МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

В. Д. Михайлов

# АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Учебное пособие
для практических занятий

*Издание 2-е, исправленное*

Москва 2019

УДК 517.1
ББК 22.151.5
М69

Михайлов В.Д. **Аналитическая геометрия**: Учебное пособие. – 2-е изд., испр. – М.: НИЯУ МИФИ, 2019. – 80 с.

Учебное пособие содержит план проведения практических занятий по курсу «Аналитическая геометрия» на первом семестре НИЯУ МИФИ. В каждой теме разбираются примеры решения задач и даются методические пояснения к ним.

Пособие предназначено для студентов, а также может быть использовано преподавателями.

ISBN 978-5-7262-2581-4 

## Содержание

## ПРЕДИСЛОВИЕ

В пособии представлены 16 занятий по аналитической геометрии.

Все занятия разбиты по темам: простейшие задачи аналитической геометрии на плоскости и в пространстве; определители и системы уравнений 2-го и 3-го порядков; элементы векторной алгебры; векторы и линейные операции над ними; скалярное произведение векторов; векторное произведение; смешанное произведение векторов; двойное векторное произведение; разные задачи векторной алгебры; прямая на плоскости; плоскость; прямая в пространстве; смешанные задачи на уравнения плоскости и прямой; кривые второго порядка; приведение уравнений кривых второго порядка к каноническому виду; поверхности второго порядка; определители; действия с матрицами; вычисление ранга матрицы.

В каждом задании даются номера задач для работы в аудитории и для домашних заданий. Ежедневные домашние задания разделяются по трем категориям трудности (категорию студент выбирает по желанию), причем меньшая категория автоматически включает в себя номера задач больших категорий.

Занятие 5 – контрольная работа.

## Занятие 1*

## Вариант А. Простейшие задачи аналитической геометрии на плоскости и в пространстве

(Д.В. Клетеник. Сборник задач по аналитической геометрии. М.: Наука, 2010 (и более ранние), задачи №№ 1–145, 719–760)

| Тема | В аудитории | | ДЗ по категориям | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | основные | резерв | III | II | I |
| Декартовы прямоугольные координаты на плоскости | 23 (2) | | 24 (3) | | |
| Проекция вектора на ось | 44, 47 (1), 55 (1) | 54, 56 | 55 (2), 60 | 62 | |
| Расстояние между точками | 64, 70 | 68, 81, 82 | 69 | | 80 |
| Деление отрезка в данном отношении | 91, 95 | 94, 100 | 93 | 96 | 114 |
| Разложение вектора по базису на плоскости | 787, 789, 790 | | 788, 791 | | |
| Декартовы прямоугольные координаты в пространстве | 720, 721 | 725 | | | |
| Расстояние между точками и деление отрезка в пространстве | 736, 739 | 732, 734 | 742 | 743 | 747 |
| Вектор в пространстве | 753. 754, 760 | 757, 759 | 755, 756 | | |

### Решения задач

**Задача № 23 (2).** Найти координаты точки, симметричной относительно биссектрисы первого координатного угла точке $B$ (5; –2).

***Решение***. Точка $B'$, симметричная точке $B$ ($x$; $y$) относительно биссектрисы первого координатного угла имеет координаты $B'$ ($y$; $x$).

---

* Занятие 1 проводится либо по варианту А, либо по варианту Б.

**Задача № 59.** Зная проекции отрезка на координатные оси $x = 1$, $y = -\sqrt{3}$, найти его проекцию на ось, составляющую с осью $0x$ угол $\theta = \frac{2}{3}\pi$.

***Решение***. Косинус угла, образованного вектором $\{x;\ y\} = \{1;\ -\sqrt{3}\}$ с осью $0x$, равен $\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{2}$, а с осью $0y$ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, т.е. его угол с осью $0x$ равен $-\frac{\pi}{3}$. Поэтому вектор образует с заданной осью угол $\pi$, и его проекция на эту ось равна $-\sqrt{x^2+y^2} = -2$.

**Задача № 60.** Даны две точки $M_1(1;\ -5)$ и $M_2\ (4;\ -1)$. Найти проекцию вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$ на ось, которая составляет с осью $0x$ угол $\theta = -\frac{\pi}{6}$.

***Решение***. Координаты вектора $x = 3$, $y = 4$, его модуль равен 5. Обозначим через $\alpha$ угол, образуемый вектором с осью $0x$. Угол этого вектора с заданной осью равен $\frac{\pi}{6} + \alpha$. Поэтому искомая проекция равна $5\cos\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) = 5\left(\cos\frac{\pi}{6}\cdot\cos\alpha - \sin\frac{\pi}{6}\cdot\sin\alpha\right) = \frac{3\sqrt{3}-4}{2}$.

**Задача № 62.** Даны две точки $M_1(2;\ -2)$ и $M_2\ (7;\ -3)$. Найти проекцию вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$ на ось, проходящую через точки $A\ (5;\ -4)$ и $B\ (-7;\ 1)$ и направленную: 1) от $A$ к $B$; 2) от $B$ к $A$.

***Решение***.

1) Координаты вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$ равны $\{5;\ -1\}$, а вектора $\overrightarrow{AB}$ $\{-12;\ 5\}$. Обозначим угол вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$ с осью $0x$ через $\alpha$, а вектора $\overrightarrow{AB}$ – через $\beta$. Искомая проекция вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$ на ось вектора $\overrightarrow{AB}$ равна $\overrightarrow{M_1M_2}\cos(\alpha-\beta) = \sqrt{26}(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) =$

$$= \sqrt{26}\left[\frac{5}{\sqrt{26}}\cdot\left(-\frac{12}{13}\right) - \frac{1}{\sqrt{26}}\cdot\frac{5}{13}\right] = -5.$$

2) Проекция равна +5.

**Задача № 80.** Через точку (4; 2) проведена окружность, касающаяся обеих координатных осей. Определить ее центр $C$ ($\xi$; $\eta$) и радиус $R$.

***Решение***. Поскольку окружность есть геометрическое место точек, равноудаленных от ее центра на расстояние $R$, то точка $M$ ($x$; $y$) принадлежит окружности тогда и только тогда, когда $(x-\xi)^2+(y-\eta)^2=R^2$ (в соответствии с выражением расстояния между точками через их координаты). Так как окружность касается обеих координатных осей, то $C$ лежит на биссектрисе первого координатного угла, т.е. $\xi=\eta=R$. Отсюда $(x-R)^2+(y-R)^2=R^2$. Так как точка $A$ (4; 2) принадлежит окружности, то $(4-R)^2+(2-R)^2=R^2$, т.е. $R_1=\xi_1=\eta_1=2$ и $R_2=\xi_2=\eta_2=10$.

**Задача № 96.** Даны вершины треугольника $A$ (2; –5), $B$ (1; –2), $C$ (4; 7). Найти точку пересечения со стороной $AC$ биссектрисы его внутреннего угла при вершине $B$.

***Решение***. Поскольку точка $M$ ($x$; $y$) пересечения биссектрисы со стороной $AC$ делит эту сторону в отношении $\lambda$, равном отношению соответствующих сторон треугольника, то ее координаты равны

$$x=\frac{x_C+\lambda x_A}{1+\lambda},\ y=\frac{y_C+\lambda y_A}{1+\lambda},\ \text{ где } \lambda=\frac{CM}{MA}=\frac{BC}{AB}=\frac{3\sqrt{10}}{\sqrt{10}}=3.$$

Отсюда $x=\frac{5}{2}$, $y=-2$.

**Задача № 114.** В точках $A$ ($x_1$; $y_1$), $B$ ($x_2$; $y_2$), $C$ ($x_3$; $y_3$) сосредоточены массы $m$, $n$ и $p$. Найти координаты центра масс этой системы.

***Решение***. Центром масс двух точечных масс $m_1$ и $m_2$ называется точка, делящая отрезок между массами в отношении $\lambda=\frac{m_2}{m_1}$, т.е. координаты этой точки $M$ ($x$; $y$) равны:

$$x=\frac{x_1+\frac{m_2}{m_1}x_2}{1+\frac{m_2}{m_1}}=\frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2},\quad \text{аналогично}\quad y=\frac{m_1y_1+m_2y_2}{m_1+m_2}.$$

Систему из двух масс $m_1+m_2$ можно рассматривать сосредоточенной в точке $M$ ($x$; $y$). Координаты центра масс $C$ ($x_0$; $y_0$) трех масс $m_1$, $m_2$, $m_3$ могут быть найдены как координаты центра масс двух точечных масс $m_1+m_2$ и $m_3$:

$$x_0=\frac{x_1+\dfrac{m_3}{m_1+m_2}x_3}{1+\dfrac{m_3}{m_1+m_2}}=\frac{m_1x_1+m_2x_2+m_3x_3}{m_1+m_2+m_3},\quad y_0=\frac{m_1y_1+m_2y_2+m_3y_3}{m_1+m_2+m_3}.$$

Полученные результаты могут быть обобщены на случай $n$ точечных масс:

$$x_0=\frac{\sum_{i=1}^{n}m_ix_i}{\sum_{i=1}^{n}m_i},\quad y_0=\frac{\sum_{i=1}^{n}m_iy_i}{\sum_{i=1}^{n}m_i}.$$

В обозначениях нашей задачи

$$x_0=\frac{mx_1+nx_2+px_3}{m+n+p},\quad y_0=\frac{my_1+ny_2+py_3}{m+n+p}.$$

**Задача № 787.** На плоскости даны два вектора $\vec{p}\ \{2; -3\}$ и $\vec{q}\ \{1; 2\}$. Найти разложение вектора $\vec{a}\ \{9; 4\}$ по базису $\vec{p}$, $\vec{q}$.

***Решение***. Назовем базисом два любых упорядоченных неколлинеарных друг другу вектора. Тогда показывается (например, как в задаче № 786), что всякий вектор единственным образом разлагается по базису: $\vec{a}=\alpha\vec{p}+\beta\vec{q}$, где $\alpha$ и $\beta$ – числа, называемые коэффициентами разложения. В нашем случае $9 = 2\alpha + \beta$ и $4 = -3\alpha + 2\beta$. Откуда $\alpha = 2$, $\beta = 5$, т.е. $\vec{a}=2\vec{p}+5\vec{q}$.

**Задача № 790.** Принимая в качестве базиса векторы $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$ и $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$, совпадающие со сторонами треугольника $ABC$, найти разложение векторов, приложенных в вершинах треугольника и совпадающих с его медианами.

***Решение***. Отметим, что если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ совпадают со сторонами треугольника, исходящими из одной вершины, то вектор $\vec{q}$ медианы, исходящей из этой вершины, равен $\vec{q}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$.

**Задача № 747.** Прямая проходит через две точки $M_1$ (–1; 6; 6) и $M_2$ (3; –6; –2). Найти точки ее пересечения с координатными плоскостями.

***Решение***. Если три точки на прямой образуют два отрезка, длины которых находятся в некотором отношении λ, то такое же отношение образуют проекции отрезков на координатные оси:

$$\frac{x_1 - x_2}{x_3 - x_2} = \frac{y_1 - y_2}{y_3 - y_2} = \frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2}.$$

Найдем точку $M_3$ ($x_3$; $y_3$; 0) пересечения прямой с плоскостью $x0y$:

$$-\frac{1-3}{x_3 - 3} = \frac{6+6}{y_3+6} = \frac{6+2}{2} \Rightarrow x_3 = 2, y_3 = -3, z_3 = 0.$$

## Вариант Б. Определители и системы уравнений 2-го и 3-го порядков

(Д.В. Клетеник. Сборник задач по аналитической геометрии, задачи №№ 1204–1251)

| Тема | В аудитории | | ДЗ по категориям | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | основные | резерв | III | II | I |
| Определители 2-го порядка | 1204 (нечет.), 1206 (1) | 1205 (1, 5), 1206 (2, 3) | 1204 (чет.) | 1206 (4) | 1205 (8) |
| Системы из двух уравнений с двумя неизвестными | 1207 (1, 3, 5), 1208 | | 1207 (2, 4, 6), 1209 | | |
| Определители 3-го порядка (определение) | 1211, 1213, 1216 | 1215 | 1212, 1214 | | |
| Определители 3-го порядка (свойства) | 1217, 1219, 1223, 1227 | 1225, 1228 | 1218, 1224, 1226 | 1220 | 1232 |

## Занятие 2

### Элементы векторной алгебры. Векторы и линейные операции над ними. Скалярное произведение векторов[†]

(Д.В. Клетеник. Сборник задач по аналитической геометрии, задачи №№ 761–838)

| Тема | В аудитории | | ДЗ по категориям | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | основные | резерв | III | II | I |
| Векторы и линейные операции над ними (продолжение темы) без координатного представления (№№ 761–774) | 761, 762, 765, 767, 769 (1, 2, 3), 773 (1,2) | 772, 773 (4) | 768, 769 (4), 771, 773 (3, 5) | | 770 (5,6) |
| Векторы в декартовых прямоугольных координатах (№№ 775–782) | 775 (1, 3, 5), 777, 779, 780, 782 | 775 (2), 776 | 775 (4, 6), 781 | | |
| Разложение вектора по базису (№№ 783–785, 792–794) | 784, 793 | 783 | 785 | 794 | |
| Скалярное произведение (без координатного представления) (№№ 795–811) | 795 (1–5), 796 (1), 799, 800, 805, 808 | 798, 802, 806 | 797, 807 | 809 | 810, 811 |
| Скалярное произведение (в декартовых прямоугольных координатах) (№№ 812–828) | 812 (1, 2, 4), 814 (1), 819, 820, 823 | 812 (3, 5, 6), 814 (1), 821 | 816, 826 | | |
| Скалярное произведение и проекция вектора на ось другого вектора (№№ 829–838) | 829, 832, 835 | 830, 833, 834, 837 | 831, 838 | 836 | |

[†] Здесь в одном занятии сочтено целесообразным объединить темы «Векторы и линейные операции над ними» и «Скалярное произведение векторов» с учетом того, что обе эти темы в той или иной степени рассматривались в средней школе.

Первые задачи здесь очень простые. Часть из них можно опускать в зависимости от уровня подготовленности студенческой группы.

## Решения задач

**Задача № 770 (5).** В треугольнике $ABC$ вектор $\overrightarrow{AB} = \vec{m}$ и вектор $\overrightarrow{AC} = \vec{n}$. Построить векторы $|\vec{n}|\vec{m} + |\vec{m}|\vec{n}$, принимая в качестве масштабной единицы $\frac{1}{2}|\vec{n}|$.

***Решение***. Вектор $\vec{x} = |\vec{n}|\vec{m} + |\vec{m}|\vec{n}$ в единицах $\frac{1}{2}|\vec{n}|$ будет равен $\vec{x} = 2\vec{m} + 2|\vec{m}|\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$. Поэтому вектор $\vec{x}$ может быть построен как сумма двух векторов $2\vec{m}$ и вектора $2|\vec{m}|\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$, направленного вдоль оси вектора $\vec{n}$ и имеющего длину $2|\vec{m}|$.

**Задача № 771.** Точка $O$ является центром масс треугольника $ABC$. Доказать, что $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 0$.

***Решение***. Так как центр масс $O$ находится в точке пересечения медиан, которая делит каждую медиану в отношении 1:2, то, продлив одну из медиан, например $AO$, за точку пересечения ее со стороной $BC$ на расстояние, равное $\frac{1}{3}$ ее длины, до точки $D$, получим $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$. Но так как $\overrightarrow{OD} = -\overrightarrow{OA}$, то $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 0$.

**Задача № 784.** Два вектора $\vec{a}$ $\{2; -3; 6\}$ и $\vec{b}$ $\{-1; 2; -2\}$ приложены к одной точке. Определить координаты вектора $\vec{c}$, направленного по биссектрисе угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, при условии, что $|\vec{c}| = 3\sqrt{42}$.

***Решение***. Найдем единичные векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$, направленные соответственно по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Искомый вектор $\vec{c}$ равен вектору суммы $\vec{e}_1+\vec{e}_2$, умноженному на $|\vec{c}\,|$, векторы $\vec{e}_1\left\{\frac{2}{7};-\frac{3}{7};\frac{6}{7}\right\}$, $\vec{e}_2\left\{-\frac{1}{3};\frac{2}{3};-\frac{2}{3}\right\}$, тогда $\vec{c}=|\vec{c}\,|\cdot(\vec{e}_1+\vec{e}_2)=\{-3;\ 15;\ 12\}$.

**Задача № 793.** Даны три вектора $\vec{p}$ {3; –2; 1}, $\vec{q}$ {–1; 1; –2} и $\vec{r}$ {2; 1; –3}. Найти разложение вектора $\vec{c}$ {11; –6; 5} по базису $\vec{p},\ \vec{q},\ \vec{r}$.

***Решение***. Искомое разложение $\vec{c}=\alpha\vec{p}+\beta\vec{q}+\gamma\vec{r}$. В координатах:

$$c_x = 11 = 3\alpha - \beta + 2\gamma,$$
$$c_y = -6 = -2\alpha + \beta + \gamma,$$
$$c_z = 5 = \alpha - 2\beta - 3\gamma.$$

В процессе решения этой задачи можно ввести понятие определителя 3-го порядка и его вычисления, а также сказать о правиле Крамера решения такой системы: $\alpha = 2$. $\beta = -3$, $\gamma = 1$ или $\vec{c}=2\vec{p}-3\vec{q}+\vec{r}$.

Очень полезно (при наличии времени) дать в этой задаче дополнительное задание, например, разложить вектор $\vec{c}$ по какому-либо иному базису, образованному линейными комбинациями векторов $\vec{p},\ \vec{q},\ \vec{r}$.

**Задача № 800.** Даны единичные векторы $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$, удовлетворяющие условию $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$. Вычислить $(\vec{a},\vec{b})+(\vec{b},\vec{c})+(\vec{c},\vec{a})$.

***Решение***. Найдем скалярный квадрат вектора $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ :

$$(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})^2=|\vec{a}\,|^2+|\vec{b}\,|^2+|\vec{c}\,|^2+2(\vec{a},\vec{b})+2(\vec{b},\vec{c})+2(\vec{c},\vec{a})=$$
$$=1+1+1+2[(\vec{a},\vec{b})+(\vec{b},\vec{c})+(\vec{c},\vec{a})]=0\Rightarrow$$
$$(\vec{a},\vec{b})+(\vec{b},\vec{c})+(\vec{c},\vec{a})=-\frac{3}{2}.$$

**Задача № 807.** Даны векторы $\overrightarrow{AB}=\vec{b},\ \overrightarrow{AC}=\vec{c}$, совпадающие со сторонами треугольника *ABC*. Найти разложение по базису $\vec{b},\ \vec{c}$ вектора, приложенного к вершине *B* этого треугольника и совпадающего с его высотой *BD*.

***Решение.*** Пусть $\overrightarrow{AD}=\alpha\vec{c}$. Тогда, обозначив искомый вектор через $\vec{h}$, найдем $\vec{b}+\vec{h}=\alpha\vec{c}$. Умножим это равенство скалярно на вектор $\vec{c}$: $(\vec{b},\vec{c})+(\vec{h},\vec{c})=\alpha\vec{c}^{\,2}$. Так как $(\vec{h},\vec{c})=0$, то $\alpha=\dfrac{(\vec{b},\vec{c})}{|\vec{c}|^2}$.

Следовательно, $\vec{h}=\dfrac{(\vec{b},\vec{c})}{|\vec{c}|^2}\vec{c}-\vec{b}$.

**Задача № 808.** Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi=\dfrac{\pi}{6}$. Зная, что $|\vec{a}|=\sqrt{3}$, $|\vec{b}|=1$, вычислить угол $\alpha$ между векторами $\vec{p}=\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{q}=\vec{a}-\vec{b}$.

***Решение***.

$$\cos\alpha=\frac{(\vec{p},\vec{q})}{|\vec{p}|\cdot|\vec{q}|}=\frac{(\vec{a}+\vec{b},\ \vec{a}-\vec{b})}{\sqrt{(\vec{a}+\vec{b})^2(\vec{a}-\vec{b})^2}}=\frac{\vec{a}^{\,2}-\vec{b}^{\,2}}{\sqrt{(\vec{a}^{\,2}+\vec{b}^{\,2})^2-4(\vec{a},\vec{b})^2}}=\frac{2}{\sqrt{7}},$$

т.е. $\alpha=\arccos\dfrac{2}{\sqrt{7}}$.

**Задача № 809.** Вычислить тупой угол, образованный медианами, проведенными из вершин острых углов равнобедренного прямоугольного треугольника.

***Решение***. Обозначим векторы-катеты через $\vec{a}$ и $\vec{b}$, причем $|\vec{a}|=|\vec{b}|$. Тогда векторы-медианы примут вид $\dfrac{1}{2}\vec{b}-\vec{a}$ и $\dfrac{1}{2}\vec{a}-\vec{b}$. Поэтому угол между ними равен

$$\cos\varphi=\frac{\left(\frac{1}{2}\vec{b}-\vec{a},\frac{1}{2}\vec{a}-\vec{b}\right)}{\left|\frac{1}{2}\vec{b}-\vec{a}\right|\cdot\left|\frac{1}{2}\vec{a}-\vec{b}\right|}=\frac{-\frac{1}{2}|\vec{a}|^2-\frac{1}{2}|\vec{b}|^2}{|\vec{a}|^2+\frac{1}{4}|\vec{a}|^2}=-\frac{4}{5},$$

т.е. $\varphi=\arccos\left(-\dfrac{4}{5}\right)$.

