МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

Н. М. Гаврилов, С. В. Сомов

ОБОРУДОВАНИЕ ДЛЯ РАБОТЫ С УСКОРЕННЫМИ ПУЧКАМИ

*Рекомендовано УМО «Ядерные физика и технологии»
в качестве учебного пособия
для студентов высших учебных заведений*

Москва 2010

УДК 621.384.6(075)
ББК 32.85я7
Г12

Гаврилов Н.М., Сомов С.В. **Оборудование для работы с ускоренными пучками**: Учебное пособие. – М.: НИЯУ МИФИ, 2010. – 224 с.

Даны отдельные разделы курса, читаемого в девятом семестре студентам, обучающимся по специальности «Физика пучков заряженных частиц и ускорительная техника». В пособие включены материалы, которые отражают развитие и современное состояние ускорителей и оборудования для работы с высокоэнергетическими частицами.

Предназначено для студентов НИЯУ МИФИ, изучающих данное оборудование.

Подготовлено в рамках Программы создания и развития НИЯУ МИФИ.

Рецензент д-р физ.-мат. наук, проф. *Э. Я. Школьников*

ISBN 978-5-7262-1196-1

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие

Стремление человека проникнуть в тайны материи обусловливает необходимость нахождения инструментария, способного обеспечить проникновение в наиэлементарнейшие объекты вещества.

Наиболее подходящими для выполнения этих задач являются высокоэнергетические частицы, получаемые на современных гигантских ускорителях заряженных частиц. С помощью таких частиц рассчитываются, ставятся и проводятся сложнейшие эксперименты, включающие различные этапы по выводу так называемых первичных частиц из циклических ускорителей, получению на разнообразных мишенях, формированию и использованию вторичных частиц, направлению их на современные сложнейшие детекторы, в которых предполагается наблюдение различных событий и объектов, не известных до сих пор науке.

Перечисленные этапы в различные периоды развития физики высоких энергий (ФВЭ) включали электрофизическое оборудование и детектирующую аппаратуру, отвечающие требованиям поставленных задач. Эти требования, естественно, заставляли поддерживать уровень энергии и интенсивности первичных частиц. Так было, например, при обнаружении антипротонов, антинейтронов и их связанных состояний – антидейтронов, так было при обнаружении ранее неизвестных частиц и резонансов, так будет всегда. Поэтому представляет большой интерес ретроспективный взгляд на развитие электрофизического и детектирующего оборудования, сопровождающего проведение уникальных экспериментов с частицами высоких энергий.

Первая глава посвящена экспериментальным исследованиям по обнаружению новых элементарных частиц, последующие – выходному оборудованию ускорителей.

Авторы выражают глубокую признательность студенту С. Е. Торкову за помощь в подготовке данного учебного пособия к изданию.

1. РОЛЬ УСКОРИТЕЛЕЙ В СОВРЕМЕННОЙ ФИЗИКЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

Исследования все более малых элементов структуры материи, которые на каждом новом этапе познания считаем элементарными составляющими мироздания, сопровождаются созданием все более сложных и дорогостоящих экспериментальных установок. Изучением атомов занимаются в обычных лабораториях. Опыты с ядрами проводят на ускорителях заряженных частиц, размещаемых в специальных зданиях с серьезной защитой от радиоактивного излучения. Для исследования свойств частиц, считающихся на сегодняшний день элементарными, строят гигантские ускорительные комплексы протяженностью орбит в десятки километров. Ускоряемые частицы удерживаются на этих орбитах с помощью многих сотен сверхпроводящих магнитов в вакуумных камерах, откачанных до 10^{-10} Тор. Вес экспериментальных установок, регистрирующих взаимодействия ускоренных частиц, достигает десятков тысяч тонн.

Благодаря большим ускорителям этим «супермикроскопам» физики частиц наши представления о структуре и свойствах материи за последние полвека претерпели революционные изменения. Количество элементарных составляющих материи сведено к шести сильновзаимодействующим кваркам и шести слабовзаимодействующим лептонам. Эти «кирпичи» мироздания в разных комбинациях скрепляются с помощью четырех так называемых калибровочных бозонов. Тринадцать из шестнадцати элементарных частиц найдены в экспериментах на ускорителях.

Но почему так много различных типов кварков и лептонов? Для построения всего мира вокруг нас и нас самих достаточно двух кварков и одного лептона – электрона. Для обеспечения подходящей температуры, необходимой для поддержания жизни на Земле, нужен еще один лептон – электронное нейтрино. Без него невозможно горение водорода в Солнце и звездах: Для чего все остальные элементарные частицы, можно только догадываться.

1.1. Условия локализации исследований в области малых расстояний

Важнейшим методом исследования структуры частиц является рассеяние ускоренной частицы, размером которой пренебрегаем, на исследуемой. При этом необходимо, чтобы длина волны де Бройля ускоренной частицы $\lambda = \frac{\hbar}{p}$ ($\hbar$ – постоянная Планка; p – импульс частицы) была мала по сравнению с размером исследуемой. В противном случае налетающая частица рассеивается когерентно на всей области действия силового поля исследуемой, и взаимодействие происходит как между двумя точечными частицами. Но это условие не является достаточным. Важна величина передаваемого во взаимодействии импульса q. По принципу неопределенности размер разрешаемой структуры составляет $\Delta X = \frac{\hbar}{q}$.

Чтобы почувствовать структуру элементарных частиц, размер которых по современным представлениям не более 10^{-16} см, необходимо в соответствии с первым условием ускорить частицу до 200 ГэВ/с. Такие ускорители существуют, но передать импульс 200 ГэВ/с на ускорителе с фиксированной мишенью совершенно нереально. На ускорителе высокой энергии с фиксированной мишенью лишь порядка десяти процентов энергии тратится на образование новых частиц. Вся остальная энергия превращается в кинетическую энергию продуктов взаимодействия.

Таблица 1.1

Ускорители с фиксированной мишенью, на которых получены наиболее важные результаты физики частиц

Ускоритель	Тип	Энергия, ГэВ	Основные результаты
Bevatron, Беркли	Протонный	7	Антипротон
SLAC, Стенфорд	Электронный	20	Структура протона
PS, ЦЕРН	Протонный	26	Нейтральные токи
AGS, Брукхейвен	Протонный	40	Ω – гиперон, мюонное нейтрино, CPV, c-кварк
FNAL, Батавия	Протонный	500–1000	b-кварк, τ-нейтрино

Тем не менее, на ускорителях с фиксированными мишенями сделан ряд важных открытий в физике частиц. Некоторые из них приведены в табл. 1.1.

1.2. Краткая история экспериментов и наблюдения за частицами

Наблюдение структуры нуклона в SLAC. В 1968 г. на ускорителе электронов SLAC в экспериментах по глубоко неупругому рассеянию электронов на протонах и связанных нейтронах были получены первые свидетельства существования кварков. Эксперименты аналогичны опыту Резерфорда по наблюдению рассеяния налетающей частицы на большие углы при наличии рассеивающих центров в исследуемом объекте. В данном случае такими центрами являются кварки в протоне.

Электроны с энергией 8 ГэВ рассеивались на протонах жидководородной мишени. Измеряли направление вылета и скорость рассеянного электрона. Отличительной особенностью эксперимента от опытов Резерфорда являлось то, что изучали «глубоко неупругое» рассеяние, за счет высокой энергии и малой длины волны электрон проникал «глубоко» внутрь протона и во взаимодействии не сохранялась кинетическая энергия («неупругое» рассеяние).

Анализ результатов эксперимента показал следующее:

1) адроны имеют внутреннюю структуру;

2) барионы (p, n) содержат три рассеивающих центра (состоят из трех кварков);

3) в мезонах ($\pi^{\pm}$, π^{0}, $K^{\pm}$,...) два рассеивающих центра (кварк и антикварк), поскольку мезон не имеет «цвета», для нейтрализации «цвета» кварка необходим «антицвет».

4) подобно электрону, кварки представляются точечными зарядами, но заряд у них дробный.

За открытие кварков в нуклоне руководителям эксперимента присуждена Нобелевская премия.

Схема эксперимента приведена на рис. 1.1.

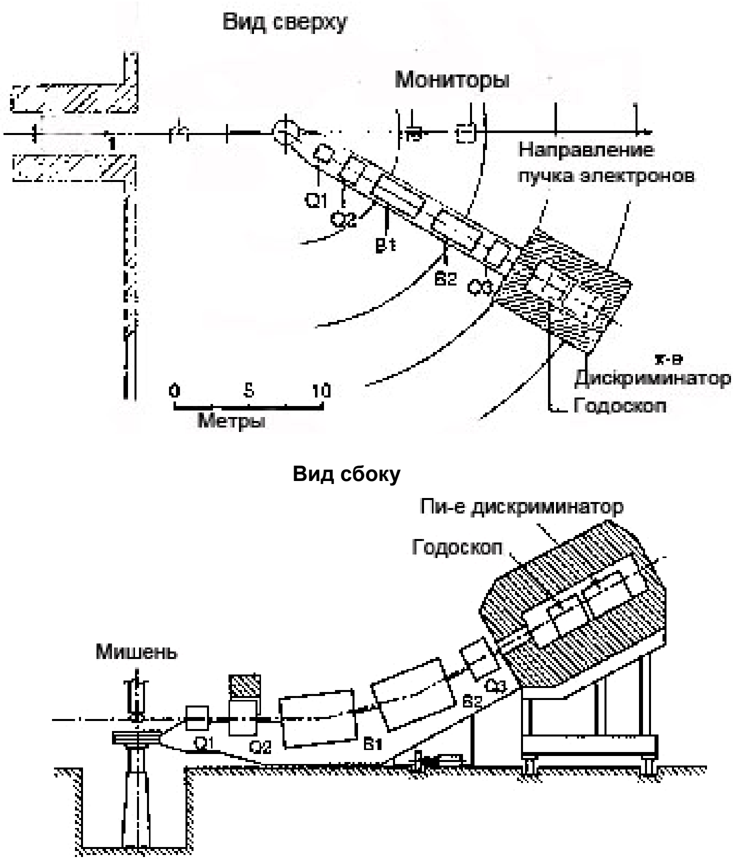


Рис. 1.1. Схема эксперимента по изучению глубоко неупругого рассеяния электронов на протонах (Q1, Q2, Q3, B1 и B2 – фокусирующие линзы и отклоняющие магниты)

Наблюдение нейтральных токов на протонном синхротроне ЦЕРН. В 1973 г. в эксперименте с пузырьковой камерой Гаргамель, установленной на Церновском синхротроне (PS), впервые обнаружено взаимодействие ν_μ без заряженного лептона (мюона или электрона) в конечном состоянии.

$$\nu_\mu + N \rightarrow \nu_\mu + X,$$

где X – адронное состояние.

Эти события названы событиями с *нейтральными токами.* Они составляют порядка 30 % от обычных реакций с *заряженными токами:*

$$\nu_\mu + N \rightarrow \mu^- + X.$$

Важность открытия нейтральных токов состоит в том, что их существование явилось первым свидетельством в пользу создания единой модели слабого и электромагнитного взаимодействий. Это привело к прямой оценке масс $W^\pm$ и Z^0 бозонов и постановке экспериментов по их обнаружению.

Эксперименты на синхротронах BNL. Ускорительный центр США «Брукхейвенская национальная лаборатория» (BNL), пожалуй, является абсолютным чемпионом по количеству научных достижений, отмеченных Нобелевской премией.

На первом протонном синхротроне этой лаборатории – Космотроне с энергией 3,3 ГэВ проведен ряд экспериментов по изучению распадов K^+-мезонов. Результаты вызывали недоумение и были названы $\tau - \theta$ проблемой. Получалось, что две практически одинаковые частицы распадаются по-разному. В 1957 г. Янг и Ли, проанализировав результаты экспериментов, предположили, что распадается одна и та же частица, но при этом нарушается фундаментальный и, как тогда считалось, абсолютно точный закон сохранения пространственной четности. Таким образом, было установлено, что пространственная четность нарушается в распадах K^+-мезонов, а следовательно, и при β-распаде. Позднее установили причину несохранения пространственной четности.

Наблюдение мюонного нейтрино. В 1960 г. в BNL запущен протонный синхротрон с жесткой фокусировкой пучка Alternating Gradient Synchrotron (AGS) с энергией 33 ГэВ. На этом синхротроне в 1962 г. впервые зарегистрировано мюонное нейтрино. В то время было известно о существовании только электронного нейтрино.

В эксперименте протонный пучок при взаимодействии с мишенью создавал большое количество π-мезонов, которые распадались в канале длиной в 200 м на мюоны и нейтрино. В стальной стене весом 5000 т мюоны поглощались и оставались только нейтрино. Типичная схема формирования нейтринного пучка приведена на рис. 1.2.

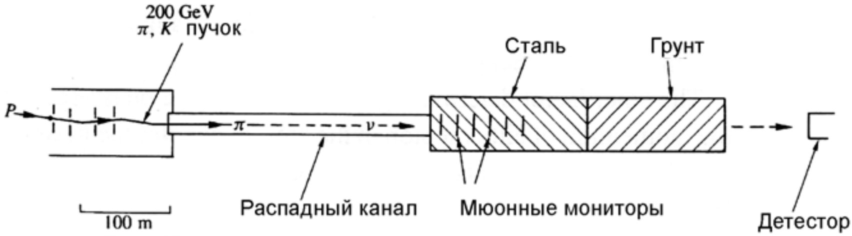
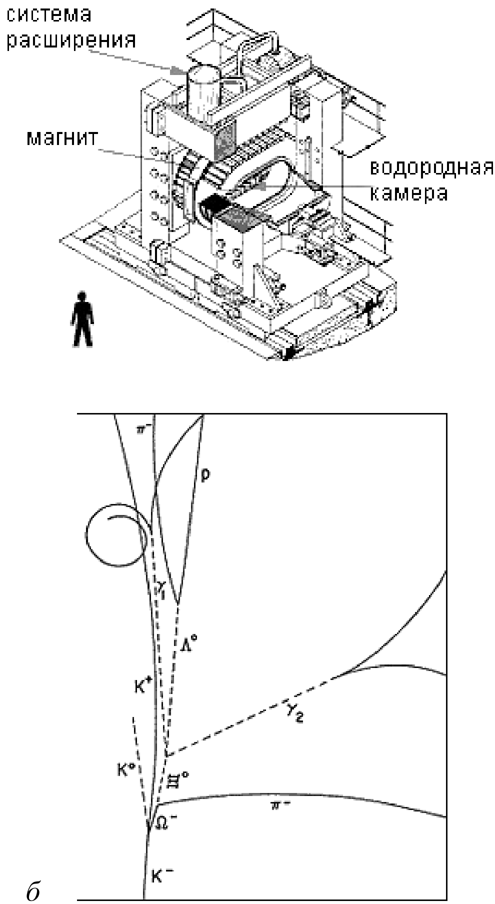


Рис. 1.2. Схема формирования пучка нейтрино

Возможны два варианта взаимодействия этих нейтрино с веществом. Если при взаимодействии рождается электрон, создающий электромагнитный ливень, то нейтрино электронное. Если образуется мюон – частица, проходящая большое количество вещества без видимого взаимодействия, то нейтрино мюонное. Наблюдая характер взаимодействия нейтрино с алюминиевыми электродами многосекционной искровой камеры, было установлено появление мюонов, проходящих весь объем камеры без взаимодействия, а следовательно, существование мюонного нейтрино.

Наблюдение Ω^- гиперона. В начале 1960-х годов искали схему классификации известных в то время адронов. Эта схема не базировалась на теории фундаментальной структуры материи или неких абстрактных принципах. Известные барионы и мезоны делились на симметричные семейства (октеты, декуплеты) в соответствии с двумя квантовыми числами – спином и четностью. В рамках одного семейства отличия были в массах, зарядах, барионных зарядах и странности. Для новой классификационной схемы предложена математическая трехмерная унитарная группа SU3. Очень важным было экспериментально подтвердить применимость SU3 симметрии для данного случая. Основным предсказанием схемы являлось существование Ω^--гиперона – изотопического синглета со спином 3/2, положительной четностью, массой ~ 1670 МэВ, барионным числом +1 и странностью –3. Предполагалось, что Ω^- стабилен по отношению к сильному распаду. Наблюдение этой частицы в 1964 г. в BNL на 80-дюймовой пузырьковой камере стало большим триумфом новой классификационной схемы. Схема образования и распада Ω^--гиперона приведена на рис. 1.3.

Дальнейшим развитием этого открытия явилось появление концепции «кварков», из которых состоят адроны, а также появление схем более высоких групп симметрии.



а

б

Рис. 1.3. Схема водородной пузырьковой камеры BNL (*а*)
и наблюдаемого в ней образования и распада Ω^{-}гиперона (*б*)

Наблюдение CP-нарушения в распадах K^0-мезонов. Неожиданным открытием Кронина и Фитча в 1964 г. было наблюдение нарушения комбинированной четности (CP-нарушение). CP-инвариантность считалась фундаментальным законом физики. Никому не приходило в голову, что две разные частицы могут одинаково распадаться.

Существуют два типа нейтральных K-мезонов: короткоживущий K_S^0 (~ 10^{-9} с) и долгоживущий K_L^0 ($5\cdot10^{-8}$с). Если CP-четность сохраняется, то K_S^0 распадается на два π-мезона, а K_L^0 – на три π-мезона. В эксперименте изучали распады K_L^0-мезонов, образующихся при взаимодействии пучка протонов с внутренней мишенью ускорителя. Схема экспериментальной установки приведена на рис. 1.4.

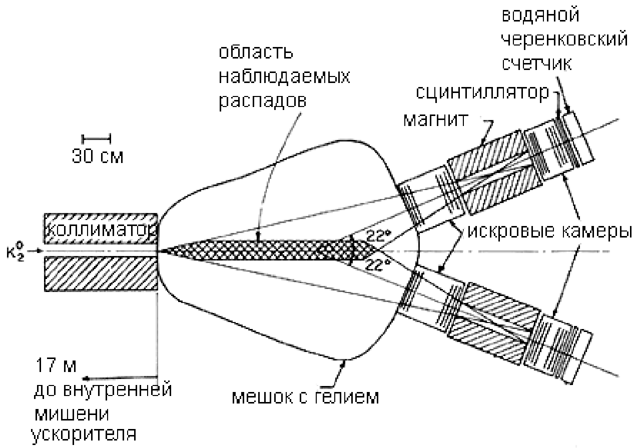


Рис. 1.4. Схема установки, в которой наблюдали распады K_L^0-мезонов на два π-мезона

При взаимодействии пучка протонов синхротрона BNL с внутренней бериллиевой мишенью образуются K^0-мезоны. Камера, в которой наблюдают распады K_L^0-мезонов, удалена от мишени на расстояние ~ 20 м. На этом расстоянии распадаются все короткоживущие K_S^0-мезоны. Оставшиеся K_L^0-мезоны, проходя через коллиматор, попадают в зону действия детекторов. Детекторами продуктов распада являются два телескопа, каждый из которых состоит из двух искровых камер, магнита, сцинтилляционного и черенковского счетчиков. Такой детектор позволяет идентифицировать распад K_L^0 на два π-мезона: $K_L^0 \to \pi^+ + \pi^-$.

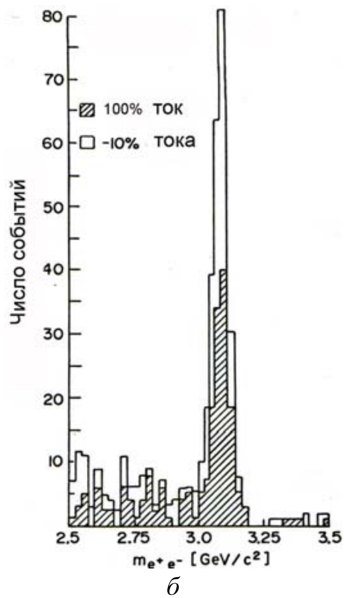
Получен неожиданный результат: K_L^0 с вероятностью ~ 10^{-3} распадается на два π-мезона. *CP*-четность K_L^0 = –1. *CP*-четность системы $\pi^+\pi^-$ = +1. Таким образом, в этих распадах имеет место нарушение *CP*-четности. Значение этого частного примера нарушения *CP*-четности далеко выходило за пределы физики *K*-мезонов, так как это открытие подрывало веру в симметрию Вселенной.

Наблюдение чармония в BNL. В ноябре 1974 г. две группы экспериментаторов, руководимые Самуэлем Тингом из BNL и Бартом Рихтером (SLAC) почти одновременно объявили об открытии узкого резонанса, а, по существу, новой частицы, названной J/Ψ. В эксперименте Тинга интенсивный протонный пучок AEG с энергией 28 ГэВ, взаимодействуя с мишенью, образовывал большое количество частиц. С помощью двухплечевого магнитного спектрометра (рис. 1.5), из этих частиц выбирали электрон-позитронные пары. По измеренной энергии электронов строили спектр инвариантных масс e^+e^- пар:

$$M_{\text{инв}} = 4E^+E^- \sin^2\theta/2,$$

где θ – угол разлета пары.

а



б

Рис. 1.5. Схема экспериментальной установки (*а*) и результат измерения инвариантной массы e^+e^- пар (*б*) в эксперименте Тинга

Протонный пучок интенсивностью 10^{12} протонов/с фокусировался на бериллиевую мишень. На виде сверху (см. рис. 1.5, *а*) показано, как e^+e^- пары, рожденные под углом 14,6°, проходят через дипольные магниты М, которые отклоняют частицы в вертикальной плоскости, позволяя измерять неискаженный угол разлета. Импульс измеряется проволочными камерами по вертикальному отклонению. Частицы проходят последовательно черенковские счетчики С, идентифицирующие электроны. Проволочные пропорциональные камеры D обеспечивают точное измерение координат. За самой большой камерой расположены две сборки по 25 счетчиков из свинцового стекла и свинцово-люситовая сборка S. Эти детекторы, регистрируя образование электромагнитных ливней, улучшают разделение адронов от электронов. Для уменьшения фоновой загрузки плечи спектрометра расположены так, что ни один из детекторов не смотрит прямо на мишень.

В спектре эффективных масс e^-e^+ пар наблюдали узкий резонанс (рис. 1.5, *б*).

Что же такое J/Ψ? Оказалось невероятным сопоставить J/Ψ какую-либо комбинацию из известных *u*-, *d*- и *s*-кварков потому, что все возможные комбинации известны в виде существующих адронов.

После введения поправок естественная ширина наблюдаемого пика оказалась 63 кэВ, что соответствует времени жизни $\tau = 10^{-20}$ с. Это на три порядка больше чем типичное время распада частиц по сильному каналу.

J/Ψ интерпретирован как связанное состояние новой элементарной частицы *c*-кварка с зарядом $q_c = +2/3$ и массой 1,5 ГэВ/с^2. Связанное состояние кварков – векторный мезон с квантовыми числами 1^- – иногда называют кварконием. Открытие *c*-кварка вошло в историю как *«Ноябрьская революция 1974 года» в физике элементарных частиц*.

Наблюдение очарованного Λ_C^0-бариона в BNL. Появление нового кварка означает существование целого ряда новых частиц содержащих этот кварк в сочетании с уже известными кварками. Наблюдение в эксперименте таких частиц важно с точки зрения подтверждения существования нового члена в семействе кварков.

На нейтринном пучке AGS была установлена 7-футовая водородная пузырьковая камера. В 1975 г. при взаимодействии нейтрино с жидким водородом камеры (протонами) наблюдали рождение новой частицы, содержащей *c*-кварк Λ_C^0 -бариона. На рис. 1.6 приведена фотография события с рождением и распадом очарованного Λ_C^0 -бариона.

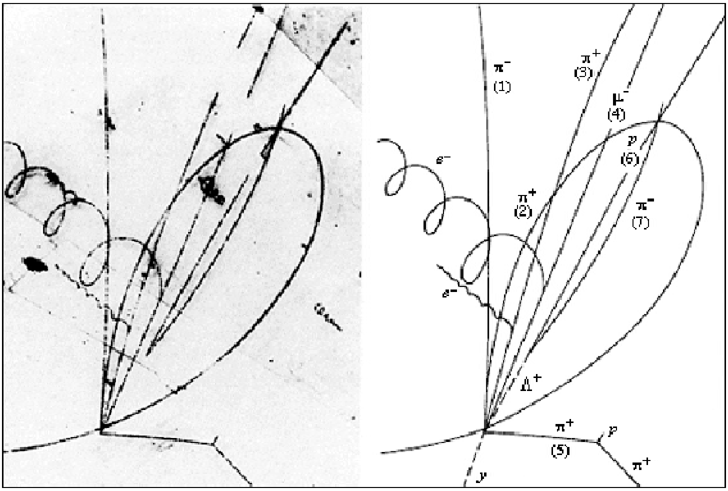


Рис. 1.6. Образование Λ_C^0 -бариона в 7-футовой водородной пузырьковой камере

При взаимодействии нейтрино, направление которого показано пунктиром снизу, с протоном образуются пять заряженных частиц и одна нейтральная Λ_C^0. Эта частица распадается на протон и π^--мезон. В свою очередь, Λ_C^0 -барион и четыре сопровождающие его пиона возникают от распада очарованного Σ-гиперона, время жизни которого слишком мало, чтобы наблюдать след от него в пузырьковой камере. Таким образом, впервые наблюдали частицу, содержащую два известных кварка (*u, d*) и один новый *c*-кварк.

