

Министерство образования и науки
Российской Федерации

Национальный исследовательский
ядерный университет „МИФИ“

Д. Г. Орловский

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ.
ПРАКТИКУМ
Часть 2

Рекомендовано УМО „Ядерные физика и технологии“
в качестве учебного пособия
для студентов высших учебных заведений

Москва 2010

УДК 517.518.12 (076.5)

ББК 22.161.5я

О-66

Орловский Д. Г. **Определенный интеграл. Практикум.**
Часть 2. Учебное пособие. – М.: НИЯУ МИФИ. 2010 – 300 с.

Учебное пособие посвящено практике работы с определенным интегралом. Владение техникой работы с интегралом наряду с техникой дифференцирования является важной составной частью фундаментального образования математиков и физиков-теоретиков. Поэтому наличие пособий по данной тематике представляется актуальным. Особенностью данного пособия является то, что все рассматриваемые задачи приводятся с решениями, поэтому оно может быть использовано для самостоятельного изучения.

Пособие состоит из двух частей. В первой части рассматриваются фундаментальные понятия, связанные с определенным интегралом. Вторая часть пособия посвящена приложениям определенного интеграла.

Настоящее пособие предназначено для студентов университетов, технических и педагогических вузов, вузов с углубленным изучением математики. Оно может быть также использовано преподавателями при проведении семинарских занятий по рассматриваемой в пособии теме.

Подготовлено в рамках Программы создания и развития НИЯУ МИФИ.

Рецензент доцент А. Г. Слесарев

ISBN 978–5–7262–1372–9

ISBN 978–5–7262–1250–0 (Ч. 2)

© Национальный исследовательский
ядерный университет „МИФИ“, 2010

Предисловие

Настоящая книга представляет собой учебное пособие по определенному интегралу для студентов физико-математических специальностей высших учебных заведений и университетов. За основу взят известный задачник Б. П. Демидовича [7], являющийся основным по рассматриваемой теме. Особенностью данного пособия является решение всех примеров задачника Демидовича, составляющих его четвертую главу. В связи с этим сохранена нумерация задач, принятая в [7], и поэтому первая задача в пособии имеет номер 2181. Помимо примеров из указанного выше задачника в тексте присутствуют задачи полезные для понимания дальнейшего материала. Они имеют свою нумерацию, и их решения или ответы к ним приведены в конце пособия.

Пособие состоит из двух частей. В первой части рассматриваются фундаментальные понятия, связанные с определенным интегралом. Вторая часть пособия посвящена приложениям определенного интеграла.

В пособии практически нет теоретического материала, упор делается на практическую сторону вопроса. Тем не менее теоретическая сторона предмета важна для правильного понимания предмета. Поэтому читателю рекомендуется одновременно читать и соответствующие разделы учебника. Ссылки на общепринятые учебники и пособия, аналогичные данному, приведены в списке литературы. В качестве учебников можно рекомендовать книги [2] – [5], а в качестве пособий по практическому решению задач издания [6] и [8].

В книге используются значения некоторых неопределенных интегралов из задачника [7]. Вычисление этих интегралов не приводится, читатель может ознакомиться с решением этих задач в [1].

Данное пособие может быть полезно не только студентам и преподавателям, но и всем тем, кто интересуется высшей математикой.

Глава 6

Площадь фигуры

6.1. Площадь криволинейного прямоугольника

Если фигура ограничена прямыми $x = a$, $x = b$ ($a < b$) и графиками функций $y = f(x)$, $y = g(x)$ ($a \leq x \leq b$, $f(x) \geq g(x)$) (рис. 6.1),

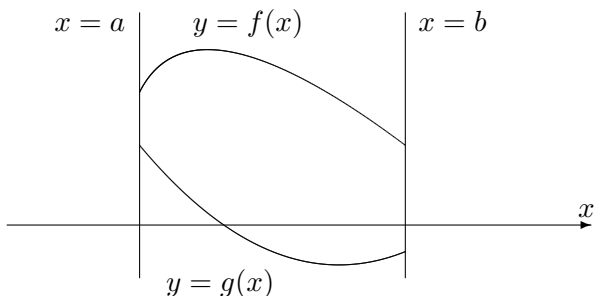


Рис. 6.1

то площадь такой фигуры

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx. \quad (6.1)$$

Аналогично, если фигура ограничена прямыми $y = c$, $y = d$ ($c < d$) и графиками функций $x = \varphi(y)$, $x = \psi(y)$ ($c \leq y \leq d$, $\varphi(y) \geq \psi(y)$) (рис. 6.2),

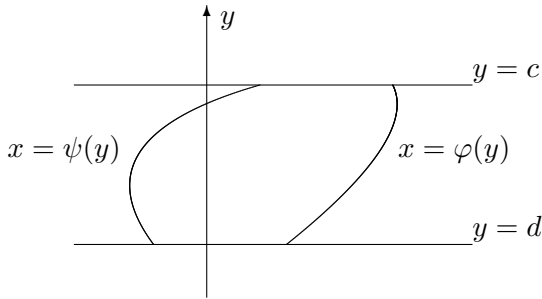


Рис. 6.2

то площадь такой фигуры

$$S = \int_c^d (\varphi(y) - \psi(y)) dy. \quad (6.2)$$

2396. Доказать, что площадь прямого параболического сегмента равна

$$S = \frac{2}{3} bh,$$

где b – основание и h – высота сегмента (рис. 6.3).

Выберем оси координат так, чтобы ось абсцисс проходила по основанию сегмента, а ось ординат проходила вдоль оси симметрии сегмента. В этом случае параболический участок границы сегмента представляет собой график функции

$$y = h - \frac{4h}{b^2} x^2,$$

определенной на отрезке $\left[-\frac{b}{2}; \frac{b}{2}\right]$ (рис. 6.4).

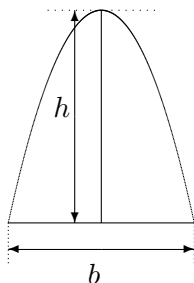


Рис. 6.3

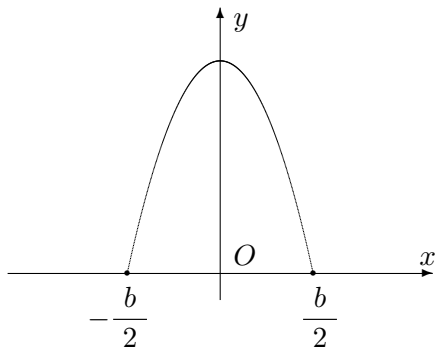


Рис. 6.4

Искомая площадь равна интегралу:

$$S = \int_{-b/2}^{b/2} \left(h - \frac{4h}{b^2} x^2 \right) dx.$$

Так как подынтегральная функция четна, то интеграл в симметричных пределах можно заменить удвоенным интегралом по неотрицательной части промежутка интегрирования:

$$S = 2 \int_0^{b/2} \left(h - \frac{4h}{b^2} x^2 \right) dx = 2 \left(hx - \frac{4hx^3}{3b^2} \right) \Big|_0^{b/2} = \frac{2}{3} bh.$$

Найти площади фигур, ограниченных кривыми, заданными в прямоугольных координатах (все параметры считаются положительными):

2397. $ax = y^2$, $ay = x^2$.

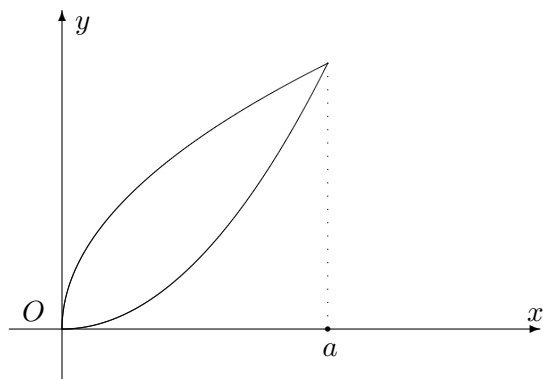


Рис. 6.5

Фигура ограничена прямыми $x = 0$, $x = a$ и графиками функций $y = x^2/a$ (нижняя часть границы) и $y = \sqrt{ax}$ (верхняя часть границы) (рис. 6.5). Искомая площадь

$$S = \int_0^a \left(\sqrt{ax} - \frac{x^2}{a} \right) dx = \left(\sqrt{a} \frac{2}{3} x^{3/2} - \frac{x^3}{3a} \right) \Big|_0^a = \frac{a^2}{3}.$$

2398. $y = x^2$, $x + y = 2$.

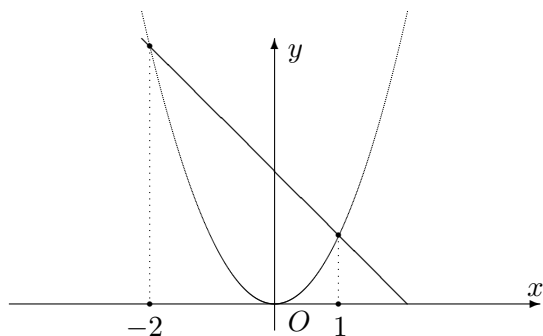


Рис. 6.6

Фигура ограничена прямыми $x = -2$, $x = 1$ и графиками

функций $y = x^2$ (нижняя часть границы) и $y = 2 - x$ (верхняя часть границы) (рис. 6.6). Искомая площадь

$$S = \int_{-2}^1 ((2 - x) - x^2) dx = \left(2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-2}^1 = \frac{9}{2}.$$

2399. $y = 2x - x^2$, $x + y = 0$.

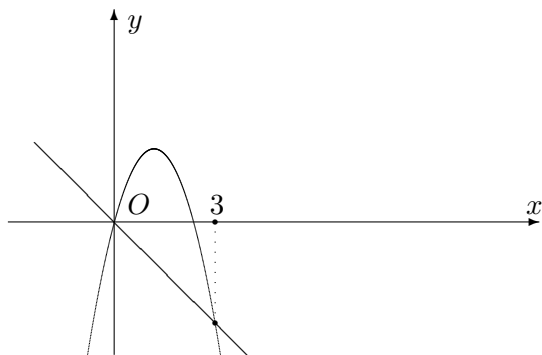


Рис. 6.7

Фигура ограничена прямыми $x = 0$, $x = 3$ и графиками функций $y = -x$ (нижняя часть границы) и $y = 2x - x^2$ (верхняя часть границы) (рис. 6.7). Искомая площадь

$$\begin{aligned} S &= \int_0^3 ((2x - x^2) - (-x)) dx = \int_0^3 (3x - x^2) dx = \\ &= \left(\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^3 = \frac{9}{2}. \end{aligned}$$

2400. $y = |\lg x|$, $y = 0$, $x = 0,1$, $x = 10$.

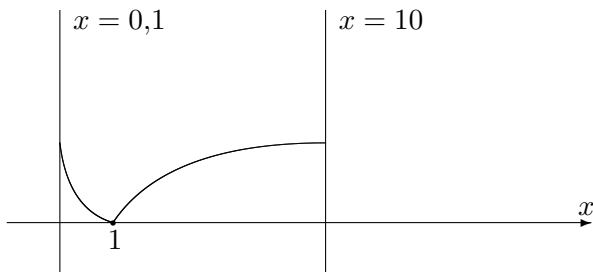


Рис. 6.8

Разбиваем фигуру на две. Первая из них ограничена прямыми $x = 0,1$, $x = 1$ и графиками функций $y = 0$ (нижняя часть границы) и $y = |\lg x| = -\lg x$ (верхняя часть границы). Вторая фигура ограничена прямыми $x = 1$, $x = 10$ и графиками функций $y = 0$ (нижняя часть границы) и $y = |\lg x| = \lg x$ (верхняя часть границы) (рис. 6.8). Площадь первой фигуры

$$S_1 = - \int_{0,1}^1 \lg x \, dx,$$

а второй

$$S_2 = \int_1^{10} \lg x \, dx.$$

Интеграл от логарифма берем с помощью интегрирования по частям:

$$\int \lg x \, dx = x \lg x - \int \frac{dx}{\ln 10} = x \lg x - x \lg e + C.$$

Искомая площадь

$$S = S_1 + S_2 = - \int_{0,1}^1 \lg x \, dx + \int_1^{10} \lg x \, dx =$$

$$= -(x \lg x - x \lg e) \Big|_{1/10}^1 + (x \lg x - x \lg e) \Big|_1^{10} = \frac{99}{10} - \frac{81}{10} \lg e.$$

2400.1. $y = 2^x$, $y = 2$, $x = 0$.

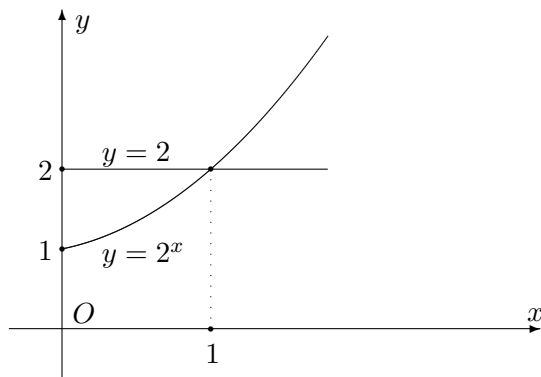


Рис. 6.9

Фигура ограничена прямыми $x = 0$, $x = 1$ и графиками функций $y = 2^x$ (нижняя часть границы) и $y = 2$ (верхняя часть границы) (рис. 6.9). Искомая площадь

$$S = \int_0^1 (2 - 2^x) dx = \left(2x - \frac{2^x}{\ln 2} \right) \Big|_0^1 = 2 - \frac{1}{\ln 2}.$$

2400.2. $y = (x + 1)^2$, $x = \sin \pi y$, $y = 0$ ($0 \leq y \leq 1$).

Фигура ограничена прямыми $y = 0$, $y = 1$ и графиками функций $x = \sqrt{y} - 1$ (левая часть границы) и $x = \sin \pi y$ (правая часть границы) (рис. 6.10). Искомая площадь

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 (\sin \pi y - (\sqrt{y} - 1)) dy = \\ &= \left(-\frac{\cos \pi y}{\pi} - \frac{2}{3} y^{3/2} + y \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{\pi} + \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

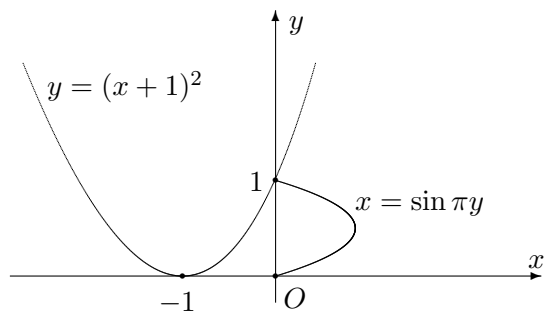


Рис. 6.10

2401. $y = x$, $y = x + \sin^2 x$ ($0 \leq x \leq \pi$).

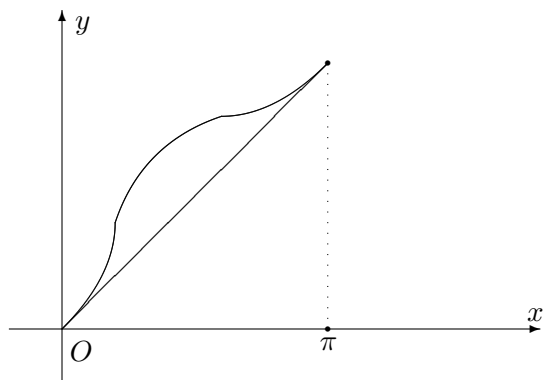


Рис. 6.11

Фигура ограничена прямыми $x = 0$, $x = \pi$ и графиками функций $y = x$ (нижняя часть границы) и $y = x + \sin^2 x$ (верхняя часть границы) (рис. 6.11). Искомая площадь

$$S = \int_0^{\pi} ((x + \sin^2 x) - x) dx = \int_0^{\pi} \sin^2 x dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (1 - \cos 2x) dx = \frac{1}{2} \left(x - \frac{\sin 2x}{2} \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}.$$

2402. $y = \frac{a^3}{a^2 + x^2}, y = 0.$

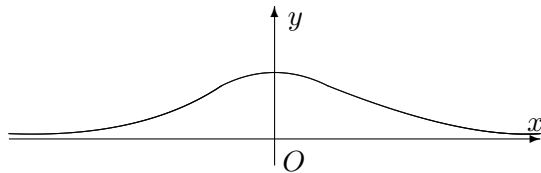


Рис. 6.12

Фигура ограничена снизу осью абсцисс, а сверху – графиком функции $y = \frac{a^3}{a^2 + x^2}$ (рис. 6.12). Поэтому искомая площадь определяется несобственным интегралом:

$$S = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a^3}{a^2 + x^2} dx.$$

В силу четности подынтегральной функции

$$S = 2 \int_0^{+\infty} \frac{a^3}{a^2 + x^2} dx = \left(2a^2 \operatorname{arctg} \frac{x}{a} \right) \Big|_0^{+\infty} = \pi a^2.$$

2403. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$

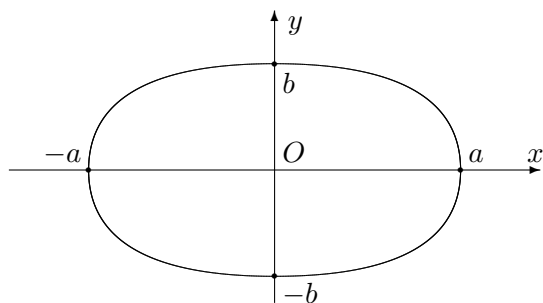


Рис. 6.13

Фигура ограничена эллипсом, для которого оси координат являются осями симметрии (рис. 6.13). Это обстоятельство позволяет свести вычисление площади всей фигуры к вычислению площади части фигуры, ограниченной первой координатной четвертью. Площадь всей фигуры в четыре раза больше площади рассматриваемой части. Часть фигуры, лежащая в первой четверти, ограничена прямыми $x = 0$, $x = a$ и графиками функций

$$y = 0, \quad y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}.$$

Таким образом, искомая площадь

$$\begin{aligned} S &= 4b \int_0^a \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx = 4ab \int_0^1 \sqrt{1 - z^2} dz \Big|_{z=x/a} = \\ &= 4ab \left(\frac{z}{2} \sqrt{1 - z^2} + \frac{1}{2} \arcsin z \right) \Big|_0^1 = \pi ab. \end{aligned}$$

2404. $y^2 = x^2(a^2 - x^2).$

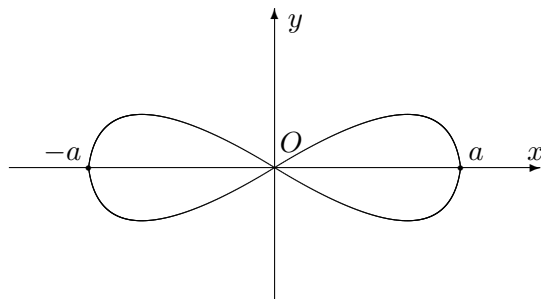


Рис. 6.14

Оси координат являются осями симметрии рассматриваемой фигуры (рис. 6.14). Это обстоятельство позволяет свести вычисление площади всей фигуры к вычислению площади части фигуры, ограниченной первой координатной четвертью. Площадь всей фигуры в четыре раза больше площади рассматриваемой части. Часть фигуры, лежащая в первой четверти, ограничена прямыми $x = 0$, $x = a$ и графиками функций

$$y = 0, \quad y = x\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Таким образом, искомая площадь

$$\begin{aligned} S &= 4 \int_0^a x\sqrt{a^2 - x^2} dx = -2 \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} d(a^2 - x^2) = \\ &= 2 \int_0^{a^2} \sqrt{z} dz \Big|_{z=a^2-x^2} = \frac{4}{3} z^{3/2} \Big|_0^{a^2} = \frac{4}{3} a^3. \end{aligned}$$

2405. $y^2 = 2px$, $27py^2 = 8(x - p)^3$.

Парабола $y^2 = 2px$ и полукубическая парабола $27py^2 = 8(x - p)^3$ пересекаются в точках $(4p; 2\sqrt{2}p)$ и $(4p; -2\sqrt{2}p)$ (рис. 6.15).

Фигура симметрична относительно оси абсцисс. Поэтому можно вычислить площадь части фигуры, лежащей выше оси абсцисс, и затем полученную величину площади удвоить.

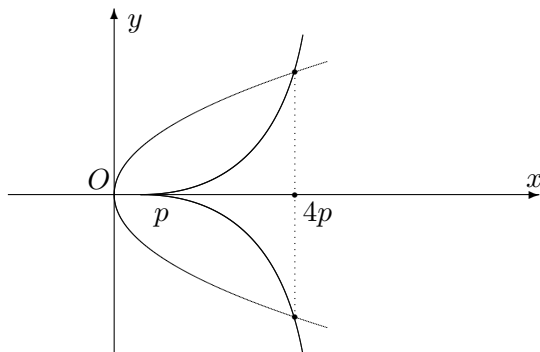


Рис. 6.15

Для вычисления площади части фигуры, лежащей над осью абсцисс, удобно разбить ее на две фигуры. Первая из них ограничена прямыми $x = 0$, $x = p$ и графиками функций $y = 0$ (нижняя часть границы) и $y = \sqrt{2px}$ (верхняя часть границы). Вторая фигура ограничена прямыми $x = p$, $x = 4p$ и графиками функций

$$y = \sqrt{\frac{8(x-p)^3}{27p}}$$

(нижняя часть границы) и $y = \sqrt{2px}$ (верхняя часть границы). Площадь первой фигуры

$$S_1 = \int_0^p \sqrt{2px} \, dx,$$

а второй

$$S_2 = \int_p^{4p} \left(\sqrt{2px} - \sqrt{\frac{8(x-p)^3}{27p}} \right) dx.$$

Искомая площадь

$$\begin{aligned}
 S &= 2(S_1 + S_2) = 2 \int_0^p \sqrt{2px} \, dx + 2 \int_p^{4p} \left(\sqrt{2px} - \sqrt{\frac{8(x-p)^3}{27p}} \right) dx = \\
 &= 2 \left(\int_0^p \sqrt{2px} \, dx + \int_p^{4p} \sqrt{2px} \, dx \right) - 2 \int_p^{4p} \sqrt{\frac{8(x-p)^3}{27p}} \, dx = \\
 &= 2 \int_0^{4p} \sqrt{2px} \, dx - 2 \int_p^{4p} \sqrt{\frac{8(x-p)^3}{27p}} \, dx.
 \end{aligned}$$

Первый из полученных интегралов является, фактически, табличным:

$$\int_0^{4p} \sqrt{2px} \, dx = \sqrt{2p} \int_0^{4p} x^{1/2} \, dx = \sqrt{2p} \left(\frac{2}{3} x^{3/2} \right) \Big|_0^{4p} = \frac{16\sqrt{2}}{3} p^2.$$

Второй сводится к табличному заменой $z = x - p$:

$$\int_p^{4p} \sqrt{\frac{8(x-p)^3}{27p}} \, dx = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3p}} \int_0^{3p} z^{3/2} \, dz = \frac{12\sqrt{2}}{5} p^2.$$

Отсюда получаем

$$S = 2 \left(\frac{16\sqrt{2}}{3} p^2 \right) - 2 \left(\frac{12\sqrt{2}}{5} p^2 \right) = \frac{88\sqrt{2}}{15} p^2.$$

2406. $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 1$ ($A > 0$, $AC - B^2 > 0$).

Рассмотрим уравнение кривой как квадратное уравнение относительно переменной y :

$$Cy^2 + (2Bx)y + (Ax^2 - 1) = 0.$$

Решая его, находим функции, графики которых ограничивают кривую сверху и снизу:

$$y_1(x) = \frac{-Bx - \sqrt{C - (AC - B^2)x^2}}{C},$$

$$y_2(x) = \frac{-Bx + \sqrt{C - (AC - B^2)x^2}}{C}.$$

Условие неотрицательности дискриминанта позволяет найти области определения этих функций:

$$|x| \leq a, \quad \left(a = \sqrt{\frac{C}{AC - B^2}} \right).$$

Из курса аналитической геометрии известно, что рассматриваемая кривая представляет собой эллипс (рис. 6.16).

Искомая площадь

$$S = \int_{-a}^a (y_2(x) - y_1(x)) dx = 2 \int_{-a}^a \frac{\sqrt{C - (AC - B^2)x^2}}{C} dx.$$

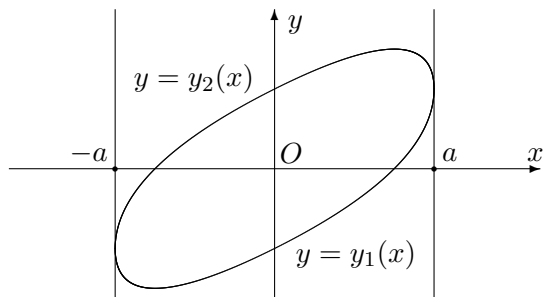


Рис. 6.16

В силу четности подынтегральной функции последний интеграл можно заменить удвоенным интегралом по положительной

части отрезка интегрирования:

$$\begin{aligned}
 S &= 4 \int_0^a \frac{\sqrt{C - (AC - B^2)x^2}}{C} dx = \\
 &= 4 \int_0^{\sqrt{\frac{C}{AC - B^2}}} \frac{\sqrt{C - (AC - B^2)x^2}}{C} dx.
 \end{aligned}$$

После замены $z = \sqrt{\frac{AC - B^2}{C}} x$ получаем:

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{4}{\sqrt{AC - B^2}} \int_0^1 \sqrt{1 - z^2} dz = \\
 &= \frac{4}{\sqrt{AC - B^2}} \left(\frac{z}{2} \sqrt{1 - z^2} + \frac{1}{2} \arcsin z \right) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{\sqrt{AC - B^2}}.
 \end{aligned}$$

2407. $y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$ (циссоида), $x = 2a$.

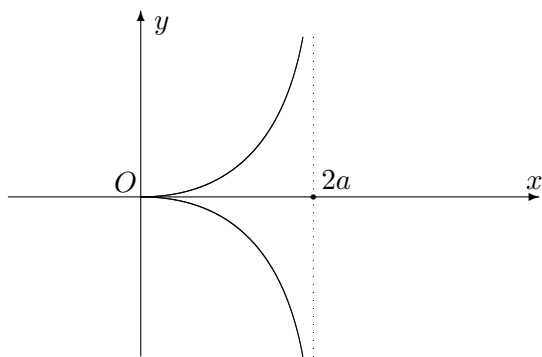


Рис. 6.17

Прямая $x = 2a$ является вертикальной асимптотой циссоиды. Так как кривая симметрична относительно оси абсцисс, то можно вычислить площадь части фигуры, лежащей над осью абсцисс, а затем удвоить полученный результат. Часть фигуры, лежащая над осью абсцисс, ограничена прямыми $x = 0$, $x = 2a$ и графиками функций $y = 0$ (нижняя часть границы) и $y = x\sqrt{x}/\sqrt{2a-x}$ (верхняя часть границы) (рис. 6.17). Следовательно, искомая площадь фигуры

$$S = 2 \int_0^{2a} \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{2a-x}} dx.$$

Полученный интеграл является несобственным. Для его вычисления сделаем замену переменной:

$$t = \sqrt{\frac{x}{2a-x}}, \quad x = \frac{2at^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{4at dt}{(1+t^2)^2}.$$

В результате приходим к равенству

$$S = 16a^2 \int_0^{+\infty} \frac{t^4 dt}{(1+t^2)^3}.$$

Неопределенный интеграл вычисляем методом Остроградского. Согласно этому методу (с учетом четности подынтегральной функции) находим разложение

$$\int \frac{t^4 dt}{(1+t^2)^3} = \frac{At^3 + Bt}{(1+t^2)^2} + C \int \frac{dt}{1+t^2}.$$

После дифференцирования, освобождения от знаменателя и приведения подобных членов получаем тождество

$$t^4 = (C - A)t^4 + (3A - 3B + 2C)t^2 + (B + C).$$

Решая систему

$$\begin{cases} C - A = 1, \\ 3A - 3B + 2C = 0, \\ B + C = 0, \end{cases}$$

находим:

$$A = -\frac{5}{8}, \quad B = -\frac{3}{8}, \quad C = \frac{3}{8}.$$

Таким образом,

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^4 dt}{(1+t^2)^3} = \left(-\frac{5t^3+3t}{8(1+t^2)^2} + \frac{3}{8} \operatorname{arctg} t \right) \Big|_0^{+\infty} = \frac{3\pi}{16}$$

и площадь фигуры

$$S = 16a^2 \cdot \frac{3\pi}{16} = 3\pi a^2.$$

2408. $|x| = a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2}, \quad y = 0$ (трактриса).

Расположим систему координат так, чтобы ось Oy располагалась горизонтально, а ось Ox — вертикально. Трактриса расположена симметрично относительно оси Oy , ее верхняя ветвь представляет собой график функции

$$f(y) = a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2},$$

определенной при промежутке $(0; a]$ (рис. 6.18), ее производная

$$f'(y) = -\frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y} \tag{6.3}$$

всюду неположительна и эта функция монотонно убывает. Прямая $y = 0$ является вертикальной асимптотой и $f(a) = 0$.

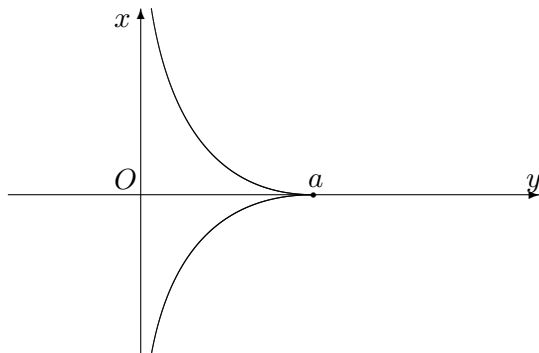


Рис. 6.18

Площадь S рассматриваемой фигуры вдвое больше площади ее части, лежащей над осью Oy , следовательно,

$$S = 2 \int_0^a f(y) dy.$$

Несложно проверить, что

$$\lim_{y \rightarrow 0} y f(y) = 0. \quad (6.4)$$

Используя (6.3) и (6.4) и учитывая равенство $f(a) = 0$, проинтегрируем по частям:

$$\begin{aligned} S &= 2 \left(f(y)y \Big|_0^a - \int_0^a y f'(y) dy \right) = 2 \int_0^a \sqrt{a^2 - y^2} dy = \\ &= 2 \left(\frac{y}{2} \sqrt{a^2 - y^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{y}{a} \right) \Big|_0^a = \frac{\pi a^2}{2}. \end{aligned}$$

Замечание. В задачнике Демидовича в условии задачи имеется опечатка: отсутствует знак модуля переменной x . Если знак

модуля убрать, то указанные линии не будут ограничивать никакой фигуры.

$$\mathbf{2409.} \quad y^2 = \frac{x^n}{(1+x^{n+2})^2} \quad (x > 0; n > -2).$$

Пусть

$$f(x) = \frac{x^{n/2}}{1+x^{n+2}}.$$

При $-2 < n < 0$ прямая $x = 0$ является вертикальной асимптотой графика функции $y = f(x)$. При $n = 0$ величина $f(0) = 1$, а касательная к графику $f(x)$ при $x = 0$ параллельна оси абсцисс. При $0 < n < 2$ значение $f(0) = 0$, а касательная к графику рассматриваемой функции в начале координат совпадает с осью ординат. При $n = 2$ значение $f(0)$ также равно нулю, но касательная в точке $x = 0$ совпадает с биссектрисой первой четверти. Наконец, при $n > 2$ значение $f(0) = 0$, но график функции $f(x)$ в начале координат касается оси абсцисс. При $n > 0$ на положительной части оси Ox функция имеет ровно одну точку максимума. Рассматриваемая фигура ограничена графиками функций $y = \pm f(x)$ и в зависимости от величины n выглядит так как показано на рисунках 6.19 – 6.23.

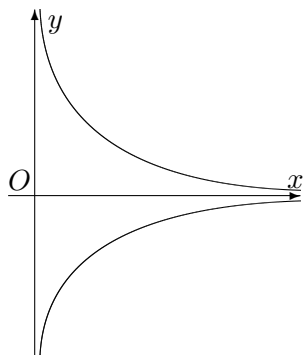


Рис. 6.19. Случай $-2 < n < 0$

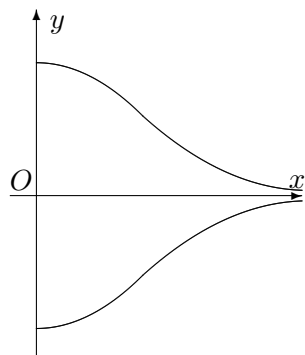


Рис. 6.20. Случай $n = 0$

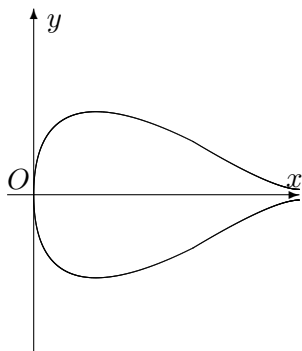


Рис. 6.21. Случай $0 < n < 2$

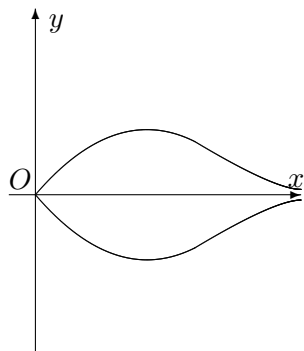


Рис. 6.22. Случай $n = 2$

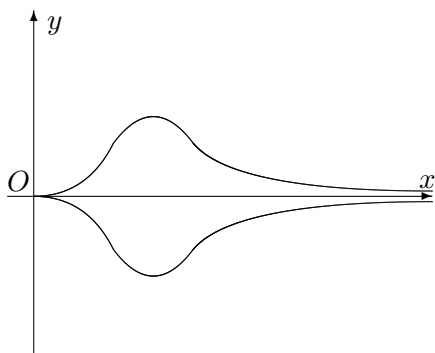


Рис. 6.23. Случай $n > 2$

Во всех случаях ось абсцисс является осью симметрии фигуры. В силу этой симметрии искомая площадь S равна удвоенной площади части фигуры, лежащей над осью абсцисс:

$$S = 2 \int_0^{+\infty} \frac{x^{n/2} dx}{1 + x^{n+2}}.$$

После замены $u = x^{\frac{n}{2}+1}$ получаем

$$S = \frac{4}{n+2} \int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^2} = \frac{2\pi}{n+2}.$$

2410. $y = e^{-x} |\sin x|$, $y = 0$ ($x \geq 0$).

Искомая площадь S равна несобственному интегралу:

$$S = \int_0^{+\infty} e^{-x} |\sin x| dx.$$

Учитывая, что на промежутках вида $[2\pi n; \pi + 2\pi n]$ (n – целое) функция $\sin x$ неотрицательна, а на промежутках $[\pi + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n]$ (n – целое) функция $\sin x$ неположительна, получаем

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{2\pi n}^{\pi+2\pi n} e^{-x} \sin x dx - \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\pi+2\pi n}^{2\pi+2\pi n} e^{-x} \sin x dx.$$

Неопределенный интеграл

$$\int e^{-x} \sin x dx = -\frac{\sin x + \cos x}{2} e^{-x} + C$$

и по формуле Ньютона – Лейбница находим:

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-2\pi n}(e^{-\pi} + 1)}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-2\pi n}(e^{-2\pi} + e^{-\pi})}{2} = \\ &= \frac{1}{2} (e^{-2\pi} + 2e^{-\pi} + 1) \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2\pi n} = \\ &= \frac{1}{2} (e^{-\pi} + 1)^2 \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2\pi n}. \end{aligned} \tag{6.5}$$

По формуле суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии и формуле разности квадратов

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-2\pi n} = \frac{1}{1 - e^{-2\pi}} = \frac{1}{(1 - e^{-\pi})(1 + e^{-\pi})}. \quad (6.6)$$

Подставляя (6.6) в (6.5), находим:

$$\begin{aligned} S &= \frac{(e^{-\pi} + 1)^2}{2(1 - e^{-\pi})(1 + e^{-\pi})} = \frac{1 + e^{-\pi}}{2(1 - e^{-\pi})} = \\ &= \frac{e^{-\pi/2}(e^{\pi/2} + e^{-\pi/2})}{2e^{-\pi/2}(e^{\pi/2} - e^{-\pi/2})} = \frac{2 \operatorname{ch}(\pi/2)}{4 \operatorname{sh}(\pi/2)} = \frac{1}{2} \operatorname{cth} \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

2411. В каком отношении парабола $y^2 = 2x$ делит площадь круга $x^2 + y^2 = 8$?

Радиус круга равен $2\sqrt{2}$ и его площадь $S = 8\pi$. Площадь части круга, отсекаемой от него параболой и лежащей правее этой параболы, обозначим S_1 . Площадь оставшейся части круга (лежащей слева от параболы) обозначим S_2 . Точки пересечения круга и параболы имеют координаты $(2; 2)$ и $(2; -2)$ (рис. 6.24).

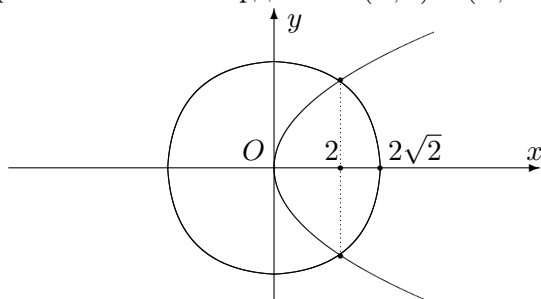


Рис. 6.24

Вычислим S_1 . Для этого разобьем часть круга, лежащую справа от параболы, на две фигуры. Первая фигура ограничена

прямыми $x = 0$, $x = 2$ и графиками функций $y = -\sqrt{2x}$ (нижняя часть границы) и $y = \sqrt{2x}$ (верхняя часть границы), ее площадь

$$\begin{aligned} S_{1,1} &= \int_0^2 \left(\sqrt{2x} - (-\sqrt{2x}) \right) dx = 2 \int_0^2 \sqrt{2x} dx = \\ &= 2\sqrt{2} \int_0^2 x^{1/2} dx = \frac{4\sqrt{2}}{3} x^{3/2} \Big|_0^2 = \frac{16}{3}. \end{aligned}$$

Вторая фигура ограничена прямыми $x = 2$ и $x = 2\sqrt{2}$ и графиками функций $y = -\sqrt{8-x^2}$ (нижняя часть границы) и $y = \sqrt{8-x^2}$ (верхняя часть границы), ее площадь

$$\begin{aligned} S_{1,2} &= \int_2^{2\sqrt{2}} \left(\sqrt{8-x^2} - (-\sqrt{8-x^2}) \right) dx = 2 \int_2^{2\sqrt{2}} \sqrt{8-x^2} dx = \\ &= 2 \left(\frac{x}{2} \sqrt{8-x^2} + 4 \arcsin \frac{x}{2\sqrt{2}} \right) \Big|_2^{2\sqrt{2}} = 2\pi - 4. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$S_1 = S_{1,1} + S_{1,2} = \frac{16}{3} + (2\pi - 4) = 2\pi + \frac{4}{3}.$$

Величина площади

$$S_2 = S - S_1 = 8\pi - (2\pi + \frac{4}{3}) = 6\pi - \frac{4}{3}.$$

Искомое отношение площадей

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{2\pi + 4/3}{6\pi - 4/3} = \frac{6\pi + 4}{18\pi - 4} = \frac{3\pi + 2}{9\pi - 2}.$$

2412 (н). Выразить координаты точки $M(x; y)$ гиперболы $x^2 - y^2 = 1$ как функции площади гиперболического сектора

$S = OM'M$, ограниченного дугой гиперболы $M'M$ и двумя лучами OM и OM' , где $M'(x; -y)$ – точка, симметричная M относительно оси Ox .

Так как буквы x и y используются для обозначения координат точки M , то для обозначения независимых переменных выберем другие, например u (для абсциссы) и v (для ординаты) (рис. 6.25).

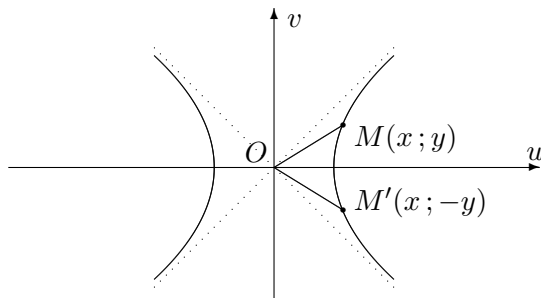


Рис. 6.25

Так как гипербола симметрична относительно обеих координатных осей, то достаточно рассмотреть случай, когда точка M лежит в первой координатной четверти.

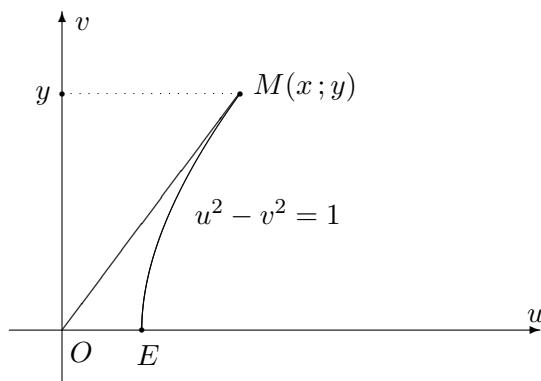


Рис. 6.26

Пусть S_0 – площадь части сектора, лежащей над осью абс-

цисс, тогда $S = 2S_0$. Вычислим величину S_0 . Рассматриваемая часть сектора ограничена прямой $y = 0$, отрезком OM и дугой гиперболы $u^2 - v^2 = 1$, пересекающей ось абсцисс в точке $E(1, 0)$ (рис. 6.26). Величину площади удобнее вычислять с помощью интеграла по переменной v , считая область ограниченной прямыми $v = 0$, $v = y$ и графиками функций

$$u = \frac{x}{y}v, \quad u = \sqrt{1 + v^2}.$$

Величина площади

$$\begin{aligned} S_0 &= \int_0^y \left(\sqrt{1 + v^2} - \frac{x}{y}v \right) dv = \\ &= \left(\frac{v}{2} \sqrt{1 + v^2} + \frac{1}{2} \ln \left(v + \sqrt{1 + v^2} \right) - \frac{xv^2}{2y} \right) \Big|_0^y = \\ &= \frac{y}{2} \sqrt{1 + y^2} + \frac{1}{2} \ln \left(y + \sqrt{1 + y^2} \right) - \frac{xy}{2}. \end{aligned}$$

Так как $\sqrt{1 + y^2} = x$, то $S_0 = \frac{1}{2} \ln \left(y + \sqrt{1 + y^2} \right)$ и, следовательно,

$$S = \ln \left(y + \sqrt{1 + y^2} \right).$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned} e^S &= y + \sqrt{1 + y^2}, \\ e^{-S} &= \frac{1}{y + \sqrt{1 + y^2}} = \\ &= \frac{\sqrt{1 + y^2} - y}{\left(y + \sqrt{1 + y^2} \right) \left(\sqrt{1 + y^2} - y \right)} = \sqrt{1 + y^2} - y. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\text{sh}(S) = \frac{1}{2} (e^S - e^{-S}) = y,$$

$$\operatorname{ch}(S) = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2(S)} = \sqrt{1 + y^2} = x.$$

Учитывая знаки x и y (в зависимости от того в какой четверти координатной плоскости находится точка M), получаем следующий ответ:

$$\begin{array}{ll} x \geq 0, y \geq 0 & x = \operatorname{ch}(S), y = \operatorname{sh}(S), \\ x \leq 0, y \geq 0 & x = -\operatorname{ch}(S), y = \operatorname{sh}(S), \\ x \leq 0, y \leq 0 & x = -\operatorname{ch}(S), y = -\operatorname{sh}(S), \\ x \geq 0, y \leq 0 & x = \operatorname{ch}(S), y = -\operatorname{sh}(S). \end{array}$$

6.2. Площадь фигуры, ограниченной параметрическими кривыми

Пусть некоторая область на плоскости xOy ограничена кусочно гладкой кривой C (рис. 6.27).

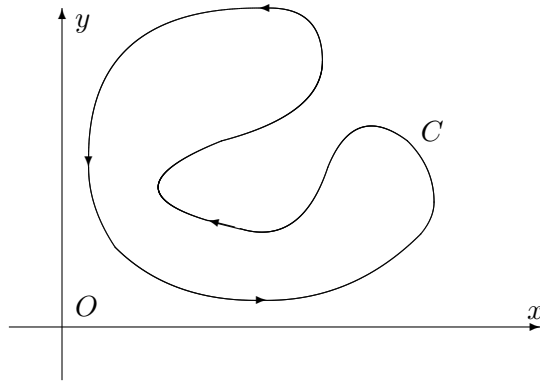


Рис. 6.27

Предположим, что кривая C задается уравнениями

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta.$$

Если при возрастании параметра t от α до β точка с координатами $(x(t); y(t))$ пробегает кривую C ровно один раз так, что

ограничиваемая ею область остается слева (положительная ориентация), то площадь такой области можно вычислить по любой из следующих трех формул:

$$S = - \int_{\alpha}^{\beta} y(t) x'(t) dt, \quad (6.7)$$

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} x(t) y'(t) dt, \quad (6.8)$$

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} (x(t) y'(t) - x'(t) y(t)) dt. \quad (6.9)$$

Если при возрастании параметра t от α до β точка с координатами $(x(t); y(t))$ пробегает кривую C в отрицательном направлении (так, что ограничиваемая ею область остается справа), то в формулах (6.7) – (6.9) нужно изменить знаки перед интегралами на противоположные.

Найти площади фигур, ограниченных кривыми, заданными параметрически:

2413. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) (циклоида) и $y = 0$.

Пусть $y(x)$ – функция, графиком которой является дуга циклоиды. Тогда рассматриваемая фигура ограничена прямыми $x = 0$, $x = 2\pi a$ и графиками функций $y = y(x)$ и $y = 0$ (рис. 6.28).

Согласно формуле (6.1) предыдущего раздела, искомая площадь

$$S = \int_0^{2\pi a} y(x) dx.$$

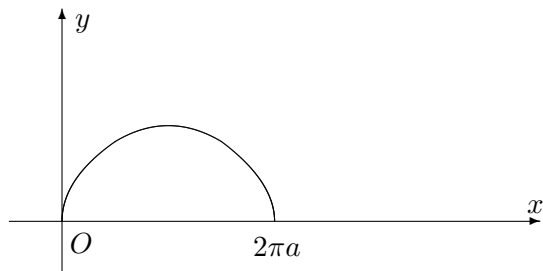


Рис. 6.28

Переходя к переменной t , входящей в параметрическое уравнение циклоиды, получаем:

$$\begin{aligned}
 S &= \int_0^{2\pi} y(t) x'(t) dt = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 dt = \\
 &= a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2 \cos t + \cos^2 t) dt = \\
 &= a^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - 2 \cos t + \frac{1 + \cos 2t}{2} \right) dt = \\
 &= a^2 \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2} - 2 \cos t + \frac{1}{2} \cos 2t \right) dt = \\
 &= a^2 \left(\frac{3}{2} t - 2 \sin t + \frac{1}{4} \sin 2t \right) \Big|_0^{2\pi} = 3\pi a^2.
 \end{aligned}$$

2414. $x = 2t - t^2$, $y = 2t^2 - t^3$.

Парабола $x = 2t - t^2$ имеет ветви, направленные вниз, корни $t = 0$ и $t = 2$, точка максимума $(1; 1)$ (рис. 6.29).

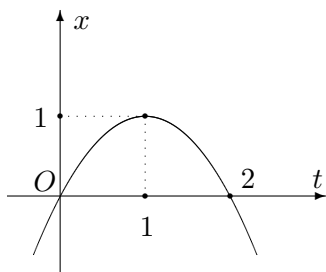


Рис. 6.29

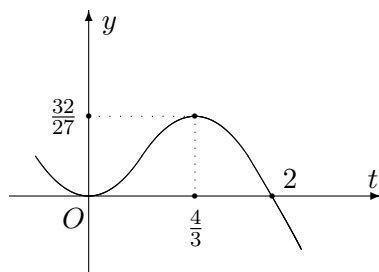


Рис. 6.30

Кубическая парабола $y = 2t^2 - t^3$ имеет корни $t = 0$ и $t = 2$, точка максимума $(4/3; 32/27)$ (рис. 6.30). Используя графики функций $x(t)$ и $y(t)$ нетрудно получить и график параметрической кривой (рис. 6.31).

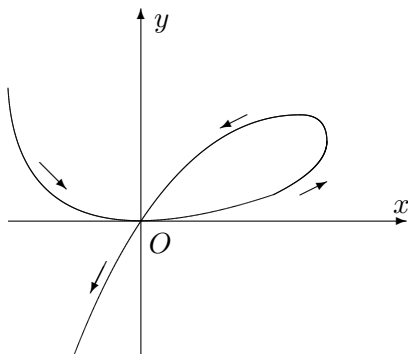


Рис. 6.31

Петля кривой в первой четверти ограничивает область так, что ее обход совершается в положительном направлении при изменении параметра от $t = 0$ до $t = 2$. Площадь фигуры можно

вычислить по формуле (6.7):

$$\begin{aligned}
 S &= - \int_0^2 y(t) x'(t) dt = - \int_0^2 (2t - t^3)(2 - 2t) dt = \\
 &= \int_0^2 (-2t^4 + 6t^3 - 4t^2) dt = \left(-\frac{2}{5} t^5 + \frac{3}{2} t^4 - \frac{4}{3} t^3 \right) \Big|_0^2 = \frac{8}{15}.
 \end{aligned}$$

2415. $x = a(\cos t + t \sin t)$, $y = a(\sin t - t \cos t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) (развертка круга) и $x = a$, $y \leq 0$.

Для функции $x(t)$ можно вычислить значения в следующих опорных точках: $x(0) = a$, $x(\pi/2) = \pi a/2$, $x(\pi) = -a$, $x(3\pi/2) = -3\pi a/2$, $x(2\pi) = 2\pi a$. Эта функция имеет локальный минимум $t = 0$, $x = a$, локальный максимум $t = \pi/2$, $x = \pi a/2$, локальный минимум $t = 3\pi/2$, $x = -3\pi a/2$ и краевой максимум $t = 2\pi$, $x = a$ (рис. 6.32).

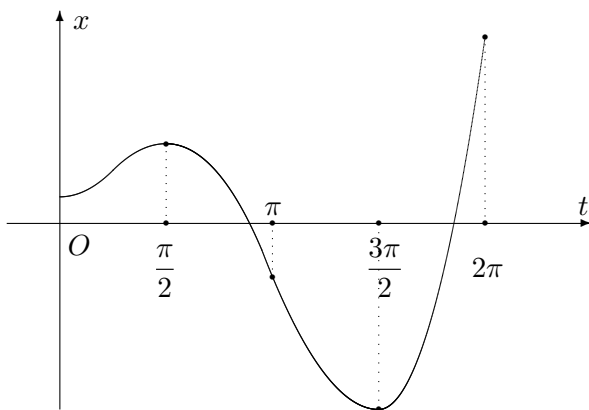


Рис. 6.32

Для функции $y(t)$ имеем следующие значения в опорных точках: $y(0) = 0$, $y(\pi/2) = a$, $y(\pi) = \pi a$, $y(3\pi/2) = -a$, $y(2\pi) = -2\pi a$.

Эта функция имеет локальный минимум $t = 0, y = 0$, локальный максимум $t = \pi, y = \pi a$, локальный минимум $t = 2\pi, y = -2\pi a$ (рис. 6.33).

Используя графики функций $x(t)$ и $y(t)$ получаем график рассматриваемой параметрической кривой на плоскости xOy .

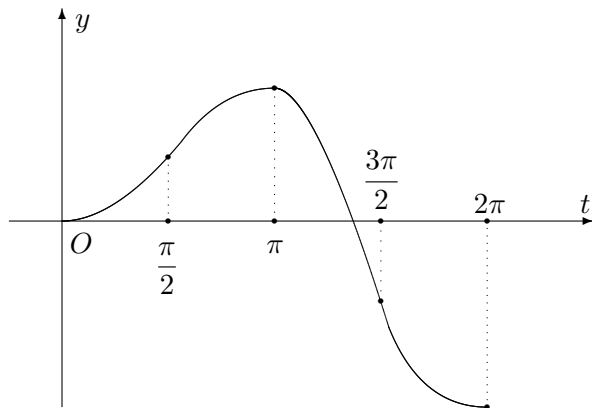


Рис. 6.33

При возрастании параметра от $t = 0$ до $t = 2\pi$ точка развертки круга $(x(t); y(t))$ обходит границу фигуры в положительном направлении от точки плоскости $(a; 0)$ до точки $(a; -2\pi a)$. Оставшаяся часть границы замыкается отрезком прямой $x = a, y \leq 0$ (рис. 6.34).

Параметрическое уравнение отрезка прямой можно написать, например, в следующем виде:

$$x = a, \quad y = a(t - 4\pi), \quad 2\pi \leq t \leq 4\pi.$$

Таким образом, параметрическое уравнение границы рассматриваемой области принимает следующий вид:

$$x(t) = \begin{cases} a(\cos t + t \sin t), & 0 \leq t \leq 2\pi, \\ a, & 2\pi \leq t \leq 4\pi; \end{cases}$$

$$y(t) = \begin{cases} a(\sin t - t \cos t), & 0 \leq t \leq 2\pi, \\ a(t - 4\pi), & 2\pi \leq t \leq 4\pi. \end{cases}$$

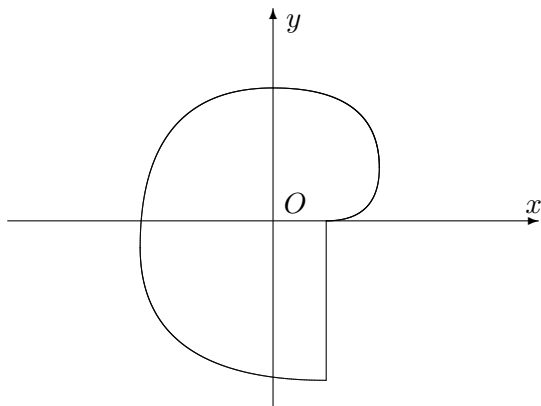


Рис. 6.34

Применяя формулу (6.7) для площади фигуры и используя свойство аддитивности интеграла, получаем

$$S = - \int_0^{4\pi} y(t) x'(t) dt = - \int_0^{2\pi} y(t) x'(t) dt - \int_{2\pi}^{4\pi} y(t) x'(t) dt.$$

На участке $2\pi \leq t \leq 4\pi$ функция $x(t)$ постоянна и, следовательно, производная $x'(t) = 0$. Поэтому последний интеграл обращается в нуль и

$$\begin{aligned} S &= - \int_0^{2\pi} y(t) x'(t) dt = -a^2 \int_0^{2\pi} (\sin t - t \cos t) t \cos t dt = \\ &= a^2 \left(\int_0^{2\pi} t^2 \cos^2 t dt - \int_0^{2\pi} t \sin t \cos t dt \right). \end{aligned}$$

Неопределенные интегралы вычисляются с помощью интегрирования по частям:

$$\begin{aligned}
 \int t^2 \cos^2 t \, dt &= \frac{1}{2} \int t^2 (1 + \cos 2t) \, dt = \frac{t^3}{6} + \frac{1}{2} \int t^2 \cos 2t \, dt = \\
 &= \frac{t^3}{6} + \frac{1}{4} \int t^2 d(\sin 2t) = \frac{t^3}{6} + \frac{1}{4} t^2 \sin 2t - \frac{1}{2} \int t \sin 2t \, dt = \\
 &= \frac{t^3}{6} + \frac{1}{4} t^2 \sin 2t + \frac{1}{4} \int t d(\cos 2t) = \\
 &= \frac{t^3}{6} + \frac{1}{4} t^2 \sin 2t + \frac{1}{4} t \cos 2t - \frac{1}{4} \int \cos 2t \, dt = \\
 &= \frac{t^3}{6} + \frac{1}{4} t^2 \sin 2t + \frac{1}{4} t \cos 2t - \frac{1}{8} \sin 2t + C. \\
 \int t \sin t \cos t \, dt &= \frac{1}{2} \int t \sin 2t \, dt = -\frac{1}{4} \int t d(\cos 2t) = \\
 &= -\frac{t}{4} \cos 2t + \frac{1}{4} \int \cos 2t \, dt = -\frac{t}{4} \cos 2t + \frac{1}{8} \sin 2t + C.
 \end{aligned}$$

Применяя формулу Ньютона – Лейбница для определенного интеграла, получаем

$$\begin{aligned}
 S &= a^2 \left(\left(\frac{t^3}{6} + \frac{1}{4} t^2 \sin 2t + \frac{1}{4} t \cos 2t - \frac{1}{8} \sin 2t \right) \Big|_0^{2\pi} - \right. \\
 &\quad \left. - \left(-\frac{t}{4} \cos 2t + \frac{1}{8} \sin 2t \right) \Big|_0^{2\pi} \right) = \frac{a^2}{3} (4\pi^2 + 3\pi).
 \end{aligned}$$

2416. $x = a(2 \cos t - \cos 2t)$, $y = a(2 \sin t - \sin 2t)$.

Функции $x(t)$ и $y(t)$ являются 2π -периодическими. Поэтому их графики достаточно изучить на промежутке $0 \leq t \leq 2\pi$. Функция $x(t)$ четна, следовательно ее график симметричен относительно оси $t = 0$. Так как $x(2\pi - t) = x(t)$, то прямая

$t = \pi$ также является осью симметрии графика. Вычисляем значения функции $x(t)$ в опорных точках: $x(0) = a$, $x(\pi/3) = 3a/2$, $x(\pi) = -3a$, $x(5\pi/3) = 3a/2$, $x(2\pi) = a$. Производная $x'(t) = 2 \sin t(2 \cos t - 1)$. Точки $t = 0$, $t = \pi$ и $t = 2\pi$ являются точками локальных минимумов, а точки $t = \pi/3$ и $t = 5\pi/3$ — точки локальных максимумов (рис. 6.35).

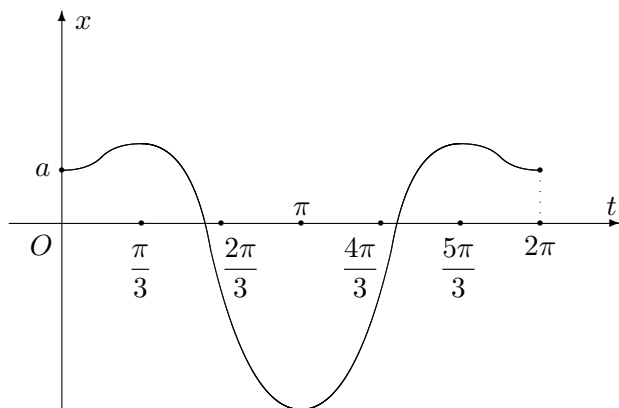


Рис. 6.35

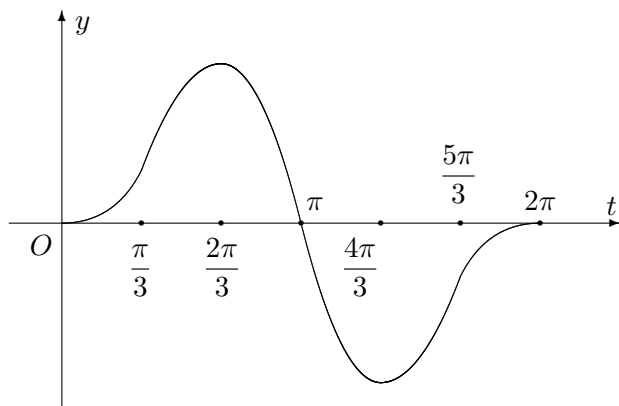


Рис. 6.36

Функция $y(t)$ нечетна, следовательно, ее график симметричен относительно начала координат. Так как $y(2\pi - t) = -y(t)$, то точка $(\pi; 0)$ также является центром симметрии графика. Вычисляем значения функции $y(t)$ в опорных точках: $y(0) = 0$, $y(\pi/3) = a\sqrt{3}/2$, $y(2\pi/3) = 3\sqrt{3}a/2$, $y(\pi) = 0$, $y(4\pi/3) = -3\sqrt{3}a/2$, $y(5\pi/3) = -\sqrt{3}a/2$, $y(2\pi) = 0$. Производная

$$y'(t) = (1 - \cos t)(2 \cos t + 1).$$

Точка $t = 2\pi/3$ является точкой локального максимума, а точка $t = 4\pi/3$ – точкой локального минимума (рис. 6.36).

