$ и $\delta = \widetilde{\delta}_N$. Покажем, что число δ соответствует числу ε в определении предела для числа A и функции φ. В самом деле, рассмотрим любое размеченное разбиение (T, ξ) с характеристикой $\lambda(T) < \delta$.

Из монотонности последовательности $\{\widetilde{\delta}_n\}$ и неравенства $N \geqslant N_2$ следует, что

$$\delta = \widetilde{\delta}_N \leqslant \widetilde{\delta}_{N_2},$$

и поэтому $\lambda(T) < \delta_{N_2}$. С другой стороны, в силу выбора последовательности $(T_n, \xi^{(n)})$ величина

$$\lambda(T_N) < \widetilde{\delta}_N \leqslant \widetilde{\delta}_{N_2}.$$

Таким образом,

$$\lambda(T) < \widetilde{\delta}_{N_2}, \quad \lambda(T_N) < \widetilde{\delta}_{N_2}$$

и в силу (7)

$$\left|\varphi(T, \xi) - \varphi(T_N, \xi^{(N)})\right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

а так как $N > N_1$, то, в силу выбора числа N_1

$$\left|\varphi(T_N, \xi^{(N)}) - A\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Следовательно,

$$|\varphi(T,\xi)-A| = \left|\Big(\varphi(T,\xi)-\varphi(T_N,\xi^{(N)})\Big) + \Big(\varphi(T_N,\xi^{(N)})-A\Big)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\varphi(T,\xi) - \varphi(T_N,\xi^{(N)})\right| + \left|\varphi(T_N,\xi^{(N)}) - A\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Достаточность условия критерия Коши также доказана.

Задача 5. Обозначим

$$A = \int\limits_a^b f(x)\,dx$$

и проверим определение предела для числа A и последовательности s_n. Пусть $\varepsilon > 0$, выберем число δ по числу ε из определения интеграла. Так как последовательность $\lambda(T_n)$ сходится к нулю, то для положительного числа δ (по определению предела последовательности) найдется такое число N, что для всех $n > N$ величина $\lambda(T_n) < \delta$. В силу выбора числа δ

$$|s_n - A| = \left|\varphi(T_N,\xi^{(N)}) - A\right| < \varepsilon$$

при всех $n > N$. Следовательно,

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = A.$$

Задача 6. Пусть

$$M = \sup_{x\in X} f(x), \quad m = \inf_{x\in X} f(x), \quad K = M - m$$

и

$$F(x,y) = |f(x) - f(y)|.$$

Для доказательства достаточно установить справедливость двух утверждений: 1) при всех $x, y \in X$ функция $F(x,y) \leqslant K$, 2) для любого $K' < K$ найдутся такие $x, y \in X$, для которых $F(x,y) > K'$.

Проверим первое утверждение. Пусть $x, y \in X$. Так как

$$M = \sup_{x \in X} f(x), \quad m = \inf_{x \in X} f(x),$$

то, по определению верхней и нижней точных граней

$$f(x) \leqslant M, \quad f(y) \geqslant m,$$

следовательно, $f(x) - f(y) \leqslant M - m = K$. Аналогично

$$f(y) \leqslant M, \quad f(x) \geqslant m,$$

и поэтому $f(y) - f(x) \leqslant M - m = K$. Последнее неравенство можно записать в виде $f(x) - f(y) \geqslant -K$. Из двух неравенств $f(x) - f(y) \leqslant K$ и $f(x) - f(y) \geqslant -K$ следует, что $|f(x) - f(y)| \leqslant K$. Первое утверждение доказано.

Проверим второе утверждение. Так как $K' < K$, то величина

$$M' = M - \frac{K - K'}{2} < M.$$

Ввиду того, что

$$M = \sup_{x \in X} f(x),$$

существует такой элемент $x \in X$, для которого значение $f(x) > > M'$. Аналогично, величина

$$m' = m + \frac{K - K'}{2} > m$$

и ввиду того, что

$$m = \inf_{x \in X} f(x),$$

найдется такой элемент $y \in X$, для которого $f(y) < m'$. Для этой пары элементов $x, y \in X$

$$|f(x) - f(y)| \geqslant f(x) - f(y) > M' - m' = M - \frac{K - K'}{2} - m -$$

$$-\frac{K-K'}{2} = (M-m) - (K-K') = K - (K-K') = K'.$$

Второе утверждение также доказано.

