НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

С.В. Мустяца, А.П. Горячев

ЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Методические рекомендации

Москва 2010

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

С.В. Мустяца, А.П. Горячев

ЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Методические рекомендации

Под редакцией доцента А.П. Горячева

Москва 2010

Оглавление

Введение
Основные понятия

Интегральным уравнением называется уравнение, содержащее неизвестную функцию под знаком интеграла. Рассматриваются только *линейные уравнения*, т.е. уравнения, в которые неизвестные функции входят линейно.

Линейным интегральным уравнением Вольтерры 1-го рода называется уравнение

$$\int_a^x K(x,t)\, y(t)\, dt = f(x). \qquad (В.1)$$

Здесь $y(x)$ – искомая функция, а $K(x,t)$ и $f(x)$ – известные функции, определенные соответственно в треугольнике $\Delta = \{(x,t): a \le t \le x \le b\}$ и на отрезке $[a,b]$. Функция $K(x,t)$ называется *ядром* интегрального уравнения (В.1), функция $f(x)$ называется *свободным членом* этого уравнения. *Решением* интегрального уравнения (В.1) называется всякая функция $y(x)$, $x \in [a,b]$, подстановка которой в это уравнение обращает его в тождество.

Уравнение Вольтерры (В.1) называется *однородным*, если $f(x) \equiv 0$ на отрезке $[a,b]$. В противном случае это уравнение называется *неоднородным*.

Линейным интегральным уравнением Вольтерры 2-го рода называется уравнение

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)\, y(t)\, dt\,, \qquad (В.2)$$

где λ – числовой параметр.

Вопрос о существовании и единственности решения уравнений (В.1), (В.2) решается разными способами в зависимости от свойств ядра и свободного члена, а также от того, в каком классе функций ищется решение. Пусть функции $K(x,t)$ и $f(x)$ непрерывны в своей области определения. При этом условии уравнение Вольтерры 2-го рода (В.2) имеет единственное решение при любом значении параметра λ в классе функций, непрерывных на отрезке $[a,b]$. В отличие от уравнений Вольтерры 2-го рода, решение уравнения Вольтерры 1-го рода (В.1) существует, когда свободный член $f(x)$ и ядро $K(x,t)$ удовлетворяют ряду дополнительных условий. Если функции $f(x)$ и $K(x,t)$ имеют непрерывные производные $f'(x)$ и $\frac{\partial K(x,t)}{\partial x}$, $f(a) = 0$ и $K(x,x) \neq 0$ всюду на $[a,b]$, то уравнение (В.1) сводится к уравнению Вольтерры 2-го рода и, следовательно, имеет единственное непрерывное решение.

Линейным интегральным уравнением Фредгольма 2-го рода называется уравнение вида

$$y(x) - \lambda \int_a^b K(x,t)\, y(t)\, dt = f(x), \tag{В.3}$$

линейным интегральным уравнением Фредгольма 1-го рода называется уравнение вида

$$\int_a^b K(x,t)\, y(t)\, dt = f(x). \tag{В.4}$$

В (В.3), (В.4) $y(x)$ – искомая функция; *ядро* $K(x,t)$ и *свободный член* $f(x)$ предполагаются заданными соответственно в квадрате $\Omega = \{a \leq x,\ t \leq b\}$ и на отрезке $[a,b]$; λ – числовой параметр.

Если $f(x) \equiv 0$ на отрезке $[a,b]$, то уравнение Фредгольма 2-го рода (В.3) называется *однородным*, в противном случае это уравнение называется *неоднородным*. *Решением* интегрального уравнения Фредгольма (В.3) или (В.4) называется всякая функция $y(x)$, $x \in [a,b]$, обращающая соответствующее уравнение в тождество.

Будем предполагать, что пределы интегрирования a и b в (В.3) и (В.4) – конечные числа, а функции $K(x,t)$ и $f(x)$ или непрерывны в своей области определения, или, в более общем случае, удовлетворяют условиям:

$$\int_a^b \int_a^b |K(x,t)|^2 dx\, dt = B_K^2 < +\infty, \tag{В.5}$$

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx < +\infty. \tag{В.6}$$

В отличие от уравнений Вольтерры 2-го рода, существование и единственность решения уравнения Фредгольма (В.3) существенно зависят от значения параметра λ (см., в частности, раздел 3 настоящей работы).

1. Интегральные уравнения Вольтерры

Рассмотрим линейное интегральное уравнение Вольтерры 2-го рода (В.1):

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)\, y(t)\, dt. \tag{1.1}$$

В некоторых случаях решение уравнение Вольтерры 2-го рода может быть сведено к решению некоторой задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. Укажем два способа, посредством которых это может быть сделано.

Случай 1. Если в исходном интегральном уравнении (1.1) ядро $K(x,t)$ и свободный член $f(x)$ непрерывно дифференцируемы достаточное количество раз, то уравнение (1.1) может быть продифференцировано (один или несколько раз), что позволяет в ряде случаев свести его к задаче Коши для некоторого линейного дифференциального уравнения.

Пример 1.1. Решить интегральное уравнение

$$y(x) = \cos x + \int_0^x \sin\,(x-t)\ y(t)\,dt\,. \tag{1.2}$$

Продифференцируем дважды интегральное уравнение (1.2):

$$y\,'(x) = -\sin x + \int_0^x \cos\,(x-t)\ y(t)\,dt, \tag{1.3}$$

$$y\,''(x) = -\cos x + y(x) - \int_0^x \sin\,(x-t)\ y(t)\,dt. \tag{1.4}$$

Исключая из уравнений (1.2), (1.4) интеграл $\int_0^x \sin\,(x-t)\ y(t)\,dt$, получим для искомой функции $y(x)$ дифференциальное уравнение $y''(x) = 0$, общее решение которого имеет вид $y(x) = C_1\,x + C_2$. Из (1.2) и (1.3) находим начальные условия:

$$y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$$

Подставив общее решение в начальные условия, получим значения констант $C_1 = 0, C_2 = 1$. Следовательно, $y(x)\ \equiv 1$.

Рассмотренный прием всегда приводит к цели в том случае, когда ядро $K(x,t)$ имеет вид многочлена по степеням бинома $(x-t)$.

Пример 1.2. Решить интегральное уравнение

$$y(x) = \cos x - \int_0^x (x-t)\,y(t)dt. \tag{1.5}$$

Последовательно дифференцируя интегральное уравнение (1.5), получим

$$y\,'(x) = -\sin x - \int_0^x y(t)dt, \tag{1.6}$$

$$y\,''(x) = -\cos x - y(x). \tag{1.7}$$

Перепишем уравнение (1.7):

$$y\,''(x) + y(x) = -\cos x. \tag{1.8}$$

Общее решение уравнения (1.8) имеет вид:

$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x - 0{,}5\,x \sin x. \tag{1.9}$$

Начальные условия при $x = 0$ найдем из (1.5), (1.6):

$$y(0) = 1, \; y'(0) = 0. \qquad (1.10)$$

Подставив общее решение (1.9) в начальные условия (1.10), получим $C_1 = 1, C_2 = 0$, следовательно,

$$y(x) = \cos x - \; 0{,}5\, x \sin x,$$

что и является решением исходного интегрального уравнения.

Случай 2. Пусть исходное интегральное уравнение (1.1) имеет вид

$$y(x) = \; f(x) + \int_a^x (\textstyle\sum_{k=1}^n a_k\,(x)\, b_k(t))\, y(t)\, dt. \qquad (1.11)$$

Ядро $K(x,t)$ интегрального уравнения (1.11), представимое конечной суммой вида

$$K(x,t) = \; \textstyle\sum_{k=1}^n a_k\,(x)\, b_k(t), \qquad (1.12)$$

называется *вырожденным* ядром (а уравнение (1.11) – *уравнением с вырожденным ядром*). Совокупность функций $\{a_k\,(x)\}_{k=1}^n$ и $\{b_k\,(x)\}_{k=1}^n$ будем считать состоящими из непрерывных и линейно независимых на отрезке $[a,b]$ функций. В противном случае, среди $\{a_k\,(x)\}_{k=1}^n$ (соответственно $\{b_k\,(x)\}_{k=1}^n$) можно выделить линейно независимую на отрезке $[a,b]$ систему функций и выразить через нее остальные функции. Запишем уравнение (1.11) следующим образом:

$$y(x) = \; f(x) + \; \textstyle\sum_{k=1}^n a_k\,(x) \int_a^x \; b_k(t)\, y(t)\, dt. \qquad (1.13)$$

Введем функции

$$\begin{aligned} u_1(x) &= \; \int_a^x \; b_1(t)\, y(t)\, dt\,, \\ &\ldots, \\ u_n(x) &= \; \int_a^x \; b_n(t)\, y(t)\, dt. \end{aligned} \qquad (1.14)$$

После подстановки функций $u_k(x)$ (1.14) в (1.13) заключаем, что решение интегрального уравнения (1.13) имеет вид

$$y(x) = \; f(x) + \; \textstyle\sum_{k=1}^n a_k\,(x)\; u_k\,(x). \qquad (1.15)$$

Дифференцируя соотношения (1.14) и подставляя вместо $y(x)$ выражения (1.15), получаем для неизвестных функций $u_k(x)$ систему линейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} u'_1(x) &= \; b_1(x) f(x) + \; b_1(x) \textstyle\sum_{k=1}^n \; a_k\,(x)\; u_k\,(x), \\ &\ldots, \\ u'_n(x) &= \; b_n(x) f(x) + \; b_n(x) \textstyle\sum_{k=1}^n \; a_k\,(x)\; u_k\,(x). \end{aligned}$$

Из (1.14) при $x = 0$ находим начальные условия: $u_1(0) = u_2(0) = = \dots = u_n(x) = 0$. Определив функции $u_k(x)$ и подставив их в (1.15), получим решение $y(x)$ интегрального уравнения (1.11).