Используя графики функций $x(t)$ и $y(t)$ получаем график кривой на плоскости xOy (рис. 6.37). При изменении параметра от $t = 0$ до $t = 2\pi$ точка $(x(t); y(t))$ обходит границу области в положительном направлении. Площадь фигуры вычисляем по формуле (6.7):

$$\begin{aligned} S &= - \int_0^{2\pi} y(t) x'(t) dt = \\ &= 2a^2 \int_0^{2\pi} (2 \sin t - \sin 2t)(\sin t - \sin 2t) dt = \\ &= 2a^2 \int_0^{2\pi} (2 \sin^2 t - 3 \sin t \sin 2t + \sin^2 2t) dt = \\ &= 2a^2 \int_0^{2\pi} \left((1 - \cos 2t) - \frac{3}{2} (\cos t - \cos 3t) + \frac{1}{2} (1 - \cos 4t) \right) dt = \\ &= 2a^2 \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2} - \cos 2t - \frac{3}{2} \cos t + \frac{3}{2} \cos 3t - \frac{1}{2} \cos 4t \right) dt = \\ &= 2a^2 \left(\frac{3}{2} t - \frac{1}{2} \sin 2t - \frac{3}{2} \sin t + \frac{1}{2} \sin 3t - \frac{1}{8} \sin 4t \right) \Big|_0^{2\pi} = 6\pi a^2. \end{aligned}$$

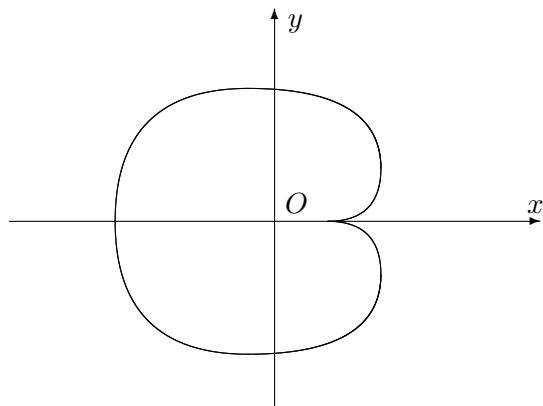


Рис. 6.37

2417. $x = \frac{c^2}{a} \cos^3 t$, $y = \frac{c^2}{b} \sin^3 t$ ($c^2 = a^2 - b^2$) (эволюта эллипса).

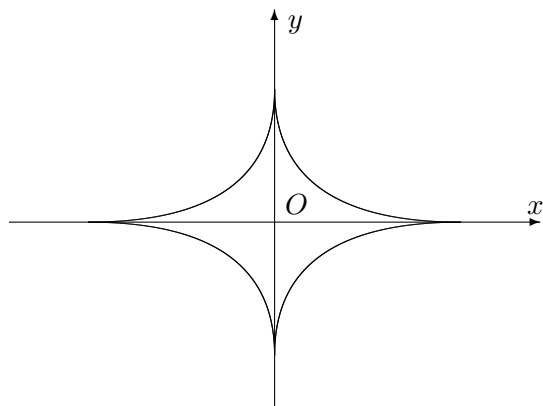


Рис. 6.38

Точка кривой $(x(t); y(t))$ при изменении параметра t от нуля до 2π описывает кривую в положительном направлении один раз (рис. 6.38).

Согласно формуле (6.9)

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (x(t) y'(t) - x'(t) y(t)) dt = \\
 &= \frac{3c^4}{2ab} \int_0^{2\pi} (\sin^4 t \cos^2 t + \cos^4 t \sin^2 t) dt = \\
 &= \frac{3c^4}{2ab} \int_0^{2\pi} \sin^2 t \cos^2 t (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = \frac{3c^4}{2ab} \int_0^{2\pi} \sin^2 t \cos^2 t dt = \\
 &= \frac{3c^4}{8ab} \int_0^{2\pi} \sin^2 2t dt = \frac{3c^4}{16ab} \int_0^{2\pi} (1 - \cos 4t) dt = \\
 &= \frac{3c^4}{16ab} \left(t - \frac{1}{4} \sin 4t \right) \Big|_0^{2\pi} = \frac{3\pi c^4}{8ab}.
 \end{aligned}$$

2417.1. $x = a \cos t$, $y = \frac{a \sin^2 t}{2 + \sin t}$.

Функции $x(t)$ и $y(t)$ имеют период 2π , поэтому достаточно рассмотреть их на отрезке $[0; 2\pi]$. График $x(t)$ представлен ниже (рис. 6.39).

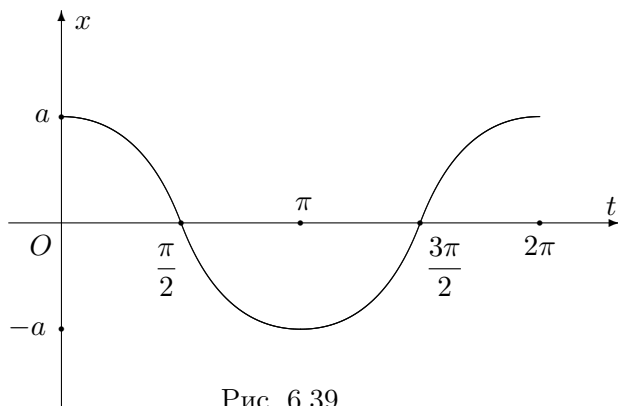


Рис. 6.39

Функция $y(t)$ имеет минимумы $(t = 0, y = 0)$, $(t = \pi, y = 0)$, $(t = 2\pi, y = 0)$ и максимумы $(t = \pi/2, y = a/3)$, $(t = 3\pi/2, y = a)$ (рис. 6.40).

По графикам функций $x(t)$ и $y(t)$ нетрудно получить вид графика параметрической кривой (рис. 6.41).

Точка параметрической кривой $(x(t); y(t))$ при изменении параметра t от нуля до 2π обходит границу фигуры в отрицательном направлении от точки $(a; 0)$ через точки $(0; a/3)$, $(-a; 0)$, $(0; a)$ и снова возвращается в точку $(a; 0)$. Точки кривой $(a; 0)$ и $(-a; 0)$ являются точками возврата. Площадь фигуры вычисляем по формуле (6.7).

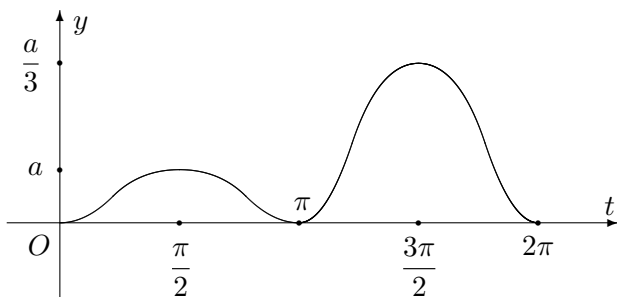


Рис. 6.40

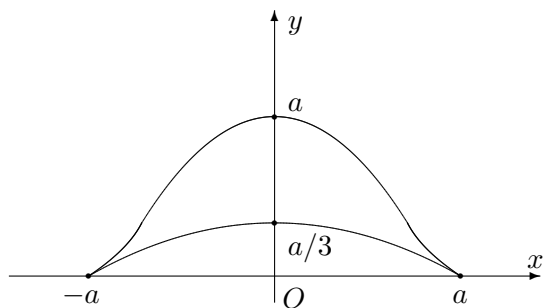


Рис. 6.41

$$S = \int_0^{2\pi} y(t) x'(t) dt = -a^2 \int_0^{2\pi} \frac{\sin^3 t}{2 + \sin t} dt.$$

Для того чтобы вычислить полученный определенный интеграл, разложим подынтегральную функцию

$$f(t) = \frac{\sin^3 t}{2 + \sin t}$$

в сумму четной и нечетной частей

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t),$$

где

$$f_1(t) = \frac{1}{2} (f(t) + f(-t)) = -\frac{\sin^4 t}{4 - \sin^2 t},$$

$$f_2(t) = \frac{1}{2} (f(t) - f(-t)) = \frac{2 \sin^3 t}{4 - \sin^2 t}.$$

В силу 2π -периодичности и нечетности

$$\int_0^{2\pi} f_2(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} f_2(t) dt = 0.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{\sin^3 t}{2 + \sin t} dt &= \int_0^{2\pi} f_1(t) dt = \\ &= - \int_0^{2\pi} \frac{\sin^4 t}{4 - \sin^2 t} dt = \int_0^{2\pi} \frac{(16 - \sin^4 t) - 16}{4 - \sin^2 t} dt = \\ &= \int_0^{2\pi} \left(4 + \sin^2 t - \frac{16}{4 - \sin^2 t} \right) dt = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{2\pi} \left(4 + \frac{1 - \cos 2t}{2} - \frac{16}{4 - \sin^2 t} \right) dt = \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\frac{9}{2} - \frac{\cos 2t}{2} - \frac{16}{4 - \sin^2 t} \right) dt = \\
&= \left(\frac{9t}{2} - \frac{\sin 2t}{4} \right) \Big|_0^{2\pi} - 16 \int_0^{2\pi} \frac{dt}{4 - \sin^2 t} = \\
&= 9\pi - 16 \int_0^{2\pi} \frac{dt}{4 - \sin^2 t}.
\end{aligned}$$

Преобразуем оставшийся интеграл. Подынтегральная функция π -периодична и четна относительно середины отрезка $[0; \pi]$ (согласно формуле приведения $\sin(\pi - t) = \sin t$). Поэтому

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{4 - \sin^2 t} = 2 \int_0^{\pi} \frac{dt}{4 - \sin^2 t} = 4 \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{4 - \sin^2 t}.$$

В последнем интеграле делаем замену

$$\operatorname{tg} t = z, \quad \sin^2 t = \frac{z^2}{1 + z^2}, \quad dt = \frac{dz}{1 + z^2},$$

получаем

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{4 - \sin^2 t} = \int_0^{+\infty} \frac{dz}{4 + 3z^2} = \left(\frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}z}{2} \right) \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{4\sqrt{3}}.$$

Таким образом, площадь фигуры

$$S = -a^2 \left(9\pi - 16 \frac{4\pi}{4\sqrt{3}} \right) = \pi a^2 \left(\frac{16}{\sqrt{3}} - 9 \right).$$

6.3. Площадь в полярных координатах

Если фигура в полярных координатах r, φ ограничена лучами $\varphi = \alpha, \varphi = \beta$ и графиками функций $r = r_1(\varphi), r = r_2(\varphi)$ ($\alpha < \beta, r_1(\varphi) \leq r_2(\varphi)$) (рис. 6.42), то ее площадь

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} (r_2^2(\varphi) - r_1^2(\varphi)) d\varphi. \quad (6.10)$$

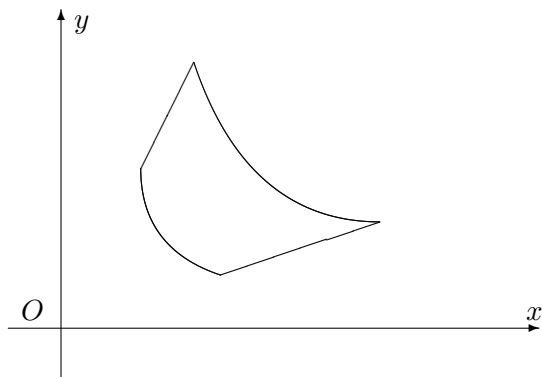


Рис. 6.42

В частном случае, когда фигура ограничена двумя лучами $\varphi = \alpha, \varphi = \beta$ и графиком одной функции $r = r(\varphi)$ (криволинейный сектор), получаем следующую формулу (в формуле (1) нужно взять $r_1(\varphi) = 0, r_2(\varphi) = r(\varphi)$):

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi) d\varphi. \quad (6.11)$$

Найти площади фигур, ограниченных кривыми, заданными в полярных координатах:

2418. $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$ (лемниската).

Координатные оси являются осями симметрии лемнискаты (рис. 6.43). Площадь всей фигуры, ограниченной лемнискатой,

в четыре раза больше площади ее части, лежащей в первой координатной четверти. Этой части отвечает изменение угла φ от нуля до $\pi/4$. По формуле (6.11):

$$S = 4 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} a^2 \cos 2\varphi d\varphi = 2a^2 \left(\frac{\sin 2\varphi}{2} \right) \Big|_0^{\pi/4} = a^2.$$

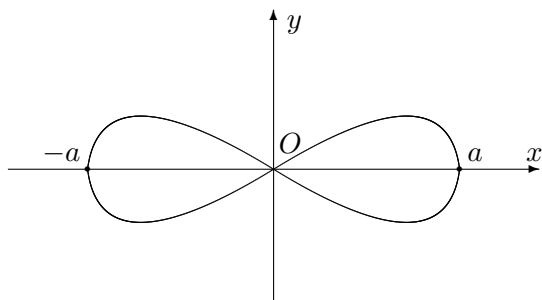


Рис. 6.43

2419. $r = a(1 + \cos \varphi)$ (кардиоида) (рис. 6.44).

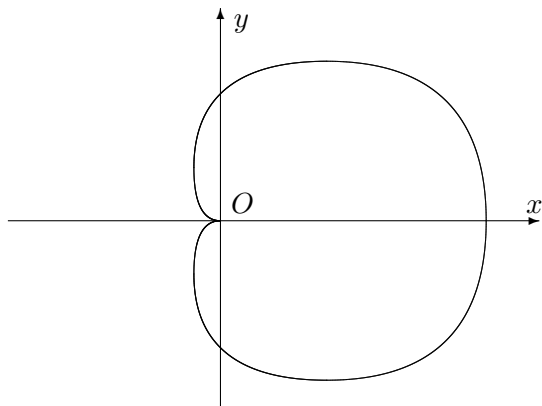


Рис. 6.44

Площадь фигуры (по формуле (6.11)):

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} a^2 (1 + \cos \varphi)^2 d\varphi = \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} (1 + 2 \cos \varphi + \cos^2 \varphi) d\varphi = \\
 &= \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} \left(1 + 2 \cos \varphi + \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} \right) d\varphi = \\
 &= \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2} + 2 \cos \varphi + \frac{\cos 2\varphi}{2} \right) d\varphi = \\
 &= \frac{a^2}{2} \left(\frac{3}{2} \varphi + 2 \sin \varphi + \frac{1}{4} \sin 2\varphi \right) \Big|_0^{2\pi} = \frac{3\pi a^2}{2}.
 \end{aligned}$$

2420. $r = a \sin 3\varphi$ (трилистник).

Кривая представляет собой три одинаковых лепестка. Первый из них отвечает изменению угла φ от нуля до $\pi/3$, второй лепесток отвечает изменению φ от $2\pi/3$ до π , а третий лепесток получается, когда φ увеличивается от $4\pi/3$ до $5\pi/3$ (рис. 6.45).

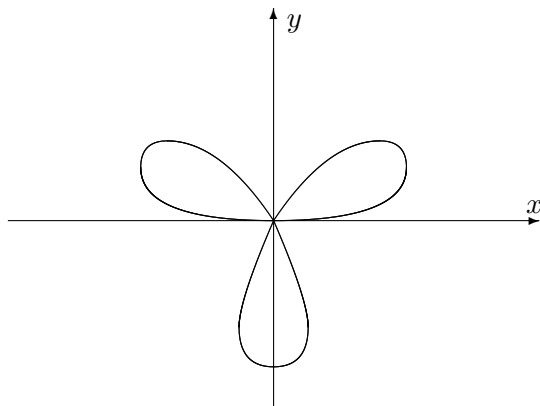


Рис. 6.45

Площадь всей фигуры в три раза больше площади одного

лепестка, поэтому по формуле (6.11):

$$S = 3 \left(\frac{1}{2} \int_0^{\pi/3} a^2 \sin^2 3\varphi d\varphi \right) = \frac{3a^2}{4} \int_0^{\pi/3} (1 - \cos 6\varphi) d\varphi =$$

$$= \frac{3a^2}{4} \left(\varphi - \frac{1}{6} \sin 6\varphi \right) \Big|_0^{\pi/3} = \frac{\pi a^2}{4}.$$

2421. $r = \frac{p}{1 - \cos \varphi}$ (парабола), $\varphi = \frac{\pi}{4}$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ (рис. 6.46).

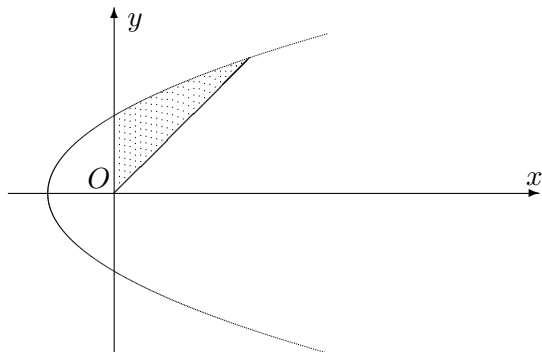


Рис. 6.46

По формуле (6.11) площадь фигуры

$$S = \frac{1}{2} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{p^2}{(1 - \cos \varphi)^2} d\varphi = \frac{p^2}{2} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{d\varphi}{(1 - \cos \varphi)^2}.$$

Для вычисления интеграла воспользуемся универсальной подстановкой:

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = t, \quad \cos \varphi = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad d\varphi = \frac{2dt}{1 + t^2}.$$

После замены получаем

$$\begin{aligned} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{d\varphi}{(1 - \cos \varphi)^2} &= \frac{1}{2} \int_{\operatorname{tg}(\pi/8)}^1 \frac{1+t^2}{t^4} dt = \frac{1}{2} \int_{\operatorname{tg}(\pi/8)}^1 \left(\frac{1}{t^4} + \frac{1}{t^2} \right) dt = \\ &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{3t^3} - \frac{1}{t} \right) \Big|_{\operatorname{tg}(\pi/8)}^1 = \frac{1}{6 \operatorname{tg}^3(\pi/8)} + \frac{1}{2 \operatorname{tg}(\pi/8)} - \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Полученное выражение можно упростить, если воспользоваться числовым значением $\operatorname{tg}(\pi/8)$. Это значение можно получить следующим образом. Согласно формуле тангенса двойного аргумента

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = \frac{2 \operatorname{tg}(\pi/8)}{1 - \operatorname{tg}^2(\pi/8)}.$$

Учитывая, что $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$ и обозначая $z = \operatorname{tg}(\pi/8)$, получаем:

$$1 = \frac{2z}{1 - z^2}, \quad z^2 + 2z - 1 = 0, \quad z = -1 \pm \sqrt{2}.$$

Так как $z = \operatorname{tg}(\pi/8)$ представляет собой положительную величину, то $z = \sqrt{2} - 1$, т. е.

$$\operatorname{tg}(\pi/8) = \sqrt{2} - 1.$$

Используя полученное значение, после тождественных преобразований находим

$$\begin{aligned} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{d\varphi}{(1 - \cos \varphi)^2} &= \frac{1}{6(\sqrt{2} - 1)^3} + \frac{1}{2(\sqrt{2} - 1)} - \frac{2}{3} = \\ &= \frac{1}{6(5\sqrt{2} - 7)} + \frac{1}{2(\sqrt{2} - 1)} - \frac{2}{3} = \frac{5\sqrt{2} + 7}{6(5\sqrt{2} - 7)(5\sqrt{2} + 7)} + \\ &+ \frac{\sqrt{2} + 1}{2(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)} - \frac{2}{3} = \frac{5\sqrt{2} + 7}{6} + \frac{\sqrt{2} + 1}{2} - \frac{2}{3} = \frac{3 + 4\sqrt{2}}{3}. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем следующее значение искомой площади:

$$S = \frac{p^2}{6} (3 + 4\sqrt{2}).$$

2422. $r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}$ ($0 < \varepsilon < 1$) (эллипс).

График кривой представлен на рис. 6.47.

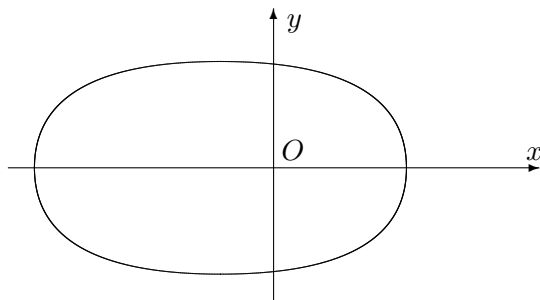


Рис. 6.47

При изменении полярного угла φ от 0 до 2π граница фигуры обходится один раз в положительном направлении. Ось абсцисс является осью симметрии эллипса и площадь фигуры в два раза больше площади ее части, расположенной в верхней полуплоскости, следовательно, искомая площадь

$$S = 2 \left(\frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{p^2}{(1 + \varepsilon \cos \varphi)^2} d\varphi \right) = p^2 \int_0^\pi \frac{d\varphi}{(1 + \varepsilon \cos \varphi)^2}.$$

Полученный интеграл вычисляем используя универсальную подстановку:

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = t, \quad \cos \varphi = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad d\varphi = \frac{2dt}{1 + t^2}.$$

После замены получаем

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{(1 + \varepsilon \cos \varphi)^2} &= 2 \int_0^{+\infty} \frac{(1 + t^2) dt}{((1 - \varepsilon)t^2 + 1 + \varepsilon)^2} = \\ &= \frac{2}{(1 - \varepsilon)^2} \int_0^{+\infty} \frac{(t^2 + 1) dt}{\left(t^2 + \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon}\right)^2}.\end{aligned}$$

Так как $t^2 + 1 = \left(t^2 + \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon}\right) - \frac{2\varepsilon}{1 - \varepsilon}$, то

$$\int_0^{+\infty} \frac{(t^2 + 1) dt}{\left(t^2 + \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon}\right)^2} = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon}} - \frac{2\varepsilon}{1 - \varepsilon} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\left(t^2 + \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon}\right)^2}.$$

Первый интеграл, стоящий в правой части последнего равенства, является табличным:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon}} = \sqrt{\frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon}} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon}} t \right) \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi \sqrt{1 - \varepsilon}}{2\sqrt{1 + \varepsilon}}.$$

Второй интеграл вычисляется методом Остроградского. Положим

$$a = \sqrt{\frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon}},$$

тогда

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\left(t^2 + \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon}\right)^2} = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t^2 + a^2)^2}.$$

С учетом четности подынтегральной функции можем составить разложение

$$\int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^2} = \frac{At}{t^2 + a^2} + B \int \frac{dt}{t^2 + a^2}.$$

Дифференцируя, освобождаясь от знаменателя и приводя подобные члены, получаем тождество

$$1 = (B - A)t^2 + a^2(A + B).$$

Решая систему

$$\begin{cases} B - A = 0 \\ a^2(A + B) = 1, \end{cases}$$

находим $A = B = \frac{1}{2a^2}$. Так как

$$\int \frac{dt}{t^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + C,$$

то

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t^2 + a^2)^2} &= \left(\frac{t}{2a^2(t^2 + a^2)} + \frac{1}{2a^3} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} \right) \Big|_0^{+\infty} = \\ &= \frac{\pi}{4a^3} = \frac{\pi(1 - \varepsilon)\sqrt{1 - \varepsilon}}{4(1 + \varepsilon)\sqrt{1 + \varepsilon}}. \end{aligned}$$

Подставляя вычисленные интегралы в выражение для площади, находим

$$S = \frac{2p^2}{(1 - \varepsilon)^2} \left(\frac{\pi\sqrt{1 - \varepsilon}}{2\sqrt{1 + \varepsilon}} - \frac{2\varepsilon}{1 - \varepsilon} \cdot \frac{\pi(1 - \varepsilon)\sqrt{1 - \varepsilon}}{4(1 + \varepsilon)\sqrt{1 + \varepsilon}} \right) = \frac{\pi p^2}{(1 - \varepsilon^2)^{3/2}}.$$

2422.1. $r = 3 + 2 \cos \varphi$.

При изменении φ от нуля до 2π точка кривой обходит область в положительном направлении (рис. 6.48):

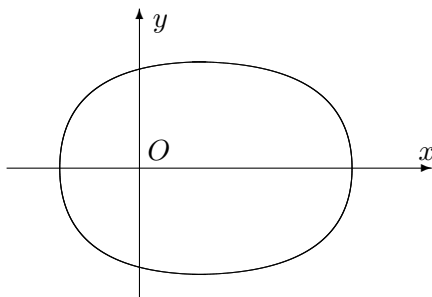


Рис. 6.48

Согласно формуле (6.11) площадь фигуры

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (3 + 2 \cos \varphi)^2 d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (9 + 12 \cos \varphi + 4 \cos^2 \varphi) d\varphi = \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (9 + 12 \cos \varphi + 2(1 + \cos 2\varphi)) d\varphi = \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (11 + 12 \cos \varphi + 2 \cos 2\varphi) d\varphi = \\
 &= \frac{1}{2} (11\varphi + 12 \sin \varphi + \sin 2\varphi) \Big|_0^{2\pi} = 11\pi.
 \end{aligned}$$

2422.2. $r = \frac{1}{\varphi}$, $r = \frac{1}{\sin \varphi}$ ($0 < \varphi \leq \frac{\pi}{2}$) (рис. 6.49).

Площадь фигуры вычисляем по формуле (6.10):

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{\sin^2 \varphi} - \frac{1}{\varphi^2} \right) d\varphi = \frac{1}{2} \left(-\operatorname{ctg} \varphi + \frac{1}{\varphi} \right) \Big|_0^{\pi/2} = \\
 &= \frac{1}{\pi} - \lim_{\varphi \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\varphi} - \operatorname{ctg} \varphi \right).
 \end{aligned}$$

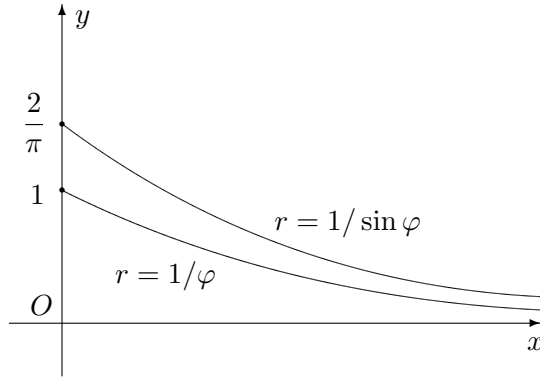


Рис. 6.49

Предел находим, используя (дважды) правило Лопиталя,

$$\begin{aligned} \lim_{\varphi \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\varphi} - \operatorname{ctg} \varphi \right) &= \lim_{\varphi \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\varphi} - \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} \right) = \lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{\sin \varphi - \varphi \cos \varphi}{\varphi \sin \varphi} = \\ &= \lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{\varphi \sin \varphi}{\sin \varphi + \varphi \cos \varphi} = \lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{\sin \varphi + \varphi \cos \varphi}{2 \cos \varphi - \varphi \sin \varphi} = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, искомая площадь

$$S = \frac{1}{\pi}.$$

2423. $r = a \cos \varphi$, $r = a(\cos \varphi + \sin \varphi)$ $\left(M \left(\frac{a}{2}; 0 \right) \in S \right)$.

Уравнение $r = a \cos \varphi$ описывает окружность с центром $(a/2; 0)$ радиуса $a/2$, а уравнение

$$r = a(\cos \varphi + \sin \varphi) = a\sqrt{2} \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right)$$

задает окружность радиуса $a\sqrt{2}$ с центром $(a\sqrt{2}/2; a\sqrt{2}/2)$ (рис. 6.50).

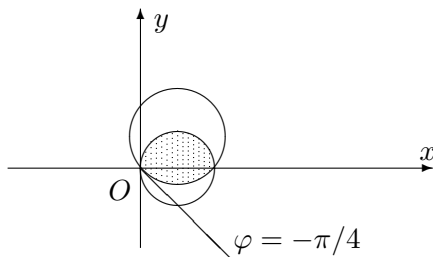


Рис. 6.50

Касательная к окружности $r = a(\cos \varphi + \sin \varphi)$ в начале координат наклонена под углом $\varphi = -\pi/4$ к оси абсцисс, а окружность $r = a \cos \varphi$ в начале координат касается оси ординат. Следовательно, величина полярного угла (в пределах рассматриваемой фигуры) изменяется от $-\pi/4$ до $\pi/2$ и искомая площадь (согласно формуле (6.11)):

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{1}{2} \int_{-\pi/4}^{\pi/2} r^2(\varphi) d\varphi = \frac{1}{2} \int_{-\pi/4}^0 a^2 (\cos \varphi + \sin \varphi)^2 d\varphi + \\
 &+ \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} a^2 \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{a^2}{2} \int_{-\pi/4}^0 (1 + \sin 2\varphi) d\varphi + \frac{a^2}{4} \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2\varphi) d\varphi = \\
 &= \frac{a^2}{2} \left(\varphi - \frac{1}{2} \cos 2\varphi \right) \Big|_{-\pi/4}^0 + \frac{a^2}{4} \left(\varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{(\pi - 1)a^2}{4}.
 \end{aligned}$$

2424. Найти площадь сектора, ограниченного кривой

$$\varphi = r \operatorname{arctg} r$$

и двумя лучами $\varphi = 0$ и $\varphi = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$.

Функция $\varphi(r) = r \operatorname{arctg} r$ строго возрастает при неотрицательных значениях аргумента и поэтому имеет обратную $r = r(\varphi)$, которая также строго возрастает. Нетрудно подобрать значения переменной r , отвечающие граничным значениям φ : значению $\varphi = 0$ отвечает $r = 0$, а значению $\varphi = \pi/\sqrt{3}$ отвечает значение $r = \sqrt{3}$. Следовательно, функцию $r(\varphi)$ нужно рассматривать на отрезке $[0; \sqrt{3}]$ (рис. 6.51).

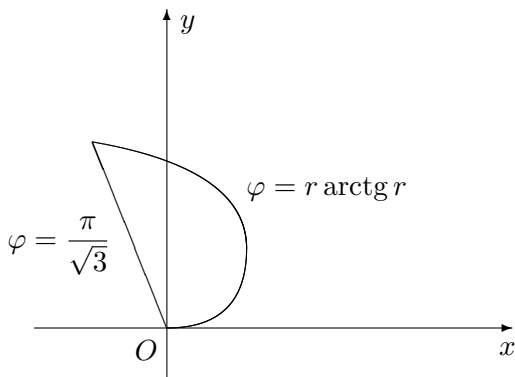


Рис. 6.51

Согласно формуле (6.11) площадь фигуры

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/\sqrt{3}} r^2(\varphi) d\varphi.$$

Делая в интеграле замену переменной φ на r , получаем

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{3}} r^2 \varphi'(r) dr = \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{3}} r^2 \left(\operatorname{arctg} r + \frac{r}{1+r^2} \right) dr = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{3}} r^2 \operatorname{arctg} r dr + \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{3}} \frac{r^3 dr}{1+r^2}. \end{aligned}$$

С помощью интегрирования по частям получаем

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{3}} r^2 \operatorname{arctg} r \, dr &= \frac{1}{3} \int_0^{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} r \, d(r^3) = \frac{1}{3} (r^3 \operatorname{arctg} r) \Big|_0^{\sqrt{3}} - \\ &- \frac{1}{3} \int_0^{\sqrt{3}} \frac{r^3 dr}{1+r^2} = \frac{\pi\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{3} \int_0^{\sqrt{3}} \frac{r^3 dr}{1+r^2}.\end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$S = \frac{\pi\sqrt{3}}{6} + \frac{1}{3} \int_0^{\sqrt{3}} \frac{r^3 dr}{1+r^2}.$$

Оставшийся интеграл вычисляется заменой $t = r^2$:

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{3}} \frac{r^3 dr}{1+r^2} &= \frac{1}{2} \int_0^3 \frac{u \, du}{1+u} = \frac{1}{2} \int_0^3 \left(1 - \frac{1}{1+u}\right) du = \\ &= \frac{1}{2} (u - \ln|1+u|) \Big|_0^3 = \frac{1}{2} (3 - \ln 4) = \frac{3 - 2 \ln 2}{2}.\end{aligned}$$

Окончательно получаем

$$S = \frac{\pi\sqrt{3}}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3 - 2 \ln 2}{2} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} \ln 2 + \frac{\pi}{\sqrt{3}}\right).$$

2424.1. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой

$$r^2 + \varphi^2 = 1.$$

Из уравнения находим явную формулу $r = \sqrt{1 - \varphi^2}$. Величина φ меняется от -1 до 1 (рис. 6.52)

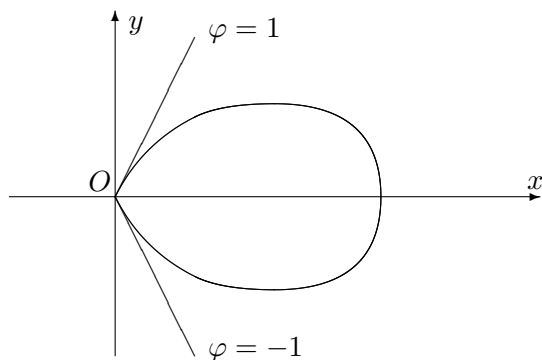


Рис. 6.52

По формуле (6.11):

$$S = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 r^2(\varphi) d\varphi = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (1 - \varphi^2) d\varphi = \frac{1}{2} \left(\varphi - \frac{1}{3} \varphi^3 \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{2}{3}.$$

2424.2. Найти площадь фигуры, ограниченной лепестком кривой

$$\varphi = \sin(\pi r) \quad (0 \leq r \leq 1).$$

На участке $r \in [0; 1/2]$ функция $\varphi(r) = \sin(\pi r)$ имеет обратную

$$r_1(\varphi) = \frac{1}{\pi} \arcsin \varphi,$$

определенную на отрезке $\varphi \in [0; 1]$. Кривая касается в начале координат оси абсцисс, а в точке с полярными координатами $\varphi = 1$, $r = 1/2$ луча $\varphi = 1$. На участке $r \in [1/2; 1]$ функция $\varphi(r) = \sin(\pi r)$ строго убывает и обратная к ней, определенная на отрезке $\varphi \in [0; 1]$, дается формулой

$$r_2(\varphi) = 1 - \frac{\varphi}{\pi}.$$

Кривая пересекает ось абсцисс в точке $x = 1$, $y = 0$ так, что угловым коэффициентом касательной в этой точке равен $-\pi$ (рис. 6.53).

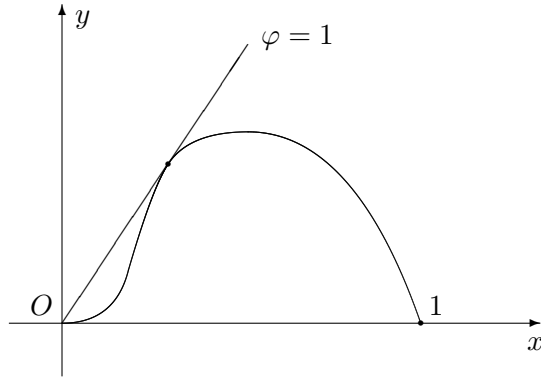


Рис. 6.53

По формуле (6.10) площадь фигуры

$$S = \frac{1}{2} \int_0^1 (r_2^2(\varphi) - r_1^2(\varphi)) d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^1 r_2^2(\varphi) d\varphi - \frac{1}{2} \int_0^1 r_1^2(\varphi) d\varphi.$$

Делая в каждом из двух последних интегралов замену переменной r на переменную φ , получаем

$$S = \frac{1}{2} \int_1^{1/2} r^2 \varphi'(r) dr - \frac{1}{2} \int_0^{1/2} r^2 \varphi'(r) dr = -\frac{1}{2} \int_0^1 r^2 \varphi'(r) dr.$$

Из явной формулы $\varphi(r) = \sin(\pi r)$ получаем, что

$$S = -\frac{\pi}{2} \int_0^1 r^2 \cos(\pi r) dr.$$

Неопределенный интеграл находим с помощью двукратного интегрирования по частям:

$$\int r^2 \cos \pi r dr = \frac{1}{\pi} \int r^2 d(\sin \pi r) = \frac{r^2 \sin \pi r}{\pi} - \frac{2}{\pi} \int r \sin \pi r dr =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{r^2 \sin \pi r}{\pi} + \frac{2}{\pi^2} \int r d(\cos \pi r) = \frac{r^2 \sin \pi r}{\pi} + \frac{2r \cos \pi r}{\pi^2} - \\
&- \frac{2}{\pi^2} \int \cos \pi r dr = \frac{r^2 \sin \pi r}{\pi} + \frac{2r \cos \pi r}{\pi^2} - \frac{2 \sin \pi r}{\pi^3} + C.
\end{aligned}$$

По формуле Ньютона – Лейбница

$$S = -\frac{\pi}{2} \left(\frac{r^2 \sin \pi r}{\pi} + \frac{2r \cos \pi r}{\pi^2} - \frac{2 \sin \pi r}{\pi^3} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{\pi}.$$

2424.3. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$\varphi = 4r - r^3, \quad \varphi = 0.$$

График функции $\varphi(r) = 4r - r^3$ представлен на рис. 6.54. Рассматриваемой фигуре отвечает участок изменения параметра r от 0 до 2. На этом участке функция $\varphi(r)$ имеет ровно один максимум:

$$r = 2\sqrt{3}/3, \quad \varphi = 16\sqrt{3}/9,$$

обращаясь в нуль на концах промежутка. На отрезке $[0; 2\sqrt{3}/3]$ эта функция строго возрастает и, следовательно, имеет обратную функцию. Эту обратную функцию мы обозначим $r_1(\varphi)$. На отрезке $[2\sqrt{3}/3; 2]$ функция $\varphi(r)$ строго убывает и также имеет обратную, которую мы обозначим $r_2(\varphi)$.

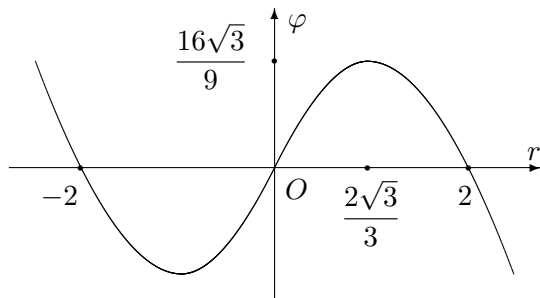


Рис. 6.54

Кривая касается оси абсцисс в начале координат и луча $\varphi = 16\sqrt{3}/9$ в точке с полярными координатами $\varphi = 16\sqrt{3}/9$, $r = 2\sqrt{3}/3$. Кривая пересекает ось абсцисс в точке $x = 2$, $y = 0$ так, что угловой коэффициент касательной в этой точке равен -16 .

График кривой $\varphi = 4r - r^3$ представлен на рис. 6.55 (на этом графике также изображен луч $\varphi = 16\sqrt{3}/9$).

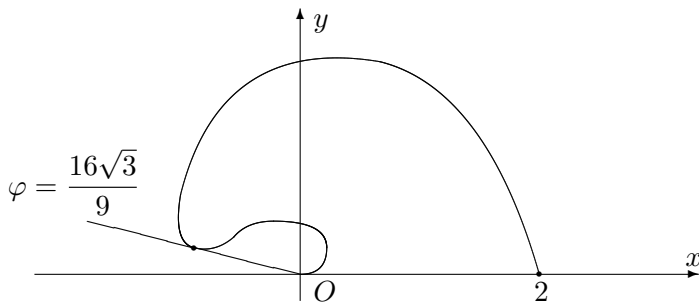


Рис. 6.55

Площадь фигуры согласно формуле (6.10):

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{1}{2} \int_0^{16\sqrt{3}/9} (r_2^2(\varphi) - r_1^2(\varphi)) d\varphi = \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{16\sqrt{3}/9} r_2^2(\varphi) d\varphi - \frac{1}{2} \int_0^{16\sqrt{3}/9} r_1^2(\varphi) d\varphi.
 \end{aligned}$$

Переходя в каждом интеграле к переменной r , получаем

$$S = \frac{1}{2} \int_2^{2\sqrt{3}/3} r^2 \varphi'(r) dr - \frac{1}{2} \int_0^{2\sqrt{3}/3} r^2 \varphi'(r) dr = -\frac{1}{2} \int_0^2 r^2 \varphi'(r) dr.$$

Учитывая явную формулу для функции $\varphi(r)$, имеем

$$S = \frac{1}{2} \int_0^2 (3r^4 - 4r^2) dr = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{5} r^5 - \frac{4}{3} r^3 \right) \Big|_0^2 = \frac{64}{15}.$$

2424.4. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$\varphi = r - \sin r, \quad \varphi = \pi.$$

Функция $\varphi(r) = r - \sin r$ строго возрастает на всей числовой прямой ($\varphi'(r) = 1 - \cos r \geq 0$, причем $\varphi'(r) = 0$ только в изолированных точках). Отсюда следует, что на отрезке $r \in [0; \pi]$ эта функция имеет обратную, которую мы обозначим $r(\varphi)$. Областью определения функции $r(\varphi)$ также служит отрезок $[0; \pi]$. График рассматриваемой кривой касается в начале координат оси абсцисс и пересекает отрицательную часть этой оси в точке $x = -\pi$ так, что касательная в этой точке имеет угловой коэффициент, равный 2π (рис. 6.56).

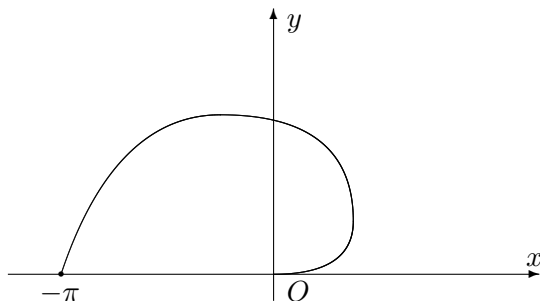


Рис. 6.56

По формуле (6.11) площадь фигуры

$$S = \frac{1}{2} \int_0^\pi r^2(\varphi) d\varphi.$$

Переходя в интеграле к переменной r вместо φ , получаем

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} r^2 \varphi'(r) dr = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} r^2 (1 - \cos r) dr = \frac{1}{2} \left(\frac{r^3}{3} \right) \Big|_0^{\pi} -$$

$$- \frac{1}{2} \int_0^{\pi} r^2 \cos r dr = \frac{\pi^3}{6} - \frac{1}{2} \int_0^{\pi} r^2 \cos r dr.$$

Оставшийся интеграл вычисляем с помощью двукратного интегрирования по частям. Неопределенный интеграл

$$\int r^2 \cos r dr = \int r^2 d(\sin r) = r^2 \sin r - 2 \int r \sin r dr =$$

$$= r^2 \sin r + 2 \int r d(\cos r) dr = r^2 \sin r + 2r \cos r - 2 \int \cos r dr =$$

$$= r^2 \sin r + 2r \cos r - 2 \sin r + C.$$

По формуле Ньютона – Лейбница

$$\int_0^{\pi} r^2 \cos r dr = (r^2 \sin r + 2r \cos r - 2 \sin r) \Big|_0^{\pi} = -2\pi.$$

Следовательно,

$$S = \frac{\pi^3}{6} + \pi = \pi \left(1 + \frac{\pi^2}{6} \right).$$

2425. Найти площадь, ограниченную замкнутой кривой

$$r = \frac{2at}{1+t^2}, \quad \varphi = \frac{\pi t}{1+t}.$$

Условие неотрицательности радиуса r определяет промежуток изменения t от нуля до бесконечности. Функция $r(t)$ при

изменении t от нуля до 1 возрастает от нуля до a , а на промежутке $[1; +\infty)$ убывает от a до нуля, $t = \sqrt{3}$ – точка перегиба (рис. 6.57).

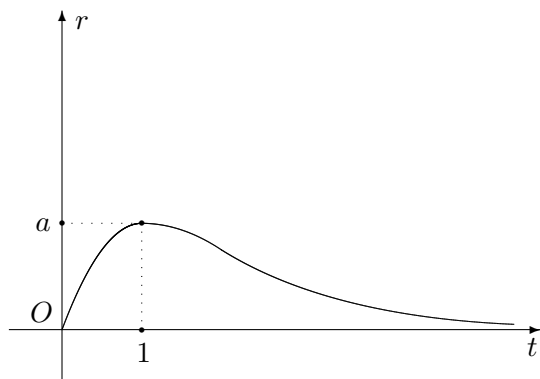


Рис. 6.57

Так как

$$\varphi = \pi - \frac{\pi}{t+1},$$

то график функции $\varphi(t)$ представляет ветвь гиперболы. На промежутке $t \in [0; \infty)$ функция строго возрастает. Прямая $\varphi = \pi$ является горизонтальной асимптотой. При $t = 1$ значение φ равно $\pi/2$ (рис. 6.58).

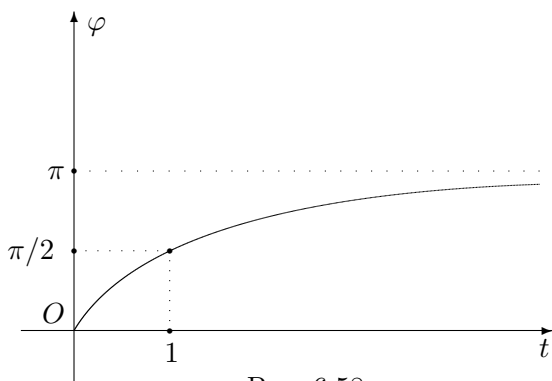


Рис. 6.58

Используя графики функций $r(t)$ и $\varphi(t)$, нетрудно построить график параметрической кривой. Так как функция $\varphi(t)$ на рассматриваемом промежутке строго возрастает, то у нее есть обратная $t(\varphi)$, которая также строго возрастает на соответствующем промежутке $[0; \pi)$. Следовательно, график параметрической кривой мы можем рассматривать как график сложной функции $r(t(\varphi))$ при φ , меняющемся от 0 до π . На промежутке $\varphi \in [0; \pi/2]$ функция $r(t(\varphi))$ возрастает от нуля до a , а на промежутке от $\pi/2$ до π функция $r(t(\varphi))$ убывает от a до нуля. Полезно также отметить следующие равенства:

$$r\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{2a\left(\frac{1}{t}\right)}{1 + \left(\frac{1}{t}\right)^2} = \frac{2at}{1 + t^2} = r(t),$$

$$\begin{aligned} \varphi(t) + \varphi\left(\frac{1}{t}\right) &= \frac{\pi t}{1 + t} + \frac{\pi\left(\frac{1}{t}\right)}{1 + \left(\frac{1}{t}\right)} = \\ &= \frac{\pi t}{1 + t} + \frac{\pi}{1 + t} = \frac{\pi(t + 1)}{1 + t} = \pi. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что точки, отвечающие значениям параметра t и $1/t$, лежат на лучах, симметричных относительно оси ординат и равноудалены от начала координат, т. е. кривая симметрична относительно оси ординат (рис. 6.59).

По формуле (6.11) площадь фигуры

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} r^2(t(\varphi)) d\varphi.$$

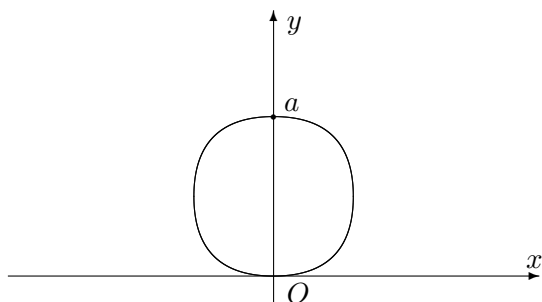


Рис. 6.59

Переходя к переменной t , получаем

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} r^2(t) \varphi'(t) dt = 2\pi a^2 \int_0^{+\infty} \frac{t^2 dt}{(1+t^2)^2(1+t)^2}.$$

Неопределенный интеграл вычисляем с помощью метода Остроградского. Выписываем разложение

$$\int \frac{t^2 dt}{(1+t^2)^2(1+t)^2} = \frac{At^2 + Bt + C}{(1+t^2)(1+t)} + \int \frac{Dt^2 + Et + F}{(1+t^2)(1+t)} dt.$$

После дифференцирования, приведения к общему знаменателю и упрощения получаем тождество

$$t^2 = Dt^5 + (-A + D + E)t^4 + (-2B + D + E + F)t^3 + \\ + (A - B - 3C + D + E + F)t^2 + (2A - 2C + E + F)t + (B - C + F).$$

Решая систему

$$\begin{cases} D = 0, \\ -A + D + E = 0, \\ -2B + D + E + F = 0, \\ A - B - 3C + D + E + F = 1, \\ 2A - 2C + E + F = 0, \\ B - C + F = 0, \end{cases}$$

находим:

$$A = -\frac{1}{4}, \quad B = -\frac{1}{4}, \quad C = -\frac{1}{2}, \quad D = 0, \quad E = -\frac{1}{4}, \quad F = -\frac{1}{4}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \int \frac{t^2 dt}{(1+t^2)^2(1+t)^2} &= -\frac{t^2+t+2}{4(1+t^2)(1+t)} - \frac{1}{4} \int \frac{dt}{1+t^2} = \\ &= -\frac{t^2+t+2}{4(1+t^2)(1+t)} - \frac{1}{4} \operatorname{arctg} t + \text{const} \end{aligned}$$

и по формуле Ньютона – Лейбница

$$\begin{aligned} S &= 2\pi a^2 \left(-\frac{t^2+t+2}{4(1+t^2)(1+t)} - \frac{1}{4} \operatorname{arctg} t \right) \Big|_0^{+\infty} = \\ &= 2\pi a^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{8} \right) = \pi \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) a^2. \end{aligned}$$

Перейдя к полярным координатам, найти площади фигур, ограниченных кривыми:

2426. $x^3 + y^3 = 3axy$ (лист Декарта).

Подставляя в уравнение кривой $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, находим ее уравнение в полярных координатах:

$$r = \frac{3a \cos \varphi \sin \varphi}{\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi}.$$

Кривая делает петлю в первой координатной четверти, касаясь обеих координатных осей. Прямая $x + y = -a$ является асимптотой листа Декарта, а биссектриса первой четверти – осью симметрии (рис. 6.60).

Согласно формуле (6.11) площадь петли кривой

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} r^2(\varphi) d\varphi = \frac{9a^2}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 \varphi \sin^2 \varphi}{(\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi)^2} d\varphi.$$

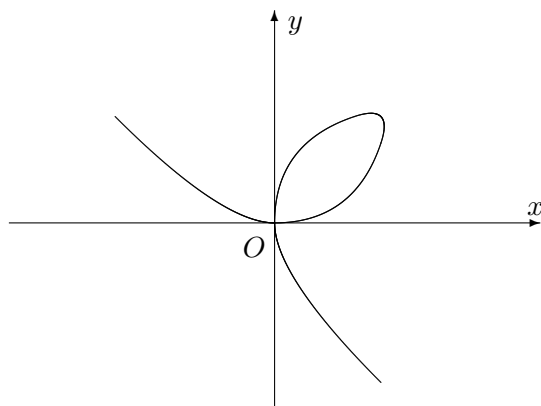


Рис. 6.60

Согласно формулам тригонометрии

$$\cos^2 \varphi \sin^2 \varphi = \frac{1}{4} \sin^2 2\varphi,$$

$$\begin{aligned} (\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi)^2 &= (\cos \varphi + \sin \varphi)^2 (\cos^2 \varphi - \cos \varphi \sin \varphi + \sin^2 \varphi)^2 = \\ &= (1 + 2 \cos \varphi \sin \varphi) (1 - \cos \varphi \sin \varphi)^2 = (1 + \sin 2\varphi) (1 - \frac{1}{2} \sin 2\varphi)^2. \end{aligned}$$

Используя эти формулы и делая в интеграле замену $t = 2\varphi$, получаем:

$$\begin{aligned} S &= \frac{9a^2}{8} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 2\varphi d\varphi}{(1 + \sin 2\varphi)(1 - \frac{1}{2} \sin 2\varphi)^2} = \\ &= \frac{9a^2}{16} \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 t dt}{(1 + \sin t)(1 - \frac{1}{2} \sin t)^2}. \end{aligned}$$

Последний интеграл вычисляем с помощью универсальной подстановки:

$$\operatorname{tg} \frac{t}{2} = u, \quad \sin t = \frac{2u}{1 + u^2}, \quad dt = \frac{2du}{1 + u^2}.$$

После замены получаем

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{9a^2}{2} \int_0^{+\infty} \frac{u^2 du}{(u+1)^2(u^2-u+1)^2} = \frac{9a^2}{2} \int_0^{+\infty} \frac{u^2 du}{(u^3+1)^2} = \\
 &= -\frac{3a^2}{2} \left(\frac{1}{u^3+1} \right) \Big|_0^{+\infty} = \frac{3a^2}{2}.
 \end{aligned}$$

2427. $x^4 + y^4 = a^2(x^2 + y^2)$.

Подставляя в уравнение кривой $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, находим ее уравнение в полярных координатах:

$$r = \frac{a}{\sqrt{\cos^4 \varphi + \sin^4 \varphi}}.$$

Внешний вид кривой показан на рис. 6.61.

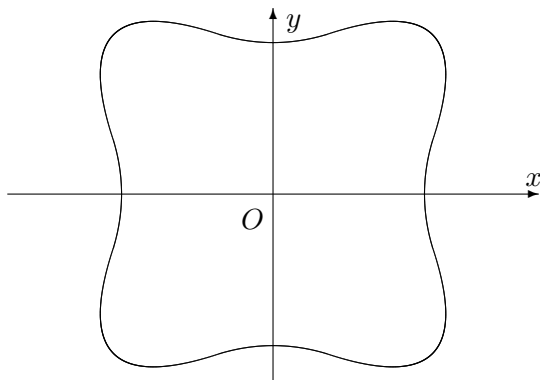


Рис. 6.61

Из уравнения кривой непосредственно следует, что оси координат и биссектрисы координатных четвертей являются осями симметрии. Отсюда следует, что площадь всей фигуры в восемь раз больше площади ее части, отвечающей изменению полярного

угла φ от нуля до $\pi/4$. Следовательно, по формуле (6.11):

$$S = 8 \left(\frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} r^2(\varphi) d\varphi \right) = 4a^2 \int_0^{\pi/4} \frac{d\varphi}{\cos^4 \varphi + \sin^4 \varphi}.$$

Так как

$$\cos^4 \varphi + \sin^4 \varphi = (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)^2 - 2\cos^2 \varphi \sin^2 \varphi = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\varphi,$$

то

$$S = 4a^2 \int_0^{\pi/4} \frac{d\varphi}{1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\varphi}.$$

С помощью подстановки:

$$\operatorname{tg} 2\varphi = t, \quad \sin^2 2\varphi = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad d\varphi = \frac{dt}{2(1+t^2)}$$

получаем

$$S = 4a^2 \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + 2} = 4a^2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{2}} \right) \Big|_0^{+\infty} = \pi a^2 \sqrt{2}.$$

2428. $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2 xy$ (лемниската).

Подставляя в уравнение кривой $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, находим уравнение лемнискаты в полярных координатах:

$$r = a \sqrt{\sin 2\varphi}.$$

Все точки кривой располагаются в первой и третьей координатных четвертях. Центр координат является центром симметрии, а биссектриса первой и третьей четвертей – осью симметрии кривой. График кривой представлен на рис. 6.62.

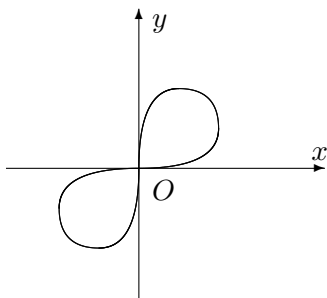


Рис. 6.62

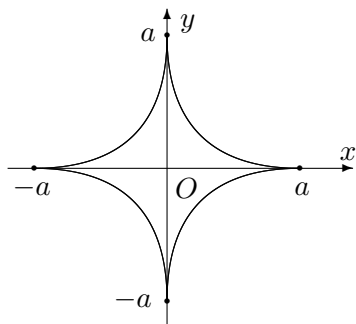


Рис. 6.63

Так как площади частей фигуры, находящихся в первой и третьей координатных четвертях, равны, то площадь всей фигуры в два раза больше площади той части, которая находится в первой координатной четверти. Следовательно, по формуле (6.11):

$$S = 2 \left(\frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} r^2(\varphi) d\varphi \right) = a^2 \int_0^{\pi/2} \sin 2\varphi d\varphi = -\frac{a^2}{2} \cos 2\varphi \Big|_0^{\pi/2} = a^2.$$

Приведя уравнения к параметрическому виду, найти площади фигур, ограниченных кривыми:

2429. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ (астроида) (рис. 6.63).

Оси координат являются осями симметрии кривой. Соответственно, площадь кривой в четыре раза больше площади ее части, лежащей в первой координатной четверти. Полагая $y = tx$, получаем следующее представление части кривой, лежащей в первой четверти:

$$\begin{cases} x = \frac{a}{(1 + t^{2/3})^{3/2}}, \\ y = \frac{at}{(1 + t^{2/3})^{3/2}}. \end{cases}$$

Величина t меняется от нуля до $+\infty$. Значение $t = 0$ отвечает точке $x = a$, $y = 0$. При $t \rightarrow +\infty$ точка кривой стремится к точке $x = 0$, $y = a$. Часть астроида, лежащая в первой четверти, является графиком функции

$$y(x) = \left(a^{2/3} - x^{2/3}\right)^{3/2},$$

и площадь рассматриваемой части фигуры равна интегралу от функции $y(x)$ в пределах от нуля до a . Таким образом, площадь всей фигуры

$$S = 4 \int_0^a y(x) dx.$$

Переходя к переменной t , получаем после замены переменной

$$S = 4 \int_{+\infty}^0 y(t) x'(t) dt = 4a^2 \int_0^{+\infty} \frac{t^{2/3} dt}{(1 + t^{2/3})^4}.$$

Полученный интеграл рационализируется подстановкой $t = u^3$, которая приводит к следующему выражению:

$$S = 12a^2 \int_0^{+\infty} \frac{u^4 du}{(1 + u^2)^4}.$$

Перейдем к вычислению оставшегося определенного интеграла. Рассмотрим следующий вспомогательный интеграл:

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{du}{(1 + u^2)^n}.$$

Для вычисления этого интеграла воспользуемся следующим известным рекуррентным соотношением для неопределенного интеграла:

$$\int \frac{du}{(1 + u^2)^n} = \frac{u}{2(n-1)(1 + u^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)} \int \frac{du}{(1 + u^2)^{n-1}},$$

из которого получаем аналогичное рекуррентное соотношение для определенного интеграла

$$I_n = \frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1}.$$

Так как

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^2} = \arctg t|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2},$$

то, используя рекуррентное соотношение для I_n , последовательно находим:

$$I_2 = \frac{\pi}{4}, \quad I_3 = \frac{3\pi}{16}, \quad I_4 = \frac{5\pi}{32}.$$

Теперь интеграл, входящий в выражение для площади, вычисляется следующим образом. Из тождества $u^4 = (1+u^2)^2 - 2(1+u^2) + 1$ следует, что

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{u^4 du}{(1+u^2)^4} &= \int_0^{+\infty} \frac{(1+u^2)^2 - 2(1+u^2) + 1}{(1+u^2)^4} du = \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{du}{(1+u^2)^2} - 2 \int_0^{+\infty} \frac{du}{(1+u^2)^3} + \int_0^{+\infty} \frac{du}{(1+u^2)^4} = \\ &= I_2 - 2I_3 + I_4 = \frac{\pi}{4} - 2 \cdot \frac{3\pi}{16} + \frac{5\pi}{32} = \frac{\pi}{32}. \end{aligned}$$

Подставляя найденное значение интеграла в выражение для площади, окончательно получаем

$$S = 12a^2 \cdot \frac{\pi}{32} = \frac{3\pi a^2}{8}.$$

2430. $x^4 + y^4 = ax^2y.$

Полагая $y = tx$, получаем следующее представление кривой:

$$\begin{cases} x = \frac{at}{t^4 + 1}, \\ y = \frac{at^2}{t^4 + 1}. \end{cases}$$

График функции $x(t)$ представлен на рис. 6.64. Эта функция нечетна и на положительной полуоси имеет ровно один максимум при $t = 1/\sqrt[4]{3}$, убывая к нулю на бесконечности.

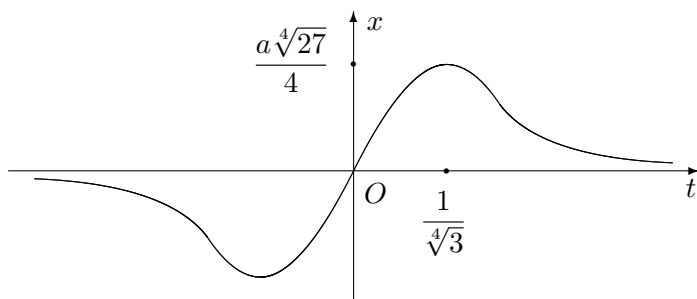


Рис. 6.64

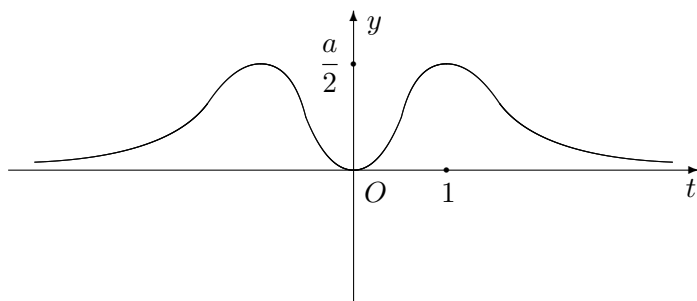


Рис. 6.65

График функции $y(t)$ представлен на рис. 6.65. Эта функция четна и на положительной полуоси имеет ровно один максимум $t = 1$, $y = a/2$, убывая к нулю на бесконечности.