Задача 7. 1. Пусть функция f интегрируема, $\sigma > 0$, а T – произвольное разбиение отрезка $[a;b]$. Обозначим через I множество всех индексов i, для которых колебание f на отрезке разбиения с номером i не меньше, чем σ. Интегральное колебание функции

$$\Omega(f;T) = \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i \geqslant \sum_{i\in I} \omega_i \Delta x_i \geqslant \sigma \sum_{i\in I} \Delta x_i = \sigma\mu(f,\sigma;T).$$

Отсюда следует, что

$$0 \leqslant \mu(f,\sigma;T) \leqslant \frac{1}{\sigma}\,\Omega(f;T).$$

Так как функция f интегрируема, то $\Omega(f;T)$ при $\lambda(T) \to 0$. По теоереме о предельном переходе в неравенствах также и

$$\lim_{\lambda(T)\to 0} \mu(f,\sigma;T) = 0.$$

2. Пусть для каждого $\sigma > 0$ функция $\mu(f,\sigma;T) \to 0$ при $\lambda(T) \to 0$. Обозначим через A колебание функции f на всем отрезке $[a;b]$:

$$A = \omega(f;[a;b]),$$

тогда, используя обозначения из предыдущего пункта, получаем:

$$\Omega(f;T) = \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i = \sum_{i\in I} \omega_i \Delta x_i + \sum_{i\notin I} \omega_i \Delta x_i <$$

$$< \omega(f;[a;b]) \sum_{i\in I} \Delta x_i + \sigma \sum_{i\notin I} \Delta x_i \leqslant$$

$$\leqslant A\mu(f,\sigma;T) + \sigma(b-a). \tag{8}$$

Проверим определение предела для функции $\Omega(f;T)$. Пусть $\varepsilon > 0$, положим

$$\sigma = \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Так как предел функции $\mu(f,\sigma;T)$ равен нулю, то найдется такое положительное число δ, при котором для любого разбиения T отрезка $[a;b]$ с характеристикой $\lambda(T) < \delta$ будет выполнено неравенство

$$\mu(f,\sigma;T) < \frac{\varepsilon}{2A}.$$

Из оценки (8) следует, что при $\lambda(T) < \delta$

$$\Omega(f;T) < A\frac{\varepsilon}{2A} + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\,(b-a) = \varepsilon,$$

следовательно,

$$\lim_{\lambda(T)\to 0} \Omega(f;T) = 0.$$

Отсюда следует интегрируемость функции f.

Задача 8. Легко видеть, что при $n = 1$ формула (2.5) справедлива. Допустим, что она справедлива для $n = k$, т. е.

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6},$$

тогда

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 =$$

$$= \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6} =$$

$$= \frac{(k+1)}{6}\,[k(2k+1) + 6(k+1)] =$$

$$= \frac{(k+1)}{6}(2k^2 + 7k + 6) = \frac{(k+1)}{6}\,(k+2)(2k+3) =$$

$$= \frac{(k+1)\,[(k+1)+1]\,[2(k+1)+1]}{6}.$$

Таким образом, формула (2.5) справедлива для $n = k + 1$. На основании метода математической индукции можно сделать заключение, что формула (2.5) справедлива для любого натурального n.

Задача 9. Легко видеть, что при $n = 1$ формула (2.6) справедлива. Допустим, что она справедлива для $n = k$, т. е.

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + k^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4},$$

тогда

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + k^3 + (k+1)^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 =$$

$$= \frac{k^2(k+1)^2 + 4(k+1)^3}{4} = \frac{(k+1)^2}{4}\left[k^2 + 4(k+1)\right] =$$

$$= \frac{(k+1)^2}{4}(k^2 + 4k + 4) = \frac{(k+1)^2}{4}(k+2)^2 =$$

$$= \frac{(k+1)^2\left[(k+1)+1\right]^2}{4}.$$

Таким образом, формула (2.6) справедлива для $n = k + 1$. На основании метода математической индукции можно сделать заключение, что формула (2.6) справедлива для любого натурального n.