Пример 1.3. Решить интегральное уравнение

$$y(x) = 1 - \int_0^x \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} x}\, y(t)dt.$$

Полагая $u(x) = \int_0^x \operatorname{sh} t\, y(t)\, dt$, получим

$$y(x) = 1 - \frac{1}{\operatorname{ch} x}\, u(x).$$

Следовательно,

$$u(x) = \int_0^x \operatorname{sh} t \left(1 - \frac{1}{\operatorname{ch} t}\, u(t)\right) dt. \tag{1.16}$$

Дифференцируя (1.16), получим линейное дифференциальное уравнение первого порядка относительно $u(x)$:

$$u'(x) = \operatorname{sh} x \left(1 - \frac{1}{\operatorname{ch} x}\, u(x)\right)$$

или

$$u'(x) + \operatorname{th} x\, u(x) = \operatorname{sh} x. \tag{1.17}$$

Подстановка общего решения уравнения (1.17)

$$u(x) = \frac{1}{\operatorname{ch} x}\left(\frac{\operatorname{sh}^2 x}{2} + C_1\right)$$

в начальное условие $u(0) = 0$, дает значение $C_1 = 0$ и, следовательно,

$$u(x) = \frac{\operatorname{sh}^2 x}{2 \operatorname{ch} x},$$

$$y(x) = 0{,}5\left(1 + \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}\right).$$

Варианты домашних заданий

Решить интегральное уравнение, сведя его предварительно к обыкновенному дифференциальному уравнению:

1.1. $y(x) = \frac{1}{1+x} + \int_0^x \sin(x-t) y(t)dt.$

1.2. $y(x) = x\, e^{2x} + 2\int_0^x \cos(x-t) y(t)dt.$

1.3. $y(x) = 2 - \int_0^x \frac{\sin t}{\cos x}\, y(t)dt.$

1.4. $y(x) = x^2 - 2\int_0^x \frac{t}{1+x^2} y(t)dt.$

1.5. $y(x) = 1 + \int_0^x ((x-t)^2 - (x-t))\, y(t)dt.$

1.6. $y(x) = 4e^x + 3x - 4 - \int_0^x (x-t)y(t)dt.$

1.7. $y(x) = \sin x + 2\int_0^x e^{-(x-t)}\, y(t)dt.$

1.8. $y(x) = \frac{1}{1+x^2} + \int_0^x \sin(x-t)y(t)dt.$

1.9. $y(x) = e^{-x}\cos x - \int_0^x e^{-(x-t)}\cos x\, y(t)dt.$

1.10. $y(x) = x - 1 + \int_0^x (x-t)y(t)dt.$

1.11. $y(x) = \sin x + \int_0^x \sin(x-t)\, y(t)dt.$

1.12. $y(x) = x + 2\sin x - 1 - \int_0^x (x-t)y(t)dt.$

1.13. $y(x) = \sin x + \frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2 y(t)\, dt.$

1.14. $y(x) = \mathrm{ch}x - \int_0^x \mathrm{sh}(x-t)y(t)dt.$

1.15. $y(x) = 1 + \int_0^x \frac{\mathrm{ch}t}{\mathrm{ch}x} y(t)dt.$

1.16. $y(x) = x + \int_0^x (4\sin(x-t) - x + t)dt.$

1.17. $y(x) = 1 + \int_0^x \frac{2t}{1+x^2} y(t)dt\,.$

1.18. $y(x) = -x - \int_0^x (x-t)y(t)dt.$

1.19. $y(x) = e^x \sin 2x + 2\int_0^x \cos(x-t)\, y(t)dt.$

1.20. $y(x) = (x - 3\cos x)(1 + 3\sin x) + 3\int_0^x e^{(x-t)}\sin x\; y(t)dt.$

1.21. $y(x) = -\frac{\sqrt{x}(2+\ln x)}{2} + \int_2^x (1+\ln x)\frac{y(t)}{t\ln t}dt.$

1.22. $y(x) = \cos x - \int_0^x (x-t)y(t)dt.$

1.23. $y(x) = xe^{3x} + 10\int_0^x \sin(x-t)\, y(t)dt.$

1.24. $y(x) = (x^2 + 3x + 1)e^{\cos x} - \int_0^x e^{(x-t)}\sin x\; y(t)dt.$

1.25. $y(x) = \cos x - x - \int_0^x (x-t)y(t)dt.$

1.26. $y(x) = (x^2 - 1)e^x + 2\int_0^x \cos(x-t)\; y(t)dt.$

1.27. $y(x) = x^2(3\ln x - 1) + \int_2^x \frac{y(t)}{x\ln t}\, dt.$

1.28. $y(x) = e^x\cos 2x - 3\int_0^x \sin(x-t)\, y(t)dt.$

1.29. $y(x) = \sin\frac{x}{2}\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2} + \int_{\frac{\pi}{3}}^x \frac{1}{2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{t}{2}} y(t)dt.$

1.30. $y(x) = x\ln x\, 2^{x\ln x} + \int_2^x (1+\ln t)\frac{y(t)}{x\ln x}\, dt.$

2. Резольвента интегрального уравнения Вольтерры

Рассмотрим интегральное уравнение Вольтерры 2-го рода

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)\, y(t)\, dt\,. \tag{2.1}$$

Ядро $K(x,t)$ непрерывно в $\Delta = \{(x,t): a \le t \le x \le b\}$, свободный член $f(x)$ – на отрезке $[a,b]$. Предполагая, что λ фиксировано, будем искать решение (2.1) методом последовательных приближений, взяв, например, в качестве нулевого приближения $y_0(x) = f(x)$ (в качестве нулевого приближения $y_0(x)$ можно взять любую непрерывную функцию на отрезке $[a,b]$). Тогда получим

$$y_1(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)\, f(t) dt = f(x) + \lambda \int_a^x K_1(x,t)\, f(t)\, dt,$$

$$K_1(x,t) = K(x,t);$$

$$y_2(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t) y_1(t)\, dt =$$

$$= f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t) f(t)\, dt + \lambda^2 \int_a^x K(x,s)\left(\int_a^s K_1(s,t) f(t) dt\right) ds =$$

$$= f(x) + \lambda \int_a^x K_1(x,t) f(t) dt + \lambda^2 \int_a^x \left(\int_t^x K(x,s) K_1(s,t) ds\right) f(t) dt =$$

$$= f(x) + \lambda \int_a^x K_1(x,t) f(t) dt + \lambda^2 \int_a^x K_2(x,t) f(t) dt,$$

$$K_2(x,t) = \int_t^x K(x,s) K_1(s,t) ds.$$

Аналогично устанавливается, что

$$y_n(x) = f(x) + \sum_{j=1}^n \lambda^j \int_a^x K_j(x,t) f(t)\, dt =$$

$$= f(x) + \lambda \int_a^x \left(\sum_{j=1}^n \lambda^{j-1} K_j(x,t)\right) f(t) dt, \tag{2.2}$$

где $K_1(x,t) = K(x,t)$,

$$K_j(x,t) = \int_t^x K(x,s) K_{j-1}(s,t) ds\,, \quad j = 2, 3, \ldots. \tag{2.3}$$

Ядра $K_j(x,t)$ называются *повторными* или *итерированными*.

Можно установить, что если ядро $K(x,t)$ непрерывно, то ряд

$$\sum_{j=1}^\infty \lambda^{j-1} K_j(x,t) \tag{2.4}$$

при любых фиксированных значениях λ сходится (равномерно относительно $(x,t) \in \Delta = \{(x,t): a \le t \le x \le b\}$) к некоторой функции $R(x,t,\lambda)$, называемой *резольвентой* ядра $K(x,t)$. Следовательно, соотношение (2.2) в пределе при $n \to \infty$ переходит в формулу

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^x R(x,t,\lambda)\, f(t)\, dt, \tag{2.5}$$

выражающую решение интегрального уравнения (2.1) через резольвенту.

Пример 2.1. Найти резольвенту $R\,(x,t,\lambda)$ ядра $K\,(x,t) = x$ и, используя ее, решить интегральное уравнение

$$y(x) = x^3 + \int_0^x x\, y(t)dt.$$

Из рекуррентных соотношений (2.3) получаем

$$K_1(x,t) = x,$$

$$K_2(x,t) = \int_t^x K(x,s)K_1(s,t)ds = \int_t^x x\, s\, ds = x\,\frac{x^2-t^2}{2},$$

$$K_3(x,t) = \int_t^x K(x,s)K_2(s,t)ds = \int_t^x x\, s\frac{s^2-t^2}{2}\, ds = x\,\frac{1}{2}\left(\frac{x^2-t^2}{2}\right)^2.$$

Можно доказать (например, методом математической индукции), что

$$K_j(x,t) = x\,\frac{1}{(j-1)!}\left(\frac{x^2-t^2}{2}\right)^{j-1}, j = 1, 2, \ldots$$

Подставляя это выражение для итерированных ядер в формулу (2.4), найдем резольвенту

$$R\,(x,t,\lambda) = x\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\lambda^{j-1}}{(j-1)!}\left(\frac{x^2-t^2}{2}\right)^{j-1} = x\,e^{\lambda\frac{x^2-t^2}{2}}. \qquad (2.7)$$

С помощью резольвенты (2.7) найдем решение данного интегрального уравнения (2.6). В рассматриваемом случае $\lambda = 1$ и $f(x) = x^3$, поэтому на основании (2.5) получаем

$$y(x) = x^3 + \int_0^x x\, e^{\frac{x^2-t^2}{2}} t^3 dt = x^3 - x\, e^{\frac{x^2}{2}}\int_0^x t^2\, d e^{\frac{-t^2}{2}} =$$

$$= 2\,x\left(e^{\frac{x^2}{2}} - 1\right).$$

Варианты домашних заданий

<u>Найти резольвенту для интегрального уравнения Вольтерры со следующим ядром:</u>

2.1. $K(x,t) = \dfrac{2t^2-t+1}{2x^2-x+1}\, 2^{(\operatorname{ch} x - \operatorname{ch} t)}$.

2.2. $K(x,t) = (t-x)e^{(\operatorname{sh} x - \operatorname{sh} t)}$, при $\lambda = e^2$.

2.3. $K(x,t) = x^{0,9}\, t^{1,1}$.

2.4. $K(x,t) = \dfrac{10-\sin t}{10-\sin x}\, 8^{(t^2-x^2)}$.

2.5. $K(x,t) = (x-t)2^{(\sin x - \sin t)}$, при $\lambda = 4$.

2.6. $K(x,t) = x^{\frac{1}{8}} t^{\frac{1}{4}}$.

2.7. $K(x,t) = \frac{t^2+t+1}{x^2+x+1}$.

2.8. $K(x,t) = (t-x)7^{(\sin t - \sin x)}$, при $\lambda = 49$.

2.9. $K(x,t) = x^2 t^2 e^{\frac{t^5-x^5}{5}}$.

2.10. $K(x,t) = 2^{(\mathrm{sh} x - \mathrm{sh} t)}$.

2.11. $K(x,t) = (x-t)e^{(x-t)}$, при $\lambda = 1$.

2.12. $K(x,t) = x\,t$.

2.13. $K(x,t) = \frac{2t^2+t+1}{2x^2+x+1}$.