Используя графики функций $x(t)$ и $y(t)$, нетрудно построить график параметрической кривой. Он представлен на рис. 6.66.

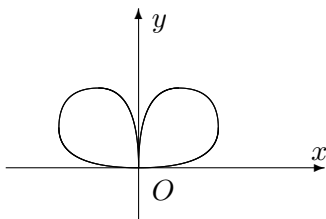


Рис. 6.66

Ось ординат является осью симметрии, и площадь фигуры в два раза больше площади той ее части, которая лежит в первой координатной четверти. При изменении параметра t от нуля до бесконечности граница этой части обходится в положительном направлении. Из формулы (6.9) следует, что площадь всей фигуры

$$S = 2 \left(\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} (x(t)y'(t) - y(t)x'(t)) dt \right) = a^2 \int_0^{+\infty} \frac{t^2 dt}{(t^4 + 1)^2}.$$

Полученный интеграл можно вычислить с помощью метода Остроградского. Учитывая четность подынтегральной функции, находим разложение

$$\int \frac{t^2 dt}{(t^4 + 1)^2} = \frac{At^3 + Bt}{t^4 + 1} + \int \frac{Ct^2 + D}{t^4 + 1} dt.$$

Дифференцируя, освобождаясь от знаменателя и приводя подобные члены, получаем тождество

$$t^2 = (C - A)t^6 + (D - 3B)t^4 + (3A + C)t^2 + (B + D).$$

Решая систему

$$\begin{cases} C - A = 0, \\ D - 3B = 0, \\ 3A + C = 1, \\ B + D = 0, \end{cases}$$

находим:

$$A = \frac{1}{4}, \quad B = 0, \quad C = \frac{1}{4}, \quad D = 0.$$

Таким образом,

$$\int \frac{t^2 dt}{(t^4 + 1)^2} = \frac{t^3}{4(t^4 + 1)} + \frac{1}{4} \int \frac{t^2 dt}{t^4 + 1}$$

и

$$S = a^2 \left(\frac{t^3}{4(t^4 + 1)} \Big|_0^{+\infty} + \frac{1}{4} \int_0^{+\infty} \frac{t^2 dt}{t^4 + 1} \right) = \frac{a^2}{4} \int_0^{+\infty} \frac{t^2 dt}{t^4 + 1}.$$

Вычислить оставшийся интеграл можно с помощью следующего искусственного приема. Сделаем замену $u = 1/t$ и в полученном интеграле переменную интегрирования вместо u снова обозначим через t :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^2 dt}{t^4 + 1} = \int_0^{+\infty} \frac{du}{u^4 + 1} = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^4 + 1}.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{t^2 dt}{t^4 + 1} &= \frac{1}{2} \left(\int_0^{+\infty} \frac{t^2 dt}{t^4 + 1} + \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^4 + 1} \right) = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{t^2 + 1}{t^4 + 1} dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{1 + \frac{1}{t^2}}{t^2 + \frac{1}{t^2}} dt = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{d\left(t - \frac{1}{t}\right)}{\left(t - \frac{1}{t}\right)^2 + 2} \end{aligned}$$

и после замены $u = t - \frac{1}{t}$ получаем

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^2 dt}{t^4 + 1} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{u^2 + 2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{u}{\sqrt{2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

Следовательно,

$$S = \frac{\pi a^2}{8\sqrt{2}}.$$

Глава 7

Длина дуги кривой

7.1. Длина дуги в прямоугольных координатах

Длина дуги кривой, являющейся графиком функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$ равна:

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx. \quad (7.1)$$

Если кривая является графиком функции $x = g(y)$ на отрезке $[c; d]$, то аналогично

$$s = \int_c^d \sqrt{1 + g'^2(y)} dy. \quad (7.2)$$

Найти длины дуг следующих кривых:

2431. $y = x^{3/2}$ ($0 \leq x \leq 4$).

Согласно формуле (7.1)

$$s = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} dx.$$

Делая замену $u = 1 + \frac{9}{4}x$, получаем

$$s = \frac{4}{9} \int_1^{10} u^{1/2} du = \frac{8}{27} u^{3/2} \Big|_1^{10} = \frac{8}{27} (10\sqrt{10} - 1).$$

2432. $y^2 = 2px$ ($0 \leq x \leq x_0$).

Выберем в качестве независимой переменной y . Тогда кривая является графиком функции

$$x = \frac{y^2}{2p}, \quad -\sqrt{2px_0} \leq x \leq \sqrt{2px_0}$$

и по формуле (7.2):

$$s = \int_{-\sqrt{2px_0}}^{\sqrt{2px_0}} \sqrt{1 + \frac{y^2}{p^2}} dy.$$

Учитывая четность подынтегральной функции и переходя к переменной $t = y/p$, получаем

$$\begin{aligned} s &= 2 \int_0^{\sqrt{2px_0}} \sqrt{1 + \frac{y^2}{p^2}} dy = 2p \int_0^{\sqrt{\frac{2x_0}{p}}} \sqrt{1 + t^2} dt = \\ &= 2p \left(\frac{t}{2} \sqrt{1 + t^2} + \frac{1}{2} \ln(t + \sqrt{1 + t^2}) \right) \Big|_0^{\sqrt{\frac{2x_0}{p}}} = \\ &= 2\sqrt{x_0 \left(x_0 + \frac{p}{2} \right)} + p \ln \frac{\sqrt{x_0} + \sqrt{x_0 + \frac{p}{2}}}{\sqrt{\frac{p}{2}}}. \end{aligned}$$

2433. $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ от точки $A(0; a)$ до точки $B(b; h)$.

Так как точка $B(b; h)$ лежит на графике кривой, то $h = a \operatorname{ch} \frac{b}{a}$.
Согласно формуле (7.1):

$$\begin{aligned} s &= \int_0^b \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 \frac{x}{a}} dx = \int_0^b \operatorname{ch} \frac{x}{a} dx = a \operatorname{sh} \frac{x}{a} \Big|_0^b = a \operatorname{sh} \frac{b}{a} = \\ &= a \sqrt{\operatorname{ch}^2 \frac{b}{a} - 1} = a \sqrt{\left(\frac{h}{a}\right)^2 - 1} = \sqrt{h^2 - a^2}. \end{aligned}$$

2434. $y = e^x$ ($0 \leq x \leq x_0$).

Согласно формуле (7.1) длина дуги кривой

$$s = \int_0^{x_0} \sqrt{1 + e^{2x}} dx.$$

Выполняя последовательно замены $e^{2x} = t$ и $\sqrt{1+t} = u$, получаем:

$$\begin{aligned} s &= \frac{1}{2} \int_1^{e^{2x_0}} \frac{\sqrt{1+t}}{t} dt = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^{2x_0}}} \frac{u^2 du}{u^2 - 1} = \\ &= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^{2x_0}}} \left(1 - \frac{1}{1-u^2}\right) du = \left(u - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+u}{1-u} \right| \right) \Big|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^{2x_0}}} = \\ &= \left(\sqrt{1+e^{2x_0}} - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\sqrt{1+e^{2x_0}}}{1-\sqrt{1+e^{2x_0}}} \right| \right) - \left(\sqrt{2} - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} \right| \right). \end{aligned}$$

Преобразуем полученные выражения:

$$\ln \left| \frac{1+\sqrt{1+e^{2x_0}}}{1-\sqrt{1+e^{2x_0}}} \right| = \ln \frac{\left(1+\sqrt{1+e^{2x_0}}\right)^2}{\left(\sqrt{1+e^{2x_0}}\right)^2 - 1^2} =$$

$$= 2 \left(\ln \left(1 + \sqrt{1 + e^{2x_0}} \right) - x_0 \right),$$

$$\ln \left| \frac{1 + \sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}} \right| = \ln \frac{(1 + \sqrt{2})^2}{(\sqrt{2})^2 - 1^2} = 2 \ln(1 + \sqrt{2}).$$

Отсюда следует, что

$$s = \sqrt{1 + e^{2x_0}} + x_0 - \sqrt{2} - \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1 + e^{2x_0}}}{1 + \sqrt{2}} \right).$$

2435. $x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2} \ln y$ ($1 \leq y \leq e$).

По формуле (7.2):

$$\begin{aligned} s &= \int_1^e \sqrt{1 + \left(\frac{y^2 - 1}{2y} \right)^2} dy = \frac{1}{2} \int_1^e \frac{y^2 + 1}{y} dy = \\ &= \frac{1}{2} \int_1^e \left(y + \frac{1}{y} \right) dy = \frac{1}{2} \left(\frac{y^2}{2} + \ln |y| \right) \Big|_1^e = \frac{e^2 + 1}{4}. \end{aligned}$$

2436. $y = a \ln \frac{a^2}{a^2 - x^2}$ ($0 \leq x \leq b < a$).

Согласно формуле (7.1):

$$\begin{aligned} s &= \int_0^b \sqrt{1 + \left(\frac{2ax}{a^2 - x^2} \right)^2} dx = \int_0^b \frac{a^2 + x^2}{a^2 - x^2} dx = \\ &= \int_0^b \left(-1 + \frac{2a^2}{a^2 - x^2} \right) dx = \left(-x + a \ln \left| \frac{a + x}{a - x} \right| \right) \Big|_0^b = a \ln \frac{a + b}{a - b} - b. \end{aligned}$$

2437. $y = \ln \cos x$ ($0 \leq x \leq a < \frac{\pi}{2}$).

Согласно формуле (7.1):

$$s = \int_0^a \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x} dx = \int_0^a \frac{dx}{\cos x} = \int_0^a \frac{\cos x dx}{\cos^2 x} = \int_0^a \frac{d(\sin x)}{1 - \sin^2 x}.$$

После замены $t = \sin x$ получаем

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{\sin a} \frac{dt}{1 - t^2} = \left(\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| \right) \Big|_0^{\sin a} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \sin a}{1 - \sin a} \right| = \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \cos \left(\frac{\pi}{2} - a \right)}{1 - \cos \left(\frac{\pi}{2} - a \right)} \right| = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{2} \right)}{2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{2} \right)} \right| = \\ &= \ln \left| \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{2} \right) \right| = \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2} \right). \end{aligned}$$

Замечание. Отметим, что по условию величина $a \in [0; \pi/2)$, поэтому

$$\frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{4} + \frac{a}{2} < \frac{\pi}{2}$$

и, следовательно, $\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2} \right) > 0$. Поэтому знак модуля под логарифмом опущен.

$$\mathbf{2438.} \quad x = a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2} \quad (0 < b \leq y \leq a).$$

График этой кривой называется трактрисой. Несмотря на громоздкую формулу, производная выглядит довольно просто:

$$x'(y) = -\frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y}$$

и по формуле (7.2):

$$s = \int_b^a \sqrt{1 + x'^2(y)} dy = \int_b^a \frac{a dy}{y} = (a \ln |y|) \Big|_b^a = a \ln \frac{a}{b}.$$

2439. $y^2 = \frac{x^3}{2a - x} \quad \left(0 \leq x \leq \frac{5}{3}a\right).$

График кривой (рис. 7.1) симметричен относительно оси абсцисс.

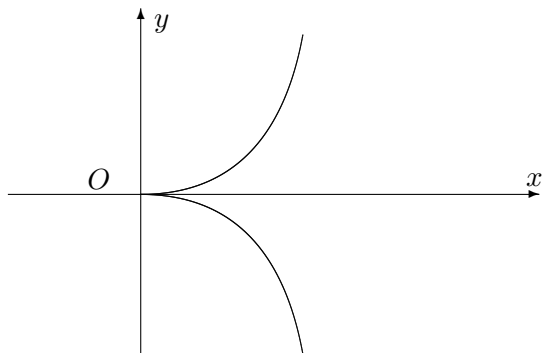


Рис. 7.1

Участки кривой, лежащие над осью абсцисс и под ней имеют одинаковую длину, следовательно,

$$s = 2 \int_0^{5a/3} \sqrt{1 + y'^2(x)} dx,$$

где $y(x)$ – неотрицательное решение уравнения кривой, т. е.

$$y(x) = \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{2a - x}}.$$

Произведя вычисления, найдем:

$$s = 2a \int_0^{5a/3} \sqrt{\frac{8a - 3x}{2a - x}} \frac{dx}{2a - x}.$$

После замены переменной:

$$\sqrt{\frac{8a - 3x}{2a - x}} = t, \quad x = \frac{2a(t^4 - 4)}{t^2 - 3},$$

$$dx = \frac{4at \, dt}{(t^2 - 3)^2}, \quad 2a - x = \frac{2a}{t^2 - 3}$$

получим

$$\begin{aligned} s &= 4a \int_2^3 \frac{t^2 \, dt}{t^2 - 3} = 4a \int_2^3 \left(1 - \frac{3}{3 - t^2} \right) dt = \\ &= 4a \left(t - \frac{\sqrt{3}}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{3} + t}{\sqrt{3} - t} \right| \right) \Big|_2^3 = \\ &= 4a + 2a\sqrt{3} \ln \frac{(2 + \sqrt{3})(3 - \sqrt{3})}{(2 - \sqrt{3})(3 + \sqrt{3})} = \\ &= 4a + 4a\sqrt{3} \ln \frac{(2 + \sqrt{3})(3 - \sqrt{3})}{6} = 4a \left(1 + \sqrt{3} \ln \frac{3 + \sqrt{3}}{6} \right) = \\ &= 4a \left(1 + \sqrt{3} \ln \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \right). \end{aligned}$$

2440. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ (астроида, рис. 7.2).

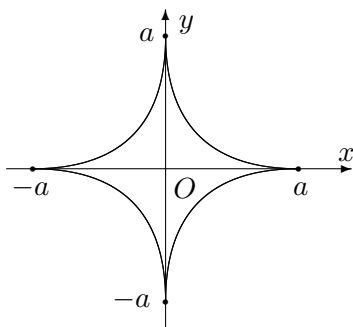


Рис. 7.2

Кривая симметрична относительно обеих координатных осей. Участок кривой, лежащий в первой координатной четверти, является графиком функции

$$y(x) = \left(a^{2/3} - x^{2/3} \right)^{3/2},$$

определенной на отрезке $[0; a]$. Его длина в четыре раза меньше длины всей кривой. Применяя формулу (7.1), находим длину всей кривой:

$$s = 4 \int_0^a \sqrt{1 + y'^2(x)} dx = 4 \int_0^a \left(\frac{a}{x}\right)^{1/3} dx = 4a^{1/3} \left(\frac{3}{2} x^{2/3}\right) \Big|_0^a = 6a.$$

7.2. Длина дуги параметрической кривой

Если кривая задана уравнениями:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$$

где $t \in [t_1; t_2]$, то длина этой кривой

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt. \quad (7.3)$$

2441. $x = \frac{c^2}{a} \cos^3 t, y = \frac{c^2}{b} \sin^3 t, c^2 = a^2 - b^2$ (эволюта эллипса, рис. 7.3).

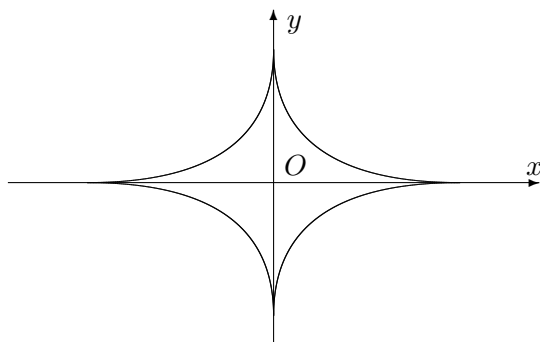


Рис. 7.3

Оси координат являются осями симметрии, поэтому длина s всей кривой в четыре раза больше длины ее участка, лежащего в первой четверти. Участок кривой, лежащий в первой четверти отвечает изменению параметра t от нуля до $\pi/2$. Следовательно, по формуле (7.3),

$$\begin{aligned} s &= 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt = \\ &= \frac{12c^2}{ab} \int_0^{\pi/2} \sin t \cos t \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt. \end{aligned}$$

Делая замену $z = \sin^2 t$ и учитывая, что $a^2 - b^2 = c^2$, получаем:

$$\begin{aligned} s &= \frac{12c^2}{ab} \int_0^{\pi/2} \sin t \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 (1 - \sin^2 t)} d(\sin t) = \\ &= \frac{6c^2}{ab} \int_0^{\pi/2} \sqrt{c^2 \sin^2 t + b^2} d(\sin^2 t) = \frac{6c^2}{ab} \int_0^1 \sqrt{c^2 z + b^2} dz. \end{aligned}$$

Переходя к переменной $u = c^2 z + b^2$, находим

$$s = \frac{6}{ab} \int_{b^2}^{c^2+b^2} \sqrt{u} du = \frac{6}{ab} \int_{b^2}^{a^2} \sqrt{u} du = \frac{4}{ab} u^{3/2} \Big|_{b^2}^{a^2} = \frac{4}{ab} (a^3 - b^3).$$

2442. $x = \cos^4 t$, $y = \sin^4 t$.

График рассматриваемой параметрической кривой целиком лежит в первой четверти (рис. 7.4).

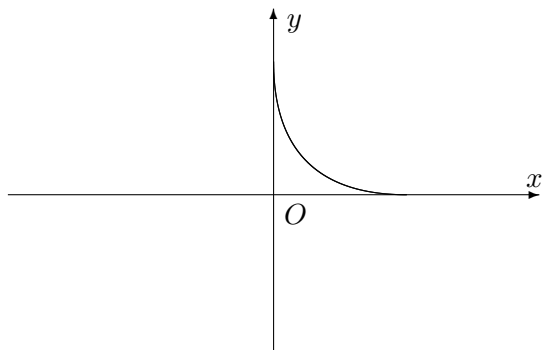


Рис. 7.4

Точки кривой отвечают изменению параметри t от нуля до $\pi/2$ и по формуле (7.3)

$$\begin{aligned}
 s &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{16 \cos^6 t \sin^2 t + 16 \sin^6 t \cos^2 t} dt = \\
 &= 4 \int_0^{\pi/2} \sin t \cos t \sqrt{\cos^4 t + \sin^4 t} dt.
 \end{aligned}$$

Так как

$$\begin{aligned}
 \cos^4 t + \sin^4 t &= (\cos^2 t + \sin^2 t)^2 - 2 \sin^2 t \cos^2 t = \\
 &= 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2t = 1 - \frac{1}{2} (1 - \cos^2 2t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos^2 2t,
 \end{aligned}$$

и

$$4 \sin t \cos t dt = 2 \sin 2t dt = -d(\cos 2t),$$

то после замены $u = \cos t$, получаем:

$$s = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^1 \sqrt{u^2 + 1} du = \frac{2}{\sqrt{2}} \int_0^1 \sqrt{u^2 + 1} du =$$

$$= \sqrt{2} \left(\frac{u}{2} \sqrt{u^2 + 1} + \frac{1}{2} \ln(u + \sqrt{u^2 + 1}) \right) \Big|_0^1 = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \ln(1 + \sqrt{2}).$$

2443. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$).

Графиком кривой является циклоида (рис. 7.5)

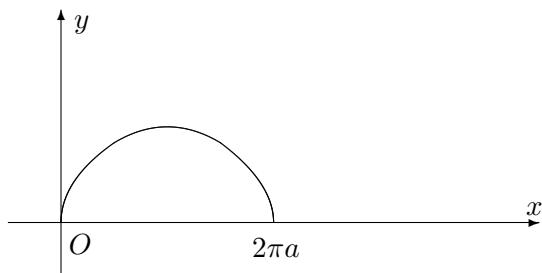


Рис. 7.5

Согласно формуле (7.3)

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t} \, dt = \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 - 2a^2 \cos t + a^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t} \, dt = \\ &= a \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2 \cos t} \, dt = a \int_0^{2\pi} \sqrt{4 \sin^2 \frac{t}{2}} \, dt = \\ &= 2a \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} \, dt = -4a \cos \frac{t}{2} \Big|_0^{2\pi} = 8a. \end{aligned}$$

2444. $x = a(\cos t + t \sin t)$, $y = a(\sin t - t \cos t)$ при $0 \leq t \leq 2\pi$ (развертка окружности).

Согласно формуле (7.3)

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{(at \cos t)^2 + (at \sin t)^2} dt = \int_0^{2\pi} at dt = \left. \frac{at^2}{2} \right|_0^{2\pi} = 2\pi^2 a.$$

2445. $x = a(\operatorname{sh} t - t)$, $y = a(\operatorname{ch} t - 1)$ ($0 \leq t \leq T$).

Согласно формуле (7.3) длина дуги кривой

$$\begin{aligned} s &= \int_0^T \sqrt{a^2(\operatorname{ch} t - 1)^2 + a^2 \operatorname{sh}^2 t} dt = \\ &= \int_0^T \sqrt{a^2 \operatorname{ch}^2 t - 2a^2 \operatorname{ch} t + a^2 + a^2 \operatorname{sh}^2 t} dt. \end{aligned}$$

Учитывая следующие формулы для гиперболических функций:

$$1 + \operatorname{sh}^2 t = \operatorname{ch}^2 t, \quad \operatorname{ch} t - 1 = 2 \operatorname{sh}^2 \frac{t}{2}, \quad \operatorname{ch} t + 1 = 2 \operatorname{ch}^2 \frac{t}{2},$$

получаем:

$$\begin{aligned} s &= a \int_0^T \sqrt{2(\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{ch} t)} dt = a \int_0^T \sqrt{2 \operatorname{ch} t (\operatorname{ch} t - 1)} dt = \\ &= 2a \int_0^T \operatorname{sh} \frac{t}{2} \sqrt{\operatorname{ch} t} dt = 2a \int_0^T \operatorname{sh} \frac{t}{2} \sqrt{2 \operatorname{ch}^2 \frac{t}{2} - 1} dt. \end{aligned}$$

Делая замену $u = \operatorname{ch} \frac{t}{2}$, находим

$$s = 4a \int_0^T \sqrt{2 \operatorname{ch}^2 \frac{t}{2} - 1} d\left(2 \operatorname{ch} \frac{t}{2}\right) = 4a \int_1^{\operatorname{ch} \frac{T}{2}} \sqrt{2u^2 - 1} du.$$

Полагая $z = \sqrt{2}u$, получаем табличный интеграл

$$\begin{aligned}
 s &= 2\sqrt{2}a \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{2}\operatorname{ch}\frac{T}{2}} \sqrt{z^2 - 1} dz = \\
 &= 2\sqrt{2}a \left(\frac{z}{2} \sqrt{z^2 - 1} - \frac{1}{2} \ln |z + \sqrt{z^2 - 1}| \right) \Big|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{2}\operatorname{ch}\frac{T}{2}} = \\
 &= 2a \left(\operatorname{ch}\frac{T}{2} \sqrt{2\operatorname{ch}^2\frac{T}{2} - 1} - 1 \right) - \\
 &\quad - \sqrt{2}a \ln \frac{\sqrt{2}\operatorname{ch}\frac{T}{2} + \sqrt{2\operatorname{ch}^2\frac{T}{2} - 1}}{1 + \sqrt{2}} = \\
 &= 2a \left(\operatorname{ch}\frac{T}{2} \sqrt{\operatorname{ch}T - 1} \right) - \sqrt{2}a \ln \frac{\sqrt{2}\operatorname{ch}\frac{T}{2} + \sqrt{\operatorname{ch}T}}{1 + \sqrt{2}}.
 \end{aligned}$$

2445.1. $x = \operatorname{ch}^3 t$, $y = \operatorname{sh}^3 t$ ($0 \leq t \leq T$).

Согласно формуле (7.3)

$$\begin{aligned}
 s &= \int_0^T \sqrt{9\operatorname{ch}^4 t \operatorname{sh}^2 t + 9\operatorname{sh}^4 t \operatorname{ch}^2 t} dt = \\
 &= 3 \int_0^T \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t \sqrt{\operatorname{ch}^2 t + \operatorname{sh}^2 t} dt = \frac{3}{2} \int_0^T \operatorname{sh} 2t \sqrt{\operatorname{ch} 2t} dt.
 \end{aligned}$$

После замены $u = \operatorname{ch} 2t$, находим:

$$\begin{aligned}
 s &= \frac{3}{4} \int_0^T \sqrt{\operatorname{ch} 2t} d(\operatorname{ch} 2t) = \frac{3}{4} \int_1^{\operatorname{ch} 2T} \sqrt{u} du = \frac{1}{2} u^{3/2} \Big|_1^{\operatorname{ch} 2T} = \\
 &= \frac{1}{2} \left(\operatorname{ch}^{3/2}(2T) - 1 \right).
 \end{aligned}$$

7.3. Длина дуги в полярных координатах

Если кривая задана в полярных координатах в виде

$$r = r(\varphi), \quad \alpha \leq \varphi \leq \beta,$$

то ее длина равна

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)} d\varphi. \quad (7.4)$$

Если полярные координаты заданы параметрически:

$$r = r(t), \quad \varphi = \varphi(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta,$$

то мы имеем параметрическую кривую в декартовых координатах:

$$\begin{cases} x = r(t) \cos \varphi(t), \\ y = r(t) \sin \varphi(t) \end{cases}$$

и из формулы (7.3) получаем следующее выражение для длины дуги кривой:

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r'^2(t) + r^2(t)\varphi'^2(t)} dt. \quad (7.5)$$

2446. $r = a\varphi$ (спираль Архимеда) при $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

Согласно формуле (7.4) имеем:

$$\begin{aligned} s &= a \int_0^{2\pi} \sqrt{\varphi^2 + 1} d\varphi = \\ &= a \left(\frac{\varphi}{2} \sqrt{\varphi^2 + 1} + \frac{1}{2} \ln(\varphi + \sqrt{\varphi^2 + 1}) \right) \Big|_0^{2\pi} = \\ &= \pi a \sqrt{4\pi^2 + 1} + \frac{a}{2} \ln(2\pi + \sqrt{4\pi^2 + 1}). \end{aligned}$$

2447. $r = ae^{m\varphi}$ ($m > 0$) при $0 < r < a$.

Условие $0 < r < a$ равносильно тому, что $-\infty < \varphi < 0$. Таким образом, длина кривой

$$\begin{aligned} s &= \int_{-\infty}^0 \sqrt{(ae^{m\varphi})^2 + (ame^{m\varphi})^2} d\varphi = a\sqrt{1+m^2} \int_{-\infty}^0 e^{m\varphi} d\varphi = \\ &= \frac{a\sqrt{1+m^2}}{m} e^{m\varphi} \Big|_{-\infty}^0 = \frac{a\sqrt{1+m^2}}{m}. \end{aligned}$$

2448. $r = a(1 + \cos \varphi)$.

Рассматриваемая кривая носит название кардиоиды, ее график представлен на рис. 7.6.

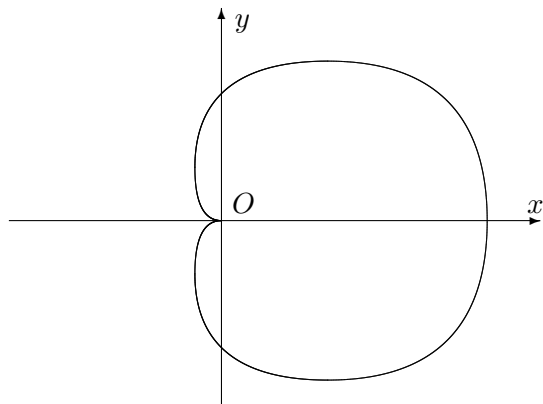


Рис. 7.6

Длина кардиоиды согласно формуле (7.4)

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1 + \cos \varphi)^2 + a^2 \sin^2 \varphi} d\varphi = \\ &= a \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + 2 \cos \varphi + \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} d\varphi = \end{aligned}$$

$$= a \int_0^{2\pi} \sqrt{2(1 + \cos \varphi)} d\varphi = a \int_0^{2\pi} \sqrt{4 \cos^2 \frac{\varphi}{2}} d\varphi = 2a \int_0^{2\pi} \left| \cos \frac{\varphi}{2} \right| d\varphi.$$

В силу 2π -периодичности и четности подынтегральной функции

$$\begin{aligned} s &= 2a \int_{-\pi}^{\pi} \left| \cos \frac{\varphi}{2} \right| d\varphi = 4a \int_0^{\pi} \left| \cos \frac{\varphi}{2} \right| d\varphi = \\ &= 4a \int_0^{\pi} \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi = 8a \sin \frac{\varphi}{2} \Big|_0^{\pi} = 8a. \end{aligned}$$

2449. $r = \frac{p}{1 + \cos \varphi} \left(|\varphi| \leq \frac{\pi}{2} \right).$

Согласно формуле (7.4)

$$\begin{aligned} s &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{\frac{p^2}{(1 + \cos \varphi)^2} + \frac{p^2 \sin^2 \varphi}{(1 + \cos \varphi)^4}} d\varphi = \\ &= p \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sqrt{(1 + \cos \varphi)^2 + \sin^2 \varphi}}{(1 + \cos \varphi)^2} d\varphi. \end{aligned}$$

Так как

$$(1 + \cos \varphi)^2 + \sin^2 \varphi = 1 + 2 \cos \varphi + \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 2(1 + \cos \varphi),$$

то

$$s = \sqrt{2} p \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\varphi}{(1 + \cos \varphi)^{3/2}} = 2\sqrt{2} p \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{(1 + \cos \varphi)^{3/2}}.$$

Применяя формулу

$$1 + \cos \varphi = 2 \cos^2 \frac{\varphi}{2},$$

получаем:

$$s = p \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\cos^3 \frac{\varphi}{2}}.$$

После замены $t = \varphi/2$, приходим к интегралу

$$s = 2p \int_0^{\pi/4} \frac{dt}{\cos^3 t}.$$

После замены $u = \sin t$ получим интеграл от рациональной функции:

$$s = 2p \int_0^{\pi/4} \frac{dt}{\cos^3 t} = 2p \int_0^{\pi/4} \frac{\cos t \, dt}{\cos^4 t} = 2p \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{du}{(1-u^2)^2}.$$

Для вычисления неопределенного интеграла от рациональной функции можно воспользоваться методом Остроградского. Учитывая четность подынтегральной функции, разложение интеграла можно записать в следующем виде:

$$\int \frac{du}{(1-u^2)^2} = \frac{Au}{1-u^2} + B \int \frac{du}{1-u^2}.$$

После дифференцирования, освобождения от знаменателя и приведения подобных членов получаем тождество

$$1 = (A - B)u^2 + (A + B).$$

Решая систему

$$\begin{cases} A - B = 0, \\ A + B = 1, \end{cases}$$

находим:

$$A = \frac{1}{2}, \quad B = \frac{1}{2}.$$

Учитывая значение табличного интеграла в разложении, получаем:

$$\int \frac{du}{(1-u^2)^2} = \frac{u}{2(1-u^2)} + \frac{1}{4} \ln \left| \frac{1+u}{1-u} \right| + C.$$

Таким образом, длина кривой

$$\begin{aligned} s &= 2p \left(\frac{u}{2(1-u^2)} + \frac{1}{4} \ln \left| \frac{1+u}{1-u} \right| \right) \Big|_0^{1/\sqrt{2}} = \\ &= 2p \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{4} \ln \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} \right). \end{aligned}$$

Так как

$$\ln \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = \ln \frac{(\sqrt{2}+1)^2}{2-1} = 2 \ln(1+\sqrt{2}),$$

то

$$s = p \left(\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2}) \right).$$

2450. $r = a \sin^3 \frac{\varphi}{3}.$

Кривая симметрична относительно оси ординат, при изменении величины φ от нуля до 3π точка $(r \cos \varphi; r \sin \varphi)$ пробегает кривую ровно один раз (рис. 7.7).

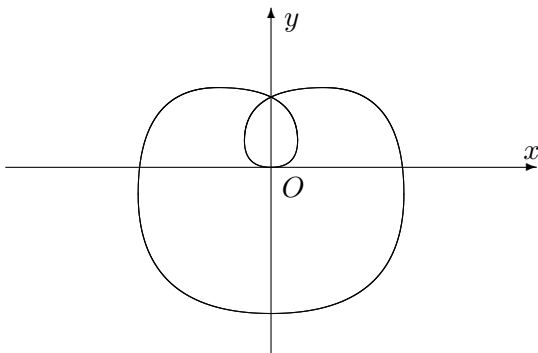


Рис. 7.7

Согласно формуле (7.4) длина кривой

$$\begin{aligned}
 s &= \int_0^{3\pi} \sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)} d\varphi = a \int_0^{3\pi} \sqrt{\sin^6 \frac{\varphi}{3} + \sin^4 \frac{\varphi}{3} \cos^2 \frac{\varphi}{3}} d\varphi = \\
 &= a \int_0^{3\pi} \sin^2 \frac{\varphi}{3} \sqrt{\sin^2 \frac{\varphi}{3} + \cos^2 \frac{\varphi}{3}} d\varphi = a \int_0^{3\pi} \sin^2 \frac{\varphi}{3} d\varphi = \\
 &= \frac{a}{2} \int_0^{3\pi} \left(1 - \cos \frac{2\varphi}{3}\right) d\varphi = \frac{a}{2} \left(\varphi - \frac{3}{2} \sin \frac{2\varphi}{3}\right) \Big|_0^{3\pi} = \frac{3\pi a}{2}.
 \end{aligned}$$

2451. $r = a \operatorname{th} \frac{\varphi}{2}$ ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$).

Согласно формуле (7.4) длина дуги кривой

$$\begin{aligned}
 s &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \operatorname{th}^2 \frac{\varphi}{2} + \frac{a^2}{4 \operatorname{ch}^4 \frac{\varphi}{2}}} d\varphi = a \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{4 \operatorname{sh}^2 \frac{\varphi}{2} \operatorname{ch}^2 \frac{\varphi}{2} + 1}}{2 \operatorname{ch}^2 \frac{\varphi}{2}} d\varphi = \\
 &= a \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{\operatorname{sh}^2 \varphi + 1}}{2 \operatorname{ch}^2 \frac{\varphi}{2}} d\varphi = a \int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{ch} \varphi}{2 \operatorname{ch}^2 \frac{\varphi}{2}} d\varphi = \\
 &= a \int_0^{2\pi} \frac{2 \operatorname{ch}^2 \frac{\varphi}{2} - 1}{2 \operatorname{ch}^2 \frac{\varphi}{2}} d\varphi = a \int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{1}{2 \operatorname{ch}^2 \frac{\varphi}{2}}\right) d\varphi = \\
 &= a \left(\varphi - \operatorname{th} \frac{\varphi}{2}\right) \Big|_0^{2\pi} = a(2\pi - \operatorname{th} \pi).
 \end{aligned}$$

2452. $\varphi = \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r}\right)$ ($1 \leq r \leq 3$).

Функция

$$\varphi = \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r}\right)$$

на отрезке $[0; 3]$ строго возрастает и имеет обратную $r = r(\varphi)$, определенную на промежутке $[1; 5/3]$ (также строго возрастающую). Переходя в формуле (7.4) к переменной r , получаем:

$$\begin{aligned} s &= \int_1^{5/3} \sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)} \, d\varphi = \int_1^3 \sqrt{r^2 \varphi'^2(r) + 1} \, dr = \\ &= \int_1^3 \sqrt{\frac{1}{4} \left(r^2 - 2 + \frac{1}{r^2} \right) + 1} \, dr = \frac{1}{2} \int_1^3 \sqrt{\left(r + \frac{1}{r} \right)^2} \, dr = \\ &= \frac{1}{2} \int_1^3 \left(r + \frac{1}{r} \right) \, dr = \left(\frac{r^2}{4} + \frac{1}{2} \ln r \right) \Big|_1^3 = 2 + \frac{1}{2} \ln 3. \end{aligned}$$

2452.1. $\varphi = \sqrt{r}$ ($0 \leq r \leq 5$).

Уравнение кривой равносильно $r = \varphi^2$, $\varphi \in [0; \sqrt{5}]$. Применяя формулу (7.4) и делая в ней замену $t = \varphi^2 + 4$, получаем:

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{\sqrt{5}} \sqrt{\varphi^4 + 4\varphi^2} \, d\varphi = \int_0^{\sqrt{5}} \varphi \sqrt{\varphi^2 + 4} \, d\varphi = \\ &= \frac{1}{2} \int_4^9 \sqrt{t} \, dt = \left(\frac{1}{3} t^{3/2} \right) \Big|_4^9 = \frac{19}{3}. \end{aligned}$$

2452.2. $\varphi = \int_0^r \frac{\operatorname{sh} \rho}{\rho} \, d\rho$ ($0 \leq r \leq R$).

По теореме о дифференцировании интеграла по верхнему пределу

$$\varphi'(r) = \frac{\operatorname{sh} r}{r} > 0$$

при $r > 0$. Отсюда следует, что функция $\varphi(r)$ строго возрастает на отрезке $[0; R]$ и, следовательно, имеет обратную $r = r(\varphi)$, определенную на отрезке $[0; \varphi_0]$, где

$$\varphi_0 = \int_0^R \frac{\operatorname{sh} \rho}{\rho} d\rho.$$

Переходя в формуле (7.4) к переменной r , получаем

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{\varphi_0} \sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)} d\varphi = \int_0^R \sqrt{r^2\varphi'^2(r) + 1} dr = \\ &= \int_0^R \sqrt{\operatorname{sh}^2 r + 1} dr = \int_0^R \operatorname{ch} r dr = \operatorname{sh} r \Big|_0^R = \operatorname{sh} R. \end{aligned}$$

2452.3. $r = 1 + \cos t$, $\varphi = t - \operatorname{tg} \frac{t}{2}$ ($0 \leq t \leq T < \pi$).

Производные

$$r'(t) = \sin t, \quad \varphi'(t) = 1 - \frac{1}{2 \cos^2 \frac{t}{2}} = \frac{2 \cos^2 \frac{t}{2} - 1}{2 \cos^2 \frac{t}{2}} = \frac{\cos t}{1 + \cos t}.$$

По формуле (7.5)

$$s = \int_0^T \sqrt{\sin^2 t + (1 + \cos t)^2 \left(\frac{\cos t}{1 + \cos t} \right)^2} dt = \int_0^T dt = T.$$

7.4. Разные задачи

2453. Доказать, что длина дуги эллипса

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t$$

равна длине одной волны синусоиды $y = c \sin \frac{x}{b}$, где $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

Вычислим длину дуги эллипса l_1 . Эллипс можно задать параметрически уравнениями:

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t.$$

Если параметр t меняется в пределах от $-\pi/2$ до $\pi/2$, то точка с координатами $(x(t); y(t))$ описывает половину длины дуги эллипса. Следовательно, по формуле (7.3),

$$l_1 = 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt.$$

Вычислим длину волны синусоиды l_2 , она в два раза больше длины полуволны, отвечающей изменению аргумента x в пределах от нуля до πb . Применяя формулу (7.1) и учитывая, что $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, получаем:

$$l_2 = 2 \int_0^{\pi b} \sqrt{1 + \frac{a^2 - b^2}{b^2} \cos^2 \frac{x}{b}} dx.$$

Покажем, что $l_2 = l_1$. Для этого сделаем последовательно замены $x = bu$ и $u = t + \pi/2$. Имеем:

$$\begin{aligned} l_2 &= 2b \int_0^{\pi} \sqrt{1 + \frac{a^2 - b^2}{b^2} \cos^2 u} du = \\ &= 2 \int_0^{\pi} \sqrt{a^2 \cos^2 u + b^2 \sin^2 u} du = \\ &= 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt = l_1. \end{aligned}$$

2454. Парабола $4ay = x^2$ катится по оси Ox . Доказать, что фокус параболы описывает цепную линию.

Рассмотрим участок параболы, который отвечает отрезку $x \in [0, x_0]$. Уравнение параболы можно представить формулой $y = x^2/4a$. Согласно формуле (7.1) длина этого участка

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{x_0} \sqrt{1 + \frac{x^2}{4a^2}} dx = \frac{1}{2a} \int_0^{x_0} \sqrt{4a^2 + x^2} dx = \\ &= \frac{1}{2a} \left(\frac{x}{2} \sqrt{4a^2 + x^2} + 2a^2 \ln \left| x + \sqrt{4a^2 + x^2} \right| \right) \Big|_0^{x_0} = \\ &= \frac{x_0}{4a} \sqrt{4a^2 + x_0^2} + a \ln \frac{x_0 + \sqrt{4a^2 + x_0^2}}{2a}. \end{aligned}$$

Пусть φ – угол наклона касательной к параболе в точке $(x_0; y_0)$ (величина $y_0 = x_0^2/4a$). Тогда

$$\operatorname{tg} \varphi = y'(x_0) = \frac{x_0}{2a}.$$

Отсюда находим:

$$x_0 = 2a \operatorname{tg} \varphi, \quad y_0 = \frac{x_0^2}{4a} = a \operatorname{tg}^2 \varphi.$$

Подставляя значение x_0 в полученную выше формулу для длины дуги параболы, имеем

$$s = a \left(\frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi} + \ln \frac{1 + \sin \varphi}{\cos \varphi} \right).$$

Проведем через точку $M(x_0; y_0)$ параболы касательную и на этой касательной найдем точку $P(x^*; y^*)$ ($x^* < x_0$) для которой длина отрезка $|PM|$ равна длине s дуги OM (рис. 7.8).

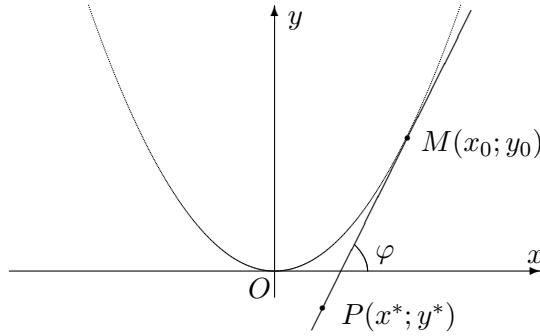


Рис. 7.8

Нетрудно видеть, что

$$\begin{cases} x^* = x_0 - s \cos \varphi, \\ y^* = y_0 - s \sin \varphi. \end{cases}$$

Подставляя сюда $x_0 = 2a \operatorname{tg} \varphi$, $y_0 = a \operatorname{tg}^2 \varphi$, а также величину s , выраженную через φ , получим:

$$\begin{cases} x^* = a \left(\operatorname{tg} \varphi - \cos \varphi \cdot \ln \frac{1 + \sin \varphi}{\cos \varphi} \right), \\ y^* = -a \sin \varphi \cdot \ln \frac{1 + \sin \varphi}{\cos \varphi}. \end{cases}$$

Фокус параболы имеет координаты $(0; a)$. После ее перекатывания координаты фокуса перемещенной параболы в исходной системе координат совпадают с координатами фокуса исходной параболы в системе координат $(x'; y')$ с началом в точке P и повернутой на угол φ по отношению к исходной системе координат (рис. 7.9).

Формулы преобразования координат имеют следующий вид:

$$\begin{cases} x' = (x - x^*) \cos \varphi + (y - y^*) \sin \varphi, \\ y' = -(x - x^*) \sin \varphi + (y - y^*) \cos \varphi. \end{cases}$$

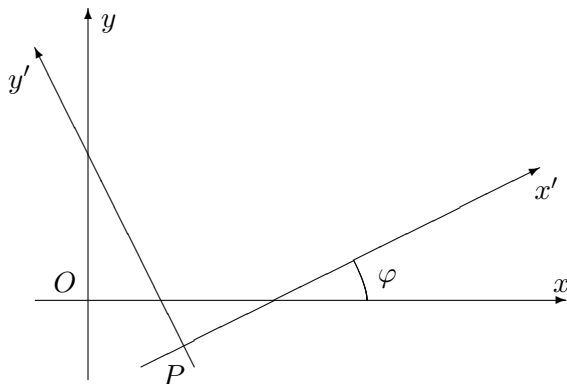


Рис. 7.9

Подставим сюда значения x^* и y^* , выраженные через φ , положим $x = 0$, $y = a$ (координаты фокуса) и опустим штрихи у переменных в левых частях равенств, получим:

$$\begin{cases} x = a \ln \frac{1 + \sin \varphi}{\cos \varphi}, \\ y = \frac{a}{\cos \varphi}. \end{cases}$$

Эти соотношения и представляют собой параметрическое уравнение кривой, по которой перемещается фокус параболы.

В параметрическом представлении можно исключить параметр φ и получить явный вид зависимости переменных x и y . Из второго уравнения находим $\cos \varphi = a/y$. Так как $|\varphi| < \pi/2$, то $\sin \varphi = \sqrt{y^2 - a^2}/y$. После этого из первого уравнения находим

$$x = a \ln \frac{y + \sqrt{y^2 - a^2}}{a}.$$

Последнее уравнение можно разрешить относительно y . Это можно сделать следующим образом. Из уравнения находим

$$e^{x/a} = \frac{y + \sqrt{y^2 - a^2}}{a}.$$

Следовательно,

$$e^{-x/a} = \frac{a}{y + \sqrt{y^2 - a^2}} = \frac{a(y - \sqrt{y^2 - a^2})}{y^2 - (y^2 - a^2)} = \frac{y - \sqrt{y^2 - a^2}}{a}.$$

Таким образом

$$e^{x/a} + e^{-x/a} = \frac{2y}{a},$$

т. е.

$$y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}.$$

График этой функции и называется цепной линией.

2455. Найти отношение площади, ограниченной петлей кривой

$$y = \pm \left(\frac{1}{3} - x \right) \sqrt{x},$$

к площади круга, длина окружности которого равна длине контура этой кривой.

График кривой представлен на рис. 7.10.

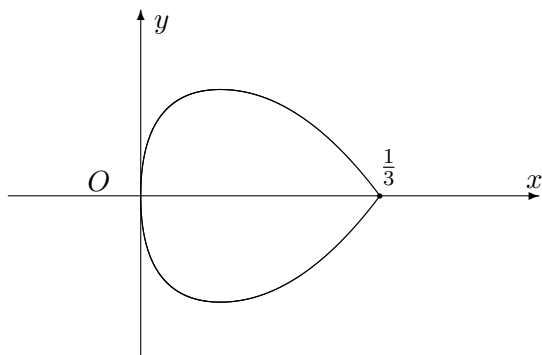


Рис. 7.10

Верхняя часть представлена графиком функции

$$y = \left(\frac{1}{3} - x \right) \sqrt{x},$$

а нижняя часть кривой – графиком

$$y = -\left(\frac{1}{3} - x\right)\sqrt{x}.$$

Площадь фигуры, ограничиваемой данной кривой:

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{1/3} \left(\left(\frac{1}{3} - x\right)\sqrt{x} + \left(\frac{1}{3} - x\right)\sqrt{x} \right) dx = \\ &= 2 \int_0^{1/3} \left(\frac{1}{3} - x\right)\sqrt{x} dx = 2 \int_0^{1/3} \left(\frac{1}{3}x^{1/2} - x^{3/2}\right) dx = \\ &= 2 \left(\frac{2}{9}x^{3/2} - \frac{2}{5}x^{5/2} \right) \Big|_0^{1/3} = \frac{8}{135\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Длина контура кривой в два раза больше длина дуги ее верхней части. Производная функции, график которой ограничивает фигуру сверху:

$$y' = \frac{1 - 9x}{6\sqrt{x}}.$$

Следовательно, длина контура

$$\begin{aligned} l &= 2 \int_0^{1/3} \sqrt{1 + \frac{(1 - 9x)^2}{36x}} dx = \frac{1}{3} \int_0^{1/3} \sqrt{\frac{36x + (1 - 9x)^2}{x}} dx = \\ &= \frac{1}{3} \int_0^{1/3} \sqrt{\frac{(1 + 9x)^2}{x}} dx = \frac{1}{3} \int_0^{1/3} \frac{1 + 9x}{\sqrt{x}} dx = \\ &= \frac{1}{3} \int_0^{1/3} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + 9\sqrt{x} \right) dx = \frac{1}{3} \left(2\sqrt{x} + 6x^{3/2} \right) \Big|_0^{1/3} = \frac{4}{3\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Радиус R круга, длина окружности которого равна длине контура этой кривой, определяется из уравнения $2\pi R = l$. Отсюда находим:

$$2\pi R = \frac{4}{3\sqrt{3}}, \quad R = \frac{2}{3\pi\sqrt{3}}.$$

Площадь этого круга

$$S_0 = \pi R^2 = \frac{4}{27\pi}.$$

Искомое отношение

$$\frac{S}{S_0} = \frac{2\pi}{5\sqrt{3}}.$$

Глава 8

Объем тела

8.1. Объем тела по известным поперечным сечениям

Если тело ограничено плоскостями $x = a$ и $x = b$, причем при каждом $x \in [a; b]$ известна площадь $S(x)$ сечения тела плоскостью, перпендикулярной к оси Ox в точке x , то объем тела

$$V = \int_a^b S(x) dx. \quad (8.1)$$

Если известна площадь сечения тела плоскостью, перпендикулярной к оси Oy или к оси Oz , то применима та же формула (8.1), в которой переменную x надо заменить, соответственно, на y или на z .

В задачах 2456 – 2458 используется одна и та же формула для длины отрезка трапеции параллельного ее основаниям. Рассмотрим вывод этой формулы. Трапеция $ABCD$ изображена на (рис. 8.1). Отрезок MN параллелен основаниям трапеции, $AD = a$, $BC = b$, расстояние от нижнего основания до отрезка MN равно z , а высота трапеции равна h . Продолжим сторону BC до пересечения с прямой параллельной AB и проходящей через вершину D . Точку пересечения обозначим E . Продолжение

отрезка MN пересекает DE в точке, которую мы обозначим через K . Длина отрезка MK равна a . Величина отрезка CE равна $a - b$ ($BC = b$).

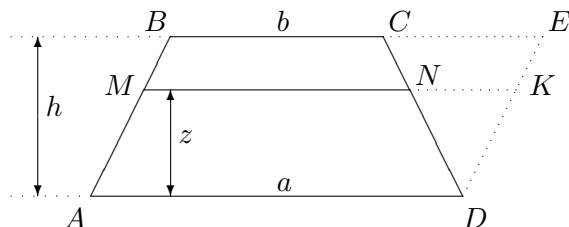


Рис. 8.1

Из подобия треугольников DNK и DCE находим:

$$NK = CE \cdot \frac{z}{h}.$$

(Высота $\triangle DNK$ равна z , а высота $\triangle DCE$ равна h .) Таким образом, $NK = (a - b)z/h$ и

$$MN = MK - NK = a - (a - b) \frac{z}{h}. \quad (8.2)$$

Формула (8.2) остается в силе и для треугольника. В этом случае надо считать, что величина $b = 0$ и мы получаем следующее равенство:

$$MN = MK - NK = a - a \frac{z}{h}. \quad (8.3)$$

2456. Найти объем чердака, основание которого есть прямоугольник со сторонами a и b , верхнее ребро равно c , а высота равна h .

Рассмотрим случай, когда верхнее ребро параллельно стороне основания, равной a . Введем декартову систему координат с центром в одной из вершин прямоугольника основания, направив ось абсцисс вдоль стороны основания, равной a , ось ординат –

вдоль другой стороны основания, а ось аппликат перпендикулярно к плоскости основания (рис. 8.2). Сечение рассматриваемого тела плоскостью, перпендикулярной к оси Oz в точке z , представляет прямоугольник со сторонами параллельными сторонам прямоугольника основания. Длину стороны сечения, параллельной оси Ox обозначим d_1 , а длину второй стороны сечения обозначим d_2 . Площадь сечения $S(z) = d_1 d_2$. Для определения величины d_1 проведем сечение тела через верхнее ребро перпендикулярно к плоскости основания xOy . В сечении получим трапецию с нижним основанием a , верхним основанием c и высотой h . Сечение тела плоскостью $z = \text{const}$ пересекает трапецию по отрезку MN , длина которого равна d_1 .

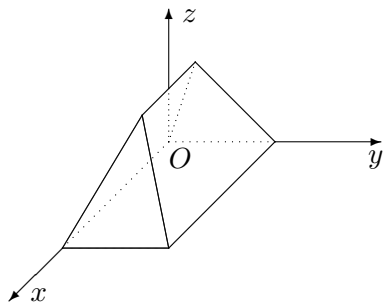


Рис. 8.2

По формуле (8.2)

$$d_1 = a - (a - c) \frac{z}{h}.$$

Для определения величины d_2 проведем сечение через середину верхнего ребра перпендикулярно к этому ребру и перпендикулярно к плоскости основания. В сечении получим треугольник с основанием b и высотой h . Сечение тела плоскостью $z = \text{const}$ пересекает данный треугольник по отрезку длиной d_2 , находящимся на расстоянии z от основания треугольника. По формуле (8.3)

$$d_2 = b - b \frac{z}{h}.$$

Таким образом, площадь сечения тела плоскостью $z = \text{const}$:

$$S(z) = d_1 d_2 = \frac{b(a-c)}{h^2} z^2 + \frac{b(c-2a)}{h} z + ab,$$

и объем тела

$$\begin{aligned} V &= \int_0^h S(z) dz = \\ &= \left(\frac{b(a-c)z^3}{3h^2} + \frac{b(c-2a)z^2}{2h} + abz \right) \Big|_0^h = \frac{bh(2a+c)}{6}. \end{aligned}$$

Если верхнее ребро параллельно стороне основания, равной b , то в полученном ответе нужно поменять местами a и b . Это дает формулу

$$V = \frac{ah(2b+c)}{6}.$$

2457. Найти объем обелиска, параллельные основания которого суть прямоугольники со сторонами A , B и a , b , а высота равна h .

Выберем систему координат с центром в одной из вершин основания обелиска, а оси Ox и Oy направим вдоль сторон основания (рис. 8.3). Пусть A – длина стороны нижнего основания, параллельной оси Ox , B – длина стороны нижнего основания, параллельной оси Oy , a – длина стороны верхнего основания, параллельной оси Ox и b – длина стороны верхнего основания, параллельной оси Oy . Сечение рассматриваемого тела плоскостью, перпендикулярной к оси Oz в точке z , представляет прямоугольник со сторонами параллельными сторонам оснований. Длину стороны сечения, параллельной оси Ox , обозначим d_1 , а длину стороны сечения, параллельной оси Oy , обозначим d_2 . Площадь сечения $S(z) = d_1 d_2$.

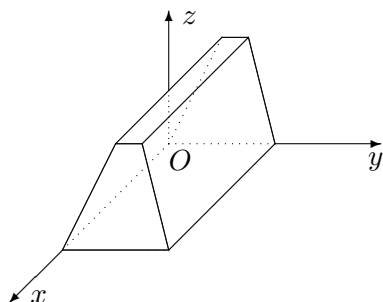


Рис. 8.3

В основаниях обелиска возьмем стороны, параллельные оси Oy . Рассмотрим сечение тела, проходящее через середины этих сторон. В сечении получим трапецию с нижним основанием A и верхним основанием a . Сечение тела плоскостью $z = \text{const}$ пересекает трапецию по отрезку, длина которого равна d_1 . По формуле (8.2)

$$d_1 = A - (A - a) \frac{z}{h}.$$

Величина d_2 вычисляется аналогично, формула для нее получается из формулы для d_1 заменой A на B и a на b , таким образом,

$$d_2 = B - (B - b) \frac{z}{h}.$$

Площадь сечения

$$S(z) = d_1 d_2 = \frac{(A - a)(B - b)}{h^2} z^2 - \frac{(A - a)B + (B - b)A}{h} z + AB.$$

Объем тела

$$V = \int_0^h S(z) dz = \left(\frac{(A - a)(B - b)z^3}{3h^2} - \right.$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{((A-a)B + (B-b)A)z^2}{2h} + ABz \Big|_0^h = \\
& = \frac{(2A+a)B + (A+2a)b}{6} h.
\end{aligned}$$

2458. Найти объем усеченного конуса, основания которого суть эллипсы с полуосями A , B , и a , b , а высота равна h .

Введем декартову систему координат с началом в центре нижнего основания и осями Ox , Oy , направленными вдоль полуосей эллипсов оснований конуса (рис. 8.4).

Пусть для определенности полуоси величиной A и a лежат на оси Ox , а пара других полуосей – на оси Oy . Начало координат O совпадает с центром нижнего основания, центр верхнего основания обозначим O_1 .

Сечение конуса плоскостью, перпендикулярной к оси Oz в точке z , представляет эллипс, полуоси которого обозначим d_1 и d_2 .

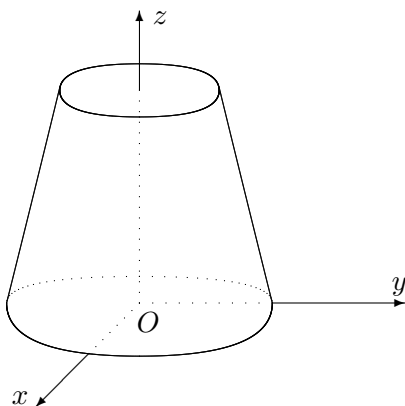


Рис. 8.4

Для определения величины d_1 рассмотрим осевое сечение, проходящее через ось Ox (рис. 8.5).

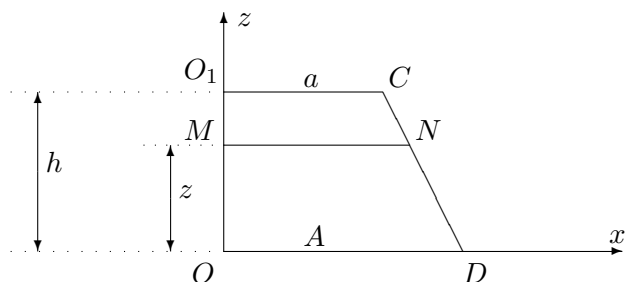


Рис. 8.5

Отрезок OO_1 , полуоси оснований OD , O_1C и образующая конуса CD составляют трапецию OO_1CD . С этой трапецией плоскость $z = \text{const}$ пересекается по отрезку MN , параллельному основаниям и отстоящему на расстояние z от нижнего основания. Этот отрезок имеет длину d_1 и по формуле (8.2)

$$d_1 = A - (A - a) \frac{z}{h}.$$

Аналогично

$$d_2 = B - (B - b) \frac{z}{h}.$$

Согласно задаче 2403 площадь эллипса с полуосями d_1 и d_2 равна $\pi d_1 d_2$. Следовательно, площадь сечения

$$S(z) = \pi d_1 d_2 = \pi \left(\frac{(A - a)(B - b)}{h^2} z^2 - \frac{(A - a)B + (B - b)A}{h} z + AB \right).$$

Величина $S(z)$ только множителем π отличается от аналогичной величины $S(z)$ в задаче 2457, поэтому объем тела

$$V = \int_0^h S(z) dz$$

отличается от ответа задачи 2457 тем же множителем π :

$$V = \pi \frac{(2A + a)B + (A + 2a)b}{6} h.$$

2459. Найти объем параболоида вращения, основание которого S , а высота равна H .

Выберем начало декартовой системы координат в вершине параболоида и осью Oz , направленной вдоль его оси (рис. 8.6).

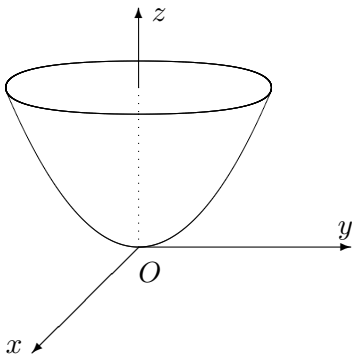


Рис. 8.6

Основание параболоида находится в плоскости $z = H$, а его радиус R определяется из соотношения $S = \pi R^2$, т. е.

$$R = \sqrt{\frac{S}{\pi}}.$$

По условию задачи параболоид получен вращением вокруг оси Oz графика функции $z = ax^2$ (рис. 8.7).