Наблюдение боттомония в FNAL. В августе 1977 г. в FNAL на двухплечевом спектрометре (рис. 1.7) изучали инвариантную массу мюонных пар, образованных при взаимодействии протонов с энергией 400 ГэВ с мишенями из меди и платины:

$$p + (\mathrm{Cu}, \mathrm{Pt}) \rightarrow \mu^- + \mu^+ + X,$$

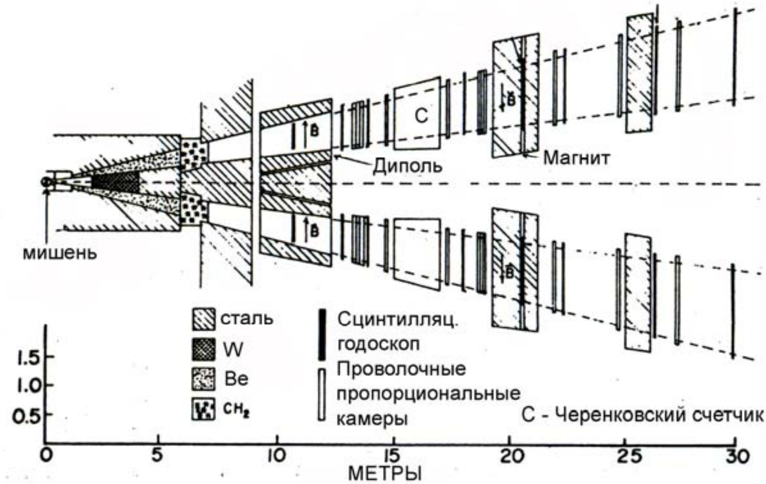


Рис. 1.7. Схема экспериментальной установки для измерения инвариантной массы мюонных пар

Выведенный из протонного синхротрона пучок протонов проходил через узкую (0,7 мм) мишень длиной $0{,}3L_{\text{яд}}$ и гасился в вольфрамовом блоке, расположенном на расстоянии 2,2 м от мишени по пучку. Мюоны, рожденные в мишени, регистрировались двухплечевым спектрометром. Для подавления адронов, электронов и γ-квантов в каждом плече вблизи мишени установлен Be поглотитель толщиной $18L_{\text{яд}}$. Be поглотитель окружен железной защитой, чтобы исключить утечку вторичных частиц в основном из вольфрамового блока. Полиэтиленовый блок и стальной коллиматор завершают защиту. В каждом плече дипольный магнит отклоняет мюоны в вертикальном направлении, развязывая, таким образом, плоскости измерения импульса и угла вылета мюонов из мишени. В противном случае отклонение мюона в магнитном поле может внести ошибку в измерение угла разлета, что влияет на точность восстановления инвариантной массы.

Система пропорциональных проволочных камер и сцинтилляционных годоскопов позволяет измерять координаты заряженных частиц. Пороговым черенковским счетчиком отсекают мюоны с малым импульсом при выработке триггера. Магнит из сплошного намагниченного железа (длиной 1,8 м, B = 20 кгс) позволяет измерять импульс мюона.

В каждом плече регистрируются как μ^- так и μ^+ симметрично относительно горизонтальной плоскости. Инвариантная масса реконструировалась в области m_{inv} > ГэВ/с^2. По измеренной энергии мюонов строят спектр инвариантных масс мюонных пар.

Пробный набор статистики при пониженном токе в отклоняющих магнитах (1500 А) четко проявил пик J/Ψ (15000 событий) и J/Ψ' (1000 событий). Для сравнения вся статистика этих частиц в эксперименте Тинга составила 242 события.

В августе 1977 г. при сбросе на мишень $1{,}6\cdot10^{16}$ протонов (9000 мюонных пар) зарегистрирован первый пик Y' (9,4 ГэВ/с^2). Этот пик идентифицирован как связанное состояние новой элементарной частицы b-кварка. В сентябре, набрав 30000 мюонных, пар обнаружили еще два пика Y'', Y'''. Вскоре в DESY в электрон-позитронной аннигиляции наблюдены четыре состояния боттомония ($b\bar{b}$): 1^3S_1 (основное), 2^3S_1, 3^3S_1, 4^3S_1 (квазисвязанное состояние) (рис. 1.8).

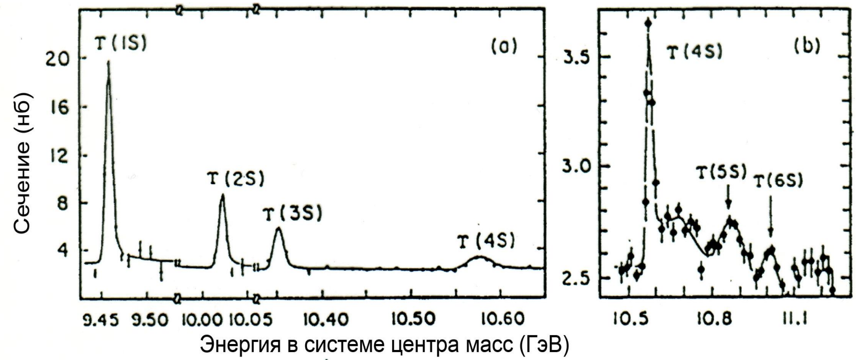


Рис. 1.8. Связанные состояния боттомония

Вследствие большей, чем у J/Ψ энергии связи, у Y больше связанных состояний.

С открытием b-кварка появляется целый ряд ранее не наблюдаемых частиц, содержащих этот кварк: B^- ($\bar{u}b$), B^+ (ub), B^0 (db), B^0

$(b\bar{d})$, $B_s^0\,(sb)$, Λ_B (udb)… Время жизни $B^0 = 1{,}57 \pm 0{,}04 \cdot 10^{-12}$ с. B^- живет $1{,}67 \pm 0{,}04 \cdot 10^{-12}$ с.

Исследование B состояний на e^+e^--коллайдерах показало, что B^0-система гораздо важнее для физики, чем ее чарм-эквивалент (D^0-система), так как B^0 смешивается так же, как и K^0, чего практически не наблюдается в D^0.

Самый важный результат 1987 г. – наблюдение на коллайдере DORIS (DESY) в эксперименте Аргус $B^0(\bar{b}d) - \bar{B}^0(b\bar{d})$ смешивания или переходов материи в антиматерию – первое свидетельство возможности перехода между первым и третьим поколениями кварков.

В e^+e^--аннигиляции рождался $Y(4)$, распадающийся на B^0 и $\bar{B}^0$. В свою очередь, при их распаде возникают два лептона противоположного знака. Если один из B^0 успевает до распада перейти в своего «антипартнера» то знаки лептонов будут одинаковы:

$$
\begin{array}{lllll}
e^+ + e^- \to Y'(4^3S_1) \to & B^0 + & \bar{B}^0 \to B^0 \to \mu^+(e^+) + \nu_\mu(\nu_e) & & + D^{*-} \\
 & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\
D^{*-} + \nu_\mu(\nu_e) + \mu^+(e^+) & & \mu^-(e^-) + \nu_\mu(\nu_e) + D^{*+} & & D^0 + \pi^- \\
\downarrow & & \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \downarrow & & \downarrow \\
D^0 + \pi^- & & \qquad\qquad\qquad\qquad\quad D^0 + \pi^+ & & K^+ + \pi^- \\
\downarrow & & \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \downarrow & & \\
K^+ + \pi^- & & \qquad\qquad\qquad\qquad\quad K^+ + \pi^- & &
\end{array}
$$

В эксперименте наблюдали отношение

$$r = \frac{N(l^\pm l^\pm)}{N(l^+ l^-)} = 0{,}231 \pm 0{,}018 \pm 0{,}034\,,$$

где l – лептон. Это значение существенно превышает ожидаемый из сопоставления с K^0-мезонами результат (~ 0,02). Следовательно, B^0-мезоны смешиваются гораздо интенсивнее, чем K^0-мезоны. При изучении некоторых распадов B^0-мезонов это позволяет существенно продвинуться в понимании природы CP-нарушения.

Исследование B^0-мезонов проводятся на B-фабриках, где на асимметричных e^+e^--коллайдерах, в реакции

$$e^+ + e^- \to Y'(4^3S_1) \to B^0 + \bar{B}^0$$

рождается большое количество B^0-мезонов. Так на установке BaBar/PEP-II (SLAC) интенсивность регистрации $B^0\,\overline{B}^0$ пар составляет 3,6 Гц при светимости коллайдера $3\cdot10^{33}$ см$^{-2}\cdot$ с$^{-1}$.

Наблюдение τ-нейтрино на Теватрона FNAL. С момента открытия τ-лептона в 1975 г. возникло сильное желание наблюдать τ-нейтрино, последнюю из известных элементарных частиц. Несмотря на косвенные экспериментальные и теоретические свидетельства в пользу существования τ-нейтрино, его прямое наблюдение явилось бы важным результатом. Однако предлагаемые эксперименты были технически очень сложны и дороги. Установить факт существования τ-нейтрино можно по появлению τ-лептонов при взаимодействии нейтринного пучка с веществом. Основная сложность эксперимента состоит в том, что время жизни τ-лептона очень мало (~10^{-13} с). За это время частица успевает пройти порядка 100 мкм, даже если ее скорость близка к скорости света.

Использование эмульсии в качестве активной мишени в сочетании со специально созданным пучком позволило в 1997 г. в эксперименте DONUT (FNAL) решить основные технические проблемы.

Установка (рис. 1.9) расположена на выведенном протонном пучке ускорителя FNAL, на расстоянии 37 м от поглотителя, на который сбрасывается пучок протонов с энергией 800 ГэВ (Beam dump – эксперимент).

Предполагается, что τ-нейтрино образуются в последовательном распаде D_s-мезона, возникающего при взаимодействии протонного пучка с поглотителем: $D_s \to \tau^+ + \nu_\tau$, $\tau^+ \to \overline{\nu}_\tau + X$.

Средняя энергия ν_τ составляет 111 ГэВ. Ожидаемая доля таких нейтрино в нейтринном пучке ~ 5 %.

Основной элемент экспериментальной установки – гибридный детектор, состоящий из ядерной фотоэмульсии и сцинтилляционного файбер-трекового детектора. Для идентификации продуктов распада τ-лептона используется магнитный спектрометр, включающий электромагнитный калориметр и мюонный идентификатор.

В эксперименте искали события с двумя вершинами в эмульсии: первая – образование τ-лептона при взаимодействии τ-нейтрино, например, $\nu_\tau + n \to \tau^- + X$ ($\nu_\tau + d \to \tau^- + u$), вторая – распад τ-лептона: $\tau^- \to \nu_\tau + X$.

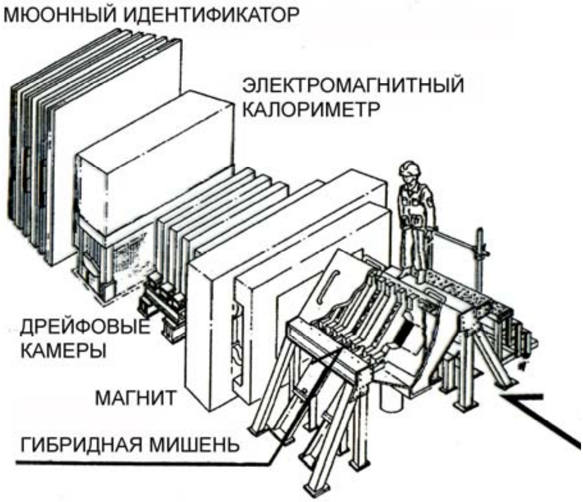


Рис. 1.9. Схема установки DONUT

Первая вершина не должна содержать мюона или электрона. Появление этих частиц характерно для взаимодействий ν_ν или ν_e, а не ν_τ. Мюоны и электроны регистрируются мюонным идентификатором и электромагнитным калориметром соответственно.

Начало набора статистики 1997 г. В июле 2000 г. после трех лет анализа найдено 4 τ-лептона из 203 нейтринных взаимодействий. К 2003 г. найдено 7 τ-лептонов при фоне 1,2 события.

1.3. Эксперименты на коллайдерах

Как отмечалось ранее, ускорители с фиксированной мишенью крайне неэффективны при постановке экспериментов в физике высоких энергий. Чем больше энергия ускоренной частицы, тем меньшая ее доля может быть передана для образования новых частиц. На самом большом построенном синхротроне с энергией протонов 900 ГэВ только ~ 5 % энергии используется во взаимодействии. Эта проблема была решена в середине 1960-х годов, когда стала возможна техническая реализация идеи встречных пучков в новом типе ускорителей, названных коллайдерами.

Чтобы понять суть идеи, рассмотрим два возможных варианта взаимодействия частиц с одинаковой массой. Пусть для определенности это будут протоны. В первом случае ускоренный до энергии $E_у$ протон сталкивается с покоящимся. Кинетическая энергия в системе центра масс T (а именно она и может быть передана), определяется из соотношения:

$$T = E_{сцм} - 2Mc^2 = \sqrt{E^2 - p^2c^2} - 2Mc^2 \cong \sqrt{2E_у Mc^2} ,$$

где $E = E_у + Mc^2$ и p – полная энергия и импульс двух протонов, $Mc^2 = 938$ МэВ – энергия покоящегося протона. В данном случае ($E >> Mc^2$) и энергией покоя протона можно пренебречь по сравнению с набранной в ускорителе энергией.

Из приведенной формулы видно, что при энергии ускоренного протона 200 ГэВ лишь ~ 19 ГэВ высвобождаются в виде кинетической энергии в системе центра масс и могут участвовать в процессах рассеяния или рождения новых частиц. Большая же часть энергии налетающего протона теряется в продолжающемся вперед движении частиц – продуктов взаимодействия или, иными словами, тратится на движение центра масс налетающего и покоящегося протонов.

Во втором случае оба протона, ускоренные до одинаковой энергии $E_к$, сталкиваются, двигаясь навстречу друг другу. При этом система центра масс покоится и полезной становится суммарная кинетическая энергия обоих протонов $T = 2E_к - 2Mc^2 \approx 2E_к$. Эквивалентная энергия, которую должен иметь ускоритель с фиксированной мишенью, чтобы получить такую же энергию как в коллайдере, определится из простого соотношения: $E_у = 2\dfrac{E_к^2}{Mc^2}$.

Таким образом, чтобы получить энергию взаимодействия 200 ГэВ надо построить либо коллайдер с двумя пучками по 100 ГэВ, либо ускоритель с фиксированной мишенью на ~20000 ГэВ. Диаметр кольца такого ускорителя составил бы более 25 км даже в случае использования сверхпроводящих магнитов.

На рис. 1.10 показано, как росла во времени эквивалентная энергия построенных ускорителей.

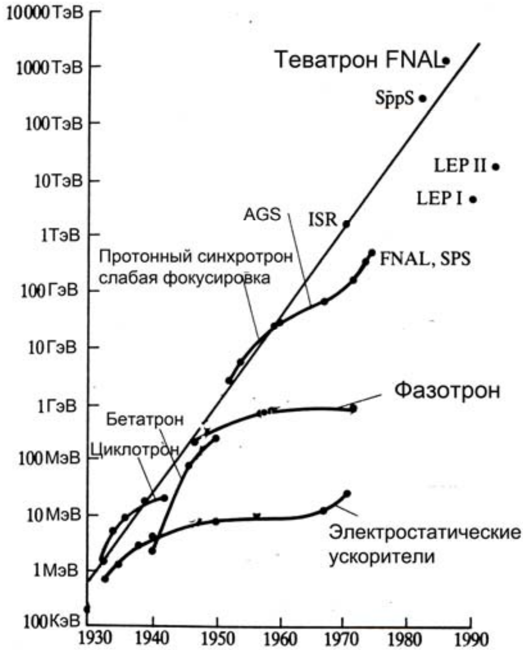


Рис. 1.10. Эквивалентная энергия построенных к 1990 г. ускорителей

С начала 70-х годов построено несколько $p\bar{p}$ и более двенадцати $e^{+}e^{-}$ коллайдеров. На коллайдерах сделаны важные открытия. Некоторые из них приведены в табл. 1.2.

Таблица 1.2

Коллайдеры, на которых получены наиболее важные результаты физики элементарных частиц

Коллайдер	Тип	Энергия (с.ц.м.), ГэВ	Основные достижения
SPEAR, Стенфорд	$e^{+}e^{-}$	3–8	Ψ (c-кварк), τ-лептон
PETRA, Гамбург	$e^{+}e^{-}$	15–46	Глюон
PEP, Стенфорд	$e^{+}e^{-}$	15–30	b-кварк (время жизни)
SPS, Церн	$p\bar{p}$	540–900	W- и Z-бозоны
LEP, Церн	$e^{+}e^{-}$	200	3 нейтрино
TEVATRON FNAL	$p\bar{p}$	1800	t-кварк

Наблюдение c-кварка и τ-лептона на коллайдере SPEAR. В SLAC практически одновременно с экспериментом Тинга в BNL на e^+e^--накопительном кольце SPEAR (установка Марк-1) обнаружен узкий пик в сечении процесса аннигиляции $e^+e^- \to \gamma \to$ адроны при энергии в системе центра около 3,1 ГэВ.

Через 10 дней на SPEAR открыт еще один узкий резонанс Ψ' (3,685ГэВ/с^2). Ψ' был наблюден по распаду $\Psi' = \pi^+ + \pi^- + \Psi$. Схема установки МАРК приведена на рис. 1.11.

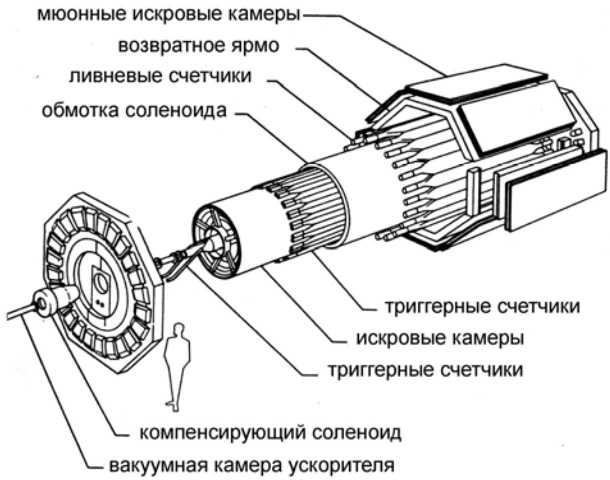


Рис. 1.11. Схема магнитного спектрометра МАРК-1

Аксиальное магнитное поле 4 кгс создается соленоидом диаметром 3 м и длиной 3 м. Область взаимодействия e^+e^- окружена трубой из нержавеющей стали, толщина стенки которой составляет 0,15 мм. Эта труба окружена двумя цилиндрическими сцинтилляционными счетчиками, формирующими триггерную систему, для исключения космического фона.

Импульс частицы измеряется в четырехслойной цилиндрической проволочной искровой камере. Каждый слой состоит из четырех проволочных плоскостей с расположением проволок ±2° и ±4° по отношению к оси пучка. Азимутальное разрешение камер 0,5 мм, разрешение по пучку 1,2 см.

За искровыми камерами установлены 48 триггерных счетчиков из пластического сцинтиллятора. Далее – обмотка соленоида толщиной в одну радиационную длину. За ней – ливневый детектор – свинцово-сцинтилляционный сэндвич. И, наконец, за 8-дюймовым слоем железа, являющимся возвратным ярмом магнита, расположены плоские искровые камеры для выделения мюонов.

Величина наблюдаемого на установке МАРК-1 сечения в пике ≥ 2300 нб (рис. 1.12), что в 100 раз больше сечения вне резонанса. Большое сечение, большая масса и малая ширина (±3 МэВ связанная с неопределенностью энергии пучка) были совершенно неожиданны. Все это свидетельствовало о наблюдении новой ранее неизвестной частицы. Доказательство того, что эта частица является связанным состоянием C- и $\overline{C}$-кварка, получены на установках МАРК-1 и Кристалл-Бол, установленных на e^+e^- коллайдерах.

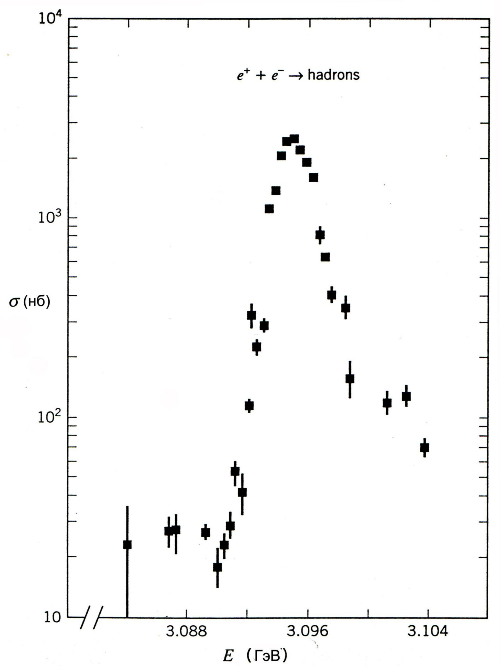


Рис. 1.12. Зависимость сечения аннигиляции e^-e^+ в адроны от энергии в системе центра масс

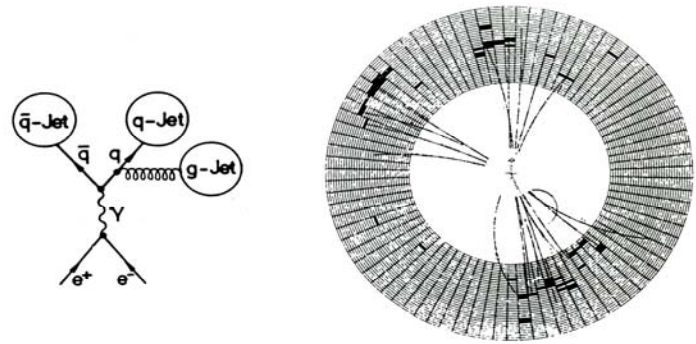
За открытие новой элементарной частицы – c-кварка – руководители экспериментов в BNL (SLAC) удостоены Нобелевской премии.

В 1976 г. на коллайдере *SPEAR* на модернизированной установке МАРК-1 наблюдали аномальное рождение лептонов в e^+e^--аннигиляции. Обнаружено 105 событий $e^+ + e^- \to e^\pm + \mu^\mp + \geq 2$, незарегистрированные частицы. Из них в 23 случаях нет адронов. Эти случаи интерпретируются как рождение двух новых частиц: τ-лептона и τ-нейтрино:

$$\begin{array}{ccc} e^- + e^+ = & \tau^+ & + \ \tau^- \\ & \downarrow & \downarrow \\ \bar{\nu}_\tau + \nu_e + e^+ & & \nu_\tau + \nu_\mu + \mu^- \end{array}$$

Масса τ-лептона почти в 2 раза больше массы протона, и, следовательно, элементарность и масса никак не связаны.

Наблюдение глюона на коллайдере PETRA. На построенном в 1978 г. e^+e^--коллайдере PETRA (23,4·2 ГэВ) в Гамбурге в 1979 г. открыт переносчик сильного взаимодействия g – глюон, о существовании которого догадывались с тех пор, как было показано, что составляющие протон кварки переносят только половину импульса протона. Основная идея эксперимента – найти события, в которых кварк излучает квант поля – глюон за счет глюонного тормозного излучения. В сильном взаимодействии процесс излучения глюона должен наблюдаться в событиях с кварк-антикварком в конечном состоянии (рис. 1.13).



а *б*

Рис. 1.13. Схематическое изображение трехструйного события $e^+e^- \to q + \bar{q} + g \to 3\,jets$ (*а*) и наблюдаемое событие такого типа в детекторе JADE (*б*)

Такие события с тремя струями были найдены в 1979 г. в эксперименте TASSO на коллайдере PETRA, а затем в ряде других экспериментов. *Трехструйные события – прекрасная демонстрация существования глюона.*

Из анализа углового распределения струй был определен спин кванта сильного взаимодействия. Спин глюона, как и ожидалось, равен единице.

Наблюдение *W*- и *Z*-бозонов на ($S\bar{p}pS$) коллайдере. В 1971 г. в ЦЕРНе было начато строительство последнего протонного синхротрона с фиксированной мишенью *SPS*. Через десять лет после разработки техники создания интенсивных антипротонных пучков *SPS* был преобразован в $p\bar{p}$-коллайдер ($S\bar{p}pS$) на энергию до 2·315 ГэВ. На этом коллайдере в 1983 г. были открыты две фундаментальные частицы *W*- и *Z*-бозоны, являющиеся переносчиками так называемого слабого взаимодействия. В эксперименте наблюдается процесс:

$$p + \bar{p} \to W^{\pm} + X\ , \qquad W^{\pm} \to e^{\pm} + \nu_e(\dot{\nu}_e),$$

где W^{+} рождался в результате взаимодействия *u*- кварка с $\bar{d}$-кварком (рис. 1.14); *X* – все возможные состояния, возникающие в результате взаимодействия остальных составляющих протона.

Рис. 1.14. Диаграммы прямого рождения *W*-бозона

Проблему регистрации нейтрино в распаде W удалось решить с помощью соответствующим способом спроектированного детектора, чувствительность которого по отношению ко всем заряженным или нейтральным частицам, рожденным в процессе соударения, равномерна во всем объеме по полному телесному углу (рис. 1.15).

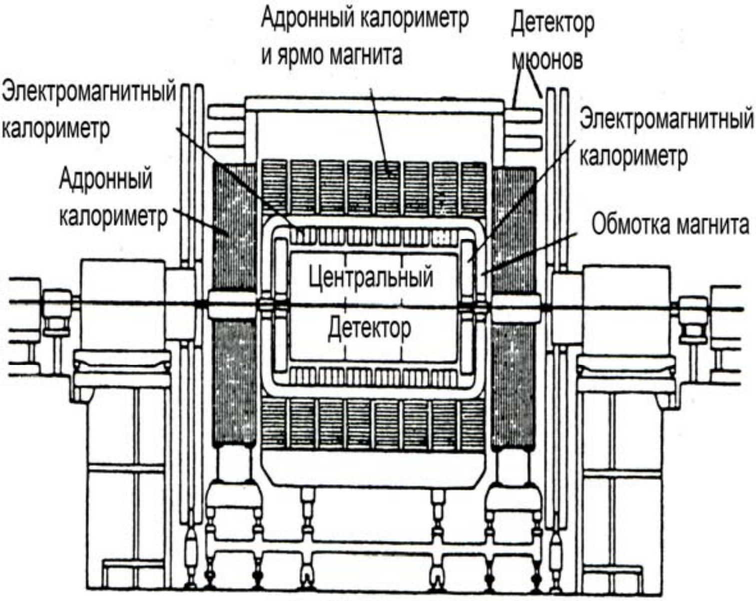


Рис. 1.15. Расположение основных детекторов установки UA1

В феврале 1983 г. коллаборация UA1 сообщила о наблюдении калибровочного векторного бозона. Набрано 10^9 $p\overline{p}$ взаимодействий, 43 из них идентифицированы как W-бозон с массой

$$M_W = 80,9 \pm 1,5 \text{ ГэВ/с}^2.$$

Исследование свойств *W*- и *Z*-бозонов на SLC и LEP. Свойства Z- и W-бозонов детально исследованы на первом линейном e^+e^--коллайдере (SLC) с энергией 2·50 ГэВ, построенном в 1989 г. в Стенфорде, и на LEP.