Задача 10. Применяя тригонометрические формулы

$$2\sin x\,\sin y = \cos(x-y) - \cos(x+y),$$

$$\cos x - \cos y = 2\sin\frac{x+y}{2}\,\sin\frac{y-x}{2},$$

получаем при $\alpha \neq 2\pi n$ (n – целое):

$$\sin\alpha + \sin 2\alpha + \ldots + \sin k\alpha = \frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\left[2\sin\alpha\,\sin\frac{\alpha}{2} + \right.$$

$$+2\sin 2\alpha\ \sin\frac{\alpha}{2}+\ldots+2\sin k\alpha\ \sin\frac{\alpha}{2}\Big]=$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\left[\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{3\alpha}{2}\right)+\left(\cos\frac{3\alpha}{2}-\cos\frac{5\alpha}{2}\right)+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+\left(\cos\frac{(2k-1)\alpha}{2}-\cos\frac{(2k+1)\alpha}{2}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\left[\cos\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{(2k+1)\alpha}{2}\right]=\frac{\sin\frac{(k+1)\alpha}{2}\ \sin\frac{k\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Задача 11. Применяя тригонометрические формулы

$$2\sin x\ \cos y=\sin(x-y)+\sin(x+y),$$

$$\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\ \cos\frac{x-y}{2}\,,$$

получаем при $\alpha\neq 2\pi n$ (n – целое):

$$1+\cos\alpha+\cos 2\alpha+\ldots+\cos k\alpha=\frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\Big[2\sin\frac{\alpha}{2}+$$

$$+2\sin\frac{\alpha}{2}\ \cos\alpha+2\sin\frac{\alpha}{2}\ \cos 2\alpha+\ldots+2\sin\frac{\alpha}{2}\ \cos k\alpha\Big]=$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\left[2\sin\frac{\alpha}{2}+\left(-\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{3\alpha}{2}\right)+\left(-\sin\frac{3\alpha}{2}+\sin\frac{5\alpha}{2}\right)+\right.$$

$$\left.+\ldots+\left(-\sin\frac{(2k-1)\alpha}{2}+\sin\frac{(2k+1)\alpha}{2}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\left[\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{(2k+1)\alpha}{2}\right]=\frac{\sin\frac{(k+1)\alpha}{2}\ \cos\frac{k\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Задача 12. Покажем, что функция $F(x)$ имеет пределы при $x \to a$ и $x \to b$. По теореме Лагранжа при $x, y \in (a; b)$

$$F(x) - F(y) = F'(\xi)(x - y) = f(\xi)(x - y), \tag{9}$$

где ξ лежит между a и b. Так как функция f непрерывна на отрезке $[a; b]$, то она ограничена на этом отрезке, т. е. существует такая положительная постоянная M, что при всех $x \in [a; b]$ выполнено неравенство $|f(x)| \leqslant M$. Отсюда и из равенства (9) следует, что при всех $x, y \in (a; b)$

$$|F(x) - F(y)| \leqslant M|x - y|. \tag{10}$$

Из оценки (10) вытекает, что в каждой точке отрезка $[a; b]$ для функции F выполнен критерий Коши существования предела. В самом деле, пусть $x_0 \in [a; b]$ и $\varepsilon > 0$, выберем $\delta = \varepsilon/(2M)$. Если x и y – произвольные точки отрезка $[a; b]$, лежащие в δ-окрестности точки x_0, то величина $|x - y| < 2\delta$ и согласно (10)

$$|F(x) - F(y)| < 2M\delta = \varepsilon.$$

Отсюда следует, что функция F имеет односторонние пределы на концах отрезке $[a; b]$. Обозначим через $\widetilde{F}(x)$ продолжение по непрерывности функции F:

$$\widetilde{F}(x) = \begin{cases} F(a+0), & x = a; \\ F(x), & 0 < x < b; \\ F(b-0), & x = b. \end{cases}$$