2.14. $K(x,t) = (t-x)e^{(x^4-t^4)}$, при $\lambda = 1$.

2.15. $K(x,t) = \frac{1+\mathrm{ch}\, t}{1+\mathrm{ch}\, x} e^{2(x-t)}$.

2.16. $K(x,t) = x^{\frac{1}{3}} t^{\frac{2}{3}}$.

2.17. $K(x,t) = x\,t^2 e^{\frac{t^4-x^4}{4}}$.

2.18. $K(x,t) = (x-t)e^{(x^5-t^5)}$, при $\lambda = 1$.

2.19. $K(x,t) = x^2\, 0{,}3^{(x^2-t^2)}$.

2.20. $K(x,t) = x^{0{,}7}\, t^{0{,}3}$.

2.21. $K(x,t) = \frac{t^2+2t+3}{x^2+2x+3} e^{(t-x)}$.

2.22. $K(x,t) = x^3$.

2.23. $K(x,t) = \frac{t^2-t+1}{x^2-x+1}$.

2.24. $K(x,t) = (x-t)5^{(\cos t - \cos x)}$, при $\lambda = 25$.

2.25. $K(x,t) = t\, e^{\frac{x^2-t^2}{2}}$.

2.26. $K(x,t) = \frac{3+\sin x}{3+\sin t} e^{(\sin x - \sin t)}$.

2.27. $K(x,t) = 3^{(\mathrm{ch}\, x - \mathrm{ch}\, t)}$.

2.28. $K(x,t) = x^{\frac{1}{2}} t^{\frac{1}{3}}$.

2.29. $K(x,t) = \frac{t^4+1}{x^4+1}$.

2.30. $K(x,t) = \frac{\mathrm{ch}\, t - 0{,}5}{\mathrm{ch}\, x - 0{,}5}$.

3. Интегральные уравнения Фредгольма. Характеристические числа и собственные функции

Рассмотрим однородное уравнение Фредгольма 2-го рода

$$y(x) - \lambda \int_a^b K(x,t)\, y(t)\, dt = 0. \qquad (3.1)$$

Пределы интегрирования a и b в (3.1) – конечные числа, функция $K(x,t)$ непрерывна в своей области определения $\Omega = \{a \le x,\ t \le b\}$ или удовлетворяет условию (В.5).

Уравнение (3.1) имеет очевидное решение $y(x) \equiv 0$, которое называют *нулевым* (*тривиальным*) решением. Значения параметра λ, при которых однородное уравнение (3.2) имеет ненулевые (нетривиальные) решения $y(x) \not\equiv 0$, называют *характеристическими числами* этого уравнения или ядра $K(x,t)$, а каждое ненулевое решение – *собственной функцией* уравнения или ядра $K(x,t)$, соответствующей характеристическому числу λ. Каждому характеристическому числу λ соответствует конечное число линейно независимых собственных функций. Число таких линейно независимых функций называется *рангом* или *кратностью* характеристического числа. $\lambda = 0$ не является характеристическим числом, так как при $\lambda = 0$ уравнение (3.1) имеет лишь нулевое решение. Если λ – характеристическое число, то число $\mu = {}^1/_\lambda$ называется собственным числом интегрального уравнения. При этом $\mu \neq 0$ (отметим, что $\mu = 0$ может быть собственным числом бесконечной кратности).

Рассмотрим однородное уравнение Фредгольма 2-го рода с вырожденным ядром:

$$y(x) - \lambda \int_a^b \sum_{k=1}^n a_k(x)\, b_k(t)\, y(t)\, dt = 0, \qquad (3.2)$$

где, как и раньше, $\{a_k(x)\}_{k=1}^n$ и $\{b_k(x)\}_{k=1}^n$ – системы линейно независимых на отрезке $[a,b]$ функций. Перепишем (3.2) в виде

$$y(x) = \lambda \sum_{k=1}^n a_k(x) \int_a^b b_k(t) y(t)\, dt \qquad (3.3)$$

и введем обозначения

$$\int_a^b b_k(t) y(t)\, dt = C_k \ (k = 1, 2, \dots, n). \qquad (3.4)$$

Тогда (3.3) примет вид

$$y(x) = \lambda \sum_{k=1}^n C_k\, a_k(x) \qquad (3.5)$$

где C_k – неизвестная постоянная (так как функция $y(x)$ неизвестна), и решение интегрального уравнения с вырожденным ядром свелось к нахождению постоянных C_k $(k = 1, 2, ..., n)$. Подставляя выражение (3.5) в интегральное уравнение (3.2), получим

$$\sum_{m=1}^{n}\left\{C_m - \int_a^b b_m(t)[\lambda \sum_{k=1}^{n} C_k a_k(t)]dt\right\} a_m(x) = 0. \quad (3.6)$$

Так как функции из (3.6) линейно независимы, то

$$C_m - \lambda\sum_{k=1}^{n} a_{km} C_k = 0, \ (m = 1, 2, ..., n), \quad (3.7)$$

где $a_{km} = \int_a^b a_k(t)b_m(t)dt$, $\quad (3.8)$

или в развернутом виде

$$\begin{cases} (1 - \lambda a_{11}) C_1 - \lambda a_{12} C_2 - ... - \lambda a_{1n} C_n = 0, \\ -\lambda a_{21} C_1 + (1 - \lambda a_{22}) C_2 - ... - \lambda a_{2n} C_n = 0, \\ ..., \\ -\lambda a_{n1} C_1 - \lambda a_{n2} C_2 - ... + (1 - \lambda a_{nn}) C_n = 0. \end{cases} \quad (3.9)$$

Таким образом, в случае уравнения с вырожденным ядром характеристические числа λ являются корнями алгебраического уравнения:

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} (1 - \lambda a_{11}) & -\lambda a_{12} & ... & -\lambda a_{1n} \\ -\lambda a_{21} & (1 - \lambda a_{22}) & ... & -\lambda a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ -\lambda a_{n1} & -\lambda a_{n2} & ... & (1 - \lambda a_{nn}) \end{vmatrix} = 0. (3.10)$$

Определитель $D(\lambda)$ (3.10) есть многочлен относительно λ степени не выше n, следовательно, имеет не более n различных значений. Если уравнение (3.10) имеет p корней $(1 \le p \le n)$, то интегральное уравнение имеет p характеристических чисел. Соответствующая каждому характеристическому числу λ_m $(m = = 1, 2, ... p)$ однородная система линейных алгебраических уравнений (3.9) имеет r_m линейно независимых вектор-решений:

$$\left(C_1^{(m,l)}, C_2^{(m,l)}, ..., C_n^{(m,l)}\right), \ l = 1, ..., r_m.$$

Функции

$$y_l^{(m)}(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k^{(m,l)} a_k(x) \quad (l = 1, ..., r_m)$$

являются нетривиальными решениями однородного интегрального уравнения (3.2) при значении $\lambda = \lambda_m$. Число таких линейно независимых собственных функций, отвечающих данному характеристическому числу λ_m, равно рангу r_m

характеристического числа λ_m. Нетрудно заметить, что любая линейная комбинация собственных функций, соответствующих одному и тому же характеристическому числу λ_m, также является собственной функцией рассматриваемого интегрального уравнения, отвечающей этому же числу λ_m. Общее решение однородного интегрального уравнения (3.2), соответствующее данному характеристическому числу λ_m, имеет вид:

$$y^{(m)}(x) = \sum_{l=1}^{r_m} \alpha_l\, y_l^{(m)}(x),$$

где α_l – произвольные постоянные.

Пример 3.1. Найти характеристические числа и собственные функции интегрального уравнения

$$y(x) - \lambda \int_0^1 (x\, e^t + 2\, t) y(t) dt = 0.$$

Перепишем уравнение в виде

$$y(x) = \lambda \int_0^1 (x\, e^t + 2\, t) y(t) dt.$$

Вводя обозначения

$$C_1 = \int_0^1 e^t\, y(t)\, dt\,; \qquad C_2 = \int_0^1 t\, y(t) dt, \tag{3.11}$$

будем иметь

$$y(x) = \lambda\, x\, C_1 + 2\, \lambda\, C_2. \tag{3.12}$$

Подставляя (3.12) в (3.11), получим линейную систему однородных уравнений

$$\begin{cases} C_1 \left(1 - \lambda \int_0^1 t\, e^t\, dt\right) \; - \; C_2\, 2\, \lambda \int_0^1 e^t\, dt = 0, \\ -C_1\, \lambda \int_0^1 t^2\, dt \; + \; C_2 \left(1 - 2\, \lambda \int_0^1 t\, dt\right) = 0, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} C_1 (1 - \lambda) - C_2\, 2\, \lambda\, (e - 1) = 0, \\ C_1\, \lambda/3 \; - C_2\, (1 - \lambda) \; = 0. \end{cases}$$

Из уравнения (3.10)

$$-(1 - \lambda)^2 + \frac{2}{3} \lambda^2\, (e - 1) = 0$$

находим следующие значения характеристических чисел

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{1 \pm \sqrt{\frac{2}{3}(e-1)}}$$

и соответствующие им собственные функции

$$y_{1,2}\, (x) = \sqrt{\frac{2}{3}\, (e - 1)}\, x\, \pm 1.$$

Однородное уравнение Фредгольма может вообще не иметь характеристических чисел и собственных функций, или же может не иметь вещественных характеристических чисел и собственных функций, но иметь комплексные.

Пример 3.2. Покажем, что однородное интегральное уравнение

$$y(x) - \lambda \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin t \ y(t)dt = 0$$

не имеет характеристических чисел и собственных функций.

Перепишем уравнение в виде

$$y(x) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin t \ y(t)dt \,.$$

Полагая $C = \int_{-\pi}^{\pi} \sin t \ y(t)dt$, получим

$$y(x) = \lambda x^2 C.$$

Подставляя $y(x)$ в выражение для C, получим

$$\left[1 - \lambda \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \sin t \ dt\right] C = 0. \qquad (3.13)$$

Так как $\int_{-\pi}^{\pi} t^2 \sin t \ dt = 0$, то уравнение (3.13) дает, что $C = 0$, и, следовательно, $y(x) \equiv 0$. Итак, данное однородное уравнение при любых значениях λ имеет только тривиальное решение $y(x) \equiv 0$, и, следовательно, оно не имеет характеристических чисел и собственных функций.