С 1989 по 1995 гг. четыре эксперимента на LEP-1 (45·100 ГэВ) ALEPH, DELPHI, L3 и OPAL посвящены прецизионному исследованию свойств Z_0 (масса, время жизни, моды распада). Всего набрано 16 миллионов Z.

Результат измерений: $M_Z = 91,1867 \pm 0,002$ ГэВ/с^2.

Форма резонансного пика (рис. 1.16) определяется его положением (массой) и его шириной.

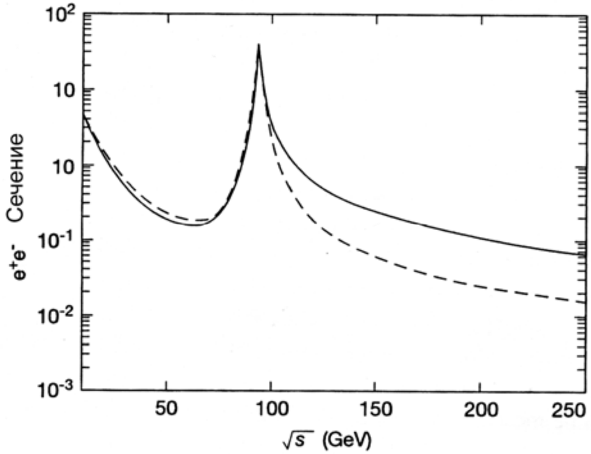


Рис. 1.16. Зависимость полного сечения процессов $e^+e^- \to F$ от с.ц.м. энергии (сплошная кривая). F включает все возможные конечные состояния, кроме нейтринных, пунктир – предсказание СМ. Разница – радиационные поправки

Прецизионное измерение массы требует точного знания энергии пучков, для чего использовался магнитно-резонансный метод. Контроль за энергией пучков был настолько точен, что учитывал Лунное притяжение на Земле, изменяющее радиус орбиты LEP на долю миллиметра.

Время жизни резонанса обратно пропорционально ширине $\tau_Z = \frac{\hbar}{\Gamma_Z}$. По измеренной ширине Γ_Z = 2494,8±2,5 МэВ, время жизни Z

$$\tau = (2{,}6383 \pm 0{,}0027) \cdot 10^{-25}\ \text{с}.$$

В различных сериях измерений энергия пучка фиксирована в пике и измеряется величина сечения для различных конечных состояний $e^-e^+ \to F$. Конечное состояние может быть лептонным или адронным. Если добавить нерегистрируемые каналы, состоящие из нейтринных распадов $\Gamma_{\nu\nu}$, получим все каналы распада, предсказываемые теорией. Величина сечения в пике зависит от вероятности распада по данному каналу $Z \to F$.

$$\sigma_F = \frac{12\pi\Gamma_e\Gamma_F}{m_Z^2\Gamma_Z^2},$$

где Γ_F / Γ_Z – относительная вероятность распада по данному каналу F. Очень важным результатом, получаемым из измерения ширины пика, является определение парциальной ширины нерегистрируемых каналов $\Gamma_{\nu\nu}$.

Полная ширина получается из формы резонанса (аппроксимацией резонанса формулой Брейта–Вигнера), а парциальные ширины зарегистрированных каналов получаются из величины сечения в пике. Если из полной ширины вычесть ширину всех видимых каналов, то получится вклад в ширину от нейтринных распадов $\Gamma_{\nu\nu}$. Так как вклад от каждого типа нейтрино рассчитывается, можно определить сколько существует типов нейтрино. Результаты таких вычислений дали значение $N_\nu = 2{,}993 \pm 0{,}011$, что хорошо согласуется с известным числом нейтрино.

Наблюдение t-кварка на Тэватроне FNAL. В 1987 г. в Фермиевской национальной лаборатории (США) заработал $P\overline{P}$-коллайдер (Тэватрон) на энергию 2·900 ГэВ – первый ускоритель, в котором используется кольцо сверхпроводяших магнитов. Самый тяжелый (Mc^2 = 176 ГэВ) и последний из предсказываемых t-кварк был открыт на этом коллайдере в 1994 г. Наблюдение t-кварка на установках CDF & D0 явилось кульминацией долгих интенсивных исследований начавшихся с открытия в 1976 г. τ-лептона и b-кварка в 1977 г. Открытие этих двух частиц послужило подтверждением существования третьего поколения элементарных частиц ранее, предсказанного Кобаяши и Маскава для объяснения нарушения CP-симметрии. По современным теоретическим представлениям b-кварк с зарядом –1/3 и слабым изоспином –1/2 требует существования партнера с зарядом +2/3 и слабым изоспином +1/2. Этот партнер был назван t-кварком.

Впервые о наблюдении $t\overline{t}$-кварков объявлено в 1994 г. На установке CDF (рис. 1.17), построенной на Тэватроне FNAL, наблюдали парное рождение t-кварков в реакции: $p + \overline{p} \to t + \overline{t} + X^0$, где X^0 – произвольное адронное состояние, удовлетворяющее законам сохранения. Эти пары идентифицируются по продуктам распада (рис. 1.18). Топ-кварки, распадаясь, образуют два W-бозона и два b-кварка: $t + \overline{t} \to b + W^+ + \overline{b} + W^-$.

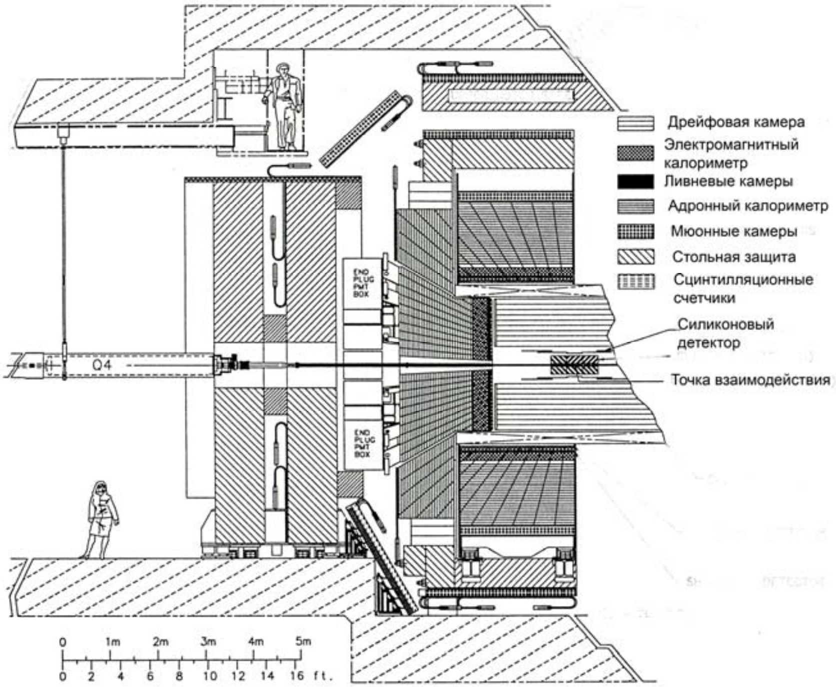


Рис. 1.17. Схема экспериментальной установки CDF

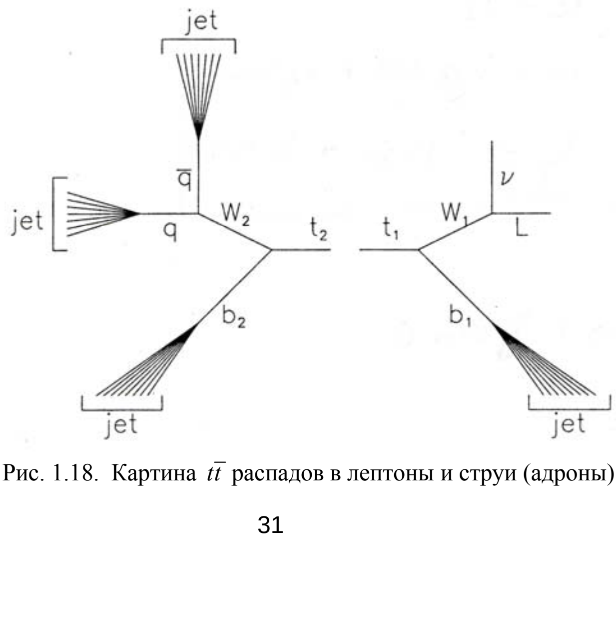


Рис. 1.18. Картина $t\bar{t}$ распадов в лептоны и струи (адроны)

Наибольшее подавление фона происходит, если выбираются события, состоящие из комбинации: $1 + \nu_l + N$ jets ($l = e, \mu$), где $N \geq 3$ и лептон, и струи (jets) имеют большой поперечный импульс (более 20 ГэВ/с). Идентификация W аналогична, применяемой в эксперименте UA1.

В 1994 г. на установке CDF наблюдали 12 кандидатов при фоне шесть событий. Вероятность того, что эти 12 событий есть флуктуация фона – 0,26 %.

Для чего строят новые коллайдеры? Взаимодействия между кварками, лептонами и калибровочными бозонами детально исследованы на существующих коллайдерах. Результаты экспериментов согласуются с потрясающей точностью с предсказаниями Стандартной Модели. Казалось незачем строить новые коллайдеры. Но цена этого согласия введение в теорию «руками», по крайней мере, 18 произвольных параметров, которые мы получаем из эксперимента.

На адронном коллайдере обычно наблюдают новые явления (частицы). Детальное исследование этих явлений проводят на электрон-позитронном коллайдере.

При высоких энергиях адронный коллайдер, по существу, превращается в кварковый коллайдер. Взаимодействие кварков происходит в диапазоне импульсов, определяемом распределением кварков по импульсу в адроне. В отличие от адронного коллайдера, на $e^+ e^-$-коллайдере можно точно выбрать энергию взаимодействия, например, соответствующую массе исследуемой частицы.

Калибровочные бозоны W и Z впервые обнаружены на адроном коллайдере, $S\bar{p}pS$, а затем детально исследованы на e^+e^-- коллайдере LEP. Аналогичная история произошла и с частицами, содержащими c и b кварки.

Основным назначением LHC и задачей № 1 всей физики высоких энергий является поиск бозона Хиггса – частицы ответственной за появление массы у W- и Z-бозонов и фермионов. После LHC построят большой электронный и возможно даже мюонный коллайдер.

Ожидают, что на LHC будем наблюдать новые яркие явления в физике элементарных частиц, разобраться в природе которых помогут электрон-позитронные и мюонные коллайдеры.

2. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА МАТРИЧНОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

Рассмотрение динамики заряженных частиц в магнитных системах в линейном приближении будет проведено с помощью матричного представления, которое было использовано при анализе устойчивости движения частиц в ускорителях. Его формализм оказался очень удобным при изучении движения в различных элементах магнитных систем электрофизического оборудования, когда скорости частиц близки к скорости света.

2.1. Свойство элементов матриц

Сначала рассмотрим моноимпульсные пучки частиц, т.е. такие пучки, для которых разброс по импульсам отсутствует, а именно: $\Delta p/p_0 = 0$, где p_0 – номинальный импульс, а Δp – разброс по импульсу. В этом случае для описания магнитной системы может быть использована квадратная матрица второго порядка

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix}. \qquad (2.1)$$

Если перед этой системой траектория частицы обладает вектором $\begin{pmatrix} x_0 \\ x_0' \end{pmatrix}$, то на выходе этот вектор будет преобразован согласно следующему выражению

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_1' \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{pmatrix}. \qquad (2.2)$$

В ортогональной плоскости будут использована другая матрица и вектор $\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$. Иногда их рассматривают совместно, применяя матрицу 4-го порядка.

Для системы, состоящей из нескольких элементов, каждый из которых характеризуется своей матрицей, общая матрица представляет произведение отдельных матриц:

$$T = T_1 \cdot T_2 \cdot \ldots \cdot T_i \cdot \ldots \cdot T_n, \tag{2.3}$$

где T_i – матрица i-го элемента.

Необходимо помнить, что из-за не коммутативности в произведении матриц должна быть соблюдена строгая последовательность: к входному вектору $\begin{pmatrix} x_0 \\ \hline x_0' \end{pmatrix}$ примыкает матрица входного элемента, а к выходному – конечного:

$$\begin{pmatrix} x_n \\ \hline x'_n \end{pmatrix} = T_n \ldots T_1 \begin{pmatrix} x_0 \\ \hline x_0' \end{pmatrix}. \tag{2.4}$$

Отметим значение отдельных элементов матрицы T. Элемент T_{21} равен оптической силе системы, взятой с обратным знаком, т.е. если F – фокусное расстояние системы, то $T_{21} = -\frac{1}{F}$, где, как и в геометрической оптике, F отсчитывается от выходной главной плоскости. Для того чтобы показать это, рассмотрим траекторию частицы, параллельную оси $x_0 \neq 0$, $x_0' = 0$. Месторасположение главной (выходной) плоскости, перпендикулярной оси системы, проходит через точку пересечения продолженных внутрь системы входной и выходной траекторий. Главную плоскость системы траектория пересечет при $x = x_0$, а на выходе ее будем иметь угол наклона, отличный от нуля:

$$x_1' = T_{21} x_0, \tag{2.5}$$

что формально следует из выражения (2.2).

Линейная компонента выходного вектора равна:

$$x_1 = x_0 + x_1' S, \tag{2.6}$$

где S – расстояние, которое отсчитывается от главной выходной плоскости.

Траектория показана на рис. 2.1. Естественно, что реальная траектория будет плавной, а не ломаной, состоящей из отрезков прямых линий. Подставляя значение x_1' из выражения (2.5) в уравнение (2.6), находим

$$x_1 = x_0 + T_{21} x_0 S. \tag{2.7}$$

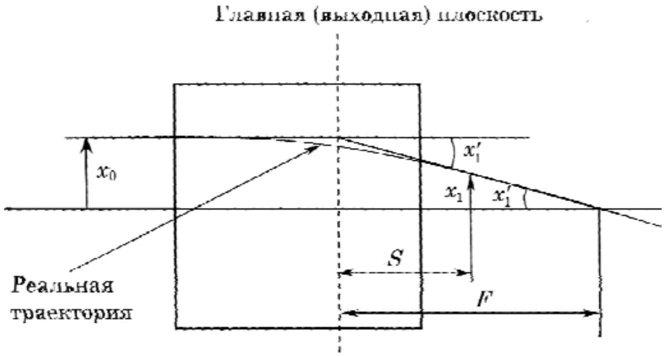


Рис. 2.1. Траектория частиц в оптической системе

Отклонение траектории от оси обращается в нуль, если

$$S = -\frac{1}{T_{21}} = F, \qquad (2.8)$$

т.е. на фокусном расстоянии F. Отсюда видно, что фокусное расстояние F не зависит от величины x_0 и что параллельный пучок фокусируется в точку. Следовательно, элемент

$$T_{21} = -\frac{1}{F}. \qquad (2.9)$$

Данный вывод относится и к рассеивающему элементу.

Очень часто представляют интерес матрицы, в которых один из элементов обращается в ноль. Равенство нулю элементов матрицы используется для придания пучку определенных параметров с помощью соответствующего размещения элементов транспортирующего канала.

Сначала рассмотрим случай $T_{11} = 0$. Каким образом трансформирована траектория частицы, параллельная оси на входе ($x_0 = 0$) в систему, матричный элемент T_{11} который равен нулю?

Распишем уравнения (2.2) по строкам с учетом $T_{11} = 0$:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 \cdot x_0 + T_{12} \cdot 0; \\ x_1' &= T_{21} x_0. \end{aligned} \qquad (2.10)$$

Следовательно, при $T_{11} = 0$ параллельный пучок будет сфокусирован. Это утверждение необходимое и достаточное. Необходимость следует из уравнений (2.10), а достаточность – из того, что, если $x_1 = 0$ при $x_0 = 0$, то $T_{11} = 0$.

Если же траектория наклонена к оси $x'_0 \neq 0$, то она будет пересекать ось под углом, определяемым (2.5).

В случае $T_{12} = 0$ точечный источник $\begin{pmatrix} 0 \\ x'_0 \end{pmatrix}$ преобразуется в точку:

$$x_1 = T_{11}x_0 + x'_0 T_{12} = 0 .$$

Если же источник имеет конечные размеры, т.е. $x_0 \neq 0$, то при $T_{12} = 0$ размер изображения будет равен

$$x_1 = T_{11}x_0 . \qquad (2.11)$$

Таким образом, в матрице преобразования T при $T_{12} = 0$ элемент T_{11} есть коэффициент линейного увеличения. Обозначим его через M. При том же условии $T_{12} = 0$, а также при $x_0 = 0$ и $x'_0 \neq 0$ наклон траектории после прохождения системы равен $x'_1 = T_{22}x'_0$. Следовательно, элемент T_{22} есть коэффициент углового увеличения.

Из теоремы Лиувилля следует, что определитель матрицы консервативной системы равен единице, поэтому

$$T_{11}T_{22} - T_{12}T_{21} = 1 .$$

Отсюда

$$T_{22} = \frac{1}{M}. \qquad (2.12)$$

Матрица преобразования при $T_{12} = 0$ имеет следующий вид

$$T = \begin{pmatrix} M & 0 \\ -\dfrac{1}{F} & \dfrac{1}{M} \end{pmatrix} . \qquad (2.13)$$

Форма матрицы (2.13) похожа на форму матрицы тонкой линзы (в матрицах тонких линз элементы по диагонали T_{11} и T_{22} равны 1). Назовем эту диагональ главной. Следовательно, равенство $T_{12} = 0$ означает, что расположенный до системы источник заряженных частиц будет иметь изображение после прохождения последними системы.

В случае $T_{22} = 0$ (*угловая коллимация*) точечный расходящийся пучок $\begin{pmatrix} 0 \\ x_0' \end{pmatrix}$ переходит в параллельный. Действительно, из уравнения (2.2) следует, что

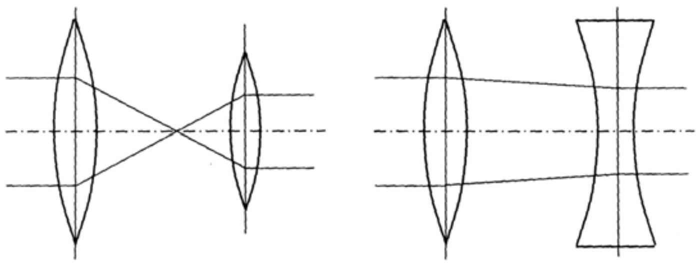
$$\begin{aligned} x_1 &= 0 + T_{12} x_0', \\ x_1' &= 0. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Случай $T_{22} = 0$ соответствует угловой коллимации, когда при заданной выходной апертуре x_1 пропускаются частицы, имеющие наклон не более чем x_0' на входе в систему.

В случае $T_{21} = 0$ ($F \to \infty$) параллельный пучок $\begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix}$ переходит в параллельный. Действительно, из выражения (2.2) найдем, что

$$x_1 = T_{11} x_0, \quad x_1' = 0,$$

и на выходе системы имеем параллельную оси системы траекторию с вектором $\begin{pmatrix} T_{11} x_0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Система с матрицей, в которой элемент $T_{21} = 0$, называется *телескопической*. Аналогом телескопической системы в геометрической оптике служат комбинации линз, которые преобразуют параллельный пучок в параллельный с новыми поперечными размерами. Если элемент $T_{11} < 0$, то на выходе изображения будет перевернуто (рис. 2.2, *а*), а если $T_{11} > 0$, то оно будет сохранять первоначальное направление (рис. 2.2, *б*).



а *б*

Рис. 2.2. Телескопические системы: $T_{11} < 0$ (*а*) и $T_{11} > 0$ (*б*)

Равенство нулю матричного элемента означает, что одна из составляющих вектора на выходе не зависит от какой-либо входной составляющей того же вектора.

Из-за того, что определитель матрицы (2.1) равен единице, элемент, диагонально расположенный к нулевому, может иметь произвольную величину. При этом произведение двух остальных элементов должно быть равно единице.

2.2. Равенство единице определителя матриц

Покажем, что все матрицы, которые будут использоваться в дальнейшем, имеют определитель, равный 1. Проведем рассмотрение для матриц второго порядка, однако все полученные выводы будут справедливы и для матриц более высокого порядка. Это будет видно непосредственно из матриц.

Согласно теореме Лиувилля плотность точек фазового пространства является инвариантом движения для системы, описываемой уравнениями Гамильтона

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i},$$

где H – гамильтониан, а q_i и p_i – канонические координаты. Кроме того, можно отметить, что фазовый объем, в котором заключены эти точки (им соответствуют траектории частиц), может меняться по форме при сохранении величины в течение всего движения, а именно:

$$\int d\Gamma = \text{const}, \tag{2.15}$$

где $d\Gamma = dq_1, ..., dq_n, dp_1, ..., dp_n$ – элемент фазового объема. В данном случае фазовый объем ведет себя как несжимаемая жидкость. Если переменные в уравнениях движения разделяются или горизонтальное и вертикальное движения независимы, то теорема Лиувилля оказывается справедливой для каждой пары координат и импульса. Следовательно, движение можно рассматривать на плоскости.

Перейдем непосредственно к доказательству равенства определителя единице. Для доказательства следует обратиться к рис. 2.3.

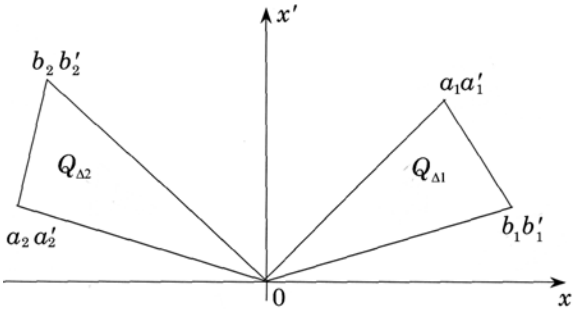


Рис. 2.3. Фазовая плоскость

Рассмотрение на плоскости xx' производится потому, что при неизменности продольной скорости при импульсе вместо системы xp_x можно ввести xx', так как

$$p_x = m\frac{dx}{dt} = m\frac{ds}{dt}\cdot\frac{dx}{ds} = \text{const}\cdot x',$$

где S – продольная координата.

На фазовой плоскости xx' лежит треугольник с вершинами $0,0;\ a_1, a_1';\ b_1, b_1'$. С помощью матрицы (2.1) этот треугольник преобразуется в треугольник с вершинами $0,0;\ a_2, a_2';\ b_2, b_2'$, т.е. каждой точке треугольника с площадью $Q_{\Delta 1}$ соответствует точка треугольника с площадью $Q_{\Delta 2}$. Векторы $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_1' \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_1' \end{pmatrix}$ преобразуются соответственно в векторы $\begin{pmatrix} a_2 \\ a_2' \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} b_2 \\ b_2' \end{pmatrix}$ с помощью матрицы T. На траекторию частицы с нулевым вектором (начало координат) матрица T воздействие не оказывает. На основании теоремы Лиувилля имеем

$$Q_{\Delta 1} = Q_{\Delta 2}. \tag{2.16}$$

Найдем площади $Q_{\Delta 1}$ и $Q_{\Delta 2}$. Площадь треугольника

$$Q_{\Delta} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_1' & 1 \\ x_2 & x_2' & 1 \\ x_3 & x_3' & 1 \end{vmatrix}, \tag{2.17}$$

где x_i и x_i' – координаты точек на фазовой плоскости, которые применительно к рис. 2.3 равны $x_1 = a_1$, $x_2 = b_2$, $x_3 = 0$, $x_1' = a_1'$, $x_2' = b_2'$, $x_3' = 0$. Следовательно,

$$Q_{\Delta 1} = \frac{1}{2}\left(a_1 b_1' - b_1 a_1'\right); \tag{2.18}$$

$$Q_{\Delta 2} = \frac{1}{2}\left(a_2 b_2' - a_2' b_2\right). \tag{2.19}$$

Перед тем, как подставить выражения (2.18) и (2.19) в (2.16), выразим векторы $\begin{pmatrix} a_2 \\ a_2' \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} b_2 \\ b_2' \end{pmatrix}$ через первоначальные векторы. Действительно,

$$a_2 = T_{11} a_1 + a_1' T_{12}; \tag{2.20}$$

$$a_2' = T_{21} a_1 + a_1' T_{22}; \tag{2.21}$$

$$b_2 = T_{11} b_1 + b_1' T_{12}; \tag{2.22}$$

$$b_2' = T_{21} b_1 + b_1' T_{22}. \tag{2.23}$$

Используя выражения (2.20)–(2.23), преобразуем выражение, входящее в (2.19)

$$a_2 b_2' - a_2' b_2 = \left(T_{11} a_1 + a_1' T_{12}\right)\left(T_{21} b_1 + b_1' T_{22}\right) - \left(T_{21} a_1 + a_1' T_{22}\right)\left(T_{11} b_1 + b_1' T_{12}\right) =$$
$$= \left(a_1 b_1' - a_1' b_1\right)\left(T_{11} T_{22} - T_{21} T_{12}\right). \tag{2.24}$$

Подставляя выражение (2.24) в (2.19) и учитывая уравнение (2.16), получим

$$\det(T) = T_{11} T_{22} - T_{21} T_{12} = 1. \tag{2.25}$$

Следовательно, определитель матрицы системы, в которой работает теорема Лиувилля, равен единице. Хотя доказательство проводилось для треугольников, его нетрудно распространить на любую фигуру.

Доказательство равенства (2.25) можно было бы провести, используя вронскиан системы, однако данная методика представляется более наглядной. Следует отметить, что если система составлена из элементов, каждой из которых имеет матрицу с определителем, равным единице, то общая матрица этой системы также будет иметь единичный определитель. Это свойство удобно использовать для проверки правильности перемножения матриц.

2.3. Особенности матриц симметричных систем

Представляет интерес отметить некоторые свойства матриц симметричных систем, которые часто встречаются при создании реальных установок. Под симметрией здесь следует понимать симметрию относительно некоторой плоскости, перпендикулярной направлению движения пучка.