Покажем, что функция $\widetilde{F}(x)$ является первообразной f на всем отрезке $[a; b]$. Для этого достаточно установить, что $\widetilde{F}' = f$ при $x = a$ и $x = b$. По формуле Лагранжа

$$\frac{\widetilde{F}(x) - \widetilde{F}(a)}{x - a} = F'(\xi) = f(\xi),$$

где $a < \xi < x$. Так как $\xi \neq a$, то можно сделать замену переменной

$$\lim_{x \to a} f(\xi) = \lim_{\xi \to a} f(\xi) = f(a),$$

(функция f непрерывна при $x = a$). Отсюда следует, что

$$\widetilde{F}'(a) = \lim_{x \to a} \frac{\widetilde{F}(x) - \widetilde{F}(a)}{x - a} = f(a).$$

Аналогично устанавливается, что $\widetilde{F}'(b) = f(b)$. По формуле Лагранжа

$$\frac{\widetilde{F}(x) - \widetilde{F}(b)}{x - b} = F'(\xi) = f(\xi),$$

где $x < \xi < b$. Так как $\xi \neq b$, то можно сделать замену переменной

$$\lim_{x \to b} f(\xi) = \lim_{\xi \to b} f(\xi) = f(b),$$

(функция f непрерывна при $x = b$). Отсюда следует, что

$$\widetilde{F}'(b) = \lim_{x \to b} \frac{\widetilde{F}(x) - \widetilde{F}(b)}{x - b} = f(b).$$

По формуле Ньютона – Лейбница

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \widetilde{F}(b) - \widetilde{F}(a) = F(b - 0) - F(a + 0).$$

Задача 13. Пусть

$$\varphi(x) = \int\limits_{a(x)}^{b(x)} f(\xi)\,d\xi.$$

Выберем любую точку $x_0 \in [A; B]$ и положим

$$F(x) = \int\limits_{x_0}^{x} f(\xi)\,d\xi.$$

По свойству аддитивности интеграла

$$\varphi(x) = \int\limits_{a(x)}^{x_0} f(\xi)\,d\xi + \int\limits_{x_0}^{b(x)} f(\xi)\,d\xi = \int\limits_{x_0}^{b(x)} f(\xi)\,d\xi -$$

$$- \int\limits_{x_0}^{a(x)} f(\xi)\,d\xi = F(b(x)) - F(a(x)).$$

Так как функция f непрерывна на $[A; B]$, то

$$F'(x) = f(x)$$

и по теореме о дифференцировании сложной функции

$$\varphi'(x) = \frac{d}{dx}\left[F(b(x)) - F(a(x))\right] =$$

$$= F'(b(x))b'(x) - F'(a(x))a'(x) = f(b(x))b'(x) - f(a(x))a'(x).$$

Задача 14. Пусть

$$F(t) = \int\limits_a^t f(x)\,dx.$$

Так как функция f непрерывна, то всюду на $[a; b]$

$$F'(x) = f(x).$$

Используя формулу Ньютона – Лейбница и теорему Лагранжа, получаем:

$$M[f] = \frac{F(b) - F(a)}{b - a} = F'(\xi) = f(\xi),$$

где $\xi \in (a; b)$.

Задача 15. Пусть $x_0 \in [a; b]$ и $f(x_0) > 0$. В силу непрерывности функции f существует отрезок $[\alpha; \beta] \subset [a; b]$ ненулевой

длины, содержащий точку x_0, на котором $f(x) \geqslant m > 0$. В силу неотрицательности функции f

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \geqslant \int\limits_\alpha^\beta f(x)\,dx \geqslant \int\limits_\alpha^\beta m\,dx = m(\beta-\alpha) > 0.$$

Задача 16. Положим $F(x) = f(x) - g(x)$, функция F непрерывна, неотрицательна и не равна тождественно нулю. Согласно решению предыдущей задачи

$$\int\limits_a^b F(x)\,dx > 0.$$

Следовательно,

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx - \int\limits_a^b g(x)\,dx = \int\limits_a^b F(x)\,dx > 0\,,$$

и поэтому

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx > \int\limits_a^b g(x)\,dx.$$

Задача 17.