Величину a находим из условия $z(R) = H$. Учитывая определенное выше значение R , получаем уравнение:

$$a \frac{S}{\pi} = H,$$

откуда находим $a = \frac{\pi H}{S}$. Таким образом, параболоид получается вращением кривой

$$z = \frac{\pi H}{S} x^2.$$

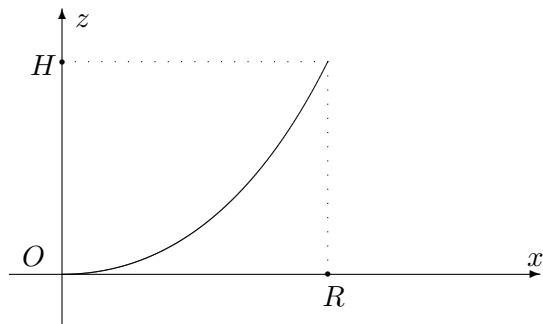


Рис. 8.7

Сечение параболоида плоскостью $z = \text{const}$ представляет собой круг. Радиус круга находим, решая последнее уравнение относительно x :

$$x(z) = \sqrt{\frac{Sz}{\pi H}}.$$

Площадь сечения тела плоскостью $z = \text{const}$

$$S(z) = \pi [x(z)]^2 = \frac{Sz}{H}.$$

Объем тела

$$V = \int_0^H S(z) dz = \frac{S}{H} \int_0^H z dz = \frac{S}{2H} z^2 \Big|_0^H = \frac{1}{2} SH.$$

2460. Пусть для кубируемого тела площадь $S = S(x)$ его поперечного сечения, перпендикулярного к оси Ox , изменяется по квадратичному закону:

$$S(x) = Ax^2 + Bx + C \quad (a \leq x \leq b),$$

где A , B и C – постоянные.

Доказать, что объем этого тела равен:

$$V = \frac{H}{6} \left[S(a) + 4S\left(\frac{a+b}{2}\right) + S(b) \right],$$

где $H = b - a$ (формула Симпсона).

Вычислим объем тела:

$$\begin{aligned}
 V &= \int_a^b (ax^2 + Bx + C)dx = \left(\frac{Ax^3}{3} + \frac{Bx^2}{2} + Cx \right) \Big|_a^b = \\
 &= \frac{A}{3} (b^3 - a^3) + \frac{B}{2} (b^2 - a^2) + C(b - a) = \\
 &= (b - a) \left[\frac{A}{3} (b^2 + ab + a^2) + \frac{B}{2} (b + a) + C \right] = \\
 &= \frac{H}{6} [2A(b^2 + ab + a^2) + 3B(b + a) + 6C].
 \end{aligned}$$

Вычислим правую часть доказываемой формулы:

$$\begin{aligned}
 &\frac{H}{6} \left[S(a) + 4S\left(\frac{a+b}{2}\right) + S(b) \right] = \\
 &= \frac{H}{6} \left[(Aa^2 + Ba + C) + 4\left(A\frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} + B\frac{a+b}{2} + C \right) + \right. \\
 &\quad \left. + (Ab^2 + Bb + C) \right] = \frac{H}{6} \left[(Aa^2 + Ba + C) + A(a^2 + 2ab + b^2) + \right. \\
 &\quad \left. + 2B(a + b) + 4C + (Ab^2 + Bb + C) \right] = \\
 &= \frac{H}{6} [2A(b^2 + ab + a^2) + 3B(b + a) + 6C].
 \end{aligned}$$

Сравнивая полученные результаты, получаем нужную формулу.

2461. Тело представляет собой множество точек $M(x; y; z)$, где $0 \leq z \leq 1$, причем $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, если z рационально, и $-1 \leq x \leq 0$, $-1 \leq y \leq 0$, если z иррационально. Доказать, что объем этого тела не существует, хотя соответствующий интеграл

$$\int_0^1 S(z) dz = 1.$$

Любое описанное многогранное тело должно содержать два куба:

$$K_1 = \{(x; y; z) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\},$$

$$K_2 = \{(x; y; z) : -1 \leq x \leq 0, -1 \leq y \leq 0, -1 \leq z \leq 0\}.$$

Следовательно, верхний объем тела (точная нижняя грань объемов описанных многогранных тел) равен 2. С другой стороны, вписанным многогранным телом может быть только пустое множество, поэтому нижний объем тела (точная верхняя грань объемов вписанных многогранных тел) равен 0. Так как верхний и нижний объемы не совпадают, то тело не кубируемо.

Однако, как нетрудно видеть, при любом z площадь поперечного сечения тела $S(z) = 1$ и

$$\int_0^1 S(z) dz = \int_0^1 dz = 1.$$

Найти объемы тел, ограниченных следующими поверхностями:

2462. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, z = \frac{c}{a} x, z = 0.$

Тело, отсекаемое от цилиндра с помощью двух плоскостей:

$$z = 0, \quad z = \frac{c}{a} x,$$

изображено на рис. 8.8. На этом же рисунке показано сечение тела плоскостью $x = \text{const}$, представляющее собой прямоугольник.

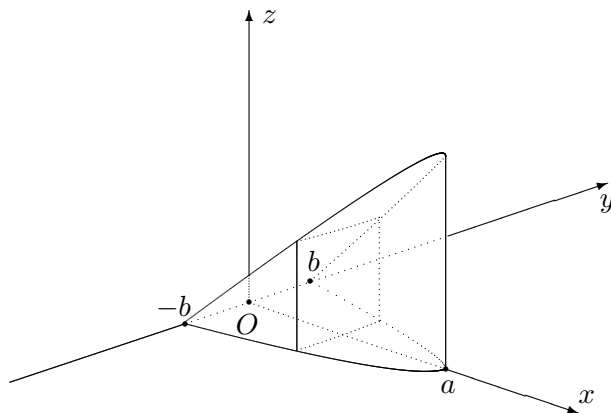


Рис. 8.8

Строго говоря, указанные в задаче поверхности отделяют еще одну часть цилиндра, которая расположена симметрично изображенному на рисунке телу относительно начала координат. Однако согласно ответу в задачнике Демидовича, она не участвует в рассмотрении (в противном случае ответ следовало бы удвоить). Для вычисления площади поперечного сечения $S(x)$ необходимо найти стороны прямоугольника этого сечения. В основании цилиндра лежит эллипс. Из уравнения эллипса, лежащего в основании цилиндра,

$$y = \pm b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

находим длину d_1 горизонтальной стороны:

$$d_1 = 2|y| = 2b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}.$$

Длина вертикальной стороны d_2 находится из уравнения плоскости, ограничивающей тело

$$d_2 = \frac{c}{a} x.$$

Таким образом, площадь поперечного сечения тела

$$S(x) = d_1 d_2 = \frac{2bcx}{a} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}.$$

Объем тела

$$V = \int_0^a S(x) dx = \frac{2bc}{a} \int_0^a x \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx.$$

Делая в интеграле замену $u = 1 - \frac{x^2}{a^2}$, получаем:

$$V = abc \int_0^1 \sqrt{u} du = \frac{2abc}{3} u^{3/2} \Big|_0^1 = \frac{2}{3} abc.$$

2463. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ (эллипсоид).

Уравнение сечения эллипсоида плоскостью $x = \text{const}$ находим оставляя в левой части исходного уравнения слагаемые, содержащие только y и z :

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}.$$

Полученное уравнение описывает эллипс. Записав его в каноническом виде:

$$\frac{y^2}{\left(b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\right)^2} + \frac{z^2}{\left(c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\right)^2} = 1,$$

находим полуоси сечения:

$$a_y = b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}, \quad a_z = c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}.$$

Согласно решению задачи 2403 площадь сечения равна

$$S(x) = \pi a_y a_z = \pi bc \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right).$$

Объем тела

$$V = \int_{-a}^a S(x) dx = \pi bc \int_{-a}^a \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx.$$

В силу четности подынтегральной функции

$$V = 2\pi bc \int_0^a \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = 2\pi bc \left(x - \frac{x^3}{3a^2}\right) \Big|_0^a = \frac{4}{3}\pi abc.$$

2464. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, z = \pm c.$

Рассматриваемое тело представляет собой внутренность однополостного гиперболоида, заключенную между плоскостями $z = \pm c$ (рис. 8.9).

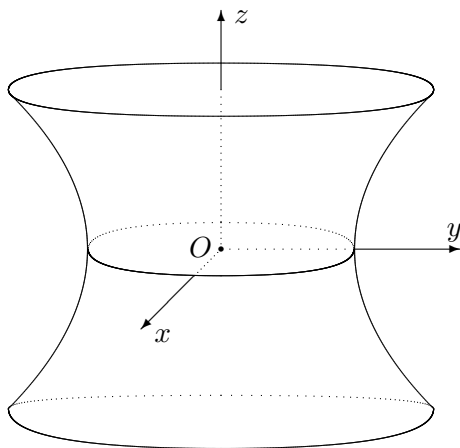


Рис. 8.9

Уравнение сечения эллипсоида плоскостью $z = \text{const}$ находим оставляя в левой части исходного уравнения слагаемые, содержащие только x и y :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{z^2}{c^2}.$$

Полученное уравнение описывает эллипс. Записав его в каноническом виде:

$$\frac{x^2}{\left(a\sqrt{1+\frac{z^2}{c^2}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(b\sqrt{1+\frac{z^2}{c^2}}\right)^2} = 1,$$

находим полуоси сечения:

$$a_x = a\sqrt{1+\frac{z^2}{c^2}}, \quad a_y = b\sqrt{1+\frac{z^2}{c^2}}.$$

Согласно решению задачи 2403 площадь сечения равна

$$S(z) = \pi a_x a_y = \pi ab \left(1 + \frac{z^2}{c^2}\right).$$

Объем тела

$$V = \int_{-c}^c S(z) dz = \pi ab \int_{-c}^c \left(1 + \frac{z^2}{c^2}\right) dz.$$

В силу четности подынтегральной функции

$$V = 2\pi ab \int_0^c \left(1 + \frac{z^2}{c^2}\right) dz = 2\pi ab \left(z + \frac{z^3}{3c^2}\right) \Big|_0^c = \frac{8}{3}\pi abc.$$

2465. $x^2 + z^2 = a^2, \quad y^2 + z^2 = a^2.$

Рассматриваемое тело симметрично относительно плоскости xOy , его часть, расположенная над этой плоскостью, показана на

рис. 8.10. На этом же рисунке показано сечение тела плоскостью $z = \text{const}$, представляющее собой квадрат со стороной $2\sqrt{a^2 - z^2}$. Площадь этого квадрата

$$S(z) = 4(a^2 - z^2).$$

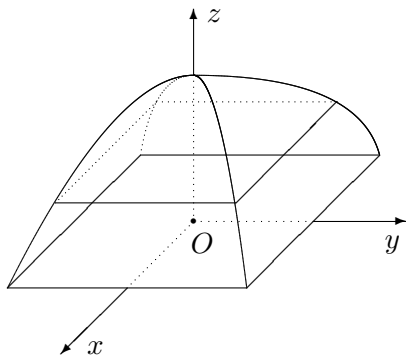


Рис. 8.10

Объем тела

$$\begin{aligned} V &= \int_{-a}^a S(z) dz = 4 \int_{-a}^a (a^2 - z^2) dz = 8 \int_0^a (a^2 - z^2) dz = \\ &= 8 \left(a^2 z - \frac{z^3}{3} \right) \Big|_0^a = \frac{16}{3} a^3. \end{aligned}$$

2466. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x^2 + y^2 = ax$.

Тело, объем которого нужно вычислить, симметрично относительно плоскости xOy . Часть этого тела, лежащая над плоскостью xOy показана на рис. 8.11. На этом же рисунке показано сечение плоскостью $x = \text{const}$.

Для определения объема воспользуемся формулой (8.1). Проекция сечения сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ плоскостью $x = \text{const}$ на плоскость yOz представляет окружность с центром в начале координат и радиусом $\sqrt{a^2 - x^2}$. Проекция сечения цилиндра

$x^2 + y^2 = ax$ на эту же плоскость состоит из двух параллельных прямых $y = \pm\sqrt{ax - x^2}$. Проекция сечения тела $ABCD$ на рис. 8.12 выделена штриховкой.

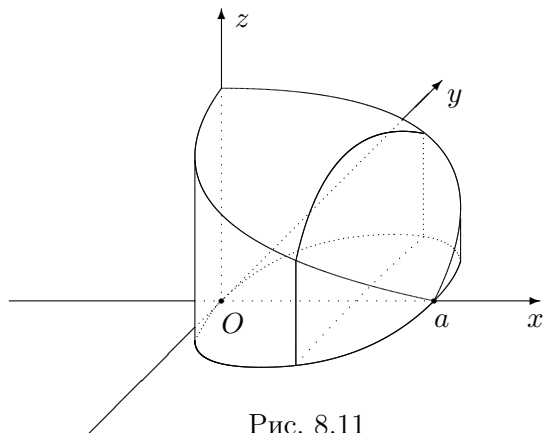


Рис. 8.11

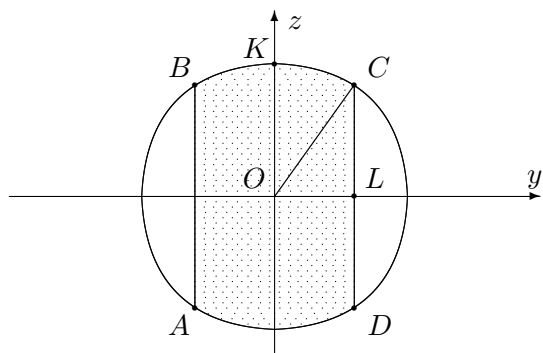


Рис. 8.12

Площадь сечения $S(x)$ в четыре раза больше площади части сечения $OKCL$, лежащего в первой четверти плоскости yOz . Фигура $OKCL$ состоит из сектора OKC и треугольника OCL .

Площадь сектора

$$S_{OKC} = \frac{1}{2} r^2 \alpha,$$

где $r = \sqrt{a^2 - x^2}$ – радиус окружности, а α – величина угла KOC в радианах. Угол KOC равен углу OCL . В треугольнике OCL величина $OL = \sqrt{ax - x^2}$. Следовательно,

$$\alpha = \arcsin \frac{\sqrt{ax - x^2}}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \sqrt{\frac{x}{a + x}}$$

и

$$S_{OKC} = \frac{1}{2} (a^2 - x^2) \arcsin \sqrt{\frac{x}{a + x}}.$$

В прямоугольном треугольнике OCL катет CL находим по теореме Пифагора:

$$CL = \sqrt{r^2 - OL^2} = \sqrt{(a^2 - x^2) - (ax - x^2)} = \sqrt{a^2 - ax}.$$

Площадь этого треугольника

$$S_{OCL} = \frac{1}{2} OL \cdot CL = \frac{1}{2} \sqrt{ax - x^2} \sqrt{a^2 - ax} = \frac{1}{2} (a - x) \sqrt{ax}.$$

Таким образом,

$$S(x) = 2(a^2 - x^2) \arcsin \sqrt{\frac{x}{a + x}} + 2(a - x) \sqrt{ax}.$$

Объем тела

$$\begin{aligned} V &= \int_0^a S(x) dx = \\ &= 2 \int_0^a (a^2 - x^2) \arcsin \sqrt{\frac{x}{a + x}} dx + 2 \int_0^a (a - x) \sqrt{ax} dx. \end{aligned}$$

Для того чтобы вычислить первый интеграл, входящий в полученную формулу, воспользуемся интегрированием по частям:

$$\begin{aligned}
 \int_0^a (a^2 - x^2) \arcsin \sqrt{\frac{x}{a+x}} dx &= \int_0^a \arcsin \sqrt{\frac{x}{a+x}} d\left(a^2x - \frac{x^3}{3}\right) = \\
 &= \left(a^2x - \frac{x^3}{3}\right) \arcsin \sqrt{\frac{x}{a+x}} \Big|_0^a - \int_0^a \left(a^2x - \frac{x^3}{3}\right) \frac{\sqrt{a} dx}{2\sqrt{x}(x+a)} = \\
 &= \frac{\pi a^3}{6} - \frac{\sqrt{a}}{2} \int_0^a \left(a^2x - \frac{x^3}{3}\right) \frac{dx}{\sqrt{x}(x+a)}.
 \end{aligned}$$

В полученном интеграле делаем замену $\sqrt{x} = t$:

$$\begin{aligned}
 \int_0^a \left(a^2x - \frac{x^3}{3}\right) \frac{dx}{\sqrt{x}(x+a)} &= 2 \int_0^{\sqrt{a}} \frac{a^2t^2 - \frac{1}{3}t^6}{t^2 + a} dt = \\
 &= 2 \int_0^{\sqrt{a}} \left(a^2 - \frac{a^3}{t^2 + a} - \frac{1}{3} \left(t^4 - at^2 + a^2 - \frac{a^3}{t^2 + a}\right)\right) dt = \\
 &= 2 \int_0^{\sqrt{a}} \left(\frac{2a^2}{3} - \frac{2a^3}{3(t^2 + a)} - \frac{1}{3}t^4 + \frac{at^2}{3}\right) dt = \\
 &= 2 \left(\frac{2a^2t}{3} - \frac{2a^3}{3\sqrt{a}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{a}} - \frac{t^5}{15} + \frac{at^3}{9}\right) \Big|_0^{\sqrt{a}} = \frac{2a^2\sqrt{a}}{3} \left(\frac{32}{15} - \frac{\pi}{2}\right).
 \end{aligned}$$

Второй интеграл, входящий в формулу для объема, является комбинацией двух табличных интегралов:

$$\int_0^a (a-x)\sqrt{ax} dx = \sqrt{a} \int_0^a (a\sqrt{x} - x\sqrt{x}) dx =$$

$$= \sqrt{a} \left(\frac{2a}{3} x^{3/2} - \frac{2}{5} x^{5/2} \right) \Big|_0^a = \frac{4}{15} a^3.$$

Подставляя вычисленные интегралы в формулу для объема, получаем окончательный ответ:

$$V = 2 \left(\frac{\pi a^3}{6} - \frac{\sqrt{a}}{2} \left(\frac{2a^2 \sqrt{a}}{3} \left(\frac{32}{15} - \frac{\pi}{2} \right) \right) \right) + \\ + 2 \cdot \frac{4}{15} a^3 = \frac{2a^3}{3} \left(\pi - \frac{4}{3} \right).$$

2467. $z^2 = b(a - x)$, $x^2 + y^2 = ax$.

Тело представляет собой пересечение прямого кругового цилиндра $x^2 + y^2 = ax$ с параболическим цилиндром $z^2 = b(a - x)$. Это тело симметрично относительно плоскости xOy . Часть тела, лежащая выше плоскости симметрии, показана на рис. 8.13.

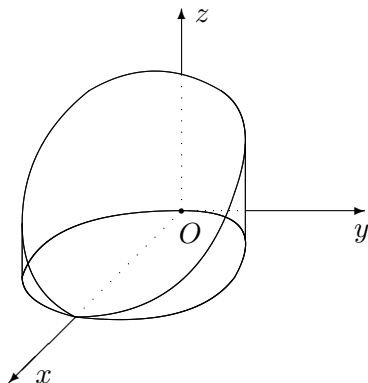


Рис. 8.13

Для определения объема воспользуемся формулой (8.1). Проекция сечения тела плоскостью $x = \text{const}$ на координатную плоскость yOz представляет прямоугольник, ограниченный прямыми $z = \pm \sqrt{b(a - x)}$ и $y = \pm \sqrt{ax - x^2}$. Стороны этого прямоугольника равны $2\sqrt{b(a - x)}$ и $2\sqrt{ax - x^2}$. Площадь сечения

$$S(x) = 4\sqrt{b(a - x)}\sqrt{ax - x^2} = 4\sqrt{bx}(a - x).$$

Объем тела

$$V = \int_0^a S(x) dx = 4\sqrt{b} \int_0^a \sqrt{x}(a-x) dx =$$

$$= 4\sqrt{b} \left[\frac{2a}{3} x^{3/2} - \frac{2}{5} x^{5/2} \right] \Big|_0^a = \frac{16}{15} ba^{5/2}.$$

2468. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{z^2} = 1$ ($0 < z < a$).

Сечение тела плоскостью $x = \text{const}$ представляет эллипс с полуосями a и z . Согласно задаче 2403 его площадь

$$S(z) = \pi az.$$

Объем тела

$$V = \int_0^a S(z) dz = \pi a \int_0^a z dz = \pi a \left(\frac{z^2}{2} \right) \Big|_0^a = \frac{\pi a^3}{2}.$$

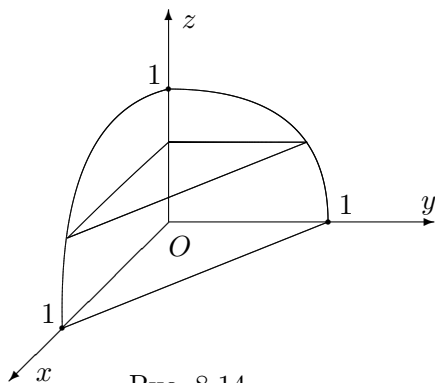


Рис. 8.14

2469. $x + y + z^2 = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Указанные поверхности определяют два тела, симметричные относительно плоскости $z = 0$. Они имеют одинаковый объем, поэтому достаточно вычислить объем тела, лежащего над плоскостью xOy . Это тело вместе с сечением $z = \text{const}$ показано на рис. 8.14.

Сечение тела плоскостью $z = \text{const}$ представляет треугольник, проекция которого на плоскость xOy ограничена координатными прямыми и прямой $x + y = 1 - z^2$. Площадь этого треугольника

$$S(z) = \frac{1}{2} (1 - z^2)^2.$$

Объем тела

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 S(z) dz = \frac{1}{2} \int_0^1 (1 - 2z^2 + z^4) dz = \\ &= \frac{1}{2} \left(z - \frac{2}{3} z^3 + \frac{1}{5} z^5 \right) \Big|_0^1 = \frac{4}{15}. \end{aligned}$$

2470. $x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx = a^2$.

Для вычисления объема тела воспользуемся формулой (8.1). Сечение тела плоскостью $x = \text{const}$ представляет кривую второго порядка:

$$y^2 + yz + z^2 + xy + xz = a^2 - x^2.$$

Приведем это уравнение к каноническому виду. Центр кривой находится в точке $y = -x/3$, $z = -x/3$. Выполняя параллельный перенос в центр:

$$\begin{cases} y = \bar{y} - \frac{x}{3}, \\ z = \bar{z} - \frac{x}{3}, \end{cases}$$

получаем уравнение:

$$\bar{y}^2 + \bar{y}\bar{z} + \bar{z}^2 = a^2 - \frac{2}{3} x^2.$$

После поворота на $\pi/4$:

$$\begin{cases} \bar{y} = \frac{\tilde{y} - \tilde{z}}{\sqrt{2}}, \\ \bar{z} = \frac{\tilde{y} + \tilde{z}}{\sqrt{2}}, \end{cases}$$

получаем уравнение эллипса

$$3\tilde{y}^2 + \tilde{z}^2 = 2a^2 - \frac{4}{3}x^2.$$

Записав это уравнение в каноническом виде

$$\frac{\tilde{y}^2}{\frac{1}{3}(2a^2 - \frac{4}{3}x^2)} + \frac{\tilde{z}^2}{(2a^2 - \frac{4}{3}x^2)} = 1,$$

найдем полуоси:

$$a(x) = \sqrt{\frac{2a^2 - \frac{4}{3}x^2}{3}}, \quad b(x) = \sqrt{2a^2 - \frac{4}{3}x^2}.$$

Отметим, что из вида канонического уравнения следует, что сечение существует при $|x| \leq \sqrt{\frac{3}{2}}a$. Согласно задаче 2403 площадь эллипса с полуосями a и b равна πab , следовательно, площадь сечения тела

$$S(x) = \pi a(x)b(x) = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \left(2a^2 - \frac{4}{3}x^2 \right).$$

Учитывая четность функции $S(x)$ получаем, что объем тела

$$V = \int_{-\sqrt{\frac{3}{2}}a}^{\sqrt{\frac{3}{2}}a} S(x) dx = 2 \int_0^{\sqrt{\frac{3}{2}}a} S(x) dx = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \int_0^{\sqrt{\frac{3}{2}}a} \left(2a^2 - \frac{4}{3}x^2 \right) dx =$$

$$= \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \left(2a^2x - \frac{4}{9}x^3 \right) \Big|_0^{\sqrt{\frac{3}{2}}a} = \frac{4\pi\sqrt{2}a^3}{3}.$$

Замечание. Альтернативный метод предоставляет линейная алгебра. Квадратичная форма

$$Q = x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx$$

ортогональным преобразованием

$$\begin{cases} \tilde{x} = \frac{1}{\sqrt{3}}(x + y + z), \\ \tilde{y} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - y), \\ \tilde{z} = \frac{1}{\sqrt{6}}(x + y - 2z) \end{cases}$$

приводится к каноническому виду:

$$Q = 2\tilde{x}^2 + \frac{1}{2}\tilde{y}^2 + \frac{1}{2}\tilde{z}^2.$$

Отсюда следует, что уравнение поверхности можно записать в следующем виде:

$$\frac{\tilde{x}^2}{(a^2/2)} + \frac{\tilde{y}^2}{2a^2} + \frac{\tilde{z}^2}{2a^2} = 1.$$

Таким образом, рассматриваемая поверхность представляет эллипсоид с полуосями:

$$A = \frac{a}{\sqrt{2}}, \quad B = a\sqrt{2}, \quad C = a\sqrt{2}.$$

Согласно решению задачи 2463 объем эллипсоида

$$V = \frac{4}{3}\pi ABC = \frac{4\pi\sqrt{2}a^3}{3}.$$

Чуть попроще использование метода Лагранжа. Преобразование

$$\begin{cases} \tilde{x} = x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z, \\ \tilde{y} = \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{1}{2\sqrt{3}}z, \\ \tilde{z} = \sqrt{\frac{2}{3}}z \end{cases}$$

приводит форму Q к нормальной форме:

$$Q = \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + \tilde{z}^2.$$

В переменных $\tilde{x}$, $\tilde{y}$, $\tilde{z}$ тело представляет шар радиуса a . Определитель преобразования равен $1/\sqrt{2}$. Так как при линейном преобразовании объем тела в новых переменных получается из объема тела в старых переменных умножением на модуль определителя, то искомый объем равен объему шара $V_1 = \frac{4}{3}\pi a^3$, деленному на определитель (т. е. умноженному на $\sqrt{2}$).

8.2. Объем тела вращения

Объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, задаваемой неравенствами

$$a \leq x \leq b, \quad 0 \leq y \leq y(x),$$

(криволинейная трапеция), равен

$$V = \pi \int_a^b y^2(x) dx. \quad (8.4)$$

В более общем случае, объем области с полостью, образованной вращением вокруг оси Ox фигуры, задаваемой неравенствами

$$a \leq x \leq b, \quad y_1(x) \leq y \leq y_2(x),$$

(криволинейный прямоугольник), где $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — неотрицательные функции, равен

$$V = \pi \int_a^b [y_2^2(x) - y_1^2(x)] dx. \quad (8.5)$$

Меня переменные x и y местами, получаем аналогичные формулы для объема тела вращения плоской фигуры вокруг оси Oy . Объем тела, образованного вращением криволинейной трапеции

$$c \leq y \leq d, \quad 0 \leq x \leq x(y),$$

вокруг оси Oy , вычисляется по формуле:

$$V = \pi \int_c^d x^2(y) dy, \quad (8.6)$$

а объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy криволинейного прямоугольника

$$c \leq y \leq d, \quad x_1(y) \leq x \leq x_2(y),$$

($x_1(y)$ и $x_2(y)$ неотрицательны), равен:

$$V = \pi \int_c^d [x_2^2(y) - x_1^2(y)] dy. \quad (8.7)$$

Еще одна формула для вычисления объема тела вращения приводится в задаче 2471.

2471. Доказать, что объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy плоской фигуры

$$a \leq x \leq b, \quad 0 \leq y \leq y(x),$$

где $y(x)$ – однозначная непрерывная функция, равен:

$$V_y = 2\pi \int_a^b xy(x) dx. \quad (8.8)$$

Возьмем произвольное разбиение $T = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ отрезка $[a; b]$. Выделим часть объема тела вращения V_i , которая представляет объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy части нашей фигуры, отвечающей отрезку разбиения $[x_i; x_{i+1}]$:

$$x_i \leq x \leq x_{i+1}, \quad 0 \leq y \leq y(x).$$

Обозначим

$$m_i = \min_{[x_i; x_{i+1}]} y(x), \quad M_i = \max_{[x_i; x_{i+1}]} y(x).$$

Рассматриваемая часть тела вращения находится внутри полого цилиндра, полученного вращением прямоугольника

$$x_i \leq x \leq x_{i+1}, \quad 0 \leq y \leq M_i$$

вокруг оси Oy и содержит внутри себя аналогичный цилиндр, получаемый вращением прямоугольника

$$x_i \leq x \leq x_{i+1}, \quad 0 \leq y \leq m_i.$$

Отсюда следует, что величина V_i находится между объемами этих цилиндров.

Воспользуемся, далее, следующей формулой для объема полого цилиндра с внутренним радиусом r , внешним радиусом R и высотой H (рис. 8.15)

$$V = 2\pi \frac{R+r}{2} (R-r)H.$$

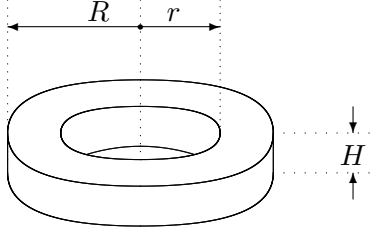


Рис. 8.15

Обозначим через ξ_i середину отрезка $[x_i; x_{i+1}]$. Применяя формулу для объема полого цилиндра, получаем, что

$$2\pi\xi_i\Delta x_i m_i \leq V_i \leq 2\pi\xi_i\Delta x_i M_i.$$

Так как объем тела вращения

$$V = \sum_{i=0}^{n-1} V_i,$$

то

$$\sum_{i=0}^{n-1} 2\pi\xi_i\Delta x_i m_i \leq V \leq \sum_{i=0}^{n-1} 2\pi\xi_i\Delta x_i M_i.$$

Из непрерывности функции $y(x)$ на отрезке $[a; b]$ следует, что

$$m_i = y(\theta_i^{(1)}), \quad M_i = y(\theta_i^{(2)}),$$

где $\theta_i^{(1)}, \theta_i^{(2)} \in [x_i; x_{i+1}]$. Таким образом,

$$\sum_{i=0}^{n-1} 2\pi\xi_i y(\theta_i^{(1)})\Delta x_i \leq V \leq \sum_{i=0}^{n-1} 2\pi\xi_i y(\theta_i^{(2)})\Delta x_i.$$

Согласно решению задачи 2193 в применении к паре функций $f(x) = 2\pi x$ и $\varphi(x) = y(x)$:

$$\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} 2\pi\xi_i y(\theta_i^{(1)})\Delta x_i = 2\pi \int_a^b x y(x) dx,$$

$$\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} 2\pi \xi_i y(\theta_i^{(2)}) \Delta x_i = 2\pi \int_a^b x y(x) dx$$

и по теореме о переходе к пределу в неравенствах

$$V = 2\pi \int_a^b x y(x) dx.$$

Найти объемы тел, ограниченных поверхностями, полученными при вращении отрезков следующих линий:

2472. $y = b \left(\frac{x}{a} \right)^{2/3}$ ($0 \leq x \leq a$) вокруг оси Ox (нейлоид).

Согласно формуле (8.4), искомый объем

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^a \left[b \left(\frac{x}{a} \right)^{2/3} \right]^2 dx = \frac{\pi b^2}{a^{4/3}} \int_0^a x^{4/3} dx = \\ &= \frac{\pi b^2}{a^{4/3}} \left(\frac{3}{7} x^{7/3} \right) \Big|_0^a = \frac{3}{7} \pi a b^2. \end{aligned}$$

2473. $y = 2x - x^2$, $y = 0$: а) вокруг оси Ox ; б) вокруг оси Oy .

а). Парабола $y = 2x - x^2$ пересекает ось абсцисс в точках $x = 0$ и $x = 2$ (рис. 8.16).

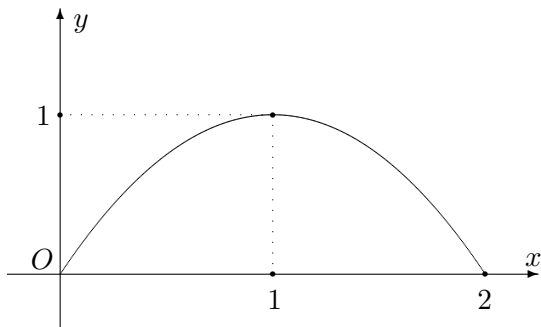


Рис. 8.16

Тело получается вращением криволинейной трапеции

$$0 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq y \leq 2x - x^2$$

вокруг оси Ox . Применяя формулу (8.4), находим

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^2 (2x - x^2)^2 dx = \pi \int_0^2 (4x^2 - 4x^3 + x^4) dx = \\ &= \pi \left(\frac{4}{3} x^3 - x^4 + \frac{1}{5} x^5 \right) \Big|_0^2 = \frac{16\pi}{15}. \end{aligned}$$

б). Тело получается вращением той же фигура, что и в пункте а, но только вокруг оси Oy . Относительно этой оси данная фигура уже не является криволинейной трапецией, а представляет криволинейный прямоугольник (см. рис. 8.16). Вершина параболы $y = 2x - x^2$ имеет координаты $(1; 1)$. Вдоль оси Oy фигура ограничена прямыми $y = 0$, $y = 1$. Уравнения функций, графики которых ограничивают фигуру слева и справа находим, решая квадратное уравнение $y = 2x - x^2$ относительно переменной x . Это дает:

$$x_1(y) = 1 - \sqrt{1 - y}, \quad x_2(y) = 1 + \sqrt{1 - y}.$$

Применяя формулу (8.7), находим

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 [x_2^2(y) - x_1^2(y)] dy = \\ &= \pi \int_0^1 [(1 + 2\sqrt{1 - y} + 1 - y) - (1 - 2\sqrt{1 - y} + 1 - y)] dy = \\ &= 4\pi \int_0^1 \sqrt{1 - y} dy = -\frac{8\pi}{3} (1 - y)^{3/2} \Big|_0^1 = \frac{8\pi}{3}. \end{aligned}$$

Замечание. Применение формулы (8.8) дает более простой интеграл:

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^2 x(2x - x^2)dx = 2\pi \int_0^2 (2x^2 - x^3)dx = \\ &= 2\pi \left(\frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^2 = \frac{8\pi}{3}. \end{aligned}$$

2474. $y = \sin x$, $y = 0$ ($0 \leq x \leq \pi$): а) вокруг оси Ox ; б) вокруг оси Oy .

а). По формуле (8.4)

$$V = \pi \int_0^\pi \sin^2 x \, dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi (1 - \cos 2x) dx = \frac{\pi}{2} \left(x - \frac{\sin 2x}{2} \right) \Big|_0^\pi = \frac{\pi^2}{2}.$$

б). По формуле (8.8)

$$V = 2\pi \int_0^\pi x \sin x \, dx.$$

С помощью интегрирования по частям получаем:

$$\begin{aligned} \int x \sin x \, dx &= - \int x \, d(\cos x) = \\ &= -x \cos x + \int \cos x \, dx = -x \cos x + \sin x + C. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$V = 2\pi (-x \cos x + \sin x) \Big|_0^\pi = 2\pi^2.$$

Замечание. Применение формулы (8.7) приводит к более сложным выкладкам. Для сравнения приведем вычисление объема по этой формуле. Обратной функцией к $y = \sin x$ на участке

$x \in [0; \pi/2]$ является $x = \arcsin y$, а на участке $x \in [\pi/2; \pi]$ — это $x = \pi - \arcsin y$. Таким образом, тело получается вращением криволинейного прямоугольника

$$0 \leq y \leq 1, \quad \arcsin y \leq x \leq \pi - \arcsin y$$

и его объем

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 [(\pi - \arcsin y)^2 - \arcsin^2 y] dy = \\ &= \pi \int_0^1 (\pi^2 - 2\pi \arcsin y) dy = \pi^3 - 2\pi^2 \int_0^1 \arcsin y dy. \end{aligned}$$

Оставшийся интеграл берется интегрированием по частям:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \arcsin y dy &= y \arcsin y \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{y dy}{\sqrt{1-y^2}} = \\ &= \frac{\pi}{2} + \sqrt{1-y^2} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2} - 1. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$V = \pi^3 - 2\pi^2 \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) = 2\pi^2.$$

2475. $y = b \left(\frac{x}{a} \right)^2$, $y = b \left| \frac{x}{a} \right|$: а) вокруг оси Ox ; б) вокруг оси Oy .

а). Тело получается вращением вокруг оси Ox криволинейного прямоугольника

$$-a \leq x \leq a, \quad y_1(x) \leq y \leq y_2(x),$$

где

$$y_1(x) = b \left| \frac{x}{a} \right|, \quad y_2(x) = b \left(\frac{x}{a} \right)^2$$

и его объем

$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_{-a}^a (y_2^2(x) - y_1^2(x)) dx = \frac{\pi b^2}{a^2} \int_{-a}^a \left(x^2 - \frac{x^4}{a^2} \right) dx = \\
 &= \frac{2\pi b^2}{a^2} \int_0^a \left(x^2 - \frac{x^4}{a^2} \right) dx = \frac{2\pi b^2}{a^2} \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5a^2} \right) \Big|_0^a = \frac{4\pi ab^2}{15}.
 \end{aligned}$$

б). Рассматриваемая фигура на плоскости xOy симметрична относительно оси Oy , поэтому ее часть, лежащая в первой координатной четверти, дает при вращении то же тело, что и вся фигура. Уравнения функций, графики которых ограничивают часть фигуры, лежащей в первой четверти (рис. 8.17), находим решая исходные уравнения кривых относительно переменной x :

$$x_1(y) = \frac{ay}{b}, \quad x_2(y) = \frac{a\sqrt{y}}{\sqrt{b}}.$$

Вдоль оси Oy фигура ограничена прямыми $y = 0$ и $y = b$.

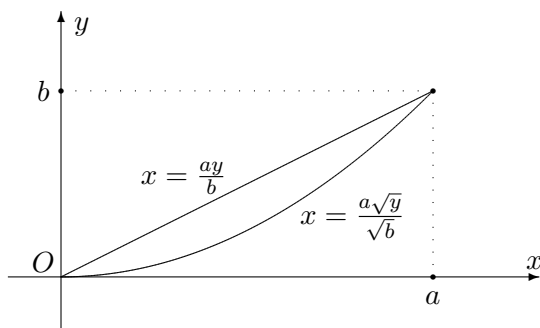


Рис. 8.17

Таким образом, тело образовано вращением вокруг оси Oy криволинейного прямоугольника

$$0 \leq y \leq b, \quad x_1(y) \leq x \leq x_2(y)$$

и его объем вычисляем по формуле (8.7):

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^b (x_2^2(y) - x_1^2(y)) dy = \frac{\pi a^2}{b} \int_0^b \left(y - \frac{y^2}{b} \right) dy = \\ &= \frac{\pi a^2}{b} \left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3b} \right) \Big|_0^b = \frac{\pi a^2 b}{6}. \end{aligned}$$

2476. $y = e^{-x}$, $y = 0$ ($0 \leq x < +\infty$): а) вокруг оси Ox ;
б) вокруг оси Oy .

а). По формуле (8.4) с $b = +\infty$ и $y(x) = e^{-x}$ получаем:

$$V = \pi \int_0^{+\infty} y^2(x) dx = \pi \int_0^{+\infty} e^{-2x} dx = - \frac{\pi e^{-2x}}{2} \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}.$$

б). По формуле (8.8) с $b = +\infty$ и $y(x) = e^{-x}$ находим, интегрируя по частям:

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^{+\infty} xy(x) dx = 2\pi \int_0^{+\infty} xe^{-x} dx = -2\pi \int_0^{+\infty} x d(e^{-x}) = \\ &= -2\pi \left(xe^{-x} \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} e^{-x} dx \right) = \\ &= 2\pi \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = -2\pi e^{-x} \Big|_0^{+\infty} = 2\pi. \end{aligned}$$

Замечание. Применение формулы (8.6) также приводит к несложному интегралу. Рассматривая тело как результат вращения вокруг оси Oy криволинейной трапеции

$$0 < y \leq 1, \quad 0 \leq x \leq -\ln y$$

получаем

$$V = \pi \int_0^1 x^2(y) dy = \pi \int_0^1 \ln^2 y dy.$$

Интегрируя дважды по частям, находим:

$$\begin{aligned} \int \ln^2 y dy &= y \ln^2 y - 2 \int \ln y dy = \\ &= y \ln^2 y - 2 \left(y \ln y - \int dy \right) = \\ &= y \ln^2 y - 2y \ln y + 2y + C. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$V = \pi (y \ln^2 y - 2y \ln y + 2y) \Big|_0^1 = 2\pi.$$

2477. $x^2 + (y - b)^2 = a^2$ ($0 < a \leq b$) вокруг оси Ox .

Вращаемая фигура является кругом с центром $(0; b)$ и радиусом a . Вдоль оси Ox она ограничена прямыми $x = -a$ и $x = a$, а снизу и сверху – графиками функций $y_1(x) = b - \sqrt{a^2 - x^2}$ и $y_2(x) = b + \sqrt{a^2 - x^2}$. По формуле (8.5)

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-a}^a (y_2^2(x) - y_1^2(x)) dx = \\ &= \pi \int_{-a}^a \left(\left(b + \sqrt{a^2 - x^2} \right)^2 - \left(b - \sqrt{a^2 - x^2} \right)^2 \right) dx = \\ &= 4\pi b \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = 8\pi b \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \\ &= 8\pi b \left(\frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} \right) \Big|_0^a = 2\pi^2 a^2 b. \end{aligned}$$

2478. $x^2 - xy + y^2 = a^2$ вокруг оси Ox .

Кривая представляет собой эллипс и имеет центральную симметрию относительно начала координат. Эта кривая ограничивает фигуру, которую можно рассматривать как криволинейный прямоугольник. Уравнения функций, графики которых ограничивают фигуру снизу и сверху, находим решая квадратное уравнение кривой относительно переменной y :

$$y_1(x) = \frac{1}{2} \left(x - \sqrt{4a^2 - 3x^2} \right), \quad y_2(x) = \frac{1}{2} \left(x + \sqrt{4a^2 - 3x^2} \right).$$

Эти функции определены при $|x| \leq 2a/\sqrt{3}$ и вдоль оси Ox фигура ограничена прямыми $x = \pm 2a/\sqrt{3}$ (рис. 8.18).

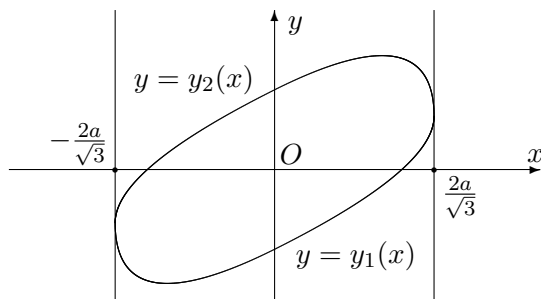


Рис. 8.18

При вращении фигур, симметричных относительно оси вращения, получается одно и то же тело. Фигура, симметричная рассматриваемой относительно оси Ox , ограничена кривой $x^2 + xy + y^2 = a^2$. При вращении объединения этих фигур вокруг оси Ox мы получаем то же самое тело, что и при вращении исходной фигуры. Объединенная фигура представлена на рис. 8.19. Координатные оси она пересекает в точках $x = \pm a$, $y = \pm a$.

Объединенная фигура симметрична относительно обеих координатных осей, поэтому объем тела вращения в два раза больше объема тела вращения части этой фигуры, лежащей в первой координатной четверти. Эта часть представляет собой криволинейный прямоугольник, ограниченный прямыми $x = 0$, $x =$

$= 2a/\sqrt{3}$ и графиками двух функций: сверху графиком $y_2(x)$, а снизу графиком

$$y_1^*(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq a, \\ y_1(x), & a \leq x \leq 2a/\sqrt{3}. \end{cases}$$

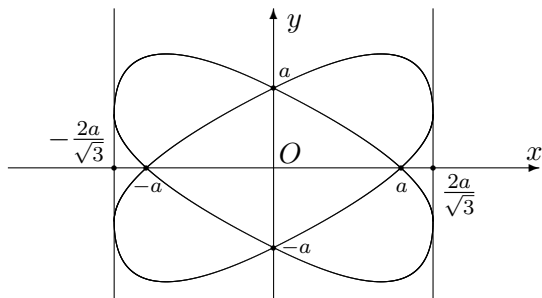


Рис. 8.19

По формуле (8.5) искомый объем

$$V = 2\pi \int_0^{2a/\sqrt{3}} \left(y_2^2(x) - y_1^{*2}(x) \right) dx = 2\pi \int_0^{2a/\sqrt{3}} y_2^2(x) dx - 2\pi \int_{2a/\sqrt{3}}^a y_1^2(x) dx.$$

Вычислим каждый из полученных интегралов:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{2a/\sqrt{3}} y_2^2(x) dx = \frac{1}{4} \int_0^{2a/\sqrt{3}} \left(x + \sqrt{4a^2 - 3x^2} \right)^2 dx = \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{2a/\sqrt{3}} \left(x^2 + 2x\sqrt{4a^2 - 3x^2} + 4a^2 - 3x^2 \right) dx = \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{2a/\sqrt{3}} \left(4a^2 - 2x^2 + 2x\sqrt{4a^2 - 3x^2} \right) dx = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4} \left(4a^2 x - \frac{2}{3} x^3 - \frac{2}{9} (4a^2 - 3x^2)^{3/2} \right) \Big|_0^{2a/\sqrt{3}} = \frac{a^3}{4} \left(\frac{56}{9\sqrt{3}} + \frac{16}{9} \right). \\
I_2 &= \int_a^{2a/\sqrt{3}} y_1^2(x) dx = \frac{1}{4} \int_a^{2a/\sqrt{3}} \left(x - \sqrt{4a^2 - 3x^2} \right)^2 dx = \\
&= \frac{1}{4} \int_a^{2a/\sqrt{3}} \left(x^2 - 2x\sqrt{4a^2 - 3x^2} + 4a^2 - 3x^2 \right) dx = \\
&= \frac{1}{4} \int_a^{2a/\sqrt{3}} \left(4a^2 - 2x^2 - 2x\sqrt{4a^2 - 3x^2} \right) dx = \\
&= \frac{1}{4} \left(4a^2 x - \frac{2}{3} x^3 + \frac{2}{9} (4a^2 - 3x^2)^{3/2} \right) \Big|_a^{2a/\sqrt{3}} = \frac{a^3}{4} \left(\frac{56}{9\sqrt{3}} - \frac{32}{9} \right).
\end{aligned}$$

Отсюда получаем:

$$\begin{aligned}
V &= 2\pi(I_1 - I_2) = \\
&= 2\pi \left[\frac{a^3}{4} \left(\frac{56}{9\sqrt{3}} + \frac{16}{9} \right) - \frac{a^3}{4} \left(\frac{56}{9\sqrt{3}} - \frac{32}{9} \right) \right] = \frac{8\pi a^3}{3}.
\end{aligned}$$

2479. $y = e^{-x} \sqrt{\sin x}$ ($0 \leq x < +\infty$) вокруг оси Ox .

Область определения рассматриваемой функции представляет собой объединение отрезков $[2\pi k; \pi + 2\pi k]$ по всем неотрицательным целым k . Соответственно, искомый объем представляет собой сумму ряда

$$V = \sum_{k=0}^{+\infty} V_k,$$

где V_k – объем тела вращения графика функции $y(x) = e^{-x} \sqrt{\sin x}$ на отрезке $[2\pi k; \pi + 2\pi k]$. Согласно формуле (8.4)

$$V_k = \pi \int_{2\pi k}^{\pi+2\pi k} y^2(x) dx = \pi \int_{2\pi k}^{\pi+2\pi k} e^{-2x} \sin x dx.$$

Известно, что

$$\int e^{ax} \sin bx \, dx = \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2} e^{ax} + C$$

(задача 1829 из [7]). Следовательно,

$$V_k = \pi \left(\frac{-2 \sin x - \cos x}{5} e^{-2x} \right) \Big|_{2\pi k}^{\pi+2\pi k} = \frac{e^{-4\pi k} (1 + e^{-2\pi})}{5}.$$

Суммируя геометрическую прогрессию со знаменателем $q = e^{-4\pi}$, получаем

$$\begin{aligned} V &= \frac{\pi}{5} (1 + e^{-2\pi}) \sum_{k=0}^{+\infty} (e^{-4\pi})^k = \\ &= \frac{\pi}{5} (1 + e^{-2\pi}) \cdot \frac{1}{1 - e^{-4\pi}} = \frac{\pi}{5(1 - e^{-2\pi})}. \end{aligned}$$

2480. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$), $y = 0$:
а) вокруг оси Ox ; б) вокруг оси Oy ; в) вокруг прямой $y = 2a$.

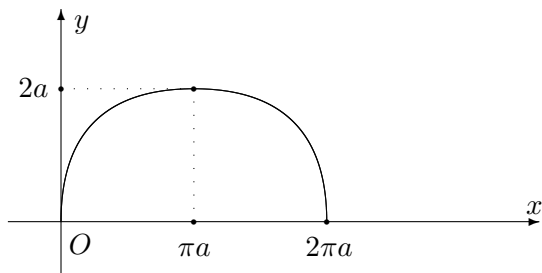


Рис. 8.20

Параметрическая кривая

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$$

($0 \leq t \leq 2\pi$) задает некоторую функцию $y(x)$, определенную на отрезке $[0; 2\pi a]$. График этой функции (циклоида) представлен на рис. 8.20.

а). Тело образовано вращением криволинейной трапеции

$$0 \leq x \leq 2\pi a, \quad 0 \leq y \leq y(x)$$

и его объем вычисляется по формуле (8.4):

$$V = \pi \int_0^{2\pi a} y^2(x) dx.$$

Переходя в интеграле к переменной t и учитывая, что $y(x) = a(1 - \cos t)$, $dx = x'(t) dt = a(1 - \cos t) dt$, получаем

$$V = \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^3 dt = \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - 3 \cos t + 3 \cos^2 t + \cos^3 t) dt.$$

Согласно формулам тригонометрии

$$\cos^2 t = \frac{1}{2} (1 + \cos 2t), \quad \cos^3 t = \frac{1}{4} (\cos 3t + 3 \cos t),$$

следовательно,

$$\begin{aligned} V &= \pi a^3 \int_0^{2\pi} \left(\frac{5}{2} - \frac{9}{4} \cos t + \frac{3}{2} \cos 2t + \frac{1}{4} \cos 3t \right) dt = \\ &= \pi a^3 \left(\frac{5}{2} t - \frac{9}{4} \sin t + \frac{3}{4} \sin 2t + \frac{1}{12} \sin 3t \right) \Big|_0^{2\pi} = 5\pi^2 a^3. \end{aligned}$$

б). Тело образовано вращением той же криволинейной трапеции

$$0 \leq x \leq 2\pi a, \quad 0 \leq y \leq y(x),$$

но вокруг оси Oy . Объем тела можно вычислить по формуле (8.8):

$$V = 2\pi \int_0^{2\pi a} xy(x) dx.$$

Переходя к переменной t , получаем

$$\begin{aligned} V &= 2\pi a^3 \int_0^{2\pi} (t - \sin t)(1 - \cos t)^2 dt = \\ &= 2\pi a^3 \int_0^{2\pi} (t - \sin t - 2t \cos t + 2 \sin t \cos t - \sin t \cos^2 t + t \cos^2 t) dt = \\ &= 2\pi a^3 \left(\int_0^{2\pi} t dt - \int_0^{2\pi} \sin t dt - 2 \int_0^{2\pi} t \cos t dt + \right. \\ &\quad \left. + 2 \int_0^{2\pi} \sin t \cos t dt - \int_0^{2\pi} \sin t \cos^2 t dt + \int_0^{2\pi} t \cos^2 t dt \right). \end{aligned}$$

Вычисляем полученные интегралы:

$$I_1 = \int_0^{2\pi} t dt = \frac{t^2}{2} \Big|_0^{2\pi} = 2\pi^2.$$

$$I_2 = \int_0^{2\pi} \sin t dt = -\cos t \Big|_0^{2\pi} = 0.$$

$$I_3 = \int_0^{2\pi} t \cos t dt = \int_0^{2\pi} t d(\sin t) = t \sin t \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \sin t dt =$$

$$= (t \sin t + \cos t) \Big|_0^{2\pi} = 0.$$

$$I_4 = \int_0^{2\pi} \sin t \cos t \, dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sin 2t \, dt = -\frac{1}{4} \cos 2t \Big|_0^{2\pi} = 0.$$

$$I_5 = \int_0^{2\pi} \sin t \cos^2 t \, dt = -\int_0^{2\pi} \cos^2 t \, d(\cos t) = -\frac{\cos^3 t}{3} \Big|_0^{2\pi} = 0.$$

$$I_6 = \int_0^{2\pi} t \cos^2 t \, dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} t(1 + \cos 2t) \, dt =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} t \, dt + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} t \cos 2t \, dt =$$

$$= \frac{t^2}{4} \Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} t \, d(\sin 2t) = \pi^2 + \frac{1}{4} \left(t \sin 2t \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \sin 2t \, dt \right) =$$

$$= \pi^2 + \frac{1}{4} \left(t \sin 2t - \frac{1}{2} \cos 2t \right) \Big|_0^{2\pi} = \pi^2.$$

Таким образом,

$$V = 2\pi a^3 (2\pi^2 + 0 + 0 + 0 + 0 + \pi^2) = 6\pi^3 a^3.$$

в). Перейдем в систему координат, получающуюся симметрией относительно оси Ox и сдвигом вдоль оси Oy на величину $2a$. Преобразование координат имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \tilde{x} = x, \\ \tilde{y} = 2a - y. \end{cases}$$

При таком преобразовании прямая $y = 2a$ переходит в ось абсцисс, а уравнение циклоиды принимает вид:

$$\begin{cases} \tilde{x} = a(t - \sin t), \\ \tilde{y} = a(1 + \cos t). \end{cases}$$

Это уравнение определяет некоторую функцию $\tilde{y}(x)$, определенную на отрезке $[0; 2\pi a]$, а рассматриваемое тело представляет собой результат вращения криволинейного прямоугольника

$$0 \leq \tilde{x} \leq 2\pi a, \quad \tilde{y}(x) \leq \tilde{y} \leq 2a$$

вокруг оси абсцисс (в новой системе координат).

По формуле (8.5) искомый объем

$$V = \pi \int_0^{2\pi a} (4a^2 - \tilde{y}^2(\tilde{x})) d\tilde{x}.$$

Переходя к переменной t , получаем:

$$\begin{aligned} V &= \pi a^3 \int_0^{2\pi} (4 - (1 + \cos t)^2) (1 - \cos t) dt = \\ &= \pi a^3 \int_0^{2\pi} (3 - \cos t + \cos^2 t + \cos^3 t) dt. \end{aligned}$$

С помощью тригонометрических формул

$$\cos^2 t = \frac{1}{2}(1 + \cos 2t), \quad \cos^3 t = \frac{1}{4}(\cos 3t + 3 \cos t)$$

имеем:

$$V = \pi a^3 \int_0^{2\pi} \left(\frac{7}{2} - \frac{1}{4} \cos t + \frac{1}{2} \cos 2t + \frac{1}{4} \cos 3t \right) dt =$$

$$= \pi a^3 \left(\frac{7}{2} t - \frac{1}{4} \sin t + \frac{1}{4} \sin 2t + \frac{1}{12} \sin 3t \right) \Big|_0^{2\pi} = 7\pi^2 a^3.$$

Замечание. Для случая б) вместо формулы (8.8) можно было применить формулу (8.7). С точки зрения объема вычислений оба подхода примерно равносильны. Для сравнения приведем вычисления, выполненные по формуле (8.7).

Пусть $x_1(y)$ – функция определяемая параметрическими уравнениями при $x \in [0; \pi a]$ ($t \in [0; \pi]$), а $x_2(y)$ – функция, определяемая теми же уравнениями, но при $x \in [\pi a; 2\pi a]$ ($t \in [\pi; 2\pi]$). В данном случае можно привести их явный вид:

$$x_1(y) = a \left(2 \arcsin \sqrt{\frac{y}{2a}} - \frac{\sqrt{y(2a-y)}}{a} \right),$$

$$x_2(y) = a \left(2\pi - 2 \arcsin \sqrt{\frac{y}{2a}} + \frac{\sqrt{y(2a-y)}}{a} \right),$$

однако эти выражения нам не понадобятся, так как при вычислениях интегралов мы будем переходить к переменной t .

По формуле (8.7)

$$V = \pi \int_0^{2a} (x_2^2(y) - x_1^2(y)) dy = \pi \left(\int_0^{2a} x_2^2(y) dy - \int_0^{2a} x_1^2(y) dy \right).$$

Делая замену переменной (y на t), получаем:

$$\int_0^{2a} x_1^2(y) dy = a^3 \int_0^{\pi} (t - \sin t)^2 \sin t dt,$$

$$\int_0^{2a} x_2^2(y) dy = a^3 \int_{2\pi}^{\pi} (t - \sin t)^2 \sin t dt = -a^3 \int_{\pi}^{2\pi} (t - \sin t)^2 \sin t dt.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
 V &= -\pi a^3 \left(\int_{\pi}^{2\pi} (t - \sin t)^2 \sin t \, dt + \int_0^{\pi} (t - \sin t)^2 \sin t \, dt \right) = \\
 &= -\pi a^3 \int_0^{2\pi} (t - \sin t)^2 \sin t \, dt = -\pi a^3 \int_0^{2\pi} (t^2 \sin t - 2t \sin^2 t + \sin^3 t) \, dt.
 \end{aligned}$$

С помощью интегрирования по частям и формул тригонометрии находим:

$$\begin{aligned}
 \int t^2 \sin t \, dt &= - \int t^2 d(\cos t) = -t^2 \cos t + 2 \int t \cos t \, dt = \\
 &= -t^2 \cos t + 2 \int t d(\sin t) = -t^2 \cos t + 2t \sin t - 2 \int \sin t \, dt = \\
 &= -t^2 \cos t + 2t \sin t + 2 \cos t + C, \\
 \int t \sin^2 t \, dt &= \frac{1}{2} \int t(1 - \cos 2t) dt = \frac{t^2}{4} - \frac{1}{4} \int t d(\sin 2t) = \\
 &= \frac{t^2}{4} - \frac{t}{4} \sin 2t + \frac{1}{4} \int \sin 2t \, dt = \frac{t^2}{4} - \frac{t}{4} \sin 2t - \frac{1}{8} \cos 2t + C, \\
 \int \sin^3 t \, dt &= \frac{1}{4} \int (3 \sin t - \sin 3t) dt = -\frac{3}{4} \cos t + \frac{1}{12} \cos 3t + C.
 \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
 V &= -\pi a^3 \left(-t^2 \cos t + 2t \sin t + \frac{5}{4} \cos t - \frac{t^2}{2} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{t}{2} \sin 2t + \frac{1}{4} \cos 2t + \frac{1}{12} \cos 3t \right) \Big|_0^{2\pi} = 6\pi^3 a^3.
 \end{aligned}$$

2481. $x = a \sin^3 t$, $y = b \cos^3 t$ ($0 \leq t \leq 2\pi$): а) вокруг оси Ox ; б) вокруг оси Oy .

Кривая симметрична относительно обеих координатных осей, ее график представлен на рис. 8.21.

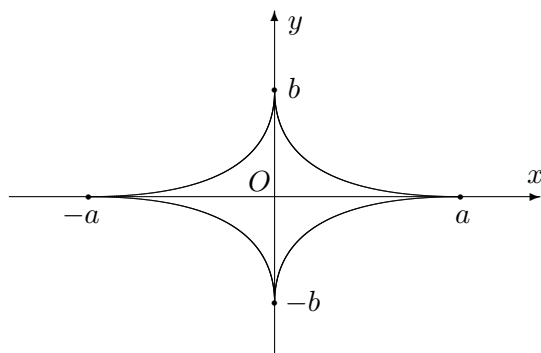


Рис. 8.21

а). В силу симметрии кривой можно вычислить объем тела вращения, отвечающего участку кривой, лежащей в первой координатной четверти ($t \in [0; \pi/2]$). Искомый объем V будет в два раза больше вычисленного. На участке $t \in [0; \pi/2]$ кривая задает некоторую функцию $y(x)$, определенную на отрезке $[0; a]$ и график которой совпадает с графиком кривой. Применяя формулу (8.4), получаем

$$V = 2\pi \int_0^a y^2(x) dx.$$

Переходя к переменной t и делая замену $\sin t = u$, имеем:

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^{\pi/2} (b \cos^3 t)^2 d(a \sin^3 t) = 6\pi ab^2 \int_0^{\pi/2} \cos^7 t \sin^2 t dt = \\ &= 6\pi ab^2 \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2 t)^3 \sin^2 t d(\sin t) = 6\pi ab^2 \int_0^1 (1 - u^2)^3 u^2 du = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 6\pi ab^2 \int_0^1 (u^2 - 3u^4 + 3u^6 - u^8) du = \\
&= 6\pi ab^2 \left(\frac{1}{3} u^3 - \frac{3}{5} u^5 + \frac{3}{7} u^7 - \frac{1}{9} u^9 \right) \Big|_0^1 = \frac{32}{105} \pi ab^3.
\end{aligned}$$

б). Второй случай сводится к первому перестановкой переменных x и y , а также параметров a и b . Делая соответствующую перестановку в ответе, получаем

$$V = \frac{32}{105} \pi a^3 b.$$

2481.1. Найти объем тела, образованного вращением площади петли кривой $x = 2t - t^2$, $y = 4t - t^3$ вокруг: а) оси Ox ; б) оси Oy .