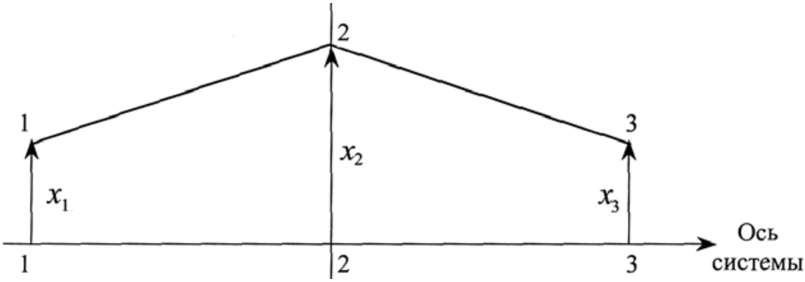


Рис. 2.4. Симметричная система

Рассмотрим систему, состоящую из двух секций, симметричную относительно средней плоскости 2–2 (рис. 2.4). Предположим, что пространство от начала до плоскости симметрии системы описывается матрицей T, т.е.

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1' \end{pmatrix}, \tag{2.26}$$

где индексы определяют параметры траектории в соответствующих точках. После плоскости симметрии движение описывается уравнением

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2' \end{pmatrix}, \tag{2.27}$$

где матрица β относится к участку системы между плоскостями 2–2 и 3–3.

Оказывается, что между матрицами T и β и их элементами существует связь. Установим эту связь. Предварительно установим связь между матрицей T и обратной матрицей M, которая описывает движение от плоскости 2–2 и плоскости 1–1, а именно:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2' \end{pmatrix}. \qquad (2.28)$$

Обратная матрица понадобится не только в данном случае, она будет использована в дальнейшем.

Подставляя выражение для вектора $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_1' \end{pmatrix}$ из (2.28) в (2.26), получим

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_2' \end{pmatrix} = TM \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2' \end{pmatrix}, \qquad (2.29)$$

откуда находим

$$I = TM, \qquad (2.30)$$

где I – единичная матрица $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Перемножим матрицы T и M:

$$\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11}M_{11} + T_{12}M_{21} & T_{11}M_{12} + T_{12}M_{22} \\ T_{21}M_{11} + T_{22}M_{21} & T_{21}M_{12} + T_{22}M_{22} \end{pmatrix}. \qquad (2.31)$$

Сравнивая элементы вновь полученной матрицы с элементами единичной матрицы, получим систему четырех уравнений:

$$T_{11}M_{11} + T_{12}M_{21} = 1; \quad T_{11}M_{12} + T_{12}M_{22} = 0;$$
$$T_{21}M_{11} + T_{22}M_{21} = 0; \quad T_{21}M_{12} + T_{22}M_{22} = 1, \qquad (2.32)$$

откуда имеем

$$M_{12} = -T_{12}; \qquad (2.33)$$
$$M_{11} = T_{22}; \qquad (2.34)$$
$$M_{22} = T_{11}; \qquad (2.35)$$
$$M_{21} = -T_{21}. \qquad (2.36)$$

Таким образом, обратную матрицу M можно составить из элементов прямой матрицы T:

$$M = \begin{pmatrix} T_{22} & -T_{12} \\ -T_{21} & T_{11} \end{pmatrix}. \qquad (2.37)$$

Из (2.37) видно, что для образования обратной матрицы необходимо в матрице T поменять местами диагональные элементы T_{11}

и T_{22}, а знаки перед остальными элементами изменить на обратные. Определитель матрицы M равен определителю матрицы T, т.е. единице.

Переходим непосредственно к установлению вида матрицы β. Для этого сравним движение от плоскости 2–2 в прямом и обратном направлениях. Очевидно, что как в первом, так и во втором направлениях для описания будет служить одна и та же матрица M (2.37). Различие будет состоять в записи векторов в плоскости 2–2. Действительно, преобразование в плоскости 1–1 будет иметь один вид:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_1' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2' \end{pmatrix}, \tag{2.38}$$

а к плоскости 3–3 – другой:

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ -x_3' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_2' \end{pmatrix}. \tag{2.39}$$

Для преобразования уравнения (2.39) используем очевидное выражение

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ -x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_3' \end{pmatrix}, \tag{2.40}$$

причем

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I .$$

Учитывая (2.40) и умножая на матрицу $I_- = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ уравнение (2.39), получим вместо него

$$I_- \begin{pmatrix} x_3 \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2' \end{pmatrix}. \tag{2.41}$$

Сравнивая (2.41) и (2.27) получим выражение для матрицы β:

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{22} & T_{12} \\ T_{21} & T_{11} \end{pmatrix}. \tag{2.42}$$

Следовательно, если имеется симметричная система и известна матрица преобразования для первой половины системы, то матрица преобразования для второй половины может быть образована переменной мест элементов главной диагонали. Полная матрица симметричной системы равна

$$\Pi = \beta T = \begin{pmatrix} T_{11}T_{22} + T_{12}T_{21} & 2T_{12}T_{22} \\ 2T_{11}T_{21} & T_{11}T_{22} + T_{12}T_{21} \end{pmatrix}. \qquad (2.43)$$

Учитывая равенство единице определителя матрицы T, перепишем (2.43)

$$\Pi = \begin{pmatrix} 2T_{11}T_{22} - 1 & 2T_{12}T_{22} \\ 2T_{11}T_{21} & 2T_{11}T_{22} - 1 \end{pmatrix}. \qquad (2.44)$$

Кроме того, из (2.43) или (2.44) видно, что элементы по главной диагонали равны.

2.4. Связь между оптическими параметрами системы и элементами матрицы перехода

Описание различных магнитных систем часто производят в индексах геометрической оптики, вводя фокусное расстояние, фокальную и главные плоскости. Напомним некоторые свойства геометрической оптики. Будем рассматривать идеальные оптические системы, которые любую точку предмета преобразуют в точку без искажения. К идеальным системам относятся системы с переменным значением показателя преломления (как правило, неосуществимые) и плоские зеркала. Кроме того, к ним можно отнести системы, обладающие осью симметрии, когда распространение лучей происходит в параксиальной области.

В параксиальной области свойства оптической системы определены положением четырех кардинальных точек: двумя фокусами и главными точками. Фокусами служат точки пересечения лучей, падающих на систему параллельно оси в прямом и обратном направлениях. Главные точки – это точки пересечения главных плоскостей с осью системы. По данным четырем точкам можно построить ход лучей света (в данном случае это будут траектории заряженных частиц).

Определим месторасположение главных плоскостей через параметры матрицы T системы, в которой имеются главные входная и выходная плоскости. Фокусное расстояние, равное $F = -\frac{1}{T_{21}}$, было определено раньше. Расстояние от входа первого элемента до входной главной плоскости и от выходной главной плоскости до выхода последнего элемента представляют отрезки свободного пространства, так как в них траектории сохраняют направления, имеющие место вне системы. Эти отрезки можно описать матрицами следующего вида

$$\begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (2.45)$$

где d – длина отрезка свободного пространства. Расстояние между главными плоскостями будем описывать матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{F} & 1 \end{pmatrix}, \qquad (2.46)$$

где F – фокусное расстояние системы (рис. 2.5).

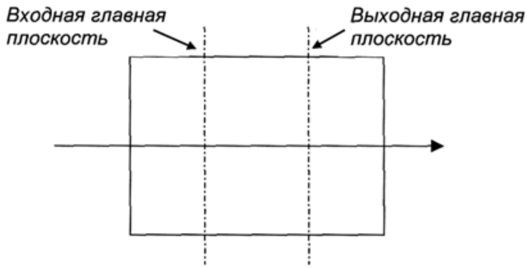


Рис. 2.5. Главные плоскости в системе

На этом участке сосредоточено действие всего элемента. В геометрической оптике матрица (2.46) описывает тонкую линзу, которая изменяет только угол. Приемом, когда «толстая» линза может быть представлена в виде произведения трех матриц: тонкой линзы и свободных участков, пользуются сравнительно часто. Таким образом, представим матрицу в виде произведения трех матриц, а именно:

$$T=\begin{pmatrix}1 & L_{\text{вых}}\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -\dfrac{1}{F} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & L_{\text{вх}}\\ 0 & 1\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}1-\dfrac{L_{\text{вых}}}{F} & L_{\text{вх}}+L_{\text{вых}}-\dfrac{L_{\text{вх}}L_{\text{вых}}}{F}\\ -\dfrac{1}{F} & 1-\dfrac{L_{вх}}{F}\end{pmatrix}, \tag{2.47}$$

где $L_{\text{вх}}$ – расстояние от входа системы до входной плоскости, на котором траектория сохраняет свой первоначальный вид (например, она остается параллельной оси); $L_{\text{вых}}$ – расстояние от выхода до выходной главной плоскости. Здесь необходимо подчеркнуть, что величины $L_{\text{вх}}$ и $L_{\text{вых}}$ могут принимать как отрицательные, так и положительные значения. Положительные значения следует отсчитывать от краев внутрь системы, а отрицательные – от краев вне системы. Кроме того, необходимо учесть, что главные плоскости преобразуются одна в другую при единичном увеличении.

Если сравнить элементы матрицы (2.47) с элементами матрицы (2.1), то в результате получим выражения для расположения главных плоскостей. Действительно, из $T_{11}=1-\dfrac{L_{\text{вых}}}{F}$ и $T_{22}=1-\dfrac{L_{\text{вх}}}{F}$ получим

$$L_{\text{вх}}=F\left(1-T_{22}\right)=-\frac{1}{T_{21}}\left(1-T_{22}\right); \tag{2.48}$$

$$L_{\text{вых}}=F\left(1-T_{11}\right)=-\frac{1}{T_{21}}\left(1-T_{11}\right); \tag{2.49}$$

$$F=-\frac{1}{T_{21}}; \tag{2.50}$$

$$T_{12}=L_{\text{вых}}+L_{\text{вх}}-\frac{L_{\text{вх}}L_{\text{вых}}}{F}. \tag{2.51}$$

Первоначально может показаться, что выражение (2.51) накладывает ограничение при определении $L_{\text{вх}}$ и $L_{\text{вых}}$. Однако если учесть, что определитель матрицы T равен единице, то нетрудно показать, используя (2.48) и (2.49), что (2.51) есть определитель, равный единице, записанный в преобразованном виде. Переходя снова к терминологии геометрической оптики можно отметить, что выражения (2.48)–(2.51) позволяют определить положение главных плоскостей для системы, описываемой матрицей в общем (без всяких ограничений) виде, так называемой толстой линзы (или системы). Введение главных плоскостей позволяет рассматривать систему, оперируя только с входными и выходными параметрами, совершенно не касаясь формы траектории внутри системы, между главными плоскостями. Еще раз необходимо отметить, что для описания движения моноимпульсного пучка, как правило, используются квадратные матрицы второго порядка.

2.5. Квадратные матрицы третьего и четвертого порядков

Представление движения в магнитных транспортирующих каналах не ограничивается квадратными матрицами второго порядка. Если приходится работать с пучками частиц, которые движутся с разбросом по импульсу, то для описания движения таких пучков удобно использовать квадратные матрицы третьего порядка. В этих матрицах появляются элементы, связанные с разбросом по импульсу $\delta = \dfrac{\Delta p}{p_0} \neq 0$. Преобразование с помощью таких матриц имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_1' \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_0' \\ \delta \end{pmatrix}. \tag{2.52}$$

Правую часть выражения (2.52) можно расчленить и привести к виду

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_0' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} T_{13} \\ T_{23} \end{pmatrix} \delta. \tag{2.53}$$

При $\delta = 0$ (2.53) переходит в (2.2).

Матрицы, входящие в уравнения (2.52) и (2.53), обычно используют для рассмотрения радиального движения в отклоняющих магнитах, так как разброс по импульсам δ, как и в магнитных системах ускорителей, оказывает воздействие только на радиальное движение. В рассматриваемом приближении вертикальное движение от этого параметра не зависит.

Вид нижней строчки матрицы (2.52) обусловлен тем, что разброс импульса не может быть изменен статическим магнитным полем, в котором отсутствует ускорение. Разброс в импульсе оказывает влияние на координату и угол расходимости пучка. В связи с этим влиянием вводят понятие линейной и угловой дисперсии, которые наблюдаются при движении неоднородного по импульсу пучка в отклоняющих системах.

В том же аспекте, в каком были рассмотрены квадратные матрицы второго порядка, изучим свойства матриц, описывающих движение немоноимпульсных частиц. Промежуточные выкладки будут опущены, так как они похожи на те, которые были проделаны ранее.

Из (2.52) нетрудно установить, что для матрицы T определитель равен единице. Обратная матрица M, характеризующая преобразование вектора $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_1' \\ \delta \end{pmatrix}$ в $\begin{pmatrix} x_0 \\ x_0' \\ \delta \end{pmatrix}$, имеет вид

$$M = \begin{pmatrix} T_{22} & -T_{12} & T_{12}T_{23} - T_{13}T_{22} \\ -T_{21} & T_{11} & T_{13}T_{21} - T_{11}T_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.54}$$

Когда $T_{13} = T_{23} = 0$ (2.54) переходит в (2.37). Это наглядно видно, если воспользоваться записью, аналогичной (2.53).

Если рассмотреть симметричную систему, то матрица преобразования для второй половины системы выражается через элементы матрицы (2.52), характеризующей преобразование на первой половине:

$$\beta = \begin{pmatrix} T_{22} & T_{12} & T_{12}T_{23} - T_{13}T_{22} \\ T_{21} & T_{11} & T_{11}T_{23} - T_{13}T_{21} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.55}$$

С помощью (2.55) при $T_{13} = T_{23} = 0$ нетрудно перейти к матрице (2.42). Матрица для всей симметричной системы равна произведению (2.55) и (2.52):

$$\Pi = \begin{pmatrix} 2T_{11}T_{22} - 1 & 2T_{12}T_{22} & 2T_{12}T_{23} \\ 2T_{21}T_{11} & 2T_{11}T_{22} - 1 & 2T_{11}T_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.56}$$

Из (2.56) видно, что полная матрица П для симметричной системы не зависит от матричного элемента T_{13}. Это обстоятельство вместе с дополнительными условиями, например, $T_{23} = 0$ и др., позволяет получить на выходе параметры пучка, не зависящие от разброса по импульсу. Более подробно этот вопрос будет разобран при рассмотрении так называемых ахроматических систем – систем, в которых скомпенсированы линейная и угловая дисперсии.

Наконец, необходимо отметить, что в процессе изучения изохронных систем (изохронная система между двумя точками – это система, в которой сохраняется временная структура пучка), будут рассмотрены квадратные матрицы четвертого порядка, которые имеют следующий вид:

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & 0 \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ T_{41} & T_{42} & T_{43} & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.57}$$

Матрицы типа (2.57) воздействуют на вектор, в котором, кроме компонент x, x' и δ, в качестве четвертой компоненты введена разница в длине пути частиц в транспортирующих системах Δl. Например, разница длины пути частиц, движущихся не по оси, и длины пути осевых частиц. Определитель матрицы (2.57) равен единице.

Обратная матрица M матрицы T имеет следующий вид (читателю предлагается проделать промежуточные выкладки):

$$M = \begin{pmatrix} T_{22} & -T_{21} & T_{12}T_{23} - T_{13}T_{22} & 0 \\ -T_{21} & T_{11} & T_{13}T_{21} - T_{11}T_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ T_{42}T_{21} - T_{41}T_{22} & T_{41}T_{12} - T_{42}T_{11} & -T_{43} - T_{41}\left(T_{12}T_{23} - T_{13}T_{22}\right) - T_{42}\left(T_{13}T_{21} - T_{11}T_{23}\right) & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.58}$$

Общая матрица симметричной системы имеет следующий вид:

$$\Pi = \begin{pmatrix} T_{11}T_{22} + T_{12}T_{21} & 2T_{12}T_{22} & 2T_{12}T_{23} & 0 \\ 2T_{11}T_{21} & T_{11}T_{22} + T_{21}T_{12} & 2T_{11}T_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2T_{11}(T_{22}T_{41} - T_{21}T_{42}) & 2T_{12}(T_{22}T_{41} - T_{21}T_{42}) & -2\left[T_{43} + T_{23}(T_{12}T_{41} - T_{11}T_{42})\right] & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.59}$$

Подводя итог, следует подчеркнуть, что рассмотренные свойства матриц будут в дальнейшем использованы в конкретных случаях для определения параметров элементов систем.

2.6. Движение пучка частиц и фазовое пространство

В заключение рассмотрим изменения фазовых объемов в магнитооптических системах. Начнем с простейших, например, прямоугольника, треугольника или ромба. На рис. 2.6 показаны контуры (ромб) фазового пространства, занимаемого пучком частиц 1 ($ABCD$) и его трансформация в результате прохождения частиц через участок, являющийся или дрейфовым пространством, или тонкой линзой, которые характеризуются соответствующими матрицами перехода (2.45) и (2.46).

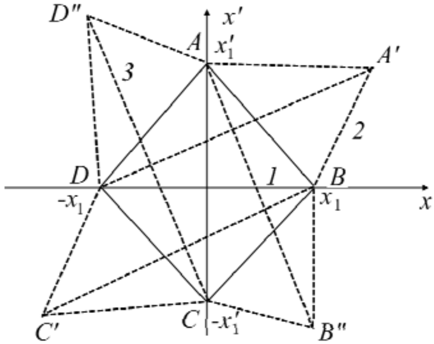


Рис. 2.6. Трансформация фазового пространства в дрейфовом участке и тонкой линзе

При прохождении дрейфового участка угол наклона траектории остается постоянным, а изменяется размер пучка. Форма фазового пространства после прохождения дрейфового участка обозначена на рис. 2.6 цифрой 2 ($A'BC'D$) – это параллелограмм. Координатами точки A' будут $(dx_1;\ x_1')$, а точки C – $(-dx_1; -x_1')$. Точки D и B координаты не меняют. Убедиться в достоверности этого утверждения можно непосредственным перемножением матрицы (2.45) на векторы точек, лежащих на сторонах ромба A, B, C и D.

Если пучок частиц попадает в тонкую линзу, то размеры пучка будут оставаться прежними, а угол наклона траекторий будет изменяться. В результате вершины ромба A и C останутся без изменения, а вершины D и B сдвинутся в вертикальном направлении, образуя параллелограмм $AB''CD''$. Ординаты точек B'' и D'' равны $\pm\frac{x_1}{F}$, где F – фокусное расстояние собирающей тонкой линзы. Эти значения получены после перемножения матрицы (2.46) на векторы соответствующих точек.

Теперь рассмотрим более сложную границу пучка на фазовой плоскости – эллиптическую. Здесь необходимо сделать одно замечание относительно границы пучка. Как правило, пучок не имеет резких границ, так как его интенсивность спадает по краям. Часто стараются выбрать параметры эллипса таким образом, чтобы в него попало 90 % пучка.

Хотя при движении пучка через какую-либо систему граница его будет оставаться эллиптической, наклон и величина полуосей будет изменяться.

Уравнение эллипса на фазовой плоскости с центром в начале координат после прохождения пучком системы имеет следующий квадратичный вид:

$$\gamma x^2 + 2\alpha x x' + \beta (x')^2 = \varepsilon, \tag{2.60}$$

где γ, α, β – коэффициенты квадратичной формы, а $\varepsilon = \frac{S_1}{\pi}$ – площадь эллипса.

Трансформация координат точек, лежащих на границе эллипса, может быть определена с помощью выражения:

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x_0 \\ x_0' \end{pmatrix}, \tag{2.61}$$

где x_0, x_0' – компоненты входного вектора.

При этом уравнение эллипса на входе в систему будет отличаться от выражения (2.60):

$$\gamma_0 x_0^2 + 2\alpha_0 x_0 x_0' + \beta_0 \left(x_0'\right)^2 = \varepsilon. \tag{2.62}$$

Величина ε, характеризующая площадь эллипса и входящая в (2.60) и (2.62), согласно теореме Лиувилля имеет одно и то же значение. Выражая с помощью обратной матрицы входной вектор через выходной, найдем

$$\begin{cases} x_0 = T_{22}x - T_{12}x', \\ x_0' = -T_{21}x + T_{11}x'. \end{cases} \tag{2.63}$$

Подставляя (2.63) в (2.62), получим связь коэффициентов квадратичных форм (2.60) и (2.62):

$$\begin{pmatrix} \gamma \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{22}^2 & -2T_{21}T_{22} & T_{21}^2 \\ -T_{12}T_{22} & T_{11}T_{22} + T_{12}T_{21} & -T_{11}T_{21} \\ T_{12}^2 & -2T_{11}T_{12} & T_{11}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_0 \\ \alpha_0 \\ \beta_0 \end{pmatrix}. \tag{2.64}$$

Таким образом, получено уравнение, позволяющее определить коэффициенты уравнения эллипса на выходе магнитооптической системы по аналогичным входным параметрам. При нахождении связи коэффициентов уравнений эллипсов можно пойти обратным путем. В уравнениях (2.63) определить x и x', а в уравнении (2.64), наоборот: γ_0, α_0, β_0. Путь, по которому следует идти, определяется конечной целью.

Вычисление так называемого дискриминанта квадратичной формы (2.60) или (2.62), равного $\gamma\beta - \alpha^2$, с учетом (2.64) показывает, что

$$\gamma\beta - \alpha^2 = \gamma_0\beta_0 - \alpha_0^2 = \text{const}. \tag{2.65}$$

Если теперь положить в (2.65) const = 1, то после преобразования уравнений (2.60) или (2.62) к канонической форме с помощью поворота координатных осей получим

$$\varepsilon = \frac{S_1'}{\pi} \tag{2.66}$$

в случае, когда дискриминант отличен от единицы:

$$\varepsilon = \frac{S_1'}{\pi}\sqrt{\gamma\beta - \alpha^2}\ .$$

Следует отметить, что при $\gamma\beta - \alpha^2 > 0$ квадратичная форма представляет эллипс.

Остановимся теперь на геометрическом смысле коэффициентов γ, α, β. Для этого необходимо продифференцировать (2.60) сначала по x' (определяя $x'_{\text{макс}}$), затем по x (находя $x_{\text{макс}}$) и приравнять производные нулю. В результате находим, что при $\gamma\beta - \alpha^2 = 1$

$$x'_{\text{макс}} = \sqrt{\varepsilon\gamma}\,, \tag{2.67}$$

$$x_{\text{макс}} = \sqrt{\varepsilon\beta}\,. \tag{2.68}$$

На рис. 2.7 изображены эти параметры. Выражение (2.67) дает максимальный угловой полураствор (угловую огибающую) пучка, а (2.68) – максимально удаленную точку пучка, т.е. координату огибающей пучка.

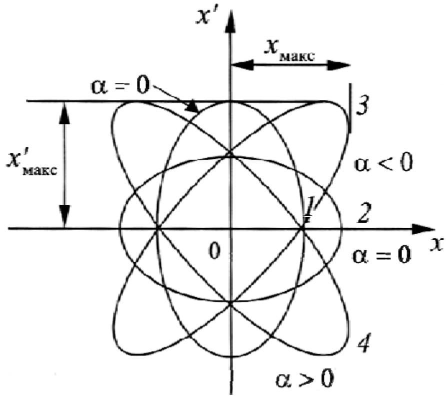


Рис. 2.7. Фазовые эллипсы

Изображенный на рис. 2.7 эллипс *3* соответствует расходящемуся пучку. Для сходящегося пучка фазовый эллипс *4* будет зеркальным отображением эллипса *3*. В результате прохождения через элементы системы эллипс может поворачиваться, занимая каноническое положение (*1* или *2*), при котором координатные оси совпадают с осями эллипса. Положение эллипса *1* соответствует изображению, так как величина проекции эллипса на ось x минимальна, а положение эллипса *2* соответствует «параллельному» пучку, потому что его проекция на ось x' минимальна.

Для канонических положений фазового эллипса коэффициент α равен нулю. Параметр α характеризует дрейфовое расстояние Δs, которое должен пройти пучок для того, чтобы эллипс занял каноническое положение (в квадратичной форме отсутствуют члены с xx'):

$$\Delta s = \frac{\alpha_0}{\gamma_0} . \tag{2.69}$$

Действительно, с помощью преобразований $x_0' = x'$ и $x_0 = x - \Delta s x'$, справедливых для дрейфового участка, из (2.62) найдем уравнение эллипса

$$\gamma_0 \left(x - \Delta s x' \right)^2 + 2\alpha_0 \left(x - \Delta s x' \right) x' + \beta_0 x'^2 = \varepsilon , \tag{2.70}$$

которое будет принимать каноническую форму при выполнении условия (2.69). Обычное построение показывает, что положительные значения соответствуют эллипсу *4* (см. рис. 2.7), а отрицательные – его зеркальному отображению *3*. Следовательно, при $\alpha_0 > 0$ пучок будет сходящимся, так как чтобы занять каноническое положение *1*, соответствующее изображению, пучку необходимо пройти расстояние $\Delta s = \frac{\alpha_0}{\gamma_0}$. При $\alpha_0 < 0$ будет расходящийся пучок, так как изображение было получено ранее и пучок прошел точку, в которой оно было.

Относительно матриц перехода для диафрагм или коллиматоров можно добавить, что диафрагмы могут обрезать пучок в горизонтальной и вертикальной плоскостях. Остановимся для примера на действии диафрагмы в горизонтальной плоскости.

На рис. 2.8, *а* изображены две диафрагмы *A* и *B* в точках S_A и S_B размерами $r_1 + r_2$ каждая. Расстояние между ними равно *d*. По воздействию на пучок эти диафрагмы эквивалентны протяженному коллиматору.