Рассмотрим линейное неоднородное уравнение Фредгольма 2-го рода (0.3):

$$y(x) - \lambda \int_{a}^{b} K(x,t)\, y(t)\, dt = f(x). \qquad (3.14)$$

Поставим вопрос о разрешимости уравнения (3.14) при различных значениях параметра λ. Пусть функция $K(x,t)$ непрерывна в Ω. Для интегральных уравнений Фредгольма имеет место так называемая *альтернатива Фредгольма*: либо интегральное уравнение (3.14) имеет единственное решение для любой функции $f(x)$ (из некоторого достаточно широкого класса), либо существует нетривиальное решение однородного уравнения (3.1).

Другими словами, если число не является характеристическим для однородного уравнения (3.1), то уравнение (3.14) имеет, и притом единственное, решение.

Проиллюстрируем теорему Фредгольма на примере интегрального уравнения с вырожденным ядром.

Пример 3.3. Исследовать решения интегрального уравнения в зависимости от значений параметра λ:

$$y(x) - \lambda \int_0^1 x\,(1+t)\,y(t)dt = x^2.$$

Имеем

$$y(x) = \lambda\, x\, C + x^2, \tag{3.15}$$

где $C = \int_0^1 (1+t)\,y(t)dt.$ (3.16)

Подставляя выражение (3.15) в (3.16), получим

$$C\left(1 - \lambda\,\frac{5}{6}\right) = \frac{7}{12}. \tag{3.17}$$

$\lambda = \frac{6}{5}$ является характеристическим числом соответствующего однородного уравнения. При любом $\lambda \neq \frac{6}{5}$ уравнение (3.17) имеет единственное решение $C = \frac{7}{2\,(6-5\,\lambda)}$, и

$$y(x) = \frac{7}{2\,(6-5\,\lambda)}\,x + x^2,\ \lambda \neq \frac{6}{5}.$$

Пример 3.4. Исследовать решения интегрального уравнения в зависимости от значений параметра λ:

$$y(x) - \lambda \int_0^1 (1+2\,x)\,t\,y(t)dt = 1 - \frac{3}{2}\,x.$$

Введем $C = \int_0^1 t\,y(t)dt$, тогда

$$y(x) = \lambda\,(1+2\,x)\,C + 1 - \frac{3}{2}\,x.$$

После подстановки $y(x)$ в выражение для C с учетом

$$\int_0^1 t\left(1 - \frac{3}{2}\,t\right)dt = \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{2}\Big|_0^1 = 0,$$

получим

$$\left(1 - \lambda\,\frac{7}{6}\right)C = 0.$$

При $\lambda = \frac{6}{7}$ ($\lambda = \frac{6}{7}$ – характеристическое число соответствующего однородного уравнения) решение интегрального уравнения имеет вид

$$y(x) = \frac{6}{7}\,(1+2\,x)\,C + 1 - \frac{3}{2}\,x,$$

где C – произвольная постоянная.

При $\lambda \neq \frac{6}{7}$ получаем, что $C = 0$ и исходное интегральное уравнение имеет единственное решение

$$y(x) = 1 - \frac{3}{2}\,x.$$

Варианты домашних заданий

Найти характеристические числа и собственные функции заданных интегральных уравнений с вырожденным ядром (ограничиться случаем вещественных характеристических чисел):

3.1. $y(x) - \lambda \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^2 \sin t + t^2 \cos x) y(t) dt = 0.$

3.2. $y(x) - \lambda \int_{0}^{\pi} \cos(x - t) y(t) dt = 0.$

3.3. $y(x) - \lambda \int_{-1}^{1} (9 - 19xt + 35x^2t^2) y(t) dt = 0.$

3.4. $y(x) - \lambda \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(x - t) y(t) dt = 0.$

3.5. $y(x) - \lambda \int_{0}^{1} (x + t) y(t) dt = 0.$

3.6. $y(x) - \lambda \int_{-\pi}^{\pi} (t^2 \sin x + x \sin^2 t) y(t) dt = 0.$

3.7. $y(x) - \lambda \int_{0}^{\pi} \sin(x + t) y(t) dt = 0.$

3.8. $y(x) - \lambda \int_{0}^{1} \left(x \sin 2\pi t - \frac{1}{2\pi}\right) y(t) dt = 0.$

3.9. $y(x) - \lambda \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x - t) y(t) dt = 0.$

3.10. $y(x) - \lambda \int_{0}^{1} (1 + 4xt - 5x^2t^2) y(t) dt = 0.$

3.11. $y(x) - \lambda \int_{0}^{\pi} \cos x \, \cos t \, y(t) dt = 0.$

3.12. $y(x) - \lambda \int_{0}^{\pi} x \sin t \, y(t) dt = 0.$

3.13. $y(x) - \lambda \int_{-1}^{1} |x| \, y(t) dt = 0.$

3.14. $y(x) - \lambda \int_{-1}^{1} (x^2 \operatorname{sh} t + t^2 \operatorname{ch} x) y(t) dt = 0.$

3.15. $y(x) - \lambda \int_{0}^{1} (1 - x^2) y(t) dt = 0.$

Исследовать решения заданных уравнений с вырожденным ядром при различных значениях параметра λ (ограничиться случаем вещественных характеристических чисел):

3.16. $y(x) - \lambda \int_{0}^{1} x \, y(t) dt = \sin 2\pi x.$

3.17. $y(x) - \lambda \int_{0}^{1} x \sin 2\pi t \, y(t) dt = x.$

3.18. $y(x) - \lambda \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} t \, y(t) dt = \operatorname{ctg} x.$

3.19. $y(x) - \lambda \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \arccos t \, y(t) dt = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$

3.20. $y(x) - \lambda \int_{0}^{\pi} \sin x \, \cos t \, y(t) dt = \cos x.$

3.21. $y(x) - \lambda \int_{-1}^{1} (1 + xt)\, y(t)dt = \sin \pi x.$

3.22. $y(x) - \lambda \int_{0}^{1} t \arcsin x\, y(t)dt = \arccos x.$

3.23. $y(x) - \lambda \int_{-1}^{1} (x + t)\, y(t)dt = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} x.$

3.24. $y(x) - \lambda \int_{0}^{\pi} \cos(x + t) y(t)dt = 1.$

3.25. $y(x) - \lambda \int_{-1}^{1} |x|\, y(t)dt = \cos \pi x.$

3.26. $y(x) - \lambda \int_{0}^{2\pi} \sin^2 x\ \sin^2 t\, y(t)dt = \cos x.$

3.27. $y(x) - \lambda \int_{0}^{\pi} (\cos^2 x \sin 2t + \cos^2 t \sin 2x)\, y(t)dt = \cos x.$

3.28. $y(x) - \lambda \int_{-1}^{1} (xt + t^2)\, y(t)dt = 5x^3.$

3.29. $y(x) - \lambda \int_{-1}^{1} x \arcsin t\, y(t)dt = 1.$

3.30. $y(x) - \lambda \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \cos^2 t\, y(t)dt = \sin x.$

4. Уравнения Фредгольма 2-го рода с симметричным ядром

Ядро $K(x,t)$ интегрального уравнения называется *симметричным*, если оно удовлетворяет условию $K(x,t) = K(t,x)$ для всех $(x,t) \in \Omega = \{a \le x,\ t \le b\}$. Для симметричных ядер, удовлетворяющих условию (0.5):

$$\int_a^b \int_a^b |K(x,t)|^2 dx\, dt = B_K^2 < +\infty,$$

справедливы следующие утверждения:

1. Симметричное ядро, отличное от тождественного нуля, имеет по крайней мере одно характеристическое число.

2. Характеристические числа симметричного ядра действительны, а собственные функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$, соответствующие различным характеристическим числам $\lambda_1 \neq \lambda_2$, ортогональны, т.е.

$$\int_a^b y_1(x) y_2(x) dx = 0.$$

Каждому характеристическому числу может отвечать лишь конечное число линейно независимых собственных функций.

На практике часто встречается случай, когда интегральное уравнение с симметричным ядром является решением некоторой однородной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения. В таких случаях нахождение характеристических чисел и собственных функций ядра сводится к решению указанной краевой задачи.

Пример 4.1. Найти характеристические числа и собственные функции ядра

$$K(x,t) = \begin{cases} -x-1, & 0 \le x \le t; \\ -t-1, & t \le x \le 1. \end{cases} \tag{4.1}$$

Заметим, что ядро (4.1) симметричное. Действительно, так как

$$K(t,x) = \begin{cases} -t-1, & 0 \le t \le x \le 1; \\ -x-1, & 0 \le x \le t \le 1, \end{cases}$$

то $K(x,t) = K(t,x)$ для любой пары (x,t).

Однородное интегральное уравнение

$$y(x) - \lambda \int_0^1 K(x,t)y(t)dt = 0$$

с ядром (4.1) запишем следующим образом:

$$y(x) = \lambda \left[-\int_0^x (t+1)\, y(t)dt - (x+1) \int_x^1 y(t)dt\right]. \tag{4.2}$$

Дважды продифференцируем (4.2):

$$y'(x) = -\lambda \int_x^1 y(t)\, dt,$$

$$y''(x) = \lambda\, y(x).$$

Число λ и функция $y(x)$ таковы, что

$$y''(x) - \lambda\, y(x) = 0. \tag{4.3}$$

Заметим, что

$$y'(0) - y(0) = 0,$$

$$y'(1) = 0. \tag{4.4}$$

Уравнение (4.3) и условия (4.4) образуют однородную краевую задачу, решая которую найдем характеристические числа и соответствующие им собственные функции исходного интегрального уравнения. Рассмотрим три случая.

1) $\lambda = 0$. Уравнение (4.3) принимает вид $y''(x) = 0$, его общее решение $y(x) = C_1 + C_2\, x$. Используя краевые условия (4.4), получим, что $C_1 = C_2 = 0$. Следовательно, краевая задача, а вместе с ней и уравнение (4.2) имеет лишь тривиальное решение $y(x) \equiv 0$, т.е. $\lambda = 0$ не является характеристическим числом. Это можно было сразу заметить из уравнения (4.2): если $\lambda = 0$, то $y(x) \equiv 0$.

2) Пусть $\lambda > 0$. Тогда $\lambda = k^2$, $k > 0$. Уравнение (4.3) принимает вид

$$y''(x) - k^2\, y(x) = 0,$$

его общее решение:

$$y(x) = C_1 e^{kx} + C_2 e^{-kx}.$$

Краевые условия (4.4) приводят к системе

$$(k-1)C_1 + (k+1)C_2 = 0,$$
$$e^k C_1 \quad - e^{-k} C_2 = 0.$$

Откуда

$$\begin{vmatrix} (k-1) & (k+1) \\ e^k & e^{-k} \end{vmatrix} = 0$$

или

$$k \operatorname{sh} k + \operatorname{ch} k = 0. \qquad (4.5)$$

В свою очередь (4.5) не имеет решений ($\operatorname{cth} k = -k, k > 0$).