**Задача № 810.** Определить геометрическое место концов переменного вектора $\vec{x}$, если его начало находится в данной точке $A$ и вектор $\vec{x}$ удовлетворяет условию $(\vec{x},\vec{a})=\alpha$, где $\vec{a}$ – данный вектор, $\alpha$ – данное число.

***Решение.*** Так как $(\vec{x},\vec{a})=|\vec{a}|\cdot\text{пр}_{\vec{a}}\vec{x}=\alpha$, то $\text{пр}_{\vec{a}}\vec{x}=\dfrac{\alpha}{|\vec{a}|}$. Поэтому искомое геометрическое место определяется концами всех векторов $\vec{x}$, проекции которых на ось вектора $\vec{a}$ равны $\frac{\alpha}{|\vec{a}|}$, следовательно, будет плоскостью, перпендикулярной оси вектора $\vec{a}$ и отстоящей от проекции точки $A$ на ось вектора $\vec{a}$ вдоль этой оси на величину отрезка $\frac{\alpha}{|\vec{a}|}$.

**Задача № 811.** Определить геометрическое место концов переменного вектора $\vec{x}$, если его начало находится в данной точке $A$ и вектор $\vec{x}$ удовлетворяет условиям $(\vec{x},\vec{a}) = \alpha$, $(\vec{x},\vec{b}) = \beta$, где $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – данные неколлинеарные векторы, $\alpha$ и $\beta$ – данные числа.

***Решение***. Прямая пересечения двух плоскостей, каждая из которых является решением задачи № 810.

**Задача № 816.** Даны три силы $M$ {3; –4; 2}, $N$ {2; 3; –5} и $P$ {–3; –2; 4}, приложенные к одной точке. Вычислить, какую работу производит равнодействующая этих сил, когда ее точка приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения $M_1$ (5; 3; –7) в положение $M_2$ (4; –1; –4).

***Решение***. Равнодействующая трех сил $\vec{F} = \vec{M} + \vec{N} + \vec{P} = \{2;-3;1\}$. Перемещение $\vec{s} = \overrightarrow{M_1M_2} = \{-1;-4;3\}$. Работа

$$(\vec{F},\vec{s}) = -2 + 12 + 3 = 13.$$

**Задача № 829.** Найти проекцию вектора $\vec{S}\ \{4;-3;2\}$ на ось, составляющую с координатными осями равные острые углы.

***Решение***. Обозначим угол заданной оси с координатной осью через $\alpha$. Так как $3\cos^2\alpha = 1$, то $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Единичный вектор (орт) этой оси $\vec{n} = \left\{\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$. Искомая проекция

$$\text{пр}_{\vec{n}}\vec{S} = \frac{(\vec{n},\vec{S})}{|\vec{n}|} = (\vec{n},\vec{S}) = \sqrt{3}.$$

**Задача № 836.** Сила, определяемая вектором $\vec{R}\ \{1;-8;-7\}$, разложена по трем направлениям, одно из которых задано вектором $\vec{a} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$. Найти составляющую силы $\vec{R}$ в направлении вектора $\vec{a}$.

***Решение***. Искомая составляющая $\vec{R}_{\vec{a}} = \dfrac{\alpha\vec{a}}{|\vec{a}|}$, где $\alpha = \text{пр}_{\vec{a}}\vec{R} =$ $= \dfrac{(\vec{a},\vec{R})}{|\vec{a}|} = \dfrac{2-16-7}{3} = -7$, откуда $\vec{R}_{\vec{a}} = -\dfrac{7}{3}\vec{a} = \left\{-\dfrac{14}{3}, -\dfrac{14}{3}, -\dfrac{7}{3}\right\}$.

## Занятие 3

## Векторное произведение. Смешанное произведение векторов

(Д.В. Клетеник. Сборник задач по аналитической геометрии, задачи №№ 839–884)

| Тема | В аудитории | | ДЗ по категориям | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | основные | резерв | III | II | I |
| Векторное произведение (без координатного представления) (№№ 839–849) | 839, 840, 842 (1), 843 (1,2), 848 | 842 (2), 843 (3), 844 | 841, 845, 849 | 847 | |
| Векторное произведение (в декартовых прямоугольных координатах) (№№ 850–864) | 850 (1,2), 857, 859, 860 | 852. 861 | 850 (3), 851 (2), 858, 862 | 856 | 864 |
| Смешанное произведение векторов (без координатного представления) (№№ 865–872) | 865 (1, 2, 5), 866. 869 | | 867, 870, 871 | | 872 |
| Смешанное произведение векторов в декартовых координатах (№№ 873–878)* | 873, 876, 878 | 874 | 875, 877 | | 884 |

* В задаче № 873 и других подобных обратить еще раз внимание на правила вычисления определителя 3-го порядка.

## Решения задач

**Задача № 847.** Даны произвольные векторы $\vec{p},\ \vec{q},\ \vec{r},\ \vec{n}$. Доказать, что векторы $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$, где $\vec{a}=[\vec{p},\vec{n}],\ \vec{b}=[\vec{q},\vec{n}],\ \vec{c}=[\vec{r},\vec{n}]$, компланарны (т.е. будучи приведены к общему началу, располагаются в одной плоскости).

***Решение.*** Так как векторы $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ перпендикулярны к одному и тому же вектору $\vec{n}$, то они лежат в одной плоскости.

**Задача № 848.** Векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ удовлетворяют условию $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$. Доказать, что $[\vec{a},\vec{b}]=[\vec{b},\vec{c}]=[\vec{c},\vec{a}]$.

***Решение***. $\vec{a}+\vec{b}=-\vec{c}$. Умножим это равенство векторно на $\vec{a}$. Так как $[\vec{a},\vec{a}]=0$, то $[\vec{a},\vec{b}]=-[\vec{a},\vec{c}]=[\vec{c},\vec{a}]$.

Аналогично равенство $\vec{a}+\vec{b}=-\vec{c}$ умножим векторно на $\vec{b}$ и получим $[\vec{a},\vec{b}]=-[\vec{c},\vec{b}]=[\vec{b},\vec{c}]$.

**Задача № 849.** Векторы $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ и $\vec{d}$ связаны соотношениями: $[\vec{a},\vec{b}]=[\vec{c},\vec{d}]$, $[\vec{a},\vec{c}]=[\vec{b},\vec{d}]$. Доказать коллинеарность векторов $\vec{a}-\vec{d}$ и $\vec{b}-\vec{c}$.

***Решение***. Векторы коллинеарны, если их векторное произведение равно нулю:

$$[\vec{a}-\vec{d},\vec{b}-\vec{c}]=[\vec{a},\vec{b}]-[\vec{d},\vec{b}]-[\vec{a},\vec{c}]+[\vec{d},\vec{c}]=0.$$

**Задача № 869.** Доказать тождество $(\vec{a}+\vec{b})(\vec{b}+\vec{c})(\vec{c}+\vec{a})=2\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

***Решение***.

$$[(\vec{a}+\vec{b}),(\vec{b}+\vec{c})]=[\vec{a},\vec{b}]+[\vec{b},\vec{b}]+[\vec{a},\vec{c}]+[\vec{b},\vec{c}]=[\vec{a},\vec{b}]+[\vec{a},\vec{c}]+[\vec{b},\vec{c}];$$

$$[(\vec{a}+\vec{b}),(\vec{b}+\vec{c})]\cdot(\vec{c}+\vec{a})=([\vec{a},\vec{b}]+[\vec{a},\vec{c}]+[\vec{b},\vec{c}])\cdot(\vec{c}+\vec{a})=$$

$$=\vec{a}\vec{b}\vec{c}+\vec{a}\vec{c}\vec{c}+\vec{b}\vec{c}\vec{c}+(\vec{a},\vec{b},\vec{a})+\vec{a}\vec{c}\vec{a}+\vec{b}\vec{c}\vec{a}=\vec{a}\vec{b}\vec{c}+\vec{b}\vec{c}\vec{a}=2\vec{a}\vec{b}\vec{c}.$$

**Задача № 871.** Доказать, что векторы $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$, удовлетворяющие условию $[\vec{a},\vec{b}]+[\vec{b},\vec{c}]+[\vec{c},\vec{a}]=0$, компланарны.

***Решение***. Умножим это равенство скалярно на $\vec{c}$ и получим

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}+([\vec{b},\vec{c}],\vec{c})+([\vec{c},\vec{a}],\vec{c})=0\Rightarrow\vec{a}\vec{b}\vec{c}=0.$$

**Задача № 884.** Три некомпланарных вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ приведены к общему началу. Доказать, что плоскость, проходящая через концы этих векторов, перпендикулярна к вектору $[\vec{a},\vec{b}]+[\vec{b},\vec{c}]+[\vec{c},\vec{a}]$.

***Решение***. Достаточно доказать, что указанный вектор перпендикулярен двум векторам плоскости, например, векторам $\vec{a}-\vec{b}$ и $\vec{a}-\vec{c}$, т.е. скалярное произведение их равно нулю.

Докажем это для вектора $\vec{a}-\vec{b}$:

$$([\vec{a},\vec{b}]+[\vec{b},\vec{c}]+[\vec{c},\vec{a}],\vec{a}-\vec{b}) = \vec{a}\vec{b}\vec{a}+\vec{b}\vec{c}\vec{a}+\vec{c}\vec{a}\vec{a}-\vec{a}\vec{b}\vec{b}-\vec{b}\vec{c}\vec{b}-\vec{c}\vec{a}\vec{b} =$$

$$=\vec{b}\vec{c}\vec{a}-\vec{c}\vec{a}\vec{b}=0.$$

## Занятие 4

## Двойное векторное произведение. Разные задачи векторной алгебры. Подготовка к контрольной работе

(Д.В. Клетеник. Сборник задач по аналитической геометрии, задачи №№ 879–883)

| Тема | В аудитории | | ДЗ по категориям | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | основные | резерв | III | II | I |
| Двойное векторное произведение (№№ 879–883) | 880, 881, 883 (1) | 883 (4, 7, 8), 883 (2) | 883 (5) | 883 (10) | 883 (9, 12) |
| Разные задачи векторной алгебры | 794, 833, 854, 855,868 | 837 | 834, 858*, 877* (а) | 877* (в) | |

### Решения задач

**Задача № 881.** Даны вершины треугольника $A$ (2; –1; –3), $B$ (1; 2; –4) и $C$ (3; –1; –2). Вычислить координаты вектора $\vec{h}$, коллинеарного с его высотой, опущенной из вершины $A$ на противоположную сторону, при условии, что вектор $\vec{h}$ образует с осью $0y$ тупой угол и что его модуль равен $2\sqrt{34}$.

***Решение***. Воспользовавшись результатами задачи № 807, получим $\overrightarrow{AD}=\dfrac{(\vec{b},\vec{c})}{\vec{c}^{\,2}}\vec{c}-\vec{b}$, где $\vec{c}=\overrightarrow{CB}=\{-2;3;-2\}$, $\vec{b}=\overrightarrow{CA}=\{-1;0;-1\}$, т.е. $\overrightarrow{AD}=\left\{\dfrac{9}{17};\dfrac{12}{17};\dfrac{9}{17}\right\}$. Так как вектор $\vec{h}$ коллинеарен вектору $\overrightarrow{AD}$, но образует тупой угол с осью *y*, то $\vec{h}=-\dfrac{\overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AD}|}|\vec{h}|=\{-6;-8;-6\}$.

*Второй способ решения* (через двойное векторное произведение). Так как $\vec{h}\perp[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]$ и $\vec{h}\perp\overrightarrow{BC}$, то $\vec{h}=\lambda[\overrightarrow{BC}[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]]=$ $=\lambda\overrightarrow{AB}(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AC})-\lambda\overrightarrow{AC}(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AB})$, где $(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AC})=4$, $(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AB})=-13$ или $\vec{h}=\lambda(4\overrightarrow{AB}+13\overrightarrow{AC})=\lambda(9;12;9)$; $|\vec{h}|=2\sqrt{34}=|\lambda|\cdot3\sqrt{34}\Rightarrow|\lambda|=\dfrac{2}{3}$; по условию $\lambda=-\dfrac{2}{3}\Rightarrow\vec{h}=(-6;-8;-6)$.

**Задача № 883 (1, 2, 4, 5, 7–10, 12).** Доказать тождества.

***Решение***.

**(1)** $[\vec{a},[\vec{b},\vec{c}]]+[\vec{b},[\vec{c},\vec{a}]]+[\vec{c},[\vec{a},\vec{b}]]=0$. Воспользуемся тождеством

$$[\vec{a},[\vec{b},\vec{c}]]=\vec{b}(\vec{a},\vec{c})-\vec{c}(\vec{a},\vec{b}) \qquad (*)$$

(см. задачу № 879).

**(2)** $([\vec{a},\vec{b}],[\vec{c},\vec{d}])=(\vec{a},\vec{c})(\vec{b},\vec{d})-(\vec{a},\vec{d})(\vec{b},\vec{c})$. Обозначим $[\vec{c},\vec{d}]=\vec{e}$ и получаем смешанное произведение $([\vec{a},\vec{b}],[\vec{c},\vec{d}])=(\vec{a},\vec{b},\vec{e})=$ $=(\vec{a},[\vec{b},\vec{e}])$. Двойное векторное произведение $[\vec{b},\vec{e}]=[\vec{b},[\vec{c},\vec{d}]]=$ $=\vec{c}(\vec{b},\vec{d})-\vec{d}(\vec{b},\vec{c})$ (по формуле (*)). Поэтому

$$(\vec{a}\vec{b}\vec{e})=(\vec{b},\vec{d})(\vec{a},\vec{c})-(\vec{b},\vec{c})(\vec{a},\vec{d}).$$

**(4)** $[[\vec{a},\vec{b}],[\vec{c},\vec{d}]]=\vec{c}(\vec{a}\vec{b}\vec{d})-\vec{d}(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$. Обозначим $[\vec{a},\vec{b}]=\vec{e}$ и раскроем двойное векторное произведение по формуле (*):

$$[\vec{e},[\vec{c},\vec{d}]]=\vec{c}(\vec{e}\vec{d})-\vec{d}(\vec{e}\vec{c})=\vec{c}([\vec{a},\vec{b}],\vec{d})-\vec{d}([\vec{a},\vec{b}],\vec{c})=$$
$$=\vec{c}(\vec{a}\vec{b}\vec{d})-\vec{d}(\vec{a}\vec{b}\vec{c}).$$

**(5)** $[\vec{a},\vec{b}][\vec{b},\vec{c}][\vec{c},\vec{a}]=(\vec{a}\vec{b}\vec{c})^2$. Используем п. 4 данной задачи $[[\vec{a},\vec{b}],[\vec{c},\vec{d}]]=\vec{c}(\vec{a}\vec{b}\vec{d})-\vec{d}(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$ и получаем

$$[[\vec a,\vec b],[\vec b,\vec c]]=\vec b(\vec a\vec b\vec c)-\vec c(\vec a\vec b\vec b)=\vec b(\vec a\vec b\vec c).$$

Далее $(\vec a\vec b\vec c)\cdot(\vec b[\vec c,\vec a])=(\vec a\vec b\vec c)(\vec b\vec c\vec a)=(\vec a\vec b\vec c)^2$.

**(7)** $[\vec a[\vec b[\vec c,\vec d]]]=[\vec a\vec c](\vec b\vec d)-[\vec a\vec d](\vec b\vec c)$. По формуле (*) получаем $[\vec b[\vec c,\vec d]]=\vec c(\vec b\vec d)-\vec d(\vec b\vec c)$, поэтому $[\vec a[\vec b[\vec c,\vec d]]]=[\vec a\vec c](\vec b\vec d)-[\vec a\vec d](\vec b\vec c)$.

**(8)** $[\vec a[\vec b,[\vec c,\vec d]]]=(\vec a\vec c\vec d)\vec b-(\vec a,\vec b)[\vec c,\vec d]$. Обозначим $[\vec c,\vec d]=\vec e$ и применим формулу (*):

$$[\vec a[\vec b[\vec c,\vec d]]]=[\vec a[\vec b,\vec e]]=\vec b(\vec a,\vec e)-\vec e(\vec a,\vec b)=\vec b(\vec a\vec c\vec d)-[\vec c,\vec d](\vec a,\vec b).$$

**(9)** $[\vec a,\vec b]^2[\vec a,\vec c]^2-([\vec a,\vec b],[\vec a,\vec c])^2=\vec a^2(\vec a\vec b\vec c)^2$. Левую часть (как разность квадратов двух чисел) представим в виде

$$(|[\vec a,\vec b]|\cdot|[\vec a,\vec c]|-|[\vec a,\vec b]|\cdot|[\vec a,\vec c]|\cdot|\cos\varphi|)\times$$
$$\times(|[\vec a,\vec b]|\cdot|[\vec a,\vec c]|+|[\vec a,\vec b]|\cdot|[\vec a,\vec c]|\cdot|\cos\varphi|)=$$
$$=|[\vec a,\vec b]|^2\cdot|[\vec a,\vec c]|^2\sin^2\varphi=[[\vec a,\vec b],[\vec a,\vec c]]^2,$$

где $\varphi$ – угол между векторами $[\vec a,\vec b]$ и $[\vec a,\vec c]$. Обозначим $[\vec a,\vec b]=\vec e$ и представим двойное векторное произведение по формуле (*):

$$[[\vec a,\vec b],[\vec a,\vec c]]=[\vec e,[\vec a,\vec c]]=\vec a(\vec e\vec c)-\vec c(\vec e\vec a)=$$
$$=\vec a(\vec a,\vec b,\vec c)-\vec c(\vec a,\vec b,\vec a)=\vec a(\vec a,\vec b,\vec c).$$

Отсюда $[[\vec a,\vec b],[\vec a,\vec c]]^2=\vec a^2(\vec a,\vec b,\vec c)^2$.

**(10)** $[[\vec a,\vec b],[\vec b,\vec c]]\cdot[[\vec b,\vec c],[\vec c,\vec a]]\cdot[[\vec c,\vec a],[\vec a,\vec b]]=(\vec a\vec b\vec c)^4$. Рассмотрим сомножитель $[[\vec a,\vec b],[\vec b,\vec c]]$. Обозначим $[\vec a,\vec b]=\vec e$ и применим формулу (*): $[\vec e,[\vec b,\vec c]]=\vec b(\vec e,\vec c)-\vec c(\vec e,\vec b)=\vec b(\vec a\vec b\vec c)-\vec c(\vec a\vec b\vec b)=\vec b(\vec a\vec b\vec c)$. Аналогично: $[[\vec b,\vec c],[\vec c,\vec a]]=\vec c(\vec b\vec c\vec a)=\vec c(\vec a\vec b\vec c)$ и $([\vec c,\vec a],[\vec a,\vec b])=\vec a(\vec c\vec a\vec b)$. Следовательно, левая часть равна $(\vec a\vec b\vec c)^4$.

*Так как задачи № 858 и № 877 были сделаны на предыдущих семинарах, то в порядке подготовки к контрольной работе рекомендуется прорешать задачи, аналогичные этим.* Например:

**Задача № 858*. а)** Вычислить площадь треугольника, вершины которого находятся в точках $A$ (–1; 0; –1), $B$ (0; 2; –3) и $C$ (4; 4; 1).

(*Ответ*: 9.)

**б)** Вычислить высоту треугольника $ABC$, опущенную из точки $A$ на сторону $BC$, если $A$ (2; 3; –6), $B$ (6; 4; 4) и $C$ (3; 7; 4).

(*Ответ*: $h=\dfrac{15}{\sqrt{2}}$.)

**Задача № 877*.**

**а)** Вычислить объем параллелепипеда $ABCDA'B'C'D'$, зная его вершину $A$ (1; 2; 3) и концы выходящих из нее ребер $B$ (9; 6; 4), $D$ (3; 0; 4), $A'$ (5; 2; 6).

(*Ответ*: 48.)

**б)** Одна из вершин параллелепипеда $ABCDA'B'C'D'$ находится в точке $A$ (1; 2; 3), а концы выходящих из нее ребер – в точках $B$ (9; 6; 4), $D$ (3; 0; 4), $A'$ (5; 2; 6). Найти угол φ между диагональю $AC'$ и плоскостью грани $ABCD$ этого параллелепипеда.