График параметрической кривой изображен на рис. 8.22.

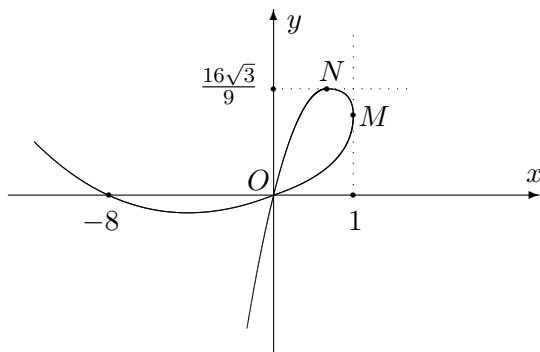


Рис. 8.22

Петля кривой образована участком $OMNO$, отвечающим изменению параметра t на отрезке $[0; 2]$. При изменении t от нуля до значения $t = 1$ точка кривой описывает дугу OM . Точка M имеет координаты $(1; 3)$. При изменении величины t от значения $t = 1$ до значения $t = 2\sqrt{3}/3$ точка кривой описывает дугу MN .

Точка N , отвечающая наибольшему значению ординаты кривой, имеет координаты $(4(\sqrt{3}-1)/3; 16\sqrt{3}/9)$. Наконец, изменение параметра t на промежутке $(2\sqrt{3}/3; 2)$ отвечает дуге кривой NO .

а). Пусть $y_1(x)$ – функция, графиком которой является дуга OM , а $y_2(x)$ – функция, графиком которой является дуга ONM . По формуле (8.5) искомый объем

$$V = \pi \int_0^1 (y_2^2(x) - y_1^2(x)) dx = \pi \left(\int_0^1 y_2^2(x) dx - \int_0^1 y_1^2(x) dx \right).$$

Переходя к переменной t , получаем:

$$\begin{aligned} V &= \pi \left(\int_2^1 (4t - t^3)^2 (2 - 2t) dt - \int_0^1 (4t - t^3)^2 (2 - 2t) dt \right) = \\ &= -\pi \int_0^2 (4t - t^3)^2 (2 - 2t) dt = \\ &= -2\pi \int_0^2 (16t^2 - 16t^3 - 8t^4 + 8t^5 + t^6 - t^7) dt = \\ &= -2\pi \left(\frac{16}{3} t^3 - 4t^4 - \frac{8}{5} t^5 + \frac{4}{3} t^6 + \frac{1}{7} t^7 - \frac{1}{8} t^8 \right) \Big|_0^2 = \frac{64}{35} \pi. \end{aligned}$$

б). Пусть $x_1(y)$ – функция, графиком которой является дуга ON , а $x_2(y)$ – функция, графиком которой является дуга OMN . По формуле (8.7) искомый объем

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{16\sqrt{3}/9} (x_2^2(y) - x_1^2(y)) dy = \\ &= \pi \left(\int_0^{16\sqrt{3}/9} x_2^2(y) dy - \int_0^{16\sqrt{3}/9} x_1^2(y) dy \right). \end{aligned}$$

Переходя к переменной t , получаем:

$$\begin{aligned}
 V &= \pi \left(\int_0^{2\sqrt{3}/3} (2t - t^2)^2 (4 - 3t^2) dt - \int_2^{2\sqrt{3}/3} (2t - t^2)^2 (4 - 3t^2) dt \right) = \\
 &= \pi \int_0^2 (2t - t^2)^2 (4 - 3t^2) dt = \\
 &= \pi \int_0^2 (16t^2 - 16t^3 - 8t^4 + 12t^5 - 3t^6) dt = \\
 &= \pi \left(\frac{16}{3} t^3 - 4t^4 - \frac{8}{5} t^5 + 2t^6 - \frac{3}{7} t^7 \right) \Big|_0^2 = \frac{64}{105} \pi.
 \end{aligned}$$

2482. Доказать, что объем тела, образованного вращением вокруг полярной оси плоской фигуры

$$0 \leq \alpha \leq \varphi \leq \beta \leq \pi, \quad 0 \leq r \leq r(\varphi)$$

(φ и r – полярные координаты), равен:

$$V = \frac{2\pi}{3} \int_{\alpha}^{\beta} r^3(\varphi) \sin \varphi d\varphi. \quad (8.9)$$

Доказательство проведем в предположении непрерывности функции $r(\varphi)$. Обозначим рассматриваемое тело через D . Рассмотрим произвольное разбиение

$$T = \{\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n\}$$

отрезка $[\alpha; \beta]$. Положим

$$m_i = \min_{[\varphi_i; \varphi_{i+1}]} r(\varphi), \quad M_i = \max_{[\varphi_i; \varphi_{i+1}]} r(\varphi).$$

Пусть тела $D_{1,i}$ и $D_{2,i}$ образованы вращением вокруг полярной оси фигур, ограниченных лучами $\varphi = \varphi_i$, $\varphi = \varphi_{i+1}$ и дугами окружностей радиусов $r = m_i$ (для тела $D_{1,i}$) и $r = M_i$ (для тела $D_{2,i}$). Определим:

$$D_1 = \bigcup_{i=0}^{n-1} D_{1,i}, \quad D_2 = \bigcup_{i=0}^{n-1} D_{2,i}.$$

Нетрудно видеть, что $D_1 \subset D \subset D_2$.

Рассмотрим теперь полый шаровой сектор. Он получается из шарового сектора выбрасыванием другого шарового сектора с той же вершиной, той же осью симметрии, того же радиуса, но меньшего раствора (рис. 8.23).

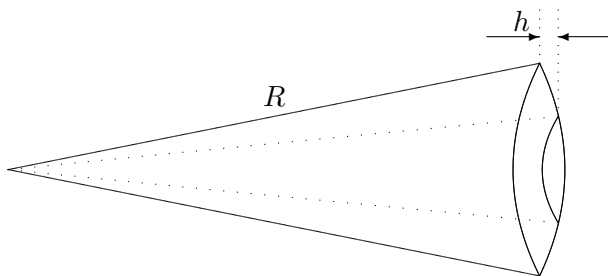


Рис. 8.23

Если R – радиус шарового сектора, h – высота сферического слоя (см. рис. 8.23), то объем такого полого шарового сектора вычисляется по формуле

$$V = \frac{2}{3} \pi R^2 h.$$

Применяя эту формулу к полым шаровым секторам $D_{1,i}$ и $D_{2,i}$, получаем следующие выражения для объемов V_1 и V_2 тел D_1 и D_2 соответственно:

$$V_1 = \frac{2\pi}{3} \sum_{i=0}^{n-1} m_i^3 (\cos \varphi_i - \cos \varphi_{i+1}),$$

$$V_2 = \frac{2\pi}{3} \sum_{i=0}^{n-1} M_i^3 (\cos \varphi_i - \cos \varphi_{i+1}).$$

Пусть $\lambda(T)$ обозначает характеристику разбиения

$$\lambda(T) = \max_{0 \leq i \leq n-1} \Delta \varphi_i,$$

где $\Delta \varphi_i = \varphi_{i+1} - \varphi_i$.

Так как для любого разбиения $D_1 \subset D \subset D_2$, то объем V тела вращения удовлетворяет оценке

$$V_1 \leq V \leq V_2$$

и для доказательства утверждения задачи достаточно установить, что

$$\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} V_1 = \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} V_2 = \frac{2\pi}{3} \int_{\alpha}^{\beta} r^3(\varphi) \sin \varphi d\varphi.$$

Лемма 1. При всех вещественных x справедливо неравенство

$$|\sin x - x| \leq \frac{|x|^3}{6}.$$

Для доказательства воспользуемся формулой Тейлора с дополнительным членом в форме Лагранжа:

$$\sin x = x - \frac{\cos \xi}{6} x^3.$$

Так как $|\cos \xi| \leq 1$, то отсюда немедленно следует утверждение леммы.

Рассмотрим далее следующие величины:

$$\tilde{V}_1 = \frac{2\pi}{3} \sum_{i=0}^{n-1} m_i^3 \sin \frac{\varphi_i + \varphi_{i+1}}{2} \Delta \varphi_i,$$

$$\tilde{V}_2 = \frac{2\pi}{3} \sum_{i=0}^{n-1} M_i^3 \sin \frac{\varphi_i + \varphi_{i+1}}{2} \Delta \varphi_i.$$

Лемма 2.

$$\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} (V_1 - \tilde{V}_1) = 0,$$

$$\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} (V_2 - \tilde{V}_2) = 0.$$

Воспользовавшись формулой разности косинусов, леммой 1 и учитывая, что $\Delta \varphi_i \leq \lambda(T)$, получаем:

$$\begin{aligned} |V_1 - \tilde{V}_1| &= \frac{4\pi}{3} \left| \sum_{i=0}^{n-1} m_i^3 \sin \frac{\varphi_i + \varphi_{i+1}}{2} \left(\sin \frac{\Delta \varphi_i}{2} - \frac{\Delta \varphi_i}{2} \right) \right| \leq \\ &\leq \frac{4\pi}{3} \sum_{i=0}^{n-1} m_i^3 \left| \sin \frac{\Delta \varphi_i}{2} - \frac{\Delta \varphi_i}{2} \right| \leq \frac{2\pi}{9} \sum_{i=0}^{n-1} m_i^3 \left| \frac{\Delta \varphi_i}{2} \right|^3 \leq \\ &\leq \frac{\pi}{36} \lambda^2(T) \sum_{i=0}^{n-1} m_i^3 \Delta \varphi_i \end{aligned}$$

Совершенно аналогично выводится оценка

$$|V_2 - \tilde{V}_2| \leq \frac{\pi}{36} \lambda^2(T) \sum_{i=0}^{n-1} M_i^3 \Delta \varphi_i.$$

Так как функция $r^3(\varphi)$ интегрируема, то

$$\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} m_i^3 \Delta \varphi_i = \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} M_i^3 \Delta \varphi_i = \int_{\alpha}^{\beta} r^3(\varphi) d\varphi,$$

поэтому из полученных выше оценок и вытекает утверждение леммы 2.

Из леммы 2 следует, что для доказательства утверждения задачи достаточно показать, что

$$\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \tilde{V}_1 = \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \tilde{V}_2 = \frac{2\pi}{3} \int_{\alpha}^{\beta} r^3(\varphi) \sin \varphi d\varphi.$$

Положим

$$\xi_i = \frac{\varphi_i + \varphi_{i+1}}{2},$$

точка ξ_i является серединой отрезка $[\varphi_i; \varphi_{i+1}]$. Из непрерывности функции $r(\varphi)$ на отрезке $[\alpha; \beta]$ следует, что

$$m_i = r(\theta_i^{(1)}), \quad M_i = r(\theta_i^{(2)}),$$

где $\theta_i^{(1)}, \theta_i^{(2)} \in [\varphi_i; \varphi_{i+1}]$. Таким образом,

$$\tilde{V}_1 = \frac{2\pi}{3} \sum_{i=0}^{n-1} r^3(\theta_i^{(1)}) \sin \xi_i \Delta\varphi_i,$$

$$\tilde{V}_2 = \frac{2\pi}{3} \sum_{i=0}^{n-1} r^3(\theta_i^{(2)}) \sin \xi_i \Delta\varphi_i,$$

согласно решению задачи 2193

$$\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \tilde{V}_1 = \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \tilde{V}_2 = \frac{2\pi}{3} \int_{\alpha}^{\beta} r^3(\varphi) \sin \varphi d\varphi.$$

Формула (8.9) доказана.

Найти объемы тел, образованных вращением плоских фигур, заданных в полярных координатах:

2483. $r = a(1 + \cos \varphi)$ ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$): а) вокруг полярной оси; б) вокруг прямой $r \cos \varphi = -a/4$.

Рассматриваемая кривая носит название кардиоиды, ее график представлен на рис. 8.24.

а). Кардиоида симметрична относительно полярной оси (которая является осью абсцисс), поэтому рассматриваемое тело образовано вращением части кривой, лежащей выше оси абсцисс (эта часть отвечает значениям $\varphi \in [0; \pi]$). Применяя формулу (8.9) и делая замену $u = 1 + \cos \varphi$, находим:

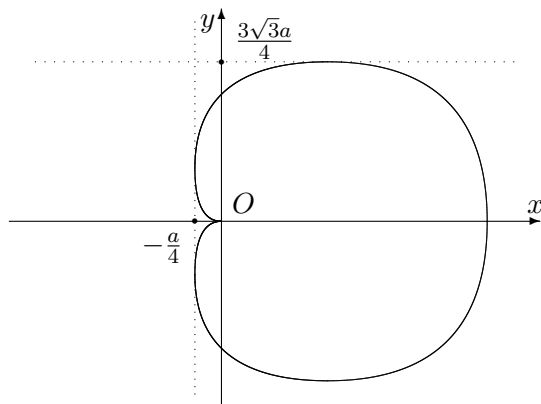


Рис. 8.24

$$\begin{aligned}
 V &= \frac{2\pi}{3} \int_0^{\pi} (a(1 + \cos \varphi))^3 \sin \varphi \, d\varphi = \\
 &= \frac{2\pi a^3}{3} \int_0^2 u^3 \, du = \frac{2\pi a^3}{3} \left(\frac{u^4}{4} \right) \Big|_0^2 = \frac{8\pi a^3}{3}.
 \end{aligned}$$

б). В декартовой системе координат уравнение прямой, вокруг которой происходит вращение фигуры, имеет вид $x = -a/4$ (см. рис. 8.24). Она является касательной к кардиоиде в точках с наименьшим значением абсциссы. Точки касания имеют координаты $(-a/4; a\sqrt{3}/4)$ и $(-a/4; -a\sqrt{3}/4)$. Полярные углы точек касания, соответственно, равны $\varphi = 2\pi/3$ и $\varphi = 4\pi/3$. Точка с наибольшим значением ординаты имеет координаты $(3/4; 3\sqrt{3}/4)$,

она отвечает значению $\varphi = \pi/3$.

Сделаем преобразование, повернув декартову систему координат на -90° и сдвинув ее вдоль оси ординат на величину, равную $-a/4$. Связь между старыми и новыми координатами описывается формулами:

$$\begin{cases} \tilde{x} = -y, \\ \tilde{y} = x + \frac{a}{4}. \end{cases}$$

Подставляя в формулы $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ равенство $r = a(1 + \cos \varphi)$, получаем параметрическое уравнение кардиоиды в новых координатах:

$$\begin{cases} \tilde{x} = a(1 + \sin \varphi) \cos \varphi, \\ \tilde{y} = a(1 + \sin \varphi) \sin \varphi + \frac{a}{4}. \end{cases}$$

Тело, объем которого нужно найти, образовано теперь вращением кардиоиды вокруг новой оси абсцисс. График кривой в новой системе координат $\tilde{x}\tilde{y}$ показан на рис. 8.25.

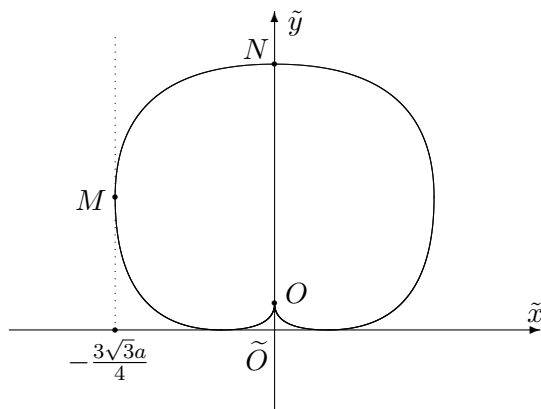


Рис. 8.25

Точка M на кривой с наименьшим значением абсциссы име-

ет координаты $(-3\sqrt{3}a/4; a)$, точка N , отвечающая наибольшей ординате кардиоиды имеет координаты $(0; 9a/4)$, точка возврата O имеет координаты $(0; a/4)$. Так как фигура симметрична относительно оси ординат $\tilde{O}\tilde{y}$, то можно вычислить объем тела вращения части фигуры, лежащей во второй четверти (эта часть удобнее тем, что параметр φ изменяется здесь от 0 до π : точке N отвечает значение $\varphi = 0$, точке M отвечает $\varphi = \pi/3$, а точке O – значение $\varphi = \pi$). Искомый объем будет в два раза больше вычисленного.

Пусть $\tilde{y}_1(\tilde{x})$ – функция, которая определена на отрезке $[-3\sqrt{3}a/4; 0]$, и график которой совпадает с нижней дугой MO , $\tilde{y}_2(\tilde{x})$ – функция, определенная на том же отрезке, но ее график совпадает с верхней дугой кардиоиды MN . По формуле (8.5) искомый объем фигуры

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_{-3\sqrt{3}a/4}^0 (\tilde{y}_2^2(\tilde{x}) - \tilde{y}_1^2(\tilde{x})) d\tilde{x} = \\ &= 2\pi \left(\int_{-3\sqrt{3}a/4}^0 \tilde{y}_2^2(\tilde{x}) d\tilde{x} - \int_{-3\sqrt{3}a/4}^0 \tilde{y}_1^2(\tilde{x}) d\tilde{x} \right). \end{aligned}$$

Если $\tilde{x}(\varphi)$, $\tilde{y}(\varphi)$ – функции, дающие параметрическое представление кардиоиды в новой системе координат, то переходя в интегралах к переменной φ , получаем:

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \left(\int_{\pi/3}^0 \tilde{y}^2(\varphi) \tilde{x}'(\varphi) d\varphi - \int_{\pi/3}^{\pi} \tilde{y}^2(\varphi) \tilde{x}'(\varphi) d\varphi \right) = \\ &= -2\pi \int_0^{\pi} \tilde{y}^2(\varphi) \tilde{x}'(\varphi) d\varphi. \end{aligned}$$

Подставляя сюда явные выражения для $\tilde{x}(\varphi)$ и $\tilde{y}(\varphi)$, приходим к следующему интегралу:

$$V = 2\pi a^3 \int_0^{\pi} \left(2 \cos^6 \varphi + 5 \cos^5 \varphi + 4 \cos^4 \varphi + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \cos^3 \varphi - \frac{7}{8} \cos^2 \varphi - \frac{7}{16} \cos \varphi - \frac{1}{16} \right) d\varphi.$$

Учитывая нечетность $\cos \varphi$ относительно точки $\varphi = \pi/2$, выбрасываем равные нулю интегралы от нечетных степеней косинуса и удваиваем интегралы от четных степеней, заменяя верхний предел интегрирования на $\pi/2$. Таким образом,

$$V = 4\pi a^3 \int_0^{\pi/2} \left(2 \cos^6 \varphi + 4 \cos^4 \varphi - \frac{7}{8} \cos^2 \varphi - \frac{1}{16} \right) d\varphi.$$

Применим формулу из задачи 2290 с $m = 0$:

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{2n} \varphi d\varphi = \frac{\pi(2n)!}{2^{2n+1}(n!)^2},$$

находим

$$V = 4\pi^2 a^3 \left(\frac{5}{16} + \frac{3}{4} - \frac{7}{32} - \frac{1}{32} \right) = \frac{13}{4} \pi^2 a^3.$$

2484. $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$: а) вокруг оси Ox ; б) вокруг оси Oy ; в) вокруг прямой $y = x$.

Переходя в полярные координаты $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, получаем уравнение лемнискаты:

$$r = a \sqrt{\cos 2\varphi}.$$

График кривой определен в двух секторах:

$$-\pi/4 \leq \varphi \leq \pi/4, \quad 3\pi/4 \leq \varphi \leq 5\pi/4.$$

Данная кривая симметрична относительно обеих координатных осей (рис. 8.26).

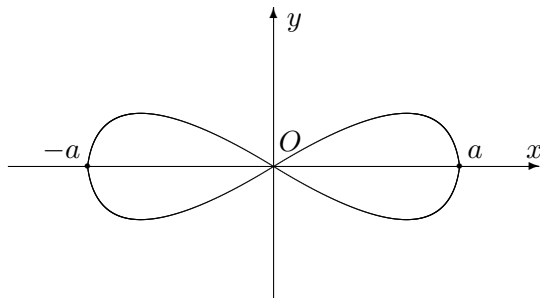


Рис. 8.26

а). В силу симметрии кривой вращение ее части, отвечающей значениям $\varphi \in [0; \pi/4]$ дает половину объема. Применяя формулу (8.9) и делая последовательно замены $u = \cos \varphi$ и $z = \sqrt{2}u$, получаем:

$$\begin{aligned}
 V &= 2 \left(\frac{2\pi}{3} \int_0^{\pi/4} r^3(\varphi) \sin \varphi d\varphi \right) = \frac{4\pi a^3}{3} \int_0^{\pi/4} \cos^{3/2} 2\varphi \sin \varphi d\varphi = \\
 &= -\frac{4\pi a^3}{3} \int_0^{\pi/4} (2\cos^2 \varphi - 1)^{3/2} d\cos \varphi = \frac{4\pi a^3}{3} \int_{1/\sqrt{2}}^1 (2u^2 - 1)^{3/2} du = \\
 &= \frac{4\pi a^3}{3\sqrt{2}} \int_1^{\sqrt{2}} (z^2 - 1)^{3/2} dz = \frac{4\pi a^3}{3\sqrt{2}} \int_1^{\sqrt{2}} \frac{(z^2 - 1)^2}{\sqrt{z^2 - 1}} dz.
 \end{aligned}$$

Полученный интеграл вычисляем методом неопределенных коэффициентов. Учитывая четность подынтегральной функции, имеем разложение

$$\int \frac{(z^2 - 1)^2}{\sqrt{z^2 - 1}} dz = (Az^3 + Bz)\sqrt{z^2 - 1} + \lambda \int \frac{dz}{\sqrt{z^2 - 1}}.$$

Дифференцируя это разложение и освобождаясь от знаменателя, приходим к тождеству

$$z^4 - 2z^2 + 1 = 4Az^4 + (2B - 3A)z^2 + (\lambda - B).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях и решая полученную систему, находим:

$$A = \frac{1}{4}, \quad B = -\frac{5}{8}, \quad \lambda = \frac{3}{8}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} V &= \frac{4\pi a^3}{3\sqrt{2}} \left(\frac{2z^3 - 5z}{8} \sqrt{z^2 - 1} + \frac{3}{8} \ln \left| z + \sqrt{z^2 - 1} \right| \right) \Big|_1^{\sqrt{2}} = \\ &= \frac{\pi a^3}{4} \left[\sqrt{2} \ln(\sqrt{2} + 1) - \frac{2}{3} \right]. \end{aligned}$$

б). Перейдем в другую систему координат, поменяв x и y местами, т. е., сделав замену:

$$\begin{cases} \tilde{x} = y, \\ \tilde{y} = x. \end{cases}$$

В полярных координатах это равносильно замене φ на $\frac{\pi}{2} - \varphi$. В новой системе координат получаем уравнение

$$r = a\sqrt{-\cos 2\varphi}.$$

График лемнискаты в новой системе координат представлен на рис. 8.27.

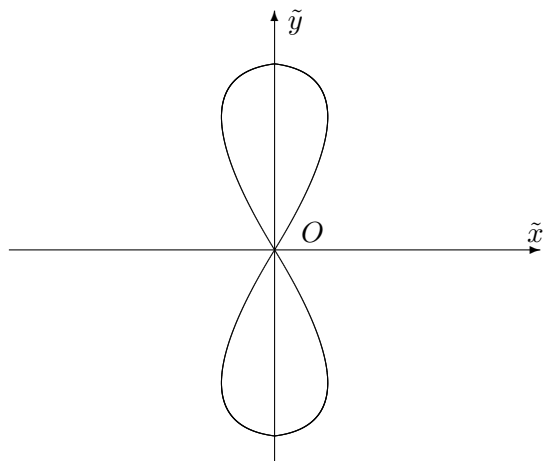


Рис. 8.27

Теперь, нужно вычислить объем тела вращения вокруг оси $O\tilde{x}$. Вращение участка кривой, который отвечает значениям $\varphi \in [\pi/4; \pi/2]$, дает половину объема. Применяя формулу (8.9) и делая последовательно замены $u = \cos \varphi$ и $z = \sqrt{2}u$, получаем:

$$\begin{aligned}
 V &= 2 \left(\frac{2\pi}{3} \int_{\pi/4}^{\pi/2} r^3(\varphi) \sin \varphi d\varphi \right) = \frac{4\pi a^3}{3} \int_{\pi/4}^{\pi/2} (-\cos 2\varphi)^{3/2} \sin \varphi d\varphi = \\
 &= -\frac{4\pi a^3}{3} \int_{\pi/4}^{\pi/2} (1 - 2\cos^2 \varphi)^{3/2} d\cos \varphi = \\
 &= \frac{4\pi a^3}{3} \int_0^{1/\sqrt{2}} (1 - 2u^2)^{3/2} du = \frac{4\pi a^3}{3\sqrt{2}} \int_0^1 (1 - z^2)^{3/2} dz.
 \end{aligned}$$

Полученный интеграл можно взять с помощью тригонометриче-

ской подстановки $z = \sin t$:

$$\int_0^1 (1 - z^2)^{3/2} dz = \int_0^{\pi/2} \cos^4 t dt = \frac{3\pi}{16}.$$

Окончательно получаем:

$$V = \frac{4\pi a^3}{3\sqrt{2}} \cdot \frac{3\pi}{16} = \frac{\pi^2 a^3}{4\sqrt{2}}.$$

в). Повернем систему координат на $\pi/4$. В полярных координатах это равносильно замене φ на $\varphi + \pi/4$. Таким образом, в новой системе координат $\tilde{x}O\tilde{y}$ получаем уравнение

$$r = a\sqrt{-\sin 2\varphi}.$$

График кривой в новой системе координат можно видеть на рис. 8.28. Эта кривая должна теперь вращаться вокруг оси $O\tilde{x}$.

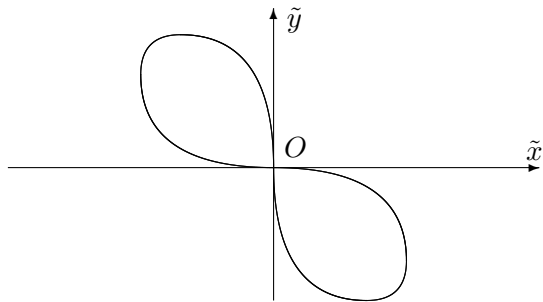


Рис. 8.28

Участок кривой, отвечающий $\varphi \in [\pi/2; \pi]$, дает при вращении половину объема. По формуле (8.9)

$$V = 2 \left(\frac{2\pi}{3} \int_{\pi/2}^{\pi} r^3(\varphi) \sin \varphi d\varphi \right) = \frac{4\pi a^3}{3} \int_{\pi/2}^{\pi} (-\sin 2\varphi)^{3/2} \sin \varphi d\varphi.$$

Делая в полученном интеграле последовательно замены $\varphi = u + \pi/2$ и $t = \sin^2 u$, получаем:

$$\begin{aligned}
 V &= \frac{4\pi a^3}{3} \int_0^{\pi/2} (\sin 2u)^{3/2} \cos u \, du = \\
 &= \frac{4\pi a^3}{3} \int_0^{\pi/2} (2 \sin u \cos u)^{3/2} \cos u \, du = \\
 &= \frac{8\pi a^3 \sqrt{2}}{3} \int_0^{\pi/2} \sin^{3/2} u \cos^{5/2} u \, du = \\
 &= \frac{4\pi a^3 \sqrt{2}}{3} \int_0^{\pi/2} \sin^{1/2} u \cos^{3/2} u \, d(\sin^2 u) = \\
 &= \frac{4\pi a^3 \sqrt{2}}{3} \int_0^1 t^{1/4} (1-t)^{3/4} dt.
 \end{aligned}$$

Если читатель знаком с гамма- и бета- функциями Эйлера, то интеграл можно вычислить сразу:

$$\int_0^1 t^{1/4} (1-t)^{3/4} dt = B\left(\frac{5}{4}, \frac{7}{4}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right) \Gamma\left(\frac{7}{4}\right)}{\Gamma(3)}.$$

Так как

$$\Gamma(3) = 2, \quad \Gamma\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{1}{4} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right), \quad \Gamma\left(\frac{7}{4}\right) = \frac{3}{4} \Gamma\left(\frac{3}{4}\right),$$

то

$$\int_0^1 t^{1/4} (1-t)^{3/4} dt = \frac{3}{32} \left[\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \Gamma\left(\frac{3}{4}\right) \right].$$

По формуле дополнения для гамма- функции

$$\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{\pi}{\sin(\pi/4)} = \pi\sqrt{2}$$

и, таким образом,

$$\int_0^1 t^{1/4}(1-t)^{3/4} dt = \frac{3\pi\sqrt{2}}{32}.$$

Если читатель не знает эйлеровские интегралы, то ему нужно проинтегрировать дифференциальный бином. Этот бином сводится к интегралу от рациональной функции заменой

$$z = \sqrt[4]{\frac{1-t}{t}}.$$

Эта замена приводит к следующему интегралу:

$$\int_0^1 t^{1/4}(1-t)^{3/4} dt = 4 \int_0^{+\infty} \frac{z^6 dz}{(z^4+1)^3}.$$

Для вычисления интеграла от рациональной функции можно воспользоваться методом Остроградского. Учитывая соображения четности можно написать разложение:

$$\int \frac{z^6 dz}{(z^4+1)^3} = \frac{Az^7 + Bz^5 + Cz^3 + Dz}{(z^4+1)^2} + \int \frac{\alpha z^2 + \beta}{z^4+1} dz.$$

После дифференцирования и освобождения от знаменателя приходим к тождеству:

$$\begin{aligned} z^6 &= (\alpha - A)z^{10} + (\beta - 3B)z^8 + (7A - 5C + 2\alpha)z^6 + \\ &+ (5B - 7D + 2\beta)z^4 + (3C + \alpha)z^2 + (D + \beta). \end{aligned}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях и решая полученную систему, находим:

$$A = \frac{3}{32}, \quad B = 0, \quad C = -\frac{1}{32}, \quad D = 0, \quad \alpha = \frac{3}{32}, \quad \beta = 0.$$

Так как подстановки в нуле и на бесконечности внеинтегрального члена дают нули, то получаем следующее равенство:

$$\int_0^{+\infty} \frac{z^6 dz}{(z^4 + 1)^3} = \frac{3}{32} \int_0^{+\infty} \frac{z^2 dz}{z^4 + 1}.$$

Последний интеграл вычисляется заменой $v = 1/z$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{z^2 dz}{z^4 + 1} = \int_0^{+\infty} \frac{dv}{v^4 + 1}.$$

Полученный интеграл можно найти в [7] (задача 1884):

$$\int \frac{dv}{v^4 + 1} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{v^2 + v\sqrt{2} + 1}{v^2 - v\sqrt{2} + 1} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctg \frac{v\sqrt{2}}{1 - v^2} + C.$$

Учитывая, что первообразная разрывна в точке $v = 1$, при использовании формулы Ньютона – Лейбница интеграл нужно разбить на два: от нуля до единицы и от единицы до бесконечности. Подстановки дают следующее значение:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dv}{v^4 + 1} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}},$$

и для дифференциального бинома получаем:

$$\int_0^1 t^{1/4} (1 - t)^{3/4} dt = \frac{3\pi\sqrt{2}}{32}.$$

Отсюда следует, что искомый объем

$$V = \frac{4\pi a^3 \sqrt{2}}{3} \cdot \frac{3\pi \sqrt{2}}{32} = \frac{\pi^2 a^3}{4}.$$

2484.1. Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной полувитком спирали Архимеда:

$$r = a\varphi \quad (a > 0; \quad 0 \leq \varphi \leq \pi),$$

вокруг полярной оси.

Согласно формуле (8.9)

$$V = \frac{2\pi}{3} \int_0^{\pi} r^3(\varphi) \sin \varphi \, d\varphi = \frac{2\pi a^3}{3} \int_0^{\pi} \varphi^3 \sin \varphi \, d\varphi.$$

Полученный интеграл можно найти в [7] (задача 2067):

$$\int \varphi^3 \sin \varphi \, d\varphi = -(\varphi^3 - 6\varphi) \cos \varphi + (3\varphi^2 - 6) \sin \varphi + C.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} V &= \frac{2\pi a^3}{3} \left[-(\varphi^3 - 6\varphi) \cos \varphi + (3\varphi^2 - 6) \sin \varphi \right] \Big|_0^{\pi} = \\ &= \frac{2}{3} (\pi^4 - 6\pi^2) a^3. \end{aligned}$$

2484.2. Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями: $\varphi = \pi r^3$, $\varphi = \pi$, вокруг полярной оси.

Тело получается вращением графика функции

$$r = \left(\frac{\varphi}{\pi} \right)^{1/3} \quad (0 \leq \varphi \leq \pi)$$

вокруг полярной оси. По формуле (8.9)

$$V = \frac{2\pi}{3} \int_0^{\pi} r^3(\varphi) \sin \varphi \, d\varphi = \frac{2}{3} \int_0^{\pi} \varphi \sin \varphi \, d\varphi.$$

Интегрируя по частям, находим

$$\begin{aligned}\int \varphi \sin \varphi d\varphi &= - \int \varphi d(\cos \varphi) = \\ &= -\varphi \cos \varphi + \int \cos \varphi d\varphi = -\varphi \cos \varphi + \sin \varphi + C.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$V = \frac{2}{3} \left(-\varphi \cos \varphi + \sin \varphi \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{2\pi}{3}.$$

2485. Найти объем тела, образованного вращением фигуры

$$a \leq r \leq a\sqrt{2 \sin 2\varphi}$$

вокруг полярной оси.

Графики кривых $r = a$ (окружность) и $r = a\sqrt{2 \sin 2\varphi}$ (лемниската) изображены на рис. 8.29.

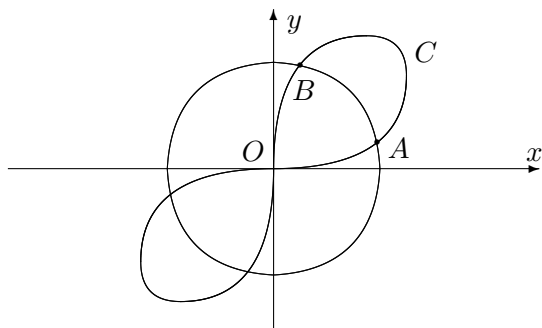


Рис. 8.29

Часть фигуры, лежащая в первой четверти, дает половину всего объема. На рис. 8.29 она ограничена дугами AB и ACB . Эта половина объема равна разности объемов двух тел. Первое из них получено вращением фигуры, ограниченной лучами $\varphi = \pi/12$, $\varphi = 5\pi/12$ и дугой лемнискаты ACB , второе тело

ограничено теми же лучами и дугой окружности AB . Обозначим объемы этих тел, соответственно, V_1 и V_2 , тогда искомый объем $V = 2(V_1 - V_2)$. Объемы V_1 и V_2 вычисляем по формуле (8.9). Первый объем вычисляется довольно долго:

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{2\pi}{3} \int_{\pi/12}^{5\pi/12} \left(a\sqrt{2\sin 2\varphi} \right)^3 \sin \varphi d\varphi = \\ &= \frac{4\sqrt{2}\pi a^3}{3} \int_{\pi/12}^{5\pi/12} (2\sin \varphi \cos \varphi)^{3/2} \sin \varphi d\varphi = \\ &= \frac{16\pi a^3}{3} \int_{\pi/12}^{5\pi/12} \sin^{5/2} \varphi \cos^{3/2} \varphi d\varphi. \end{aligned}$$

Полученный интеграл заменой $t = \sin^2 \varphi$ сводится к интегралу от дифференциального бинома:

$$\int_{\pi/12}^{5\pi/12} \sin^{5/2} \varphi \cos^{3/2} \varphi d\varphi = \frac{1}{2} \int_{\sin^2(\pi/12)}^{\sin^2(5\pi/12)} t^{3/4} (1-t)^{1/4} dt.$$

Так как

$$\begin{aligned} \sin^2 \frac{\pi}{12} &= \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{\pi}{6} \right) = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}, \\ \sin^2 \frac{5\pi}{12} &= \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{5\pi}{6} \right) = \frac{2 + \sqrt{3}}{4}, \end{aligned}$$

то

$$V_1 = \frac{8\pi a^3}{3} \int_{(2-\sqrt{3})/4}^{(2+\sqrt{3})/4} t^{3/4} (1-t)^{1/4} dt.$$

Интеграл от дифференциального бинома сводится к интегралу от рациональной функции заменой

$$z = \sqrt[4]{\frac{1-t}{t}}.$$

Вычислим новые пределы интегрирования. Нижний предел

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt[4]{\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}} = \sqrt[4]{\frac{(2+\sqrt{3})^2}{4-3}} = \sqrt{2+\sqrt{3}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{4+2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Верхний предел интегрирования

$$\begin{aligned} z_2 &= \sqrt[4]{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}} = \sqrt[4]{\frac{(2-\sqrt{3})^2}{4-3}} = \sqrt{2-\sqrt{3}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{4-2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Выполняя замену и убирая знак минус перед интегралом с помощью перемены пределов интегрирования, получаем:

$$V_1 = \frac{32\pi a^3}{3} \int_{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}}^{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}} \frac{z^4 dz}{(z^4+1)^3}.$$

Для вычисления интеграла от рациональной функции можно использовать метод Остроградского. В силу четности подынтегральной функции можно записать следующее разложение:

$$\int \frac{z^4 dz}{(z^4+1)^3} = \frac{Az^7 + Bz^5 + Cz^3 + Dz}{(z^4+1)^2} + \int \frac{\alpha z^2 + \beta}{z^4+1} dz.$$

Дифференцируя и освобождаясь от знаменателя, получаем тождество:

$$z^4 = (\alpha - A)z^{10} + (\beta - 3B)z^8 + (7A - 5C + 2\alpha)z^6 + \\ + (5B - 7D + 2\beta)z^4 + (3C + \alpha)z^2 + (D + \beta).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях и решая полученную систему, находим:

$$A = 0, \quad B = \frac{1}{32}, \quad C = 0, \quad D = -\frac{3}{32}, \quad \alpha = 0, \quad \beta = \frac{3}{32}.$$

Следовательно,

$$\int \frac{z^4 dz}{(z^4 + 1)^3} = \frac{z^5 - 3z}{32(z^4 + 1)^2} + \frac{3}{32} \int \frac{dz}{z^4 + 1}.$$

Оставшийся интеграл имеется в [7] (задача 1884):

$$\int \frac{dz}{z^4 + 1} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{z^2 + z\sqrt{2} + 1}{z^2 - z\sqrt{2} + 1} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{z\sqrt{2}}{1 - z^2} + C.$$

Таким образом,

$$\int \frac{z^4 dz}{(z^4 + 1)^3} = \frac{z^5 - 3z}{32(z^4 + 1)^2} + \frac{3}{128\sqrt{2}} \ln \frac{z^2 + z\sqrt{2} + 1}{z^2 - z\sqrt{2} + 1} + \\ + \frac{3}{64\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{z\sqrt{2}}{1 - z^2} + C.$$

При применении формулы Ньютона – Лебница нужно учитывать, что первообразная разрывна в точке $z = 1$ и

$$\frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}} < 1 < \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{2}}.$$

Выполняя подстановки, получаем:

$$\left. \frac{z^5 - 3z}{32(z^4 + 1)^2} \right|_{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}}^{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{32}, \quad \left. \ln \frac{z^2 + z\sqrt{2} + 1}{z^2 - z\sqrt{2} + 1} \right|_{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}}^{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}} = 0,$$

$$\begin{aligned} \operatorname{arctg} \frac{z\sqrt{2}}{1-z^2} \bigg|_{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}}^{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}} &= \operatorname{arctg} \frac{z\sqrt{2}}{1-z^2} \bigg|_{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}}^1 + \operatorname{arctg} \frac{z\sqrt{2}}{1-z^2} \bigg|_1^{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}} = \\ &= \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + \left(-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Возвращаясь к интегралу по переменной z , находим

$$\int_{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}}^{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}} \frac{z^4 dz}{(z^4+1)^3} = \frac{\sqrt{2}}{32} + \frac{3}{128\sqrt{2}} \cdot 0 + \frac{3}{64\sqrt{2}} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{2}}{32} + \frac{3\pi}{128\sqrt{2}}.$$

Таким образом, для первого объема получаем следующее значение:

$$V_1 = \frac{32\pi a^3}{3} \left(\frac{\sqrt{2}}{32} + \frac{3\pi}{128\sqrt{2}} \right) = \frac{\pi a^3 \sqrt{2}}{3} + \frac{\pi^2 a^3}{4\sqrt{2}}.$$

Второй объем вычисляется без особого труда:

$$\begin{aligned} V_2 &= \frac{2\pi}{3} \int_{\pi/12}^{5\pi/12} a^3 \sin \varphi \, d\varphi = -\frac{2\pi a^3}{3} \cos \varphi \bigg|_{\pi/12}^{5\pi/12} = \\ &= \frac{2\pi a^3}{3} \left(\cos \frac{\pi}{12} - \cos \frac{5\pi}{12} \right) = \frac{4\pi a^3}{3} \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\pi a^3 \sqrt{2}}{3}. \end{aligned}$$

Наконец, вычисляем искомый объем:

$$V = 2(V_1 - V_2) = 2 \left(\frac{\pi a^3 \sqrt{2}}{3} + \frac{\pi^2 a^3}{4\sqrt{2}} - \frac{\pi a^3 \sqrt{2}}{3} \right) = \frac{\pi^2 a^3}{2\sqrt{2}}.$$

Глава 9

Площадь поверхности вращения

Площадь поверхности, образованной вращением гладкой кривой AB вокруг оси Ox , равна

$$P = 2\pi \int_A^B |y| ds, \quad (9.1)$$

где ds – дифференциал дуги.

В зависимости от того, в каком виде задана кривая AB , формула (9.1) принимает тот или иной конкретный вид. Так, если кривая представляет собой график функции $y(x)$, определенной на отрезке $[a; b]$, то площадь поверхности вращения

$$P = 2\pi \int_a^b |y(x)| \sqrt{1 + y'^2(x)} dx. \quad (9.2)$$

В том случае, когда кривая задана параметрически:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$$

где $x(t)$ и $y(t)$ – функции, заданные на отрезке $[\alpha; \beta]$, то площадь

$$P = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} |y(t)| \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt. \quad (9.3)$$

Если кривая задана в полярных координатах

$$r = r(\varphi), \quad \alpha \leq \varphi \leq \beta,$$

где $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, то

$$P = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} r(\varphi) |\sin \varphi| \sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)} d\varphi. \quad (9.4)$$

При вычислении площади поверхности вращения вокруг оси, не совпадающей с осью абсцисс, нужно перейти в другую систему координат так, чтобы ось вращения стала новой осью абсцисс. В частности, если необходимо найти площадь поверхности вращения вокруг оси Oy графика функции $x(y)$, определенной на отрезке $[c; d]$, то эта площадь

$$P = 2\pi \int_c^d |x(y)| \sqrt{1 + x'^2(y)} dy. \quad (9.5)$$

В том случае, когда кривая задана параметрически:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$$

где $x(t)$ и $y(t)$ – функции, заданные на отрезке $[\alpha; \beta]$, то площадь поверхности вращения этой кривой вокруг оси Oy можно вычислить по формуле

$$P = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} |x(t)| \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt. \quad (9.6)$$

Если же кривая задана в полярных координатах равенством

$$r = r(\varphi), \quad \alpha \leq \varphi \leq \beta,$$

где $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, то площадь поверхности вращения кривой вокруг оси Oy определяется формулой

$$P = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} r(\varphi) |\cos \varphi| \sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)} d\varphi. \quad (9.7)$$

Найти площади поверхностей, образованных вращением следующих кривых:

2486. $y = x \sqrt{\frac{x}{a}}$ ($0 \leq x \leq a$) вокруг оси Ox .

По формуле (9.2)

$$P = 2\pi \int_0^a x \sqrt{\frac{x}{a}} \sqrt{1 + \frac{9x}{4a}} dx = \frac{\pi}{a} \int_0^a x^{3/2} (4a + 9x)^{1/2} dx.$$

Для интегрирования дифференциального бинома рационализируем интеграл заменой

$$z = \sqrt{\frac{4a + 9x}{x}},$$

которая дает

$$P = 128\pi a^2 \int_{\sqrt{13}}^{+\infty} \frac{z^2 dz}{(z^2 - 9)^4}.$$

Используя рекуррентное соотношение из [1] (задача 1921), найдем:

$$\begin{aligned} \int \frac{z^2 dz}{(z^2 - 9)^4} &= -\frac{z}{6(z^2 - 9)^3} - \frac{z}{216(z^2 - 9)^2} + \\ &+ \frac{z}{1296(z^2 - 9)} - \frac{1}{7776} \ln \left| \frac{3 + z}{3 - z} \right| + C. \end{aligned}$$

Таким образом, площадь поверхности вращения

$$P = 128\pi a^2 \left(-\frac{z}{6(z^2 - 9)^3} - \frac{z}{216(z^2 - 9)^2} + \frac{z}{1296(z^2 - 9)} - \right.$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{7776} \ln \left| \frac{3+z}{3-z} \right| \Big|_{\sqrt{13}}^{+\infty} = \frac{4\pi a^2}{243} \left(21\sqrt{13} + \ln \frac{\sqrt{13}+3}{\sqrt{13}-3} \right) = \\
& = \frac{4\pi a^2}{243} \left(21\sqrt{13} + 2 \ln \frac{\sqrt{13}+3}{2} \right).
\end{aligned}$$

2487. $y = a \cos \frac{\pi x}{2b}$ ($|x| \leq b$) вокруг оси Ox .

Используя формулу (9.2), учитывая четность подынтегральной функции и делая замену $u = \frac{\pi a}{2b} \sin \frac{\pi x}{2b}$, получаем:

$$\begin{aligned}
P &= 2\pi \int_{-b}^b a \cos \frac{\pi x}{2b} \sqrt{1 + \left(\frac{\pi a}{2b} \sin \frac{\pi x}{2b} \right)^2} dx = \\
&= 4\pi \int_0^b a \cos \frac{\pi x}{2b} \sqrt{1 + \left(\frac{\pi a}{2b} \sin \frac{\pi x}{2b} \right)^2} dx = \frac{16b^2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi a}{2b}} \sqrt{1 + u^2} du = \\
&= \frac{16b^2}{\pi} \left(\frac{u}{2} \sqrt{1 + u^2} + \frac{1}{2} \ln(u + \sqrt{1 + u^2}) \right) \Big|_0^{\frac{\pi a}{2b}} = \\
&= 2a \sqrt{\pi^2 a^2 + 4b^2} + \frac{8b^2}{\pi} \ln \frac{\pi a + \sqrt{\pi^2 a^2 + 4b^2}}{2b}.
\end{aligned}$$

2488. $y = \operatorname{tg} x$ ($0 \leq x \leq \pi/4$) вокруг оси Ox .

Применяя формулу (9.2) и делая замену $u = \cos x$, находим

$$P = 2\pi \int_0^{\pi/4} \frac{\sin x \sqrt{1 + \cos^4 x}}{\cos^3 x} dx = 2\pi \int_{1/\sqrt{2}}^1 \frac{\sqrt{1 + u^4}}{u^3} du.$$

С помощью замены

$$z = \sqrt{\frac{1}{u^4} + 1}$$

сводим интеграл от дифференциального бинома к интегралу от рациональной функции:

$$\begin{aligned}
 P &= \pi \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} \frac{z^2 dz}{z^2 - 1} = \pi \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} \left(1 - \frac{1}{1 - z^2} \right) dz = \\
 &= \pi \left(z - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+z}{1-z} \right| \right) \Big|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} = \\
 &= \pi \left(\sqrt{5} - \sqrt{2} - \frac{1}{2} \ln \frac{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{2}+1)} \right) = \\
 &= \pi \left(\sqrt{5} - \sqrt{2} + \ln \frac{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{2}+1)}{2} \right).
 \end{aligned}$$

2489. $y^2 = 2px$ ($0 \leq x \leq x_0$): а) вокруг оси Ox ; б) вокруг оси Oy .

а). По формуле (9.2)

$$\begin{aligned}
 P &= 2\pi \int_0^{x_0} \sqrt{2px} \sqrt{1 + \frac{p}{2x}} dx = 2\pi \sqrt{2p} \int_0^{x_0} \sqrt{x + \frac{p}{2}} dx = \\
 &= \frac{4\pi\sqrt{2p}}{3} \left(x + \frac{p}{2} \right)^{3/2} \Big|_0^{x_0} = \frac{2\pi}{3} \left[(2x_0 + p) \sqrt{2x_0 + p} - p^2 \right].
 \end{aligned}$$

б). По формуле (9.5) для функции $x(y) = y^2/2p$ получаем

$$P = 2\pi \int_0^{\sqrt{2px_0}} x(y) \sqrt{1 + x'^2(y)} dy = \frac{2\pi}{p^2} \int_0^{\sqrt{2px_0}} y^2 \sqrt{p^2 + y^2} dy.$$

Полученный интеграл имеется в [7] (задача 1820):

$$\int y^2 \sqrt{p^2 + y^2} dy = \frac{y(2y^2 + p^2)}{8} \sqrt{p^2 + y^2} -$$

$$-\frac{p^4}{8} \ln(y + \sqrt{p^2 + y^2}) + C.$$

По формуле Ньютона – Лейбница

$$\begin{aligned} P &= \frac{2\pi}{p^2} \left(\frac{y(2y^2 + p^2)}{8} \sqrt{p^2 + y^2} - \frac{p^4}{8} \ln(y + \sqrt{p^2 + y^2}) \right) \Big|_0^{\sqrt{2px_0}} = \\ &= \frac{\pi}{4} \left[(p + 4x_0) \sqrt{2x_0(p + 2x_0)} - p^2 \ln \frac{\sqrt{2x_0} + \sqrt{p + 2x_0}}{\sqrt{p}} \right]. \end{aligned}$$

2490. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($0 < b \leq a$): а) вокруг оси Ox ; б) вокруг оси Oy .

а). Вращаемая кривая определяет эллипс, который симметричен относительно оси абсцисс. Следовательно, можно ограничиться частью кривой, лежащей в верхней полуплоскости. При вращении эта часть кривой дает ту же поверхность, что и весь эллипс. Решая уравнение эллипса относительно y , находим функцию, график которой дает верхнюю часть эллипса:

$$y(x) = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \quad (-a \leq x \leq a).$$

Применяя формулу (9.2), получаем:

$$P = 2\pi \int_{-a}^a y(x) \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

Учитывая четность подынтегральной функции, после преобразований получаем табличный интеграл:

$$\begin{aligned} P &= 2\pi \int_{-a}^a b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \sqrt{1 + \frac{b^2 x^2}{a^4 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)}} dx = \\ &= \frac{4\pi b}{a^2} \int_0^a \sqrt{a^4 - (a^2 - b^2)x^2} dx = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{4\pi b\sqrt{a^2 - b^2}}{a^2} \int_0^a \sqrt{\frac{a^4}{a^2 - b^2} - x^2} dx = \\
&= \frac{4\pi b\sqrt{a^2 - b^2}}{a^2} \left[\frac{x}{2} \sqrt{\frac{a^4}{a^2 - b^2} - x^2} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{a^4}{2(a^2 - b^2)} \arcsin \frac{x\sqrt{a^2 - b^2}}{a^2} \right] \Bigg|_0^a = \\
&= 2\pi b^2 + \frac{2\pi a^2 b}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arcsin \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}.
\end{aligned}$$

Используя эксцентриситет эллипса

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

ответ можно переписать в следующем виде:

$$P = 2\pi b^2 + \frac{2\pi ab}{\varepsilon} \arcsin \varepsilon.$$

б). К сожалению, здесь нельзя использовать предыдущий результат, переставив a и b местами, так как при вычислении интеграла существенно использовалось неравенство $b \leq a$. Это неравенство делает случаи а) и б) неравноправными и здесь нам придется вычислить интеграл снова. Поверхность образована вращением вокруг оси Oy графика функции

$$x(y) = a\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}} \quad (-b \leq y \leq b).$$

По формуле (9.5)

$$P = 2\pi \int_{-b}^b x(y) \sqrt{1 + x'^2(y)} dy.$$

Учитывая четность подынтегральной функции, после преобразований так же как и в случае а) получаем табличный интеграл (но другой):

$$\begin{aligned}
 P &= 2\pi \int_{-b}^b a \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}} \sqrt{1 + \frac{a^2 y^2}{b^4 \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)}} dx = \\
 &= \frac{4\pi a}{b^2} \int_0^b \sqrt{b^4 + (a^2 - b^2)y^2} dy = \\
 &= \frac{4\pi a \sqrt{a^2 - b^2}}{b^2} \int_0^b \sqrt{\frac{b^4}{a^2 - b^2} + y^2} dy = \\
 &= \frac{4\pi a \sqrt{a^2 - b^2}}{b^2} \left[\frac{y}{2} \sqrt{\frac{b^4}{a^2 - b^2} + y^2} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{b^4}{2(a^2 - b^2)} \ln \left(y + \sqrt{\frac{b^4}{a^2 - b^2} + y^2} \right) \right] \Bigg|_0^b = \\
 &= 2\pi a^2 + \frac{2\pi b^2 a}{\sqrt{a^2 - b^2}} \ln \frac{\sqrt{a^2 - b^2} + a}{b}.
 \end{aligned}$$

Используя эксцентриситет эллипса

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a},$$

ответ можно переписать в следующем виде:

$$P = 2\pi a^2 + \frac{2\pi b^2}{\varepsilon} \ln \frac{a(1 + \varepsilon)}{b}.$$

2491. $x^2 + (y - b)^2 = a^2$ ($b \geq a$) вокруг оси Ox .

Заданная кривая представляет собой окружность с центром $(0; b)$ радиуса a . При ее вращении вокруг оси Ox получается поверхность, называемая тором. Окружность можно рассматривать как объединение графиков двух функций:

$$y_1(x) = b - \sqrt{a^2 - x^2}, \quad y_2(x) = b + \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Площадь поверхности вращения P является суммой площадей поверхностей вращений P_1 – площадь поверхности вращения нижней полуокружности и P_2 – площадь поверхности вращения верхней полуокружности. По формуле (9.2)

$$P_1 = 2\pi \int_{-a}^a y_1(x) \sqrt{1 + y_1'^2(x)} dx = 2\pi \int_{-a}^a (b - \sqrt{a^2 - x^2}) \frac{a dx}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$

$$P_2 = 2\pi \int_{-a}^a y_2(x) \sqrt{1 + y_2'^2(x)} dx = 2\pi \int_{-a}^a (b + \sqrt{a^2 - x^2}) \frac{a dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} P = P_1 + P_2 &= 2\pi \int_{-a}^a 2b \frac{a dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 8\pi ab \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \\ &= 8\pi ab \left(\arcsin \frac{x}{a} \right) \Big|_0^a = 4\pi^2 ab. \end{aligned}$$

2492. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ вокруг оси Ox .

Кривая (астроида) симметрична относительно обеих координатных осей. Поэтому искомая площадь P в два раза больше площади поверхности вращения части кривой, лежащей в первой четверти. Эта часть кривой является графиком функции

$$y(x) = (a^{2/3} - x^{2/3})^{3/2}, \quad (0 \leq x \leq a).$$

По формуле (9.2)

$$\begin{aligned}
 P &= 4\pi \int_0^a y(x) \sqrt{1 + y'^2(x)} dx = \\
 &= 4\pi \int_0^a (a^{2/3} - x^{2/3})^{3/2} \sqrt{1 + \frac{a^{2/3} - x^{2/3}}{x^{2/3}}} dx = \\
 &= 4\pi \sqrt[3]{a} \int_0^a \frac{(a^{2/3} - x^{2/3})^{3/2}}{x^{1/3}} dx.
 \end{aligned}$$

Полученный интеграл от дифференциального бинома рационализуется подстановкой

$$z = \sqrt{a^{2/3} - x^{2/3}}.$$

Выполняя подстановку, получаем

$$P = 12\pi \sqrt[3]{a} \int_0^{\sqrt[3]{a}} z^4 dz = 12\pi \sqrt[3]{a} \left(\frac{z^5}{5} \right) \bigg|_0^{\sqrt[3]{a}} = \frac{12\pi a^2}{5}.$$

2493. $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ ($|x| \leq b$): а) вокруг оси Ox ; б) вокруг оси Oy .

а). Поверхность вращения заданной функции вокруг оси Ox называется катеноидом. Используя формулу (9.2), четность подынтегральной функции и тождества

$$\sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 t} = \operatorname{ch} t, \quad 2 \operatorname{ch}^2 t = 1 + \operatorname{ch} 2t,$$

получаем

$$P = 2\pi \int_{-b}^b \left(a \operatorname{ch} \frac{x}{a} \right) \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 \frac{x}{a}} dx = 2\pi a \int_{-b}^b \operatorname{ch}^2 \frac{x}{a} dx =$$

$$\begin{aligned}
&= 4\pi a \int_0^b \operatorname{ch}^2 \frac{x}{a} dx = 2\pi a \int_0^b \left(1 + \operatorname{ch} \frac{2x}{a}\right) dx = \\
&= 2\pi a \left(x + \frac{a}{2} \operatorname{sh} \frac{2x}{a}\right) \Big|_0^b = \pi a \left(2b + a \operatorname{sh} \frac{2b}{a}\right).
\end{aligned}$$

б). Так как кривая симметрична относительно оси вращения, то достаточно рассмотреть участок кривой, лежащий в первой четверти, т. е. при $x \in [0; b]$. Найдем функцию, обратную к

$$y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$$

на участке $[0; b]$. Для этого положим

$$z = e^{x/a},$$

тогда $y = \frac{a}{2} \left(z + \frac{1}{z}\right)$ и для z получаем квадратное уравнение

$$z^2 - \frac{2y}{a} z + 1 = 0,$$

решая которое, находим

$$z = \frac{y}{a} \pm \sqrt{\frac{y^2}{a^2} - 1},$$

что дает

$$x = a \ln \frac{y \pm \sqrt{y^2 + a^2}}{a}.$$

Из четности функции $y(x)$ следует, что полученные решения отличаются знаком, поэтому чтобы получить неотрицательное решение, нужно из этих двух решений выбрать большее, т. е. корень нужно брать со знаком плюс. Окончательно получаем

$$x = a \ln \frac{y + \sqrt{y^2 + a^2}}{a}.$$

Учитывая, что

$$x'(y) = \frac{a}{\sqrt{y^2 - a^2}}$$

и, применяя формулу (9.5), имеем

$$P = 2\pi \int_a^{a \operatorname{ch}(b/a)} a \ln \frac{y + \sqrt{y^2 + a^2}}{a} \cdot \frac{y}{\sqrt{y^2 - a^2}} dy.$$

Интегрируя по частям, находим

$$\begin{aligned} P &= 2\pi a \int_a^{a \operatorname{ch}(b/a)} \ln \frac{y + \sqrt{y^2 + a^2}}{a} d(\sqrt{y^2 - a^2}) = \\ &= 2\pi a \left[\left(\sqrt{y^2 - a^2} \ln \frac{y + \sqrt{y^2 + a^2}}{a} \right) \Big|_a^{a \operatorname{ch}(b/a)} - \int_a^{a \operatorname{ch}(b/a)} dy \right] = \\ &= 2\pi a \left[a \operatorname{sh} \frac{b}{a} \ln \left(\operatorname{ch} \frac{b}{a} + \operatorname{sh} \frac{b}{a} \right) - y \Big|_a^{a \operatorname{ch}(b/a)} \right] = \\ &= 2\pi a \left[a \operatorname{sh} \frac{b}{a} \ln \left(\operatorname{ch} \frac{b}{a} + \operatorname{sh} \frac{b}{a} \right) - a \operatorname{ch} \frac{b}{a} + a \right]. \end{aligned}$$

Так как

$$\ln \left(\operatorname{ch} \frac{b}{a} + \operatorname{sh} \frac{b}{a} \right) = \ln \left(\frac{e^{b/a} + e^{-b/a}}{2} + \frac{e^{b/a} - e^{-b/a}}{2} \right) = \ln e^{b/a} = \frac{b}{a},$$

то

$$P = 2\pi a \left(a + b \operatorname{sh} \frac{b}{a} - a \operatorname{ch} \frac{b}{a} \right).$$

2494. $\pm x = a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2}$ вокруг оси Ox .