Диафрагма *A* обрезает пучок на фазовой плоскости двумя параллельными прямыми (рис. 2.8, *б*):

$$\frac{x}{r_1} = 1 , \tag{2.71}$$

$$\frac{x}{r_2} = 1\,. \tag{2.72}$$

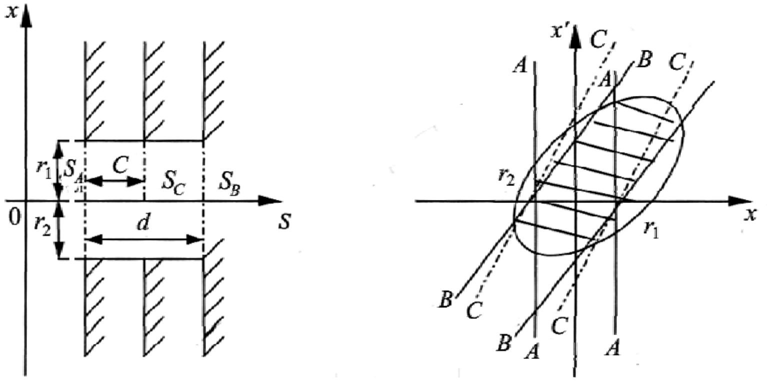


Рис. 2.8. К пояснению работы коллиматора:
а – диафрагмы в точках SA и SB; *б* – трансформация границ диафрагм на фазовой плоскости

Вид уравнений (2.71) и (2.72) следует из записи уравнения прямой в отрезках $\frac{x}{a} + \frac{x'}{b} = 1$, где a и b – отсекаемые прямой отрезки на ортогональных осях, когда диафрагма пропускает частицы, движущиеся у границы щели, с нулевым наклоном $x' = 0$.

После диафрагмы A частицы движутся в свободном пространстве. Поэтому так же, как и в случае фазовых эллипсов, прямые, а следовательно, и границы пучка, обрезанные диафрагмой, будут совершать вращение по часовой стрелке. В результате на каком-то расстоянии после диафрагмы A уравнения прямых (2.71) и (2.72) будут иметь вид:

$$\frac{x}{x_1} + \frac{x'}{x_1'} = 1\,, \tag{2.73}$$

$$\frac{x}{x_2} + \frac{x'}{x_2'} = 1\,, \tag{2.74}$$

где коэффициенты x_1, x_1' и x_2, x_2' можно найти таким же образом, как это было сделано при рассмотрении фазового эллипса с помощью выражений (2.60)–(2.64). Действительно, если уравнение прямой на входе в диафрагму произвольной формы имеет вид

$$\frac{x_0}{x_{10}} + \frac{x_0'}{x_{10}'} = 1, \tag{2.75}$$

где x_{10} и x_{10}' – отрезки на осях координатной системы и x_0, x_0' – текущие координаты, а на расстоянии S после диафрагмы –

$$\frac{x}{x_1} + \frac{x'}{x_1'} = 1, \tag{2.76}$$

где x_1 и x_1' – отрезки на осях координатной системы, то с помощью уравнений (2.63) нетрудно установить связь между коэффициентами x_1, x_1' и x_{10}, x_{10}', а именно:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{1}{x_1'} \\ -\dfrac{1}{x_1} \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \dfrac{1}{x_{10}'} \\ -\dfrac{1}{x_{10}} \end{pmatrix}. \tag{2.77}$$

Здесь T – матрица перехода от точки S_A до S_B.

Таким образом, в отличие от преобразования параметров эллипса γ, α, β, когда для определения их прибегают к выражению введенной матрицы (2.64), при нахождении параметров пучка, отсекаемого диафрагмой, можно использовать непосредственно матрицу перехода системы T для преобразования вектора $\begin{pmatrix} 1/x_{10}' \\ -1/x_{10} \end{pmatrix}$.

Подставляя в (2.77) входной вектор $\begin{pmatrix} 0 \\ -1/r_1 \end{pmatrix}$ для верхней границы диафрагмы (рис. 2.8, *а*), для которой $x_{10}' \to \infty$, а в качестве T – матрицу свободного пространства, находим отрезки для прямых BB в точке $S = S_B$: $x_B' = -\dfrac{r_1}{d}$, $x_B = r_1$.

Нетрудно интерпретировать полученный результат. Знак минус в первом равенстве указывает на то, что вращение происходит по часовой стрелке, а из второго равенства видно, что отрезок после дрейфового участка не меняет свою величину.

В связи с тем, что до точки S_B частицы проходят большее расстояние, чем до точки S_C, угол поворота прямых *ВВ* будет больше, чем прямых *СС*.

На рис. 2.8, *б* фазовый эллипс пучка ограничен отверстием в первой диафрагме. Незаштрихованная часть эллипса относится к частицам, которые не пройдут, через эту диафрагму. Во второй диафрагме произойдет еще одно обрезание эллипса по границам, совпадающим с границами *АА*.

3. ЭЛЕМЕНТЫ СИСТЕМ ТРАНСПОРТИРОВКИ ЧАСТИЦ ВЫСОКОЙ ЭНЕРГИИ. КВАДРУПОЛЬНЫЕ ЛИНЗЫ

3.1. Требование к элементам систем транспортировки и работам с высокоэнергетическими частицами

Решение задач физики высоких энергий требует создания сложных магнитооптических систем для транспортировки первичных и вторичных частиц на экспериментальные установки. Рост энергии частиц сопровождается существенным возрастанием протяженности таких систем вплоть до сотен метров и насыщенностью их магнитными элементами. Большое количество элементов транспортирующего канала приводит к его удорожанию и усложнению при наладке и эксплуатации. Уменьшение числа элементов магнитооптического тракта может быть достигнуто за счет увеличения длин магнитных дорожек отклоняющих магнитов и квадрупольных линз, а также за счет использования максимального значения магнитного поля. Последнее обстоятельство связано с необходимостью обеспечивать малые зазоры между полюсами в магнитах.

Создание малых зазоров на протяженных магнитных дорожках связано с техническими трудностями конструктивного, технологического и метрического характера. Мы, однако, остановимся на особенностях оптического плана. Из-за многообразия систем транспортировки трудно сформулировать общие и единые требования к элементам, образующим эти системы. Перечислим те из них, которые в какой-то степени обладают общностью или относятся не только к одному типу магнитных систем.

1. Высокое разрешение по импульсу. Это требование в основном относится к отклоняющим магнитам. Практика показывает, что выделение интервала импульсов желательно проводить как можно раньше. Выделение интервала приводит к уменьшению загрязнения пучка из-за распада нестабильных частиц.

2. Обеспечение максимальной интенсивности пучка на выходе системы.

3. Хорошая локализация пучка.

4. Компенсация угловой и линейной дисперсии. Это особенно необходимо сделать после выделения полосы импульса $\Delta p / p_0$, так как отпадает необходимость увеличения апертуры линз, или аксептанса системы, что связано с возрастанием стоимости установки. Для компенсации угловой и линейной дисперсии применяются ахроматические или бездисперсные системы.

5. Сохранение временной структуры пучка при прохождении через систему транспортировки. Например, необходимо сохранить структуру периодического набора сгустков. Обеспечение изохронизма бывает необходимо при электродинамической сепарации. Иногда бывает, наоборот, необходимо растянуть пучок, вылетающий из линейного ускорителя, так как с ним не справляется регистрирующая аппаратура.

Здесь необходимо отметить, что под сохранением временной структуры пучка следует подразумевать сохранение структуры не вообще на протяжении всего канала, а только в двух точках, между которыми размещена система элементов, называемая изохронной.

6. Представляющая большой интерес работа с пузырьковыми камерами. Она отличается тем, что допускает загрузку их 5–10 частицами на снимок. Поэтому необходимо проведение очистки пучков от фона для того, чтобы наблюдать редкие события.

7. Возможность работать с пучками частиц, обладающими максимальным импульсом.

Два последних требования относятся к сепараторам. В процессе разбора отдельных элементов предъявляемые к ним требования будут дополняться.

3.2. Магнитные квадрупольные линзы

Для формирования пучков заряженных частиц и придания им определенных параметров (размеров и угловой расходимости) применяют линзы. Известно, что существуют различные линзы: одиночные, иммерсионные, магнитные и др. Однако, как правило, эти линзы применяют для фокусировки низкоэнергетических частиц. При транспортировке и формировании пучков частиц высоких энергий, которые обычно получают на ускорителях, основную роль играют магнитные квадрупольные линзы. Поэтому основное внимание будет уделено магнитным квадрупольным линзам.

Квадрупольная линза представляет собой оптический элемент, поле которого имеет две плоскости симметрии и две плоскости асимметрии. Она образована двумя парами разноименных и противоположно расположенных полюсов.

На рис. 3.1 показана магнитная квадрупольная линза в прямоугольной системе координат x, y, z.

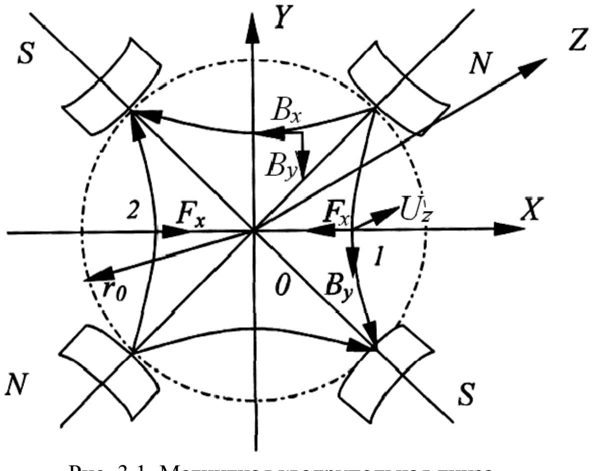


Рис. 3.1. Магнитная квадрупольная линза

Ось линзы z направлена перпендикулярно плоскости чертежа. Полюса представляют усеченные гиперболические поверхности, перпендикулярно которым направлены магнитные силовые линии. Усечение полюсов вызвано техническими соображениями: оно необходимо для размещения возбуждающих обмоток. Плоскости $y0z$

и $x0z$ – плоскости асимметрии, а $S0z$ и $N0z$ – плоскости симметрии. В симметрично расположенных относительно этих плоскостей точках скалярные потенциалы равны по абсолютной величине. Эквипотенциальные поверхности перпендикулярны силовым линиям и совпадают с поверхностью полюсов.

Из рис. 3.1 видно, что на оси линзы поле равно нулю. Движение заряженной частицы в магнитной квадрупольной линзе носит сложный пространственный характер, однако если начальная скорость лежит в плоскостях асимметрии движение будет плоским.

Особенностью квадрупольных линз по сравнению с осесимметричными является то, что их силовые линии, за исключением краев, где имеют место поля рассеяния, направлены поперек траекторий пучка заряженных частиц.

Магнитные квадрупольные линзы относятся к поперечным линзам. Поперечные магнитные поля сильнее воздействуют на движение частиц по сравнению с продольными. Это отчетливо видно, если записать выражения для силы, действующей на частицу со стороны поля квадрупольной линзы и соленоида. Действительно, в квадрупольной линзе на частицу, движущуюся в плоскости $y = 0$, будет действовать сила

$$F_x = e\upsilon_z B_y \approx e\upsilon B\,, \tag{3.1}$$

где e – заряд частицы, $\upsilon_z = \upsilon$ – продольная скорость частицы, близкая к полной скорости (из-за малости поперечной скорости), $B_y = B$ при $y = 0$.

Таким образом, из выражения (3.1) видно, что действующая на частицу сила пропорциональна скорости и поперечному магнитному полю.

В соленоиде удержание частицы достигается двумя этапами. Сначала из-за появления радиальной составляющей скорости возникает азимутальное движение, при котором на частицу действует сила, пропорциональная произведению радиальной скорости (υ_r) и продольной компоненты магнитного поля (B_z), а затем за счет взаимодействия азимутальной скорости (υ_φ) с продольным магнитным полем (B_z) возникает поперечная сила, действующая на частицу ($F_r \approx \upsilon_\varphi B_z$). Ввиду того, что поперечные скорости υ_r и υ_φ по величине значительно меньше продольной скорости, то в соленоиде поперечное воздействие на частицы значительно меньше, чем в квадрупольной линзе. Поэтому квадрупольные линзы относятся к классу линз с сильной фокусировкой, а соленоиды – со слабой. В элементах с продольным полем основная часть его не оказывает прямого фокусирующего воздействия.

3.3. Принцип действия магнитной квадрупольной линзы. Поля и градиенты

Остановимся на принципе действия квадрупольной линзы. Одна линза может собрать пучок в какой-то одной плоскости и рассеять в перпендикулярном этой плоскости направлении. Действительно, если траектория частицы проходит через точку *1* (см. рис. 3.1) параллельно оси z, то за счет возникновения силы Лоренца на частицу будет действовать сила, стремящаяся приблизить траекторию к оси системы. В точке *2* направление поля, а следовательно, и силы Лоренца изменится на обратное, поэтому в плоскости $x0z$ действие квадрупольной линзы будет фокусирующим. Нетрудно показать, что в направлении оси y действие линзы будет рассеивающим. В связи с этим плоскости $x0z$ и $y0z$ называются соответственно собирающей и рассеивающей. Аналогично можно рассмотреть траекторию частицы, проходящую в других плоскостях. Таким образом, входящий в магнитную квадрупольную линзу пучок с круглым поперечным сечением будет деформироваться, превращаясь во все более вытягивающийся эллипс.

При сравнении квадрупольных и осесимметричных линз видно, что в то время как последние воздействуют на пучок заряженных частиц равномерно со всех сторон по азимуту и могут создать симметричное изображение точки или круга, квадрупольные линзы создают линейное изображение круглого пучка. Чтобы собрать пучок в двух взаимно перпендикулярных направлениях, применяют не одну, а несколько линз, например, две, три и т.д. При этом рассеивающие и собирающие плоскости соседних линз, как правило, сдвинуты на 90°.

Относительное размещение квадруполей со сдвигом плоскостей на 90° не является единственным. Оси линз можно разместить относительно друг друга и под отличными от 90° углами. Этот вопрос будет рассмотрен позже.

Квадрупольную линзу называют квадруполем, систему из двух линз – дублетом, из трех – триплетом и т.д. Нетрудно сделать вывод, что при определенных условиях, накладываемых на расстояние между квадруполями, при заданной апертуре дублет в целом образует собирающую систему. Этот вывод справедлив и для систем, состоящих из большого, чем дублет, числа квадруполей.

При выводе уравнений движения заряженных частиц в квадруполях и системах из них необходимо знать выражение для потенциала магнитного поля. В пренебрежении полями рассеяния для системы полюсов в виде бесконечно длинных гипербол магнитный потенциал в приосевой области (линейное приближение) равен:

$$V = Gxy\,, \tag{3.2}$$

где G – градиент поля является постоянной величиной. При $x = y = 0$, $V = 0$.

Составляющие магнитного поля равны

$$B_x = \frac{\partial V}{\partial x} = Gy\,, \tag{3.3}$$

$$B_y = \frac{\partial V}{\partial y} = Gx\,. \tag{3.4}$$

Из (3.3) и (3.4) находим, что

$$\frac{\partial B_x}{\partial y} = G\,, \tag{3.5}$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial x} = G\,. \tag{3.6}$$

Для такой модели составляющие градиента равны, постоянны и положительны по всей апертуре, так как $|B_x|$ растет вдоль оси y, а $|B_y|$ – вдоль оси x. Это видно из рис. 3.1 и справедливо для параксиальной области. Магнитная индукция B_y линейно возрастает с расстоянием от оси.

Действительно, в цилиндрической системе координат имеем

$$B_r = G\sqrt{x^2 + y^2} = Gr\,. \tag{3.7}$$

На вершине полюсов $B_r = Gr_0$, где r_0 – радиус вписанного в апертуру круга. Гиперболы полюсов имеют следующие уравнения

$$xy = \pm \frac{r_0'}{2}. \tag{3.8}$$

В (3.8) знак плюс относится к первому и третьему квадрантам, а минус – ко второму и четвертому.

Еще раз необходимо подчеркнуть, что все приведенные выражения справедливы для идеальной квадрупольной линзы, т.е. такой линзы, у которой полюса асимптотически устремляются в бесконечность, а поля резко обрываются на торцах. В действительности полюса приходится обрезать, чтобы разместить обмотки. Это приводит к тому, что градиент G не будет постоянен. Кроме того, на торцах реальной линзы поле спадает постепенно (производные $\frac{\partial B_y}{\partial z}$ и $\frac{\partial B_x}{\partial z}$ не равны нулю), а не резко, как предполагается в идеальном случае. Одновременно с этими производными на торцах имеет место компонента B_z. Благодаря наличию этой компоненты возникает связь между вертикальным и горизонтальным движениями. Однако в линейном приближении связью между этими движениями можно пренебречь. Для учета реальной границы поля на торцах магнитной квадрупольной линзы введем понятие эффективной длины.

3.4. Эффективная длина магнитной квадрупольной линзы

Определение эффективной длины магнитной квадрупольной линзы удобно провести с помощью рис. 3.2, на котором показаны эффективная $L_{эф}$ и геометрическая длина L_0 линзы, реальное и идеализированное поля. Эффективная длина магнитной квадрупольной линзы равна

$$L_{эф} = \frac{1}{G_0} \int_{-\infty}^{+\infty} G(z)dz . \tag{3.9}$$

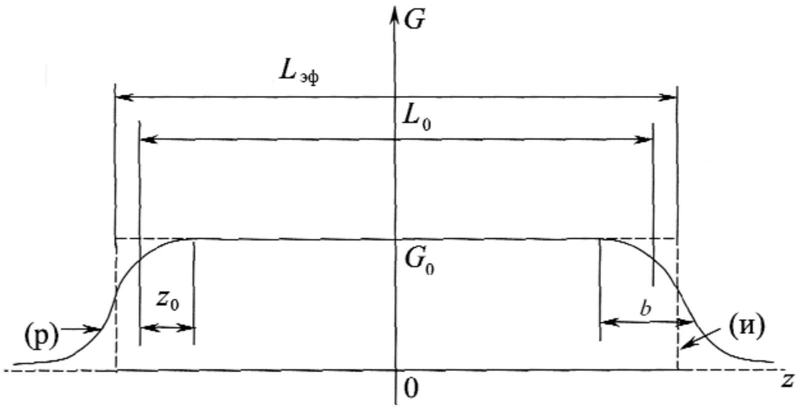


Рис. 3.2. Реальное (р) и идеальное (и) поля (градиенты) квадрупольной линзы

Интеграл выражения (3.9) равен площади, заключенной между осью z и кривой реального распределения градиента линзы, G_0 – максимальный градиент в центре (по длине) линзы. Из рис. 3.2 видно, что градиент начинает спадать еще внутри линзы. Поле простирается на некоторое расстояние, пока практически не обратится в нуль. Таким образом, введение эффективной длины позволяет заменить картину реального поля фиктивным прямоугольным полем с градиентом G_0, простирающемся на длине $L_{эф}$.

Эффективная длина вводится для упрощения при проведении аналитических расчетов. В этом случае необходимо границы линзы брать те, которые определены эффективной длиной. Для грубых оценок можно использовать геометрическую длину линзы L_0, а для более точных – $L_{эф}$.

В общем случае интеграл (3.9) вычислить аналитически невозможно, а необходимость в этом имеется, поэтому иногда применяют аппроксимацию реальной кривой распределения градиента по длине линзы. В частном случае отдельные участки этого распределения можно представить следующими выражениями:

$$G(z)=\begin{cases} G_0\left[1+\dfrac{(z+\dfrac{L_0}{2}-z_0)^2}{b^2}\right]^{-2}, & -\infty<z\le-\dfrac{L_0}{2}+z_0,\\ G_0, -\dfrac{L_0}{2}+z_0\le z\le\dfrac{L_0}{2}-z_0, & \\ G_0\left[1+\dfrac{(z-\dfrac{L_0}{2}+z_0)^2}{b^2}\right]^{-2}, & \dfrac{L_0}{2}-z_0\le z<+\infty, \end{cases} \tag{3.10}$$

где z_0 – расстояние от края внутрь линзы, на котором градиент начинает спадать, а b – расстояние, на котором он уменьшается в четыре раза. Следует отметить, что параметры z_0 и b зависят от многих факторов: от апертуры линзы r_0 (очевидно, что чем больше апертура, тем на большем расстоянии от краев линзы начинается спад градиента), от сорта материала, из которого изготовлен магнитопровод, от конструкции обмотки.

Например, для линз, выпускаемых в Советском Союзе, в НИИ ЭФА им. Д.В. Ефремова, типа МЛ16 (r_0 = 13 см, L_0 = 100 см) и МЛ17 (r_0 = 13 см, L_0 = 60 см) параметры z_0 и b приблизительно равны $0{,}65r_0$ и $1{,}42r_0$ соответственно.

Подставляя выражения (3.10) в (3.9) и используя формулу для интеграла

$$\int\frac{dt}{(1+t^2)^2}=\frac{t}{2(t^2+1)}-\frac{1}{2}\mathrm{arctg}(t)+C, \tag{3.11}$$

получим выражение для эффективной длины

$$L_{эф}=L_0-2z_0+0{,}5\pi b. \tag{3.12}$$

Таким образом, по известным значениям z_- и b, определяемым, например, экспериментально, можно найти эффективную длину магнитной линзы.

Замена реального поля аппроксимацией (3.10) позволяет определить траекторию заряженной частицы в аналитическом виде.

В заключение приведем (без вывода) несколько практических выражений для определения параметров квадрупольной линзы. Эти выражения можно использовать для предварительных оценок. Максимальный градиент достижимый в линзе с радиусом апертуры r_0, равен

$$G_{\text{макс}} = \frac{100}{r_0}, \qquad (3.13)$$

где градиент выражен в Тл/м, а r_0 – в см.

Для линзы, у которой каждый полюс окружен NI – ампер-витками, при отсутствии рассеяния и в предположении бесконечно большой магнитной проницаемости ($\mu \to \infty$) железа полюсов имеем

$$G = \frac{8\pi \cdot 10^{-3} NI}{r_0^{\,2}}, \qquad (3.14)$$

где NI – число ампер-витков.

Из (3.14) видно, что при фиксированных значениях r_0 и N изменение градиента можно осуществлять за счет изменения тока в обмотках катушек, т.е. за счет возбуждения обмоток. Рассеиваемая в квадрупольной линзе мощность при возбуждении постоянным током равна

$$P = 6{,}1 \frac{\rho l}{S_0 f} G^2 r_0^4, \qquad (3.15)$$

где P – мощность в ваттах, ρ – удельное сопротивление обмотки в Ом·см; l – средняя длина витка в см; S_0 – суммарная площадь окон для обмоток; f – коэффициент заполнения окна; G – в Гс/см.

Из (3.15) видно, что с увеличением r_0 очень возрастает мощность, что крайне нежелательно.

3.5. Движение заряженных частиц в магнитных квадрупольных линзах. Матрицы перехода

На заряженную частицу, движущуюся параллельно оси z (см. рис. 3.1) с постоянной скоростью υ, которая из-за малости поперечных скоростей υ_x и υ_y, приблизительно равна υ_z, действуют силы

$$F_x = -e\upsilon B_y = -e\upsilon G_x, \qquad (3.16)$$

$$F_y = e\upsilon B_x = e\upsilon G_y\,. \qquad (3.17)$$

В этих выражениях были использованы формулы (3.3), (3.4).

Из (3.16) и (3.17) видно, что силы, действующие на движущуюся в магнитной квадрупольной линзе заряженную частицу, пропорциональны градиенту G и отклонению от оси z. Уравнение движения вдоль оси x имеет вид:

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = F_x = -e\upsilon G_x\,. \qquad (3.18)$$

Из-за постоянства скорости масса M вынесена из под знака дифференцирования. Заменим левую часть (3.18) с учетом того, что $\upsilon = \upsilon_z$, а именно:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{dz}{dt}\frac{d}{dz}\left(\frac{dz}{dt}\frac{dx}{dz}\right) \approx \upsilon^2\frac{d^2x}{dz^2}\,. \qquad (3.19)$$

Подставляя (3.19) в уравнение (3.18), получим уравнение движения

$$\frac{d^2x}{dz^2} + \frac{eG}{M\upsilon}x = 0\,. \qquad (3.20)$$

Введем обозначение

$$k^2 = \frac{eG}{p} > 0\,. \qquad (3.21)$$

Уравнение (3.20) описывает движение около оси y (x = 0). В нем не была учтена связь с движением по направлению, параллельному оси y, которое возникает, если частица отклоняется от оси x и на нее начинает действовать сила, обусловленная появлением составляющей B_x. В линейном приближении это вполне допустимо. Аналогично выводу уравнения (3.20) можно получить уравнение для вертикального движения, а именно:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - k^2y = 0\,. \qquad (3.22)$$

Используя начальный вектор $\begin{pmatrix} x_0 \\ x_0' \end{pmatrix}$ при z = 0, который характеризует параметры траектории на входе в квадрупольную линзу, можно найти с помощью (3.20) матрицу, характеризующую преобразование траектории в квадрупольной линзе, и выходной вектор $\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}$, которой равен

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \dfrac{1}{k}\sin\theta \\ -k\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_0' \end{pmatrix}, \tag{3.23}$$

где $\theta = kL$, а L – длина линзы. Здесь пока не уточняется, какая длина: L_0 или $L_{эф}$.

Матрица преобразования в вертикальной плоскости имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} \operatorname{ch}\theta & \dfrac{1}{k}\operatorname{sh}\theta \\ k\operatorname{sh}\theta & \operatorname{ch}\theta \end{pmatrix}. \tag{3.24}$$

Фокусные расстояния линзы в ортогональных плоскостях равны:

$$F_с = \frac{1}{k\sin\theta} = \frac{L}{\theta\sin\theta}; \tag{3.25}$$

$$F_д = -\frac{1}{k\operatorname{sh}\theta} = -\frac{L}{\theta\operatorname{sh}\theta}. \tag{3.26}$$

Знак минус в (3.26) показывает, что при дефокусировке будет образовываться мнимое изображение.

3.6. Оптические параметры магнитных квадрупольных линз

Для характеристики свойств квадрупольных линз используют параметры, которые встречаются в геометрической оптике. Эти параметры позволяют построить траекторию частиц в линзе. Фокусные расстояния определены выражениями (3.25) и (3.26).

На рис. 3.3 показаны оптические параметры квадрупольной линзы и траектория частицы в вертикальной и горизонтальной плоскостях. Верхняя часть рисунка относится к горизонтальному движению в линзе, которая оказывает на пучок собирающее действие, а нижняя – к вертикальному. В вертикальной плоскости квадрупольная линза рассеивает.