***Решение***. Вектор $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\{10;2;2\}$, координаты точки $C$ (11; 4; 5), вектор $\overrightarrow{AA'}=\{4;0;3\}=\overrightarrow{CC'}$, откуда координаты точки $C'$ (15; 4; 8). Вектор $\overrightarrow{AC'}\{14;2;5\}$. Объем параллелепипеда равен

$$V=\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AA'},\overrightarrow{AD}\right)=\begin{pmatrix}8 & 4 & 1\\ 4 & 0 & 3\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix}=48.$$

С другой стороны, объем параллелепипеда равен произведению площади $S$ основания $ABCD$ на высоту $h$, опущенную на эту плоскость из вершины $C'$:

$$S=|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}]|=|6\vec{i}-6\vec{j}-24\vec{k}|=\sqrt{648}=18\sqrt{2},$$

$$h=\frac{48}{18\sqrt{2}}=\frac{8}{3\sqrt{2}},\quad |\overrightarrow{AC'}|=\sqrt{225}=15,$$

$$\sin\varphi=\frac{h}{|\overrightarrow{AC'}|}=\frac{8}{3\sqrt{2}\cdot 15}=\frac{4\sqrt{2}}{45}.$$

**в)** Три ребра тетраэдра идут из точки $O$ (0; 0; 0) в точки $A$ (2; 3; 1), $B$ (1; 2; 2) и $C$ (3; –1; 4). Найти объем тетраэдра.

(*Ответ*: 19/6.)

**г)** В тетраэдре $ABCD$ центры масс граней образуют тетраэдр, объем которого равен 9 куб. ед., $A$ (–2; 8; 1), $B$ (1; 2; 4) и $C$ (4; –4; –2), $D$ (7; $y$; 8). Найти координату $y$ точки $D$.

***Решение***. Так как центры масс граней тетраэдра находятся в точках пересечения медиан соответствующих треугольников, то основание внутреннего тетраэдра параллельно основанию внешнего, и из соображений подобия высоты их относятся как 1:3, а площади оснований – как 1:9. Поэтому объем внешнего тетраэдра *ABCD* равен 243 куб. ед. Далее, из того, что он равен модулю смешанного произведения векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$, находим: $y = -1$ или $y = -19$.

**д)** Найти высоту усеченной пирамиды, одно из оснований которой отсекает на координатных осях отрезки 2, 4 и –2, а другое – отрезок 2 на оси $0y$.

***Решение***. Объем неусеченной пирамиды $V = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \frac{8}{3}$,

площадь основания $S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 6$, высота $H = \frac{4}{3}$.

Из соображений подобия высота усеченной пирамиды в 2 раза меньше, т.е. $\frac{2}{3}$.

**е)** Найти объем тетраэдра, построенного на векторах $2\vec{p} - 3\vec{q} + \vec{r}$, $\vec{p} + \vec{q} - \vec{r}$ и $\vec{p} + 2\vec{q} + 2\vec{r}$, если угол φ между векторами $\vec{q}$ и $\vec{r}$ равен $\frac{\pi}{6}$ и $|\vec{p}| = |\vec{q}| = |\vec{r}| = 1$, $\vec{p} \perp \vec{q}$, $\vec{p} \perp \vec{r}$.

***Решение***.

$$V = \left|\frac{1}{6}([2\vec{p} - 3\vec{q} + \vec{r}, \vec{p} + 2\vec{q} + 2\vec{r}], \vec{p} + \vec{q} - \vec{r})\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{6}(7[\vec{p}, \vec{q}] + 8[\vec{r}, \vec{q}] + 3[\vec{p}, \vec{r}], \vec{p} + \vec{q} - \vec{r})\right| = |3(\vec{p}\vec{q}\vec{r})| = \frac{3}{2}.$$

*На дом можно задать те из задач, которые не успели решить в аудитории.*

## Занятие 5

## Контрольная работа по векторной алгебре

**Вариант 1**

1. Даны векторы $\vec{b}=\{3;-4;2\}$ и $\vec{c}=\{-1;1;4\}$. Найти проекцию вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}+\vec{c}$, если $\vec{a}=\{1;-3;4\}$.

2. Представить вектор $\vec{b}=\{25;-22\}$ линейной комбинацией векторов $\vec{a}_1=\{5;-2\}$ и $\vec{a}_2=\{7;-3\}$.

3. Вычислить синус угла между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=2\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ и $\vec{b}=\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}$.

4. Объем тетраэдра равен 5. Три его вершины находятся в точках $A$ (2;1;–1), $B$ (3;0;1), $C$ (2;–1;3). Найти координаты четвертой его вершины $D$, если известно, что она лежит на оси $0y$.

**Вариант 2**

1. Даны вершины треугольника $A$ (0;2;1), $B$ (5;0;–1), $C$ (1;3;–1). Найти длину его высоты, опущенной из вершины $A$.

2. Найти проекцию вектора $\vec{a}$, имеющего длину $a$ и направленного по биссектрисе угла $x0y$, на ось, совпадающую с биссектрисой угла $x0z$.

3. На векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ построен параллелепипед. Найти высоту этого параллелепипеда, опущенную из конца вектора $\vec{c}$; $\vec{a}=\{3;2;-5\}$, $\vec{b}=\{1;-1;4\}$, $\vec{c}=\{1;-3;1\}$.

4. Найти угол между векторами $\vec{a}=2\vec{m}+4\vec{n}$ и $\vec{b}=\vec{m}-\vec{n}$, где $\vec{m}$ и $\vec{n}$ – единичные векторы, угол между которыми 120°.

***Ответы***.

*Вариант 1*: 1) 5; 2) $\vec{b}=-79\vec{a}_1+60\vec{a}_2$; 3) $2\sqrt{\dfrac{62}{273}}$; 4) (0;–7;0).

*Вариант 2*: 1) $\dfrac{\sqrt{149}}{5}$; 2) $\pm\dfrac{a}{2}$; 3) $\dfrac{49}{\sqrt{323}}$; 4) $\dfrac{2\pi}{3}$.

## Занятие 6

## Прямая на плоскости

(Д.В. Клетеник. Сборник задач по аналитической геометрии, задачи №№ 210–379)

| Тема | В аудитории | | ДЗ по категориям | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | основные | резерв | III | II | I |
| Общее уравнение прямой | 214, 216 | 217 | 218 | | |
| Уравнение прямой с угловым коэффициентом. Уравнение прямой, проходящей через две точки | 221 (1,2,4,5), 223, 226, 227, 229 (а), 232 | 240 | 224, 234* (1) | 237 | 241, 270 |
| Перпендикулярность прямых | 263**, 264 (1, 3, 5), 269 | 256 | 264 (2, 4, 6), | | |
| Угол между прямыми | 253 (1), 265, 266 (1) | 279 | 253 (2,4), 259 | | 284 |
| Совместное исследование уравнений прямых | 291,296 | 297 | 292 | | |
| Уравнение прямой в отрезках | 299 (1) | 300 | 299 (2), 301 | 307 | |

* В этой задаче достаточно провести одну высоту.

** В этой задаче обратить внимание на геометрический смысл коэффициентов $A$ и $B$ в общем уравнении прямой $Ax + By + C = 0$ (координаты нормального вектора прямой). Кроме того, необходимо обеспечить знание студентами также следующих типовых задач на прямую в плоскости: провести прямую перпендикулярно заданному вектору через заданную точку; перейти от общего уравнения прямой к каноническому и параметрическим уравнениям; провести биссектрису угла между двумя прямыми.

### Решения задач

**Задача № 216.** Даны уравнения двух сторон параллелограмма $8x + 3y + 1 = 0$, $2x + y - 1 = 0$ и уравнение одной из его диагоналей $3x + 2y + 3 = 0$. Найти координаты вершин этого параллелограмма.

***Решение***. Решив совместно уравнения двух заданных сторон, найдем вершину $A$ (–2; 5). Эта точка не принадлежит диагонали. Поэтому, решая совместно уравнения каждой из двух заданных сторон с уравнением диагонали, получим еще две вершины: $B$ (1; –3) и $C$ (5; –9).

Далее найдем уравнения двух других сторон, зная их угловые коэффициенты и точки, через которые они проходят: $y - y_0 = k(x - x_0)$. Сторона, проходящая через точку $B$ (1; –3) параллельно прямой $2x + y - 1 = 0$, имеет уравнение $y + 2x + 1 = 0$. Сторона, проходящая черед точку $C$ (5; –9) параллельно прямой $8x + 3y + 1 = 0$, имеет уравнение $8x + 3y - 13 = 0$. Четвертая вершина есть пересечение этих двух сторон $D$ (8; –17).

**Задача № 218.** Площадь треугольника $S = 8$ кв. ед. Две его вершины суть точки $A$ (1; –2) и $B$ (2; 3), а третья вершина $C$ лежит на прямой $2x + y - 2 = 0$. Найти координаты вершины $C$.

***Решение***. Так как точка $C$ ($x_0$; $y_0$) лежит на прямой $2x + y - 2 = 0$, то $y_0 = 2 - 2x_0$. Площадь треугольника

$$S = \pm\frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix} = \pm\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ x_0 & 2-2x_0 & 1 \end{pmatrix} = 8,$$

откуда $x_0 = -1$ или $\frac{25}{7}$, $y_0 = 4$ или $-\frac{36}{7}$.

**Задача № 227.** Найти точку $Q$, симметричную точке $P$ (–5; 13) относительно прямой $2x - 3y - 3 = 0$.

***Решение***. Уравнение перпендикуляра из точки $P$ на заданную прямую $3x + 2y - 11 = 0$. Точка его пересечения с прямой $M$ (3; 1). По формулам деления отрезка в данном отношении находим $Q$ (11; –11).

**Задача № 231.** Даны середины сторон треугольника: $M_1$ (2; 1), $M_2$ (5; 3) и $M_3$ (3; –4). Составить уравнения его сторон.

***Решение***. Провести прямые через каждую пару заданных точек. Искомые прямые параллельны им и проходят каждая через заданную точку.

**Задача № 237.** Даны вершины треугольника $A$ (2; –2), $B$ (3, –5) и $C$ (5; 7). Составить уравнение перпендикуляра, опущенного из вершины $C$ на биссектрису внутреннего угла при вершине $A$.

***Решение***. Написать уравнение биссектрисы как прямой, проходящей через две точки: точку $A$ и точку пересечения ее со стороной $BC$ (последняя находится из условия, что она делит сторону в отношении, равном отношению длин соответствующих сторон треугольника). Уравнение искомого перпендикуляра получим как уравнение прямой, проходящей через заданную точку $C$, с известным угловым коэффициентом.

**Задача № 259.** Луч света направлен по прямой $x - 2y + 5 = 0$. Дойдя до прямой $3x - 2y + 7 = 0$, луч от нее отражается. Составить уравнение прямой, на которой лежит отраженный луч.

***Решение***. Найдем угол φ между данной прямой и падающим лучом:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2} = \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right) : \left(1 + \frac{3}{4}\right) = \frac{4}{7}.$$

Такой же угол с данной прямой образует и отраженный луч:

$$\frac{4}{7} = \frac{k_3 - k_1}{1 + k_1 k_3} = \left(k_3 - \frac{3}{2}\right) : \left(1 + \frac{3}{2} k_3\right), \quad k_3 = \frac{29}{2}.$$

Точка отражения луча имеет координаты $x_0 = -1$, $y_0 = 2$. Искомое уравнение отраженного луча $y - 2 = \frac{29}{2}(x + 1)$ или $29x - 2y + 33 = 0$.

**Задача № 270.** Составить уравнения сторон треугольника $ABC$, если даны одна из его вершин $A$ (1; 3) и уравнения двух медиан $x - 2y + 1 = 0$ и $y - 1 = 0$.

***Решение***. Найдем точку $O$ пересечения медиан: $O$ (1; 1). Продолжим медиану $AO$ за пределы треугольника до точки $D$ так, чтобы $AO = OD$. Координаты точки $D$ (1; –1).

Четырехугольник $OCDB$ – параллелограмм, так как диагонали в точке пересечения делятся пополам. Поэтому сторона $BD$, параллельная медиане $y - 1 = 0$, имеет угловой коэффициент $k = 0$, т.е. ее уравнение $y = -1$. Вершина $B$ треугольника есть пересечение этой стороны параллелограмма со второй медианой, т.е. ее координаты $B$ (–3; –1).

Аналогично уравнение стороны $DC$ параллелограмма $y + 1 = \frac{1}{2}(x - 1)$ или $x - 2y - 3 = 0$. Вершина $C$ треугольника есть пересечение этой прямой с медианой $y - 1 = 0$, поэтому координаты точки $C$ (5; 1). Зная все три вершины треугольника, получаем уравнения его сторон: $x - y + 2 = 0$, $x + 2y - 7 = 0$, $x - 4y - 1 = 0$.

**Задача № 296.** Доказать. что если три прямые $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, $A_3x + B_3y + C_3 = 0$ пересекаются в одной точке, то

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0 .$$

***Решение***. Решая первые два уравнения, получим:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -C_1 & B_1 \\ -C_2 & B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} A_1 & -C_1 \\ A_2 & -C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} .$$

Подставим полученные значения $x$ и $y$ в третье уравнение:

$$A_3 \cdot \frac{\begin{vmatrix} -C_1 & B_1 \\ -C_2 & B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} + B_3 \cdot \frac{\begin{vmatrix} A_1 & -C_1 \\ A_2 & -C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} + C_3 = 0$$

или

$$-A_3 \cdot \begin{vmatrix} C_1 & B_1 \\ C_2 & B_2 \end{vmatrix} - B_3 \cdot \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} + C_3 \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0 ,$$

а это есть разложение указанного определителя по элементам третьей строки.

**Задача № 307.** Через точку $M$ (4; 3) проведена прямая, отсекающая от координатного угла треугольник, площадь которого равна 3 кв. ед. Определить точки пересечения этой прямой с осями координат.

***Решение***. Запишем искомое уравнение в отрезках на координатных осях: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$. Точка $M$ удовлетворяет этому уравнению $\frac{4}{a} + \frac{3}{b} = 1$. Площадь треугольника $\frac{|a| \cdot |b|}{2} = 3$. Подставим сюда соотношение между $a$ и $b$ из первого уравнения, получим $\frac{a^2}{|a-4|} = 2$.

При $a > 4$ получаем $a^2 - 2a + 8 = 0$. Действительных корней нет. При $a < 4$ получаем $a^2 + 2a - 8 = 0$ и $a = 2$, $b = -3$ или второе решение $a = -4$, $b = \frac{3}{2}$.

# Занятие 7

## Прямая на плоскости (продолжение темы)

(Д.В. Клетеник. Сборник задач по аналитической геометрии, задачи №№ 309–379)

| Тема | В аудитории | | ДЗ по категориям | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | основные | резерв | III | II | I |
| Нормальное уравнение прямой (№№ 309–311) | 309 (1, 3, 5, 7), 310 (1, 4) | 311 (1, 3, 6) | 310 (2, 3) | | |
| Отклонение точки от прямой (№№ 312–338) | 312 (1,2), 313 (1,2), 314 | | 312 (3), 313 (3), 316 | 320 | |
| Биссектрисы углов между прямыми (№№ 339–352) | 339 (1), 341 (1, 2), 345, 347, 349 | 348 | 341 (3), 346 | 342 (2) | 351 |
| Уравнение пучка прямых (№№ 353–379) | 353, 354 (1, 3, 5), 355, 364 | 365, 374 | 354 (2, 4, 6), 369 | 359* | 378 |

*Достаточно найти одну высоту.

### Решения задач

**Задача № 314.** Точка $A$ (2; –5) является вершиной квадрата, одна из сторон которого лежит на прямой $x - 2y - 7 = 0$. Вычислить площадь этого квадрата.

***Решение.*** Записав уравнение в нормальном виде $\frac{x}{\sqrt{5}} - \frac{2y}{\sqrt{5}} - \frac{7}{\sqrt{5}} = 0$, найдем расстояние $d$ от точки $A$ до этой прямой: $d = \sqrt{5}$. Площадь квадрата равна 5.

**Задача № 320.** Даны вершины треугольника $A$ (–10;–13), $B$ (–2; 3) и $C$ (2; 1). Вычислить длину перпендикуляра, опущенного из вершины $B$ на медиану, проведенную из вершины $C$.

***Решение***. Координаты точки пересечения медианы со стороной $AB$ $x = -6$, $y = -5$. Уравнение медианы $3x - 4y - 2 = 0$ запишем в нормальном виде: $\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - \frac{2}{5} = 0$. Искомая длина равна расстоянию от точки $B$ до этой прямой: $d = 4$.

**Задача № 339.** Составить уравнения биссектрис углов, образованных двумя пересекающимися прямыми $x - 3y + 5 = 0$ и $3x - y - - 2 = 0$.

***Решение***. Записав оба уравнения в нормальном виде и приравняв их левые части, получим уравнение биссектрисы того угла между прямыми, в котором лежит начало координат (и вертикального с ним): $-\frac{x}{\sqrt{10}} + \frac{3y}{\sqrt{10}} - \frac{5}{\sqrt{10}} = \frac{3x}{\sqrt{10}} - \frac{y}{\sqrt{10}} - \frac{2}{\sqrt{10}}$, $4x - 4y + 3 = 0$.

Уравнение биссектрисы угла, смежного с тем, в котором лежит начало координат, получим, приравняв левые части, одна из которых взята с минусом: $2x + 2y - 7 = 0$.

**Задача № 341.** Определить, лежат ли точка $M$ (1;–2) и начало координат в одном, смежных или вертикальных углах, образованных при пересечении двух прямых: $2x - y - 5 = 0$, $3x + y + 10 = 0$.

***Решение***. Записываем уравнение обеих прямых в нормальном виде, находим отклонения точки $M$ от обеих прямых. Если они оба отрицательны, то точка $M$ и начало координат лежат в одном углу; если оба положительны, то в вертикальных; если разных знаков, то в смежных.

**Задача № 342.** Определить, лежат ли точки $M$ (2;3) и $N$ (5;–1) в одном, смежных или вертикальных углах, образованных при пересечении двух прямых: $x - 3y - 5 = 0$, $2x + 9y - 2 = 0$.

***Решение***. Вычислим отклонения точек $M$ и $N$ от обеих прямых. Если обе точки имеют отклонения от одной прямой одинакового знака и от другой прямой также одинакового знака, то точки принадлежат одному углу. Если от одной прямой – разных знаков и от другой прямой – разных знаков, то точки находятся в вертикальных углах. Если от одной прямой – разных знаков, а от другой прямой – одинаковых знаков, то точки находятся в смежных углах.

**Задача № 345.** Определить, какой из углов (острый или тупой), образованных двумя прямыми $3x - 2y + 5 = 0$ и $2x + y - 3 = 0$, содержит начало координат.

***Решение***. Приведем оба уравнения к нормальному виду: $-\frac{3x}{\sqrt{13}} + \frac{2y}{\sqrt{13}} - \frac{5}{\sqrt{13}} = 0$, $\frac{2x}{\sqrt{5}} + \frac{y}{\sqrt{5}} - \frac{3}{\sqrt{5}} = 0$. Здесь нормальный вектор $\vec{n}_1$ первой прямой, приложенный к началу координат. Его координаты: $\vec{n}_1\left\{-\frac{3}{\sqrt{13}}; \frac{2}{\sqrt{13}}\right\}$. Координаты вектора второй прямой $\vec{n}_2\left\{\frac{2}{\sqrt{5}}; \frac{1}{\sqrt{5}}\right\}$. Найдем косинус угла φ между ними:

$$\cos\varphi = (\vec{n}_1, \vec{n}_2) = -\frac{6}{\sqrt{65}} + \frac{2}{\sqrt{65}} = -\frac{4}{\sqrt{65}} < 0.$$

Угол φ между нормалями – тупой, следовательно, угол между прямыми, в котором лежит начало координат, – острый.

**Задача № 346.** Определить, какой из углов (острый или тупой), образованных двумя прямыми $3x - 5y - 4 = 0$ и $x + 2y + 3 = 0$, содержит точку $M$ (2; –5).

***Решение***. Приведем оба уравнения к нормальному виду: $\frac{3x}{\sqrt{34}} - \frac{5y}{\sqrt{34}} - \frac{4}{\sqrt{34}} = 0$, $-\frac{x}{\sqrt{5}} - \frac{2y}{\sqrt{5}} - \frac{3}{\sqrt{5}} = 0$. Найдем знаки отклонений точки $M$ от этих прямых. Оба они положительны. Поэтому точка $M$ и начало координат лежат в вертикальных углах (см. задачу № 341). Найдем характер угла, в котором лежит начало координат: $\cos\varphi = (\vec{n}_1, \vec{n}_2) = -\frac{3}{\sqrt{34}\cdot\sqrt{5}} + \frac{10}{\sqrt{34}\cdot\sqrt{5}} > 0$. Угол между нормалями острый, значит, угол между прямыми – тупой. Точка $M$ принадлежит тупому углу.

**Задача № 347.** Составить уравнение биссектрисы угла между прямыми $3x - y - 4 = 0$ и $2x + 6y + 3 = 0$, в котором лежит начало координат.