Пусть $x(y)$ – функция, задаваемая знаком “плюс”, т. е.

$$x = a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2}.$$

Отметим, что график этой функции называется трактрисой. Несмотря на сложность формулы, представляющую функции, ее производная имеет достаточно простой вид:

$$x'(y) = -\frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y}.$$

Область определения функции $x(y)$ – промежуток $y \in (0; a]$. Так как производная отрицательна в интервале $(0; a)$, то эта функция имеет обратную, которую мы обозначим $y(x)$.

Графики функций $\pm x(y)$ представлены на рис. 9.1.

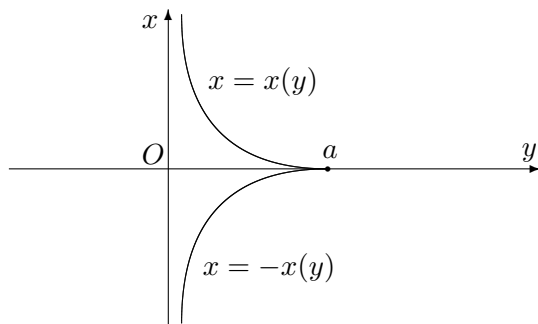


Рис. 9.1

Они симметричны относительно оси Oy , поэтому площадь поверхности вращения графиков функций $x = \pm x(y)$ вокруг оси Ox в два раза больше, чем площадь поверхности вращения графика одной функции $x(y)$, поэтому, по формуле (9.2):

$$P = 4\pi \int_0^{+\infty} y(x) \sqrt{1 + y'^2(x)} dx.$$

Переходя в интеграле к переменной y , получаем

$$P = 4\pi \int_a^0 y \sqrt{1 + \left(\frac{1}{x'(y)}\right)^2} x'(y) dy.$$

Меняя пределы интегрирования и учитывая, что $x'(y) \leq 0$, получаем

$$\begin{aligned} P &= -4\pi \int_0^a y \sqrt{1 + \left(\frac{1}{x'(y)}\right)^2} x'(y) dy = \\ &= 4\pi \int_0^a y \sqrt{1 + x'^2(y)} dy = 4\pi a \int_0^a dy = 4\pi a^2. \end{aligned}$$

2495. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$): а) вокруг оси Ox ; б) вокруг оси Oy ; в) вокруг прямой $y = 2a$.

а). Применяя формулу (9.3) и учитывая, что при $t \in [0; 2\pi]$

$$\left| \sin \frac{t}{2} \right| = \sin \frac{t}{2},$$

получаем

$$\begin{aligned} P &= 2\pi \int_0^{2\pi} |y(t)| \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt = \\ &= 2\sqrt{2} \pi a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t) \sqrt{1 - \cos t} dt = \\ &= 8\pi a^2 \int_0^{2\pi} \sin^3 \frac{t}{2} dt = -16\pi a^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - \cos^2 \frac{t}{2}\right) d\left(\cos \frac{t}{2}\right). \end{aligned}$$

Делая замену $z = \cos \frac{t}{2}$, находим

$$P = 16\pi a^2 \int_{-1}^1 (1 - z^2) dz = 32\pi a^2 \int_0^1 (1 - z^2) dz =$$

$$= 32\pi a^2 \left(z - \frac{z^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{64\pi a^2}{3}.$$

б). По формуле (9.6)

$$\begin{aligned} P &= 2\pi \int_0^{2\pi} |x(t)| \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt = \\ &= 2\sqrt{2}\pi a^2 \int_0^{2\pi} (t - \sin t) \sqrt{1 - \cos t} dt = \\ &= 4\pi a^2 \int_0^{2\pi} (t - \sin t) \left| \sin \frac{t}{2} \right| dt = 4\pi a^2 \int_0^{2\pi} (t - \sin t) \sin \frac{t}{2} dt = \\ &= 4\pi a^2 \left(\int_0^{2\pi} t \sin \frac{t}{2} dt - \int_0^{2\pi} \sin t \sin \frac{t}{2} dt \right). \end{aligned}$$

Вычислим сначала неопределенные интегралы. Первый интеграл берется интегрированием по частям:

$$\begin{aligned} \int \sin \frac{t}{2} dt &= -2 \int t d \left(\cos \frac{t}{2} \right) = -2t \cos \frac{t}{2} + \\ &+ 2 \int \cos \frac{t}{2} dt = -2t \cos \frac{t}{2} + 4 \sin \frac{t}{2} + C, \end{aligned}$$

а второй с помощью тригонометрии сводится к табличным:

$$\begin{aligned} \int \sin t \sin \frac{t}{2} dt &= \frac{1}{2} \left(\int \cos \frac{t}{2} dt - \int \cos \frac{3t}{2} dt \right) = \\ &= \sin \frac{t}{2} - \frac{1}{3} \sin \frac{3t}{2} + C. \end{aligned}$$

Применяя формулу Ньютона – Лейбница, находим

$$P = 4\pi a^2 \left[\left(-2t \cos \frac{t}{2} + 4 \sin \frac{t}{2} \right) - \left(\sin \frac{t}{2} - \frac{1}{3} \sin \frac{3t}{2} \right) \right] \Big|_0^{2\pi} =$$

$$= 4\pi a^2 \left[-2t \cos \frac{t}{2} + 3 \sin \frac{t}{2} + \frac{1}{3} \sin \frac{3t}{2} \right] \Big|_0^{2\pi} = 16\pi^2 a^2.$$

в). Переходим в новую систему координат, сдвигом вдоль оси ординат на $2a$. Преобразование координат дается равенствами:

$$\begin{cases} \tilde{x} = x, \\ \tilde{y} = y - 2a, \end{cases}$$

и осью вращения становится новая ось абсцисс. Параметрическое уравнение кривой (циклоиды) в новых координатах имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \tilde{x} = a(t - \sin t), \\ \tilde{y} = -a(1 + \cos t). \end{cases}$$

Применяя формулу (9.3) и делая замену $u = \cos \frac{t}{2}$, находим:

$$\begin{aligned} P &= 2\pi \int_0^{2\pi} |\tilde{y}(t)| \sqrt{\tilde{x}'^2(t) + \tilde{y}'^2(t)} dt = 2\pi \int_0^{2\pi} a(1 + \cos t) 2a \left| \sin \frac{t}{2} \right| dt = \\ &= 4\pi a^2 \int_0^{2\pi} (1 + \cos t) \sin \frac{t}{2} dt = 8\pi a^2 \int_0^{2\pi} \cos^2 \frac{t}{2} \sin \frac{t}{2} dt = \\ &= -16\pi a^2 \int_0^{2\pi} \cos^2 \frac{t}{2} d\left(\cos \frac{t}{2}\right) = 16\pi a^2 \int_{-1}^1 u^2 du = \\ &= 32\pi a^2 \int_0^1 u^2 du = 32\pi a^2 \left(\frac{u^3}{3}\right) \Big|_0^1 = \frac{32\pi a^2}{3}. \end{aligned}$$

2496. $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$ вокруг прямой $y = x$.

Рассматриваемая кривая называется астроидой, ее график приведен на рис. 9.2.

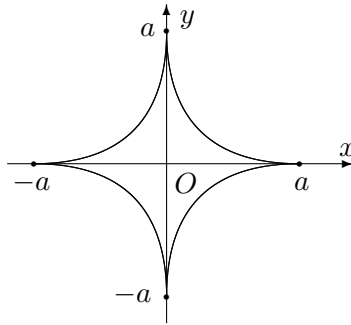


Рис. 9.2

Ось вращения (биссектриса первой и третьей координатных четвертей) является осью симметрии кривой. Для вычисления площади поверхности перейдем в новую систему координат поворотом на угол, равный $\pi/4$, относительно старой системы координат. Преобразование координат дается формулой:

$$\begin{cases} \tilde{x} = \frac{x+y}{\sqrt{2}}, \\ \tilde{y} = \frac{-x+y}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

Уравнение астроида в новых координатах имеет вид:

$$\begin{cases} \tilde{x} = \frac{a}{\sqrt{2}} (\sin^3 t + \cos^3 t), \\ \tilde{y} = \frac{a}{\sqrt{2}} (\sin^3 t - \cos^3 t). \end{cases}$$

Осью вращения в новой системе координат является новая ось абсцисс. График кривой в новой системе координат представлен на рис. 9.3. На этом же рисунке представлено положение старой системы координат.

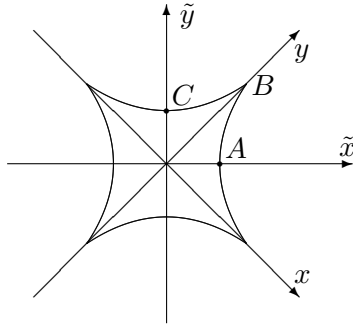


Рис. 9.3

Астроида в новых координатах также симметрична относительно обеих координатных осей. Поэтому можно вычислить площадь поверхности вращения части кривой, отвечающей дуге ABC , и затем удвоить полученный результат. Нетрудно убедиться, что участок кривой AB отвечает значениям $t \in [\pi/4; \pi/2]$, а участок BC – диапазону $t \in [\pi/2; 3\pi/4]$. По формуле (9.3)

$$\begin{aligned}
 P &= 4\pi \int_{\pi/4}^{3\pi/4} |\tilde{y}(t)| \sqrt{\tilde{x}'^2(t) + \tilde{y}'^2(t)} dt = \\
 &= 6\sqrt{2} \pi a^2 \int_{\pi/4}^{3\pi/4} |\sin^3 t - \cos^3 t| \sqrt{\sin^4 t \cos^2 t + \cos^4 t \sin^2 t} dt = \\
 &= 6\sqrt{2} \pi a^2 \int_{\pi/4}^{3\pi/4} (\sin^3 t - \cos^3 t) |\sin t \cos t| dt = \\
 &= 6\sqrt{2} \pi a^2 \left(\int_{\pi/4}^{\pi/2} (\sin^3 t - \cos^3 t) \sin t \cos t dt - \right.
 \end{aligned}$$

$$- \int_{\pi/2}^{3\pi/4} (\sin^3 t - \cos^3 t) \sin t \cos t dt \Bigg).$$

Интегралы вычисляем с помощью подстановок $u = \sin t$, $v = \cos t$:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\pi/4}^{\pi/2} (\sin^3 t - \cos^3 t) \sin t \cos t dt = \\ &= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin^4 t \cos t dt - \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos^4 t \sin t dt = \\ &= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin^4 t d(\sin t) + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos^4 t d(\cos t) = \int_{1/\sqrt{2}}^1 u^4 du + \int_{1/\sqrt{2}}^0 v^4 dv = \\ &= \left(\frac{u^5}{5} \right) \Big|_{1/\sqrt{2}}^1 + \left(\frac{v^5}{5} \right) \Big|_{1/\sqrt{2}}^0 = \frac{2\sqrt{2}-1}{10\sqrt{2}}. \\ I_2 &= \int_{\pi/2}^{3\pi/4} (\sin^3 t - \cos^3 t) \sin t \cos t dt = \\ &= \int_{\pi/2}^{3\pi/4} \sin^4 t \cos t dt - \int_{\pi/2}^{3\pi/4} \cos^4 t \sin t dt = \\ &= \int_{\pi/2}^{3\pi/4} \sin^4 t d(\sin t) + \int_{\pi/2}^{3\pi/4} \cos^4 t d(\cos t) = \int_1^{1/\sqrt{2}} u^4 du + \int_0^{-1/\sqrt{2}} v^4 dv = \\ &= \left(\frac{u^5}{5} \right) \Big|_1^{1/\sqrt{2}} + \left(\frac{v^5}{5} \right) \Big|_0^{-1/\sqrt{2}} = -\frac{1}{5}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$P = 6\sqrt{2} \pi a^2 \left(\frac{2\sqrt{2} - 1}{10\sqrt{2}} + \frac{1}{5} \right) = \frac{3\pi a^2(4\sqrt{2} - 1)}{5}.$$

2497. $r = a(1 + \cos \varphi)$ вокруг полярной оси.

График кривой (кардиоиды) представлен на рис. 9.4.

Кривая симметрична относительно полярной оси (оси абсцисс), ее верхняя половина отвечает значениям $t \in [0; \pi]$. По формуле (9.4)

$$\begin{aligned} P &= 2\pi \int_0^{\pi} r(\varphi) \sin \varphi \sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)} d\varphi = \\ &= 2\pi a^2 \int_0^{\pi} (1 + \cos \varphi) \sin \varphi \sqrt{2 + 2 \cos \varphi} d\varphi = \\ &= 4\pi a^2 \int_0^{\pi} (1 + \cos \varphi) \sin \varphi \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi. \end{aligned}$$

Учитывая тригонометрические формулы

$$\sin \varphi \cos \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2} \left(\sin \frac{\varphi}{2} + \sin \frac{3\varphi}{2} \right),$$

$$\cos \varphi \sin \varphi \cos \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2} \sin 2\varphi \cos \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{4} \left(\sin \frac{3\varphi}{2} + \sin \frac{5\varphi}{2} \right),$$

получаем

$$\begin{aligned} P &= 4\pi a^2 \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{2} \sin \frac{\varphi}{2} + \frac{3}{4} \sin \frac{3\varphi}{2} + \frac{1}{4} \sin \frac{5\varphi}{2} \right) d\varphi = \\ &= 4\pi a^2 \left(-\cos \frac{\varphi}{2} - \frac{1}{2} \cos \frac{3\varphi}{2} - \frac{1}{10} \cos \frac{5\varphi}{2} \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{32}{5} \pi a^2. \end{aligned}$$

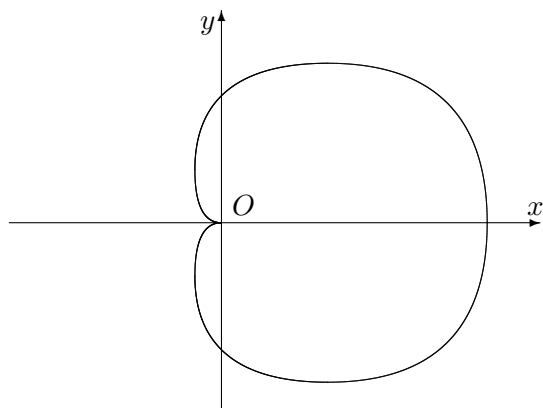


Рис. 9.4

2498. $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$: а) вокруг полярной оси; б) вокруг оси $\varphi = \pi/2$; в) вокруг оси $\varphi = \pi/4$.

График рассматриваемой кривой, которая называется лемнискатой, представлен на рис. 9.5. Кривая симметрична относительно обеих координатных осей, ее график проходит в двух секторах: $-\pi/4 \leq \varphi \leq \pi/4$ и $3\pi/4 \leq \varphi \leq 5\pi/4$.

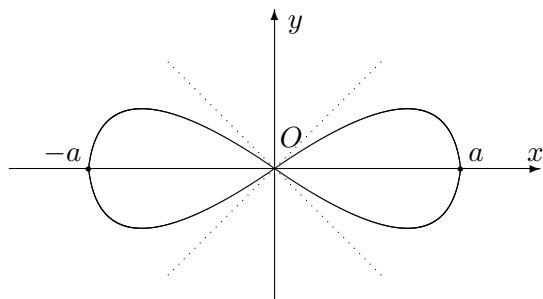


Рис. 9.5

а). Участок кривой, лежащий в первой четверти, отвечает значениям $\varphi \in [0; \pi/4]$. При вращении он дает поверхность, пло-

щадь которой составляет половину от всей площади. Следовательно, по формуле (9.4) для $r(\varphi) = a\sqrt{\cos 2\varphi}$ имеем:

$$\begin{aligned}
 P &= 4\pi \int_0^{\pi/4} r(\varphi) \sin \varphi \sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)} d\varphi = \\
 &= 4\pi \int_0^{\pi/4} a\sqrt{\cos 2\varphi} \sin \varphi \frac{a d\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}} = \\
 &= 4\pi a^2 \int_0^{\pi/4} \sin \varphi d\varphi = -4\pi a^2 \cos \varphi \Big|_0^{\pi/4} = 2\pi a^2(2 - \sqrt{2}).
 \end{aligned}$$

б). Аналогично предыдущему пункту, можно ограничиться участком кривой, лежащей в первой четверти, вычислить соответствующую площадь поверхности вращения и полученный результат удвоить. Применяя формулу (9.7), находим

$$\begin{aligned}
 P &= 4\pi \int_0^{\pi/4} r(\varphi) \cos \varphi \sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)} d\varphi = \\
 &= 4\pi a^2 \int_0^{\pi/4} \cos \varphi d\varphi = 4\pi a^2 \sin \varphi \Big|_0^{\pi/4} = 2\sqrt{2} \pi a^2.
 \end{aligned}$$

в). Повернем исходную систему координат на угол, равный $\pi/4$. Тогда в новой системе координат ось вращения будет совпадать с осью абсцисс. В полярных координатах это преобразование сведется к замене величины φ на $\varphi + \pi/4$ (величина r остается без изменений). Таким образом, если за новыми полярными координатами оставить те же обозначения r и φ , то уравнение лемнискаты принимает вид

$$r = a\sqrt{-\sin 2\varphi}.$$

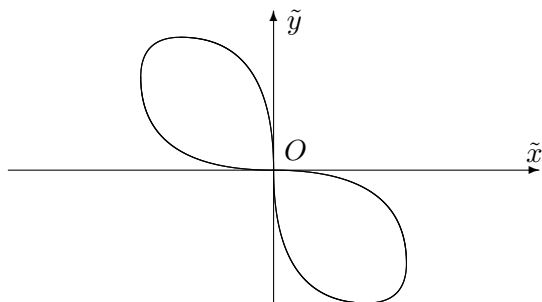


Рис. 9.6

График кривой в новой системе координат $\tilde{x}O\tilde{y}$ показан на рис. 9.6.

Участок кривой, отвечающий $\varphi \in [\pi/2; \pi]$, дает половину площади вращения, следовательно, по формуле (9.4) для $r = a\sqrt{-\sin 2\varphi}$ получаем:

$$\begin{aligned}
 P &= 4\pi \int_{\pi/2}^{\pi} r(\varphi) \sin \varphi \sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)} d\varphi = \\
 &= 4\pi \int_{\pi/2}^{\pi} a\sqrt{-\sin 2\varphi} \sin \varphi \frac{a d\varphi}{\sqrt{-\sin 2\varphi}} = \\
 &= 4\pi a^2 \int_{\pi/2}^{\pi} \sin \varphi d\varphi = -4\pi a^2 \cos \varphi \Big|_{\pi/2}^{\pi} = 4\pi a^2.
 \end{aligned}$$

2499. Тело образовано вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной параболой $ay = a^2 - x^2$ и осью Ox . Найти отношение поверхности тела вращения к поверхности равновеликого шара.

Парабола $y = (a^2 - x^2)/a$ пересекает ось абсцисс в точках $x = \pm a$ (рис. 9.7).

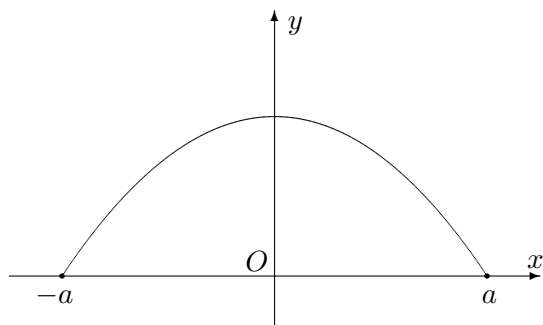


Рис. 9.7

Тело получается вращением криволинейной трапеции

$$-a \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq \frac{a^2 - x^2}{a}$$

вокруг оси Ox . Применяя формулу (8.4) из второго раздела предыдущей главы, находим

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-a}^a y^2(x) dx = \pi \int_{-a}^a \left(\frac{a^2 - x^2}{a} \right)^2 dx = 2\pi \int_0^a \left(\frac{a^2 - x^2}{a} \right)^2 dx = \\ &= \frac{2\pi}{a^2} \int_0^a (a^4 - 2a^2x^2 + x^4) dx = \\ &= \frac{2\pi}{a^2} \left(a^4x - \frac{2}{3}a^2x^3 + \frac{1}{5}x^5 \right) \Big|_0^a = \frac{16}{15} \pi a^3. \end{aligned}$$

Если R – радиус равновеликого шара, то

$$\frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{16}{15} \pi a^3,$$

откуда находим $R = a \sqrt[3]{\frac{4}{5}}$ и поверхность равновеликого шара

$$S = 4\pi R^2 = 4\pi a^2 \sqrt[3]{\frac{16}{25}} = 8\pi a^2 \sqrt[3]{\frac{2}{25}}.$$

Для нахождения площади поверхности вращения воспользуемся формулой (9.2):

$$\begin{aligned}
 P &= 2\pi \int_{-a}^a |y(x)| \sqrt{1 + y'^2(x)} dx = \\
 &= 2\pi \int_{-a}^a \left(\frac{a^2 - x^2}{a} \right) \sqrt{1 + \left(-\frac{2x}{a} \right)^2} dx = \\
 &= \frac{2\pi}{a^2} \int_{-a}^a (a^2 - x^2) \sqrt{a^2 + 4x^2} dx = \frac{4\pi}{a^2} \int_0^a (a^2 - x^2) \sqrt{a^2 + 4x^2} dx = \\
 &= 4\pi \int_0^a \sqrt{a^2 + 4x^2} dx - \frac{4\pi}{a^2} \int_0^a x^2 \sqrt{a^2 + 4x^2} dx.
 \end{aligned}$$

Первый из полученных интегралов заменой $u = 2x$ сводится к табличному:

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_0^a \sqrt{a^2 + 4x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^{2a} \sqrt{a^2 + u^2} du = \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{u}{2} \sqrt{a^2 + u^2} + \frac{a^2}{2} \ln(u + \sqrt{a^2 + u^2}) \right) \Big|_0^{2a} = \\
 &= \frac{a^2}{2} \left(\sqrt{5} + \frac{1}{2} \ln(2 + \sqrt{5}) \right).
 \end{aligned}$$

Для вычисления второго интеграла сделаем ту же замену:

$$I_2 = \int_0^a x^2 \sqrt{a^2 + 4x^2} dx = \frac{1}{8} \int_0^{2a} u^2 \sqrt{a^2 + u^2} du.$$

Вычислим, сначала, неопределенный интеграл

$$I = \int u^2 \sqrt{a^2 + u^2} du.$$

Интегрируя по частям, имеем

$$I = \frac{1}{3} \int u d((a^2 + u^2)^{3/2}) = \frac{1}{3} u(a^2 + u^2)^{3/2} - \frac{1}{3} \int (a^2 + u^2)^{3/2} du.$$

Так как

$$\begin{aligned} \int (a^2 + u^2)^{3/2} du &= \int (a^2 + u^2) \sqrt{a^2 + u^2} du = \\ &= a^2 \int \sqrt{a^2 + u^2} du + \int u^2 \sqrt{a^2 + u^2} du = \\ &= a^2 \left(\frac{u}{2} \sqrt{a^2 + u^2} + \frac{a^2}{2} \ln(u + \sqrt{a^2 + u^2}) \right) + I, \end{aligned}$$

то для I получаем уравнение

$$I = \frac{1}{3} u(a^2 + u^2)^{3/2} - \frac{a^2 u}{6} \sqrt{a^2 + u^2} - \frac{a^4}{6} \ln(u + \sqrt{a^2 + u^2}) - \frac{1}{3} I.$$

Решая полученное уравнение относительно I , находим

$$\begin{aligned} \int u^2 \sqrt{a^2 + u^2} du &= \frac{u}{4} (a^2 + u^2)^{3/2} - \frac{a^2 u}{8} \sqrt{a^2 + u^2} - \\ &- \frac{a^4}{8} \ln(u + \sqrt{a^2 + u^2}) + C. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{8} \left[\frac{u}{4} (a^2 + u^2)^{3/2} - \frac{a^2 u}{8} \sqrt{a^2 + u^2} - \right. \\ &\left. - \frac{a^4}{8} \ln(u + \sqrt{a^2 + u^2}) \right] \Big|_0^{2a} = \frac{9\sqrt{5}}{32} a^4 - \frac{a^4}{64} \ln(2 + \sqrt{5}). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
 P &= 4\pi I_1 - \frac{4\pi}{a^2} I_2 = 4\pi \left[\frac{a^2}{2} \left(\sqrt{5} + \frac{1}{2} \ln(2 + \sqrt{5}) \right) \right] - \\
 &\quad - \frac{4\pi}{a^2} \left[\frac{9\sqrt{5}}{32} a^4 - \frac{a^4}{64} \ln(2 + \sqrt{5}) \right] = \\
 &= 4\pi a^2 \left[\frac{7\sqrt{5}}{32} + \frac{17}{64} \ln(2 + \sqrt{5}) \right].
 \end{aligned}$$

Искомое отношение площадей поверхностей

$$\frac{P}{S} = \frac{5}{128\sqrt[3]{10}} \left[14\sqrt{5} + 17 \ln(2 + \sqrt{5}) \right].$$

2500. Фигура, ограниченная параболой $y^2 = 2px$ и прямой $x = p/2$, вращается вокруг прямой $y = p$. Найти объем и поверхность тела вращения.

Прямая $x = p/2$ отсекает от параболы сегмент, изображенный на рис. 9.8. Ось вращения проходит через концевую точку этого сегмента $(p/2; p)$. Сведем нашу задачу к задаче о теле вращения вокруг оси абсцисс. Для этого перейдем к новым координатам:

$$\begin{cases} \tilde{x} = x, \\ \tilde{y} = p - y. \end{cases}$$

Уравнение параболы в новых координатах принимает следующий вид:

$$(p - \tilde{y})^2 = 2p \tilde{x}.$$

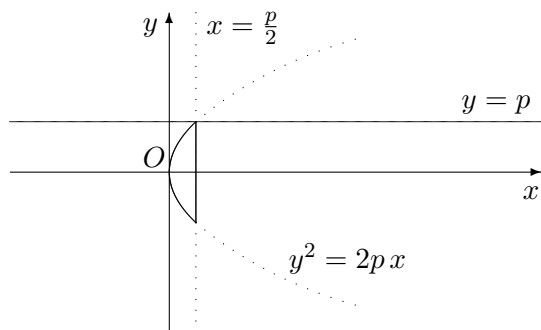


Рис. 9.8

Решая уравнение относительно $\tilde{y}$, находим функции, графики которых ограничивают параболический сегмент снизу и сверху в новой системе координат:

$$\tilde{y}_1(x) = p - \sqrt{2p\tilde{x}}, \quad \tilde{y}_2(x) = p + \sqrt{2p\tilde{x}},$$

на участке $\tilde{x} \in [0; p/2]$ (рис. 9.9).

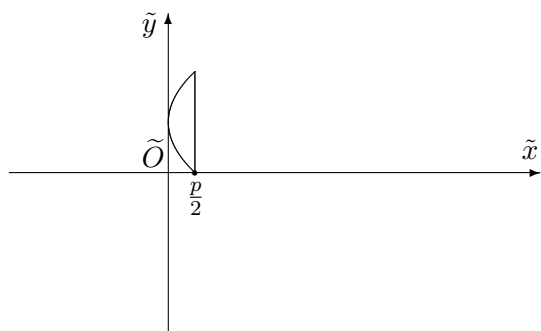


Рис. 9.9

Таким образом, тело образовано вращением криволинейного прямоугольника

$$0 \leq \tilde{x} \leq \frac{p}{2}, \quad \tilde{y}_1(x) \leq \tilde{y} \leq \tilde{y}_2(x)$$

вокруг новой оси абсцисс и его объем вычисляется по формуле (9.2) второго раздела предыдущей главы:

$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_0^{p/2} [\tilde{y}_2^2(\tilde{x}) - \tilde{y}_1^2(\tilde{x})] d\tilde{x} = \\
 &= \pi \int_0^{p/2} [(p + \sqrt{2p\tilde{x}})^2 - (p - \sqrt{2p\tilde{x}})^2] d\tilde{x} = \\
 &= 4\sqrt{2}\pi p \sqrt{p} \int_0^{p/2} \sqrt{\tilde{x}} d\tilde{x} = \frac{8}{3} \pi \sqrt{2} p^{3/2} \tilde{x}^{3/2} \Big|_0^{p/2} = \frac{4}{3} \pi p^3.
 \end{aligned}$$

Боковая поверхность тела вращения P состоит из поверхности вращения P_1 графика функции $\tilde{y}_1(\tilde{x})$ и поверхности вращения P_2 графика функции $\tilde{y}_2(\tilde{x})$. По формуле (9.2) находим

$$\begin{aligned}
 P &= P_1 + P_2 = 2\pi \int_0^{p/2} |\tilde{y}_1(\tilde{x})| \sqrt{1 + \tilde{y}_1'^2(\tilde{x})} d\tilde{x} + \\
 &+ 2\pi \int_0^{p/2} |\tilde{y}_2(\tilde{x})| \sqrt{1 + \tilde{y}_2'^2(\tilde{x})} d\tilde{x} = \\
 &= 2\pi \int_0^{p/2} (p - \sqrt{2p\tilde{x}}) \sqrt{1 + \frac{p}{2\tilde{x}}} d\tilde{x} + 2\pi \int_0^{p/2} (p + \sqrt{2p\tilde{x}}) \sqrt{1 + \frac{p}{2\tilde{x}}} d\tilde{x} = \\
 &= 4\pi p \int_0^{p/2} \sqrt{1 + \frac{p}{2\tilde{x}}} d\tilde{x} = \frac{4\pi p}{\sqrt{2}} \int_0^{p/2} \sqrt{\frac{2\tilde{x} + p}{\tilde{x}}} d\tilde{x}.
 \end{aligned}$$

Полученный интеграл заменой $t = \sqrt{2\tilde{x}}$ сводится к табличному:

$$P = 4\pi p \int_0^{\sqrt{p}} \sqrt{t^2 + p} dt = 4\pi p \left[\frac{t}{2} \sqrt{t^2 + p} + \right. \\ \left. + \frac{p}{2} \ln(t + \sqrt{t^2 + p}) \right] \Big|_0^{\sqrt{p}} = 2\pi p^2 \left(\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}) \right).$$

Полная поверхность тела вращения складывается из боковой поверхности и площади круга радиуса $2p$, образующегося в сечении $x = p/2$. Эта площадь

$$S_0 = \pi(2p)^2 = 4\pi p^2.$$

Таким образом, полная поверхность тела вращения

$$S = P + S_0 = 2\pi p^2 \left(2 + \sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}) \right).$$

Глава 10

Вычисление моментов и центра тяжести

10.1. Вычисление моментов

10.1.1. Моменты плоской кривой

Пусть на плоскости xOy задана параметрическая кривая

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$$

где $x(t)$ и $y(t)$ – функции, заданные на отрезке $[\alpha; \beta]$. На кривой распределена масса с постоянной плотностью ρ . Моменты k -го порядка относительно координатных осей вычисляются по формулам:

$$M_k^{(x)} = \rho \int_{\alpha}^{\beta} y^k(t) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt, \quad (10.1)$$

$$M_k^{(y)} = \rho \int_{\alpha}^{\beta} x^k(t) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt. \quad (10.2)$$

При $k = 0$ оба момента совпадают с массой кривой, при $k = 1$ получаем статические моменты, а при $k = 2$ – моменты инерции. Если плотность $\rho = 1$, то моменты называются геометрическими.

Если в задаче не указана плотность масс, то подразумевается, что необходимо вычислить геометрические моменты.

В том случае, когда кривая представляет график функции $y = y(x)$, определенной на отрезке $[a; b]$, то формулы для моментов принимают следующий вид:

$$M_k^{(x)} = \rho \int_a^b y^k(x) \sqrt{1 + y'^2(x)} dx, \quad (10.3)$$

$$M_k^{(y)} = \rho \int_a^b x^k \sqrt{1 + y'^2(x)} dx. \quad (10.4)$$

Аналогичным образом, если кривая представляет собой график функции $x = x(y)$, определенной на отрезке $[c; d]$, то формулы для моментов имеют следующий вид:

$$M_k^{(x)} = \rho \int_c^d y^k \sqrt{1 + x'^2(y)} dy, \quad (10.5)$$

$$M_k^{(y)} = \rho \int_c^d x^k(y) \sqrt{1 + x'^2(y)} dy. \quad (10.6)$$

Если кривая задана в полярных координатах $r = r(\varphi)$, где $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $\alpha \leq \varphi \leq \beta$, то

$$M_k^{(x)} = \rho \int_{\alpha}^{\beta} r^k(\varphi) \sin^k \varphi \sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)} d\varphi, \quad (10.7)$$

$$M_k^{(y)} = \rho \int_{\alpha}^{\beta} r^k(\varphi) \cos^k \varphi \sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)} d\varphi. \quad (10.8)$$

В том случае когда необходимо найти моменты относительно прямой, не являющейся координатной осью, нужно перейти в новую систему координат, в которой заданная прямая станет координатной осью и вычислить нужные моменты относительно этой координатной оси.

2501. Найти статический момент и момент инерции дуги полуокружности радиуса a относительно диаметра, проходящего через концы этой дуги.

В системе координат, центр которой совпадает с центром полуокружности, ось абсцисс направлена вдоль диаметра, относительно которого необходимо вычислить момент, а сама полуокружность лежит в верхней полуплоскости, рассматриваемую кривую можно задать параметрически следующим образом:

$$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = a \sin t, \end{cases}$$

где $t \in [0; \pi]$. Так как плотность не задана, вычисляем геометрические моменты по формуле (10.1). Статический момент:

$$M_1 = M_1^{(x)} = \int_0^{\pi} (a \sin t) a \, dt = -a^2 \cos t \Big|_0^{\pi} = 2a^2.$$

Момент инерции:

$$\begin{aligned} M_2 = M_2^{(x)} &= \int_0^{\pi} (a \sin t)^2 a \, dt = a^3 \int_0^{\pi} \sin^2 t \, dt = \\ &= \frac{a^3}{2} \int_0^{\pi} (1 - \cos 2t) \, dt = \frac{a^3}{2} \left(t - \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi a^3}{2}. \end{aligned}$$

2501.1. Найти статический момент дуги параболы

$$y^2 = 2px \quad (0 \leq x \leq p/2)$$

относительно прямой $x = p/2$.

Перейдем в новую систему координат по формулам:

$$\begin{cases} \tilde{x} = x - \frac{p}{2}, \\ \tilde{y} = y. \end{cases}$$

При таком преобразовании прямая $x = p/2$ переходит в новую ось ординат. Дугу параболы можно рассматривать как график функции

$$x = \frac{y^2}{2p}, \quad -p \leq y \leq p,$$

или (в новых координатах)

$$\tilde{x} = \frac{\tilde{y}^2}{2p} - \frac{p}{2}, \quad -p \leq y \leq p,$$

Статический момент вычисляем по формуле (10.6):

$$\begin{aligned} M_1 &= M_1^{(\tilde{y})} = \int_{-p}^p \tilde{x}(\tilde{y}) \sqrt{1 + \tilde{x}'^2(\tilde{y})} d\tilde{y} = \int_{-p}^p \left(\frac{\tilde{y}^2}{2p} - \frac{p}{2} \right) \sqrt{1 + \frac{\tilde{y}^2}{p^2}} d\tilde{y} = \\ &= \frac{1}{2p^2} \int_{-p}^p (\tilde{y}^2 - p^2) \sqrt{p^2 + \tilde{y}^2} d\tilde{y} = \frac{1}{p^2} \int_0^p (\tilde{y}^2 - p^2) \sqrt{p^2 + \tilde{y}^2} d\tilde{y}. \end{aligned}$$

Воспользуемся теперь интегралом, вычисленным при решении задачи 2499:

$$\begin{aligned} \int \tilde{y}^2 \sqrt{p^2 + \tilde{y}^2} d\tilde{y} &= \frac{\tilde{y}}{4} (p^2 + \tilde{y}^2)^{3/2} - \frac{p^2 \tilde{y}}{8} \sqrt{p^2 + \tilde{y}^2} - \\ &\quad - \frac{p^4}{8} \ln(\tilde{y} + \sqrt{p^2 + \tilde{y}^2}) + C \end{aligned}$$

и табличным интегралом:

$$\int \sqrt{p^2 + \tilde{y}^2} d\tilde{y} = \frac{\tilde{y}}{2} \sqrt{p^2 + \tilde{y}^2} + \frac{p^2}{2} \ln(\tilde{y} + \sqrt{p^2 + \tilde{y}^2}) + C.$$

Из этих соотношений находим:

$$\begin{aligned} \int (\tilde{y}^2 - p^2) \sqrt{p^2 + \tilde{y}^2} d\tilde{y} &= \int \tilde{y}^2 \sqrt{p^2 + \tilde{y}^2} d\tilde{y} - p^2 \int \sqrt{p^2 + \tilde{y}^2} d\tilde{y} = \\ &= \frac{\tilde{y}}{4} (p^2 + \tilde{y}^2)^{3/2} - \frac{5p^2 \tilde{y}}{8} \sqrt{p^2 + \tilde{y}^2} - \frac{5p^4}{8} \ln(\tilde{y} + \sqrt{p^2 + \tilde{y}^2}) + C. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{1}{p^2} \left[\frac{\tilde{y}}{4} (p^2 + \tilde{y}^2)^{3/2} - \frac{5p^2 \tilde{y}}{8} \sqrt{p^2 + \tilde{y}^2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{5p^4}{8} \ln(\tilde{y} + \sqrt{p^2 + \tilde{y}^2}) \right] \Big|_0^p = -\frac{p^2}{8} \left[\sqrt{2} + 5 \ln(1 + \sqrt{2}) \right]. \end{aligned}$$

10.1.2. Моменты плоской фигуры

Пусть в плоской фигуре распределена масса с постоянной плотностью ρ . Проведем сечения этой фигуры прямыми $x = \text{const}$ и $y = \text{const}$ (рис. 10.1).

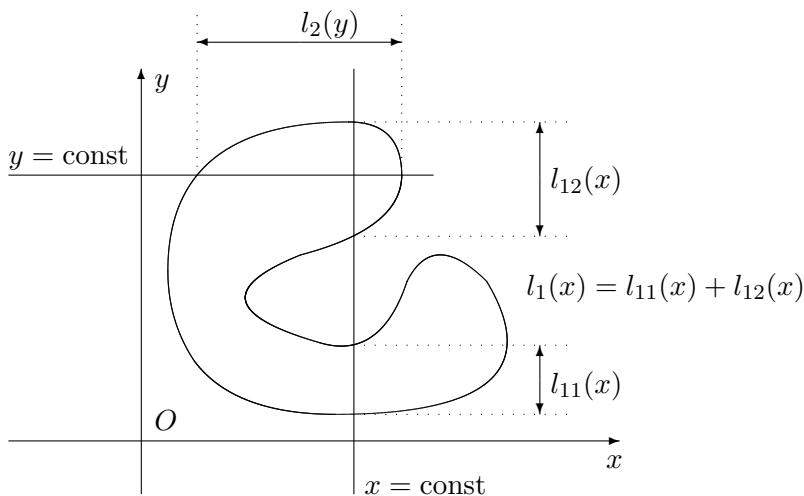


Рис. 10.1

Длины пересечений этих прямых с фигурой обозначим, соответственно, $l_1(x)$ и $l_2(y)$. Линия сечения может пересекать фигуру по объединению нескольких отрезков. В этом случае под длиной пересечения понимается сумма длин всех отрезков пересечения. Так на рис. 10.1 линия $x = \text{const}$ пересекает фигуру по двум отрезкам с длинами $l_{11}(x)$ и $l_{12}(x)$, следовательно, $l_1(x) = l_{11}(x) + l_{12}(x)$.

Пусть фигура проектируется на ось Ox в отрезок $[a; b]$, а на ось Oy – в отрезок $[c; d]$. Моменты k -го порядка определяются следующим образом:

$$M_k^{(x)} = \rho \int_{\alpha}^{\beta} y^k l_2(y) dy, \quad (10.9)$$

$$M_k^{(y)} = \rho \int_{\alpha}^{\beta} x^k l_1(x) dx. \quad (10.10)$$

При $k = 0$ оба момента совпадают с массой фигуры, при $k = 1$ получаем статические моменты, а при $k = 2$ – моменты инерции. Если плотность $\rho = 1$, то моменты называются геометрическими. Если в задаче не указана плотность масс, то подразумевается, что необходимо вычислить геометрические моменты.

2502. Найти статический момент и момент инерции однородной треугольной пластинки с основанием b и высотой h относительно основания ($\rho = 1$).

Выберем систему координат так, чтобы ось абсцисс проходила по основанию, относительно которого вычисляются моменты, а сам треугольник лежал в верхней полуплоскости (рис. 10.2).

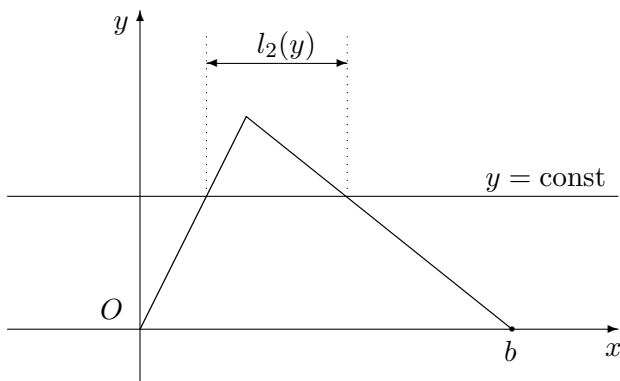


Рис. 10.2

Прямая $y = \text{const}$ отсекает треугольник, подобный данному с основанием, равным $l_2(y)$ – длине пересечения прямой $y = \text{const}$ с заданным треугольником. Из подобия треугольников получаем соотношение

$$\frac{l_2(y)}{b} = \frac{h - y}{h},$$

из которого находим

$$l_2(y) = \left(1 - \frac{y}{h}\right) b.$$

Моменты вычисляем по формуле (10.9):

$$\begin{aligned} M_1 = M_1^{(x)} &= \int_0^h y l_2(y) dy = b \int_0^h \left(y - \frac{y^2}{h}\right) dy = \\ &= b \left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3h}\right) \Big|_0^h = \frac{bh^2}{6}. \end{aligned}$$

$$M_2 = M_2^{(x)} = \int_0^h y^2 l_2(y) dy = b \int_0^h \left(y^2 - \frac{y^3}{h}\right) dy =$$

$$= b \left(\frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4h} \right) \Big|_0^h = \frac{bh^3}{12}.$$

2502.1. Найти моменты инерции $I_x = M_2^{(x)}$ и $I_y = M_2^{(y)}$ относительно осей Ox и Oy параболического сегмента, ограниченного кривыми

$$ay = 2ax - x^2 \quad (a > 0) \quad \text{и} \quad y = 0.$$

Чему равны радиусы инерции r_x и r_y , т. е. величины, определяемые соотношениями

$$I_x = Sr_x^2, \quad I_y = Sr_y^2,$$

где S – площадь сегмента?

Рассматриваемый сегмент ограничен осью абсцисс и графиком функции

$$y = \frac{2ax - x^2}{a} \quad (0 \leq x \leq 2a).$$

Прямая $x = \text{const}$ пересекает рассматриваемую фигуру по отрезку, длина которого равна $y(x)$, поэтому

$$l_1(x) = \frac{2ax - x^2}{a}.$$

Абсциссы точек пересечения прямой $y = \text{const}$ с границей параболического сегмента обозначим x_1 и x_2 (рис. 10.3).

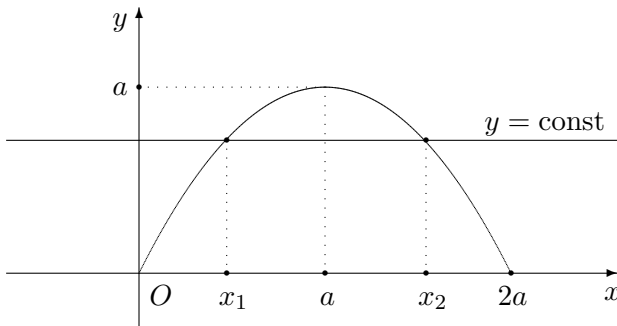


Рис. 10.3

Значения x_1 и x_2 находим решая квадратное уравнение

$$y = \frac{2ax - x^2}{a}$$

относительно x :

$$\begin{aligned} x^2 - 2ax + ay &= 0, \\ \begin{cases} x_1 = a - \sqrt{a^2 - ay}, \\ x_2 = a + \sqrt{a^2 - ay}. \end{cases} \end{aligned}$$

Таким образом, длина пересечения прямой $y = \text{const}$ с нашей фигурой

$$l_2(y) = x_2 - x_1 = 2\sqrt{a^2 - ay}.$$

Моменты инерции вычисляем по формулам (10.9) и (10.10) с $\rho = 1$ и $k = 2$:

$$I_x = M_2^{(x)} = \int_0^a y^2 l_2(y) dy = 2 \int_0^a y^2 \sqrt{a^2 - ay} dy.$$

После замены $t = \sqrt{a^2 - ay}$ получаем:

$$\begin{aligned} I_x &= \frac{4}{a^3} \int_0^a t^2 (a^2 - t^2)^2 dt = \frac{4}{a^3} \int_0^a (a^4 t^2 - 2a^2 t^4 + t^6) dt = \\ &= \frac{4}{a^3} \left(\frac{a^4 t^3}{3} - \frac{2a^2 t^5}{5} + \frac{t^7}{7} \right) \Big|_0^a = \frac{32a^4}{105}. \end{aligned}$$

Второй момент вычисляется проще:

$$\begin{aligned} I_y &= M_2^{(y)} = \int_0^{2a} x^2 l_1(x) dx = \int_0^{2a} x^2 \frac{2ax - x^2}{a} dx = \\ &= \left(\frac{x^4}{2} - \frac{x^5}{5a} \right) \Big|_0^{2a} = \frac{8a^4}{5}. \end{aligned}$$

Площадь фигуры

$$S = \int_0^{2a} y(x) dx = \int_0^{2a} \left(2x - \frac{x^2}{a} \right) dx = \left(x^2 - \frac{x^3}{3a} \right) \Big|_0^{2a} = \frac{4a^2}{3}.$$

Радиусы инерции

$$r_x = \sqrt{\frac{I_x}{S}} = 2a\sqrt{\frac{2}{35}}, \quad r_y = \sqrt{\frac{I_y}{S}} = a\sqrt{\frac{6}{5}}.$$

2503. Найти моменты инерции однородной эллиптической пластинки с полуосями a и b относительно ее главных осей ($\rho = 1$).

Границей пластинки является эллипс (рис. 10.4) с полуосями a и b .

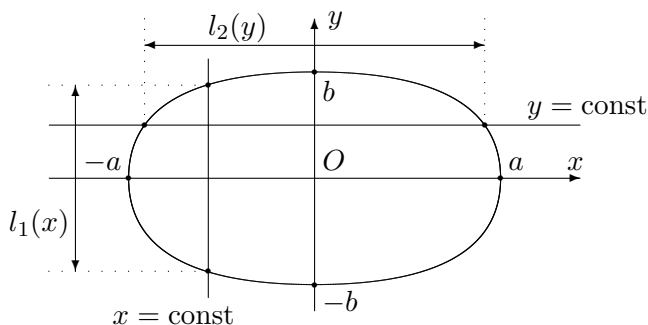


Рис. 10.4

Уравнение этого эллипса имеет следующий вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Обозначим через y_1 и y_2 ординаты точек пересечения эллипса и прямой $x = \text{const}$. Они определяются из уравнения эллипса:

$$y_1 = -b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}, \quad y_2 = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}.$$

Длина отрезка пересечения прямой $x = \text{const}$ с нашей фигурой

$$l_1(x) = y_2 - y_1 = 2b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}.$$

Пусть x_1 и x_2 – абсциссы точек пересечения эллипса и прямой $y = \text{const}$. Они также определяются из уравнения эллипса:

$$x_1 = -a\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}, \quad x_2 = a\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}.$$

Длина отрезка пересечения прямой $y = \text{const}$ с эллиптической пластинкой

$$l_2(y) = x_2 - x_1 = 2a\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}.$$

Моменты инерции вычисляем с помощью формул (10.9) и (10.10) с $\rho = 1$ и $k = 2$:

$$\begin{aligned} M_2^{(x)} &= \int_{-b}^b y^2 l_2(y) dy = 2a \int_{-b}^b y^2 \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}} dy = \\ &= \frac{2a}{b} \int_{-b}^b y^2 \sqrt{b^2 - y^2} dy = \frac{4a}{b} \int_0^b y^2 \sqrt{b^2 - y^2} dy. \\ M_2^{(y)} &= \int_{-a}^a x^2 l_1(x) dx = 2b \int_{-a}^a x^2 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx = \\ &= \frac{2b}{a} \int_{-a}^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{4b}{a} \int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx. \end{aligned}$$

Оба момента выражаются через один и тот же интеграл, только в разных переменных:

$$I = \int t^2 \sqrt{c^2 - t^2} dt.$$

Этот интеграл можно вычислить, получив для него уравнение с помощью интегрирования по частям:

$$\begin{aligned}
 I &= -\frac{1}{3} \int t d(c^2 - t^2)^{3/2} = -\frac{1}{3} t (c^2 - t^2)^{3/2} + \\
 &+ \frac{1}{3} \int (c^2 - t^2)^{3/2} dt = -\frac{1}{3} t (c^2 - t^2)^{3/2} + \\
 &+ \frac{1}{3} \int (c^2 - t^2) \sqrt{c^2 - t^2} dt = -\frac{1}{3} t (c^2 - t^2)^{3/2} + \\
 &+ \frac{c^2}{3} \int \sqrt{c^2 - t^2} dt - \frac{1}{3} \int t^2 \sqrt{c^2 - t^2} dt = \\
 &= -\frac{1}{3} t (c^2 - t^2)^{3/2} + \frac{c^2}{3} \left[\frac{t}{2} \sqrt{c^2 - t^2} + \frac{c^2}{2} \arcsin \frac{t}{c} \right] - \frac{1}{3} I.
 \end{aligned}$$

Решая это уравнение относительно I , находим

$$\int t^2 \sqrt{c^2 - t^2} dt = -\frac{t}{4} (c^2 - t^2)^{3/2} + \frac{c^2 t}{8} \sqrt{c^2 - t^2} + \frac{c^4}{8} \arcsin \frac{t}{c} + C.$$

Применяя формулу Ньютона – Лейбница находим моменты:

$$M_2^{(x)} = \frac{4a}{b} \left[-\frac{y}{4} (b^2 - y^2)^{3/2} + \frac{b^2 y}{8} \sqrt{b^2 - y^2} + \frac{b^4}{8} \arcsin \frac{y}{b} \right] \Big|_0^b = \frac{\pi a b^3}{4}.$$

$$M_2^{(y)} = \frac{4b}{a} \left[-\frac{x}{4} (a^2 - x^2)^{3/2} + \frac{a^2 x}{8} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^4}{8} \arcsin \frac{x}{a} \right] \Big|_0^a = \frac{\pi a^3 b}{4}.$$

10.1.3. Моменты трехмерного тела и поверхности вращения

Пусть тело с постоянной плотностью ρ занимает в трехмерном пространстве область Ω . Проведем сечения тела при помощи плоскостей $x = \text{const}$, $y = \text{const}$ и $z = \text{const}$. Обозначим площади получившихся сечений, соответственно, $S_1(x)$, $S_2(y)$ и $S_3(z)$. Пусть проекции тела на координатные оси Ox , Oy и Oz

представляют собой отрезки $[a; b]$, $[c; d]$ и $[e; f]$. Моменты k -го порядка относительно координатных плоскостей вычисляются по формулам:

$$M_k^{(yz)} = \rho \int_a^b x^k S_1(x) dx, \quad (10.11)$$

$$M_k^{(zx)} = \rho \int_c^d y^k S_2(y) dy, \quad (10.12)$$

$$M_k^{(xy)} = \rho \int_e^f z^k S_3(z) dz. \quad (10.13)$$

При $k = 0$ все моменты совпадают с массой тела, при $k = 1$ получаем статические моменты, а при $k = 2$ – моменты инерции. Если плотность $\rho = 1$, то моменты называются геометрическими. Если в задаче не указана плотность масс, то подразумевается, что необходимо вычислить геометрические моменты.

Пусть тело пересекается цилиндрическими поверхностями $y^2 + z^2 = r^2$ при $r \in [a; b]$, $x^2 + z^2 = r^2$ при $r \in [c; d]$ и $x^2 + y^2 = r^2$ при $r \in [e; f]$. Площади пересечений этих поверхностей с телом обозначим, соответственно, $S_1(r)$, $S_2(r)$ и $S_3(r)$. Моменты k -го порядка относительно координатных осей вычисляются по формулам:

$$M_k^{(x)} = \rho \int_a^b r^k S_1(r) dr, \quad (10.14)$$

$$M_k^{(y)} = \rho \int_c^d r^k S_2(r) dr, \quad (10.15)$$

$$M_k^{(z)} = \rho \int_e^f r^k S_3(r) dr. \quad (10.16)$$

При $k = 0$ все моменты совпадают с массой тела, при $k = 1$ получаем статические моменты, а при $k = 2$ – моменты инерции. Если плотность $\rho = 1$, то моменты называются геометрическими. Если в задаче не указана плотность масс, то подразумевается, что необходимо вычислить геометрические моменты.

Для моментов инерции справедливы следующие тождества:

$$M_2^{(x)} = M_2^{(xy)} + M_2^{(zx)}, \quad M_2^{(y)} = M_2^{(xy)} + M_2^{(yz)}, \quad M_2^{(z)} = M_2^{(zx)} + M_2^{(yz)}.$$

Через определенный интеграл можно выразить и некоторые моменты поверхности вращения. Пусть поверхность образована вращением графика функции

$$y = y(x), \quad a \leq x \leq b$$

вокруг оси Ox и на ней распределена масса с постоянной плотностью ρ . Тогда моменты k -го порядка относительно плоскости yOz можно вычислить по формуле

$$M_k^{(yz)} = 2\pi\rho \int_a^b x^k |y(x)| \sqrt{1 + y'^2(x)} dx. \quad (10.17)$$

2504. Найти статический момент и момент инерции однородного кругового конуса с радиусом основания r и высотой h относительно плоскости основания этого конуса ($\rho = 1$).

Выберем систему координат так, чтобы плоскость xOy совпадала с плоскостью основания конуса, начало координат совпадало с центром основания, а сам конус находился в верхнем полупространстве (рис. 10.5).

Площадь $S_3(z)$ сечения конуса плоскостью $z = \text{const}$ можно найти из свойства подобия

$$\frac{S_3(z)}{S_0} = \left(\frac{h - z}{h} \right)^2.$$

Учитывая, что площадь основания конуса $S_0 = \pi r^2$, находим

$$S_3(z) = \pi r^2 \left(\frac{h-z}{h} \right)^2.$$

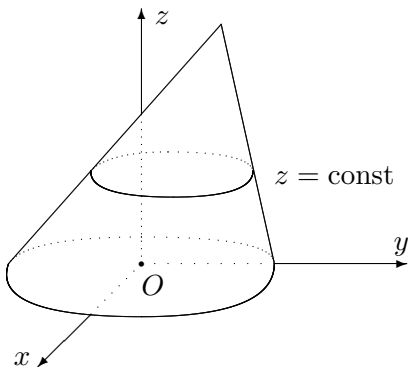


Рис. 10.5

Искомые моменты вычисляем по формуле (10.13):

$$\begin{aligned} M_1 = M_1^{(xy)} &= \int_0^h z S_3(z) dz = \pi r^2 \int_0^h z \left(\frac{h-z}{h} \right)^2 dz = \\ &= \frac{\pi r^2}{h^2} \int_0^h z(h-z)^2 dz = \frac{\pi r^2}{h^2} \int_0^h (h^2 z - 2hz^2 + z^3) dz = \\ &= \frac{\pi r^2}{h^2} \left(\frac{h^2 z^2}{2} - \frac{2hz^3}{3} + \frac{z^4}{4} \right) \Big|_0^h = \frac{\pi r^2 h^2}{12}. \\ M_2 = M_2^{(xy)} &= \int_0^h z^2 S_3(z) dz = \pi r^2 \int_0^h z^2 \left(\frac{h-z}{h} \right)^2 dz = \\ &= \frac{\pi r^2}{h^2} \int_0^h z^2(h-z)^2 dz = \frac{\pi r^2}{h^2} \int_0^h (h^2 z^2 - 2hz^3 + z^4) dz = \end{aligned}$$

$$= \frac{\pi r^2}{h^2} \left(\frac{h^2 z^3}{3} - \frac{h z^4}{2} + \frac{z^5}{5} \right) \Big|_0^h = \frac{\pi r^2 h^3}{30}.$$

2504.1. Найти момент инерции однородного шара радиуса R и массы M относительно его диаметра.

Уравнение шара радиуса R в декартовой системе координат имеет следующий вид:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

В силу симметрии шара момент инерции можно вычислять относительно любой оси, проходящей через его центр. Выберем для вычислений ось аппликат Oz . Цилиндрическая поверхность $x^2 + y^2 = r^2$ пересекает шар так, что высота получающегося цилиндра

$$H = 2\sqrt{R^2 - r^2}$$

и площадь его поверхности

$$S_3(r) = 2\pi r H = 4\pi r \sqrt{R^2 - r^2}.$$

Плотность шара равна отношению его массы к объему:

$$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3M}{4\pi R^3}.$$

Момент инерции вычисляем по формуле (15):

$$I = M_2^{(z)} = \rho \int_0^R r^2 S_3(r) dr = \frac{3M}{R^3} \int_0^R r^3 \sqrt{R^2 - r^2} dr.$$

Интеграл можно вычислить заменой $t = \sqrt{R^2 - r^2}$:

$$I = \frac{3M}{R^3} \int_0^R t^2 (R^2 - t^2) dt = \frac{3M}{R^3} \left(\frac{R^2 t^3}{3} - \frac{t^5}{5} \right) \Big|_0^R = \frac{2}{5} M R^2.$$

10.2. Координаты центра тяжести

Координаты центра тяжести $(x_0; y_0)$ однородной плоской кривой вычисляются по формуле

$$x_0 = \frac{M_1^{(y)}}{L}, \quad y_0 = \frac{M_1^{(x)}}{L}, \quad (10.18)$$

где $M_1^{(x)}$, $M_1^{(y)}$ – геометрические статические моменты этой кривой, а L – ее длина. Аналогичные формулы имеют место для плоской фигуры

$$x_0 = \frac{M_1^{(y)}}{S}, \quad y_0 = \frac{M_1^{(x)}}{S}, \quad (10.19)$$

где S – площадь фигуры, для трехмерного тела,

$$x_0 = \frac{M_1^{(xy)}}{V}, \quad y_0 = \frac{M_1^{(zx)}}{V}, \quad z_0 = \frac{M_1^{(xy)}}{V}, \quad (10.20)$$

где V – объем тела и для поверхности в трехмерном пространстве:

$$x_0 = \frac{M_1^{(xy)}}{S}, \quad y_0 = \frac{M_1^{(zx)}}{S}, \quad z_0 = \frac{M_1^{(xy)}}{S}, \quad (10.21)$$

где S – площадь поверхности.

2505. Доказать первую теорему Гульдена: площадь поверхности, образованной вращением плоской дуги C вокруг не пересекающей ее оси, лежащей в плоскости дуги, равна длине этой дуги, умноженной на длину окружности, описываемой центром тяжести дуги C .

Выберем декартову систему координат так, чтобы ось вращения совпадала с осью абсцисс, а кривая C лежала в верхней полуплоскости. Предположим, что кривая задана в параметрической форме:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$$

где $x(t)$ и $y(t)$ – функции, заданные на отрезке $[\alpha; \beta]$. Площадь поверхности вращения вычисляется по формуле (9.3) из предыдущей главы:

$$P = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} y(t) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt.$$

Геометрический статический момент относительно оси абсцисс находим по формуле (10.1) данной главы:

$$M_1^{(x)} = \int_{\alpha}^{\beta} y(t) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt.$$

Обозначая через L длину кривой и сравнивая две последние формулы, видим, что

$$P = 2\pi M_1^{(x)} = 2\pi \left(\frac{M_1^{(x)}}{L} \right) L = 2\pi y_0 L,$$

где y_0 – ордината центра тяжести кривой. Полученное равенство и представляет собой первую теорему Гульдена.

2506. Доказать вторую теорему Гульдена: объем тела, образованного вращением плоской фигуры S вокруг не пересекающей ее оси, расположенной в плоскости фигуры, равен произведению площади S на длину окружности, описываемую центром тяжести этой фигуры.