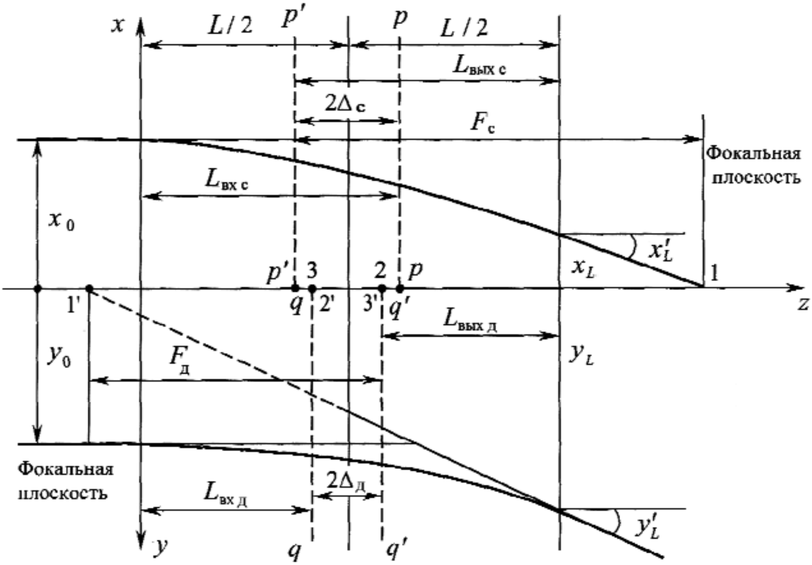


Рис. 3.3. Оптические параметры магнитной квадрупольной линзы

Параметры собирающей линзы снабжены индексом «с», а рассеивающей – «д». На входе линзы имеем параллельный пучок с соответствующими размерами x_0 и y_0, отсчитываемыми от оси. В горизонтальной фокусирующей плоскости (x) pp – входная, $p'p'$ – выходная главные плоскости. В дефокусирующей плоскости (y) qq – входная и $q'q'$ – выходная главные плоскости. Фокусные расстояния $F_{\text{с}}$ и $F_{\text{д}}$ отсчитываются от главных плоскостей. Расстояния $\Delta_{\text{с}}$ и $\Delta_{\text{д}}$ равны расстояниям между серединой линзы и главными плоскостями. На рис. 3.3 показаны фокальные плоскости. В горизонтальной плоскости одним из фокусов служит точка *1*, а главными точками – *2* и *3*. Преобразуя выражения (3.25) и (3.26), найдем оптические силы линз:

$$\frac{1}{F_{\text{с}}} = k\sin\theta = k^2 L\frac{\sin\theta}{\theta}\,; \tag{3.27}$$

$$\frac{1}{F_{\text{д}}} = -k sh\theta = -k^2 L\frac{sh\theta}{\theta}\,, \tag{3.28}$$

которые при $\theta^2 \ll 1$ равны k^2L и $-k^2L$.

Как будет показано далее, этот случай соответствует тонкой линзе. Теперь получим выражения для других оптических параметров. В силу того, что диагональные элементы матриц (3.23) и (3.24) одинаковы, следовательно, входные и выходные плоскости расположены на одном и том же расстоянии от краев линзы. Действительно, подставив в (2.48) и (2.49) элементы матриц (3.23) и (3.24), получим

$$L_{\text{вых.с}} = L_{\text{вх.с}} = \frac{L}{\theta \sin\theta}\left(1 - \cos\theta\right) = \frac{L}{\theta}\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}; \tag{3.29}$$

$$L_{\text{вых.д}} = L_{\text{вх.д}} = \frac{L}{\theta \operatorname{sh}\theta}\left(\operatorname{ch}\theta - 1\right) = \frac{L}{\theta}\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}. \tag{3.30}$$

В дальнейшем будут представлять интерес случаи, когда $\theta^2 << 1$. При $\theta^2 << 1$ вместо выражений (3.29) и (3.30) получим

$$L_{\text{вых.с}} = L_{\text{вх.с}} \approx \frac{L}{2}\left(1 + \frac{1}{12}\theta^2 + \frac{1}{120}\theta^4\right); \tag{3.31}$$

$$L_{\text{вых.д}} = L_{\text{вх.д}} \approx \frac{L}{2}\left(1 - \frac{1}{12}\theta^2 + \frac{1}{120}\theta^4\right). \tag{3.32}$$

Иногда отсчитывают расположение главных плоскостей не от краев линзы, а от ее середины. Эти расстояния равны

$$\Delta_{\text{с,д}} = L_{\text{с,д}} - \frac{L}{2}. \tag{3.33}$$

Подставляя в (3.33) выражения (3.31) и (3.32), найдем

$$\Delta_{\text{с}} \approx \frac{L\theta^2}{24}\left(1 + 0{,}1\theta^2 + 0{,}01\theta^4\right); \tag{3.34}$$

$$\Delta_{\text{д}} \approx -\frac{L\theta^2}{24}\left(1 - 0{,}1\theta^2 + 0{,}01\theta^4\right). \tag{3.35}$$

Положительный знак перед $\Delta_{\text{с}}$ означает, что передняя (входная) главная плоскость вынесена от середины линзы по направлению пучка к заднему краю линзы, а задняя (выходная) симметрично сдвинута к переднему краю линзы. Отрицательный знак у $\Delta_{\text{д}}$ показывает, что для вертикального движения передняя (входная) плоскость смещена ближе к входному, а выходная – к заднему краю линзы. Таким образом, расположение главных плоскостей при вертикальном и горизонтальном движениях различно. Качественное объяснение такого различия состоит в следующем. Частица в случае фокусировки будет проходить первую половину линзы в области более сильного поля, чем поле во второй. Поэтому угол отклонения траектории во второй половине будет меньше, чем в первой. Следовательно, точка пересечения входной и выходной траекторий (а она лежит на главной плоскости) будет сдвинута в сторону первой половины линзы (рис. 3.4, *а*). В случае дефокусировки первая половина линзы отклоняет частицу в сторону более сильного поля, в котором частица пройдет во второй половине линзы. Поэтому выходная плоскость сдвинута вперед по отношению к середине линзы, а входная – назад (рис. 3.4, *б*).

Практически величины $\Delta_с$ и $\Delta_д$ малы. Например, при $L = 1$ м и $\theta = 0{,}8$, а $\Delta_с = 2{,}85$ см, а $\Delta_д = -2{,}51$ см. Следовательно, учет значений $\Delta_с$ и $\Delta_д$ обычно производится при очень точных расчетах параметров системы. Если же такая точность не требуется, то можно ограничиться случаем, когда главные плоскости совпадают со средней плоскостью линзы ($\Delta_с = \Delta_д = 0$). Такими особенностями обладают так называемые тонкие линзы, к рассмотрению которых мы и переходим.

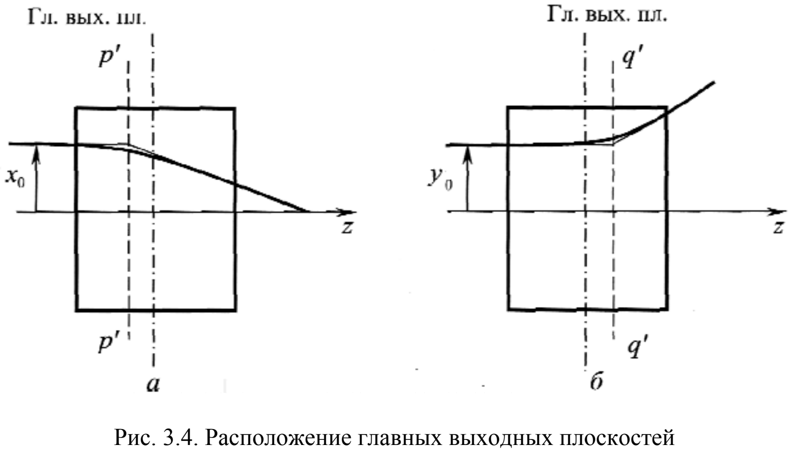


Рис. 3.4. Расположение главных выходных плоскостей

3.7. Приближения тонкой и полутонкой линз

До сих пор рассматривались линзы без каких-либо существенных упрощений, так называемые толстые линзы. Однако бывают случаи, когда необязательно рассматривать толстые линзы, можно ограничиться предположениями, при которых линза может быть представлена в более простом виде. К числу таких относятся приближения тонкой и полутонкой линз. Остановимся на указанных приближениях более подробно. Сначала разберем тонкую линзу. Рассмотрим матрицы (3.23) и (3.24). Каждая их этих матриц может быть представлена в виде произведения трех матриц. Для первой имеем

$$\begin{pmatrix} 1 & \dfrac{L}{2}\cdot\dfrac{\mathrm{tg}\dfrac{\theta}{2}}{\theta/2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{\theta}{L}\sin\theta & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \dfrac{L}{2}\cdot\dfrac{\mathrm{tg}\dfrac{\theta}{2}}{\theta/2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (3.36)$$

Отсюда видно, что при $\theta = \pi$ фокусирующее действие поля исчезает, и квадрупольная линза становится телескопической системой, для которой фокальная плоскость лежит на бесконечно большом расстоянии. Одновременно следует отметить, что увеличение θ нежелательно из-за того, что оно сопровождается увеличением дефокусирующего воздействия в D-плоскости (оно пропорционально $\mathrm{sh}\theta$). Движение частицы в квадруполе согласно (3.36) может быть представлено, как движение в дрейфовом промежутке длиной $\dfrac{2L}{\theta}\mathrm{tg}\dfrac{\theta}{2}$ с расположенной посередине тонкой линзой. Из (3.36) видно, что длина дрейфовых участков изменяется, если меняется градиент магнитного поля в квадруполе: для фокусирующей плоскости она больше $L/2$, а для дефокусирующей – меньше. Это вызывает затруднения при анализе движения. Для упрощения расчетов предположим, что главные плоскости не смещаются относительно центра линзы, а длина дрейфовых участков равна $L/2$. Это возможно, если величина θ стремится к нулю ($\theta \to 0$). В таком случае

$$F_{\text{с}} = \frac{1}{k^2 L}, F_{\text{д}} = -\frac{1}{k^2 L}, \quad \Delta_{\text{с}} = \Delta_{\text{д}} = 0. \tag{3.36а}$$

Данные выражения соответствуют приближению тонкой линзы. Для него характерно равенство по абсолютной величине фокусных расстояний в собирающей и рассеивающей плоскостях. При условии $\theta \to 0$ вместо (3.36) получим

$$\begin{pmatrix} 1 & L/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/F_{\text{с}} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.37}$$

В результате перемножения матриц выражения (3.37) получим

$$\begin{pmatrix} 1 - \dfrac{L}{2F_{\text{с}}} & L(1 - \dfrac{L}{4F_{\text{с}}}) \\ -\dfrac{1}{F_{\text{с}}} & 1 - \dfrac{L}{2F_{\text{с}}} \end{pmatrix}. \tag{3.38}$$

Отсюда необходимо получить критерий, при котором приближение тонкой линзы является удовлетворительным. Для этого преобразуем элементы матрицы (3.38) и сравним их с элементами матрицы толстой линзы (3.23). Для элемента T_{21} $\dfrac{1}{F_{\text{с}}} = k \sin\theta$, а для элементов T_{11} и T_{22}

$$1 - \frac{L}{2F_{\text{с}}} = 1 - \frac{L}{2} k \sin\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right) \approx \cos\theta,$$

которые совпадают, если $\dfrac{\sin\theta}{\theta} \approx 1 - \dfrac{\theta^2}{3!} \approx 1$. Последнее условие возможно, если $\theta^2 << 1$, которое соответствует

$$\theta^2 = k^2 L^2 = \frac{L}{F_{\text{с}}} << 1, \tag{3.39}$$

т.е. условию, при котором длина линзы мала по сравнению с фокусным расстоянием $F_{\text{с}}$. Можно показать, что выражение (3.39) справедливо для элемента T_{12}.

Следовательно, при условии (3.39) элементы матрицы толстой линзы будут мало отличаться от элементов матрицы тонкой линзы, поэтому ее можно заменить тонкой линзой, с той же самой оптической силой. Главные плоскости в приближении тонкой линзы будут лежать в центре линзы. Таким образом, приближение тонкой линзы позволяет существенно упростить расчеты при использовании квадрупольной линзы. Проведенные рассуждения справедливы и для рассеивающей линзы.

Кроме указанного, часто используется приближение полутонкой линзы, которое по сравнению с приближением тонкой линзы является более точным.

Действительно, разложим в ряд выражения (3.25) и (3.26)

$$F_{\text{с}} = \frac{L}{\theta^2} + \frac{L}{6} + \frac{7}{360} L\theta^2 + \frac{31}{15120} L\theta^4 + \ldots \qquad (3.40)$$

$$F_{\text{д}} = -\frac{L}{\theta^2} + \frac{L}{6} - \frac{7}{360} L\theta^2 + \frac{31}{15120} L\theta^4 - \ldots \qquad (3.41)$$

Из этих формул видно, что приближение тонкой линзы уменьшает фокусное расстояние (из-за отбрасывания членов с θ^2 и выше), а следовательно, увеличивает оптическую силу линзы в собирающей плоскости и наоборот, увеличивает фокусное расстояние, а следовательно, уменьшает оптическую силу линзы в рассеивающей плоскости. Составим сумму

$$F_{\text{с}} + F_{\text{д}} = \frac{L}{3}\left[1 + \theta^4 \frac{31}{2520} + \ldots\right]. \qquad (3.42)$$

При $\theta \leq 1$ с погрешностью около 1,2 % вместо (3.42) удобно ввести условие

$$F_{\text{с}} + F_{\text{д}} \approx \frac{L}{3}. \qquad (3.43)$$

Это условие вместе с $\Delta_{\text{с}} = \Delta_{\text{д}} = 0$ называется приближением полутонкой линзы. Оно более точное, чем приближение тонкой линзы, так как при его выводе учитывались члены более высокого порядка в разложении выражений для фокусных расстояний. Следовательно, не приводя к заметному осложнению, приближение полутонкой линзы позволяет повысить точность расчета оптических параметров квадрупольной линзы.

3.8. Зависимость оптических параметров линзы от изменения импульса частицы и тока возбуждения

До сих пор проводилось рассмотрение движения частиц с фиксированным значением импульса и тока возбуждения. Каким образом будут изменяться оптические параметры линзы, например, фокусные расстояния $F_с$ и $F_д$ и расположение главных плоскостей, если импульс частиц будет отличен от заданного номинального значения p_0 на некоторую величину dp. Для того чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим выражения (3.25) и (3.26), которые определяют величину фокусного расстояния для собирающей и дефокусирующей линз. Дифференцируя эти выражения по θ, получим для собирающей линзы

$$dF_с = -\frac{l}{\theta^2 \sin^2\theta}\left(\sin\theta + \theta\cos\theta\right)d\theta\,. \tag{3.44}$$

Принимая во внимание, что $\theta = kL = \sqrt{\frac{eG}{p}}L$, находим выражение

$$d\theta = -L\sqrt{eG}\cdot\frac{1}{2\sqrt{p}\,p}dp = -\theta\frac{1}{2p_0}dp\,. \tag{3.45}$$

Преобразовывая выражение (3.44) с учетом (3.45), находим относительное изменение фокусного расстояния собирающей линзы в зависимости от отклонения импульса частиц от номинального

$$\frac{dF_с}{F_с} = \frac{1+\theta\cdot\mathrm{ctg}\,\theta}{2}\frac{dp}{p_0}\;, \tag{3.46}$$

которое при малом значении θ равно

$$\frac{dF_с}{F_с} = \left(1 - \frac{\theta^2}{6} - \frac{\theta^4}{90} - \cdots\right)\frac{dp}{p_0}\,, \tag{3.46а}$$

откуда видно, что при возрастании θ величина $\frac{dF_с}{F_с}\bigg/\frac{dp}{p_0}$ падает.

Аналогично нетрудно получить подобное выражение для дефокусирующей линзы, а именно:

$$\frac{dF_д}{F_д} = \frac{1+\theta\cdot\mathrm{cth}\,\theta}{2}\cdot\frac{dp}{p_0} = \left(1 + \frac{\theta^2}{6} - \frac{\theta^4}{90} + \cdots\right)\frac{dp}{p_0}\,. \tag{3.47}$$

Поведение кривых, описываемых уравнениями (3.46) и (3.47) будет различно: зависимость отношения $\dfrac{dF_д}{F_д} \bigg/ \dfrac{dp}{p_0}$ от θ^2 пойдет выше, чем $\dfrac{dF_с}{F_с} \bigg/ \dfrac{dp}{p_0}$ (рис. 3.5).

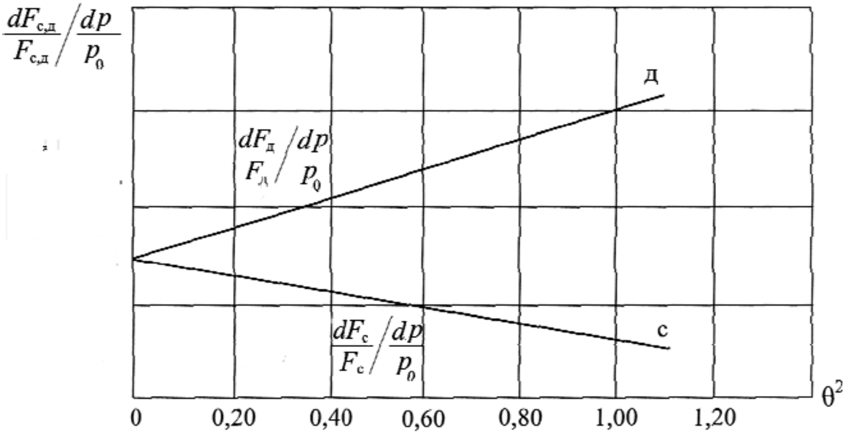


Рис. 3.5. Зависимость фокусных расстояний $F_с$ и $F_д$ от θ^2

Кроме фокусного расстояния, при изменении импульса частиц меняется расположение главных плоскостей. Действительно, из (3.29) путем дифференцирования найдем, что

$$dL_{вых.с} = \frac{1}{\theta^2}\left(\theta\frac{d\theta}{2\cos^2\dfrac{\theta}{2}} - d\theta\cdot\mathrm{tg}\frac{\theta}{2}\right),$$

которое с учетом (3.45) переходит в

$$\frac{dL_{вх.с}}{L_{вх.с}} = \frac{dL_{вых.с}}{L_{вых.с}} = \left(1 - \frac{\theta}{\sin\theta}\right)\frac{dp}{2p_0}. \qquad (3.48)$$

Аналогично для дефокусирующей плоскости имеем

$$\frac{dL_{вх.д}}{L_{вх.д}} = \frac{dL_{вых.д}}{L_{вых.д}} = \left(1 - \frac{\theta}{\mathrm{sh}\,\theta}\right)\frac{dp}{2p_0}. \qquad (3.49)$$

Изменение оптических параметров может происходить не только при изменении импульса, но также и при изменении тока возбуждения I, а соответственно и градиента поля. Действительно, из формулы (3.14) нетрудно получить выражение для относительного изменения градиента:

$$\frac{dG}{G} = \frac{dI}{2I_0}. \tag{3.49а}$$

Аналогично выражению (3.45) находим, что

$$\frac{d\theta}{\theta} = \frac{1}{2}\frac{dI}{I_0}. \tag{3.49б}$$

Подставляя это значение в (3.44), получим

$$\frac{dF_{\text{с}}}{F_{\text{с}}} = -\frac{\left(1 + \theta \cdot \operatorname{ctg}\theta\right)}{2} \cdot \frac{dI}{I_0}. \tag{3.49в}$$

Для дефокусирующей плоскости имеем

$$\frac{dF_{\text{д}}}{F_{\text{д}}} = -\frac{\left(1 + \theta \cdot \operatorname{cth}\theta\right)}{2} \cdot \frac{dI}{I_0}. \tag{3.49г}$$

При изменении тока возбуждения будет происходить смещение главных плоскостей согласно следующим формулам:

$$\frac{dL_{\text{вх.с}}}{L_{\text{вх.с}}} = \frac{dL_{\text{вых.с}}}{L_{\text{вых.с}}} = \left(\frac{\theta}{\sin\theta} - 1\right)\frac{dI}{2I_0}, \tag{3.49д}$$

$$\frac{dL_{\text{вх.д}}}{L_{\text{вх.д}}} = \frac{dL_{\text{вых.д}}}{L_{\text{вых.д}}} = \left(\frac{\theta}{\operatorname{sh}\theta} - 1\right)\frac{dI}{2I_0}. \tag{3.49е}$$

Если в уравнениях движения (3.20) и (3.22) положить $k = 0$, то будем иметь уравнения фазовых траекторий в дрейфовых участках в виде прямых линий: $x' = C$ (рис. 3.6). Для дефокусирующей плоскости имеем $y' = C$.

Из (3.48) и (3.49) видно, что при малых углах θ расположение главных плоскостей практически не изменяется при изменении импульса частиц. Кроме того, из-за $\dfrac{\theta}{\sin\theta} \geq 1$ выражение в скобках (3.48) будет отрицательным, что соответствует при $dp > 0$ приближению главных плоскостей к центру линз.

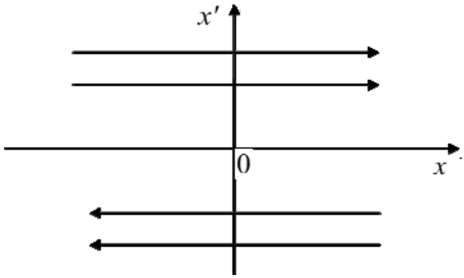


Рис. 3.6. Фазовые траектории (фокусирующие) в дрейфовом участке

Таким образом, изменение импульса частиц или тока возбуждения приведет к изменению оптических параметров линзы.

3.9. Фазовые траектории частиц в магнитной квадрупольной линзе

Уравнения траекторий на нормированных фазовых плоскостях x, $\frac{x'}{k}$ и y, $\frac{y'}{k}$ можно получить преобразованием уравнений (3.20) и (3.22). После умножения первого уравнения на $\frac{2x'}{k^2}$, а второго – на $\frac{2y'}{k^2}$ и интегрирования их по z, получим

$$\left(\frac{x'}{k}\right)^2 + x^2 = A^2, \tag{3.50}$$

$$\left(\frac{y'}{k}\right)^2 - y^2 = A_1^2, \tag{3.51}$$

где A и A_1 – константы интегрирования.

Уравнение (3.50) на фазовой плоскости представляет семейство окружностей (рис. 3.7, *а*), а уравнение (3.51) – семейство гипербол (рис. 3.7, *б*).

Направление движения на фазовой плоскости может быть определено следующим образом: при $x' > 0$ растет, а при $x' < 0$ x уменьшается.

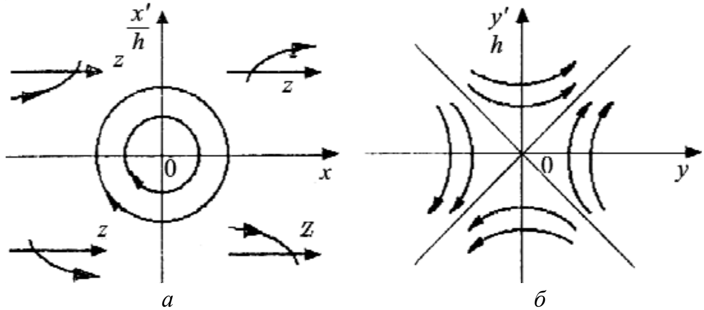


Рис. 3.7.Фазовые траектории движения частиц в квадрупольной линзе

Из рис. 3.7 видно, что движение в собирающей плоскости устойчиво, а в рассеивающей – неустойчиво. Можно привести качественное пояснение к этому рисунку. Действительно при фокусировке для точки, лежащей в первом квадранте, имеет место траектория частицы, движущейся на некотором расстоянии от оси при положительном угле наклона. Дальнейшее движение будет обусловлено непосредственно работой линзы, а именно: положительный угол наклона траектории будет постепенно уменьшаться, пока не достигнет нулевого значения при максимальном отклонении частицы от оси. Этот случай соответствует точкам на фазовых траекториях, лежащих на оси x.

Далее, во втором квадранте наклон траектории частицы по отношению к оси становится отрицательным и начинает возрастать по абсолютной величине. Поэтому частица будет приближаться к оси линзы, стремясь к такому положению, когда x обращается в нуль, а $\frac{x'}{k}$ принимает максимальное отрицательное значение на входе в третий квадрант.

В третьем квадранте частица будет отклоняться от оси, а в четвертом – опять вернется к ней. Для иллюстрации на рис. 3.7, *а* в каждом из квадрантов показаны траектории частицы по отношению к оси линзы z. Аналогичным образом можно рассмотреть движение заряженной частицы в магнитной квадрупольной линзе при дефокусировке. Из рис. 3.7, *б* видно, что для того, чтобы частицы сразу не начали отклоняться от оси на еще большее расстояние, на котором они находились на входе в дефокусирующую линзу, необходимо, чтобы их движение на фазовой траектории начиналось во втором и четвертом квадрантах.

При построении фазовых траекторий необходимо учитывать нормировку по осям, где откладываются производные, так как при переходе на плоскость xx', окружности фазовых траекторий будут деформироваться в эллипсы.

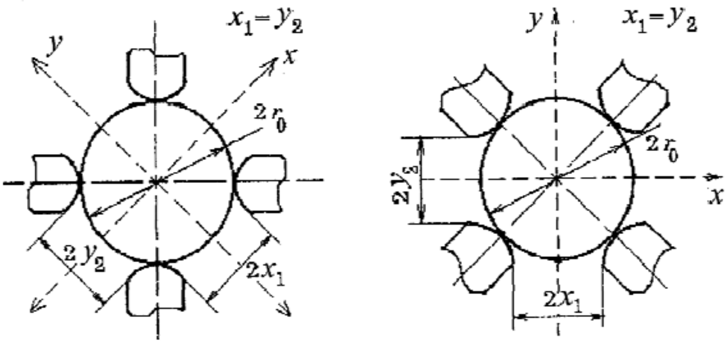
3.10. Технические параметры и особенности магнитных квадрупольных линз

Проектирование и создание систем транспортировки и формирования пучков заряженных частиц требует знания технических параметров квадрупольных линз, технических данных и режимов работы. Очень часто эти линзы представляли индивидуальные разработки, но некоторые типы линз выпускались небольшими партиями. Основным разработчиком их является НИИ ЭФА им. Д.В. Ефремова. На этом предприятии даже составлен стандарт на МКЛ, которого стараются придерживаться.