***Решение.*** Приведем оба уравнения к нормальному виду: $\frac{3x}{\sqrt{10}} - \frac{y}{\sqrt{10}} - \frac{4}{\sqrt{10}} = 0$, $-\frac{x}{\sqrt{10}} - \frac{3y}{\sqrt{10}} - \frac{3}{2\sqrt{10}} = 0$. Уравнение биссектрисы угла, в котором лежит начало координат, получим, приравняв левую часть первого уравнения к левой части второго уравнения со знаком «плюс» (приравняв со знаком «минус, получим биссектрису смежного угла): $3x-y-4=-x-3y-\dfrac{3}{2}$ или $8x + 4y - 5 = 0$ (см. задачу № 341).

**Задача № 348.** Составить уравнение биссектрисы угла между прямыми $x - 7y + 5 = 0$ и $5x + 5y - 3 = 0$, смежного с углом, содержащим начало координат.

***Решение.*** В соответствии с решением предыдущей задачи приравниваем левую часть первого уравнения к левой части второго уравнения со знаком «минус»:

$$-\frac{x}{\sqrt{50}}+\frac{7y}{\sqrt{50}}-\frac{5}{\sqrt{50}}=-\frac{5x}{\sqrt{50}}-\frac{5y}{\sqrt{50}}+\frac{3}{\sqrt{50}} \text{ или } x + 3y - 2 = 0.$$

**Задача № 349.** Составить уравнение биссектрисы угла между прямыми $x + 2y - 11 = 0$ и $3x - 6y - 5 = 0$, в котором лежит точка $M$ (1; –3).

***Решение.*** Приведем оба уравнения к нормальному виду: $\dfrac{x}{\sqrt{5}}+\dfrac{2y}{\sqrt{5}}-\dfrac{11}{\sqrt{5}}=0,\ \dfrac{3x}{\sqrt{45}}-\dfrac{6y}{\sqrt{45}}-\dfrac{5}{\sqrt{45}}=0$. Найдем знаки отклонений точки $M$ от этих прямых: $\delta_1 < 0$, $\delta_2 > 0$, т.е. точка $M$ и начало координат лежат в смежных углах. Уравнение искомой биссектрисы получим, приравняв левые части нормальных уравнений прямых с противоположными знаками:

$$\frac{x}{\sqrt{5}}+\frac{2y}{\sqrt{5}}-\frac{11}{\sqrt{5}}=-\frac{3x}{\sqrt{45}}+\frac{6y}{\sqrt{45}}+\frac{5}{\sqrt{45}}$$

или $3x - 19 = 0$.

**Задача № 351.** Составить уравнение биссектрисы острого угла, образованного двумя прямыми $3x + 4y - 5 = 0$ и $5x - 12y + 3 = 0$.

***Решение.*** Приведем оба уравнения к нормальному виду: $\dfrac{3x}{5}+\dfrac{4y}{5}-1=0,\ -\dfrac{5x}{13}+\dfrac{12}{13}y-\dfrac{3}{13}=0$. Найдем знак косинуса угла $\varphi$ между нормалями, проведенными из начала координат:

$$\cos\varphi=(\vec{n}_1,\vec{n}_2)=-\frac{15}{5\cdot 13}+\frac{4\cdot 12}{5\cdot 13}>0,$$

т.е. угол между нормалями острый, значит, угол между прямыми – тупой. Начало координат принадлежит тупому углу, поэтому уравнение биссектрисы острого угла получим, приравняв левые части уравнений со знаком «минус»:

$$\frac{3x}{5}+\frac{4y}{5}-1=\frac{5x}{13}-\frac{12}{13}y+\frac{3}{13} \quad \text{или} \quad 7x+56y-40=0.$$

**Задача № 359.** Даны уравнения сторон треугольника: $x + 2y - 1 = 0$, $5x + 4y - 17 = 0$, $x - 4y + 11 = 0$. Не определяя координат его вершин, составить уравнения высот этого треугольника.

***Решение***. Найдем уравнение одной из высот, например той, которая опущена из точки пересечения первой и второй сторон на третью. Уравнение пучка прямых, проходящих через эту точку, имеет вид: $x + 2y - 1 + \lambda(5x + 4y - 17) = 0$. Этому пучку принадлежит и искомая высота, угловой коэффициент которой равен –4 (так как она перпендикулярна третьей высоте). Приравниваем эту величину угловому коэффициенту, найденному из уравнения пучка прямых: $-4=-\dfrac{1+5\lambda}{2+4\lambda}$ и отсюда получаем $\lambda=-\dfrac{7}{11}$. Уравнение искомой высоты $4x + y - 18 = 0$.

Другие уравнения находятся аналогично.

**Задача № 374.** Составить уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $3x + y - 5 = 0$ и $x - 2y + 10 = 0$ и отстоящей от точки $C$ (–1; –2) на расстоянии $d = 5$. Решить задачу, не вычисляя координат точки пресечения данных прямых.

***Решение***. Уравнение пучка прямых $3x + y - 5 + \lambda(x - 2y + 10) = 0$. Приводим его к нормальному виду:

$$\pm\frac{(3+\lambda)x+(1-2\lambda)y-5+10\lambda}{\sqrt{(3+\lambda)^2+(1-2\lambda)^2}}=0$$

Подставляем координаты точки $C$:

$$5=\frac{|-3-\lambda+4\lambda-2-5+10\lambda|}{\sqrt{(3+\lambda)^2+(1-2\lambda)^2}} \Rightarrow \lambda=\frac{15}{2} \text{ и } \lambda=-\frac{5}{11}.$$

Соответственно, получаем два решения: $3x - 4y + 20 = 0$ и $4x + 3y - 15 = 0$.

**Задача № 378.** Стороны $AB$, $BC$, $CD$ и $DA$ четырехугольника $ABCD$ заданы соответственно уравнениями: $5x + y + 13 = 0$, $2x - 7y -$

$-17 = 0$, $3x + 2y - 13 = 0$, $3x - 4y + 17 = 0$. Не определяя координат его вершин, составить уравнения его диагоналей $AC$ и $BD$.

***Решение***. Найдем одну из диагоналей, например $BD$. Уравнение пучка прямых, проходящих через вершину $B$:

$$5x + y + 13 + \lambda_1(2x - 7y - 17) = 0,$$

Уравнение пучка прямых, проходящих через вершину $D$:

$$3x + 2y - 13 + \lambda_2(3x - 4y + 17) = 0.$$

Диагональ $BD$ принадлежит обоим пучкам, поэтому

$$5 + 2\lambda_1 = (3 + 3\lambda_2)k,$$
$$1 - 7\lambda_1 = (2 - 4\lambda_2)k,$$
$$13 - 17\lambda_1 = (-13 + 17\lambda_2)k,$$

отсюда $\lambda_1 = \dfrac{23}{50}$ и $\lambda_2 = \dfrac{25}{23}$, уравнение $BD$: $8x - 3y + 7 = 0$.

Уравнение диагонали $AC$ находится аналогично.

## Занятие 8

## Плоскость

(Д.В. Клетеник. Сборник задач по аналитической геометрии, задачи №№ 913–981)

| Тема | В аудитории | | ДЗ по категориям | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | основные | резерв | III | II | I |
| Общее уравнение плоскости. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку, с данным нормальным вектором (№№ 913–923) | 913, 917, 921, 923 (1, 2, 5) | 918, 920, 922 | 923 (3, 6) | | |
| Взаимное расположение плоскостей. Угол между плоскостями (№№ 924–939) | 924, 925, 928 (1, 3), 935, 937 | 929, 933 | 926 (1), 927 (1), 930 | 936 | 938 |
| Неполные уравнения плоскости (№№ 940–942) | 940 (1), 941 (1), 942 (2) | 940 (3), 942 (3) | 940 (2), 941 (3), 942 (1) | | |

| Тема | В аудитории | | ДЗ по категориям | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | основные | резерв | III | II | I |
| Уравнение плоскости в отрезках (№№ 943–955) | 944, 954 | 953 | 945 | 947 | |
| Нормальное уравнение плоскости (№№ 956–958) | 957 (1) | 958 | 957 (4) | | |
| Расстояние от точки до плоскости (№№ 959–972) | 959 (1), 961 (1) | 959 (2), 960 | 959 (3) | | |
| Двугранные углы между плоскостями. Биссектральные плоскости (№№ 973–981) | 973 (1), 974 (1), 978 | 977, 979 | 976 | 975 (1), 980 | |

## Решения задач

**Задача № 917.** Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1$ (3; 4; –5) параллельно двум векторам $\vec{a}_1$ {3; 1; –1} и $\vec{a}_2$ {1; –2; 1}.

***Решение***. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку $M_1$ ($x_1$; $y_1$; $z_1$) и имеющей данный нормальный вектор $\vec{N}$ {$A$; $B$; $C$}, имеет вид $A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0$. В данной задаче нормальный вектор искомой плоскости есть векторное произведение $\vec{N} = [\vec{a}_1, \vec{a}_2]$:

$$\vec{N} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -\vec{i} - 4\vec{j} - 7\vec{k} .$$

Уравнение плоскости $x + 4y + 7z + 16 = 0$.

**Задача № 918.** Доказать, что уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0$ ($x_0$; $y_0$; $z_0$) параллельно двум векторам $\vec{a}_1$ = {$l_1$; $m_1$; $n_1$} и $\vec{a}_2$ = {$l_2$; $m_2$; $n_2$}, может быть представлено в виде:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0$$

***Решение***. Произвольная точка $M$ с текущими координатами ($x$, $y$, $z$) принадлежит искомой плоскости тогда и только тогда, когда вектор $\overrightarrow{MM_0}$ перпендикулярен вектору $\vec{N} = [\vec{a}_1, \vec{a}_2]$, т.е. при условии, что скалярное произведение $(\overrightarrow{MM_0}, [\vec{a}_1, \vec{a}_2]) = 0$, что и дает указанное соотношение.

**Задача № 920.** Доказать, что уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1$ ($x_1$; $y_1$; $z_1$) и $M_2$ ($x_2$; $y_2$; $z_2$) параллельно вектору $\vec{a}$ = = {$l$; $m$; $n$}, может быть представлено в виде:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0 .$$

***Решение.*** Произвольная точка $M$ с текущими координатами ($x$, $y$, $z$) принадлежит искомой плоскости тогда и только тогда, когда векторное произведение векторов $\overrightarrow{M_1M_2}$ и $\overrightarrow{M_1M}$ перпендикулярно вектору $\vec{a}$, т.е. при условии, что скалярное произведение $(\vec{a}, [\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M}]) = 0$, что и дает указанное соотношение.

**Задача № 922.** Доказать, что уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1$ ($x_1$; $y_1$; $z_1$), $M_2$ ($x_2$; $y_2$; $z_2$) и $M_3$ ($x_3$; $y_3$; $z_3$), может быть представлено в виде:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 .$$

***Решение.*** Точка $M$ с текущими координатами ($x$, $y$, $z$) принадлежит указанной плоскости тогда и только тогда, когда компланарны три вектора $\overrightarrow{MM_1}$, $\overrightarrow{M_2M_1}$ и $\overrightarrow{M_3M_1}$, т.е. их смешанное произведение равно нулю.

**Задача № 933.** Доказать, что уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0$ ($x_0$; $y_0$; $z_0$) перпендикулярно к плоскостям $A_1x$ + + $B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2$, может быть представлено в виде:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0 .$$

***Решение***. Указанная плоскость должна проходить перпендикулярно линии пересечения двух заданных плоскостей, т.е. для произвольной точки $M$ этой плоскости с текущими координатами ($x$, $y$, $z$) должно выполняться условие перпендикулярности вектора $\overrightarrow{MM_0}$ векторному произведению векторов $\vec{N}_1(A_1, B_1, C_1)$ и $\vec{N}_2(A_2, B_2, C_2)$, т.е. должно равняться нулю смешанное произведение трех векторов: $(\vec{N}_1, \vec{N}_2, \overrightarrow{MM_0}) = 0$.

**Задача № 937.** Доказать, что три плоскости $7x + 4y + 7z + 1 = 0$, $2x - y - z + 2 = 0$ и $x + 2y + 3z - 1 = 0$ проходят через одну прямую.

***Решение***. Три плоскости проходят через одну прямую, если их нормальные векторы компланарны, т.е. смешанное произведение их нормальных векторов равно нулю, и, кроме того, у них есть хоть одна общая точка. Поэтому надо установить равенство нулю смешанного произведения нормальных векторов и наличие решения у системы трех уравнений с тремя неизвестными.

**Задача № 938.** Доказать, что три плоскости $2x - y + 3z - 5 = 0$, $3x + y + 2z - 1 = 0$ и $4x + 3y + z + 2 = 0$ пересекаются по трем различным параллельным прямым.

***Решение***. В этом случае все три нормальных вектора должны быть компланарны, а система трех уравнений плоскостей не должна иметь решения.

**Задача № 947.** Вычислить объем пирамиды. ограниченной плоскостью $2x - 3y + 6z - 12 = 0$ и координатными плоскостями.

***Решение***. Уравнение плоскости в отрезках: $\frac{x}{6} - \frac{y}{4} + \frac{z}{2} = 1$. Объем пирамиды равен $\pm\frac{1}{6}$ смешанного произведения векторов $\{6; 0; 0\}$, $\{0; -4; 0\}$ и $\{0; 0; 2\}$, т.е. 8.

**Задача № 961.** Определить, лежат ли точка $Q$ (2; –1; 1) и начало координат по одну или по разные стороны относительно заданной плоскости.

***Решение***. Отклонение точки от плоскости положительно или отрицательно в зависимости от того, соответственно, лежат ли точка и начало координат по разные стороны или по одну сторону от заданной плоскости.

Задачи №№ 973–981 решаются точно так же, как аналогичные задачи для прямых на плоскости (см. задачи №№ 341–352). Рассмотрим, например, следующую задачу.

**Задача № 978.** Составить уравнение плоскости, делящей пополам тот двугранный угол между двумя плоскостями $2x - 14y + 6z - 1 = 0$ и $3x + 5y - 5z + 3 = 0$, в котором лежит начало координат.

***Решение***. Биссектральная плоскость двугранного угла, в котором лежит начало координат, есть геометрическое место точек, отклонения которых до данных плоскостей равны как по модулю, так и по знаку. Поэтому приводим уравнения плоскостей к нормальному виду и приравниваем левые части:

$$\frac{2x}{\sqrt{236}} - \frac{14y}{\sqrt{236}} + \frac{6z}{\sqrt{236}} - \frac{1}{\sqrt{236}} = -\frac{3x}{\sqrt{59}} - \frac{5y}{\sqrt{59}} + \frac{5z}{\sqrt{59}} - \frac{3}{\sqrt{59}}$$

или

$$8x - 4y - 4z + 5 = 0.$$

**Задача № 980.** Составить уравнение плоскости, которая делит пополам острый двугранный угол, образованный двумя плоскостями $2x - 3y - 4z - 3 = 0$ и $4x - 3y - 2z - 3 = 0$.

***Решение***. Определим, принадлежит ли начало координат острому или тупому углу. Для этого запишем уравнения в нормальном виде:

$$\frac{2x}{\sqrt{29}} - \frac{3y}{\sqrt{29}} - \frac{4z}{\sqrt{29}} - \frac{3}{\sqrt{29}} = 0;$$

$$\frac{4x}{\sqrt{29}} - \frac{3y}{\sqrt{29}} - \frac{2z}{\sqrt{29}} - \frac{3}{\sqrt{29}} = 0.$$

Найдем косинус угла между нормалями к плоскостям, проведенными из начала координат:

$$\cos\varphi = (\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \frac{1}{29}(2 \cdot 4 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 2) > 0\,.$$

Угол $\varphi$ – острый, значит, угол между плоскостями, в котором лежит начало координат, тупой. Поэтому уравнение биссектральной плоскости острого угла получим, приравняв левые части нормальных уравнений с противоположным знаком:

$$2x - 3y - 4z - 3 = -4x + 3y + 2z + 3$$

или

$$x - y - z - 1 = 0.$$

## Занятие 9

## Прямая в пространстве

(Д.В. Клетеник. Сборник задач по аналитической геометрии, задачи №№ 982–1037)

| Тема | В аудитории | | ДЗ по категориям | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | основные | резерв | III | II | I |
| Общие уравнения прямой (№№ 982–988) | 982, 987 (1) | 984, 985 | 983, 988 (1, 6) | | |
| Пучок плоскостей (№№ 989–1006) | 989 (1, 2), 994, 1003*, 1005 | 991, 996, 997, 1001 | 990 (1,2), 1004** | 1006 | |
| Канонические и параметрические уравнения прямой (№№ 1007–1037) | 1007 (1–3), 1008 (1), 1016, 1019 (1), 1026, 1029 | 1012, 1013, 1015, 1023, 1027 | 1008 (2), 1019 (2), 1020 (1), 1025 | 1028 | 1030, 1031 |

* На плоскость $x0y$.

** На плоскость $y0z$.

### Решения задач

**Задача № 987.** Найти соотношения, которым должны удовлетворять коэффициенты уравнений прямой $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$ для того, чтобы эта прямая была бы параллельна оси $0x$.

***Решение***. Прямая должна быть пересечением плоскостей, параллельных оси $0x$, т.е. нормальный вектор каждой плоскости перпендикулярен направляющему вектору $\vec{i}$ оси $0x$:

$$A_1 \cdot 1 + B_1 \cdot 0 + C_1 \cdot 0 = 0,$$

$$A_2 \cdot 1 + B_2 \cdot 0 + C_2 \cdot 0 = 0,$$

т.е. должно быть $A_1 = 0$ и $A_2 = 0$. В то же время хотя бы одно из чисел $D_1$ или $D_2$ не должно равняться нулю, иначе прямая совпадет с осью $0x$.

**Задача № 988.** Найти соотношения, которым должны удовлетворять коэффициенты уравнений прямой $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$ для того, чтобы эта прямая: 1) пересекала ось абсцисс; 6) совпадала с осью аппликат.

***Решение***.

1) Чтобы прямая пересекала ось абсцисс, ей должна принадлежать точка с координатами ($x$; 0; 0), т.е. $A_1x = -D_1$ и $A_2x = -D_2$, откуда $\dfrac{A_1}{D_1} = \dfrac{A_2}{D_2}$.

6) Прямая совпадает с осью аппликат, если ей принадлежат точки с координатами (0; 0; $z$), где $z$ – любое, т.е. $C_1z + D_1 = 0$ и $C_2z + D_2 = 0$, откуда $C_1 = D_1 = C_2 = D_2 = 0$.

**Задача № 989 (2).** В пучке плоскостей $2x - 3y + z - 3 + \lambda(x + 3y + 2z + 1) = 0$ найти плоскость, которая параллельна оси $0x$.

***Решение***. Нормальный вектор такой плоскости перпендикулярен направляющему вектору $\vec{i}$ (1; 0; 0) оси $0x$, т.е. их скалярное произведение равно нулю: $2 + \lambda = 0$, $\lambda = -2$. Уравнение плоскости $9y + 3z + 5 = 0$.

**Задача № 1003.** Составить уравнения плоскостей, проектирующих прямую $\begin{cases} 2x - y + 2z - 3 = 0, \\ x + 2y - z - 1 = 0 \end{cases}$ на координатные плоскости.

***Решение***. Найдем уравнение плоскости, проектирующей данную прямую, например, на плоскость $x0y$. Она содержится в пучке $2x - y + 2z - 3 + \lambda(x + 2y - z - 1) = 0$. Эта плоскость имеет нормальный вектор, перпендикулярный оси $0z$, т.е. скалярное произведение нормального вектора $\{2 + \lambda; -1 + 2\lambda; 2 - \lambda\}$ на вектор $\vec{k} = (0; 0; 1)$ равно нулю, откуда $\lambda = 2$, тогда уравнение искомой плоскости $4x + 3y - 5 = 0$.

**Задача № 1004.** Составить уравнения проекций прямой $\begin{cases} x + 2y - 3z - 5 = 0, \\ 2x - y + z + 2 = 0 \end{cases}$ на координатные плоскости.

***Решение***. Уравнение прямой – проекции заданной прямой на координатную плоскость $x0y$ – это уравнение проектирующей плоскости, которая находится так, как показано в задаче № 1003, и уравнение $z = 0$ координатной плоскости $x0y$, т.е. $\begin{cases} 7x - y + 1 = 0, \\ z = 0, \end{cases}$

так как $\lambda = 3$.

**Задача № 1005.** Составить уравнение плоскости, проектирующей прямую $\begin{cases} 3x + 2y - z - 1 = 0, \\ 2x - 3y + 2z - 2 = 0 \end{cases}$ на плоскость $x + 2y + 3z - 5 = 0$.

***Решение***. Плоскость содержится в пучке плоскостей $3x + 2y - z - 1 + \lambda(2x - 3y + 2z - 2) = 0$. Она перпендикулярна плоскости $x + 2y + 3z - 5 = 0$, т.е. скалярное произведение их нормальных векторов равно нулю: $(3 + 2\lambda)\cdot 1 + (2 - 3\lambda)\cdot 2 + (-1 + 2\lambda)\cdot 3 = 0$, откуда $\lambda = -2$. Искомое уравнение $x - 8y + 5z - 3 = 0$.