Выберем декартову систему координат так, чтобы ось вращения совпадала с осью Oy , а фигура S была расположена в первой координатной четверти. В доказательстве ограничимся случаем, когда фигура S представляет криволинейный прямоугольник:

$$a \leq x \leq b, \quad y_1(x) \leq y \leq y_2(x).$$

Как следует из решения задачи 2471, объем тела вращения криволинейного прямоугольника вокруг оси ординат выражается формулой:

$$V = 2\pi \int_a^b x (y_2(x) - y_1(x)) dx.$$

С другой стороны, длина отрезка, образованного пересечением прямой $x = \text{const}$ с нашей фигурой

$$l_1(x) = y_2(x) - y_1(x)$$

и геометрический статический момент определяется формулой (10.10):

$$M_1^{(y)} = \int_a^b x l_1(x) dx = \int_a^b x (y_2(x) - y_1(x)) dx.$$

Обозначая через $|S|$ площадь фигуры S и сравнивая выражения для объема и момента, получаем

$$V = 2\pi M_1^{(y)} = 2\pi \left(\frac{M_1^{(y)}}{|S|} \right) |S| = 2\pi x_0 |S|,$$

где x_0 – абсцисса центра тяжести фигуры. Полученное равенство представляет собой вторую теорему Гульдена.

2507. Определить координаты центра тяжести круговой дуги:

$$x = a \cos \varphi, \quad y = a \sin \varphi \quad (|\varphi| \leq \alpha \leq \pi).$$

Для вычисления геометрических статических моментов используем формулы (10.1) и (10.2):

$$M_1^{(x)} = \int_{-\alpha}^{\alpha} y(\varphi) \sqrt{x'^2(\varphi) + y'^2(\varphi)} d\varphi = a^2 \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos \varphi d\varphi =$$

$$= 2a^2 \int_0^{\alpha} \cos \varphi \, d\varphi = 2a^2 \sin \varphi \Big|_0^{\alpha} = 2a^2 \sin \alpha.$$

$$M_1^{(y)} = \int_{-\alpha}^{\alpha} x(\varphi) \sqrt{x'^2(\varphi) + y'^2(\varphi)} \, d\varphi = a^2 \int_{-\alpha}^{\alpha} \sin \varphi \, d\varphi = 0$$

в силу нечетности подынтегральной функции.

Длина дуги кривой $L = 2\alpha a$ и по формуле (10.18), координаты центра тяжести

$$\begin{cases} x_0 = \frac{a \sin \alpha}{\alpha}, \\ y_0 = 0. \end{cases}$$

2508. Определить координаты центра тяжести области, ограниченной параболой $ax = y^2$, $ay = x^2$ ($a > 0$).

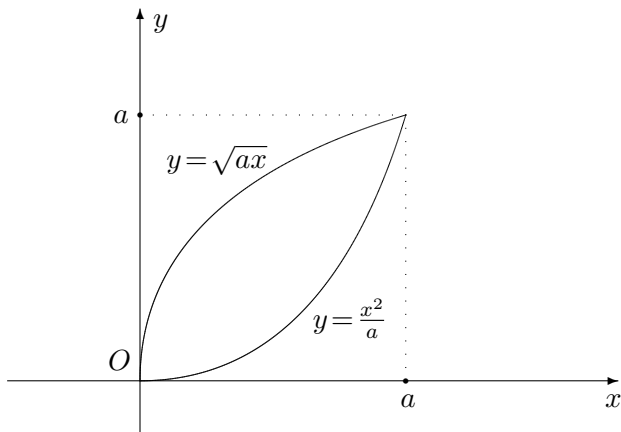


Рис. 10.6

Область представлена на рис. 10.6, она симметрична относительно биссектрисы первой четверти. Отсюда следует, что абсцисса и ордината центра тяжести совпадают. Поэтому достаточно вычислить одну абсциссу. Область ограничена снизу графиками

ком функции

$$y_1(x) = \frac{x^2}{a},$$

а сверху – графиком функции

$$y_2(x) = \sqrt{ax}.$$

Следовательно, длина $l_1(x)$ отрезка, который является сечением области линией $x = \text{const}$ равна:

$$l_1(x) = y_2(x) - y_1(x) = \sqrt{ax} - \frac{x^2}{a}.$$

Геометрический статический момент относительно оси Oy

$$\begin{aligned} M_1^{(y)} &= \int_0^a x l_1(x) dx = \int_0^a x \left(\sqrt{ax} - \frac{x^2}{a} \right) dx = \\ &= \left(\frac{2\sqrt{a}}{5} x^{5/2} - \frac{x^4}{4a} \right) \Big|_0^a = \frac{3a^3}{20}. \end{aligned}$$

Площадь рассматриваемой области

$$\begin{aligned} S &= \int_0^a (y_2(x) - y_1(x)) dx = \int_0^a \left(\sqrt{ax} - \frac{x^2}{a} \right) dx = \\ &= \left(\frac{2\sqrt{a}}{3} x^{3/2} - \frac{x^3}{3a} \right) \Big|_0^a = \frac{a^2}{3}. \end{aligned}$$

Абсцисса центра тяжести

$$x_0 = \frac{M_1^{(y)}}{S} = \frac{9a}{20}.$$

Как отмечалось выше, ордината центра тяжести

$$y_0 = x_0 = \frac{9a}{20}.$$

2509. Определить координаты центра тяжести области

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \quad (0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b).$$

Область, ограниченная эллипсом

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

и осями координат (рис. 10.7), лежит в первой координатной четверти.

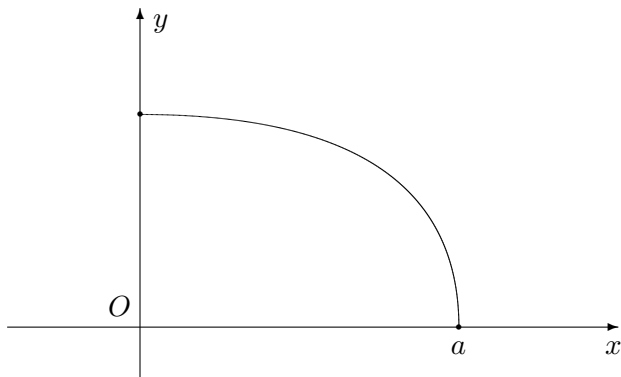


Рис. 10.7

В направлении оси ординат она ограничена сверху графиком функции, уравнение которой получается из уравнения эллипса:

$$y(x) = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}, \quad 0 \leq x \leq a.$$

Пересечение области с прямой $x = \text{const}$ представляет отрезок $[0; y(x)]$ и его длина

$$l_1(x) = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}.$$

Геометрический статический момент относительно оси Oy вычисляем по формуле (10.10), используя замену $u = a^2 - x^2$:

$$\begin{aligned} M_1^{(y)} &= \int_0^a x l_1(x) dx = \frac{b}{a} \int_0^a x \sqrt{a^2 - x^2} dx = \\ &= \frac{b}{2a} \int_0^{a^2} \sqrt{u} du = \frac{b}{3a} u^{3/2} \Big|_0^{a^2} = \frac{a^2 b}{3}. \end{aligned}$$

Так как область не меняется при перестановке величин x и y , а также одновременной перестановке a и b , то момент относительно оси Ox получается из момента относительно оси Oy перестановкой параметров a и b :

$$M_1^{(x)} = \frac{ab^2}{3}.$$

Площадь эллипса вычислена в задаче 2403, она равна πab . Следовательно, площадь нашей области, представляющей четверть эллипса,

$$S = \frac{\pi ab}{4}.$$

Координаты центра тяжести:

$$x_0 = \frac{M_1^{(y)}}{S} = \frac{4a}{3\pi}, \quad y_0 = \frac{M_1^{(x)}}{S} = \frac{4b}{3\pi}.$$

2510. Определить центр тяжести однородного полушара радиуса a .

Выберем декартову систему координат так, чтобы ее начало совпадало с центром полушара, плоскость xOy совпадала с плоскостью основания полушара, а сам полушар находился в верхнем полупространстве (рис. 10.8).

Из соображений симметрии следует, что центр тяжести находится на оси Oz , т. е. $x_0 = 0$, $y_0 = 0$. Следовательно, достаточно вычислить аппликату центра тяжести.

Сечение полушара плоскостью $z = \text{const}$ представляет круг радиуса $r = \sqrt{a^2 - z^2}$ и его площадь

$$S_3(z) = \pi r^2 = \pi(a^2 - z^2).$$

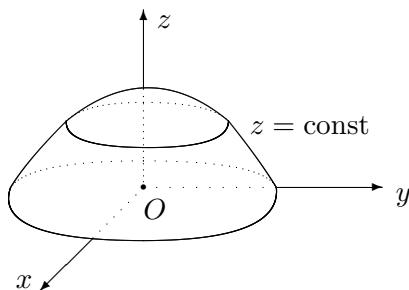


Рис. 10.8

Геометрический статический момент относительно плоскости xOy вычисляется по формуле (10.13):

$$\begin{aligned} M_k^{(xy)} &= \int_0^a z S_3(z) dz = \pi \int_0^a z(a^2 - z^2) dz = \\ &= \pi \left(\frac{a^2 z^2}{2} - \frac{z^4}{4} \right) \Big|_0^a = \frac{\pi a^4}{4}. \end{aligned}$$

Объем полушара

$$V = \frac{2}{3} \pi a^3$$

и аппликата центра тяжести

$$z_0 = \frac{M_k^{(xy)}}{V} = \frac{3}{8} a.$$

2511. Определить координаты центра тяжести $C(\varphi_0; r_0)$ дуги OP логарифмической спирали $r = ae^{m\varphi}$ ($m > 0$) от точки

$O(-\infty; 0)$ до точки $P(\varphi; r)$. Какую кривую описывает точка C при движении точки P ?

Для определения координат центра тяжести достаточно вычислить геометрические моменты, поэтому символ ρ можно использовать для обозначения не плотности, а другой величины. Мы будем использовать ψ и ρ для обозначения текущих полярных координат логарифмической спирали

$$\rho = ae^{m\psi}$$

(обозначения φ и r в задаче выбраны для обозначения фиксированной точки кривой).

Статические моменты вычисляются по формулам (10.7) и (10.8):

$$\begin{aligned} M_1^{(x)} &= \int_{-\infty}^{\varphi} \rho(\psi) \sin \psi \sqrt{\rho^2(\psi) + \rho'^2(\psi)} d\psi = \\ &= a^2 \sqrt{1 + m^2} \int_{-\infty}^{\varphi} e^{2m\psi} \sin \psi d\psi. \\ M_1^{(y)} &= \int_{-\infty}^{\varphi} \rho(\psi) \cos \psi \sqrt{\rho^2(\psi) + \rho'^2(\psi)} d\psi = \\ &= a^2 \sqrt{1 + m^2} \int_{-\infty}^{\varphi} e^{2m\psi} \cos \psi d\psi. \end{aligned}$$

Значения неопределенных интегралов можно взять из задач 1828 и 1829 книги [1]:

$$\begin{aligned} \int e^{2m\psi} \sin \psi d\psi &= \frac{2m \sin \psi - \cos \psi}{4m^2 + 1} e^{2m\psi} + C, \\ \int e^{2m\psi} \cos \psi d\psi &= \frac{2m \cos \psi + \sin \psi}{4m^2 + 1} e^{2m\psi} + C. \end{aligned}$$

Используя формулу Ньютона – Лейбница, находим:

$$\begin{aligned}
 M_1^{(x)} &= a^2 \sqrt{1+m^2} \frac{2m \sin \psi - \cos \psi}{4m^2 + 1} e^{2m\psi} \Big|_{-\infty}^{\varphi} = \\
 &= \frac{a^2 \sqrt{1+m^2}}{4m^2 + 1} e^{2m\varphi} (2m \sin \varphi - \cos \varphi), \\
 M_1^{(y)} &= a^2 \sqrt{1+m^2} \frac{2m \sin \psi - \cos \psi}{4m^2 + 1} e^{2m\psi} \Big|_{-\infty}^{\varphi} = \\
 &= \frac{a^2 \sqrt{1+m^2}}{4m^2 + 1} e^{2m\varphi} (2m \cos \varphi + \sin \varphi).
 \end{aligned}$$

Длина дуги кривой L вычисляется по формуле (7.4):

$$\begin{aligned}
 L &= \int_{-\infty}^{\varphi} \sqrt{\rho^2(\psi) + \rho'^2(\psi)} d\psi = a \sqrt{1+m^2} \int_{-\infty}^{\varphi} e^{m\psi} d\psi = \\
 &= a \sqrt{1+m^2} \frac{e^{m\psi}}{m} \Big|_{-\infty}^{\varphi} = \frac{a \sqrt{1+m^2}}{m} e^{m\varphi}.
 \end{aligned}$$

Координаты центра тяжести находим по формулам (10.18):

$$\begin{aligned}
 x_0 &= \frac{M_1^{(y)}}{L} = \frac{am}{4m^2 + 1} e^{m\varphi} (2m \cos \varphi + \sin \varphi), \\
 y_0 &= \frac{M_1^{(x)}}{L} = \frac{am}{4m^2 + 1} e^{m\varphi} (2m \sin \varphi - \cos \varphi).
 \end{aligned}$$

Зная декартовы координаты центра тяжести, нетрудно вычислить его полярные координаты. Пусть

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{1}{2m}.$$

Так как $m > 0$, то величина $\alpha \in (0; \pi/2)$ и

$$\sin \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{4m^2 + 1}},$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{2m}{\sqrt{4m^2 + 1}}.$$

Тогда по формулам косинуса и синуса разности

$$2m \cos \varphi + \sin \varphi = \sqrt{4m^2 + 1} \cos(\varphi - \alpha),$$

$$2m \sin \varphi - \cos \varphi = \sqrt{4m^2 + 1} \sin(\varphi - \alpha),$$

и выражения для координат центра тяжести можно переписать в следующем виде:

$$x_0 = \frac{am}{\sqrt{4m^2 + 1}} e^{m\varphi} \cos(\varphi - \alpha),$$

$$y_0 = \frac{am}{\sqrt{4m^2 + 1}} e^{m\varphi} \sin(\varphi - \alpha).$$

Из двух последних равенств следует, что полярные координаты центра тяжести

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= \varphi - \alpha, \\ r_0 &= \frac{am}{\sqrt{4m^2 + 1}} e^{m\varphi}. \end{aligned}$$

Учитывая, что $\alpha = \operatorname{arctg}(1/2m)$ и $ae^{m\varphi} = r$, эти равенства можно переписать в другом виде:

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= \varphi - \operatorname{arctg} \frac{1}{2m}, \\ r_0 &= \frac{mr}{\sqrt{4m^2 + 1}}. \end{aligned}$$

Заменяя в последнем выражении r обратно на $ae^{m\varphi}$ и меняя φ на $\varphi_0 + \alpha$, получаем уравнение кривой, которую описывает центр тяжести C при движении точки P :

$$r_0 = \frac{am}{\sqrt{4m^2 + 1}} e^{m(\varphi_0 + \alpha)}$$

($\alpha = \operatorname{arctg}(1/2m)$). Эта кривая также представляет логарифмическую спираль.

2512. Определить координаты центра тяжести области, ограниченной кривой $r = a(1 + \cos \varphi)$.

График кривой (кардиоиды) представлен на рис. 10.9.

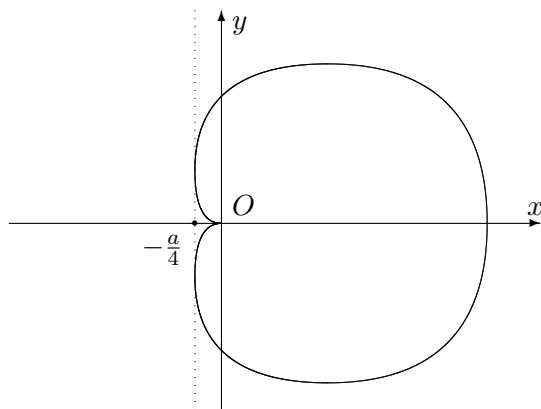


Рис. 10.9

Рассматриваемая кривая симметрична относительно оси абсцисс, поэтому центр тяжести лежит на этой оси и достаточно вычислить только абсциссу центра тяжести ($y_0 = 0$). Воспользуемся второй теоремой Гульдена для оси вращения, которая является касательной к кардиоиде в точках с наименьшей абсциссой (прямая $x = -a/4$):

$$V = 2\pi d|S|,$$

где V – объем тела вращения кардиоиды вокруг оси $x = -a/4$, $|S|$ – площадь фигуры, ограниченной кривой, и d – расстояние от центра тяжести до прямой $x = -a/4$. Отсюда находим:

$$d = \frac{V}{2\pi|S|}.$$

Объем тела вращения вокруг оси $x = -a/4$ вычислен в задаче 2483(б):

$$V = \frac{13}{4} \pi^2 a^3,$$

а площадь фигуры – в задаче 2419:

$$|S| = \frac{3\pi a^2}{2}.$$

Таким образом,

$$d = \frac{13}{12} a.$$

Абсцисса центра тяжести

$$x_0 = d - \frac{a}{4} = \frac{13}{12} a - \frac{a}{4} = \frac{6}{5} a.$$

Полярные координаты центра тяжести

$$\varphi_0 = 0, \quad r_0 = \frac{6}{5} a.$$

Замечание. Простота применения теоремы Гульдена в этой задаче на самом деле иллюзорна. Формула для расстояния d от центра тяжести до прямой вращения практически совпадает с формулой, в которую входит статический момент (объем тела вращения отличается от статического момента множителем 2π). Успех применения теоремы Гульдена обеспечен только тем, что величины V и $|S|$ были вычислены ранее.

2513. Определить координаты центра тяжести области, ограниченной первой аркой циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) и осью Ox .

График циклоиды представлен на рис. 10.10. Область симметрична относительно прямой $x = \pi a$ и поэтому абсцисса центра тяжести

$$x_0 = \pi a.$$

Для вычисления ординаты центра тяжести можно воспользоваться геометрическим представлением формулы для координаты центра тяжести – второй теоремой Гульдена. Согласно этой

теореме объем V тела вращения вокруг оси Ox связан с площадью вращаемой фигуры $|S|$ формулой $V = 2\pi y_0 |S|$, где y_0 – ордината центра тяжести. Отсюда находим

$$y_0 = \frac{V}{2\pi |S|}.$$

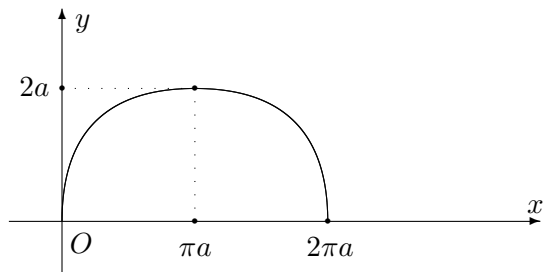


Рис. 10.10

Величины V и $|S|$ вычислены ранее. В задаче 2413 вычислена площадь фигуры

$$|S| = 3\pi a^2,$$

а в задаче 2480(а) – объем тела вращения

$$V = 5\pi^2 a^3.$$

Подставляя эти значения в формулу для y_0 , находим

$$y_0 = \frac{5\pi^2 a^3}{2\pi \cdot 3\pi a^2} = \frac{5}{6} a.$$

Таким образом,

$$\begin{cases} x_0 = \pi a, \\ y_0 = \frac{5}{6} a. \end{cases}$$

Замечание. Простота вычислений в этой задаче, так же как и в предыдущей, связана только с тем, что нужные величины были вычислены ранее (в других задачах).

2514. Определить координаты центра тяжести тела, образованного вращением площади $0 \leq x \leq a$; $y^2 \leq 2px$ вокруг оси Ox .

Так как ось абсцисс является осью симметрии тела вращения, то центр тяжести лежит на этой оси, т. е.

$$y_0 = 0, \quad z_0 = 0$$

и достаточно найти абсциссу центра тяжести.

Фигура вращения ограничена сверху графиком функции

$$y(x) = \sqrt{2px}$$

и сечение тела плоскостью $x = \text{const}$ представляет круг радиуса $r = y(x)$. Площадь этого сечения

$$S_1(x) = \pi y^2(x) = 2\pi p x.$$

Геометрический статический момент фигуры вычисляем по формуле (10.11):

$$M_1^{(yz)} = \int_0^a x S_1(x) dx = 2\pi p \int_0^a x^2 dx = 2\pi p \left(\frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^a = \frac{2\pi p a^3}{3}.$$

Объем тела вращения вычисляем по формуле (8.4):

$$V = \pi \int_0^a y^2(x) dx = 2\pi p \int_0^a x dx = \pi p x^2 \Big|_0^a = \pi p a^2.$$

Абсцисса центра тяжести

$$x_0 = \frac{M_1^{(yz)}}{V} = \frac{2}{3} a.$$

2515. Определить координаты центра тяжести полусферы

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \quad (z \geq 0).$$

Ось Oz является осью симметрии поверхности, поэтому центр тяжести лежит на этой оси, т. е.

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 0.$$

Для того, чтобы вычислить аппликату центра тяжести, рассмотрим полусферу как поверхность вращения графика

$$x(z) = \sqrt{a^2 - z^2}, \quad 0 \leq z \leq a$$

вокруг оси Oz . Геометрический статический момент относительно плоскости xOy можно вычислить по формуле (10.17) (с соответствующей перестановкой переменных):

$$M_1^{(xy)} = 2\pi \int_a^b z |x(z)| \sqrt{1 + x'^2(z)} dz = 2\pi a \int_0^a z dz = \pi a z^2 \Big|_0^a = \pi a^3.$$

Площадь полусферы

$$S = 2\pi a^2.$$

По формуле (10.21)

$$z_0 = \frac{M_1^{(xy)}}{S} = \frac{\pi a^3}{2\pi a^2} = \frac{a}{2}.$$

Глава 11

Задачи из механики и физики

Формулы, по которым решаются некоторые задачи этой главы, требуют для корректного обоснования знания кратных интегралов. Хотя здесь присутствуют задачи, имеющие “одномерный” характер и их решение можно строго обосновать в рамках определенного интеграла, общий характер всех задач говорит о том, что они предназначены для развития физической интуиции. Поэтому в пособии принято приводить только эвристический вывод формул (в том числе и в тех задачах, обоснование решений которых не требует выхода за пределы понятия определенного интеграла).

В исходном тексте задачника для обозначения плотности используются разные буквы. Однако в большинстве задач, где идет речь о плотности массы, она обозначается буквой ρ . В связи с тем, что все рассматриваемые задачи имеют физическое содержание, а в физике плотность традиционно обозначается буквой ρ , решено использовать всюду для обозначения плотности букву ρ .

Составляя соответствующие интегральные суммы и находя их пределы, решить следующие задачи:

2516. Определить массу стержня длины $l = 10$ м, если линейная плотность стержня меняется по закону $\rho = 6 + 0,3x$ кг/м, где x – расстояние от одного из концов стержня.

Расположим ось координат вдоль стержня так, чтобы начало оси O совпадало с концом стержня, от которого отсчитывается расстояние x , а положительное направление определялось вторым концом стержня так, что координата второго конца равна l . Пусть $T = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ – некоторое разбиение отрезка $[0; l]$. Ему отвечает разбиение стержня на отдельные участки, занимающие на координатной оси отрезки $[x_i; x_{i+1}]$ ($0 \leq i \leq n-1$). Если характеристика этого разбиения

$$\lambda(T) = \max_{0 \leq i \leq n-1} \Delta x_i$$

($\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$) достаточно мала, то на соответствующих участках стержня можно считать плотность практически постоянной. Выберем по одной точке $\xi_i \in [x_i; x_{i+1}]$ на каждом из участков и будем считать, что при $x \in [x_i; x_{i+1}]$ плотность $\rho(x) \approx \rho(\xi_i)$. Тогда масса соответствующего участка приближенно равна $\rho(\xi_i)\Delta x_i$ и масса всего стержня

$$M \approx \sum_{i=0}^{n-1} \rho(\xi_i)\Delta x_i.$$

Когда характеристика разбиения $\lambda(T) \rightarrow 0$, мы вправе рассчитывать на то, что в пределе получим точное значение массы стержня. Так как приближенное значение массы нашего стержня представляет интегральную сумму функции ρ на отрезке $[0; l]$, то в пределе мы получаем определенный интеграл от этой функции. Следовательно,

$$M = \int_0^l \rho(x) dx. \quad (11.1)$$

Применяя полученную формулу к данным задачи, находим

$$M = \int_0^{10} (6 + 0,3x) dx = \left(6x + 0,3 \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^{10} = 75.$$

Учитывая выбранные в задаче единицы измерения, получаем, что масса стержня равна 75 кг.

Замечание. Во введении рассматривалась аналогичная задача, но с использованием объемной плотности вместо линейной. Принципиальным моментом это не является и обоснование формулы (11.1) проводится так же. Обозначим через $m(x)$ массу участка стержня, отвечающего отрезку $[0; x]$. Масса участка стержня, отвечающего отрезку $[x; x + \Delta x]$, равна $\Delta m(x) = m(x + \Delta x) - m(x)$. Средняя линейная плотность выделенного участка стержня

$$\rho_{\text{ср}} = \frac{\Delta m(x)}{\Delta x}.$$

Предел средней плотности $\rho_{\text{ср}}$ при $\Delta x \rightarrow 0$ по определению называется плотностью стержня в точке x :

$$\rho(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{m(x + \Delta x) - m(x)}{\Delta x}.$$

Так как этот предел равен $m'(x)$, то плотность оказывается производной массы

$$\rho(x) = m'(x).$$

Это соотношение и является ключевым. Применяя формулу Ньютона – Лейбница (в предположении непрерывной дифференцируемости функции $m(x)$), получаем:

$$M = m(l) = m(l) - m(0) = \int_0^l m'(x) dx = \int_0^l \rho(x) dx.$$

Для решения следующих задач нужно вывести формулу для работы силы переменной величины. Пусть тело перемещается вдоль отрезка $[a; b]$ некоторой координатной оси. Величину действующей на тело силы в точке x обозначим $F(x)$. Предполагается, что сила направлена вдоль оси перемещения. Рассмотрим произвольное разбиение

$$T = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$$

отрезка $[a; b]$. Если характеристика этого разбиения

$$\lambda(T) = \max_{0 \leq i \leq n-1} \Delta x_i$$

($\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$) достаточно мала, то на каждом небольшом участке движения $[x_i; x_{i+1}]$ можно считать силу $F(x)$ практически постоянной. Выберем по одной точке $\xi_i \in [x_i; x_{i+1}]$ на каждом участке и будем считать, что при $x \in [x_i; x_{i+1}]$ сила $F(x) \approx F(\xi_i)$. Тогда работа, затрачиваемая на перемещение тела по участку $[x_i; x_{i+1}]$, приближенно равна $F(\xi_i)\Delta x_i$, а вся работа

$$A \approx \sum_{i=0}^{n-1} F(\xi_i)\Delta x_i.$$

Когда характеристика разбиения $\lambda(T) \rightarrow 0$, то в пределе получаем точную величину работы по перемещению тела вдоль отрезка $[a; b]$. Так как приближенное значение работы представляет интегральную сумму функции F на отрезке $[a; b]$, то в пределе мы получаем определенный интеграл от этой функции. Следовательно,

$$A = \int_a^b F(x) dx. \quad (11.2)$$

Замечание. В теоретической механике формула (11.2) фактически принимается за определение работы переменной силы и поэтому обоснование этой формулы не требуется. В частном случае, когда величина силы F постоянна, из (11.2) следует, что производимая работа равна произведению силы на величину перемещения – это то, что принимают за определение работы в школьных учебниках.

2517. Какую работу надо затратить, чтобы тело массы m поднять с поверхности Земли, радиус которой R , на высоту h ? Чему равна эта работа, если тело удаляется в бесконечность?

Выберем координатную ось так, чтобы ее начало совпадало с центром Земли, а ее направление совпадало с направлением

перемещения тела. На перемещаемое тело действует сила притяжения, значение которой меняется в зависимости от точки, в которой находится тело. Согласно закону тяготения величина силы притяжения

$$F(x) = \frac{C}{x^2}.$$

На поверхности Земли ($x = R$) сила тяготения равна mg :

$$\frac{C}{R^2} = mg.$$

Отсюда находим значение $C = mgR^2$. Следовательно,

$$F(x) = \frac{mgR^2}{x^2}.$$

Работу по поднятию тела на высоту h находим по формуле (11.2):

$$\begin{aligned} A_h &= \int_R^{R+h} F(x) dx = mgR^2 \int_R^{R+h} \frac{dx}{x^2} = - \left(\frac{mgR^2}{x} \right) \Big|_R^{R+h} = \\ &= mgR^2 \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h} \right) = \frac{mgRh}{R+h}. \end{aligned}$$

Работа по удалению тела на бесконечность

$$A_\infty = \lim_{h \rightarrow \infty} A_h = \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{mgRh}{R+h} = mgR.$$

2518. Какую работу надо затратить, чтобы растянуть упругую пружину на 10 см, если сила в 1 кг растягивает эту пружину на 1 см?

Согласно закону Гука, величина растяжения пружины x и упругая сила $F(x)$ связаны соотношением

$$F(x) = kx.$$

Значение коэффициента k находим из условия задачи: при $x = 1$ величина $F = 1$. Таким образом, $k = 1$ и

$$F(x) = x.$$

Искомую работу находим по формуле (11.2):

$$A = \int_0^{10} F(x) dx = \int_0^{10} x dx = \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^{10} = 50.$$

Учитывая используемые в задаче единицы измерения, получаем, что величина работы равна 0,5 кгм.

2519. Цилиндр диаметра 20 см и длины 80 см заполнен паром под давлением 10 кг/см². Какую работу надо затратить, чтобы уменьшить объем пара в два раза, считая, что температура пара остается постоянной?

Предположим, что цилиндр расположен вертикально и направим ось координат Ox вверх вдоль оси цилиндра так, чтобы начало координат совпадало с центром нижнего основания (рис. 11.1).

Будем считать, что уменьшение объема достигается за счет перемещения вниз верхнего основания цилиндра. Для уменьшения объема вдвое необходимо высоту цилиндра также уменьшить вдвое. Площадь основания цилиндра обозначим S (эта величина не меняется). Если d – диаметр цилиндра ($d = 20$), то

$$S = \frac{\pi d^2}{4} = 100\pi.$$

Если l – первоначальная длина цилиндра ($l = 80$), то его первоначальный объем

$$V_0 = Sl = 8000\pi.$$

Изотермический процесс подчиняется закону Бойля – Мариотта:

$$pV = C,$$

где p – давление пара в цилиндре, V – объем цилиндра. Подставляя сюда первоначальное давление ($p = 10$) и первоначальный объем $V = V_0 = 8000\pi$, находим постоянную

$$C = 80000\pi.$$

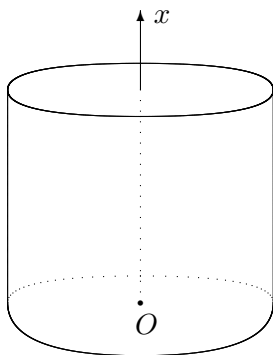


Рис. 11.1

Пусть x – текущая длина цилиндра в процессе сжатия. Текущий объем цилиндра

$$V = Sx = 100\pi x.$$

Из закона Бойля – Мариотта находим текущее давление пара внутри цилиндра:

$$p = \frac{C}{V} = \frac{80000\pi}{100\pi x} = \frac{800}{x}.$$

Текущая сила давления пара на верхнее основание цилиндра

$$F(x) = Sp = 100\pi \cdot \frac{800}{x} = \frac{80000\pi}{x}.$$

В процессе сжатия величина x меняется от $x = l = 80$, до $x = l/2 = 40$. По формуле (11.2) искомая работа

$$A = \int_{40}^{80} F(x) dx = 80000\pi \int_{40}^{80} \frac{dx}{x} =$$

$$= 80000\pi \ln x \Big|_{40}^{80} = 80000\pi (\ln 80 - \ln 40) = 80000\pi \ln 2.$$

С учетом выбранных в задаче единиц измерения вычисленная работа $A = 800\pi \ln 2$ кгм.

Следующие две задачи посвящены одному вопросу: в жидкость погружена вертикально плоская пластина заданной формы. Определить силу давления жидкости на эту пластину. Закон изменения давления жидкости в зависимости от глубины считается известным. Получим формулу, дающую решение поставленной задачи. Выберем систему координат xOy в плоскости пластины так, чтобы начало координат находилось на поверхности жидкости, ось Ox направлена вниз, а ось Oy – вдоль уровня поверхности жидкости (рис. 11.2).

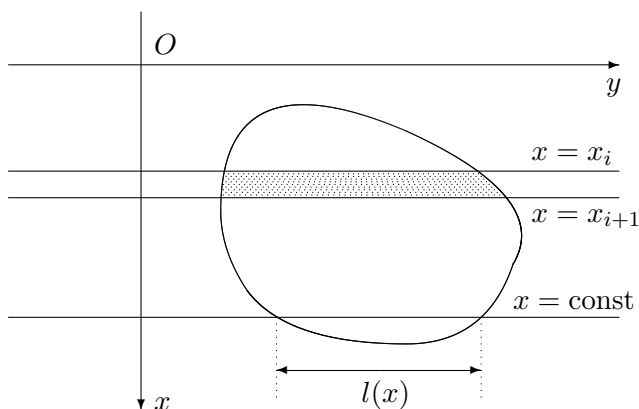


Рис. 11.2

При таком выборе системы координат абсцисса x любой точки пластины совпадает с глубиной этой точки. Давление жидкости на глубине x обозначим через $p(x)$. Функция $p(x)$, согласно условию задачи, предполагается известной. Пусть пластина проектируется на ось Ox в отрезок $[a; b]$. Обозначим через $l(x)$ длину

отрезка, представляющего пересечение пластины с прямой $x = \text{const}$. Рассмотрим произвольное разбиение $T = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ отрезка $[a; b]$. Если характеристика этого разбиения

$$\lambda(T) = \max_{0 \leq i \leq n-1} \Delta x_i$$

($\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$) достаточно мала, то на каждом небольшом участке глубины $x \in [x_i; x_{i+1}]$ можно считать давление жидкости $p(x)$ практически постоянным. Выберем по одной точке $\xi_i \in [x_i; x_{i+1}]$ на каждом участке и будем считать, что при $x \in [x_i; x_{i+1}]$ давление $p(x) \approx p(\xi_i)$. Площадь части пластины, лежащей в пределах глубины от $x = x_i$ до $x = x_{i+1}$, можно считать приближенно равной площади прямоугольника со сторонами $l(\xi_i)$ и Δx_i . Эта площадь равна $l(\xi_i)\Delta x_i$. Таким образом, сила давления на эту часть пластины приближенно равна $p(\xi_i)l(\xi_i)\Delta x_i$ и полная сила давления

$$F \approx \sum_{i=0}^{n-1} p(\xi_i)l(\xi_i)\Delta x_i.$$

Когда характеристика разбиения $\lambda(T) \rightarrow 0$, то в пределе получаем точную величину силы давления. Так как приближенное значение силы давления совпадает с интегральной суммой функции $p(x)l(x)$ на отрезке $[a; b]$, то в пределе мы получаем определенный интервал от этой функции. Следовательно,

$$F = \int_a^b p(x)l(x)dx. \quad (11.3)$$

Задача 1. Дать обоснование формулы (11.3).

2520. Определить силу давления воды на вертикальную стенку, имеющую форму полукруга радиуса a , диаметр которого находится на поверхности воды.

Выберем систему координат так же, как при выводе формулы (11.3), дополнительно потребовав, чтобы начало O совпадало с

центром полукруга. Пусть A – точка пересечения прямой $x = \text{const}$ с осью абсцисс, B – одна из точек пересечения этой же прямой с границей полукруга (рис. 11.3).

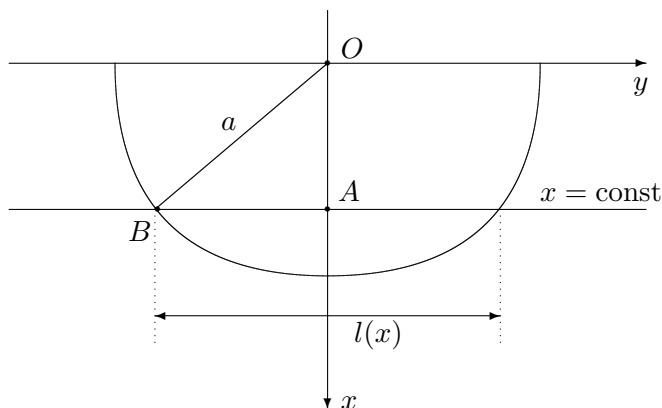


Рис. 11.3

Из прямоугольного треугольника AOB находим $AB = \sqrt{a^2 - x^2}$, величина $l(x)$ в два раза больше, т. е.

$$l(x) = 2\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Давление воды на глубине x определяется по известной формуле школьного учебника физики:

$$p(x) = \rho g x,$$

где ρ – плотность воды, g – ускорение силы тяжести. Применяя формулу (11.3) и делая замену $t = a^2 - x^2$, находим

$$F = 2\rho g \int_0^a x \sqrt{a^2 - x^2} dx = \rho g \int_0^{a^2} \sqrt{t} dt = \frac{2}{3} \rho g u^{3/2} \Big|_0^{a^2} = \frac{2}{3} \rho g a^3.$$

2521. Определить силу давления воды на вертикальную стенку, имеющую форму трапеции, нижнее основание которой $a = 10$ м, верхнее $b = 6$ м и высота $h = 5$ м, если уровень погружения нижнего основания $c = 20$ м.

Выберем систему координат так же, как при выводе формулы (11.3). Тогда трапеция разместится на глубине от $x = c - h = 15$ до $x = c = 20$. Точки пересечения прямой $x = \text{const}$ с трапецией обозначим M и N (рис. 11.4).

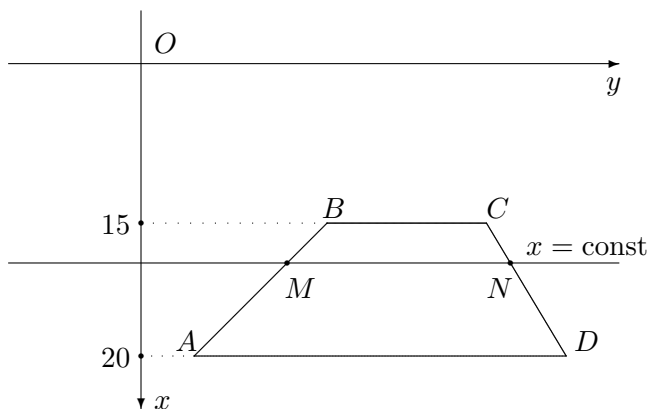


Рис. 11.4

Величина $l(x)$, входящая в формулу (11.3), равна длине отрезка MN . Эту длину можно рассчитать по формуле (8.3). Пусть $AD = a$, $BC = b$, а через z обозначим расстояние от прямой $x = \text{const}$ до нижнего основания AD , тогда

$$MN = a - (a - b) \frac{z}{h}.$$

Подставляя сюда $a = 10$, $b = 6$, $z = c - x = 20 - x$ и $h = 5$, получаем

$$l(x) = MN = \frac{4x - 30}{5}.$$

Давление воды на глубине x определяется известной формулой:

$$p(x) = \rho g x,$$

где ρ – плотность воды, g – ускорение силы тяжести. Применяя формулу (11.3) данной главы, находим искомую силу давления:

$$\begin{aligned} F &= \rho g \int_{c-h}^h x l(x) dx = \frac{\rho g}{5} \int_{15}^{20} x(4x - 30) dx = \\ &= \frac{\rho g}{5} \left(\frac{4}{3} x^3 - 15x^2 \right) \Big|_{15}^{20} = \frac{2125}{3} \rho g = \left(708 \frac{1}{3} \right) \rho g. \end{aligned}$$

2522. Скорость точки меняется по закону: $v = v_0 + at$.

Какой путь пройдет эта точка за промежуток времени $[0; T]$?

Задача сформулирована не вполне четко: имеется ввиду, что точка движется по прямой. Если $x(t)$ – координата движущейся точки в момент времени t , то (по определению) мгновенная скорость точки $v(t) = x'(t)$. Отсюда следует, что за промежуток времени движения $t \in [\alpha; \beta]$ приращение координаты

$$\Delta x = \int_{\alpha}^{\beta} v(t) dt, \quad (11.4)$$

а пройденный путь

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} |v(t)| dt. \quad (11.5)$$

Применяя формулу (11.5) и учитывая положительность параметров v_0 и a , находим

$$s = \int_0^T (v_0 + at) dt = \left(v_0 t + \frac{at^2}{2} \right) \Big|_0^T = v_0 T + \frac{aT^2}{2}.$$

2523. Однородный шар радиуса R и плотности ρ вращается вокруг своего диаметра с угловой скоростью ω . Определить кинетическую энергию шара.

Расположим ось вращения l вертикально, через r будем обозначать расстояние от точек шара до оси вращения. Величина $r \in [0; R]$. Рассмотрим произвольное разбиение $T = \{r_0, r_1, \dots, r_n\}$ отрезка $[0; R]$ и выделим в шаре цилиндрическую поверхность $r = r_i$. На рис. 11.5 центр шара отмечен буквой O , центр верхнего основания цилиндрической поверхности – буквой A (он не принадлежит поверхности цилиндра), B – точка, лежащая одновременно на цилиндрической поверхности и на ее верхнем основании. Величина $AB = r_i$, $OB = R$, длина отрезка OA равна половине высоты цилиндрической поверхности h_i .

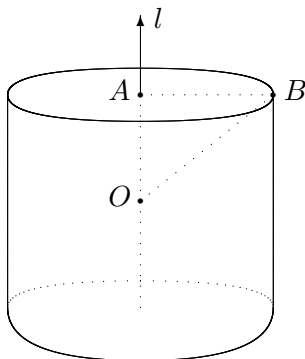


Рис. 11.5

Из треугольника OAB находим длину $OA = \sqrt{R^2 - r_i^2}$. Таким образом, высота цилиндрической поверхности

$$h_i = 2\sqrt{R^2 - r_i^2}$$

и ее площадь

$$S_i = 2\pi r_i \cdot h_i = 4\pi r_i \sqrt{R^2 - r_i^2}.$$

Часть объема шара между двумя цилиндрическими поверхностями $r = r_i$ и $r = r_{i+1}$ в первом приближении также можно считать полым цилиндром (рис. 11.6).

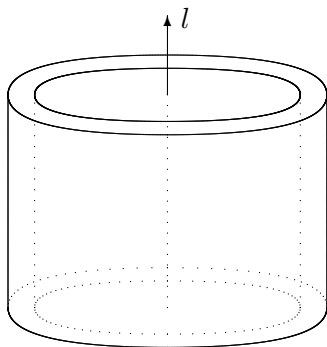


Рис. 11.6

Высота этого полого “цилиндра” приближенно равна h_i , а толщина равна $\Delta r_i = r_{i+1} - r_i$. Объем такого “цилиндра” приближенно определяется формулой

$$V_i \approx S_i \Delta r_i = 4\pi r_i \sqrt{R^2 - r_i^2} \Delta r_i.$$

Масса этого “цилиндра”

$$M_i \approx \rho V_i = 4\pi \rho r_i \sqrt{R^2 - r_i^2} \Delta r_i.$$

Если характеристика разбиения

$$\lambda(T) = \max_{0 \leq i \leq n-1} \Delta r_i$$

достаточно мала, то мала и толщина каждого такого полого “цилиндра”, поэтому можно считать, что линейная скорость всех точек этого “цилиндра” одинакова и равна

$$u_i = \omega r_i.$$

Таким образом, кинетическая энергия части объема шара, заключенная в полом “цилиндре”,

$$E_i \approx \frac{1}{2} M_i u_i^2 \approx 2\pi\rho\omega^2 r_i^3 \sqrt{R^2 - r_i^2} \Delta r_i.$$

Суммируя кинетическую энергию всех таких “цилиндров”, получаем полную кинетическую энергию вращающегося шара

$$E \approx 2\pi\rho\omega^2 \sum_{i=0}^{n-1} r_i^3 \sqrt{R^2 - r_i^2} \Delta r_i.$$

Когда характеристика разбиения $\lambda(T) \rightarrow 0$, то в пределе получаем точное значение кинетической энергии. Так как приближенное значение кинетической энергии совпадает с интегральной суммой функции

$$2\pi\rho\omega^2 r^3 \sqrt{R^2 - r^2}$$

на отрезке $[0; R]$, то в пределе мы получаем определенный интеграл от этой функции. Следовательно,

$$E = 2\pi\rho\omega^2 \int_0^R r^3 \sqrt{R^2 - r^2} dr. \quad (11.6)$$

Полученный интеграл можно вычислить с помощью интегрирования по частям. Для неопределенного интеграла получаем:

$$\begin{aligned} \int r^3 \sqrt{R^2 - r^2} dr &= -\frac{1}{3} \int r^2 d(R^2 - r^2)^{3/2} = \\ &= -\frac{1}{3} r^2 (R^2 - r^2)^{3/2} + \frac{2}{3} \int (R^2 - r^2)^{3/2} r dr = \\ &= -\frac{1}{3} r^2 (R^2 - r^2)^{3/2} - \frac{2}{15} \int d(R^2 - r^2)^{5/2} = \\ &= -\frac{1}{3} r^2 (R^2 - r^2)^{3/2} - \frac{2}{15} (R^2 - r^2)^{5/2} + C. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$E = 2\pi\rho\omega^2 \left[-\frac{1}{3}r^2(R^2 - r^2)^{3/2} - \frac{2}{15}(R^2 - r^2)^{5/2} \right]_0^R = \frac{4}{15}\pi\rho\omega^2 R^5.$$

Следующая задача предназначена для читателей, знакомых с тройным интегралом и его свойствами.

Задача 2. Привести обоснование формулы (11.6).

2524. С какой силой притягивает материальная бесконечная прямая с постоянной линейной плотностью ρ_0 материальную точку массы m , находящуюся на расстоянии a от этой прямой?

Расположим ось абсцисс вдоль материальной прямой, а ось ординат выберем так, чтобы она проходила через материальную точку и эта точка имела положительную координату. Вычислим силу, действующую на материальную точку со стороны отрезка $[A; B]$ прямой. Рассмотрим произвольное разбиение $T = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ отрезка $[A; B]$ и выберем по одной точке ξ_i на каждом из отрезков $[x_i; x_{i+1}]$ ($0 \leq i \leq n-1$). Если характеристика разбиения

$$\lambda(T) = \max_{0 \leq i \leq n-1} \Delta x_i$$

($\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$) достаточно мала, то можно считать, что все точки отрезка $[x_i; x_{i+1}]$ удалены от материальной точки, имеющей координаты $(0; a)$, практически на одно расстояние, равное расстоянию между материальной точкой и точкой ξ_i :

$$r_i = \sqrt{a^2 + \xi_i^2}.$$

Вычислим силу притяжения $\vec{F}_i$ с которой действует на материальную точку отрезок $[x_i; x_{i+1}]$ (рис. 11.7).

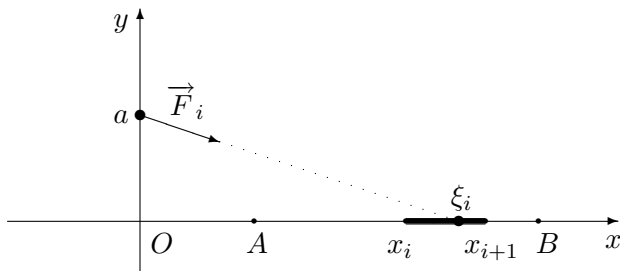


Рис. 11.7

Масса рассматриваемого отрезка равна $\rho_0 \Delta x_i$ и согласно закону тяготения Ньютона, сила притяжения

$$\vec{F}_i = \frac{km\rho_0 \Delta x_i}{r_i^2} \vec{e}_i,$$

где k – постоянная тяготения, а $\vec{e}_i$ – единичный вектор, сонаправленный с вектором

$$\vec{r}_i = \{\xi_i; -a\},$$

соединяющим материальную точку с точкой ξ_i на оси абсцисс. Так как

$$\vec{e}_i = \frac{\vec{r}_i}{r_i} = \left\{ \frac{\xi_i}{\sqrt{a^2 + \xi_i^2}}; -\frac{a}{\sqrt{a^2 + \xi_i^2}} \right\},$$

то компоненты вектора $\vec{F}_i$ равны:

$$F_x^{(i)} = \frac{km\rho_0 \xi_i \Delta x_i}{(a^2 + \xi_i^2)^{3/2}},$$

$$F_y^{(i)} = -\frac{km\rho_0 a \Delta x_i}{(a^2 + \xi_i^2)^{3/2}}.$$

Суммируя по всем возможным значениям i , получаем компоненты равнодействующей силы $\vec{F}$, действующей на материальную

точку со стороны всего отрезка $[A; B]$:

$$F_x \approx km\rho_0 \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\xi_i}{(a^2 + \xi_i^2)^{3/2}} \Delta x_i,$$

$$F_y \approx -km\rho_0 a \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{(a^2 + \xi_i^2)^{3/2}} \Delta x_i.$$

Когда характеристика разбиения $\lambda(T) \rightarrow 0$, то в пределе получаем точные значения компонент равнодействующей. Так как их приближенные значения совпадают с интегральными суммами функций

$$km\rho_0 \frac{x}{(a^2 + x^2)^{3/2}}, \quad -km\rho_0 a \frac{1}{(a^2 + x^2)^{3/2}},$$

то в пределе мы получаем определенные интегралы от этих функций:

$$F_x = km\rho_0 \int_A^B \frac{x dx}{(a^2 + x^2)^{3/2}},$$

$$F_y = -km\rho_0 a \int_A^B \frac{dx}{(a^2 + x^2)^{3/2}}.$$

Полученные интегралы легко вычисляются:

$$\int \frac{x dx}{(a^2 + x^2)^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} + C,$$

$$\int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2 \sqrt{a^2 + x^2}} + C.$$

Применяя формулу Ньютона – Лейбница, находим:

$$F_x = km\rho_0 \left(\frac{1}{\sqrt{a^2 + A^2}} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + B^2}} \right), \quad (11.7)$$

$$F_y = \frac{km\rho_0}{a} \left(\frac{A}{\sqrt{a^2 + A^2}} - \frac{B}{\sqrt{a^2 + B^2}} \right). \quad (11.8)$$

Переходя в формулах (11.7) и (11.8) к пределу при $A \rightarrow -\infty$, $B \rightarrow +\infty$, получаем формулы для компонент силы, действующей на материальную точку со стороны всей прямой:

$$\begin{cases} F_x = 0, \\ F_y = -\frac{2km\rho_0}{a}. \end{cases}$$

2525. Определить, с какой силой притягивает круглая пластинка радиуса a и постоянной поверхностной плотности ρ_0 материальную точку P массы m , находящуюся на перпендикуляре к плоскости пластинки, проходящем через ее центр Q , на кратчайшем расстоянии PQ , равном b .

Из соображений симметрии следует, что сила притяжения направлена вдоль оси PQ . Поэтому достаточно вычислить компоненту силы притяжения на эту ось. Выберем декартову систему координат с началом в центре пластинки так, чтобы плоскость xOy совпадала с плоскостью пластинки, а ось Oz была направлена вдоль отрезка QP . Через r и φ обозначим полярные координаты на плоскости xOy . Пусть $T_r = \{r_0, r_1, \dots, r_n\}$ – произвольное разбиение отрезка $[0; a]$. Ему отвечает разбиение круглой пластинки на кольцевые области $K_1, K_2, \dots, K_n$, где K_i – множество точек пластинки, для которых $r \in [r_i; r_{i+1}]$. Вычислим компоненту силы притяжения точки P на ось PQ со стороны отдельной кольцевой области K_i . Для этого рассмотрим произвольное разбиение $T_\varphi = \{\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_m\}$ отрезка $[0; 2\pi]$, которому отвечает разбиение кольцевой области на отдельные секторы $\varphi_j \leq \varphi \leq \varphi_{j+1}$. Обозначим через K_{ij} полученные участки пластинки. Участок K_{ij} состоит из всех точек пластинки, для которых $r \in [r_i; r_{i+1}]$, $\varphi \in [\varphi_j; \varphi_{j+1}]$ (рис. 11.8). Пусть $\vec{F}_{ij}$ – сила, действующая на точку P со стороны участка пластинки K_{ij} .

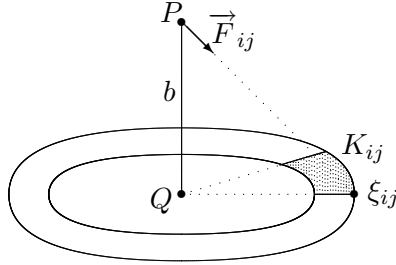


Рис. 11.8

Если характеристики разбиений

$$\lambda(T_r) = \max_{0 \leq i \leq n-1} \Delta r_i$$

$(\Delta r_i = r_{i+1} - r_i)$ и

$$\lambda(T_\varphi) = \max_{0 \leq j \leq m-1} \Delta \varphi_j$$

$(\Delta \varphi_j = \varphi_{j+1} - \varphi_j)$ достаточно малы, то можно считать, что все точки участка K_{ij} удалены от точки P практически на одинаковое расстояние, равное расстоянию между точкой P и точкой $\xi_{ij} \in K_{ij}$, для которой $r = r_i$, а $\varphi = \varphi_j$. Это расстояние d_{ij} находим по теореме Пифагора из треугольника с вершинами в точках P , Q и ξ_{ij} :

$$d_{ij} = \sqrt{r_i^2 + b^2}.$$

Участок пластинки K_{ij} в первом приближении можно считать прямоугольником со сторонами Δr_i и $r_i \Delta \varphi_j$, поэтому его площадь

$$S_{ij} \approx r_i \Delta r_i \Delta \varphi_j,$$

а масса

$$M_{ij} \approx \rho_0 r_i \Delta r_i \Delta \varphi_j.$$

Согласно закону тяготения Ньютона, сила притяжения точки P участком пластинки K_{ij} определяется формулой

$$\vec{F}_{ij} \approx \frac{kmM_{ij}}{d_{ij}^2} \vec{e}_{ij},$$

где $\vec{e}_{ij}$ – единичный вектор, направленный вдоль отрезка с началом P и концом ξ_{ij} , а k – постоянная тяготения. Как нетрудно видеть,

$$\overrightarrow{P\xi_{ij}} = \{r_i \cos \varphi_j; r_i \sin \varphi_j; -b\},$$

причем длина этого вектора равна d_{ij} , поэтому проекция F_{ij}^z силы притяжения $\vec{F}_{ij}$ на ось Oz определяется равенством

$$F_{ij}^z \approx -\frac{kmbM_{ij}}{d_{ij}^3} \approx -\frac{kmb\rho_0 r_i}{(r_i^2 + b^2)^{3/2}} \Delta r_i \Delta \varphi_j.$$

Суммируя величины F_{ij}^z по j , получаем силу притяжения F_i точки P кольцевой областью K_i :

$$F_i = \sum_{j=0}^{m-1} F_{ij}^z \approx -\frac{kmb\rho_0 r_i}{(r_i^2 + b^2)^{3/2}} \Delta r_i \sum_{j=0}^{m-1} \Delta \varphi_j$$

(сила притяжения направлена вдоль оси Oz). Так как

$$\sum_{j=0}^{m-1} \Delta \varphi_j = 2\pi,$$

то

$$F_i \approx -\frac{2\pi kmb\rho_0 r_i}{(r_i^2 + b^2)^{3/2}} \Delta r_i.$$

Взяв сумму сил притяжения от всех кольцевых областей, получим силу притяжения от всей кольцевой пластинки:

$$F = \sum_{i=0}^{n-1} F_i \approx -2\pi kmb\rho_0 \sum_{i=0}^{n-1} \frac{r_i}{(r_i^2 + b^2)^{3/2}} \Delta r_i.$$

В пределе при $\lambda(T_r) \rightarrow 0$ получаем точное значение силы притяжения

$$F = -2\pi kmb\rho_0 \int_0^a \frac{r dr}{(r^2 + b^2)^{3/2}}.$$

Вычисляя интеграл, находим:

$$\int_0^a \frac{r dr}{(r^2 + b^2)^{3/2}} = - \frac{1}{\sqrt{r^2 + b^2}} \Big|_0^a = \frac{1}{b} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Таким образом, сила притяжения

$$F = 2\pi kmb\rho_0 \left(1 - \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right).$$

2526. Согласно закону Торичелли скорость истечения жидкости из сосуда равна $v = c\sqrt{2gh}$, где g – ускорение силы тяжести, h – высота уровня жидкости над отверстием и $c = 0,6$ – опытный коэффициент.

В какое время опорожнится наполненная доверху вертикальная цилиндрическая бочка диаметра $D = 1$ м и высотой $H = 2$ м через круглое отверстие в дне диаметра $d = 1$ см?

Пусть h – текущая высота уровня жидкости в сосуде, t – текущее время, отсчитываемое с момента, когда величина $h = H$. Функция $h = h(t)$ является строго убывающей, следовательно, эта функция имеет обратную $t = t(h)$. Вычислим производную функции $t(h)$. Для этого рассмотрим промежуток времени $[t; t + \Delta t]$. Обозначим через v_{cp} среднюю скорость истечения жидкости за рассматриваемый промежуток времени. За время Δt частица жидкости при истечении из сосуда переместится на расстояние, равное $v_{\text{cp}} \Delta t$. Поэтому, вся вытекшая из сосуда за время Δt жидкость образует цилиндр диаметра d и высоты $v_{\text{cp}} \Delta t$. Площадь основания этого цилиндра равна $\pi d^2/4$ и его объем, равный объему вытекшей жидкости,

$$\Delta V = \frac{1}{4} \pi d^2 v_{\text{cp}} \Delta t.$$

За время Δt уровень жидкости в сосуде изменится на величину

$$\Delta h = h(t + \Delta t) - h(t)$$

(эта величина отрицательна) и изменение объема жидкости в сосуде равно объему цилиндра диаметра D и высоты $-\Delta h$, т. е.

$$\Delta V = -\frac{1}{4} \pi D^2 \Delta h.$$

Приравнивая два выражения для ΔV , получаем:

$$\frac{1}{4} \pi d^2 v_{\text{ср}} \Delta t = -\frac{1}{4} \pi D^2 \Delta h,$$

откуда находим:

$$\frac{\Delta t}{\Delta h} = -\frac{D^2}{v_{\text{ср}} d^2}.$$

Переходя к пределу при $\Delta h \rightarrow 0$ и учитывая, что в пределе средняя скорость $v_{\text{ср}}$ переходит в мгновенную v , получаем

$$t'(h) = -\frac{D^2}{v d^2}.$$

Подставляя значение мгновенной скорости из закона Торичелли, имеем

$$t'(h) = -\frac{D^2}{d^2 c \sqrt{2gh}}.$$

Полное время истечения $T = t(0)$ находим применяя формулу Ньютона – Лейбница:

$$\begin{aligned} T = t(0) &= t(0) - t(H) = \int_H^0 t'(h) dh = \\ &= \frac{D^2}{d^2 c \sqrt{2g}} \int_0^H \frac{dh}{\sqrt{h}} = \frac{\sqrt{2} D^2}{d^2 c \sqrt{g}} \sqrt{h} \Big|_0^H = \frac{\sqrt{2} D^2 \sqrt{H}}{d^2 c \sqrt{g}}. \end{aligned}$$

Подставляя числовые данные, вычисляем искомое время

$$T \approx 3 \text{ часа.}$$

2527. Какую форму должен иметь сосуд, представляющий собой тело вращения, чтобы понижение уровня жидкости при истечении было равномерным?

Проведем вертикальное сечение через ось симметрии сосуда. В этом сечении выберем декартову систему координат xOy так, чтобы ее начало совпадало с нижней точкой сосуда, а ось ординат – с осью симметрии сосуда. Сечение пересекает границу сосуда по графику некоторой функции $y = y(x)$ так, что сосуд образован вращением графика этой функции вокруг оси ординат (рис. 11.9).