В табл. 3.1 приведены основные параметры магнитных квадрупольных линз. Во всех линзах для магнитопровода использована низкоуглеродистая сталь. Эта сталь обладает большой величиной индукции насыщения $B_{нас}$ = 2 Тл.

Поверхность полюсных наконечников выполнена в форме гиперболы или окружности. Обмотка возбуждения предусматривает водяное или естественное воздушное охлаждение. При водяном охлаждении она выполнена из медной трубки, по которой пропускается охлаждающая жидкость, а при естественно-воздушном – из медного сплошного провода. Изоляция провода выдерживает напряжение 250 В. В конструкции линзы, где это требуется, размещена водораспределительная аппаратура. Работа линзы с естественно-воздушным охлаждением возможна при температуре окружающей среды не более 35 °С. В большинстве случаев электромагнит линзы располагается на специальной подставке-шкафу. Ее конструкция дает возможность проводить регулировку пространственного размещения линзы.

Внутри шкафа обычно размещены элементы охлаждающей и токонесущей системы. Некоторые линзы имеют особенности исполнения. Линзы типа 2МЛ-4А, МЛ-10А. 2МЛ-3А состоят из двух линз, размещенных в одном корпусе. Они имеют независимое питание обмоток возбуждения. Линза МЛ-24 имеет болты для крепления линзы на трубе ионопровода и регулировки в перпендикулярном оси направлении. Кроме того, они имеют приспособление, дающее возможность собирать несколько линз в блок с заданным расстоянием между их торцами. Указанные в табл. 3.1 магнитные линзы могут иметь одно из двух расположений полюсных наконечников, которые показаны на рис. 3.8.



а *б*

Рис. 3.8. Расположение полюсных наконечников магнитной квадрупольной линзы

Расположение полюсных наконечников, изображенное на рис. 3.8, *а* относится к линзам 2МЛ-4А и МЛ-10А, а на рис. 3.8, *б* – ко всем остальным, перечисленным в табл. 3.1. Под габаритными размерами, указанными в табл. 3.1 следует понимать габариты конструкции всей установки, так как при создании транспортирующего канала приходиться встречаться с ограничением площади для размещения оборудования.

Для характеристики линзы следует отметить, зависимость градиента магнитного поля G_0 в центре ее от силы тока в обмотках возбуждения I, которая показана на рис. 3.9.

Таблица 3.1

Диаметр апертуры $2r_0$, мм	Градиент магнитного поля G, Э/см	Активная зона полюсного наконечника L, мм	Номинальный ток возбуждения I, А	Падение напряжения на обмотке U, В	Водяное охлаждение		Общая масса, кг	Габаритные размеры конструкции: высота, длина, ширина (высота оси h), мм	Условный тип линзы	Примечание
					перепад напора h, кг/см^2	общий расход воды q, л/мин				
40	1400	150	4	45	Охлаждение естественно-воздушное		385	1848×590×720 (1600)	2MJIA-4A	Состоит из двух линз. Технические данные, кроме массы, даны для 1-й линзы
60	400	200	2,5	45	То же		330	1730×648×440 (1500)	МЛ-10А	То же
7 0	300	200	0,55	220	- ″ -		55	405×345×315 (320)	МЛ-26	Одна линза с подставкой
100	1400	300	508	53	5	14,5	590	1659×700×880 (1300)	МЛ-2А	То же
150	800	250	508	45	5	15	805	1940×635×680 (1500)	МЛ-14	- ″ -
150	800	900	432	200	5	60	2380	1965×1170×890 (1500)	МЛ-15	- ″ -
260	650	600	4200	105	5	87	5100	1850×1060×1310 (1200)	МЛ-17А	- ″ -
70	350	125	1,1	90	Охлаждение естественно-воздушное		48	393×235×300 (200)	7К12.5-350	Обозначения: 1-я цифра – $2r_0$ в см, K – квадруполь, 2-я цифра – L в см, 3-я – G
200	1300	1000	1300	180	20	90	4260	1460×600×1316 (1000)	20К100В-1300	

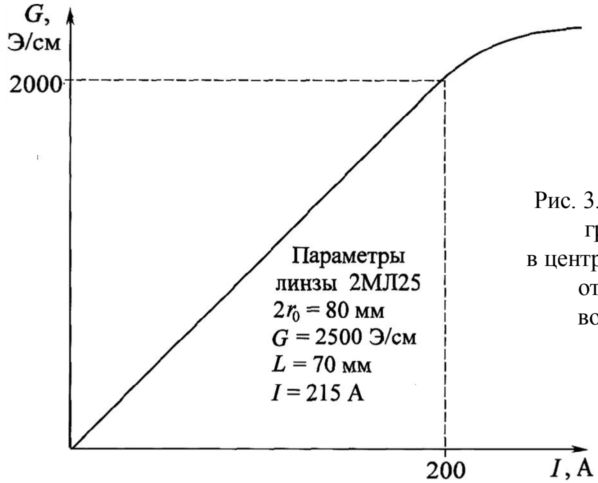


Рис. 3.9. Зависимость градиента G в центре линзы 2МЛ25 от силы тока возбуждения

Имеющая место нелинейность поля обусловлена насыщением полюсных наконечников. Ее необходимо учитывать при перестройке линзы на другие режимы работы и канала в целом для работы при других значениях импульса. Для оценок перепада движения охлаждающей воды в обмотке можно привести формулу, которая, правда, дает несколько завышенное значение, но работает в широком интервале параметров

$$\Delta P = 5\cdot 10^{-5}\, l \frac{\upsilon^{1,75}}{d^{1,25}},$$

где l – длина водяного контура, м; d –диаметр круглого отверстия для воды, м; υ – скорость воды, м/с; ΔP – перепад давления, атм. Приведенная формула, кроме квадрупольных линз, может быть использована и в других установках с охлаждаемыми водой контурами, например, в электромагнитах и др.

3.11. Разновидности МКЛ

Квадрупольное магнитное поле может быть осуществлено не только в линзах с круговой апертурой и гиперболическими полюсами. Существуют другие разновидности магнитных квадрупольных линз. Необходимость в таких разновидностях обусловлена эллиптической конфигурацией пучка, при которой максимальное отклонение траекторий от оси приходится на фокусирующую плоскость, а минимальное – на дефокусирующую. Поэтому естественно трансформировать круглую конфигурацию апертуры в вытянутую вдоль одной из осей. Такая трансформация была предложена в «линзе Панофского», поперечное сечение которой показано на рис. 3.10.

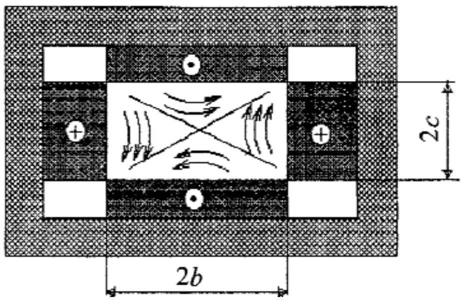


Рис. 3.10. Линза Панофского

Эти линзы имеют прямоугольную апертуру, а возбуждение обмотки в виде двух равных пар противоположно расположенных прямоугольников размещены внутри железного ярма прямоугольной формы. Параллельные оси направления токов показаны на рис. 3.10.

Для одинакового числа ампер-витков и плотности токов на всех четырех сторонах поле имеет квадрупольность во всей прямоугольной апертуре. Его градиент равен

$$G = \frac{4\pi NI \cdot 10^3}{\left(bc - \frac{A}{2}\right)}, \qquad (3.52)$$

где $2b$ и $2c$ – длина и ширина апертуры линзы; A – площадь, занимаемая обмоткой на одном полюсе.

Ярмо в линзах Панофского имеет более простую конструкцию, поэтому они менее чувствительны к насыщению, чем обычные линзы, так как в них магнитопровод работает практически при одинаковых условиях. Из-за того, что положение эквипотенциалей определяется положением обмоток, поэтому размещать их необходимо с большей точностью. В данных линзах имеются четыре участка поля, в которых не проходит пучок и которые нельзя из-за нарушения конфигурации поля в полезной области заполнять железом (нарушится однородность градиента G).

Сетье предложил квадруполь, похожий на линзу Панофского, но без железного ярма (рис. 3.11). При условии, что $a/b = 0{,}5$ и $l/b = 0{,}95$ поле внутри квадратной апертуры имеет квадрупольный характер с точностью до 1/500.

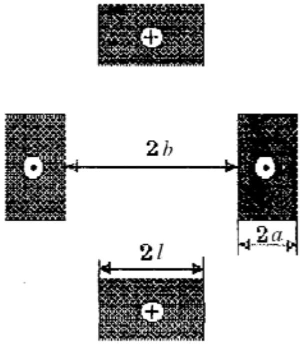


Рис. 3.11. Безжелезная линза

Рассмотренные линзы могут быть кроме транспортирующих каналов использованы в ускорителях ионов. Они, как правило, размещаются внутри дрейфовых трубок или между отдельными секциями. В линейных ускорителях могут быть использованы квадрупольные системы, образованные четырьмя параллельными проводниками с током (рис. 3.12). Направление токов и магнитного поля показано на этом рисунке. Картина поля в такой линзе аналогична той, которая имела место во всех предыдущих линзах.

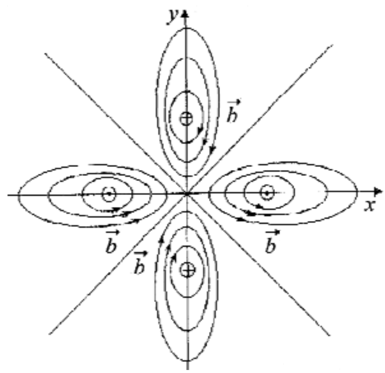


Рис. 3.12. Магнитная квадрупольная линза из прямолинейных проводников с током

Преимущество линз, показанных на рис. 3.11 и 3.12, состоит в отсутствии железа, а следовательно, в отсутствии гистерезиса и насыщения, в линейной связи поля с током, меньшем весе, возможности работать в импульсных режимах. Кроме того, в токовых квадрупольных линзах возникает меньше трудностей при использовании глубокого охлаждения. Проводники можно изготовить из круглой трубки, через отверстие в которой в дальнейшем пропускать хладагент. Особенность этой линзы заключается в возможности приблизить токовые элементы к оси движения пучка. Экспериментальное исследование высокочастотных свойств спиральной ускоряющей системы с прямолинейными проводниками, показало, что введение токовых элементов слабо влияет на шунтовой импеданс, добротность и затухание. Вместе с тем оно может быть использовано для увеличения замедления, так как приближение токовых элементов к спиральной поверхности эквивалентно приближению металлического экрана, которое увеличивает связь последнего со спиралью.

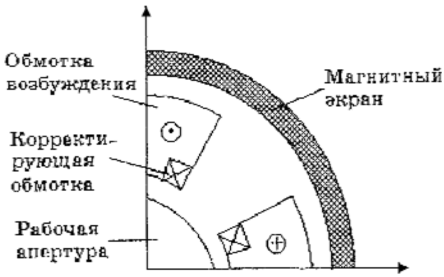


Рис. 3.13. Секция магнитной системы сверхпроводящей магнитной квадрупольной линзы

Кратко остановимся на вопросах применения глубокого охлаждения при создании магнитных квадрупрольных линз. На рис. 3.13 показана четверть поперечного сечения секции магнитной системы сверхпроводящей квадрупольной линзы. Возбуждающая обмотка, состоящая из четырех последовательно соединенных секций, помещена внутри магнитного экрана. Она выполнена из комбинированной медной шины, включающей четыре сверхпроводящие проволоки из сплава 5ОНЦ.

Для изоляции витков шины использована тефлоновая лента, которая намотана в виде спирали и одновременно выполняет роль прокладки для прохождения жидкого гелия. Изоляцией между слоями служит оксидированная алюминиевая фольга. Для снижения нелинейных искажений магнитного поля предусмотрены корректирующие обмотки. Магнитная система линзы помещена в криостат со сквозной трубкой диаметром 60 мм, находящейся при комнатной температуре. От окружающей среды внутренние элементы линзы отделены вакуумной рубашкой, внутри которой размещены магнитные экраны, охлаждаемые жидким азотом.

Вот некоторые параметры этой линзы:

- рабочая апертура 60 мм,
- внешний диаметр обмотки 160 мм,
- длина 250 мм, общий вес системы 70 кг,
- вес сверхпроводящей проволоки 20 кг,
- расход жидкого гелия 250–300 см на охлаждение 1 кг веса магнитной системы,
- скорость испарения жидкого гелия в установившемся режиме составляет 2–2,5 л/ч.

Подведение тока в магнитную систему на испарение гелия практически не влияло. При токе 710 А (плотность тока в возбуждающей обмотке равна 10^4 А/см) градиент составлял 4200 Гс/см. Последняя цифра значительно превосходит градиенты, приведенные в табл. 3.1. Таким образом, обеспечение сверхпроводящих условий работы позволяет снизить потери в магнитной системе и повысить градиент.

В заключение рассмотрим квадрупольные линзы из магнитно-твердых материалов.

Применение для фокусировки в трубках дрейфа магнитно-твердых квадруполей вместо электромагнитных позволяет упростить фокусирующую систему линейных ускорителей. К упрощению следует отнести исключение сложной конструкции трубок дрейфа и системы стабильного питания, продление времени жизни машины. Работы по применению постоянных магнитов в линейных ускорителях были начаты в 1975 г. в ИТЭФ, а в МРТИ еще ранее. Для того чтобы обеспечить необходимую пропускную способность фокусирующего канала, необходимы специальные магнитно-твердые сплавы. Магнитно-движущая сила, создаваемая сплавом, зависит от величины магнитной энергии, накопленной в единице объема. Напомним, что максимальная магнитная энергия $(BH)_{\text{макс}}$ – максимальное значение произведения B и H на размагничивающей петле гистерезиса. Для сплава ЮНДК-35Т5 $(BH)_{\text{макс}}$ – 9 МГс·Э, что позволяет при наружном диаметре линзы 15 см и диаметре апертуры 2 см получить поле с градиентом 6 кГс/см = 60 Тл/м. Еще лучшие результаты могут быть достигнуты у постоянных магнитов на основе редкоземельных элементов. Например, в магнитах из сплава самарий–кобальт можно достигнуть $(BH)_{\text{макс}}$ до (10–30) мГс·Э, а из сплава ниодим–бор–железо – (30–40) МГс·Э.

Стержневые линзы с неявно выраженными полюсами из сплава Sm–Co5, кроме того, дают возможность производить плавную регулировку градиента. В этом случае линза состоит из нескольких концентрических круговых рядов стержней из названного сплава. Стержни намагничены перпендикулярно продольной оси. Ориентация векторов намагниченности позволяет создать квадрупольное поле в апертуре.

Допустимый облучающий интегральный поток нейтронов, при котором сохраняются магнитные свойства сплавов ЮНДК, не ниже 10^{22} нейтр./см.

Применение магнитно-твердых квадруполей позволяет избежать рассеяния тепла в объеме трубки дрейфа и случайных отключений МКЛ.

4. ПРОСТЕЙШИЕ СИСТЕМЫ ИЗ МАГНИТНЫХ КВАДРУПОЛЬНЫХ ЛИНЗ

К простейшим системам, образованным МКЛ переходят тогда, когда возникает необходимость обеспечить фокусировку заряженных частиц во всех направлениях. К сожалению, один квадруполь такой возможностью не обладает. Невозможность одной квадрупольной линзой сфокусировать пучок в двух взаимно перпендикулярных направлениях заставила применять систему квадрупольных линз, состоящую не менее чем из двух квадруполей. Здесь будут рассмотрены дублеты – системы из двух квадрупольных линз, триплеты – системы из трех линз, квартеты или квадруплеты, состоящие из четырех линз и мультиплеты, состоящие из произвольного числа элементов. В зависимости от числа квадруполей в системе изменяются ее свойства и назначение. В каждой из таких систем имеют место свои формы траекторий, они характеризуются своими оптическими параметрами и кардинальными элементами. Увеличение числа элементов дает возможность варьирования параметрами системы.

4.1. Дублеты

Свойства дублета. Дублет – это простейшая система МКЛ, которая образована двумя квадруполями. Эти квадруполи имеют одну и ту же продольную ось, а плоскости симметрии и асимметрии одного из них сдвинуты на 90° по отношению к указанным плоскостям другого. Таким образом, в одной из плоскостей, скажем $x0z$, система линз образует фокусирующе-дефокусирующую (ФД) структуру, а в другой, перпендикулярной $y0z$ – дефокусирующе-фокусирующую (ДФ). На рис. 4.1 показан дублет и траектории частиц в двух плоскостях. В каждой из линз Q_1 и Q_2, составляющих дублет, показаны главные плоскости, расстояние между источником и первой линзой, между линзами и между второй линзой и изображением. В плоскости ФД все параметры обозначены обычными буквами, а в плоскости ДФ – буквами со штрихами.

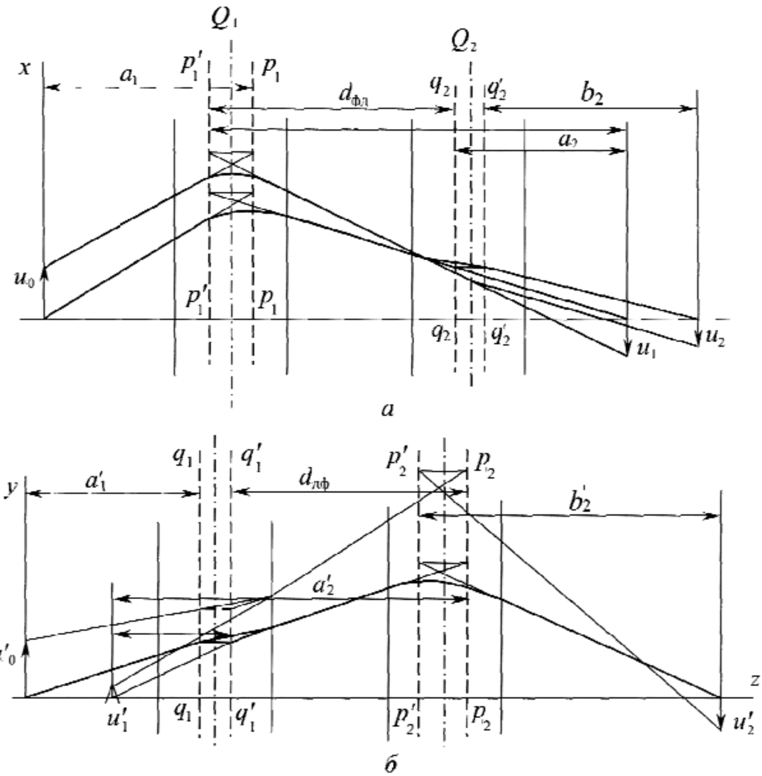


Рис. 4.1. Траектории частиц в дублете:
а – плоскость ФД; *б* – плоскость ДФ

Необходимо определить свойства дублета: получить матрицы преобразования, найти оптические параметры, расположение главных плоскостей и фокусные расстояния. Пусть в плоскости ФД расстояние от источника до передней главной плоскости линзы равно

$$a_1 = A_1 + \Delta_{1c}, \tag{4.1}$$

а в плоскости ДФ

$$a_1' = A_1' + \Delta_{1д}. \tag{4.2}$$

В выражениях (4.1) и (4.2) A_1 и A_1' есть расстояния от источника до середины линзы Q_1, а величины Δ_{1c} и $\Delta_{1д}$ даны выражениями (3.34) и (3.35) и относятся к линзе Q_1. Для промежуточного изображения после линзы Q_1, которое для плоскости ФД – действительное, а для плоскости ДФ – мнимое, расстояния до выходных плоскостей равны

$$b_1 = B_1 + \Delta_{1\text{с}}\,; \tag{4.3}$$

$$b_1' = B_1' + \Delta_{1\text{д}}\,, \tag{4.4}$$

где B_1 и B_1' – расстояния между промежуточным изображением и серединой линзы Q_1. В свою очередь эти изображения служат источниками для линзы Q_2, а

$$a_2 = d_{\text{фд}} - b_1 = d + \Delta_{1\text{с}} + \Delta_{2\text{д}} - b_1\,; \tag{4.5}$$

$$a_2' = d_{\text{дф}} - b_1' = d + \Delta_{1\text{д}} + \Delta_{2\text{с}} - b_1'\,, \tag{4.6}$$

где $d_{\text{фд}}$ и $d_{\text{дф}}$ – расстояния между выходной и входной плоскостями линз при ФД и ДФ движениях, d – расстояние между центрами линз. Величины, входящие в выражения (4.3)–(4.6), следует брать в алгебраическом смысле, т.е. $a_2 < 0$ из-за того, что по отношению и изображению u_2 промежуточное изображение является мнимым, и $b_1' < 0$, так как промежуточное изображение относительно источника тоже является мнимым. Расстояния от выходных плоскостей линзы Q_2 до изображения соответственно равны b_1 и b_1'.

Перейдем к нахождению связи между введенными геометрическими параметрами. Удобнее всего эту связь определить с помощью матричного представления. Для дублета необходимо перемножить пять матриц – две для линз Q_1 и Q_2 и три для дрейфовых участков, окружающих линзы. Однако в результате такого перемножения мы не получим промежуточной информации, т.е. значений b_1 и b_1', а следовательно, и a_2 и a_2'. Чтобы определить параметры b_1 и b_1', перемножим три матрицы для первой линзы и окружающих ее дрейфовых участков:

$$\begin{pmatrix} 1 & b_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{1}{F_{1\text{с}}} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.7}$$

Здесь для упрощения использована матрица тонкой линзы. В результате перемножения получим следующую матрицу

$$\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\dfrac{b_1}{F_{1\text{с}}} & a_1+b_1-\dfrac{a_1 b_1}{F_{1\text{с}}} \\ -\dfrac{1}{F_{1\text{с}}} & 1-\dfrac{a_1}{F_{1\text{с}}} \end{pmatrix}. \tag{4.8}$$

В плоскости ФД изображение источника после линзы Q_1 может быть найдено, если $T_{12} = 0$. Это условие дает хорошо известное из оптики уравнение для тонкой линзы

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_1} = \frac{1}{F_{1\text{с}}}, \tag{4.9}$$

из которого нетрудно определить или расстояние до изображения,

$$b_1 = \frac{a_1 F_{1\text{с}}}{a_1 - F_{1\text{с}}}, \tag{4.10}$$

если известно фокусное расстояние, или наоборот

$$F_{1\text{с}} = \frac{a_1 b_1}{a_1 + b_1}. \tag{4.11}$$

Поскольку входящие в (4.10) величины положительны, ограничимся случаем $a_1 > F_{1\text{с}}$, так как обратное условие $a_1 < F_{1\text{с}}$, сопровождающееся мнимым изображением, практической ценности не представляет, поэтому и параметр b_1 положителен. Коэффициент увеличения первой M_1 и второй M_2 линз будут определены позже. По полученным параметрам b_1 и M_1 можно построить изображение после первой линзы (см. рис. 4.1).

Аналогичные (4.10) и (4.11) выражения можно записать для плоскости ДФ:

$$b_1' = \frac{a_1' F_{1\text{д}}}{a_1' - F_{1\text{д}}}; \tag{4.12}$$

$$F_{1\text{д}} = \frac{a_1' b_1'}{a_1' + b_1'}. \tag{4.13}$$

Необходимо помнить, что в выражениях (4.12) и (4.13) фокусное расстояние в дефокусирующей плоскости $F_{1\text{д}}$ – отрицательная величина. Поэтому изображение лежит левее выходной плоскости первой линзы. Связь между величинами b_1, b_1' и a_2, a_2' представлена в выражениях (4.5) и (4.6). Для определения параметров b_2, b_2' перемножим матрицы для линзы Q_2 и окаймляющих ее свободных участков:

$$\begin{pmatrix} 1 & b_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{1}{F_{2\text{д}}} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (4.14)$$

В результате получим матрицу

$$\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\dfrac{b_2}{F_{2\text{д}}} & a_2+b_2-\dfrac{a_2 b_2}{F_{2\text{д}}} \\ -\dfrac{1}{F_{2\text{д}}} & 1-\dfrac{a_2}{F_{2\text{д}}} \end{pmatrix}, \qquad (4.15)$$

приравнивая нулю элемент T_{12} которой, получим

$$b_2 = \frac{a_2 F_{2\text{д}}}{a_2 - F_{2\text{д}}}, \qquad (4.16)$$

где $F_{2\text{д}} < 0$ и $a_2 < 0$, причем $F_{2\text{д}}$ больше a_2 по абсолютной величине. Для плоскости ДФ имеем:

$$b_2' = \frac{a_2' F_{2\text{с}}}{a_2' - F_{2\text{с}}}, \qquad (4.17)$$

где $F_{2\text{с}} > 0$ и $a_2' > F_{2\text{с}}$. Подставляя в (4.16) и (4.17) значения a_2 и a_2', из (4.5) и (4.6) получим:

$$b_2 = \frac{\left(d_{\text{фд}} - b_1\right)F_{2\text{д}}}{d_{\text{фд}} - b_1 - F_{2\text{д}}} = \frac{\left(d_{\text{фд}} - \dfrac{a_1 F_{1\text{с}}}{a_1 - F_{1\text{с}}}\right)F_{2\text{д}}}{d_{\text{фд}} - \dfrac{a_1 F_{1\text{с}}}{a_1 - F_{1\text{с}}} - F_{2\text{д}}}; \qquad (4.18)$$

$$b_2' = \frac{\left(d_{\text{дф}} - b_1'\right)F_{2\text{с}}}{d_{\text{дф}} - b_1' - F_{2\text{с}}} = \frac{\left(d_{\text{дф}} - \dfrac{a_1' F_{1\text{д}}}{a_1' - F_{1\text{д}}}\right)F_{2\text{с}}}{d_{\text{дф}} - \dfrac{a_1' F_{1\text{д}}}{a_1' - F_{1\text{д}}} - F_{2\text{с}}}. \qquad (4.19)$$

Следовательно, по заданным значениям фокусных расстояний (или возбуждению) квадруполей, образующих дублет, расстоянию между ними и параметров источника, можно определить месторасположение изображения. Но это не самая трудная и самая интересная задача. Большой интерес представляет обратный процесс, когда по заданному расположению источника и изображения необходимо определить фокусные расстояния линз. Подобная задача возникает тогда, когда необходимо направить пучок в регистрирующую установку, расположенную на заданном расстоянии. Точное решение этой задачи приводит к трансцендентным уравнениям, для решения которых используют метод подбора.