**Задача № 1006.** Составить уравнения проекции прямой $\begin{cases} 5x - 4y - 2z - 5 = 0, \\ x + 2z - 2 = 0 \end{cases}$ на плоскость $2x - y + z - 1 = 0$.

***Решение***. В пучке плоскостей $5x - 4y - 2z - 5 + \lambda(x + 2z - 2) = 0$ находим проектирующую плоскость из условия, что скалярное произведение ее нормального вектора и нормального вектора плоскости $2x - y + z - 1 = 0$ равняется нулю:

$$(5 + \lambda)\cdot 2 + (-4)\cdot(-1) + (-2 + 2\lambda)\cdot 1 = 0,$$

откуда $\lambda = -3$. Искомые уравнения проекции $\begin{cases} 2x - 4y - 8z + 1 = 0, \\ 2x - y + z - 1 = 0. \end{cases}$

**Задача № 1013.** Даны вершины треугольника $A$ (3; –1; –1), $B$ (1; 2; –7) и $C$ (–5; 14; –3). Составить канонические уравнения биссектрисы его внутреннего угла при вершине $B$.

***Решение***. Найдем координаты точки $M$ пересечения биссектрисы со стороной $AC$ из условия, что биссектриса делит сторону на части, пропорциональные соответствующим сторонам треугольника: $|AB| = 7$, $|BC| = 14$, $MC : AM = 2 : 1$, $M\left(\frac{1}{3}; 4; -\frac{5}{3}\right)$. Уравнения прямой, проходящей через точки $B$ и $M$,

$$\frac{x - x_B}{l} = \frac{y - y_B}{m} = \frac{z - z_B}{n},$$

где $\overrightarrow{BM} = \{l; m; n\}$, $l = \frac{2}{3}$, $m = -2$, $n = -\frac{16}{3}$ или

$$\frac{x-1}{2/3}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+7}{-16/3} \quad \text{или} \quad \frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z+7}{-8}.$$

Другой способ: так как $|\overrightarrow{AB}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{BC}|$, то направляющий вектор биссектрисы угла $B$ равен $\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right)=\{-1;3;8\}$.

**Задача № 1016.** Дана прямая $\begin{cases}2x-5y+z-3=0,\\ x+2y-z+2=0.\end{cases}$ Вычислить проекции на оси координат какого-нибудь ее направляющего вектора $\vec{a}$. Найти общее выражение проекций на оси координат произвольного направляющего вектора этой прямой.

***Решение***. Направляющий вектор может быть получен как векторное произведение нормальных векторов плоскостей, задающих прямую

$$\vec{a}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -5 & 1\\ 1 & 2 & -1\end{vmatrix}=3\vec{i}+3\vec{j}+9\vec{k}.$$

Любой вектор, коллинеарный $\vec{a}$, может служить направляющим вектором данной прямой: $\vec{a}$ = {λ; λ; 3λ}, где λ – любое число. не равное нулю.

**Задача № 1019 (1).** Составить канонические уравнения прямой $\begin{cases}x-2y+3z-4=0,\\ 3x+2y-5z-4=0.\end{cases}$

***Решение***. Найдем какой-либо направляющий вектор $\vec{a}$ прямой, например, как векторное произведение нормальных векторов двух данных плоскостей:

$$\vec{a}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -2 & 3\\ 3 & 2 & -5\end{vmatrix}=4\vec{i}+14\vec{j}+8\vec{k}.$$

Взяв в качестве точки, через которую проходит прямая, например, точку с координатами (2; –1; 0), получим искомые уравнения:

$$\frac{x-2}{4}=\frac{y+1}{14}=\frac{z}{8} \quad \text{или} \quad \frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{7}=\frac{z}{4}.$$

**Задача № 1026.** Доказать, что прямые, заданные параметрическими уравнениями $x = 2t - 3$, $y = 3t - 2$, $z = -4t + 6$ и $x = t + 5$, $y = -4t - 1$, $z = t - 4$, пересекаются.

***Решение***. Найдем точку $M(x; y; z)$, координаты которой удовлетворяют уравнениям обеих прямых. Приравняв $x$-координаты из уравнений обеих прямых, получим $2t_1 - 3 = t_2 + 5$ или $2t_1 = 8 + t_2$. Подставив это значение $t_1$ в выражения для $y$ в обоих уравнениях, получим $y_1 = 3t_1 - 2 = y_2 = -4t_2 - 1$ или $t_1 = 3$, $t_2 = -2$. Подставив это значение $t_1$ в выражения для $z = -4t_1 + 6$ и $z = t_2 - 4$, убеждаемся, что координаты $z$ тоже равны.

**Задача № 1029.** Составить уравнения прямой, которая проходит через точку $M_1(-1; 2; -3)$ перпендикулярно к вектору $\vec{a} = \{6; -2; -3\}$ и пересекает прямую $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-3}{-5}$.

***Решение.*** Пусть $M_2(x_2; y_2; z_2)$ – точка пересечения заданной и искомой прямых. Ее координаты удовлетворяют уравнениям $\dfrac{x_2-1}{3}=\dfrac{y_2+1}{2}=\dfrac{z_2-3}{-5}=t$, тогда $x_2 = 3t + 1$, $y_2 = 2t - 1$, $z_2 = 5t + 3$.

В качестве направляющего вектора искомой прямой возьмем вектор $\overrightarrow{M_1M_2}=\{x_2+1; y_2-2; z_2+3\}$. Так как он перпендикулярен вектору $\vec{a}$, то

$$6(x_2 +1) - 2(y_2 - 2) - 3(z_2 + 3) = 0$$

или

$$6(3t + 2) - 2(2t - 3) - 3(5t + 6) = 0,$$

откуда $t = 0$, $x_2 = 1$, $y_2 = -1$, $z_2 = 3$.

Искомое уравнение $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z+3}{6}$.

**Задача № 1030.** Составить уравнения прямой, которая проходит через точку $M_1(-4; -5; 3)$ и пересекает две прямые: $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y+3}{-2}=\dfrac{z-2}{-1}$ и $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-1}{-5}$.

***Решение.*** Пусть $M_2(x_2; y_2; z_2)$ – точка пересечения искомой прямой с первой заданной и $M_3(x_3; y_3; z_2)$ – точка пересечения искомой прямой со второй заданной. Из параметрических уравнений прямых имеем:

$$x_2 = 3t - 1,\ y_2 = -2t - 3,\ z_2 = -t + 2,$$
$$x_3 = 2\tau + 2,\ y_3 = 3\tau - 1,\ z_3 = -5\tau + 1.$$

Так как точки $M_1$, $M_2$ и $M_3$ принадлежат искомой прямой, то векторы $\overrightarrow{M_1M_2}$ и $\overrightarrow{M_1M_3}$ коллинеарны. Поэтому $\dfrac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} = \dfrac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1} = \dfrac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}$,

отсюда $\dfrac{3t+3}{2\tau+6} = \dfrac{-2t+2}{3\tau+4} = \dfrac{-t-1}{-5\tau-2}$ и $t = \tau = 0$, т.е. $M_2\ (-1; -3; 2)$, $M_3\ (2; -1; 1)$.

Теперь найдем направляющий вектор искомой прямой: $\overrightarrow{M_2M_3} = \{3; 2; -1\}$ и уравнения этой прямой: $\dfrac{x+4}{3} = \dfrac{y+5}{2} = \dfrac{z-3}{-1}$.

**Задача № 1031.** Составить параметрические уравнения общего перпендикуляра двух прямых, заданных уравнениями $x = 3t - 7$, $y = -2t + 4$, $z = 3t + 4$ и $x = t + 1$, $y = 2t - 8$, $z = -t - 12$.

***Решение***. Канонические уравнения заданных прямых имеют вид $\dfrac{x+7}{3} = \dfrac{y-4}{-2} = \dfrac{z-4}{3}$ и $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+8}{2} = \dfrac{z+12}{-1}$.

Уравнение плоскости, проходящей через первую прямую параллельно второй:

$$\begin{vmatrix} x+7 & y-4 & z-4 \\ 3 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{или } 2x - 3y - 4z + 42 = 0.$$

Уравнение плоскости, перпендикулярной к этой последней и проходящей через вторую прямую:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+8 & z+12 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & -4 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{или } 11x - 2y + 7z + 57 = 0.$$

Решая совместно это последнее уравнение с уравнениями первой прямой, получим точку их пересечения $M_0\ (-7; 4; 4)$. Искомый перпендикуляр проходит через точку $M_0$ и имеет направляющий вектор, совпадающий с нормальным вектором первой из проведенных нами плоскостей, т.е. $\{2; -3; -4\}$. Поэтому его уравнение

$$\frac{x+7}{2}=\frac{y-4}{-3}=\frac{z-4}{-4}=t\Rightarrow\begin{cases}x=2t-7,\\ y=-3t+4,\\ z=-4t+4.\end{cases}$$

## Занятие 10

## Смешанные задачи на уравнения плоскости и прямой

(Д.В. Клетеник. Сборник задач по аналитической геометрии, задачи №№ 1038–1083)

| Тема | В аудитории | | ДЗ по категориям | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | основные | резерв | III | II | I |
| Относительное расположение прямой и плоскости (№№ 1038–1049) | 1038, 1039, 1040 (1), 1046, 1047 | 1045 | 1040 (2), 1042, 1043, 1044 | 1041 | |
| Проекция точки на прямую (№№ 1050–1052) и на плоскость (№№ 1053–1058) | 1050, 1053 | 1052 | 1051, 1054 | | |
| Расстояние от точки до прямой, расстояние между прямыми (№№ 1062–1064) | 1062 | 1064 | 1063 (3) | | |
| Вывод уравнений плоскости по ее заданному положению относительно прямых и точек (№№ 1065–1073, 1077–1080) | 1066, 1067, 1069, 1071, 1078 | 1070, 1073 | 1080 | | |
| Проекция точки на плоскость (№№ 1074–1076) | | 1075 | | 1076 | |
| Вывод уравнений прямой по ее заданному положению относительно прямых и плоскостей (№№ 1081–1082), расстояние между скрещивающимися прямыми (№ 1083) | 1083 (1) | | 1083 (2) | | 1081, 1082 |

## Решения задач

**Задача № 1038.** Доказать, что прямая $x = 3t - 2$, $y = -4t + 1$, $z = 4t - 5$ параллельна плоскости $4x - 3y - 6z - 5 = 0$.

***Решение***. Скалярное произведение направляющего вектора прямой $\{3; -4; 4\}$ и нормального вектора плоскости $[4; -3; -6\}$ должно равняться нулю: $3\cdot 4 - 4\cdot(-3) + 4\cdot(-6) = 0$. В то же время прямая не лежит на плоскости, так как точка прямой $(-2; 1; -5)$ не удовлетворяет уравнению плоскости.

**Задача № 1039.** Доказать, что прямая $\begin{cases} 5x - 3y + 2z - 5 = 0, \\ 2x - y - z - 1 = 0 \end{cases}$ лежит в плоскости $4x - 3y + 7z - 7 = 0$.

***Решение***. Данная плоскость должна принадлежать пучку плоскостей $\alpha(5x - 3y + 2z - 5) + \beta(2x - y - z - 1) = 0$, т.е.

$$\begin{cases} 4 = 5\alpha + 2\beta, \\ -3 = -3\alpha - 2\beta \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2},\ \beta = \frac{3}{4}.$$

Приравнивая коэффициенты при $z$ и свободные члены соответственно 7 и –7, убеждаемся, что $\alpha$ и $\beta$ имеют то же значение.

**Задача № 1040 (1).** Найти точку пересечения прямой и плоскости: $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{6}$, $2x + 3y + z - 1 = 0$.

***Решение***. Обозначим $t = \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{6}$. Отсюда $x = t + 1$, $y = -2t - 1$, $z = 6t$. Подставим эти значения в уравнение плоскости:

$$2t + 2 - 6t - 3 + 6t - 1 = 0,$$

$t = 1$, следовательно, $x = 2$, $y = -3$, $z = 6$.

**Задача № 1041.** Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0$ (2; –4; –1) и середину отрезка прямой $\begin{cases} 3x + 4y + 5z - 26 = 0, \\ 3x - 3y - 2z - 5 = 0, \end{cases}$ заключенного между плоскостями $5x + 3y - 4z + 11 = 0$ и $5x + 3y - 4z - 41 = 0$.

***Решение***. Так как заданные плоскости параллельны друг другу (нормальные векторы совпадают), то можно провести третью плоскость, параллельную им и проходящую между ними на одинаковом расстоянии от каждой, т.е. она имеет тот же нормальный вектор, а свободный член есть среднее арифметическое свободных членов обеих плоскостей, т.е. $5x + 3y - 4z - 15 = 0$.

Найдем точку $M_1$ ($x_1$; $y_1$; $z_1$) пересечения этой последней плоскости и заданной прямой:

$$\begin{cases} 3x_1 + 4y_1 + 5z_1 - 26 = 0, \\ 3x_1 - 3y_1 - 2z_1 - 5 = 0, \\ 5x_1 + 3y_1 - 4z_1 - 15 = 0 \end{cases} \Rightarrow M_1(4;1;2).$$

Уравнение искомой прямой: $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y+4}{5} = \dfrac{z+1}{3}$.

**Задача № 1044.** Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0$ (1;–2;1) перпендикулярно прямой $\begin{cases} x - 2y + z - 3 = 0, \\ x + y - z + 2 = 0. \end{cases}$

***Решение***. Направляющий вектор прямой найдем как векторное произведение нормальных векторов плоскостей, задающих данную прямую: $\vec{n}\{l;m;n\} = \left\{ \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right\} = \{1;2;3\}$. Уравнение искомой плоскости $x - 1 + 2(y + 2) + 3(z - 1) = 0$ или $x + 2y + 3z = 0$.

**Задача № 1047.** При каких значениях $A$ и $D$ прямая $x = 3 + 4t$, $y = 1 - 4t$, $z = -3 + t$ лежит в плоскости $Ax + 2y - 4z + D = 0$?

***Решение***. Векторное произведение направляющего вектора прямой $\vec{q} = \{4;-4;1\}$ и вектора $\overrightarrow{M_1M_0}$, где $M_1$ – некоторая точка плоскости, $M_0$ (3; 1; –3), должно быть параллельно нормальному вектору плоскости.

Пусть $M_1 = \left\{0;0;\frac{1}{4}D\right\}$, тогда $\overrightarrow{M_1M_0} = \left\{3;1;-3-\frac{1}{4}D\right\}$. Векторное произведение равно $\{11 + D;\ 15 + D;\ 16\}$. Условие параллельности $\dfrac{11+D}{A} = \dfrac{15+D}{2} = \dfrac{16}{-4}$, откуда $D = -23$, $A = 3$.

**Задача № 1051.** Найти точку $Q$, симметричную точке $P$ (4; 1; 6) относительно прямой $\begin{cases} x - y - 4z + 12 = 0, \\ 2x + y - 2z + 3 = 0. \end{cases}$

***Решение***. Через точку $P$ проведем плоскость, перпендикулярно данной прямой, нормальный вектор которой {2; –2; 1}, уравнение:

$2(x-4)-2(y-1)+(z-6)=0$ или $2x-2y+z-12=0$. Точка пересечения этой плоскости с прямой (3; –1; 4). Эта точка является серединой отрезка $PQ$, отсюда $Q$ (2; –3; 2).

**Задача № 1054.** Найти точку $Q$, симметричную точке $P$ (1; 3; –4) относительно плоскости $3x+y-2z=0$.

***Решение***. Уравнение перпендикуляра из точки $P$ на плоскость $\frac{x-1}{3}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+4}{-2}$. Обозначим $t=\frac{x-1}{3}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+4}{-2}$, тогда $x=3t+1$, $y=t+3$, $z=-2t-4$; $3(3t+1)+t+3+2(2t+4)=0$, $t=-1$, $x=-2$, $y=2$, $z=-2$. Искомая точка $Q$ (–5; 1; 0).

**Задача № 1064.** Убедившись, что прямые $\begin{cases}2x+2y-z-10=0,\\ x-y-z-22=0,\end{cases}$ $\frac{x+7}{3}=\frac{y-5}{-1}=\frac{z-9}{4}$ параллельны, вычислить расстояние $d$ между ними.

***Решение***. Найдем направляющий вектор первой прямой: {–3; 1; –4}. Через точку (–7; 5; 9) второй прямой проведем плоскость, перпендикулярную обеим прямым: $-3(x+7)+(y-5)-4(z-9)=0$. Найдем точку ее пересечения с первой прямой: (9; –7; –6). Расстояние между этими двумя точками $d=25$.

Другой способ: $d=\frac{|[\overrightarrow{M_1M_2},\vec{a}]|}{|\vec{a}|}$, где $\vec{a}$ – направляющий вектор прямых, $\vec{M}_1$ и $\vec{M}_2$ – точки, принадлежащие соответственно первой и второй прямой.

**Задача № 1076.** Найти точку $Q$, симметричную точку $P$ (–3; 2; 5) относительно плоскости, проходящей через прямые $\begin{cases}x-2y+3z-5=0,\\ x-2y-4z+3=0,\end{cases}$ $\begin{cases}3x+y+3z+7=0,\\ 5x-3y+2z+5=0.\end{cases}$

***Решение***. Направляющие векторы заданных прямых {2; 1;0} и {11; 9; –14}. Уравнение плоскости, проходящей через эти прямые (см. задачу 1071): $\begin{vmatrix}x-\frac{1}{2} & y-\frac{1}{2} & z+3\\ 2 & 1 & 0\\ 11 & 9 & -14\end{vmatrix}=0.$

На второй прямой взята точка $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};-3\right)$. Или $2x - 4y - z - 2 = 0$. Уравнение перпендикуляра, проходящего через точку $P$, к этой плоскости: $\frac{x+3}{2} = \frac{y-2}{-4} = \frac{z-5}{-1}$. Точка $M$ его пересечения с плоскостью: (–1; –2; 4). Поэтому искомая точка $Q$ (1; –6; 3).

**Задача № 1081.** Составить канонические уравнения прямой, которая проходит через точку $M_0$ (3; –2; –4) параллельно плоскости $3x - 2y - 3z - 7 = 0$ и пересекает прямую $\frac{x-2}{3} = \frac{y+4}{-2} = \frac{z-1}{2}$.

***Решение***. Через точку $M_0$ проведем плоскость, параллельную данной плоскости: $3(x - 3) - 2(y + 2) - 3(z + 4) = 0$ или $3x - 2y - 3z - 25 = 0$. Точка ее пересечения с заданной прямой $M_1$ (8; –8; 5). Следовательно, направляющий вектор искомой прямой $\overrightarrow{M_1M_0}$ $\{5;-6;9\}$. Искомое уравнение $\frac{x-3}{5} = \frac{y+2}{-6} = \frac{z+4}{9}$.

**Задача № 1082.** Составить параметрические уравнения прямой, которая проходит параллельно плоскостям $3x + 12y - 3z - 5 = 0$ и $3x - 4y + 9z + 7 = 0$ и пересекает прямые $\frac{x+5}{2} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z+1}{3}$ и $\frac{x-3}{-2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{4}$.

***Решение***. Направляющий вектор искомой прямой найдем как векторное произведение нормальных векторов заданных плоскостей: $\vec{q} = \{l;m;n\} = \{8;-3;-4\}$. Уравнение искомой прямой $\frac{x-x_0}{8} = \frac{y-y_0}{-3} = \frac{z-z_0}{-4}$, где $M_0$ $(x_0;\ y_0;\ z_0)$ – некоторая точка на прямой. Параметрические уравнения: $x = 8t + x_0$, $y = -3t + y_0$, $z = -4t + z_0$. Точку $M_0$ найдем из условия, что эта прямая пересекает две заданные прямые. Пусть $M_0$ – точка пересечения с первой прямой, тогда $x_0 = 2t_1 - 5$, $y_0 = -4t_1 + 3$, $z_0 = 3t_1 - 1$. Пересечение искомой прямой со второй дает:

$$-2t_2 + 3 = 8t_3 + x_0 = 8t_3 + 2t_1 - 5;$$
$$3t_2 - 1 = -3t_3 + y_0 = -3t_3 - 4t_1 + 3;$$

$$4t_2 + 2 = -4t_3 + z_0 = -4t_3 + 3t_1 - 1,$$

откуда $t_1 = 1$ и $x_0 = -3$, $y_0 = -1$, $z_0 = 2$. Окончательно: $x = 8t - 3$, $y = -3t - 1$, $z = -4t + 2$.

**Задача № 1083 (1).** Вычислить кратчайшее расстояние между двумя прямыми: $\frac{x+7}{3} = \frac{y+4}{4} = \frac{z+3}{-2}$, $\frac{x-21}{6} = \frac{y+5}{-4} = \frac{z-2}{-1}$.

***Решение***. Через первую прямую проведем плоскость, параллельную второй: $\begin{vmatrix} x+7 & y+4 & z+3 \\ 3 & 4 & -2 \\ 6 & -4 & -1 \end{vmatrix} = 0$ или $4x + 3y + 12z + 76 = 0$.