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}(F(b)-F(a)) =$$

$$= \lim_{b\to+\infty} F(b) - F(a) = \lim_{x\to+\infty} F(x) - F(a) = F(x)\Big|_a^{+\infty}.$$

Задача 18. Пусть сходится интеграл (5.1), тогда согласно решению задачи 17 существует $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ и, по формуле (5.2)

$$\int\limits_A^{+\infty} f(x)\,dx = F(x)\Big|_A^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} F(x) - F(A).$$

Обратно, пусть сходится интеграл (5.3), тогда согласно решению задачи 17 существует $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ и, по формуле (5.2)

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} F(x) - F(a).$$

Задача 19.

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{c\to b-0}\int\limits_a^c f(x)\,dx = \lim_{c\to b-0}(F(c)-F(a)) =$$

$$= \lim_{c\to b-0} F(c) - F(a) = \lim_{x\to b-0} F(x) - F(a) = F(x)\Big|_a^b.$$

Задача 20. Для решения задачи обозначим несобственные интегралы по промежуткам $[a;b)$ и $(a;b]$ соответственно,

$$\int\limits_a^{b-0} f(x)\,dx \quad \text{и} \quad \int\limits_{a+0}^{b} f(x)\,dx.$$

Пусть F – интеграл с переменным верхним пределом

$$F(x) = \int\limits_a^x f(\xi)\,d\xi.$$

Так как функция f интегрируема на отрезке $[a;b]$, то F непрерывна на этом отрезке. Используя последовательно определение несобственного интеграла, задачу (18), непрерывность функции F и ее определение, получаем:

$$\int\limits_a^{b-0} f(x)\,dx = \lim_{c\to b-0}\int\limits_a^c f(x)\,dx = \lim_{x\to b-0} F(x) - F(a) =$$

$$= F(b) - F(a) = \int\limits_a^b f(\xi)\,d\xi = \int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Аналогично,

$$\int\limits_{a+0}^b f(x)\,dx = \lim_{c\to a+0}\int\limits_c^b f(x)\,dx = F(b) - \lim_{x\to a+0} F(x) =$$

$$= F(b) - F(a) = \int\limits_a^b f(\xi)\,d\xi = \int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Задача 21. По формуле интегрирования по частям для определенного интеграла

$$\int\limits_a^c f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_a^c - \int\limits_a^c f'(x)g(x)\,dx. \qquad (11)$$

Равенство (11) можно записать в другой форме:

$$\int\limits_a^c f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_a^c - \int\limits_a^c f(x)g'(x)\,dx \qquad (12)$$

или

$$f(x)g(x)\Big|_a^c = \int\limits_a^c f'(x)g(x)\,dx + \int\limits_a^c f(x)g'(x)\,dx. \qquad (13)$$

Из равенств (11) – (13) и арифметических свойств пределов следует, что если существуют две из трех величин:

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)g'(x)\,dx, \quad \int\limits_a^{+\infty} f'(x)g(x)\,dx, \quad f(x)g(x)\Big|_a^{+\infty},$$

то существует и третья из них. Переходя в равенстве (11) к пределу, получаем формулу интегрирования по частям для несобственного интеграла.

Задача 22. Применяя формулу замены переменной для определенного интеграла, имеем при $c \in [a; +\infty)$:

$$\int\limits_a^c f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = \int\limits_{\varphi(a)}^{\varphi(c)} f(t)\,dt.$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $c \to +\infty$, получаем:

$$\int\limits_a^c f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = \int\limits_{\varphi(a)}^{\varphi(+\infty)} f(t)\,dt.$$

Задача 23. Для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что при всех $x_1, x_2 \in (b - \delta; b)$ выполнено неравенство

$$\left| \int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx \right| < \varepsilon.$$

Задача 24. Для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $D < b$, что при всех $x_1, x_2 \in (-\infty; D)$ выполнено неравенство

$$\left| \int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx \right| < \varepsilon.$$

Задача 25. Для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что при всех $x_1, x_2 \in (a; a + \delta)$ выполнено неравенство

$$\left| \int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx \right| < \varepsilon.$$

Задача 26. Проверим критерий Коши. Пусть $\varepsilon > 0$. По условию задачи существует такое положительное число M, что при всех $x \in [a; b)$ выполнено неравенство $|f(x)| \leqslant M$. Положим $\delta = \varepsilon/M$, тогда для любых $x_1, x_2 \in (b - \delta; b)$:

$$\left|\int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx\right| \leqslant \left|\int\limits_{x_1}^{x_2} |f(x)|\,dx\right| \leqslant M\left|\int\limits_{x_1}^{x_2} dx\right| = M|x_2 - x_1| < M\delta = \varepsilon.$$