3) Пусть $\lambda < 0$. Тогда $\lambda = -k^2$, $k > 0$. В этом случае (4.3) имеет вид

$$y''(x) - k^2 y(x) = 0,$$

его общее решение:

$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Краевые условия (4.4) приводят к системе:

$$\begin{aligned} C_1 \quad & - k\, C_2 &= 0,\\ \sin k\ C_1 \quad & - \cos k\ C_2 &= 0. \end{aligned} \qquad (4.6)$$

Откуда следует, что система (4.6) имеет нетривиальное решение в случае, если

$$\begin{vmatrix} 1 & -k \\ \sin k & -\cos k \end{vmatrix} = -\cos k + k \sin k = 0.$$

Следовательно, если k является корнем уравнения

$$k = \operatorname{ctg} k, \qquad (4.7)$$

то $\lambda = -k^2$ является характеристическим числом для заданного ядра (4.1). Из (4.6) и (4.7) получим следующее выражение для собственных функций:

$$\lambda = \lambda_k = -k^2,\ y_k(x) = \cos k(x-1),\ k = 1, 2, 3, \dots .$$

Варианты домашних заданий

<u>Для заданных симметричных ядер найти характеристические числа и соответствующие им собственные функции, сводя интегральное уравнение к однородной краевой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения:</u>

4.1. $$K(x,t) = \begin{cases} (x-2)(t+1), & 0 \le x \le t; \\ (t-2)(x+1), & t \le x \le 2. \end{cases}$$

4.2. $K(x,t) = \begin{cases} \cos 2t \sin 2x\ , \ 0 \le x \le t; \\ \cos 2x \sin 2t\ , \ t \le x \le \frac{\pi}{4}. \end{cases}$

4.3. $K(x,t) = \begin{cases} -\,e^{-t}\operatorname{ch} x\ , \ 0 \le x \le t; \\ -\operatorname{ch} t\ e^{-x}\ , \ t \le x \le 2. \end{cases}$

4.4. $K(x,t) = \begin{cases} (\pi \cos t + \sin t)\sin x\ , \ 0 \le x \le t; \\ (\pi \cos x + \sin x)\sin t\ , \ t \le x \le \pi. \end{cases}$

4.5. $K(x,t) = \begin{cases} (x+1)(t-3), \ 0 \le x \le t; \\ (t+1)(x-3), \ t \le x \le 1. \end{cases}$

4.6. $K(x,t) = \begin{cases} e^{\frac{x-t}{4}}\ , -4 \le x \le t; \\ e^{\frac{t-x}{4}}\ , \ t \le x \le 4. \end{cases}$

4.7. $K(x,t) = \begin{cases} (\operatorname{ctg}1 \sin t - \cos t)\sin x\ , -\pi \le x \le t; \\ (\operatorname{ctg}1 \sin x - \cos x)\sin t\ , \ t \le x \le \pi. \end{cases}$

4.8. $K(x,t) = \begin{cases} \cos 3t \sin 3x\ , \ 0 \le x \le t; \\ \cos 3x \sin 3t\ , \ t \le x \le \frac{\pi}{6}. \end{cases}$

4.9. $K(x,t) = \begin{cases} e^{t}\operatorname{sh} x\ , \ 0 \le x \le t; \\ e^{x}\operatorname{sh} t, \ t \le x \le 1. \end{cases}$

4.10. $K(x,t) = \begin{cases} \sin\left(3t - \frac{\pi}{4}\right)(\cos 3x + 6\sin 3x)\ , \ \frac{\pi}{6} \le x \le t; \\ \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)(\cos 3t + 6\sin 3t)\ , \ t \le x \le \frac{\pi}{3}. \end{cases}$

4.11. $K(x,t) = \begin{cases} x(t-1), \ 0 \le x \le t; \\ t(x-1), \ t \le x \le 1. \end{cases}$

4.12. $K(x,t) = \begin{cases} \operatorname{sh}(x-1)\operatorname{ch} t\ , \ 0 \le x \le t; \\ \operatorname{sh}(t-1)\operatorname{ch} x, \ t \le x \le 1. \end{cases}$

4.13. $K(x,t) = \begin{cases} \sin\frac{t}{2}\cos\frac{x}{2}\ , -\pi \le x \le t; \\ \sin\frac{x}{2}\cos\frac{t}{2}, \ t \le x \le \pi. \end{cases}$

4.14. $K(x,t) = \begin{cases} \sin\left(2t + \frac{\pi}{6}\right)\sin 2x\ , \ 0 \le x \le t; \\ \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)\sin 2t\ , \ t \le x \le \frac{\pi}{6}. \end{cases}$

4.15. $K(x,t) = \begin{cases} e^{t}\operatorname{ch} x\ , \ 0 \le x \le t; \\ e^{x}\operatorname{ch} t, \ t \le x \le 1. \end{cases}$

4.16. $K(x,t) = \frac{1}{2}\sin|x-t|\ , 0 \le x \le t \le \pi.$

4.17. $K(x,t)=\begin{cases}\frac{\sin(t-1)\sin x}{\sin 1}, & 0\le x\le t;\\ \frac{\sin t\sin(x-1)}{\sin 1}, & t\le x\le 1.\end{cases}$

4.18. $K(x,t)=\begin{cases}e^{x}\operatorname{sh} t, & 0\le x\le t;\\ e^{t}\operatorname{sh} x, & t\le x\le 2.\end{cases}$

4.19. $K(x,t)=\begin{cases}(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2})\cos\frac{t}{2}, & 0\le x\le t;\\ (\cos\frac{t}{2}-\sin\frac{t}{2})\cos\frac{x}{2}, & t\le x\le \pi.\end{cases}$

4.20. $K(x,t)=\begin{cases}e^{x}\operatorname{ch} t, & 0\le x\le t;\\ e^{t}\operatorname{ch} x, & t\le x\le 2.\end{cases}$

4.21. $K(x,t)=\begin{cases}-x, & 0\le x\le t;\\ -t, & t\le x\le 1.\end{cases}$

4.22. $K(x,t)=\begin{cases}\operatorname{ch}(x-1)\operatorname{sh} t, & 0\le x\le t;\\ \operatorname{ch}(t-1)\operatorname{sh} x, & t\le x\le 1.\end{cases}$

4.23. $K(x,t)=\begin{cases}(\sin 4t-4\cos 4t)\sin 4x, & 0\le x\le t;\\ (\sin 4x-4\cos 4x)\sin 4t, & t\le x\le \pi.\end{cases}$

4.24. $K(x,t)=\begin{cases}e^{\frac{t-x}{2}}, & 0\le x\le t;\\ e^{\frac{x-t}{2}}, & t\le x\le 2.\end{cases}$

4.25. $K(x,t)=\begin{cases}\sin\left(4x+\frac{\pi}{4}\right)\cos 4t, & \frac{\pi}{8}\le x\le t;\\ \sin\left(4t+\frac{\pi}{4}\right)\cos 4x, & t\le x\le \frac{\pi}{4}.\end{cases}$

4.26. $K(x,t)=\begin{cases}\sin\frac{x}{3}\cos\frac{t}{3}, & -\frac{3\pi}{2}\le x\le t;\\ \sin\frac{t}{3}\cos\frac{x}{3}, & t\le x\le \frac{3\pi}{2}.\end{cases}$

4.27. $K(x,t)=\begin{cases}(3\cos 3x-\sin 3x)\sin 3t, & 0\le x\le t;\\ (3\cos 3t-\sin 3t)\sin 3x, & t\le x\le \pi.\end{cases}$

4.28. $K(x,t)=\begin{cases}\operatorname{sh}(t-1)\operatorname{ch} x, & 0\le x\le t;\\ \operatorname{sh}(x-1)\operatorname{ch} t, & t\le x\le 1.\end{cases}$

4.29. $K(x,t)=\operatorname{sh}|x-t|,\ 0\le x\le t\le 1.$

4.30. $K(x,t)=\begin{cases}\sin\left(\frac{t}{3}+\frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{x}{3}, & 0\le x\le t;\\ \sin\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{t}{3}, & t\le x\le 3\pi.\end{cases}$

5. Функция Грина для краевой задачи

Рассмотрим следующую краевую задачу с однородными краевыми условиями:

$$\begin{cases} p_0(x)\, y'' + p_1(x)\, y' + p_2(x)\, y = f(x), \;\; a < x < b, \\ \alpha_1\, y'(a) + \beta_1\, y\,(a) = 0, \;\; \alpha_2\, y'(b) + \beta_2\, y\,(b) = 0. \end{cases} \tag{5.1}$$

Пусть функции $p_i(x)\,(i = 0, 1, 2)$ и $f(x)$ непрерывны при $a \le x \le b$, $p_0(x) \ne 0$. Рассмотрим случай, когда однородная краевая задача

$$\begin{cases} p_0(x)y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0, \;\; a < x < b, \\ \alpha_{1k}\, y'(a) + \beta_{1k} y\,(a) + \alpha_{2k} y'(b) + \beta_{2k} y\,(b) = 0\; (k = 1, 2) \end{cases} \tag{5.2}$$

имеет только тривиальное решение $y(x) \equiv 0$. Тогда существует, и притом единственная, функция $G(x, \xi)$, называемая функцией Грина, удовлетворяющая следующим требованиям:

1. $G(x, \xi)$ непрерывна в $\Pi = \{(x, \xi)\colon a \le x \le b, a \le \xi \le b\}$.

2. $G(x, \xi)$ как функция x, при любом $\xi \in (a, b)$ удовлетворяет однородному уравнению (5.2) при $x \ne \xi$.

3. $G(x, \xi)$ как функция переменной x, при любом $\xi \in (a, b)$ удовлетворяет граничным условиям задачи (5.2).