В нормальном виде $-\frac{4x}{13} - \frac{3y}{13} - \frac{12z}{13} - \frac{76}{13} = 0$. Искомое расстояние равно расстоянию от точки (21; –5; 2) второй прямой до этой плоскости: $\frac{4\cdot 21}{13} + \frac{3\cdot(-5)}{13} + \frac{12\cdot 2}{13} + \frac{76}{13} = 13$.

Другой способ: $d = \frac{|(\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{n}_1, \vec{n}_2)|}{|[\vec{n}_1, \vec{n}_2]|}$, где $\vec{n}_1 = \{3;4;-2\}$, $\vec{n}_2 = \{6;-4;-1\}$, $M_1$ (–7;–4;–3), $M_2$ (21;–5; 2).

## Занятие 11

## Кривые второго порядка

(Д.В. Клетеник. Сборник задач по аналитической геометрии, задачи №№ 385–627)

| Тема | В аудитории | | ДЗ по категориям | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | основные | резерв | III | II | I |
| Окружность (№№ 385–443) | 385 (7), 397 (нечет.), 398 (1, 3, 7, 10), 418 | | 385 (9) | 422 | |
| Эллипс (№№ 444–514) | 444 (1, 9), 446 (1, 3, 5, 7), 455 (1, 3), | 447, 472 (2, 3), 490 | 445 (5), 449, 470, 473 (1) | 472 (4) | 473 (4) |

| Тема | В аудитории | | ДЗ по категориям | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | основные | резерв | III | II | I |
| | 468 (1), 471, 472 (1), 486 | | | | |
| Гипербола (№№ 515–582) | 515 (1, 9), 517 (1, 7), 521 (1,3) | 557 | 515 (2), 541 (1), 543 (1) | 542 (4) | |
| Парабола (№№ 583–627 | 585 (1), 588 (нечет.), 599 (4), 612 | 584 | 587, 589 | | 604 |

## Решения задач

**Задача № 385 (7).** Составить уравнение окружности с центром в точке $C$ (1; –1), касающейся прямой $5x - 12y + 9 = 0$.

***Решение***. Найдем расстояние от точки $C$ до заданной прямой, записав ее уравнение в нормальном виде: $-\frac{5}{13}x+\frac{12}{13}y-\frac{9}{13}=0$,

$R=\frac{5\cdot 1+12\cdot 1+9}{13}=\frac{26}{13}=2$. Искомое уравнение $(x-1)^2+(y+1)^2=4$.

**Задача № 385 (9).** Составить уравнение окружности, проходящей через точки $A$ (1; 1), $B$ (1;–1), $C$ (2; 0).

***Решение***. Центр окружности $M_0$ ($x_0$, $y_0$) – точка пересечения перпендикуляров, восставленных из середин отрезков $AB$ и $BC$, поэтому

$$(x_0-x_1)^2+(y_0-y_1)^2=(x_0-x_2)^2+(y_0-y_2)^2=(x_0-x_3)^2+(y_0-y_3)^2$$

или

$$x_1(2x_0-x_1)+y_1(2y_0-y_1)=x_2(2x_0-x_2)+y_2(2y_0-y_2)=$$
$$=x_3(2x_0-x_3)+y_3(2y_0-y_3).$$

В нашем случае

$$2x_0-1+2y_0-1=2x_0-1-2y_0-1=4x_0-4,$$

откуда $x_0=1$, $y_0=0$, $R^2=(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2=1$.

*Ответ*: $(x-1)^2+y^2=1$.

**Задача № 398 (10).** Какая линия определяется уравнением $x=-5+\sqrt{40-6y-y^2}$ ?

***Решение***. Перепишем уравнение: $x+5=\sqrt{40-6y-y^2}$, возведем его в квадрат: $(x+5)^2+(y+3)^2=49$, получим уравнение окружности радиуса $R = 7$ с центром в точке $C$ (–5; –3). Так как $x \geq -5$, то исходное уравнение определяет правую полуокружность.

**Задача № 418.** Составить уравнение касательной к окружности $x^2 + y^2 = 5$ в точке $A$ (–1; 2).

***Решение***. Уравнение касательной запишем в виде $y - 2 = k(x + 1)$, где $k = y'(x)$ – производная функции $x^2 + y^2 = 5$ в точке $A$ (–1; 2). Дифференцируя уравнение окружности $2x + 2y \cdot y' = 0$, получим: $y' = -\dfrac{x}{y} = \dfrac{1}{2} \ \rightarrow \ y - 2 = \dfrac{1}{2}(x+1)$ или $x - 2y + 5 = 0$.

**Задача № 472 (4).** Какая линия определяется уравнением $x = -5 + \dfrac{2}{3}\sqrt{8 + 2y - y^2}$ ?

***Решение***. $(x+5)^2 = \dfrac{4}{9}(8 + 2y - y^2) \ \rightarrow \dfrac{(x+5)^2}{4} + \dfrac{(y-1)^2}{9} = 1$. Уравнение эллипса, центр симметрии которого находится в точке $C$ (–5; 1), полуоси $a = 2$, $b = 3$, оси параллельны осям координат. Исходное уравнение определяет правый полуэллипс.

**Задача № 473 (4).** Составить уравнение эллипса, фокусы которого $F_1$ (1; 3), $F_2$ (3; 1), а расстояние между директрисами равно $12\sqrt{2}$ .

***Решение***. Расстояние между фокусами $2c = 2\sqrt{2}$, $c = \sqrt{2}$ . Расстояние между директрисами равно $\dfrac{2a}{\varepsilon} = \dfrac{2a^2}{c}$, откуда большая полуось $a = 2\sqrt{3}$ , малая полуось $b = \sqrt{10}$ . Центр симметрии эллипса находится в точке $C$ (2; 2), а большая ось параллельна биссектрисе 2-го и 4-го координатных углов. Так ориентированный эллипс, но с центром в начале координат дается уравнением

$$\frac{(x-y)^2}{2a^2} + \frac{(x+y)^2}{2b^2} = 1,$$

параллельный сдвиг с переносом центра в точку $C$(2; 2) приводит к уравнению

$$\frac{(x-y)^2}{2a^2} + \frac{(x+y-4)^2}{2b^2} = 1$$

или $11x^2 + 2xy + 11y^2 - 48x - 48y - 24 = 0$.

Другой способ: по определению, эллипс – геометрическое место точек, сумма расстояний которых до фокусов равна $2a$, т.е.

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-3)^2}+\sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2}=4\sqrt{3},$$

откуда получаем искомое уравнение.

**Задача № 490.** Провести касательные к эллипсу $\frac{x^2}{30}+\frac{y^2}{24}=1$ параллельно прямой $4x-2y+23=0$ и вычислить расстояние $d$ между ними.

***Решение***. Дифференцируем уравнение эллипса: $\frac{2x}{30}+\frac{2y\cdot y'}{24}=0$.

Так как $y'=2$ по условию, то $y_0=-\frac{2}{5}x_0$ (здесь $(x_0, y_0)$ – точка касания). Подставляем в уравнение эллипса и находим $x_0=\pm 5$, $y_0=\mp 2$, откуда уравнения двух касательных: $y+2=2(x-5)$ и $y-2=2(x+5)$ или $2x-y-12=0$ и $2x-y+12=0$, т.е. прямые проходят на одинаковом расстоянии от начала координат под углом $\alpha=\operatorname{arctg}2$. Расстояние между ними $d=24\cos\alpha=\frac{24}{\sqrt{5}}$.

**Задача № 604.** Даны вершина параболы $A\ (-2;-1)$ и уравнение ее директрисы $x+2y-1=0$. Составить уравнение параболы.

***Решение.*** По определению, парабола есть геометрическое место точек, одинаково удаленных от фокуса и от директрисы. Уравнение директрисы в нормальном виде $\frac{x}{\sqrt{5}}+\frac{2y}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{5}}=0$. Расстояние от вершины до директрисы равно $\sqrt{5}$. Фокус находится на оси параболы (уравнение оси $y-2x-3=0$) на расстоянии $p=2\sqrt{5}$ от директрисы, т.е. в точке $(-3;-3)$. Отсюда уравнение параболы

$$\sqrt{(x+3)^2+(y+3)^2}=\frac{1}{\sqrt{5}}|x+2y-1|$$

или

$$4x^2-4xy+y^2+32x+34y+89=0.$$

## Занятие 12

## Приведение уравнений кривых второго порядка к каноническому виду

(Д.В. Клетеник. Сборник задач по аналитической геометрии, задачи №№ 665–700)

| Тема | В аудитории | | ДЗ по категориям | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | основные | резерв | III | II | I |
| Центральные кривые (№№ 673–688) | 676 (2, 3, 5, 6), 677 (3) | 677 (2) | 676 (1), 677 (1) | 676 (4) | 677 (4,5) |
| Нецентральные кривые (№№ 689–700) | 689 (1, 2) | 690 (2) | 690 (1) | 689 (3) | |

Если уравнение кривой второго порядка записать в общем виде

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a = 0,$$

то путем параллельного переноса и поворота осей координат оно приводится к каноническому виду. Инварианты такого преобразования: $s = a_{11} + a_{22}$, $\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$, $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a \end{vmatrix}$.

Необходимые и достаточные условия различных линий:

1) эллипс $\delta > 0$, $s\cdot\Delta < 0$;

2) мнимый эллипс $\delta > 0$, $s\cdot\Delta > 0$;

3) две мнимые пересекающиеся прямые (точка) $\delta > 0$, $\Delta = 0$;

4) гипербола $\delta < 0$, $\Delta \neq 0$;

5) две пересекающиеся прямые $\delta < 0$, $\Delta = 0$;

6) парабола $\delta = 0$, $\Delta \neq 0$;

7) две параллельные прямые (действительные или мнимые) или две совпадающие прямые $\delta = 0$, $\Delta = 0$.

Уравнение приводится к каноническому виду либо непосредственно преобразованием координат, либо с помощью инвариантов. В последнем случае, чтобы определить ориентацию кривой относительно первоначальной системы координат. следует найти направляющий вектор одной из осей симметрии кривой. Так, в случае центральной кривой простейшее уравнение в новых координатах ($x$, $y$) имеет вид $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0$, где $\lambda_1$ и $\lambda_2$ – корни характеристического уравнения $\lambda^2 - s\lambda + \delta = 0$.

Если в случае эллипса в качестве $\lambda_1$ брать меньший из корней, а в случае гиперболы – тот корень, который имеет знак, одинаковый со знаком $\Delta$, то ориентация кривой определяется тем, что угловой коэффициент $k$ большой оси эллипса или действительной гиперболы, совпадающими с осью абсцисс в новый координатах, равен $k = \frac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}}$ (если $a_{12} \neq 0$). Если $a_{12} = 0$, то поворот осей координат проводить не требуется. Если $a_{11} = a_{22} = 0$, то в этом случае гиперболическое уравнение из старших членов содержит только $xy$, который приводится к разности квадратов заменой $x = \frac{x' - y'}{\sqrt{2}}$, $y = \frac{x' + y'}{\sqrt{2}}$.

В случае параболы положительное направление оси параболы задает вектор $\{A_1, A_2\}$, где $A_1$ и $A_2$ – алгебраические дополнения элементов $a_1$ и $a_2$ соответственно в определителе $\Delta$. Параметр параболы определяется формулой $p = \sqrt{-\frac{\Delta}{s^3}}$. Координаты вершины параболы могут быть найдены из системы:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a = 0,$$

$$\begin{vmatrix} a_{11}x + a_{12}y + a_1 & a_{12}x + a_{22}y + a_2 \\ A_1 & A_2 \end{vmatrix} = 0.$$

*Примечание.* Студентам эти формулы можно не давать и решать задачи непосредственным преобразованием координат.

## Решения задач

Определить тип уравнения, привести к каноническому виду и начертить кривую.

**Задача № 676.**

**(1)** $3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x - 14y - 13 = 0$.

***Решение***. Уравнение гиперболического типа. Центр кривой найдем из уравнений:

$$a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1 = 0,$$
$$a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_2 = 0,$$

тогда $x_0 = +2$, $y_0 = -1$. Угол поворота осей координат определяем из уравнения $a_{12}\mathrm{tg}^2\alpha - (a_{22} - a_{11})\mathrm{tg}\alpha - a_{12} = 0$, $\mathrm{tg}\alpha = \pm 1$.

Возьмем $\alpha$ (угол поворота от старой оси абсцисс к новой против часовой стрелки) равным 45°. Тогда, если после сдвига $x = \overline{x} + 2$, $y = \overline{y} - 1$ уравнение было $3\overline{x}^2 + 10\overline{xy} + 3\overline{y}^2 - 8 = 0$, то после поворота в положительном направлении на 45°

$$\overline{x} = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha = \frac{x' - y'}{\sqrt{2}}, \quad \overline{y} = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha = \frac{x' + y'}{\sqrt{2}},$$

получим $\frac{3}{2}(x' - y')^2 + \frac{10}{2}(x'^2 - y'^2) + \frac{3}{2}(x' + y') - 8 = 0$ или

$$x'^2 - \frac{y'^2}{4} = 1.$$

Другой способ: вычислим инварианты $s = a_{11} + a_{22} = 6 = \lambda_1 + \lambda_2$, $\delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = -16$, $\Delta = 128$. Уравнение в координатах $(x', y')$ имеет вид $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0$, где в качестве $\lambda_1$ надо брать тот корень характеристического уравнения $\lambda^2 - s\lambda + \delta = 0$, который имеет одинаковый с $\Delta$ знак: $\lambda^2 - 6\lambda + 16 = 0$, $\lambda_1 = 8$, $\lambda_2 = -2$. Следовательно, уравнение кривой $8x'^2 - 2y'^2 - 8 = 0$ или $x'^2 - \frac{y'^2}{4} = 1$.

Чтобы определить ориентацию кривой, найдем угловой коэффициент действительной оси: $k = \frac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}} = \frac{8 - 3}{5} = 1$, т.е. действительная ось направлена под углом 45° к положительному направлению первоначальной оси абсцисс.

**(2)** $25x^2 - 14xy + 25y^2 + 64x - 64y - 224 = 0$.

***Решение***. Инварианты: $s = 50$, $\delta = 576$, $\Delta = -165888$, $\frac{\Delta}{\delta} = 288$, $\lambda_1 = 18$, $\lambda_2 = 32$, уравнение: $18x'^2 + 32y'^2 - 288 = 0$ или $\frac{x'^2}{16} + \frac{y'^2}{9} = 1$.

Чтобы определить ориентацию кривой в первоначальных координатах, найдем угловой коэффициент большой оси эллипса: $k = \dfrac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}} = \dfrac{18-25}{-7} = 1$, т.е. эта ось направлена под углом 45°.

**(3)** $4xy + 3y^2 + 16x + 12y - 36 = 0$.

***Решение***. Инварианты: $s = 3$, $\delta = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -4$. Уравнение гиперболического типа, $\Delta = 144$, характеристическое уравнение $\lambda^2 - s\lambda + \delta = 0$, $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = -1$. Уравнение в новых координатах $\dfrac{x'^2}{9} - \dfrac{y'^2}{36} = 1$. Ориентация кривой определяется угловым коэффициентом действительной оси гиперболы $k = \dfrac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}} = 2$, т.е. $\alpha = \mathrm{arctg}2$.

**(4)** $7x^2 + 6xy - y^2 + 28x + 12y + 28 = 0$.

***Решение***. Инварианты: $s = 6$, $\delta = -16$, $\Delta = 0$. Уравнение гиперболического типа, определяет две пересекающиеся прямые, $\lambda_1 = 8$, $\lambda_2 = -2$, уравнение имеет вид $8x'^2 - 2y'^2 = 0$ или $4x'^2 - y'^2 = 0$. Получено преобразованиями: сдвигом $x = \bar{x} - 2$, $y = \bar{y}$ и поворотом $\bar{x} = \dfrac{3x' - y'}{\sqrt{10}}$, $\bar{y} = \dfrac{x' + 3y'}{\sqrt{10}}$. Уравнения прямых в первоначальных координатах: $7x - y + 14 = 0$, $x + y + 2 = 0$.

Другой способ: представим данное уравнение таким образом:

$$7(x+2)^2 + 6y(x+2) - y^2 = 0$$

или

$$7(x+2)^2 + \frac{2(x+2)\cdot\sqrt{7}\cdot 3y}{3\sqrt{7}} + \frac{9}{7}y^2 - \frac{9}{7}y^2 - y^2 = 0$$

или

$$\left[\sqrt{7}(x+2) + \frac{3}{\sqrt{7}}y\right]^2 - \frac{16}{7}y^2 = 0.$$

Тогда оно распадается на два линейных уравнения:

$$\sqrt{7}(x+2) + \frac{3}{\sqrt{7}}y + \frac{4}{\sqrt{7}}y = 0 \text{ и } \sqrt{7}(x+2) + \left(\frac{3}{\sqrt{7}} + \frac{4}{\sqrt{7}}\right)y = 0,$$

получаем $x + y + 2 = 0$ и $7x - y + 14 = 0$.

**(5)** $19x^2 + 6xy + 11y^2 + 38x + 6y + 29 = 0$.

***Решение***. Инварианты: $s = 30$, $\delta = \begin{vmatrix} 19 & 3 \\ 3 & 11 \end{vmatrix} = 192$, $\Delta = 1920$. Уравнение эллиптического типа. Приводится к виду $\overline{x}^2 + 2\overline{y}^2 = -1$ в результате переноса осей координат $x = x' - 1,\ \ y = y'$ и последующего поворота $\overline{x} = \dfrac{x' + 3y'}{\sqrt{10}},\ \overline{y} = \dfrac{-3x' + y'}{\sqrt{10}}$. Не определяет никакого геометрического образа (мнимый эллипс).

**Задача № 677.**

**(2)** $11x^2 - 20xy - 4y^2 - 20x - 8y + 1 = 0$.

***Решение***. Инварианты: $s = 7$, $\delta = -144$, $\Delta = -720$. Уравнение гиперболического типа, определяет невырожденную гиперболу. Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 7\lambda - 144 = 0$, его корни $\lambda_1 = -9$, $\lambda_2 = 16$ (в качестве $\lambda_1$ берем корень, имеющий такой же знак, как $\Delta$, см. выше). Уравнение в новых координатах $9x'^2 - 16y'^2 - 5 = 0$. Чтобы определить положение этой гиперболы в первоначальных координатах, достаточно найти координаты центра и угловой коэффициент действительной оси.

Получим $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, $k = \dfrac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}} = \dfrac{-9 - 11}{-10} = 2$.

**(3)** $7x^2 + 60xy + 32y^2 - 14x - 60y + 7 = 0$.

***Решение***. Инварианты: $s = 39$, $\delta = -676$, $\Delta = 0$ (что сразу видно из симметрии этого определителя). Вырожденная гипербола (две пересекающиеся прямые). Преобразуем уравнение:

$$7(x-1)^2 + 60y(x-1) + 32y^2 =$$

$$= \left[\sqrt{7}(x-1) + \frac{30}{\sqrt{7}}y\right]^2 - \frac{900}{7}y^2 + 32y^2 = 0$$

или

$$\left[\sqrt{7}(x-1) + \frac{30}{\sqrt{7}}y - \frac{26}{\sqrt{7}}y\right]\left[\sqrt{7}(x-1) + \frac{30}{\sqrt{7}}y + \frac{26}{\sqrt{7}}y\right] = 0.$$

Оно распадается на два уравнения: $7x + 4y - 7 = 0$ и $x + 8y - 1 = 0$ (в первоначальной системе координат).

**(4)** $50x^2 - 8xy + 35y^2 + 100x - 8y + 67 = 0$.

***Решение***. Инварианты: $s = 85$, $\delta = 1734$, $\Delta = 29478$. Мнимый эллипс. Характеристическое уравнение: $\lambda^2 - 85\lambda + 1734 = 0$, его корни $\lambda_1 = 34$, $\lambda_2 = 51$. В качестве $\lambda_1$ берем меньший корень. Уравнение в новых координатах $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \dfrac{\Delta}{\delta} = 0 \Rightarrow \quad 34x'^2 + 51y'^2 + 17 = 0$ или $2x'^2 + 3y'^2 = -1$.

**(5)** $41x^2 + 24xy + 34y^2 + 34x - 112y + 129 = 0$.

***Решение***. Инварианты: $s = 75$, $\delta = 1250$, $\Delta = 0$. Две мнимые пересекающиеся прямые – точка. Ее координаты найдем из уравнений центра: $41x_0 + 12y_0 + 17 = 0$ и $12x_0 + 34y_0 - 56 = 0$, откуда $x_0 = -1$, $y_0 = 2$.