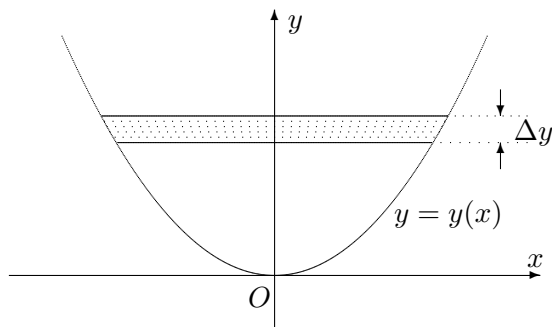


Рис. 11.9

Пусть S – площадь отверстия в дне сосуда, через которое вытекает жидкость. Рассмотрим промежуток времени $[t; t + \Delta t]$. Обозначим через $v_{\text{ср}}$ среднюю скорость истечения жидкости за рассматриваемый промежуток времени. За промежуток времени Δt частица жидкости, находящаяся на дне в области отверстия (при истечении из сосуда) переместится на расстояние, равное $v_{\text{ср}}\Delta t$. Поэтому, вся вытекшая из сосуда за время Δt жидкость образует цилиндр высоты $v_{\text{ср}}\Delta t$. Площадь основания этого ци-

линдра равна S и его объем, равный объему вытекшей жидкости,

$$\Delta V = Sv_{\text{ср}} \Delta t.$$

С другой стороны, при понижении уровня жидкости в сосуде на величину Δy (эта величина отрицательна) количество воды в сосуде уменьшится на объем высоты Δy . В первом приближении (при достаточно малом промежутке времени Δt) этот слой можно считать круговым цилиндром с радиусом основания x и высотой $|\Delta y|$. Объем этого цилиндра равен

$$\pi x^2 |\Delta y| = -\pi x^2 \Delta y.$$

Следовательно,

$$-\pi x^2 \Delta y = Sv_{\text{ср}} \Delta t.$$

Отсюда находим

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = -\frac{Sv_{\text{ср}}}{\pi x^2}.$$

Переходя к пределу при $\Delta h \rightarrow 0$ и учитывая, что в пределе средняя скорость $v_{\text{ср}}$ переходит в мгновенную v , получаем:

$$y'(t) = -\frac{Sv}{\pi x^2}.$$

Согласно закону Торичелли мгновенная скорость истечения жидкости из сосуда равна $v = c\sqrt{2gh}$, где g – ускорение силы тяжести, h – высота уровня жидкости над отверстием и $c = 0,6$ – опытный коэффициент. Так как $h = y$, то

$$y' = -\frac{S\sqrt{2gy}}{\pi x^2}.$$

При равномерном понижении уровня жидкости величина $y' = \text{const}$ и из последней полученной формулы находим, что отношение

$$\frac{\sqrt{y}}{x^2} = \text{const},$$

что равносильно равенству $y = Cx^4$ с некоторой постоянной C .

Таким образом, сосуд должен быть ограничен поверхностью вращения кривой $y = Cx^4$ вокруг оси Oy .

2528. Скорость распада радия в каждый момент времени пропорциональна его наличному количеству. Найти закон распада радия, если в начальный момент $t = 0$ имелось Q_0 граммов радия, а через время $T = 1600$ лет его количество уменьшится в два раза.

Пусть $M(t)$ – масса радия в момент времени t . По условию задачи

$$M'(t) = -kM(t),$$

где k – некоторый положительный коэффициент. Для того, чтобы решить это дифференциальное уравнение, перенесем все его члены в одну часть и умножим уравнение на e^{kt} . Получим:

$$M'(t)e^{kt} + ke^{kt}M(t) = 0,$$

$$[M(t)e^{kt}]' = 0,$$

$$M(t)e^{kt} = \text{const.}$$

Полагая в этом равенстве $t = 0$, находим значение постоянной

$$\text{const} = Q_0.$$

Следовательно,

$$M(t) = Q_0 e^{-kt}.$$

Постоянная k определяется по заданному периоду полураспада T

$$\frac{1}{2} Q_0 = Q_0 e^{-kT},$$

что дает

$$k = \frac{\ln 2}{T}.$$

Подставляя значение k в формулу для массы радия, получаем:

$$M(t) = Q_0 e^{-\frac{\ln 2}{T} t} = Q_0 \left(e^{\ln 2} \right)^{-\frac{t}{T}} = Q_0 2^{-\frac{t}{T}}.$$

Таким образом, если время t измерять в годах, то

$$M(t) = Q_0 2^{-\frac{t}{1600}}.$$

2529. Для случая процесса второго порядка скорость химической реакции, переводящей вещество A в вещество B , пропорциональна произведению концентрации этих веществ. Какой процент вещества B будет содержаться в сосуде через $t = 1$ ч, если при $t = 0$ мин имелось 20 % вещества B , а при $t = 15$ мин его стало 80 %?

Пусть $u(t)$ – концентрация вещества B (в долях) в момент времени t , тогда концентрация вещества A равна $1 - u(t)$ и по условию задачи

$$u' = ku(1 - u),$$

где k – некоторый постоянный коэффициент. Это уравнение можно решить следующим образом:

$$\frac{u'}{u(1 - u)} = k, \quad \frac{u'}{u} + \frac{u'}{1 - u} = k, \quad [\ln u - \ln(1 - u)]' = k,$$

$$\ln \frac{u}{1 - u} = kt + \text{const}, \quad \frac{u}{1 - u} = e^{kt + \text{const}}, \quad \frac{1 - u}{u} = e^{-kt - \text{const}}.$$

Полагая $C = e^{-\text{const}}$, находим из последнего равенства:

$$u = \frac{1}{1 + Ce^{-kt}}.$$

Постоянные C и k определяем из условий задачи, согласно которым

$$\begin{cases} \frac{1}{1 + C} = 0,2, \\ \frac{1}{1 + Ce^{-15k}} = 0,8. \end{cases}$$

Решая систему, находим:

$$C = 4, \quad k = \frac{\ln 16}{15}.$$

Так как

$$e^{-\frac{\ln 16}{15}t} = \left(e^{\ln 16}\right)^{-\frac{t}{15}} = 16^{-\frac{t}{15}},$$

то для концентрации вещества B получаем следующую формулу:

$$u(t) = \frac{1}{1 + 4 \cdot 16^{-\frac{t}{15}}}.$$

Подставляя сюда $t = 60$ (1 ч), находим

$$u = \frac{16384}{16385},$$

что составляет в процентах

$$\frac{16384}{16385} \cdot 100 \approx 99,9939.$$

2530. Согласно закону Гука относительное удлинение ε стержня пропорционально напряжению силы σ в соответствующем поперечном сечении, т. е. $\varepsilon = \sigma/E$, где E – модуль Юнга.

Определить удлинение тяжелого стержня конической формы, укрепленного основанием и обращенного вершиной вниз, если радиус основания равен R , высота конуса H и удельный вес γ .

Предположим, что сила тяжести отсутствует. Выберем ось конуса за координатную ось так, чтобы она была направлена вверх (рис. 11.10), а начало координат находилось в вершине конуса. Рассмотрим произвольное разбиение $T = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ отрезка $[0; H]$. Ему отвечает разбиение конуса на отдельные элементы, представляющие собой усеченные конусы K_i , для которых $x \in [x_i; x_{i+1}]$ ($0 \leq i \leq n-1$). При наличии силы тяжести на элемент K_i действует растягивающая сила, равная весу конуса D_i – части всего конуса, лежащей под данным элементом.

Вычислим объем V_i конуса D_i . Радиус основания этого конуса r_i находим из подобия

$$\frac{r_i}{R} = \frac{x_i}{H},$$

откуда

$$r_i = \frac{R}{H} x_i$$

и, следовательно,

$$V_i = \frac{1}{3} \pi r_i^2 x_i = \frac{\pi R^2 x_i^3}{3H^2}.$$

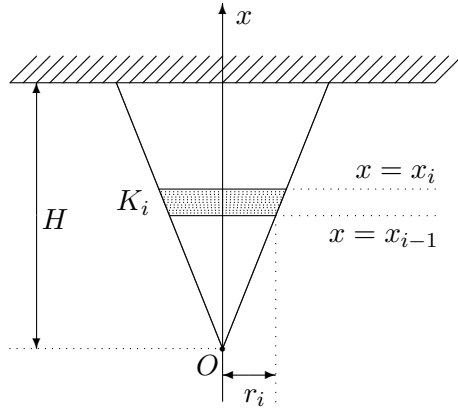


Рис. 11.10

Вес P_i конуса D_i равен γV_i и напряжение силы тяжести (равное отношению действующей силы к площади сечения)

$$\sigma_i = \frac{P_i}{\pi r_i^2} = \frac{\gamma x_i}{3}.$$

Согласно закону Гука, удлинение Δl_i рассматриваемого элемента K_i (имеющего в нерастянутом состоянии длину $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$) удовлетворяет соотношению

$$\frac{\Delta l_i}{\Delta x_i} = \frac{\sigma_i}{E},$$

что дает

$$\Delta l_i = \frac{\sigma_i}{E} \Delta x_i = \frac{\gamma x_i}{3E} \Delta x_i.$$

Суммируя удлинения всех элементов конуса, получаем удлинение всего конического стержня

$$\Delta l \approx \frac{\gamma}{3E} \sum_{i=0}^{n-1} x_i \Delta x_i.$$

Предел этого выражения когда характеристика разбиения

$$\lambda(T) = \max_{0 \leq i \leq n-1} \Delta x_i$$

стремится к нулю дает точное значение удлинения стержня:

$$\Delta l = \frac{\gamma}{3E} \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} x_i \Delta x_i.$$

В последней формуле под знаком предела стоит интегральная сумма функции $f(x) = x$ с выбором точек $\xi_i = x_i$ для вычисления значений функции

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} x_i \Delta x_i.$$

Эта сумма в пределе дает определенный интеграл:

$$\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} x_i \Delta x_i = \int_0^H x dx.$$

Таким образом, искомое значение удлинения стержня

$$\Delta l = \frac{\gamma}{3E} \int_0^H x dx = \frac{\gamma}{3E} \left(\frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^H = \frac{\gamma H^2}{6E}.$$

Глава 12

Приближенное вычисление интегралов

Для приближенного вычисления интегралов по отрезку $[a; b]$ от заданной функции $y(x)$ наиболее распространены формулы прямоугольников, трапеций и парабол. Приведем эти формулы вместе с оценкой погрешности вычисления. Во всех трех формулах величина $h = (b-a)/n$, $x_i = a + ih$, $y_i = y(x_i)$ ($i = 0, 1, \dots, n$).

1. Формула прямоугольников:

$$\int_a^b y(x) dx = h(y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1}) + R_n, \quad (12.1)$$

где

$$R_n = \frac{(b-a)h}{2} y'(\xi), \quad (a \leq \xi \leq b).$$

2. Формула трапеций:

$$\int_a^b y(x) dx = h \left(\frac{1}{2} y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} + \frac{1}{2} y_n \right) + R_n, \quad (12.2)$$

где

$$R_n = -\frac{(b-a)h^2}{12} y''(\xi), \quad (a \leq \xi \leq b).$$

3. Формула парабол (формула Симпсона). При $n = 2k$

$$\int_a^b y(x) dx = \frac{h}{3} [(y_0 + y_{2k}) + 4(y_1 + y_3 + \cdots + y_{2k-1}) + \\ + 2(y_2 + y_4 + \cdots + y_{2k-2})] + R_n, \quad (12.3)$$

где

$$R_n = -\frac{(b-a)h^4}{180} y^{IV}(\xi), \quad (a \leq \xi \leq b).$$

2531. Применяя формулу прямоугольников ($n = 12$), приближенно вычислить

$$\int_0^{2\pi} x \sin x dx$$

и результат сравнить с точным ответом.

Результат приближенного вычисления интеграла I обозначим I_{12} . По формуле (12.1)

$$\begin{aligned} I_{12} &= \frac{\pi}{6} \left(\frac{\pi}{6} \sin \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3} \sin \frac{2\pi}{3} + \right. \\ &+ \frac{5\pi}{6} \sin \frac{5\pi}{6} + \pi \sin \pi + \frac{7\pi}{6} \sin \frac{7\pi}{6} + \frac{4\pi}{3} \sin \frac{4\pi}{3} + \frac{3\pi}{2} \sin \frac{3\pi}{2} + \\ &\quad \left. + \frac{5\pi}{3} \sin \frac{5\pi}{3} + \frac{11\pi}{6} \sin \frac{11\pi}{6} \right) = \\ &= \frac{\pi}{6} \left(\frac{\pi}{6} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\pi}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{5\pi}{6} \cdot \frac{1}{2} + 0 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{7\pi}{6} \cdot \frac{1}{2} - \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3\pi}{2} - \frac{5\pi}{6} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{11\pi}{6} \cdot \frac{1}{2} \right) = \\ &= \frac{\pi}{6} (-2\pi - \pi\sqrt{3}) = -\frac{\pi^2(2 + \sqrt{3})}{6} \approx -6,1389775. \end{aligned}$$

Точное значение интеграла находим с помощью интегрирования по частям. Неопределенный интеграл

$$\begin{aligned}\int x \sin x \, dx &= - \int x \, d(\cos x) = \\ &= -x \cos x + \int \cos x \, dx = -x \cos x + \sin x + C.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$I = \int_0^{2\pi} x \sin x \, dx = (-x \cos x + \sin x)|_0^{2\pi} = -2\pi \approx -6,2831853.$$

С помощью формулы трапеций вычислить интегралы и оценить их погрешности, если

$$\mathbf{2532.} \int_0^1 \frac{dx}{1+x} \quad (n=8).$$

Результат приближенного вычисления интеграла I обозначим I_8 . По формуле (12.2)

$$\begin{aligned}I_8 &= \frac{1}{8} \left(\frac{1}{2} + \frac{8}{9} + \frac{4}{5} + \frac{8}{11} + \frac{2}{3} + \frac{8}{13} + \frac{4}{7} + \frac{8}{15} + \frac{1}{4} \right) = \\ &= \frac{200107}{288288} \approx 0,69412185.\end{aligned}$$

Подынтегральная функция

$$y(x) = \frac{1}{1+x}$$

имеет вторую производную

$$y''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$$

и на отрезке $[0; 1]$ ее величина

$$|y''(x)| \leq \frac{2}{(1+0)^3} = 2.$$

Поэтому величина погрешности ($a = 0$, $b = 1$, $h = 1/8$)

$$|R_8| = \left| \frac{(b-a)h^2}{12} y''(\xi) \right| \leq \frac{1}{12} \left(\frac{1}{8} \right)^2 \cdot 2 = \frac{1}{384} \approx 0,0026.$$

Замечание. В данном случае погрешность можно оценить, вычислив точное значение интеграла:

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln(1+x) \Big|_0^1 = \ln 2 \approx 0,69314718.$$

$$\mathbf{2533.} \int_0^1 \frac{dx}{1+x^3} \quad (n = 12).$$

Результат приближенного вычисления интеграла обозначим I_{12} . По формуле (12.2)

$$\begin{aligned} I_{12} &= \frac{1}{12} \left(\frac{1}{2} + \frac{1728}{1729} + \frac{216}{217} + \frac{64}{65} + \frac{27}{28} + \frac{1728}{1853} + \frac{8}{9} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1728}{2071} + \frac{27}{35} + \frac{64}{91} + \frac{216}{341} + \frac{1728}{3059} + \frac{1}{4} \right) \approx \\ &\approx \frac{1}{12} (0,5 + 0,999421631001 + 0,995391705069 + \\ &+ 0,984615384615 + 0,964285714286 + 0,932541824069 + \\ &+ 0,888888888889 + 0,834379526799 + 0,771428571429 + \\ &+ 0,703296703297 + 0,633431085044 + 0,564890487087 + \\ &+ 0,25) = \frac{10,022571521585}{12} \approx 0,835214293465. \end{aligned}$$

Подынтегральная функция

$$y(x) = \frac{1}{1+x^3}$$

имеет вторую производную

$$y''(x) = \frac{6x(2x^3 - 1)}{(1 + x^3)^3}$$

и на отрезке $[0; 1]$ ее величина

$$|y''(x)| \leq \frac{6 \cdot 1 \cdot 1}{(1 + 0)^3} = 6.$$

Поэтому величина погрешности ($a = 0$, $b = 1$, $h = 1/12$)

$$|R_{12}| = \left| \frac{(b-a)h^2}{12} y''(\xi) \right| \leq \frac{1}{12} \left(\frac{1}{12} \right)^2 \cdot 6 = \frac{1}{288} \approx 0,00347.$$

Замечание. При вычислении I_{12} значение каждой дроби бралось с точностью 10^{-12} . Так как погрешность суммы не превосходит суммы погрешностей, то погрешность суммы двенадцати слагаемых в 12 раз больше, чем одного слагаемого. При делении на 12 погрешность уменьшается в 12 раз, следовательно, полученное значение I_{12} имеет такую же погрешность, как и все дроби, т. е. 10^{-12} . Таким образом, числовое значение I_{12} имеет 10 верных цифр после запятой.

Замечание. В данном случае погрешность можно оценить, вычислив точное значение интеграла. Согласно решению задачи 1881 из [1]

$$\int \frac{dx}{1+x^3} = \frac{1}{6} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

Применяя формулу Ньютона – Лейбница, находим:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{1+x^3} &= \left(\frac{1}{6} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} \right) \Big|_0^1 = \\ &= \frac{1}{3} \ln 2 + \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \approx 0,8356488426. \end{aligned}$$

Замечание. На данном примере видно наличие двух факторов, влияющих на точность результата приближенных вычислений: погрешность приближенной формулы и погрешности округления. Погрешность приближенной формулы оценивается величиной 0,00347, поэтому значение I_{12} может гарантировать точность вычислений $4 \cdot 10^{-3}$. Однако сама величина I_{12} вычисляется с округлениями и для того, чтобы округления не повлияли существенно на точность вычисления, приближенное значение I_{12} должно быть вычислено с тем же порядком точности 10^{-3} . В этом случае суммарная погрешность не превысит $5 \cdot 10^{-3}$. Однако, как показывают произведенные вычисления, действительная точность в данной задаче оказалась выше теоретической оценки (меньше $5 \cdot 10^{-4}$).

2534.
$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \frac{1}{4} \sin^2 x} \, dx \quad (n = 6).$$

Подынтегральную функцию

$$y(x) = \sqrt{1 - \frac{1}{4} \sin^2 x}$$

удобно преобразовать с помощью формулы $\sin^2 x = (1 - \cos 2x)/2$ к виду

$$y(x) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \sqrt{7 + \cos 2x}.$$

Результат приближенного вычисления интеграла обозначим I_6 . Формула (12.2) дает

$$\begin{aligned} I_6 = \frac{\pi}{12} & \left[\frac{1}{2} y(0) + y\left(\frac{\pi}{12}\right) + y\left(\frac{\pi}{6}\right) + y\left(\frac{\pi}{4}\right) + \right. \\ & \left. + y\left(\frac{\pi}{3}\right) + y\left(\frac{5\pi}{12}\right) + \frac{1}{2} y\left(\frac{\pi}{2}\right) \right]. \end{aligned}$$

Вычисляя значения функции, находим:

$$y(0) = 1;$$

$$y\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{14 + \sqrt{3}}}{4} \approx 0,991591234064;$$

$$y\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{15}}{4} \approx 0,968245836552;$$

$$y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{\frac{7}{8}} \approx 0,935414346693;$$

$$y\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{13}}{4} \approx 0,901387818866;$$

$$y\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{14 - \sqrt{3}}}{4} \approx 0,875640807938;$$

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,866025403784;$$

Величина

$$\frac{\pi}{12} \approx 0,261799387799.$$

Выполняя вычисления, получаем

$$I_6 \approx 0,261799387799 \cdot 5,605292746005 \approx 1,467462209338.$$

Вторая производная подынтегральной функции

$$y''(x) = -\frac{\cos^2 2x + 14 \cos 2x + 1}{2\sqrt{2}(7 + \cos 2x)^{3/2}}.$$

Так как $|\cos 2x| \leq 1$ и $|7 + \cos 2x| \geq |7 - 1| = 6$, то

$$|y''(x)| \leq \frac{1 + 14 + 1}{2\sqrt{2} \cdot 6^{3/2}} = \frac{2}{3\sqrt{3}}.$$

Следовательно, величина погрешности ($a = 0$, $b = \pi/2$, $h = \pi/12$):

$$|R_6| = \left| \frac{(b-a)h^2}{12} y''(\xi) \right| \leq \frac{1}{12} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{12}\right)^2 \cdot \frac{2}{3\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{\pi^3}{5184\sqrt{3}} \approx 0,003453218.$$

С помощью формулы Симпсона вычислить интегралы:

$$\mathbf{2535.} \int_1^9 \sqrt{x} \, dx \, (n = 4).$$

Результат приближенного вычисления интеграла обозначим I_4 . По формуле (12.3) для $y(x) = \sqrt{x}$:

$$\begin{aligned} I_4 &= \frac{2}{3} [y(1) + y(9) + 4(y(3) + y(7)) + 2y(5)] = \\ &= \frac{2}{3} [1 + 3 + 4(\sqrt{3} + \sqrt{7}) + 2\sqrt{5}] \approx \\ &\approx 0,666666666667 [4 + 4 \cdot (1,732050807569 + \\ &+ 2,645751311065) + 2 \cdot 2,236067977500] \approx \\ &\approx 17,322229619689. \end{aligned}$$

Замечание. Точное значение интеграла

$$\int_1^9 \sqrt{x} \, dx = \frac{2}{3} x^{3/2} \Big|_1^9 = \frac{52}{3} \approx 17,333333333333.$$

$$\mathbf{2536.} \int_0^\pi \sqrt{3 + \cos x} \, dx \, (n = 6).$$

Приближенное значение интеграла обозначим I_6 . В соответствии с формулой (12.3) для $y(x) = \sqrt{3 + \cos x}$ на отрезке $[0; \pi]$ с $n = 6$ получаем:

$$\begin{aligned} I_6 &= \frac{\pi}{18} \left[y(0) + y(\pi) + 4 \left(y\left(\frac{\pi}{6}\right) + y\left(\frac{\pi}{2}\right) + y\left(\frac{5\pi}{6}\right) \right) + \right. \\ &\quad \left. 2 \left(y\left(\frac{\pi}{3}\right) + y\left(\frac{2\pi}{3}\right) \right) \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\pi}{18} \left[2 + \sqrt{2} + 4 \left(\sqrt{3 + \frac{\sqrt{3}}{2}} + \sqrt{3} + \sqrt{3 - \frac{\sqrt{3}}{2}} \right) + \right. \\
&\quad \left. + 2 \left(\sqrt{\frac{7}{2}} + \sqrt{\frac{5}{2}} \right) \right] \approx \\
&\approx 0,174532925199 [2 + 1,414213562373 + \\
&+ 4(1,966221097381 + 1,732050807569 + 1,460812991528) + \\
&+ 2(1,870828693387 + 1,581138830084)] \approx 5,402577372751.
\end{aligned}$$

$$\mathbf{2537.} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x} dx \quad (n = 10).$$

Рассматриваемый интеграл совпадает с интегралом от непрерывной функции

$$y(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

Приближенное значение интеграла обозначим I_{10} . По формуле (12.3) для функции $y(x)$ на отрезке $[0; \pi/2]$ с $n = 10$ получаем:

$$\begin{aligned}
I_{10} &= \frac{\pi}{60} \left[y(0) + y\left(\frac{\pi}{2}\right) + \right. \\
&+ 4 \left(y\left(\frac{\pi}{20}\right) + y\left(\frac{3\pi}{20}\right) + y\left(\frac{\pi}{4}\right) + y\left(\frac{7\pi}{20}\right) + y\left(\frac{9\pi}{20}\right) \right) + \\
&\quad \left. + 2 \left(y\left(\frac{\pi}{10}\right) + y\left(\frac{\pi}{5}\right) + y\left(\frac{3\pi}{10}\right) + y\left(\frac{2\pi}{5}\right) \right) \right] = \\
&= \frac{\pi}{60} \left[1 + \frac{2}{\pi} + 4 \left(\frac{20}{\pi} \sin \frac{\pi}{20} + \frac{20}{3\pi} \sin \frac{3\pi}{20} + \frac{2\sqrt{2}}{\pi} + \frac{20}{7\pi} \sin \frac{7\pi}{20} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{20}{9\pi} \sin \frac{9\pi}{20} \right) + 2 \left(\frac{10}{\pi} \sin \frac{\pi}{10} + \frac{5}{\pi} \sin \frac{\pi}{5} + \frac{10}{3\pi} \sin \frac{3\pi}{10} + \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{5}{2\pi} \sin \frac{2\pi}{5} \Bigg] = \frac{\pi}{60} + \frac{1}{30} + \frac{4}{3} \sin \frac{\pi}{20} + \frac{4}{9} \sin \frac{3\pi}{20} + \frac{2\sqrt{2}}{15} + \frac{4}{21} \sin \frac{7\pi}{20} + \\
& + \frac{4}{27} \sin \frac{9\pi}{20} + \frac{1}{3} \sin \frac{\pi}{10} + \frac{1}{6} \sin \frac{\pi}{5} + \frac{1}{9} \sin \frac{3\pi}{10} + \frac{1}{12} \sin \frac{2\pi}{5} \approx \\
& \approx 0,052359877560 + 0,033333333333 + 0,208579286720 + \\
& + 0,201773555440 + 0,188561808316 + 0,169715528417 + \\
& + 0,146324198607 + 0,103005664792 + 0,097964208715 + \\
& + 0,089890777153 + 0,079254709691 = 1,370762948744.
\end{aligned}$$

$$\mathbf{2538.} \int_0^1 \frac{x dx}{\ln(1+x)} \quad (n=6).$$

Рассматриваемый интеграл совпадает с интегралом от непрерывной функции:

$$y(x) = \begin{cases} \frac{x}{\ln(1+x)}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

Приближенное значение интеграла обозначим I_6 . По формуле (12.3) для функции $y(x)$ на отрезке $[0; 1]$ с $n=6$ получаем:

$$\begin{aligned}
I_6 &= \frac{1}{18} \left[y(0) + y(1) + 4 \left(y\left(\frac{1}{6}\right) + y\left(\frac{1}{2}\right) + y\left(\frac{5}{6}\right) \right) + \right. \\
&+ 2 \left(y\left(\frac{1}{3}\right) + y\left(\frac{2}{3}\right) \right) \Bigg] = \frac{1}{18} + \frac{1}{18 \ln 2} + \frac{1}{27 \ln \frac{7}{6}} + \frac{1}{9 \ln \frac{3}{2}} + \\
&+ \frac{5}{27 \ln \frac{11}{6}} + \frac{1}{27 \ln \frac{4}{3}} + \frac{2}{27 \ln \frac{5}{3}} \approx 0,055555555556 + \\
&+ 0,080149724494 + 0,240265155357 + 0,274033718042 + \\
&+ 0,305517648181 + 0,128742944325 + \\
&+ 0,145008532516 = 1,229273278471.
\end{aligned}$$

2539. Принимая $n = 10$ вычислить константу Каталана

$$G = \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx.$$

Рассматриваемый интеграл совпадает с интегралом от непрерывной функции:

$$y(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

Приближенное значение интеграла обозначим I_{10} . По формуле (12.3) для функции $y(x)$ на отрезке $[0; 1]$ с $n = 10$ получаем:

$$\begin{aligned} G \approx I_{10} &= \frac{1}{30} \left[y(0) + y(1) + 4 \left(y\left(\frac{1}{10}\right) + y\left(\frac{3}{10}\right) + y\left(\frac{1}{2}\right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + y\left(\frac{7}{10}\right) + y\left(\frac{9}{10}\right) \right) + 2 \left(y\left(\frac{1}{5}\right) + y\left(\frac{2}{5}\right) + y\left(\frac{3}{5}\right) + y\left(\frac{4}{5}\right) \right) \right] = \\ &= \frac{1}{30} + \frac{\pi}{120} + \frac{4}{3} \operatorname{arctg} \frac{1}{10} + \frac{4}{9} \operatorname{arctg} \frac{3}{10} + \frac{4}{15} \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \frac{4}{21} \operatorname{arctg} \frac{7}{10} + \\ &\quad + \frac{4}{27} \operatorname{arctg} \frac{9}{10} + \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \operatorname{arctg} \frac{2}{5} + \frac{1}{9} \operatorname{arctg} \frac{3}{5} + \frac{1}{12} \operatorname{arctg} \frac{4}{5} \approx \\ &\approx 0,033333333333 + 0,026179938780 + 0,132891536655 + \\ &\quad + 0,129536353101 + 0,123639362400 + 0,116328755122 + \\ &\quad + 0,108565200265 + 0,065798519950 + 0,063417729519 + \\ &\quad + 0,060046611141 + 0,056228411852 = 0,915965752118. \end{aligned}$$

2540. Пользуясь формулой

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2},$$

вычислить число π с точностью до 10^{-5} .

Для числа π имеем формулу

$$\pi = 4 \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}.$$

Оценим погрешность формулы Симпсона для вычисления интеграла. В общем случае, для интеграла от функции $y(x)$ на отрезке $[a; b]$ с разбиением на n частей и шагом $h = (b - a)/n$ эта погрешность определяется равенством

$$R_n = -\frac{(b-a)h^4}{180} y^{IV}(\xi) \quad (\xi \in [a; b]).$$

В нашем случае $a = 0$, $b = 1$, $h = 1/n$ и данная формула принимает следующий вид:

$$R_n = -\frac{1}{180n^4} y^{IV}(\xi).$$

Для того, чтобы получить, по возможности, более точную оценку четвертой производной подынтегральной функции

$$y(x) = \frac{1}{1+x^2},$$

можно поступить следующим образом. Дифференцируя четыре раза тождество

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i} \right),$$

получаем:

$$y^{IV}(x) = \frac{12}{i} \left(\frac{1}{(x-i)^5} - \frac{1}{(x+i)^5} \right).$$

Рассмотрим комплексное число

$$z = x + i.$$

При любом вещественном x это число имеет положительную мнимую часть. Следовательно, можно считать, что его аргумент меняется в пределах от нуля до π . В этом случае

$$x + i = \sqrt{1 + x^2}(\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

где

$$\varphi = \operatorname{arctg} x.$$

Комплексно сопряженное число $x - i$ имеет противоположный аргумент, поэтому

$$x - i = \sqrt{1 + x^2}(\cos \varphi - i \sin \varphi).$$

Применяя формулу Муавра, находим:

$$\frac{1}{(x + i)^5} = \frac{1}{(1 + x^2)^{5/2}} (\cos 5\varphi - i \sin 5\varphi),$$

$$\frac{1}{(x - i)^5} = \frac{1}{(1 + x^2)^{5/2}} (\cos 5\varphi + i \sin 5\varphi).$$

Подставляя полученные выражения в формулу для четвертой производной функции $y(x)$, получаем

$$y^{IV}(x) = \frac{24}{(1 + x^2)^{5/2}} \sin(5 \operatorname{arctg} x).$$

Оценивая правую часть последнего равенства, имеем:

$$|y^{IV}(x)| \leq \frac{24}{(1 + 0)^{5/2}} \cdot 1 = 24.$$

Отсюда вытекает следующая оценка погрешности формулы Симпсона:

$$|R_n| \leq \frac{2}{15n^4}.$$

Так как приближенное значение числа π определяется учетверенным интегралом, то погрешность вычисления Δ этого числа в четыре раза больше погрешности вычисления интеграла, т. е.

$$|\Delta| \leq \frac{8}{15n^4}.$$

По условию задачи необходимо, чтобы $\Delta < 10^{-5}$. Для обеспечения этой точности достаточно выбрать n из условия

$$\frac{8}{15n^4} < 10^{-5}.$$

Последнее неравенство равносильно

$$n > 10 \sqrt[4]{\frac{16}{3}} \approx 15,1967.$$

Следовательно, достаточно взять $n = 16$.

По формуле Симсона (12.3) с $n = 16$ имеем:

$$\begin{aligned} \pi &\approx 4 \cdot \frac{1}{48} \left[y(0) + y(1) + 4 \left(y\left(\frac{1}{16}\right) + y\left(\frac{3}{16}\right) + y\left(\frac{5}{16}\right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + y\left(\frac{7}{16}\right) + y\left(\frac{9}{16}\right) + y\left(\frac{11}{16}\right) + y\left(\frac{13}{16}\right) + y\left(\frac{15}{16}\right) \right) + \right. \\ &\quad \left. + 2 \left(y\left(\frac{1}{8}\right) + y\left(\frac{1}{4}\right) + y\left(\frac{3}{8}\right) + y\left(\frac{1}{2}\right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + y\left(\frac{5}{8}\right) + y\left(\frac{3}{4}\right) + y\left(\frac{7}{8}\right) \right) \right] = \\ &= \frac{1}{12} + \frac{1}{24} + \frac{256}{771} + \frac{256}{795} + \frac{256}{843} + \frac{256}{915} + \frac{256}{1011} + \frac{256}{1131} + \frac{256}{1275} + \\ &\quad + \frac{256}{1443} + \frac{32}{195} + \frac{8}{51} + \frac{32}{219} + \frac{2}{15} + \frac{32}{267} + \frac{8}{75} + \frac{32}{339} \approx \\ &\approx 0,0833333333 + 0,0416666667 + 0,3320363165 + 0,3220125786 + \\ &\quad + 0,3036773428 + 0,2797814208 + 0,2532146390 + 0,2263483643 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+0,2007843137 + 0,1774081774 + 0,1641025641 + 0,1568627451 + \\
&+0,1461187215 + 0,1333333333 + 0,1198501873 + 0,1066666667 + \\
&+0,0943952802 = 3,1415926513.
\end{aligned}$$

Оставляя в ответе пять знаков после запятой, получаем

$$\pi \approx 3,14159.$$

Замечание. В процессе вычислений необходимо также учитывать погрешность округления. В нашем случае значения всех дробей брались с десятью знаками после запятой, т.е. с точностью 10^{-10} . При сложении 17 членов погрешность возрастает до $17 \cdot 10^{-10}$ и не превышает 10^{-8} , что не влияет на принятую точность вычисления числа π .

2541. Вычислить $\int_0^1 e^{x^2} dx$ с точностью до 0,001.

Для функции $y(x) = e^{x^2}$ величина погрешности формулы Симпсона на отрезке $[0; 1]$ с разбиением на n частей и шагом $h = (b - a)/n$ имеет вид

$$R_n = -\frac{1}{180n^4} y^{IV}(\xi) \quad (\xi \in [0; 1]).$$

Четвертая производная подынтегральной функции

$$y^{IV}(x) = 4(4x^4 + 12x^2 + 3)e^{x^2}$$

возрастает на отрезке $[0; 1]$ и свой максимум достигает при $x = 1$. Отсюда следует, что

$$|y^{IV}(x)| \leq 4(4 + 12 + 3)e = 76e.$$

Таким образом,

$$|R_n| \leq \frac{19e}{45n^4}.$$

Для обеспечения заданной точности достаточно, чтобы

$$\frac{19e}{45n^4} < 0,001,$$

что равносильно

$$n > \sqrt[4]{\frac{3800e}{9}} \approx 5,82.$$

Таким образом, достаточно взять $n = 6$. По формуле Симпсона (12.3) с $n = 6$ имеем:

$$\begin{aligned} I_6 = \frac{1}{18} & \left[y(0) + y(1) + 4 \left(y\left(\frac{1}{6}\right) + y\left(\frac{1}{2}\right) + y\left(\frac{5}{6}\right) \right) + \right. \\ & \left. + 2 \left(y\left(\frac{1}{3}\right) + y\left(\frac{2}{3}\right) \right) \right] \approx 0,055556 [1 + 2,718282 + \\ & + 4(1,028167 + 1,284025 + 2,002596) + \\ & + 2(1,117519 + 1,559623)] \approx 1,462885. \end{aligned}$$

Оставляя три значащих цифры после запятой, получаем требуемое приближенное значение:

$$\int_0^1 e^{x^2} dx \approx 1,463.$$

2542. Вычислить $\int_0^1 (e^x - 1) \ln \frac{1}{x} dx$ с точностью до 10^{-4} .

Аппроксимируем функцию $e^x - 1$ по формуле Тэйлора с дополнительным членом в форме Лагранжа:

$$e^x - 1 = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{x^k}{k!} + \frac{e^\xi}{n!} x^n \quad (\xi \in [0; 1])$$

и заменим подынтегральную функцию

$$f(x) = (e^x - 1) \ln \frac{1}{x}$$

на функцию

$$\tilde{f}(x) = \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{x^k}{k!} \right) \ln \frac{1}{x}.$$

Разность этих функций

$$f(x) - \tilde{f}(x) = \frac{e^\xi}{n!} x^n \ln \frac{1}{x}.$$

Так как при $\xi \in [0; 1]$ величина $e^\xi \leq e$, то

$$|f(x) - \tilde{f}(x)| \leq \frac{e}{n!} x^n \ln \frac{1}{x}.$$

Функция

$$\varphi(x) = x^n \ln \frac{1}{x} = -x^n \ln x$$

имеет производную

$$\varphi'(x) = -x^{n-1} (n \ln x + 1),$$

которая меняет знак с плюса на минус в точке $x = e^{-1/n}$. Таким образом, эта точка является точкой максимума функции $\varphi(x)$ на отрезке $[0; 1]$ и максимальное значение этой функции

$$\varphi(e^{-1/n}) = \frac{1}{ne}.$$

Отсюда следует, что при $x \in [0; 1]$

$$|f(x) - \tilde{f}(x)| \leq \frac{1}{n \cdot n!}.$$

Оценивая разность интегралов от функций $f(x)$ и $\tilde{f}(x)$, получаем:

$$\left| \int_0^1 f(x) dx - \int_0^1 \tilde{f}(x) dx \right| \leq \int_0^1 |f(x) - \tilde{f}(x)| dx \leq$$

$$\leq \frac{1}{n \cdot n!} \int_0^1 dx = \frac{1}{n \cdot n!}.$$

Выпишем несколько первых оценок:

$$\frac{1}{1 \cdot 1!} = 1; \quad \frac{1}{2 \cdot 2!} = 0,25; \quad \frac{1}{3 \cdot 3!} \approx 0,0556; \quad \frac{1}{4 \cdot 4!} \approx 0,0104;$$

$$\frac{1}{5 \cdot 5!} \approx 0,0017; \quad \frac{1}{6 \cdot 6!} \approx 0,00023; \quad \frac{1}{7 \cdot 7!} \approx 0,0000283.$$

Отсюда видно, что при замене исходного интеграла на интеграл от функции $\tilde{f}(x)$ нужную точность обеспечивает значение $n = 7$. Погрешность вычисления в этом случае не превосходит $3 \cdot 10^{-5}$.

Перейдем к вычислению интеграла от функции $\tilde{f}(x)$. С помощью интегрирования по частям находим неопределенный интеграл:

$$\begin{aligned} \int x^k \ln \frac{1}{x} dx &= - \int x^k \ln x dx = - \int \ln x d \left(\frac{x^{k+1}}{k+1} \right) = \\ &= - \frac{x^{k+1}}{k+1} \ln x + \frac{1}{k+1} \int x^k dx = - \frac{x^{k+1}}{k+1} \ln x + \frac{x^{k+1}}{(k+1)^2} + C. \end{aligned}$$

Далее, с помощью формулы Ньютона – Лейбница находим:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \tilde{f}(x) dx &= \int_0^1 \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{720} \right) \ln \frac{1}{x} dx = \\ &= \int_0^1 x \ln \frac{1}{x} dx + \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 \ln \frac{1}{x} dx + \frac{1}{6} \int_0^1 x^3 \ln \frac{1}{x} dx + \\ &+ \frac{1}{24} \int_0^1 x^4 \ln \frac{1}{x} dx + \frac{1}{120} \int_0^1 x^5 \ln \frac{1}{x} dx + \frac{1}{720} \int_0^1 x^6 \ln \frac{1}{x} dx = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(-\frac{x^2}{2} \ln x + \frac{x^2}{4} \right) \Big|_0^1 + \frac{1}{2} \left(-\frac{x^3}{3} \ln x + \frac{x^3}{9} \right) \Big|_0^1 + \\
&+ \frac{1}{6} \left(-\frac{x^4}{4} \ln x + \frac{x^4}{16} \right) \Big|_0^1 + \frac{1}{24} \left(-\frac{x^5}{5} \ln x + \frac{x^5}{25} \right) \Big|_0^1 + \\
&+ \frac{1}{120} \left(-\frac{x^6}{6} \ln x + \frac{x^6}{36} \right) \Big|_0^1 + \frac{1}{720} \left(-\frac{x^7}{7} \ln x + \frac{x^7}{49} \right) \Big|_0^1 = \\
&= \frac{1}{4} + \frac{1}{18} + \frac{1}{96} + \frac{1}{600} + \frac{1}{4320} + \frac{1}{35280}.
\end{aligned}$$

Так как погрешность использованной формулы не превышает $3 \cdot 10^{-5}$, то для обеспечения результирующей точности 10^{-4} достаточно, чтобы при замене обыкновенных дробей на десятичные, суммарная погрешность округления не превышала 10^{-5} . Так как сумма содержит шесть слагаемых, то достаточно каждую дробь брать с приближением 10^{-6} :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4} + \frac{1}{18} + \frac{1}{96} + \frac{1}{600} + \frac{1}{4320} + \frac{1}{35280} \approx \\
&\approx 0,25000000 + 0,05555556 + 0,01041667 + 0,00166667 + \\
&+ 0,00023148 + 0,00002834 = 0,31789872.
\end{aligned}$$

Оставляя четыре знака после запятой, получаем значение интеграла с требуемой точностью:

$$\int_0^1 (e^x - 1) \ln \frac{1}{x} dx \approx 0,3179.$$

2543. Вычислить с точностью до 0,001 интеграл вероятностей

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx.$$

Заменим несобственный интеграл собственным:

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \approx J = \int_0^A e^{-x^2} dx.$$

Погрешность этой формулы

$$\Delta_1 = I - J = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx - \int_0^A e^{-x^2} dx = \int_A^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

можно оценить, делая замену переменной $t = x^2$:

$$\Delta_1 = \frac{1}{2} \int_{A^2}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt.$$

Так как на промежутке $[A^2; +\infty)$ величина

$$\frac{1}{\sqrt{t}} \leq \frac{1}{A},$$

то

$$\Delta_1 < \frac{1}{2A} \int_{A^2}^{+\infty} e^{-t} dt = \frac{e^{-A^2}}{2A}.$$

Подберем значение A так, чтобы оно обеспечивало заданную точность. Вычислим

$$\varphi(A) = \frac{e^{-A^2}}{2A}$$

сначала при целых A . Имеем:

$$\varphi(1) = \frac{1}{2e} \approx 0,18, \quad \varphi(2) = \frac{1}{4e^4} \approx 0,0046, \quad \varphi(3) = \frac{1}{6e^9} \approx 0,0000206.$$

Таким образом, величину A можно брать в пределах от $A = 2$, до $A = 3$. Оценим, далее, величину A с точностью до 0,1. Вычисления дают:

$$\varphi(2,1) \approx 0,0029, \quad \varphi(2,2) \approx 0,0018,$$

$$\varphi(2,3) \approx 0,0011, \quad \varphi(2,4) \approx 0,00066 < 0,00067.$$

Таким образом, выбор $A = 2,4$ обеспечивает точность приближения

$$|\Delta_1| < 0,00067.$$

Для вычисления интеграла

$$J = \int_0^{2,4} e^{-x^2} dx$$

воспользуемся формулой Симпсона. При разбиении отрезка интегрирования $[a; b]$ ($a = 0$, $b = 2,4$) на n частей и шагом $h = (b - a)/n$ погрешность вычисления интеграла от функции $f(x)$:

$$\Delta_2 = -\frac{(b-a)h^4}{180} f^{IV}(\xi) \quad (\xi \in [a; b]).$$

Функция $f(x) = e^{-x^2}$ имеет четвертую производную

$$F(x) = f^{IV}(x) = 4(4x^4 - 12x^2 + 3)e^{-x^2}.$$

Исследуя эту функцию на максимум, находим

$$F'(x) = -8x(4x^4 - 20x^2 + 15)e^{-x^2}.$$

Приравнивая производную к нулю, находим точки экстремума. На рассматриваемый отрезок $[0; 2,4]$ попадают три точки: точка максимума

$$x = 0; \quad F(x) = 12,$$

точка минимума

$$x = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{10}}{2}} \approx 0,96, \quad F(x) \approx -7,42$$

и точка максимума

$$x = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{10}}{2}} \approx 2,02. \quad F(x) \approx 1,39.$$

Таким образом,

$$\max_{[0;2,4]} |f^{IV}(x)| = 12$$

и погрешность формулы Симпсона

$$|\Delta_2| \leq \frac{(2,4)^5 12}{180n^4} = \frac{5,308416}{n^4}.$$

При $n = 12$ величина

$$\frac{5,308416}{n^4} \approx 0,000256$$

и

$$|\Delta_2| < 0,00026.$$

Суммарная погрешность

$$|\Delta_1 + \Delta_2| < 0,00067 + 0,00026 = 0,00093$$

обеспечивает заданную точность (при условии, что погрешность округлений не будет превышать, например, 10^{-5}).

Формула Симпсона для $n = 12$ (с шагом $h = 0,2$):

$$\begin{aligned} J \approx & \frac{2}{30} [f(0) + f(2,4) + \\ & + 4(f(0,2) + f(0,6) + f(1) + f(1,4) + f(1,8) + f(2,2)) + \\ & + 2(f(0,4) + f(0,8) + f(1,2) + f(1,6) + f(2))] \approx \\ \approx & 0,0666666667 [1 + 0,0031511116 + 4(0,9607894392 + \\ & + 0,6976763261 + 0,3678794412 + 0,1408584209 + 0,0391638951 + \\ & + 0,0079070541) + 2(0,8521437890 + 0,5272924240 + \\ & + 0,2369277587 + 0,0773047404 + 0,0183156389)] \approx 0,8856145418. \end{aligned}$$

Оставляя четыре значащих цифры после запятой, получаем требуемое приближенное значение:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \approx 0,8856.$$

Замечание. Точное значение рассматриваемого интеграла известно:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \approx 0,8862269255.$$

2544. Приблизненно найти длину эллипса, полуоси которого $a = 10$ и $b = 6$.

Воспользуемся параметрическим уравнением эллипса:

$$x = 10 \cos t, \quad y = 6 \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Длину дуги вычисляем по формуле (7.3):

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{2\pi} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{100 \sin^2 t + 36 \cos^2 t} dt = \\ &= 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{100 \sin^2 t + 36 \cos^2 t} dt = 8 \int_0^{\pi/2} \sqrt{25 \sin^2 t + 9 \cos^2 t} dt. \end{aligned}$$

Согласно известным тригонометрическим формулам:

$$\sin^2 t = \frac{1 - \cos 2t}{2}, \quad \cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2},$$

поэтому

$$\begin{aligned} s &= 8 \int_0^{\pi/2} \sqrt{25 \left(\frac{1 - \cos 2t}{2} \right) + 9 \left(\frac{1 + \cos 2t}{2} \right)} dt = \\ &= 8 \int_0^{\pi/2} \sqrt{17 - 8 \cos 2t} dt. \end{aligned}$$

Интеграл от функции $y(t) = \sqrt{17 - 8 \cos 2t}$ вычислим по формуле Симпсона с $n = 6$ ($h = \pi/12$). Это значение n удобно

тем, что мы получаем табличные значения тригонометрических функций. Вычисления дают:

$$\begin{aligned}
 s \approx 8 \cdot \frac{\pi}{36} & \left[y(0) + y\left(\frac{\pi}{2}\right) + 4 \left(y\left(\frac{\pi}{12}\right) + y\left(\frac{\pi}{4}\right) + y\left(\frac{5\pi}{12}\right) \right) + \right. \\
 & + 2 \left(y\left(\frac{\pi}{6}\right) + y\left(\frac{\pi}{3}\right) \right) \Big] = \frac{2\pi}{9} [3 + 5 + \\
 & + 4 \left(\sqrt{17 - 4\sqrt{3}} + \sqrt{17} + \sqrt{17 + 4\sqrt{3}} \right) + \\
 & + 2(\sqrt{13} + \sqrt{21})] \approx 0,6981317008 [8 + 4(3,1736094230 + \\
 & + 4,1231056256 + 4,8916462699) + 2(3,6055512755 + \\
 & + 4,5825756950)] \approx 51,0541612918.
 \end{aligned}$$

Таким образом,

$$s \approx 51,05.$$

2545. Построить по точкам график функции

$$y = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt \quad (0 \leq x \leq 2\pi),$$

приняв $\Delta x = \pi/3$.

Рассматриваемый интеграл совпадает с интегралом от непрерывной функции

$$f(t) = \begin{cases} \frac{\sin t}{t}, & t \neq 0, \\ 1, & t = 0. \end{cases}$$

Для приближенного вычисления воспользуемся формулой Симпсона с $n = 4$. Для отрезка $[a; b]$ и функции $f(t)$ она имеет следующий вид:

$$\frac{b-a}{12} [f(a) + f(b) + 4(f(a+h) + f(a+3h)) + 2f(a+2h)],$$

где $h = (b - a)/4$.

При $x = 0$, очевидно, $y = 0$. Для вычисления $y_1 = y(\pi/3)$ имеем $a = 0$, $b = \pi/3$, $h = \pi/12$, поэтому

$$\begin{aligned} y_1 &\approx \frac{\pi}{36} \left[f(0) + f\left(\frac{\pi}{3}\right) + 4 \left(f\left(\frac{\pi}{12}\right) + f\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) + 2f\left(\frac{\pi}{6}\right) \right] \approx \\ &\approx 0,0872664626 [1 + 0,8269933431 + 4(0,9886159295 + \\ &+ 0,9003163162) + 2 \cdot 0,9549296586] \approx 0,9854636536 \approx 0,99. \end{aligned}$$

Величина

$$y_2 = \int_0^{2\pi/3} f(t)dt = \int_0^{\pi/3} f(t)dt + \int_{\pi/3}^{2\pi/3} f(t)dt = y_1 + \int_{\pi/3}^{2\pi/3} f(t)dt.$$

По формуле Симпсона с $a = \pi/3$, $b = 2\pi/3$, $h = \pi/12$, получаем для последнего интеграла следующее приближенное значение:

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{36} \left[f\left(\frac{\pi}{3}\right) + f\left(\frac{2\pi}{3}\right) + 4 \left(f\left(\frac{5\pi}{12}\right) + f\left(\frac{7\pi}{12}\right) \right) + 2f\left(\frac{\pi}{2}\right) \right] &\approx \\ &\approx 0,0872664626 [0,8269933431 + 0,4134966716 + \\ &+ 4(0,7379129756 + 0,5270806968) + 2 \cdot 0,6366197724] \approx \\ &\approx 0,6609303786 \approx 0,66. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$y_2 \approx y_1 + 0,66 \approx 0,99 + 0,66 = 1,65.$$

Величина

$$y_3 = \int_0^{\pi} f(t)dt = \int_0^{2\pi/3} f(t)dt + \int_{2\pi/3}^{\pi} f(t)dt = y_2 + \int_{2\pi/3}^{\pi} f(t)dt.$$

По формуле Симпсона с $a = 2\pi/3$, $b = \pi$, $h = \pi/12$, получаем для последнего интеграла приближенное значение

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{36} \left[f\left(\frac{2\pi}{3}\right) + f(\pi) + 4\left(f\left(\frac{3\pi}{4}\right) + f\left(\frac{11\pi}{12}\right)\right) + 2f\left(\frac{5\pi}{6}\right) \right] \approx \\ \approx 0,0872664626 [0,4134966716 + 0 + 4(0,3001054387 + \\ + 0,0898741754) + 2 \cdot 0,1909859317] \approx 0,2055462908 \approx 0,21. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$y_3 \approx y_2 + 0,21 \approx 1,65 + 0,21 = 1,86.$$

Величина

$$y_4 = \int_0^{4\pi/3} f(t)dt = \int_0^{\pi} f(t)dt + \int_{\pi}^{4\pi/3} f(t)dt = y_3 + \int_{\pi}^{4\pi/3} f(t)dt.$$

Для последнего интеграла по формуле Симпсона с $a = \pi$, $b = 4\pi/3$, $h = \pi/12$ получаем следующее приближенное значение:

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{36} \left[f(\pi) + f\left(\frac{4\pi}{3}\right) + 4\left(f\left(\frac{13\pi}{12}\right) + f\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right) + 2f\left(\frac{7\pi}{6}\right) \right] \approx \\ \approx 0,0872664626 [0 - 0,2067483358 - 4(0,0760473792 + \\ + 0,1800632632) - 2 \cdot 0,1364185227] \approx -0,1312511989 \approx -0,13. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$y_4 \approx y_3 - 0,13 \approx 1,86 - 0,13 = 1,73.$$

Величина

$$y_5 = \int_0^{5\pi/3} f(t)dt = \int_0^{4\pi/3} f(t)dt + \int_{4\pi/3}^{5\pi/3} f(t)dt = y_4 + \int_{4\pi/3}^{5\pi/3} f(t)dt.$$

По формуле Симпсона с $a = 4\pi/3$, $b = 5\pi/3$, $h = \pi/12$, получаем для последнего интеграла приближенное значение

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{36} \left[f\left(\frac{4\pi}{3}\right) + f\left(\frac{5\pi}{3}\right) + 4\left(f\left(\frac{17\pi}{12}\right) + f\left(\frac{19\pi}{12}\right)\right) + 2f\left(\frac{3\pi}{2}\right) \right] \approx \\ \approx 0,0872664626 [-0,2067483358 - 0,1653986686 - \\ -4(0,2170332281 + 0,1941876252) - 2 \cdot 0,2122065908] \approx \\ \approx -0,2130561465 \approx -0,21. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$y_5 \approx y_4 - 0,21 \approx 1,73 - 0,21 = 1,52.$$

Величина

$$y_6 = \int_0^{2\pi} f(t)dt = \int_0^{5\pi/3} f(t)dt + \int_{5\pi/3}^{2\pi} f(t)dt = y_5 + \int_{5\pi/3}^{2\pi} f(t)dt.$$

Для последнего интеграла по формуле Симпсона с $a = 5\pi/3$, $b = 2\pi$, $h = \pi/12$, получаем следующее приближенное значение:

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{36} \left[f\left(\frac{5\pi}{3}\right) + f(2\pi) + 4\left(f\left(\frac{7\pi}{4}\right) + f\left(\frac{23\pi}{12}\right)\right) + 2f\left(\frac{11\pi}{6}\right) \right] \approx \\ \approx 0,0872664626 [-0,1653986686 + 0 - 4(0,1286166166 + \\ + 0,0429833013) - 2 \cdot 0,0868117871] \approx -0,0894849431 \approx -0,09. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$y_6 \approx y_5 - 0,09 \approx 1,52 - 0,09 = 1,43.$$

Окончательная таблица значений функции $y(x)$ имеет следующий вид:

x	0	$\pi/3$	$2\pi/3$	π	$4\pi/3$	$5\pi/3$	2π
y	0	0,99	1,65	1,86	1,73	1,52	1,43

Примерный график функции представлен на рис. 12.1.

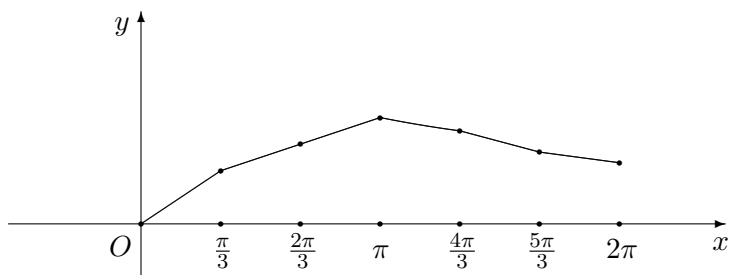


Рис. 12.1

Решения и ответы к задачам

Задача 1. Пусть $F(x)$ обозначает силу давления жидкости на часть пластины, состоящую из точек с абсциссами, не превосходящими x . Сила давления на участок пластины, находящийся на глубине от x до $x + \Delta x$, равна $\Delta F(x) = F(x + \Delta x) - F(x)$ (величину Δx считаем положительной). Площадь этой части пластины

$$\Delta S = \int_x^{x+\Delta x} l(\xi) d\xi.$$

В предположении непрерывности функции $l(x)$ можно воспользоваться теоремой о среднем: $\Delta S = l(\bar{x})\Delta x$, где точка $\bar{x} \in [x; x + \Delta x]$. Среднее давление на рассматриваемый участок

$$p_{\text{ср}} = \frac{\Delta F(x)}{\Delta S} = \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{l(\bar{x})\Delta x}.$$

Несложно убедиться, что полученная формула справедлива и при $\Delta x < 0$ (в этом случае $\bar{x} \in [x + \Delta x; x]$). Переходя к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$, получаем для давления жидкости $p(x)$ следующую формулу:

$$p(x) = \frac{F'(x)}{l(x)}.$$

Эту формулу можно записать в виде $F'(x) = p(x)l(x)$. После интегрирования полученного равенства и применения формулы

Ньютона – Лейбница, находим

$$F = F(b) = F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x) dx = \int_a^b p(x)l(x) dx.$$

Задача 2. Рассмотрим декартову систему координат с осью Oz , направленной вдоль оси вращения шара, и центром, совпадающим с центром шара. Кинетическая энергия шара Ω

$$E = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho v^2 dx dy dz,$$

где v – модуль векторного поля скоростей шара. Переходя к цилиндрическим координатам $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ и учитывая, что $v = \omega r$, получаем:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r dr \int_{-\sqrt{R^2-r^2}}^{\sqrt{R^2-r^2}} \rho(\omega r)^2 dz = \\ &= \frac{1}{2} \rho \omega^2 \cdot 2\pi \int_0^R r^3 dr \int_{-\sqrt{R^2-r^2}}^{\sqrt{R^2-r^2}} dz = 2\pi \rho \omega^2 \int_0^R r^3 \sqrt{R^2 - r^2} dr. \end{aligned}$$

Список литературы

1. Орловский Д. Г. Неопределенный интеграл. Практикум. – СПб.: Лань, 2006.
2. Зорич В. А. Математический анализ, Т.1. – М.: Наука, 1981.
3. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, Т.2. – М.: Наука, 1969.
4. Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа, Т.1. – М.: Высшая школа, 1981.
5. Никольский С. М. Курс математического анализа, Т.1. – М.: Наука, 1983.
6. Виноградова И. А., Олехник С. Н., Садовничий В. А. Задачи и упражнения по математическому анализу. Кн.1, Кн.2. – М.: Высшая школа, 2000.
7. Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – М.: Наука, 1990.
8. Ляшко И. И., Боярчук А. К., Гай Я. Г., Головач Г. П. Справочное пособие по высшей математике. Т.1. – М.: Едиториал, УРСС, 2001.
9. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды, Элементарные функции. – Москва.: Наука, 1981.

Предметный указатель

- Астроида, 70, 183, 190
Центр тяжести, 221
Цепная линия, 99
Циклоида, 87, 190, 233
Циссоида, 18
Дуга эллипса, 97
Эллипс, 180
Эллипсоид, 117
Эволюта эллипса, 84
Формула Симпсона, 114, 268
Формула прямоугольников, 267
Формула трапеций, 267
Геометрический момент, 206, 210, 217
Гиперболоид, 118
Интеграл вероятностей, 285
Кардиоида, 45, 91, 157, 194, 232
Катеноид, 184
Константа Каталана, 277
Лемниската, 44, 69, 161, 195
Логарифмическая спираль, 91
Момент инерции, 205, 210, 217
Моменты, 205, 210, 217
Параболический сегмент, 5
Параболоид вращения, 112
Первая теорема Гульдена, 221
Площадь эллипса, 12, 16
Погрешность округления, 272
Полусфера, 236
Полушар, 227
Радиус инерции, 212
Развертка окружности, 87
Спираль Архимеда, 90, 169
Статический момент, 205, 210, 217
Шаровой сектор, 154
Трактриса, 20, 81, 187
Трилистник, 46
Усеченный конус, 110
Вторая теорема Гульдена, 222

Содержание

Предисловие	3
Глава 6. Площадь фигуры	4
6.1. Площадь криволинейного прямоугольника	4
6.2. Площадь фигуры, ограниченной параметрическими кривыми	29
6.3. Площадь в полярных координатах	44
Глава 7. Длина дуги кривой	77
7.1. Длина дуги в прямоугольных координатах	77
7.2. Длина дуги параметрической кривой	84
7.3. Длина дуги в полярных координатах	90
7.4. Разные задачи	77
Глава 8. Объем тела	105
8.1. Объем тела по известным поперечным сечениям	105
8.2. Объем тела вращения	129
Глава 9. Площадь поверхности вращения	175
Глава 10. Вычисление моментов и центра тяжести	205
10.1. Вычисление моментов	205
10.2. Координаты центра тяжести	221
Глава 11. Задачи из механики и физики	237
Глава 12. Приближенное вычисление интегралов	267
Решения и ответы к задачам	295
Список литературы	297
Предметный указатель	298

Дмитрий Германович Орловский

Определенный интеграл. Практикум

Часть 2

Учебное пособие

Редактор Н. В. Шумакова

Оригинал-макет изготовлен Д. Г. Орловским

Подписано в печать 10.12.2009. Формат 60x84 1/16

Печ. л. 18,75. Уч.-изд. л. 18,75. Тираж 500 экз.

Изд. № 1/1/666. Заказ № 13

Национальный исследовательский ядерный университет
„МИФИ“. 115409, Москва, Каширское ш., 31

ООО „Полиграфический комплекс „Курчатовский“.
144000, Московская область, г. Электросталь, ул. Красная, д. 42