4. Первая производная $G(x, \xi)$ по x при любом $\xi \in (a, b)$ имеет при $x = \xi$ разрыв 1-го рода с величиной скачка, равной $\frac{1}{p_0(x)}$, т.е.

$$\left.\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial x}\right|_{x=\xi+0} - \left.\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial x}\right|_{x=\xi-0} = \frac{1}{p_0(x)}.$$

В этом случае решение краевой задачи (5.1) представимо в виде

$$y(x) = \int_a^b G(x, \xi) f(\xi) d\xi. \tag{5.3}$$

Построим функцию Грина $G(x, \xi)$ для однородной задачи (5.2). Пусть $y_1(x)$, $y_1(x)$ – линейно независимые решения уравнения (5.2). Так как функция $G(x, \xi)$ удовлетворяет однородному уравнению (5.2) при $x \ne \xi$ (условие 2), на интервалах $[a, \xi)$ и $(\xi, b]$ $G(x, \xi)$ должна иметь следующее представление:

$$G(x, \xi) = \begin{cases} a_1(\xi)\, y_1(x) + a_2(\xi)\, y_2(x) \text{ при } a \le x \le \xi, \\ b_1(\xi)\, y_1(x) + b_2(\xi)\, y_2(x) \text{ при } \xi \le x \le b, \end{cases} \tag{5.4}$$

где $a_1(\xi)$, $a_2(\xi)$, $b_1(\xi)$, $b_2(\xi)$ – некоторые функции от ξ. Непрерывность $G(x, \xi)$ (условие 1) и величина скачка производной (условие 4) при $x = \xi$ принимают вид:

$$\left(b_1(\xi)y_1(\xi) + b_2(\xi)y_2(\xi)\right) - \left(a_1(\xi)y_1(\xi) + a_2(\xi)y_2(\xi)\right) = 0,$$
$$\left(b_1(\xi)y_1'(\xi) + b_2(\xi)y_2'(\xi)\right) - \left(a_1(\xi)y_1'(\xi) + a_2(\xi)y_2'(\xi)\right) = \frac{1}{p_0(\xi)}.$$

Или

$$\begin{aligned} c_1(\xi)\, y_1(\xi) + c_2(\xi)\, y_2(\xi) &= 0, \\ c_1(\xi)\, y_1'(\xi) + c_2(\xi)\, y_2'(\xi) &= \frac{1}{p_0(\xi)}, \end{aligned} \qquad (5.5)$$

где $c_1(\xi) = b_1(\xi) - a_1(\xi)$, $c_2(\xi) = b_2(\xi) - a_2(\xi)$. Определитель системы (5.5) есть определитель Вронского $W\,(y_1, y_2)$ в точке $x = \xi$, следовательно, отличен от нуля. Поэтому система (5.5) однозначно определяет функции $c_1(\xi)$, $c_2(\xi)$. Для определения функций $a_1\,(\xi), a_2\,(\xi)$, $b_1(\xi)$ и $b_2\,(\xi)$ воспользуемся краевыми условиями (5.2).

Пример 5.1. Построить функцию Грина для краевой задачи:

$$\begin{aligned} &x\, y'' + y' = 0 \; (1 < x < e), \\ &y(1) = 0, \quad y'(e) = 0. \end{aligned} \qquad (5.6)$$

Покажем, что краевая задача (5.6) имеет лишь тривиальное решение $y(x) \equiv 0$. Обозначая $y'(x) = z\,(x)$, получим $x\, z'(x) + z =$ $= 0$, откуда $z = \frac{C_1}{x}$. Так как $x > 0$, то $\ln|x| = \ln x$, и, следовательно, $y(x) = C_1 \ln x + C_2$. Функция $G(x,\xi)$ удовлетворяет однородным условиям (5.6) только при $C_1 = C_2 = 0$, а значит $y(x) \equiv 0$, и функцию Грина (единственную) задачи (5.6) можно построить. Запишем выражение для функции Грина

$$G(x,\xi) = \begin{cases} a_1 \ln x + a_2 & \text{при } 1 \le x \le \xi, \\ b_1 \ln x + b_2 & \text{при } \xi \le x \le e. \end{cases}$$

Из непрерывности при $x = \xi$ получим

$$(b_1 - a_1) \ln \xi + (b_2 - a_2) = 0.$$

Скачок $G_x'(x,\xi)$ в точке $x = \xi$ равен $\frac{1}{\xi}$, следовательно, $(b_1 -$ $- a11\xi = 1\xi$. Положим

$$c_1 = b_1 - a_1, \; c_2 = b_2 - a_2.$$

Тогда будем иметь

$$\begin{cases} c_1 \ln \xi + c_2 = 0, \\ \quad c_1 = 1. \end{cases}$$

Откуда

$$c_1 = 1, \quad c_2 = -\ln \xi.$$

Используя краевые условия (5.6), получим $a_2 = 0$, $b_1 = 0$, следовательно, $a_1 = -1$, $b_2 = -\ln\xi$. Итак,

$$G(x,\xi) = \begin{cases} -\ln x & \text{при } 1 \le x \le \xi, \\ -\ln\xi & \text{при } \xi \le x \le e. \end{cases} \tag{5.7}$$

<u>Пример 5.2.</u> Решить краевую задачу, используя функцию Грина:

$$x\,y'' + y' = \frac{1}{x}\ (1 < x < e), \qquad y(1) = 0, \quad y'(e) = 0. \tag{5.8}$$

Решение краевой задачи (5.8) запишем в виде

$$y(x) = \int_1^e G(x,\xi)\frac{1}{\xi\ln\xi}d\xi, \tag{5.9}$$

где $G(x,\xi)$ определена формулой (5.7). Разбивая промежуток интегрирования на два и подставляя в (5.9) выражение для функции Грина (5.7), получим

$$y(x) = \int_1^x(-\ln\xi)\,\frac{1}{\xi}\,d\xi + \int_x^e(-\ln x)\,\frac{1}{\xi}\,d\xi = -\int_1^x\frac{\ln\xi}{\xi}d\xi -$$

$$-\ln x\int_x^e\frac{1}{\xi\ln\xi}d\xi = -\frac{1}{2}\ln^2\xi\Big|_1^x - \ln x\ln\xi|_x^e = \ln x\left(\frac{1}{2}\ln x - 1\right).$$

Варианты домашних заданий

<u>Решить краевую задачу, используя Функцию Грина:</u>

5.1. $y'' + 4y = \cos x, \quad y(0) = 0, \ y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0.$

5.2. $y'' + 2y' - 3y = -4e^{-3x},$
$y(0) - y'(0) = 0, \ y(1) + y'(1) = 0.$

5.3. $9y'' + y = -12\,x\cos\frac{x}{3}, \ y'\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = y\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0.$

5.4. $y'' - y = 5 - x, \ y'(0) = 0, \ y(1) = y'(1).$

5.5. $y'' + 16y = x, \ y(0) = 0, \ y(\pi) + y'(\pi) = 0.$

5.6. $2y'' - 3y' + y = x\,e^{x}, \ y(1) - y'(1) = 0, \ \ y(-1) = 0.$

5.7. $y'' + y' - 2y = 182xe^{-2x}, \ \ 2y(0) + y'(0) = 0, \ \ y'(1) = 0.$

5.8. $y'' + 9y = 63, \ y\left(\frac{\pi}{6}\right) + 2y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0, \ 3y\left(\frac{\pi}{3}\right) + y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0.$

5.9. $y'' - y' = -1, \ y'(0) = 0, \ ey(1) = (e - 1)y'(1).$

5.10. $4y'' + y = 4\,x\sin\frac{x}{2}, \ y(-\pi) = y'(\pi) = 0.$

5.11. $2y'' - 3y' + y = -x,\ y(0) - y'(0) = 0,\ y(1) = 0.$
5.12. $2y'' - y' = 3x^2 - 1,\ y(0) = 0,\ y(1) - 2y'(1) = 0.$
5.13. $y'' + 9y = -27,\ y(0) + y'(0) = 0,\ y(\pi) = 0.$
5.14. $y'' + 2y' - 3y = 4e^x,\ y(-1) = 0,\ 3y(1) + y'(1) = 0.$
5.15. $2y'' - y' - y = 54x\,e^x,$
$y(-1) - y'(-1) = 0,\ y(1) + 2y'(1) = 0.$
5.16. $y'' + 9y = x - \frac{\pi}{6},\ y(0) = 0,\ y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0.$
5.17. $y'' + y' = e^{-x},\ y(0) + y(1) = 0,\ y'(0) + y'(1) = 0.$
5.18. $4y'' - y = 8\operatorname{ch} x,\ y(0) + 2y'(0) = 0,\ y(2) - 2y'(2) = 0.$
5.19. $4y'' + y = 4\sin\frac{x}{2},\ y(0) + 2y'(0) = 0,\ y(\pi) = 0.$
5.20. $y'' + 16y = 64x,\ 4y\left(\frac{\pi}{8}\right) + y'\left(\frac{\pi}{8}\right) = 0,\ y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0.$
5.21. $y'' - y' - 2y = -12x,\ y'(0) = 0,\ y(1) + y'(1) = 0.$
5.22. $y'' + 4y = 4 - 8x,\ y(0) = 0,\ y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0.$
5.23. $y'' + y' = 2x + 2,\ y'(0) = 0,\ y(1) = 0.$
5.24. $2y'' + y' = x^2 e^{-\frac{x}{2}},\ y(-2) + 2y'(-2) = 0,\ y'(0) = 0.$
5.25. $y'' + y = x,\ y(-\pi) = 0,\ y(\pi) + \operatorname{tg}1\, y'(\pi) = 0.$
5.26. $y'' - y' - 2y = 6\operatorname{ch} 2x,\ y(-1) + y'(-1) = 0,\ y(1) = 0.$
5.27. $9y'' + y = 4\cos\frac{x}{3},\ y'(0) = 0,\ y(3\pi) - 3y'(3\pi) = 0.$
5.28. $y'' + y' - 2y = 54xe^x,$
$y(0) + y'(0) = 0,\ 2y(1) + y'(1) = 0.$
5.29. $2y'' - y' - y = 2\operatorname{ch} x,$
$y(-1) + 2y'(-1) = 0,\ y(1) - y'(1) = 0.$
5.30. $y'' + y = x,\ y(0) = 0,\ y(\pi) = \pi y'(\pi).$

6. Применение интегральных преобразований к решению интегральных уравнений

Пусть дано интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода с ядром, зависящим от разности аргументов:

$$y(x) = f(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} K(x - t)\, y(t)\, dt, \tag{6.1}$$

где функции $f(x)$ и $K(x)$ удовлетворяют условиям

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x)dx < +\infty, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} K^2(x)\, dx < +\infty.$$

Применим к уравнению (6.1) преобразование Фурье:

$$Y(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} y(x)\, e^{-i\omega x}dx,$$

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-i\omega x}dx,$$

и используем теорему о свертке

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} K(x-t)\, y(t)\, dt\right] e^{-i\omega x}dx = \widetilde{K}(\omega)Y(\omega),$$

где $\widetilde{K}(\omega)$ – преобразование Фурье ядра

$$\widetilde{K}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} K(x)\, e^{-i\omega x}dx.$$