**Задача № 689.**

**(1)** $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 20x + 110y - 50 = 0$.

***Решение***. Инварианты: $s = 25$, $\delta = 0$, $\Delta = -15625$. Невырожденная парабола. Находим угол поворота $\alpha$:

$$-12\operatorname{tg}^2\alpha - (16 - 9)\operatorname{tg}\alpha + 12 = 0,$$

$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{3}{4}$, $\cos\alpha = \dfrac{4}{5}$, $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$. Преобразование координат:

$$\begin{cases} x = \dfrac{4}{5}x' - \dfrac{3}{5}y', \\ y = \dfrac{3}{5}x' + \dfrac{4}{5}y'. \end{cases}$$

В новых координатах уравнение приобретает вид

$$y'^2 + 4y' + 2x' - 2 = 0 \quad \text{или} \quad (y' + 2)^2 = -2(x' - 3).$$

Замена $y' + 2 = \bar{y}$, $x' - 3 = \bar{x}$ приводит к каноническому уравнению параболы $\bar{y}^2 = -2\bar{x}$.

Другой способ: параметр параболы определяется по формуле $p = \sqrt{-\dfrac{\Delta}{s^3}} = 1$. Уравнение параболы в каноническом виде $y'^2 = 2x'$. Чтобы определить положение параболы относительно первоначальной системы координат, надо найти координаты вершины параболы и направляющий вектор $\{A_1, A_2\}$ положительного направления оси параболы (за положительные считаем направление вогнутости). Так как $A_1$ и $A_2$ – алгебраические дополнения элементов $a_1$ и $a_2$ в определителе $\Delta$, то

$$A_1 = \begin{vmatrix} -12 & 16 \\ -10 & 55 \end{vmatrix} = -500, \quad A_2 = -\begin{vmatrix} 9 & -12 \\ -10 & 55 \end{vmatrix} = -375.$$

Координаты вершины определяются из системы уравнений:

$$9x_0^2 - 24x_0 y_0 + 16y_0^2 - 20x_0 + 100y_0 - 50 = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 9x_0 - 12y_0 - 10 & -12x_0 + 16y_0 + 55 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Откуда $x_0 = \dfrac{18}{5}$, $y_0 = \dfrac{1}{5}$.

**(2)** $9x^2 + 12xy + 4y^2 - 24x - 16y + 3 = 0.$

***Решение***. Инварианты: $s = 13$, $\delta = 0$, $\Delta = 0$. Вырожденная парабола (две параллельные прямые). Преобразуем данное уравнение:

$$(3x + 2y)^2 - 8(3x + 2y) + 3 = (3x + 2y - 4)^2 - 13 = 0.$$

Оно распадается на два уравнения параллельных прямых:

$$3x + 2y - 4 - \sqrt{13} = 0 \quad \text{и} \quad 3x + 2y - 4 + \sqrt{13} = 0.$$

**(3)** $16x^2 - 24xy + 9y^2 - 160x + 120y + 425 = 0.$

***Решение***. Инварианты: $s = 25$, $\delta = 0$, $\Delta = 0$. Вырожденная парабола. Преобразуем данное уравнение:

$$(4x - 3y)^2 - 40(4x - 3y) + 425 =$$

$$= (4x - 3y)^2 - 40(4x - 3y) + 400 + 25 = (4x - 3y - 20)^2 + 25 = 0.$$

или $(4x - 3y - 20)^2 = -25$. Не определяет никакого геометрического образа.

**Задача № 690.**

**(1)** $9x^2 + 24xy + 16y^2 - 18x + 226y + 209 = 0.$

***Решение***. Инварианты: $s = 25$, $\delta = 0$, $\Delta \neq 0$. Невырожденная парабола. Находим угол поворота $\alpha$: $12\mathrm{tg}^2\alpha - 7\mathrm{tg}\alpha - 12 = 0$, $\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{4}{3}$,

$\cos\alpha = \dfrac{3}{5}$, $\sin\alpha = \dfrac{4}{5}$. Преобразование координат: $\begin{cases} x = \dfrac{3}{5}x' - \dfrac{4}{5}y', \\ y = \dfrac{4}{5}x' + \dfrac{3}{5}y'. \end{cases}$

В новых координатах уравнение приобретает вид

$$25x'^2 + 170x' + 150y' + 209 = 0.$$

Преобразуем это уравнение:

$$\left(x'+\frac{17}{5}\right)^2+6\left(y'-\frac{8}{15}\right)=0\,.$$

Введя $\overline{x}=x'+\dfrac{17}{5}$, $\overline{y}=y'-\dfrac{8}{5}$, окончательно получим $\overline{x}^2=-6\overline{y}$.

**(2)** $x^2 - 2xy + y^2 - 12x + 12y - 14 = 0$.

***Решение***. Инварианты: $s = 2$, $\delta = 0$, $\Delta = 0$. Вырожденная парабола. Преобразуем данное уравнение:

$$(x-y)^2 - 12(x-y) - 14 = (x-y-6)^2 - 50 = 0.$$

Оно распадается на два уравнения параллельных прямых:

$$x-y-6-\sqrt{50}=0 \quad \text{и} \quad x-y-6+\sqrt{50}=0$$

(в первоначальной системе координат).

## Занятие 13

## Поверхности второго порядка

Общее уравнение поверхности второго порядка:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{13}xz + 2a_{14}x + \\ + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0. \qquad (**)$$

Инварианты при повороте осей координат и переносе начала координат:

$$I_1=a_{11}+a_{22}+a_{33},\quad I_2=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{12}&a_{22}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{23}&a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{33}&a_{13}\\a_{13}&a_{11}\end{vmatrix},$$

$$I_3=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{12}&a_{22}&a_{23}\\a_{13}&a_{23}&a_{33}\end{vmatrix},\quad I_4=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{12}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{13}&a_{23}&a_{33}&a_{34}\\a_{14}&a_{24}&a_{34}&a_{44}\end{vmatrix}.$$

Уравнения центра центральной поверхности:

$$\begin{cases}a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_{13}z_0+a_{14}=0,\\a_{12}x_0+a_{22}y_0+a_{23}z_0+a_{24}=0,\\a_{13}x_0+a_{23}y_0+a_{33}z_0+a_{34}=0.\end{cases}$$

Поворотом осей координат уравнение (**) приводится к виду, когда отсутствуют члены с произведениями различных координат. При этом коэффициенты при квадратах координат ($\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$) определяются как собственные значения матрицы квадратичной формы, т.е. как корни характеристического уравнения $\lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda - I_3 = 0$ (все эти понятия – для преподавателя, студентам они даются позже – в курсе линейной алгебры).

Координаты ортов новой системы координат определяются из системы

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda_i)e_x^{(i)} + a_{12}e_y^{(i)} + a_{13}e_z^{(i)} = 0, \\ a_{12}e_x^{(i)} + (a_{22}-\lambda_i)e_y^{(i)} + a_{23}e_z^{(i)} = 0, \\ a_{13}e_x^{(i)} + a_{23}e_y^{(i)} + (a_{33}-\lambda_i)e_z^{(i)} = 0. \end{cases}$$

Если $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$, то так находятся два орта, а третий можно взять как их векторное произведение. Если $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, то в новой системе совокупность старших членов имеет такой же вид. как и в исходной системе координат, поэтому нет необходимости проводить поворот осей координат. От линейных членов избавляемся переносом начала координат.

## Вариант А[†]

(П.С. Моденов, А.С. Пархоменко. Сборник задач по аналитической геометрии. М.: Наука, 1976, задачи №№ 1041–1070)

| Тема | В аудитории | | ДЗ по категориям | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | основные | резерв | III | II | I |
| Центральные поверхности: эллипсоид, двуполостный и однополостный гиперболоиды | 1046 (6, 7, 9), | | | 1045 (1) | 1052 (1) |
| Нецентральные поверхности: эллиптический и | 1046** (3, 4) | | | 1046** (5) | |

[†] Занятие дается в двух вариантах (А и Б).

** В этих задачах только определить тип поверхности и каноническое уравнение.

| Тема | В аудитории | | ДЗ по категориям | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | основные | резерв | III | II | I |
| гиперболический параболоиды | | | | | |
| Цилиндры | | 1046 (10) | 1046 (11) | | |
| Конусы | | 1045 (8) | | | 1043 (4) |
| Случаи вырождения | | 1041 (1) | 1041 (5) | | |

## Решения задач

Определить тип поверхности, привести ее уравнение к каноническому виду, найти каноническую систему координат и изобразить поверхность.

**Задача № 1041.**

**(1)** $x^2 + 2xy + y^2 - z^2 + 2z - 1 = 0$.

***Решение***. Выделим полные квадраты:

$$(x + y)^2 - (z - 1)^2 = 0 \text{ или } (x + y - z + 1)(x + y + z - 1) = 0.$$

Пара пересекающихся плоскостей.

**(5)** $4x^2 + y^2 - 4xy - 36 = 0$.

***Решение***. Запишем уравнение в виде: $(2x - y)^2 - 36 = 0$. Пара параллельных плоскостей $2x - y + 6 = 0$ и $2x - y - 6 = 0$.

**Задача № 1043 (4).** $z^2 = 3x^2 + 4xy$.

***Решение***. Осуществим поворот осей $0x$ и $0y$ в плоскости $x0y$ вокруг оси $0z$. Характеристическое уравнение в двумерном случае: $\lambda^2 - I_1\lambda + I_2 = 0$ или $\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$. Отсюда $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 4$.

Для $\lambda_1 = -1$ координаты новых ортов $2e_x^{(1)} + e_y^{(1)} = 0$. Положив $e_x^{(1)} = 1$, получаем $e_y^{(1)} = -2$. Ортонормированный вектор имеет вид $\vec{e}^{\,(1)} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}; -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$. Для $\lambda_2 = 4$ координаты новых ортов $-e_x^{(2)} + 2e_y^{(2)} = 0$, откуда $\vec{e}^{\,(2)} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}; \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

Итак, при замене $x' = \frac{1}{\sqrt{5}}x - \frac{2}{\sqrt{5}}y$, $y' = \frac{2}{\sqrt{5}}x + \frac{1}{\sqrt{5}}y$, $z' = z$ получим каноническое уравнение $z'^2 = -x'^2 + 4y'^2$, представляющее собой уравнение кругового конуса, ориентация которого определяется ортами $\vec{e}^{(1)}$ и $\vec{e}^{(2)}$.

**Задача № 1045 (1).**

$$x^2 - 2y^2 + z^2 + 4xy - 4yz - 8zx - 14x - 4y + 14z + 18 = 0.$$

***Решение***. Находим координаты центра: $O'$ (1; 1; –1). После переноса начала координат уравнение примет вид:

$$x^2 - 2y^2 + z^2 + 4xy - 4yz - 8zx + 2 = 0.$$

Характеристическое уравнение: $\lambda^3 - 27\lambda - 54 = 0$. Отсюда $\lambda_1 = \lambda_2 = -3$, $\lambda_3 = 6$. Соответствующие собственные векторы (орты новой системы координат):

$$\vec{e}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}};0;\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\ \vec{e}_2 = \left(-\frac{1}{3\sqrt{2}};\frac{4}{3\sqrt{2}};\frac{1}{3\sqrt{2}}\right),\ \vec{e}_3 = \left(\frac{2}{3};\frac{1}{3};-\frac{2}{3}\right).$$

Таким образом, новая ось $z$ направлена по орту $\vec{e}_3$ и является осью симметрии (в данном случае и осью вращения) однополостного гиперболоида, каноническое уравнение которого в новой системе координат $\dfrac{x^2}{2/3} + \dfrac{y^2}{2/3} - \dfrac{z^2}{1/3} = 1$.

**Задача № 1046.**

**(3)** $7x^2 + 7y^2 + 16z^2 - 10xy - 8yz - 8zx - 16x - 16y - 8z + 72 = 0.$

***Решение***. Так как $I_3 = 0$, то поверхность нецентральная. Повернем оси координат, решив для этого характеристическое уравнение $\lambda^3 - 30\lambda^2 + 216\lambda = 0$, и получим $\lambda_1 = 12$, $\lambda_2 = 18$, $\lambda_3 = 0$. Так как $I_4$ является инвариантом относительно и поворота, и переноса начала координат, то в уравнении $12x'^2 + 18y'^2 + 2a'_{34}z' = 0$ искомый коэффициент $a'_{34}$ найдется из условия $I_4 = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a'_{34} \\ 0 & 0 & a'_{34} & 0 \end{vmatrix} = -216a'^2_{34} = $ $= 144\cdot 216$, откуда $a'^2_{34} = 144$. Уравнение: $\dfrac{x'^2}{1} + \dfrac{y'^2}{2/3} = 2z'$.

**(4)** $4x^2 + 4y^2 - 8z^2 - 10xy + 4yz + 4zx - 16x - 16y + 10z - 2 = 0.$

***Решение***. Так как $I_3 = 0$, то поверхность нецентральная, $I_1 = 0$, $I_2 = -81$. Характеристическое уравнение: $\lambda^3 - 81\lambda = 0$, отсюда $\lambda_1 =$

$= 9$, $\lambda_2 = -9$, $\lambda_3 = 0$. Уравнение гиперболического параболоида имеет вид $9x'^2 - 9y'^2 - 2a'_{34}z' = 0$. Пользуясь инвариантностью $I_4$, находим $I_4 = 81a'^2_{34} = 81^2$, откуда $a'_{34} = \pm 9$. При соответствующем выборе направления оси $z'$ получим каноническое уравнение: $x'^2 - y'^2 = 2z'$.

**(5)** $2x^2 - 7y^2 - 4z^2 + 4xy + 20yz - 16zx + 60x - 12y + 12z - 90 = 0$.

***Решение***. $I_1 = -9$, $I_2 = -162$, $I_3 = 0$, $I_4 = 2 \cdot 162^2$. Характеристическое уравнение: $\lambda^3 + 9\lambda^2 - 162\lambda = 0$, отсюда $\lambda_1 = 9$, $\lambda_2 = -18$, $\lambda_3 = 0$. Из инвариантности $I_4$, находим $a'_{34} = \pm 18$. Искомое каноническое уравнение: $\dfrac{x'^2}{2} - \dfrac{y'^2}{1} = 2z'$ (в ответе задачника опечатка).

**(6)** $7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz - 6x - 24y + 18z + 30 = 0$.

***Решение***. $I_1 = 18$, $I_2 = 99$, $I_3 = 162$, $I_4 = -18 \cdot 54$. Характеристическое уравнение: $\lambda^3 - 18\lambda^2 + 99\lambda - 162 = 0$, отсюда $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 6$, $\lambda_3 = 9$. Собственные векторы (орты повернутых осей) найдем из соответствующих систем уравнений, например: $\vec{e}'_1\ \{e_x^{(1)}; e_y^{(1)}; e_z^{(1)}\}$ (для $\lambda_1 = 3$): $4e_x^{(1)} - 2e_y^{(1)} = 0$, $-2e_x^{(1)} + 3e_y^{(1)} - 2e_z^{(1)} = 0$. Откуда $\vec{e}_1 = \left\{\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right\}$.

Аналогично получаем $\vec{e}_2 = \left\{\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; -\frac{2}{3}\right\}$, $\vec{e}_3 = \left\{\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right\}$.

Координаты центра находим из системы (см. выше)

$$\begin{cases} 7x_0 - 2y_0 - 3 = 0, \\ -2x_0 + 6y_0 - 2z_0 - 12 = 0, \\ \quad -2y_0 + 5z_0 + 9 = 0. \end{cases}$$

Откуда центр $O'$ $(1; 2; -1)$.

Свободный член уравнения $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + D' = 0$ находится из инвариантности $I_4$. Так как

$$I_4 = -18 \cdot 54 = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D' \end{vmatrix},$$

то $D' = \dfrac{I_4}{I_3} = -6$. Каноническое уравнение после поворота осей и переноса начала координат в точку $O'$ приобретает вид $\dfrac{x'^2}{2} + \dfrac{y'^2}{1} + \dfrac{z'^2}{2/3} = 1$ (эллипсоид).

**(11)** $2x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xy + 2yz + 4x + 4z = 0$.

***Решение***. $I_1 = 5$, $I_2 = 6$, $I_3 = 0$, $I_4 = 0$. Характеристическое уравнение: $\lambda^3 - 5\lambda^2 + 6\lambda = 0$, отсюда $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 0$. Собственные векторы (орты новых осей):

$$\vec{e}_1 = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}};0;\frac{1}{\sqrt{2}}\right\},\ \vec{e}_2 = \left\{\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}}\right\},\ \vec{e}_3 = \left\{\frac{1}{\sqrt{6}};\frac{2}{\sqrt{6}};-\frac{1}{\sqrt{6}}\right\}.$$

Система уравнений для определения центра поверхности имеет бесчисленное множество решений. Взяв, например, такое ее решение: $x_0 = -2$, $y_0 = -2$, $z_0 = 0$, получим значение свободного члена $D' = -4$, т.е. уравнение $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + D' = 0$, откуда в каноническом виде $\dfrac{x'^2}{2} + \dfrac{y'^2}{4/3} = 1$ (эллиптический цилиндр).

Задачи №№ 1045 (8) и 1046 (7, 9, 10) решаются аналогично. Приведем только их условия и ответы.

**Задача № 1045 (8).** $4xy + 4yz + 4zx + 4x + 4y + 4z + 3 = 0$.

*Ответ*: круговой конус $x'^2 + y'^2 - 2z'^2 = 0$,

вершина $O'\left(-\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{2}\right)$,

направляющий вектор оси вращения $\left\{\dfrac{1}{\sqrt{3}};\dfrac{1}{\sqrt{3}};\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right\}$.

**Задача № 1046.**

**(7)** $2x^2 + 2y^2 - 5z^2 + 2xy - 2x - 4y - 4z + 2 = 0$.

*Ответ*: двуполостный гиперболоид, $\dfrac{x'^2}{4} + \dfrac{y'^2}{4/15} + \dfrac{z'^2}{4/25} = -1$,

$O'\left(0;1;-\dfrac{2}{5}\right)$, $\vec{e}_1' = \left\{\dfrac{1}{\sqrt{2}};-\dfrac{1}{\sqrt{2}};0\right\}$, $\vec{e}_2 = \left\{\dfrac{1}{\sqrt{2}};\dfrac{1}{\sqrt{2}};0\right\}$, $\vec{e}_3 = \{0;0;1\}$.

**(9)** $x^2 + 5y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 6xz - 2x + 6y + 2z = 0$.

*Ответ*: однополостный гиперболоид, $\dfrac{x'^2}{1/3} + \dfrac{y'^2}{1/6} - \dfrac{z'^2}{1/2} = 1$,

$O'\left(-\dfrac{1}{3};-\dfrac{2}{3};\dfrac{2}{3}\right)$, $\vec{e}_1' = \left\{\dfrac{1}{\sqrt{3}};-\dfrac{1}{\sqrt{3}};\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right\}$, $\vec{e}_2' = \left\{\dfrac{1}{\sqrt{6}};\dfrac{2}{\sqrt{6}};\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right\}$,

$\vec{e}_3' = \left\{\dfrac{1}{\sqrt{2}};0;-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right\}$.

**(10)** $x^2 - 2y^2 + z^2 + 4xy + 4yz - 10xz + 2x + 4y - 10z - 1 = 0$.

*Ответ*: гиперболический цилиндр, $x'^2 - y'^2 = \dfrac{1}{3}$, $O'(-1;0;0)$,

$\vec{e}_1' = \left\{\dfrac{1}{\sqrt{2}};0;-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right\}$, $\vec{e}_2' = \left\{\dfrac{1}{\sqrt{3}};-\dfrac{1}{\sqrt{3}};\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right\}$, $\vec{e}_3' = \left\{\dfrac{1}{\sqrt{6}};\dfrac{2}{\sqrt{6}};\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right\}$.

## Вариант Б

(П.С. Моденов, А.С. Пархоменко. Сборник задач по аналитической геометрии, задачи №№ 1041–1045)

| Тема | В аудитории | | ДЗ по категориям | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | основные | резерв | III | II | I |
| Определить вид поверхности:<br>а) преобразуя левую часть | 1041 (1, 3) | 1041 (4) | 1041 (2, 5) | | |
| б) перенеся начало координат | 1042 (1, 4) | 1042 (3) | 1042 (2) | | |
| в) пользуясь поворотом вокруг одной из осей | 1043 (2, 4) | 1043 (3) | 1043 (1) | 1043 (5) | |
| г) пользуясь переносом и поворотом вокруг одной из осей | 1044 (1, 3), 1045 (1) | | | | 1044 (2) |
| д) пользуясь аффинным неортогональным преобразованием | 1045 (1, 3, 4) | 1045 (2, 6, 7) | 1045 (5) | | 1045 (8) |

## Решение задач

**Задача № 1041.** Определить вид поверхности.

**(1)** $x^2 + 2xy + y^2 - z^2 + 2z - 1 = 0.$

***Решение***. Выделяем полные квадраты:

$$(x + y)^2 - (z - 1)^2 = 0 \text{ или } (x + y - z + 1)(x + y + z - 1) = 0.$$

*Ответ*: пара пересекающихся плоскостей.

**(2)** $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 6x + 4y - 1 = 0.$

*Ответ*: сфера.

**(3)** $3x^2 + 3y^2 - 6x + 4y - 1 = 0.$

*Ответ*: круглый цилиндр.

**(4)** $3x^2 + 3y^2 - 3z^2 - 6x + 4y + 4z + 3 = 0.$

*Ответ*: круглый конус.