Задача 27. Проверим критерий Коши. Пусть $\varepsilon > 0$. По условию задачи существует такое положительное число M, что при всех $x \in (a; b]$ выполнено неравенство $|f(x)| \leqslant M$. Положим $\delta = \varepsilon/M$, тогда для любых $x_1, x_2 \in (a; a + \delta)$:

$$\left|\int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx\right| \leqslant \left|\int\limits_{x_1}^{x_2} |f(x)|\,dx\right| \leqslant M\left|\int\limits_{x_1}^{x_2} dx\right| = M|x_2 - x_1| < M\delta = \varepsilon.$$

Задача 28. Пусть Δ – произвольный отрезок, содержащийся в $[a; b)$. Так как функция f непрерывна на $[a; b)$, то она непрерывна и на Δ. Отсюда следует, что f интегрируема на Δ. В силу решения задачи 26 несобственный интеграл от функции f по промежутку $[a; b)$ сходится.

Задача 29. Пусть Δ – произвольный отрезок, содержащийся в $(a; b]$. Так как функция f непрерывна на $(a; b]$, то она непрерывна и на Δ. Отсюда следует, что f интегрируема на Δ. В силу решения задачи 27 несобственный интеграл от функции f по промежутку $(a; b]$ сходится.

Задача 30.

$$\text{v.p.} \int\limits_a^b \frac{dx}{x - c} = \lim_{\varepsilon \to 0+0} \left(\int\limits_a^{c-\varepsilon} \frac{dx}{x - c} + \int\limits_{c+\varepsilon}^b \frac{dx}{x - c} \right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0+0} \left(\ln|x - c|\Big|_a^{c-\varepsilon} + \ln|x - c|\Big|_{c+\varepsilon}^b \right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0+0} ((\ln\varepsilon - \ln(c-a)) + (\ln(b-c) - \ln\varepsilon)) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0+0} (\ln(b-c) - \ln(c-a)) = \ln\frac{b-c}{c-a}.$$

Задача 31.

$$\text{v.p.}\int\limits_a^b \frac{dx}{(x-c)^n} = \lim_{\varepsilon\to 0+0}\left(\int\limits_a^{c-\varepsilon}\frac{dx}{(x-c)^n} + \int\limits_{c+\varepsilon}^b \frac{dx}{(x-c)^n}\right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0+0}\frac{1}{1-n}\left[\frac{1}{(x-c)^{n-1}}\bigg|_a^{c-\varepsilon} + \frac{1}{(x-c)^{n-1}}\bigg|_{c+\varepsilon}^b\right] =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0+0}\frac{1}{n-1}\left[\frac{1}{(a-c)^{n-1}} - \frac{1}{(b-c)^{n-1}} + (-1)^n\frac{1}{\varepsilon^{n-1}} + \frac{1}{\varepsilon^{n-1}}\right] =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{n-1}\left[\dfrac{1}{(a-c)^{n-1}} - \dfrac{1}{(b-c)^{n-1}}\right], & n \text{ – нечетное;} \\ +\infty, \quad n \text{ – четное.} \end{cases}$$

Задача 32. Пусть

$$\varphi(x) = \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f'(c)(x-c)}.$$

Согласно решению задачи 30

$$\text{v.p.}\int\limits_a^b \frac{dx}{f(x)} = \text{v.p.}\int\limits_a^b \left(\frac{1}{f'(c)(x-c)} + \varphi(x)\right)dx =$$

$$= \frac{1}{f'(c)}\ln\frac{b-c}{c-a} + \text{v.p.}\int\limits_a^b \varphi(x)\,dx.$$

Поэтому достаточно показать, что интеграл в смысле главного значения существует у функции φ.

Из явной формулы для φ следует, что эта функция определена и непрерывна на $[a;c) \cup (c;b]$. Покажем, что существует конечный предел функции φ в точке $x = c$.