В результате получим:

$$Y(\omega) = F(\omega) + \sqrt{2\pi}\, Y(\omega)\widetilde{K}(\omega). \tag{6.2}$$

Из уравнения (6.2) при условии $1 - \widetilde{K}(\omega) \neq 0$ находим

$$Y(\omega) = \frac{F(\omega)}{1-\sqrt{2\pi}\widetilde{K}(\omega)}. \tag{6.3}$$

Применяя к (6.3) формулу обращения преобразования Фурье, получим решение уравнения (6.1)

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{F(\omega)}{1-\sqrt{2\pi}\widetilde{K}(\omega)}\, e^{i\omega x}d\omega. \tag{6.4}$$

Аналогично решается интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода с ядром, зависящим от разности аргументов:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K(x-t)\, y(t)\, dt = f(x).$$

Пример 6.1. Решить интегральное уравнение

$$y(x) = e^{-|x|} + \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x-t|}\, y(t)\, dt. \tag{6.5}$$

Применим к уравнению (6.5) преобразование Фурье:

$$Y(\omega) = F(\omega) + \frac{1}{4}\sqrt{2\pi}\, Y(\omega)\widetilde{K}(\omega). \tag{6.6}$$

Найдем

$$\widetilde{K}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}\, e^{-i\omega x}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big(\int_{-\infty}^{0} e^{x(1-i\omega)}\, dx +$$

$$+ \int_{0}^{+\infty} e^{-x(1+i\omega)}\, dx\Big) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+\omega^2},$$

аналогично

$$F(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+\omega^2}.$$

Подставляя $F(\omega)$ и $\widetilde{K}(\omega)$ в (6.6), получим

$$Y(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{2}{\frac{1}{2}+\omega^2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{\frac{1}{2}+\omega^2}. \tag{6.7}$$

Формула обращения (6.4) для (6.7) дает решение интегрального уравнения (6.5):

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\frac{1}{2}+\omega^2}\,e^{i\omega x}d\omega = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\frac{1}{2}+\omega^2}\,e^{i\omega x}d\omega. \qquad (6.8)$$

К вычислению интеграла (6.8) применим метод контурного интегрирования. Пусть $x \geq 0$. Функция $\frac{1}{\frac{1}{2}+z^2}e^{izx}$ является аналитической функцией в верхней полуплоскости $Z_+ = \{z \in \mathbb{C}: \operatorname{Im} z \geq 0\}$ за исключением одной особой точки $z = \frac{i}{\sqrt{2}}$ (полюса первого порядка). Рассмотрим положительно ориентированную кусочно-гладкую замкнутую кривую Г, состоящую из отрезка $\gamma = [-R; R]$ и полуокружности $\Gamma_R = \left\{z \in \mathbb{C}: z = R\,e^{it}, 0 \leq t \leq \pi\right\}$, где значение R таково, что особая точка $z = \frac{i}{\sqrt{2}}$ лежит в области, ограниченной кривой Г. Тогда согласно основной теореме о вычетах:

$$\int_\Gamma \frac{1}{\frac{1}{2}+z^2}e^{izx}\,dz = \int_{-R}^{+R}\frac{1}{\frac{1}{2}+\omega^2}\,e^{i\omega x}d\omega + \int_{\Gamma_R}\frac{1}{\frac{1}{2}+z^2}e^{izx}\,dz =$$

$$2\pi i \operatorname{res}\left(\frac{1}{\frac{1}{2}+z^2}\,e^{izx}\right)\Bigg|_{z=\frac{i}{\sqrt{2}}}.$$

Перейдем в этом равенстве к пределу при $R \to \infty$. Поскольку функция $g(z) = \frac{1}{\frac{1}{2}+z^2}$ удовлетворяет условиям леммы Жордана, т.е. является аналитической функцией в верхней полуплоскости $Z_+ = \{z \in \mathbb{C}: \operatorname{Im} z \geq 0\}$ за исключением одной особой точки $z = \frac{i}{\sqrt{2}}$ (полюса первого порядка) и

$\lim_{R\to\infty} M(R) = 0$, где $M(R) = \max_{z\in\Gamma_R}|g(z)|$,

то для любого $x > 0$ выполняется предельное соотношение

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_R} g(z)e^{izx}\,dz = 0.$$

Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\frac{1}{2}+\omega^2}\,e^{i\omega x}d\omega = 2\pi i \operatorname{res}\left(\frac{1}{\frac{1}{2}+z^2}\,e^{izx}\right)\Bigg|_{z=\frac{i}{\sqrt{2}}}.$$

Найдем вычет для полюса первого порядка

$$\operatorname{res}\left(\frac{1}{\frac{1}{2}+z^2}\,e^{izx}\right)\Bigg|_{z=\frac{i}{\sqrt{2}}} = \lim_{z\to\frac{i}{\sqrt{2}}}\frac{\left(z-\frac{i}{\sqrt{2}}\right)e^{izx}}{\left(z-\frac{i}{\sqrt{2}}\right)\left(z+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)} = -\frac{i}{\sqrt{2}}e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}}.$$

Итак, для функции $y(x)$ при $x \geq 0$ будем иметь

$$y(x) = \frac{1}{\pi}\,2\pi i\left(-\frac{i}{\sqrt{2}}e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}}\right) = \sqrt{2}\,e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}}.$$

Для случая $x < 0$ можно провести аналогичные рассуждения или сразу в формуле (6.8) сделать замену ω на – ω:

$$y(x) = \sqrt{2}\,e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}.$$

Объединяя оба результата, получим:

$$y(x) = \sqrt{2}\,e^{-\frac{|x|}{\sqrt{2}}}.$$

Рассмотрим теперь интегральное уравнение Вольтерры 2-го рода с ядром, зависящим от разности аргументов:

$$y(x) = f(x) + \int_0^x K(x-t)\,y(t)\,dt,\ \ (0 \leq x < \infty). \qquad (6.9)$$

Будем называть уравнение (6.9) *интегральным уравнением типа свертки*. Пусть функции $f(x)$ и $K(x)$ – непрерывны при $x \geq 0$ и растут при $x \to +\infty$ не быстрее показательной функции:

$$|f(x)| \leq M_1\,e^{s_1 x},\quad |K(x)| \leq M_2\,e^{s_2 x}. \qquad (6.10)$$

Тогда и для решения $y(x)$ уравнения (6.9) справедлива оценка типа (6.10):

$$|y(x)| \leq M_3\,e^{s_3 x}.$$

При этих условиях функциям действительной переменной $f(x), K(x)$ и $y(x)$, называемым *функциями-оригиналами*, можно поставить в соответствие функции комплексной переменной $p = s + i\sigma$ по правилу:

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-px}f(x)dx,\quad \widetilde{K}(p) = \int_0^\infty e^{-px}K(x)dx,$$

$$Y(p) = \int_0^\infty e^{-px}y(x)dx.$$

Функции $F(p)$, $\widetilde{K}(p)$, $Y(p)$называются *изображением* функций $f(x)$, $K(x)$, $y(x)$ по Лапласу (они определены в полуплоскости $\operatorname{Re} p = s > \max\{s_1, s_2, s_3\}$ и являются в этой полуплоскости аналитическими функциями переменной p). Тот факт, что функции связаны преобразованием Лапласа, обозначается символом:

$$F(p) \risingdotseq f(x), \widetilde{K}(p) \risingdotseq K(x), Y(p) \risingdotseq y(x).$$

Применим к обеим частям уравнения (6.9) преобразование Лапласа. Учтем, что изображением Лапласа свертки является произведение изображений:

$$\int_0^x K(x-t)\, y(t)\, dt \risingdotseq \widetilde{K}(p)Y(p).$$

Таким образом, уравнению (6.9) соответствует соотношение между изображениями

$$Y(p) = F(p) + \widetilde{K}(p)Y(p).$$

Отсюда при условии $\widetilde{K}(p) \neq 1$ находим

$$Y(p) = \frac{F(p)}{1-\widetilde{K}(p)}. \tag{6.11}$$

Так как функция $Y(p)$ является аналитической в полуплоскости $\operatorname{Re} p = s > s_3$, то знаменатель в (6.11) не может иметь корней в указанной полуплоскости. Используя формулу обращения преобразования Лапласа, находим решение $y(x)$ интегрального уравнения (6.9):

$$y(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{s-i\infty}^{s+i\infty} Y(p)\, e^{px} dp \qquad (s > s_3) \tag{6.12}$$

(интеграл берется вдоль любой прямой $\operatorname{Re} p = s > s_3$ и понимается в смысле главного значения). На практике для отыскания оригинала $y(x)$ по его изображению $Y(p)$ не всегда целесообразно использовать формулу обращения (6.12). Часто бывает легче найти оригинал, используя другие теоремы операционного исчисления.

Пример 6.2. Решить интегральное уравнение

$$y(x) = e^{-x} + \int_0^x \sin(x-t)\, y(t)\, dt. \tag{6.13}$$

Применим к обеим частям уравнения (6.13) преобразование Лапласа. Пусть $Y(p) \risingdotseq y(x)$. Как известно,

$$e^{-x} \risingdotseq \frac{1}{p+1}, \qquad \sin x \risingdotseq \frac{1}{p^2+1}.$$

Перейдем от уравнения (6.13) к уравнению в пространстве изображений

$$Y(p) = \frac{1}{p+1} + \frac{1}{p^2+1}\, Y(p).$$

Для изображения будем иметь

$$Y(p) = \frac{p^2+1}{p^2(p+1)}. \tag{6.14}$$

Функция $Y(p)$ имеет полюс первого порядка при $p = -1$ и полюс второго порядка в нуле. Поэтому в качестве s в формуле (6.12) можно выбрать любое положительное число. Замкнем контур интегрирования дугой полуокружности. Обозначим через C_R часть дуги окружности $|p| = R$, лежащей слева от прямой $\operatorname{Re} p = s$, через $s - ib$ и $s + ib$ – концы C_R. Значение $b\ (R)$ таково, что особые точки $p = -1$ и $p = 0$ лежат внутри контура интегрирования. По теореме Коши о вычетах:

$$\int_{s-ib}^{s+ib} \frac{p^2+1}{p^2(p+1)} e^{px} dp + \int_{C_R} \frac{p^2+1}{p^2(p+1)} e^{px} dp =$$

$$= 2\pi i \left(\operatorname{res} \left(\frac{p^2+1}{p^2(p+1)} e^{px} \right) \Big|_{p=-1} + \operatorname{res} \left(\frac{p^2+1}{p^2(p+1)} e^{px} \right) \Big|_{p=0} \right).$$