**(5)** $4x^2 + y^2 - 4xy - 36 = 0.$

*Ответ*: пара параллельных плоскостей.

**Задача № 1042.** Определить вид поверхности, пользуясь переносом системы координат.

**(1)** $x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 6x + 8y - 36z = 0.$

***Решение***. Выделяем полные квадраты по каждой переменной:

$$(x - 3)^2 + 4(y + 1)^2 + 9(z - 2)^2 = 49.$$

*Ответ*: эллипсоид.

**(2)** $4x^2 - y^2 - z^2 + 32x - 12z + 44 = 0.$

*Ответ*: однополостный гиперболоид.

**(3)** $3x^2 - y^2 + 3z^2 - 18x + 10y + 12z + 14 = 0.$

*Ответ*: круглый конус.

**(4)** $6y^2 + 6z^2 + 5x + 6y + 30z - 11 = 0.$

*Ответ*: параболоид вращения.

**Задача № 1043.** Определить вид поверхности, пользуясь поворотом системы координат вокруг одной из осей.

**(1)** $z^2 = 2xy.$

***Решение***. Поворот на 45° вокруг оси $0z$: $x = \dfrac{x' - y'}{\sqrt{2}}, y = \dfrac{x' + y'}{\sqrt{2}},$ $z = z'$ приводит к уравнению $z'^2 = x'^2 - y'^2$.

*Ответ*: круговой конус.

**(2)** $z = xy$.

***Решение***. Поворот на 45° вокруг оси $0z$: $x=\dfrac{x'-y'}{\sqrt{2}}$, $y=\dfrac{x'+y'}{\sqrt{2}}$, $z = z'$ приводит к уравнению $2z' = x'^2 - y'^2$.

*Ответ*: гиперболический параболоид.

**(3)** $z^2 = 3x + 4y$.

***Решение***. $z^2 = 5\left(\dfrac{3}{5}x+\dfrac{4}{5}y\right)$, замена $z = z'$, $y = y'$, $\dfrac{3}{5}x+\dfrac{4}{5}y = x'$ приводит к уравнению $z'^2 = 5x'$.

*Ответ*: параболический цилиндр.

**(4)** $z^2 = 3x^2 + 4xy$.

***Решение***. Совершим поворот вокруг оси $z$ на угол $\alpha$, определяемый уравнением $2\mathrm{tg}^2\alpha - 3\mathrm{tg}\alpha - 2 = 0$ (см. тему «Приведение уравнений второго порядка к каноническому виду). Отсюда $2\,\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{3}{4} \pm \dfrac{5}{4}$. Возьмем $\mathrm{tg}\alpha = 2$, тогда $\cos\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$, $\sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ Новые переменные: $x = \dfrac{2}{\sqrt{5}}x' - \dfrac{1}{\sqrt{5}}y'$, $y = \dfrac{1}{\sqrt{5}}x' + \dfrac{2}{\sqrt{5}}y'$, $z = z'$.

Уравнение в новых переменных $4x'^2 - y'^2 - z'^2 = 0$.

*Ответ*: круговой конус.

**(5)** $z^2 = x^2 + 2xy + y^2 + 1$.

*Ответ*: гиперболический цилиндр.

**Задача № 1044**. Определить вид поверхности, пользуясь переносом и поворотом систем координат вокруг одной из осей.

**(1)** $x^2 + 4y^2 + 5z^2 + 4xy + 4z = 0$.

***Решение***. Совершим поворот вокруг оси $z$: $x = \dfrac{2}{\sqrt{5}}x' + \dfrac{1}{\sqrt{5}}y'$, $y = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}x' + \dfrac{2}{\sqrt{5}}y'$ и сдвиг вдоль этой оси $z = z' - \dfrac{2}{5}$. Получим уравнение $y'^2 + z'^2 = \dfrac{4}{25}$.

*Ответ*: круговой цилиндр.

**(2)** $x^2 + 2x + 3y + 4z + 5 = 0$.

***Решение***. Совершим поворот в плоскости $y0z$ на угол $\alpha$, где $\cos\alpha = \frac{4}{5}$, $\sin\alpha = -\frac{3}{5}$, $y = y'\cos\alpha - z'\sin\alpha$, $z = y'\sin\alpha + z'\cos\alpha$, а также сдвиг $x' = x+1$, $z' \to z' + \frac{4}{5}$. Получим $x'^2 + 5z' = 0$.

*Ответ*: параболический цилиндр.

**(3)** $z = x^2 + 2xy + y^2 + 1$.

***Решение***. Поворот на 45° вокруг оси $0z$: $x = \frac{x' - y'}{\sqrt{2}}$, $y = \frac{x' + y'}{\sqrt{2}}$, сдвиг по оси $z$: $z = z' + 1$, получаем уравнение $z' = 2x'^2$.

*Ответ*: параболический цилиндр.

**Задача № 1045**. Определить вид каждой из следующих поверхностей.

**(1)** $x^2 - 2y^2 + z^2 + 4xy + 4yz - 8zx - 14x - 4y + 14z + 18 = 0$.

***Решение***. Делаем замену: $x' = x + 2y - 4z$, $y = y'$, $z = z'$ и выделяем полные квадраты:

$$x'^2 - 6y'^2 - 15z'^2 + 12y'z' - 14x' + 24y' - 42z' + 18 = 0$$

Делаем вторую замену: $x'' = x'$, $y'' = y' - z'$, $z'' = z'$ и получаем

$$x''^2 - 6y''^2 - 9z''^2 - 14x'' + 24y'' - 18z'' + 18 = 0.$$

Далее сдвиг: $\overline{x} = x'' - 7$, $\overline{y} = y'' - 2$, $\overline{z} = z'' - 2$. Получим уравнение $\overline{x}^2 - 6\overline{y}^2 - 9\overline{z}^2 + 29 = 0$.

Мы совершили линейные, но не ортогональные преобразования. Однако известно, что тип поверхности при линейном преобразовании не меняется. Следовательно, полученное уравнение позволяет нам сделать вывод о том, что исходное уравнение описывает однополостный гиперболоид

*Ответ*: однополостный гиперболоид.

Аналогично решаются и остальные примеры этой задачи.

**(2)** $5x^2 + 8y^2 + 5z^2 - 4xy + 4yz + 8zx - 6x + 6y + 6z + 10 = 0$.

*Ответ*: эллиптический параболоид.

**(3)** $2yz + 2zx + 2xy + 2x + 2y + 2z + 1 = 0$.

*Ответ*: двуполостный гиперболоид.

**(4)** $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 2xy - 2xz - 2zy - 2x - 2y - 2z - 1 = 0$.

*Ответ*: эллипсоид.

**(5)** $2x^2 + 6y^2 + 2z^2 + 8xz - 4x - 8y + 1 = 0.$
*Ответ*: двуполостный гиперболоид.
**(6)** $5x^2 + 2y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz - 2zx + 10x - 4y + 2z + 4 = 0.$
*Ответ*: круглый цилиндр.
**(6)** $5x^2 + 2y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz - 2zx + 10x - 4y + 2z + 4 = 0.$
*Ответ*: круглый цилиндр.
**(8)** $4xy + 4yz + 4zx + 4x + 4y + 4z + 3 = 0.$
*Ответ*: круговой конус.

## Занятие 14

## Определители[‡]

(И.В. Проскуряков. Сборник задач по линейной алгебре. М.: Наука, 1999 (и более ранние). задачи №№ 1–278)

| Тема | В аудитории | | ДЗ по категориям | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | основные | резерв | III | II | I |
| Перестановки | 123 | 137 | 124 | | |
| Подстановки | 151, 153, 163, 169 | 170 | 152, 164 | | |
| Определение определителя | 188, 190, 192, 201, 203, 205, 212 | 194, 213 | 189, 191 | 193, 200 | 207, 208 |
| Вычисление определителя разложением по элементам строки (столбца), а также с помощью элементарных преобразований | 236, 257, 261 | 259, 262, 263 | 237, 258, 260 | | 270 |

Четность перестановки определяется четностью числа инверсий в этой перестановке.

Четность подстановки определяется как четность суммарного числа инверсий в обеих перестановках, составляющих данную подстановку.

[‡] Эта тема подробно рассмотрена в работе [5].

Четность подстановки определяется также другим способом: она равна четности декремента (разности между числом $n$ элементов в перестановке и числом $s$, равным числу независимых циклов, включая число элементов, оставляемых на месте).

*Пример*: рассмотрим подстановку $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 4 & 5 & 2 & 6 \\ 4 & 7 & 2 & 5 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$. Эта подстановка число 1 переводит в 4, а затем $4 \to 5$, $5 \to 1$, т.е. образовался цикл (1 4 5). Далее: $3 \to 7$, $7 \to 2$, $2 \to 3$, образовался цикл (3 7 2), число 6 остается на месте, его можно считать одночленным циклом и записать подстановку в виде произведения циклов:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 4 & 5 & 2 & 6 \\ 4 & 7 & 2 & 5 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} = (1\ 4\ 5)(3\ 7\ 2)(6)\,.$$

Число циклов в ней составляет 3, поэтому декремент $n - s = 7 - 3 =$ $= 4$. Вывод: подстановка четная.

Тот же результат получается, если подсчитывать четность подстановки по суммарному числу инверсий в обеих перестановках: число инверсий в верхней перестановке равно 7, в нижней – 11, всего 18, т.е. подстановка четная.

## Решения задач

**Задача № 169.** Перемножить подстановки

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

***Решение***. Первая подстановка число 1 переводит в 4, вторая 4 переводит в 1, следовательно, произведение подстановкой переводит 1 в 1. Далее, первая подстановка число 2 переводит в 1, а вторая – 1 переводит в 3, поэтому произведение число 2 переводит в 3 и т.д. Итак:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Задача № 188.** С каким знаком входит данное произведение в определитель: $a_{43}\, a_{21}\, a_{35}\, a_{12}\, a_{54}$?

***Решение.*** Как известно, определителем матрицы $a_{ij}$ $(i,j = 1, 2, \ldots, n)$ называется число, равное сумме всевозможных произведений из $n$ элементов матрицы, взятых по одному из каждой строки и из каждого столбца, причем это произведение берется со знаком $(-1)^N$, где $N$ – четность соответствующей подстановки из индексов элементов.

В нашем случае подстановка из индексов элементов произведения имеет вид $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. Разложив ее по циклам, получим (4 3 5) (2 1), т.е. $N = n - s = 5 - 2 = 3$. Произведение входит в определитель со знаком минус.

**Задача № 190.** Является ли членом определителя соответствующего порядка произведение $a_{27}\, a_{36}\, a_{51}\, a_{74}\, a_{25}\, a_{43}\, a_{62}$?

***Решение***. Записав подстановку из индексов элементов, входящих в произведение $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 7 & 2 & 4 & 6 \\ 7 & 6 & 1 & 4 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, видим, что данное произведение не может быть членом определителя, так как в верхней перестановке номер строки 2 повторяется дважды, а первого вообще нет.

**Задача № 193.** С каким знаком входит в определитель произведение $a_{12}\, a_{23}\, \ldots\, a_{n-1,n}\, a_{n1}$?

***Решение.*** Записав подстановку из индексов элементов, входящих в произведение $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \ldots & n & 1 \end{pmatrix}$, видим, она состоит из одного цикла $(1\ 2\ 3\ \ldots\ n-1\ n)$, т.е. $N = n - s = n - 1$. Произведение имеет знак $(-1)^{n-1}$.

**Задача № 207.** Решить уравнение

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^n \\ 1 & a_1 & a_1^2 & a_1^n \\ 1 & a_2 & a_2^2 & a_2^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & a_n & a_n^2 & a_n^n \end{vmatrix} = 0 .$$

***Решение***. Левая часть представляет собой многочлен степени $n$. Поэтому уравнение может иметь только $n$ корней. Вычтем первую строку из всех остальных, получим:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^n \\ 0 & a_1 - x & a_1^2 - x^2 & a_1^n - x^n \\ 0 & a_2 - x & a_2^2 - x^2 & a_2^n - x^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_n - x & a_n^2 - x^2 & a_n^n - x^n \end{vmatrix} = 0$$

Отсюда находим

$$\begin{vmatrix} a_1 - x & a_1^2 - x^2 & a_1^n - x^n \\ a_2 - x & a_2^2 - x^2 & a_2^n - x^n \\ \dots & \dots & \dots \\ a_n - x & a_n^2 - x^2 & a_n^n - x^n \end{vmatrix} = 0\,.$$

Из каждой строки вынесем множитель $a_i - x$ ($i = 1, 2, \ldots, n$):

$$(a_1 - x)(a_2 - x)\ldots(a_n - x)\cdot\begin{vmatrix} 1 & a_1 + x & \ldots \\ 1 & a_2 + x & \ldots \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_n + x & \ldots \end{vmatrix} = 0\,.$$

Так как всего может быть $n$ корней, то этими корнями являются числа $a_1$, $a_2$, …, $a_n$.

**Задача № 208.** Решить уравнение

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \ldots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & & \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & n-x \end{vmatrix} = 0\,.$$

***Решение***. Вычтем первый столбец из всех остальных, получим:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -x & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1-x & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & n-1-x \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда следует, что $x(x-1)\dots(x-n+1)=0$, т.е. корни $x = 0, 1, 2, \dots, n-1$).

## Занятие 15

## Действия с матрицами[§]

(И.В. Проскуряков. Сборник задач по линейной алгебре, задачи №№ 788–886)

| Тема | В аудитории | | ДЗ по категориям | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | основные | резерв | III | II | I |
| Линейная зависимость векторов | 636, 637, 639, 641, 643, 646–650 | | 638, 640, 642 | 644 | |
| Базис системы векторов | 673 | 676 | | | 674 |
| Перемножение матриц | 788, 790 | 792 | 791 | | |
| Обратная матрица | 836, 840 | 839 | 837, 841 | | |
| Матричные уравнения | 861, 867 | 864 | 862 | 869 | 868 |

### Решения задач

**Задача № 641.** Является ли линейно зависимой система векторов:

---

[§] Эта тема подробно рассмотрена в работе [5].

$$\vec{a}_1 = (2,\ -3,\ 1),$$
$$\vec{a}_2 = (3,\ -1,\ 5),$$
$$\vec{a}_3 = (1,\ -4,\ 3)?$$

***Решение***. Определитель Δ = 35 ≠ 0, следовательно, система линейно независима.

**Задача № 673.** Найти все базисы системы векторов:

$$\vec{a}_1 = (1,\ 2,\ 0,\ 0),$$
$$\vec{a}_2 = (1,\ 2,\ 3,\ 4),$$
$$\vec{a}_3 = (3,\ 6,\ 0,\ 0).$$

***Решение***. Так как $\vec{a}_3 = 3\vec{a}_1$, то базисами могут служить пары векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ или $\vec{a}_2, \vec{a}_3$.

**Задача № 674.** Найти все базисы системы векторов:

$$\vec{a}_1 = (1,\ 2,\ 3,\ 4),$$
$$\vec{a}_2 = (2,\ 3,\ 4,\ 5),$$
$$\vec{a}_3 = (3,\ 4,\ 5,\ 6),$$
$$\vec{a}_4 = (4,\ 5,\ 6,\ 7).$$

***Решение***. Так как $\vec{a}_3 = 2\vec{a}_2 - \vec{a}_1$ и $\vec{a}_4 = 3\vec{a}_2 - 2\vec{a}_1$, то два вектора линейно независимы, остальные выражаются через них. Если же понятие ранга уже введено, то задача решается через вычисление ранга системы и нахождение базисных миноров.

**Задача № 840.** Найти обратную матрицу для матрицы:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 8 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

***Решение***.

*Способ 1.* Обратная по отношению к матрице $A$ матрица $A^{-1}$ вычисляется следующим образом:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

где $\Delta$ – определитель матрицы $A$, а $A_{ij}$ – алгебраическое дополнение элемента $a_{ij}$ матрицы $A$. В нашем примере $\Delta = -1$, $A_{11} = -1$, $A_{21} = 1$ и т.д. Тогда

$$A^{-1} = -\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 38 & -41 & 34 \\ -27 & 29 & -24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix}.$$

*Способ 2*. Обратная матрица вычисляется методом элементарых преобразований.

Можно показать, что любую невырожденную матрицу $A$ элементарными преобразованиями, совершаемыми только над строками, можно привести к единичной матрице $E$. Совершая эти преобразования в том же порядке над единичной матрицей, получим обратную матрицу $A^{-1}$. Запишем рядом через вертикальную черту исходную матрицу $A$ и единичную матрицу $E$ и будем последовательно совершать с их строками одни и те же элементарные преобразования, последовательно добиваясь того, чтобы в матрице $A$ на месте $a_{11}$ стояла 1, а под ней в первом столбце нули. Затем добиваемся, чтобы нули получились во втором столбце ниже диагонального элемента и т.д. Далее делаем единицами все диагональные элементы, затем нулями все недиагональные элементы последнего столбца, потом – предпоследнего и т.д.

В нашем примере:

1) умножаем первую строку на –3и складываем со второй, затем первую умножаем на 5 и складываем с третьей, умноженной на –2:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 5 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 5 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -17 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 29 & 41 & 5 & 0 & -2 \end{array}\right) \sim$$

2) вторую строку, умноженную на 29. прибавим к третьей, умноженной на 12, а затем третью строку, умноженную на 7, прибавим к первой и третью, умноженную на –17, ко второй:

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 5 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -17 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -27 & 29 & -24 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 5 & 0 & -188 & 203 & -168 \\ 0 & -12 & 0 & 456 & -492 & 408 \\ 0 & 0 & -1 & -27 & 29 & -24 \end{array}\right);$$

3) к первой строке, умноженной на 12, прибавим вторую, умноженную на 5, а затем разделим первую строку на 24, вторую на –12, а третью на –1:

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 24 & 0 & 0 & 24 & -24 & 24 \\ 0 & -12 & 0 & 456 & -492 & 408 \\ 0 & 0 & -1 & -27 & 29 & -24 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -38 & 41 & -34 \\ 0 & 0 & 1 & 27 & -29 & 24 \end{array}\right).$$

**Задача № 867.** Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

***Решение***. Так как определители заданных матриц равны нулю, то записав искомую матрицу в виде $X=\begin{pmatrix} c_3 & c_4 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix}$, перемножим матрицы, стоящие слева:

$$\begin{pmatrix} 2c_3-3c_1 & 2c_4-3c_2 \\ 4c_3-6c_1 & 4c_4-6c_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

и получим систему уравнений

$$\begin{cases} 2c_3-3c_1=2, \\ 2c_4-3c_2=3, \\ 4c_3-6c_1=4, \\ 4c_4-6c_2=6. \end{cases}$$

В этой системе третье уравнение есть следствие первого, а четвертое – следствием второго. Поэтому, считая $c_1$ и $c_2$ произвольными, находим

$$c_3=\frac{2+3c_1}{2} \text{ и } c_4=\frac{3+3c_2}{2}.$$

# Занятие 16**

## Вычисление ранга матрицы**. Решение систем методом Крамера

(И.В. Проскуряков. Сборник задач по линейной алгебре, задачи №№ 554–669)

| Тема | В аудитории | | ДЗ по категориям | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | основные | резерв | III | II | I |
| Правило Крамера | 554, 561 | 555 | | | |
| Вычисление ранга матрицы методом окаймления миноров | 608, 612 | 609, 613 | | | |
| Вычисление ранга при помощи элементарных преобразований | 619 | 620 | | | |

### Решения задач

**Задача № 620.** Вычислить ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 47 & -67 & 35 & 201 & 155 \\ 26 & 98 & 23 & -294 & 86 \\ 16 & -428 & 1 & 1284 & 52 \end{pmatrix}.$$

***Решение***. Так как последняя строка получается сложением первой, умноженной на 2, со второй, умноженной на –3, то ранг матрицы равен двум (среди определителей второго порядка, составленных из элементов первой и второй строк, заведомо есть отличные от нуля).

---

** Занятие резервное, возможно его перенесение на следующий семестр.

** Эта тема подробно рассмотрена в работе [5].

## Список рекомендуемой литературы

1. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. М.: Наука, 2010 (и более ранние).

2. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре. М.: Наука, 1999 (и более ранние).

3. Моденов П.С., Пархоменко А.С. Сборник задач по аналитической геометрии. М.: Наука, 1976.

4. Прилепко А.И., Говоров В.М., Логинов А.С., Сандаков Е.Б. Векторная алгебра, кривые второго порядка. М.: Изд. МИФИ, 1979.

5. Прилепко А.И., Говоров В.М., Логинов А.С., Сандаков Е.Б. Определители и линейные пространства. М.: Изд. МИФИ, 1979.

Михайлов Владислав Дмитриевич

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Учебное пособие
для практических занятий

Макет подготовлен *Е.Н. Кочубей*

---

Подписано в печать 25.06.2019. Формат 60x84 1/16.
Изд. № 032-1. Печ. л. 5,0. Тираж 100 экз. Заказ № 71.

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ».
Типография НИЯУ МИФИ. 115409.
Москва, Каширское ш., 31