Согласно предположениям можно воспользоваться формулой Тэйлора с дополнительным членом в форме Пеано:

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{1}{2}\, f''(c)(x-c)^2 + \alpha(x)(x-c)^2,$$

где $\alpha(x)$ – функция, имеющая нулевой предел при $x = c$. Учитывая, что $f(c) = 0$, получаем:

$$\varphi(x) = -\frac{f''(c) + 2\alpha(x)}{f'(c)\left[2f'(c) + f''(c)(x-c) + 2\alpha(x)(x-c)\right]}.$$

Отсюда находим

$$\lim_{x\to c} \varphi(x) = -\frac{f''(c)}{2f'^2(c)}.$$

Таким образом, функция φ продолжается по непрерывности до функции $\widetilde{\varphi}$, непрерывной на всем отрезке $[a;b]$. Согласно решению задачи 20 функция φ интегрируема в несобственном смыле, а, следовательно, обладает интегралом и в смыле главного значения.

Список литературы

1. Орловский Д. Г. Неопределенный интеграл. Практикум. – СПб.: Лань, 2006.

2. Зорич В. А. Математический анализ, Т.1. – М.: Наука, 1981.

3. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, Т.2. – М.: Наука, 1969.

4. Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа, Т.1. – М.: Высшая школа, 1981.

5. Никольский С. М. Курс математического анализа, Т.1. – М.: Наука, 1983.

6. Виноградова И. А., Олехник С. Н., Садовничий В. А. Задачи и упражнения по математическому анализу. Кн.1, Кн.2. – М.: Высшая школа, 2000.

7. Демидович Б.П̇. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – М.: Наука, 1990.

8. Ляшко И. И., Боярчук А. К., Гай Я. Г., Головач Г. П. Справочное пособие по высшей математике. Т.1. – М.: Едиториал, УРСС, 2001.

9. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды, Элементарные функции. – Москва.: Наука, 1981.

Предметный указатель

Абсолютная сходимость, 229
Аддитивность интеграла, 74
Формула Эйлера, 157, 160
Формула Ньютона-Лейбница, 70
Формулы Бонне, 196
Функция Дирихле, 49
Функция Римана, 46
Главное значение, 232
Характеристика разбиения, 5, 9
Интеграл Пуассона, 30
Интегральная непрерывность, 60
Интегральная сумма, 5, 11
Интегральное колебание, 15
Интегрирование по частям, 71
Интегрируемость сложной функции, 58
Колебание функции, 16
Критерий Коши, 11, 230
Критерий интегрируемости, 15, 16
Локальная интегрируемость, 220
Многочлены Лежандра, 177
Неравенство Коши, 81
Определенный интеграл, 5
Первая теорема о среднем, 196
Предел функции разбиения, 10
Признак Абеля, 231
Признак Дирихле, 231
Признаки сравнения, 229
Простейшие несобственные интегралы, 220
Разбиение, 5, 9
Разметка разбиения, 5, 9
Среднее значение, 195, 251
Степенная асимптотика, 228
Сумма косинусов кратных углов, 25
Сумма синусов кратных углов, 25
Сумма степеней натуральных чисел, 17
Суммы Дарбу, 14
Условная сходимость, 230
Вторая теорема о среднем, 197
Замена переменной, 71, 226

Содержание

Предисловие 3
Глава 1. Понятие определенного интеграла 4
Глава 2. Определенный интеграл как предел 9
Глава 3. Формула Ньютона – Лейбница 70
Глава 4. Теоремы о среднем 195
Глава 5. Несобственные интегралы 220
Решения и ответы к задачам 330
Список литературы 351
Предметный указатель 352

Дмитрий Германович Орловский

Определенный интеграл. Практикум

Часть 1

Учебное пособие

Редактор Н. В. Шумакова
Оригинал-макет изготовлен Д. Г. Орловским

Подписано в печать 10.12.2009. Формат 60x84 1/16
Печ. л. 22,25. Уч.-изд. л. 22,25. Тираж 500 экз.
Изд. № 1/1/66а. Заказ № 12

Национальный исследовательский ядерный университет
„МИФИ“. 115409, Москва, Каширское ш., 31
ООО „Полиграфический комплекс „Курчатовский“.
144000, Московская область, г. Электросталь, ул. Красная, д. 42