Перейдем в этом равенстве к пределу при $b \to +\infty$ ($R \to \infty$). Сформулируем лемму Жордана в форме, несколько отличной от приведенной в примере 6.1. Заменим переменное $iz = p$, дуги окружностей Γ_R заменятся дугами C_R. Функция $g(p) = \frac{p^2+1}{p^2(p+1)}$ аналитична в полуплоскости $\operatorname{Re} p < s$ за исключением особых точек $p = -1$ и $p = 0$ и $\lim_{R\to\infty} M(R) = 0$, где $M(R) = = \max_{p \in C_R} |g(p)|$, тогда для любого $x > 0$ выполняется предельное соотношение

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} g(p) e^{px} dz = 0.$$

Следовательно,

$$\int_{s-i\infty}^{s+i\infty} \frac{p^2+1}{p^2(p+1)} e^{px} dp =$$

$$2\pi i \left(\operatorname{res} \left(\frac{p^2+1}{p^2(p+1)} e^{px} \right) \Big|_{p=-1} + \operatorname{res} \left(\frac{p^2+1}{p^2(p+1)} e^{px} \right) \Big|_{p=0} \right). \quad (6.15)$$

Найдем вычет для полюса первого порядка в точке $p = -1$:

$$\operatorname{res} \left(\frac{p^2+1}{p^2(p+1)} e^{px} \right) \Big|_{p=-1} = \lim_{p\to -1} \frac{p^2+1}{p^2(p+1)} e^{px}(p+1) = e^{-x},$$

и вычет для полюса второго порядка в точке $p = 0$:

$$\operatorname{res} \left(\frac{p^2+1}{p^2(p+1)} e^{px} \right) \Big|_{p=0} = \lim_{p\to 0} \frac{d}{dp} \left(p^2 \frac{p^2+1}{p^2(p+1)} e^{px} \right) =$$

$$= \lim_{p\to 0} \frac{d}{dp} \left(\frac{p^2+1}{(p+1)} e^{px} \right) = x - 1,$$

подстановка которых в (6.15) дает решение уравнения (6.13):

$$y(x) = e^{-x} + x - 1. \quad (6.16)$$

Оригинал изображения (6.14) можно найти, не вычисляя интеграл (6.15). Для этого разложим дробь (6.14) на простые дроби:

$$Y(p) = \frac{p^2+1}{p^2(p+1)} = -\frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p+1}.$$

Воспользовавшись известными формулами:

$$\frac{1}{p} \risingdotseq 1,\ \frac{1}{p^2} \risingdotseq x,\ \frac{1}{p+1} \risingdotseq e^{-x},$$

получим решение (6.16) уравнения (6.13).

Варианты домашних заданий

Применяя преобразование Лапласа, решить следующие интегральные уравнения:

6.1. $y(x) = e^x \cos 2x + \int_0^x e^{(x-t)} y(t)dt.$

6.2. $y(x) = e^x - x - 1 + \int_0^x (x-t)y(t)dt.$

6.3. $y(x) = 1 + \int_0^x \operatorname{ch}(x-t)y(t)dt.$

6.4. $y(x) = e^x + \int_0^x \sin(x-t)y(t)dt.$

6.5. $y(x) = \operatorname{sh} x - 6\int_0^x \cos 3(x-t)y(t)dt.$

6.6. $y(x) = e^{-x}\sin 2x + \int_0^x e^{(x-t)}y(t)dt.$

6.7. $y(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2 y(t)dt.$

6.8. $y(x) = \sin x - \int_0^x \operatorname{sh}(x-t)y(t)dt.$

6.9. $\int_0^x \operatorname{ch}(x-t)y(t)dt = x\,e^{2x}.$

6.10. $y(x) = xe^x + 2\int_0^x \cos(x-t)y(t)dt.$

6.11. $\int_0^x \sin(x-t)y(t)dt = \sin^2 x.$

6.12. $y(x) = x\,e^{2x} - \int_0^x e^{2(x-t)}y(t)dt.$

6.13. $y(x) = \frac{x^2}{2} + \int_0^x (x-t)y(t)dt.$

6.14. $y(x) = \frac{1}{2}x^2 3^x + \int_0^x (x-t)3^{x-t}y(t)dt.$

6.15. $y(x) = \cos^2 x + 2\int_0^x \sin(x-t)y(t)dt.$

6.16. $y(x) = e^{-x}\sin x + \int_0^x e^{(x-t)}y(t)dt.$

6.17. $y(x) = \cos x - \int_0^x \operatorname{sh}(x-t)y(t)dt.$

6.18. $y(x) = x + 2\int_0^x \sin(x-t)y(t)dt.$

6.19. $y(x) = x\,e^x + 3\int_0^x \operatorname{sh}(x-t)y(t)dt.$

6.20. $y(x) = \cos x - \int_0^x \operatorname{ch}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(x-t)\right) y(t)dt.$

6.21. $y(x) = x2^x + \int_0^x 2^{x-t} y(t)dt.$

6.22. $y(x) = x^2 - \int_0^x \operatorname{sh}(x-t) y(t)dt.$

6.23. $y(x) = 1 + \int_0^x \cos(x-t)\sin(x-t) y(t)dt.$

6.24. $y(x) = 1 + x\cos x - \sin x + \int_0^x (x-t)\sin(x-t) y(t)dt.$

6.25. $y(x) = x + \int_0^x \operatorname{ch}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(x-t)\right) y(t)dt.$

6.26. $y(x) = \cos x - \int_0^x (x-t)\cos(x-t) y(t)dt.$

6.27. $\int_0^x \operatorname{ch}(x-t) y(t)dt = x^3.$

6.28. $y(x) = \frac{x^2}{2} + 1 + \int_0^x \operatorname{sh}(x-t) y(t)dt.$

6.29. $y(x) = e^{2x} + \int_0^x (x-t)e^{x-t} y(t)dt.$

6.30. $y(x) = xe^x - \int_0^x \operatorname{sh}(x-t) y(t)dt.$

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Васильева А.Б., Тихонов Н.А. Интегральные уравнения. М.: Физматлит, 2004.

2. Дифференциальные и интегральные уравнения, вариационное исчисление в примерах и задачах / А.Б. Васильева, Г.Н. Медведев, Н.А. Тихонов, Т.А. Уразгильдина. М.: Физматлит, 2003.

3. Волков В.Т., Ягола А.Г. Интегральные уравнения. Вариационное исчисление: методы решения задач. М.: КДУ, 2007.

4. Краснов М.Л. Интегральные уравнения. Введение в теорию. М.: КомКнига, 2006.

5. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Интегральные уравнения: Задачи и примеры с подробными решениями. М.: Едиториал УРСС, 2003.

6. Сборник задач для втузов. Ч. 3. / Под ред. А.В. Ефимова и А.С. Поспелова. М.: Физматлит, 2003.

7. Полянин А.Д., Манжиров А.Ф. Справочник по интегральным уравнениям. М.: Физматлит, 2003.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Свойства преобразования Лапласа

<u>Основные свойства преобразования Лапласа</u>

1. *Свойство линейности.*

Пусть $f(x) \risingdotseq F(p), g(x) \risingdotseq G(p)$. Для любых комплексных постоянных α и β: $\alpha f(x) + \beta g(x) \risingdotseq \alpha F(p) + \beta G(p)$.

2. *Теорема подобия.*

Для любого постоянного $\alpha > 0$: $f(\alpha x) \risingdotseq \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right)$.

3. *Дифференцирование оригинала.*

Если функции $f(x), f'(x), \dots, f^{(n)}(x)$ являются функциями-оригиналами и $f(x) \risingdotseq F(p)$, то $f'(x) \risingdotseq pF(p) - f(0), f''(x) \risingdotseq$ $\risingdotseq p^2F(p) - pf(0) - f'(0), \dots, f^{(n)}(x) \risingdotseq p^nF(p) - p^{n-1}f(0) -$ $-p^{n-2}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$, где под $f^k(0)(k = 1, 2, \dots, n-1)$ понимается $\lim_{x\to+0} f^k(x)$.

4. *Дифференцирование изображения.*

Если $f(x) \risingdotseq F(p)$, то $F^{(n)}(p) \risingdotseq (-x)^n f(x)$.

5. *Интегрирование оригинала.*

Если $f(x) \risingdotseq F(p)$, то $\int_0^x f(t)dt \risingdotseq \frac{F(p)}{p}$.

6. *Интегрирование изображения.*

Если интеграл $\int_p^\infty F(p)\,dp$ сходится, то $\frac{f(x)}{x} \risingdotseq \int_p^\infty F(p)\,dp$.

7. *Теорема смещения.*

Если $f(x) \risingdotseq F(p)$, то для любого комплексного числа p_0: $e^{p_0x}f(x) \risingdotseq F(p - p_0)$.

8. *Теорема запаздывания.*

Если $f(x) \risingdotseq F(p)$, то для любого $\tau > 0$: $f(x - \tau) \risingdotseq e^{-p\tau}F(p)$.

9. *Теорема умножения (теорема о свертке).*

Пусть $f(x) \risingdotseq F(p), g(x) \risingdotseq G(p)$. Тогда произведение $F(p)\,G(p)$ также является изображением, причем $F(p)G(p) \risingdotseq f(x) * g(x)$, где $f(x) * g(x) = \int_0^x f(t)g(x-t)dt$ – свертка функций $f(x)$ и $g(x)$.

Таблица оригиналов и их изображений

Оригинал	Изображение
1	$\frac{1}{p}$
$e^{\omega x}$	$\frac{1}{p-\omega}$
a^x	$\frac{1}{p-\ln a}$
$\cos \omega x$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$
$\sin \omega x$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
$\operatorname{ch} \omega x$	$\frac{p}{p^2-\omega^2}$
$\operatorname{sh} \omega x$	$\frac{\omega}{p^2-\omega^2}$
$x^\alpha (\alpha > -1)$	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{p}}$
$x^n \ (n \in \mathbb{N})$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$

Светлана Викторовна Мустяца
Александр Петрович Горячев

ЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Методические рекомендации

Под редакцией доцента А.П. Горячева

Редактор Е.Е. Шумакова
Оригинал-макет изготовлен С.В. Мустяца

Подписано в печать 21.12.2010. Формат 60×84 1/16.
Уч.-изд. л. 2,5. Печ. л. 2,5. Тираж 870 экз.
Изд. № 022-1. Заказ № 15

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ».
Типография НИЯУ МИФИ.
115409, Москва, Каширское шоссе, 31