Ограничимся случаем стигматической фокусировки, при которой источники и изображения совпадают в вертикальной и горизонтальной плоскостях:

$$a_1 = a_1' = a\,;\;\; b_2 = b_2' = b\,. \tag{4.20}$$

Фокусные расстояния квадруполей дублета можно определить как в приближении тонкой, так и полутонкой линз. Ввиду того, что приближение полутонкой линзы является более точным по сравнению с приближением тонкой линзы, рассмотрим дублет в приближении полутонкой линзы. Согласно этому приближению

$$F_{1\text{с}} + F_{1\text{д}} = \frac{L_1}{3} = C_1\,; \tag{4.21}$$

$$F_{2\text{с}} + F_{2\text{д}} = \frac{L_2}{3} = C_2\,; \tag{4.22}$$

$$\Delta_{1,2\text{с}} = \Delta_{1,2\text{д}} = 0\,. \tag{4.23}$$

Отбросив индекс «с» и обозначив $F_{1\text{с}} = F_1$ и $F_{2\text{с}} = F_2$, можно выразить из (4.21) и (4.22) фокусные расстояния квадруполей в ДФ плоскостях. Действительно:

$$F_{1\text{д}} = C_1 - F_1\,; \tag{4.24}$$

$$F_{2\text{д}} = C_2 - F_2\,. \tag{4.25}$$

Преобразовывая (4.18) и (4.19) для стигматической фокусировки (4.20) при соблюдении (4.10) и (4.12), получим два уравнения для фокусных расстояний

$$F_1^2 - C_1F_1 - \left[2a^2bdn - C_1ab\left(mn + pd\right) - C_2a^2n^2 + C_1C_2anp\right]\times \times\frac{1}{2bmp - C_2p^2} = 0; \tag{4.26}$$

$$F_2^2 - C_2F_2 - \left[2ab^2dm - C_2ab\left(mn+pd\right) - C_1b^2m^2 + C_1C_2bmp\right]\times$$
$$\times\frac{1}{2anp - C_1p^2} = 0, \tag{4.27}$$

в которых введены следующие обозначения: $m=a+d$, $n=b+d$, $p=a+d+b$.

Разлагая корни уравнений (4.26) и (4.27) и ограничившись линейными членами с C_1 и C_2, находим

$$F_1 = a\sqrt{\frac{dn}{mp}}\left[1 - C_1\frac{(mn+pd)}{4adn} - C_2\frac{(mn-pd)}{4bdm}\right] + \frac{C_1}{2}; \tag{4.28}$$

$$F_2 = b\sqrt{\frac{dm}{np}}\left[1 - C_1\frac{(mn-pd)}{4adn} - C_2\frac{(mn+pd)}{4bdm}\right] + \frac{C_2}{2}. \tag{4.29}$$

Следует подчеркнуть, что в этих выражениях отброшены знаки “–“, так как F_1 и F_2 в приближении полутонких линз есть сугубо положительные величины. Уравнения (4.28) и (4.29) позволяют определить фокусные расстояния с высокой точностью. Например, при $\frac{L}{F} \approx 1$ ошибка составляет меньше 1 %.

В приближении тонкой линзы, когда C_1 и C_2 малы по сравнению с F_1 и F_2 в (4.24), (4.25), из (4.28) и (4.29) имеем

$$F_1 = \pm a\sqrt{\frac{d(b+d)}{(a+b+d)(a+d)}}; \tag{4.30}$$

$$F_2 = \mp b\sqrt{\frac{d(a+d)}{(a+b+d)(b+d)}}. \tag{4.31}$$

Для плоскости ФД следует брать верхние знаки в выражениях (4.30) и (4.31), а для плоскости ДФ – нижние.

С помощью выражений (4.30) и (4.31) рассмотрим два простых случая. Первый относится к фокусировке параллельного пучка, для которого источник расположен в бесконечности ($a \to \infty$). В этом случае

$$F_1 = \pm\sqrt{d(b+d)}, \tag{4.32}$$

$$F_2 = \mp b\sqrt{\frac{d}{b+d}}\,. \qquad (4.33)$$

Таким образом, при стигматической фокусировке параллельного пучка дублетом выражения для фокусных расстояний упрощаются. Они могут быть определены через расстояния между квадруполями и от изображения до второго квадруполя. Второй случай относится к формированию расходящегося пучка в параллельный ($b \to \infty$). Для него фокусные расстояния равны

$$F_1 = \pm a\sqrt{\frac{d}{a+d}}\,; \qquad (4.34)$$

$$F_2 = \mp\sqrt{d(a+d)}\,. \qquad (4.35)$$

В этом случае фокусные расстояния могут быть выражены через параметры *a* и *d*. Следовательно, фокусные расстояния квадруполей дублета связаны с расстояниями от источника и изображения до дублета и расстоянием между линзами.

Еще раз следует отметить, что уравнения (4.26) и (4.27) могут быть получены, если составить матрицу для дублета, равную произведению пяти матриц:

$$\begin{pmatrix} 1 & b_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{1}{F_{2\text{д}}} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & d_{\text{фд}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{1}{F_{1\text{с}}} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (4.36)$$

в плоскости ФД и

$$\begin{pmatrix} 1 & b_2' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{1}{F_{2\text{с}}} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & d_{\text{дф}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{1}{F_{1\text{д}}} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a_1' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (4.37)$$

в плоскости ДФ, а затем приравнять нулю элементы T_{12} вновь полученных матриц с учетом (4.20). Кроме того, необходимо заметить, что стигматическая фокусировка не является единственно возможной. Иногда приходится встречаться со случаем, когда источники и изображения не совпадают в ДФ и ФД плоскостях, а условия (4.20) не выполняются. В этих случаях вместо (4.26) и (4.27) получаются более громоздкие уравнения, которые, как правило, решаются методом подбора.

Особенности работы дублета. Как следует из (4.30) и (4.31), при $a >> d$ и $b >> d$ фокусные расстояния F_1 и F_2 пропорциональны $\sqrt{d}$ и, следовательно, возрастают при увеличении расстояния между линзами. Фокусное расстояние первой линзы F_1 сильно зависит от расстояния между источником и дублетом a и слабо – от расстояния от изображения до дублета b. Для фокусного расстояния F_2 справедливо обратное утверждение.

Коэффициент увеличения линзы, когда $T_{12} = 0$ и справедливо (4.9), равен элементу T_{11}, поэтому из (4.8) найдем для плоскости ФД

$$M_1 = T_{11} = -\frac{b_1}{a_1}. \tag{4.38}$$

Аналогично для второй линзы имеем

$$M_2 = 1 - \frac{b_2}{F_{2д}} = 1 - b_2\left(\frac{1}{a_2} + \frac{1}{b_2}\right) = -\frac{b_2}{a_2}. \tag{4.39}$$

Коэффициент увеличения дублета равен произведению коэффициентов увеличения каждой линзы:

$$M_{фд} = M_1 M_2 = \frac{b_2}{a_1} \cdot \frac{b_1}{a_2}. \tag{4.40}$$

Для того чтобы показать, что $M_{фд} = M_1 M_2$ можно воспользоваться (4.36), определив элемент T_{11} полученной от перемножения новой матрицы:

$$T_{11} = 1 - \frac{d}{F_{1C}} - \frac{b_2}{F_{2д}} + \frac{db_2}{F_{1с}F_{2д}} - \frac{b_2}{F_{1с}}. \tag{4.41}$$

Используем (4.16) и аналогичное (4.9) выражение для второй линзы (в данном случае рассеивающей). Коэффициент для плоскости ФД равен

$$M_{фд} = T_{11} = 1 - \frac{d}{F_{1C}} - b_2\left(\frac{1}{a_2} + \frac{1}{b_2}\right) + \frac{db_2}{F_{1C}}\left(\frac{1}{a_2} + \frac{1}{b_2}\right) - \frac{b_2}{F_{1C}} =$$

$$= \left(-\frac{b_2}{a_2}\right)\left(1 - \frac{d}{F_{1C}} + \frac{a_2}{F_{1C}}\right) = \left(-\frac{b_2}{a_2}\right)\left(-\frac{b_1}{a_1}\right). \tag{4.42}$$

Для плоскости ДФ коэффициент увеличения равен

$$M_{дф} = \left(\frac{b_2'}{a_2'}\right)\left(\frac{b_1'}{a_1'}\right). \qquad (4.43)$$

Поскольку $a_2 < 0$ и $b_1' < 0$, следовательно, $M_{фд}$ и $M_{дф}$ – отрицательные величины. Из выражений (4.40) и (4.43) видно, что коэффициенты увеличения $M_{фд}$ и $M_{дф}$ пропорциональны соответственно величинам $\left|\frac{b_1}{a_2}\right|$ и $\left|\frac{b_1'}{a_2'}\right|$. На рис. 4.1 видно, что отношение $\left|\frac{b_1}{a_2}\right| > 1$, а $\left|\frac{b_1'}{a_2'}\right| < 1$, поэтому увеличение в плоскости ФД значительно больше, чем в плоскости ДФ. При этом повышение d вызывает увеличение по модулю $M_{фд}$ (из-за увеличения $\left|\frac{b_1}{a_2}\right|$) и уменьшение $M_{дф}$ (из-за уменьшения $\left|\frac{b_1'}{a_2'}\right|$).

Кроме того, из рис. 4.1 следует, что в плоскости ФД апертура дублета определяется апертурой первой линзы, а в плоскости ДФ она равна апертуре второй линзы, уменьшенной в $\left|\frac{a_2'}{b_2'}\right|$ раз.

Для того чтобы пояснить эту мысль рассмотрим рис. 4.1, *б*. Частицы не будут попадать на внутреннюю поверхность второй линзы, если, влетая в первую, они будут находиться от оси на расстоянии не более, чем указанная величина. Это видно из рассмотрения подобных прямоугольных треугольников, образованных осью дублета, отрезками главных плоскостей $q_1' - q_1'$ и $p_2 - p_2$, отсекающими касательными к траектории между линзами, и прямой, совпадающей с направлением траектории на участке $u_1' - p_2$.

В гл. 3 было отмечено, что при изменении импульса частиц, изменяются оптические параметры квадруполей. Подобное утверждение относится и к дублету. Действительно, при изменении импульса на величину dp происходит уход изображения вдоль оси как в плоскости ФД, так и в плоскости ДФ. Для определения этого ухода продифференцируем формулу (4.16), относящуюся к плоскости ФД. В результате получим

$$d\left(\frac{1}{b_2}\right)=d\left(\frac{1}{F_{2\text{д}}}\right)+\frac{da_2}{a_2'}. \qquad (4.44)$$

Второй член в правой части с помощью (4.5) и (4.9) преобразуем к следующему виду

$$\frac{da_2}{a_2'}=\frac{b_1^2}{a_2^2}\frac{d\left(d-b_1\right)}{b_1^2}=-\frac{b_1^2}{a_2^2}\frac{db_1}{b_1^2}, \qquad (4.45)$$

где

$$\frac{db_1}{b_1^2}=\frac{a_1}{b_1^2}\frac{dF_{1\text{c}}\left(a_1-F_{1\text{c}}+F_{1\text{c}}\right)}{\left(a_1-F_{1\text{c}}\right)^2}=\frac{1}{b_1^2}\frac{a_1^2F_{1\text{c}}^2}{\left(a_1-F_{1\text{c}}\right)^2}=\frac{dF_{1\text{c}}}{F_{1\text{c}}^2}=-d\left(\frac{1}{F_{1\text{c}}}\right).$$

Подставив (4.45) в (4.44), найдем

$$d\left(\frac{1}{b_2}\right)=d\left(\frac{1}{F_{2\text{д}}}\right)+\frac{b_1^2}{a_2^2}d\left(\frac{1}{F_{1\text{c}}}\right). \qquad (4.46)$$

Таким образом, расположение изображения (вернее его обратная величина) зависит от оптических сил первой и второй линз, причем при оптической силе первой линзы необходимо учитывать множитель b_1^2/a_2^2. При выводе формулы (4.46) предполагается, что коэффициенты Δ_c и $\Delta_\text{д}$ практически не изменяются при малых изменениях импульса.

Матрица преобразования дублета. Все предыдущие рассуждения проводились в пространстве, пролегающем от источника через дублет до изображения. Однако, чтобы найти расположение главных плоскостей, необязательно в выражениях (4.36) и (4.37) учитывать матрицы крайних дрейфовых участков. Можно ограничиться произведением трех матриц, которое в приближении тонких линз приводит к следующей матрице.

$$T=\begin{pmatrix} 1-\dfrac{d}{F_1} & d \\ \dfrac{d}{F_1F_2}-\dfrac{1}{F_1}-\dfrac{1}{F_2} & 1-\dfrac{d}{F_2}\end{pmatrix}, \qquad (4.47)$$

откуда нетрудно определить фокусное расстояние дублета F*, которое выражается через F_1 и F_2 с помощью формулы

$$\frac{1}{F*}=\frac{1}{F_1}+\frac{1}{F_2}-\frac{d}{F_1F_2}\,. \tag{4.48}$$

Это выражение встречалось в геометрической оптике для описания системы, состоящей из двух тонких рассеивающей и собирающей линз. В частном случае, когда $F_1 = –F_2 = F$ (или $–F_1 = F_2 = = F$), имеем

$$F*=\frac{F^2}{d}\,. \tag{4.49}$$

Таким образом, приходим к известному положению, которое гласит, что система из двух одинаковых тонких рассеивающей и собирающей линз независимо от порядка их расположения будет обеспечивать фокусировку пучка. Выражения

$$L_{\text{вых}}=F*\left(1-T_{11}\right)=\frac{F*}{F_1}d\,; \tag{4.50}$$

$$L_{\text{вх}}=F*\left(1-T_{22}\right)=\frac{F*}{F_2}d\,. \tag{4.51}$$

позволяют найти расположение главных плоскостей.

В плоскости ФД, когда $F_1 = –F_2 = F$, имеем $L_{\text{вых}}=\frac{F^2}{dF}d=F$ и $L_{\text{вх}}=-\frac{F^2}{dF}d=-F$, а в плоскости ДФ, для которой $–F_1 = F_2 = F$, $L_{\text{вых}}=-F$ и $L_{\text{вх}}=F$.

Соответствующие коэффициенты $\Delta_{\text{с}}$ и $\Delta_{\text{д}}$ для дублета равны (здесь не имеет смысла отличать их индексами «с» и «д»):

$$\Delta_{\text{вх}}^{(x)}=L_{\text{вх}}^{(x)}+\frac{d}{2}=\left|F\right|+\frac{d}{2}=\Delta_{\text{вых}}^{(y)}\,; \tag{4.52}$$

$$\Delta_{\text{вых}}^{(x)}=L_{\text{вых}}^{(x)}-\frac{d}{2}=\left|F\right|-\frac{d}{2}=\Delta_{\text{вх}}^{(y)}\,. \tag{4.53}$$

Различные знаки перед $d/2$ в выражениях (4.52) и (4.53) взяты в связи с тем, что расстояния $L_{\text{вх}}$ и $L_{\text{вых}}$ в плоскостях ФД и ДФ откладываются от краев дублета в противоположные стороны. На рис. 4.2 изображены главные и фокальные плоскости в дублете. Формулы (4.50)–(4.53) показывают, что главные плоскости во взаимно перпендикулярных плоскостях расположены по разные стороны от дублета и расстояние между ними достаточное.

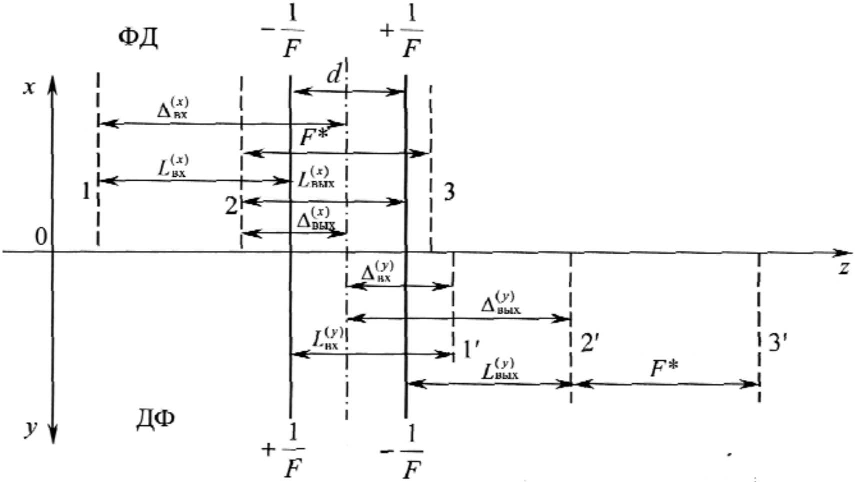


Рис. 4.2. Главные и фокальные плоскости дублета
(1 и 1′ – выходные плоскости; 2 и 2′ – выходные плоскости;
3 и 3′ – фокальные плоскости)

Иногда в литературе дублет, изображенный на рис. 4.2 называют антисимметричным, так как он образован двумя одинаковыми линзами, но с противоположным направлением поля. Достаточно большое расстояние между главными плоскостями не позволяет даже в грубом приближении представить дублет в виде одной тонкой линзы, как это имело место при рассмотрении одного квадруполя. С этой точки зрения триплет, о котором пойдет речь ниже, является более приемлемой системой.

Изучение дублета продолжим рассмотрением фазового объема пучка, который проходит через дублет. Мы ограничимся рассмотрением фазового портрета в плоскости ФД, который изображен на рис. 4.3. На этом же рисунке для наглядности показано расположение источника и изображения по отношению к дублету.

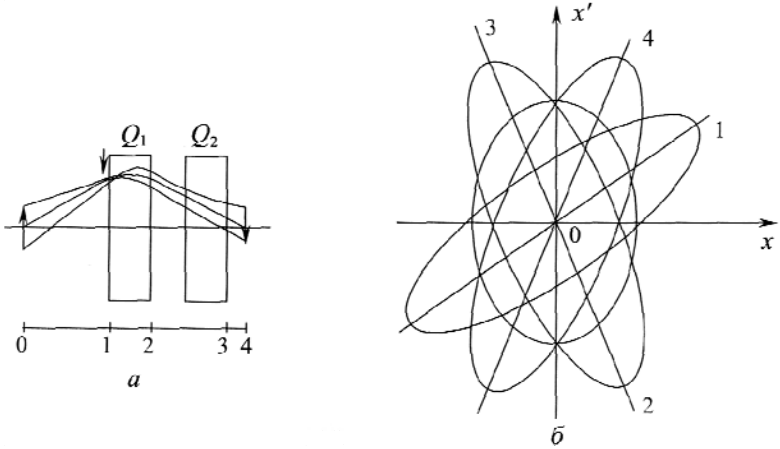


Рис. 4.3. Изменение фазового портрета в дублете линз Q_1 и Q_2:
а – траектория в дублете; *б* – фазовый портрет

Эллипс, обозначенный цифрой 0, описывает пучок частиц, который вылетает из мишени. После прохождения дрейфового пространства между мишенью и коллиматором, расположенным перед входом в первую линзу дублета и обозначенным стрелкой, фазовый эллипс изменяет свою конфигурацию: происходит поворот и вытягивание его. При таком изменении эллипса сохраняются значения ординаты, а изменяются только абсциссы. Подобное изменение соответствует расхождению пучка под теми же углами, под которыми частицы вылетают из мишени. Новый эллипс обозначен цифрой *1*. Под действием первого фокусирующего квадруполя, эллипс *1* изменяет свое расположение и форму и превращается в эллипс *2* (эллипс *1* вращается и вытягивается). Как было отмечено ранее в гл. 1, эллипс *2* на фазовой плоскости соответствует сходящемуся пучку. До точки *3* пучок, отображаемый эллипсом *2*, проходит через дрейфовый межлинзовый участок и второй дефокусирующий квадруполь, поэтому эллипс *2* сжимается вдоль большой оси и немного поворачивается. Сжатие происходит из-за противоположного действия на пучок второго квадруполя, а поворот за счет прохождения его в свободном пространстве. После прохождения свободного пространства фазовый эллипс *3* поворачивается и занимает положение *4*, приходящееся на плоскость изображения.

Графический расчет фокусировки частиц дублетом МКЛ. Расчет дублета из МКЛ будет проведен с помощью графиков, полученных на основе решения уравнений движения и граничных условий.

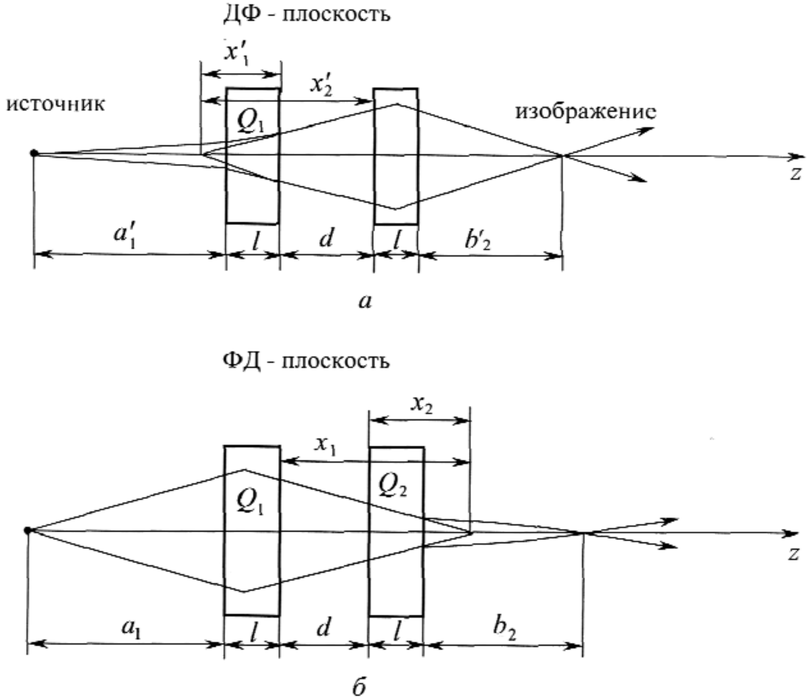


Рис. 4.4. Пояснения к условиям фокусировки в дублете

Рассмотрение начнем с плоскости ДФ. Для первой линзы невозможно представить решение уравнения движения одним выражением. Причина будет выяснена позже. Траектория частицы в первой линзе может быть выражена следующими выражениями:

$$y = Y_1 \operatorname{ch}\left[k_1\left(z - a'_1\right) + \varphi'_1\right] \qquad (4.54)$$

при $k_1 a'_1 > 1$ и

$$y = Y_1 \operatorname{sh}\left[k_1\left(z - a'_1\right) + \xi'_1\right] \qquad (4.55)$$

при $k_1 a'_1 < 1$.

Во второй линзе

$$y = Y_2 \cos\left[k_2 \left(z - z_3 \right) + \varphi_2' \right], \tag{4.56}$$

где $z_3 = a_2' + d + 2l$ (см. рис. 4.4), а l – длина каждой линзы. На основании граничных условий, предусматривающих на границе равенство отклонений частицы от оси и углов наклона, имеем после дрейфового участка до первой линзы слева для расходящегося пучка следующие компоненты

$$\begin{pmatrix} y_{a_1'} \\ y'_{a_1'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a_1' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ y_0' \end{pmatrix} = \begin{cases} a_1' y'; \\ y', \end{cases} \tag{4.57}$$

справа на этой границе ($a_1' +$) с помощью (4.52) получим

$$\left.\begin{aligned} &\text{при } k_1 a_1' > 1 \qquad && y_{a'} = Y_1 \mathrm{ch}\varphi_1'; \\ &\text{при } k_1 a_1' < 1 \qquad && y'_{a'} = Y_1 k_1 \mathrm{sh}\varphi_1. \end{aligned}\right\} \tag{4.58}$$

Приравнивая уравнения (4.57) и (4.58) и затем исключив из них Y_1 и y_0', получим при $k_1 a_1' > 1$

$$\mathrm{tg}\varphi_1' = \frac{1}{k_1 a_1'}. \tag{4.59}$$

Из равенства (4.59) следует, что оно справедливо только при $k_1 a_1' > 1$, поэтому для случая при $k_1 a_1' < 1$ необходимо воспользоваться решением уравнения движения (4.55) и поступить так же, как получено выражение (4.59). В результате находим при $k_1 a_1' < 1$

$$\mathrm{ctg}\,\xi_1' = \frac{1}{k' a_1'}. \tag{4.60}$$

На выходной границе второй линзы (двигаясь от изображения к линзе) имеем

$$\mathrm{tg}\varphi_2' = \frac{1}{k_2 b_2}. \tag{4.61}$$

Теперь предстоит самое главное: найти условия фокусировки в ДФ-плоскости, т.е. согласовать на выходной границе первого квадруполя решения (4.54) и (4.55) с (4.56). На этой границе должно выполняться равенство отклонений (y) и производных от них (y'). После первой линзы найдем:

при $k_1 a_1' > 1$

$$y_2 = Y_1 \mathrm{ch}(k_1 l + \varphi_1'), \tag{4.62}$$

при $k_1 a_1' < 1$

$$y_2' = Y_1 k_1 \,\mathrm{sh}(k_1 l + \varphi_2') . \tag{4.63}$$

Идя в обратном направлении через вторую линзу и дрейфовый участок, найдем

$$y_2 = Y_2 \cos(k_2 l - \varphi_2') - d Y_2 k_2 \sin(k_2 l - \varphi_2') , \tag{4.64}$$

$$y_2' = Y_2 k_2 \sin(k_2 l - \varphi_2') . \tag{4.65}$$

Из сравнения уравнений (4.62)–(4.65) после несложных преобразований при $k_1 a_1' > 1$ получим

$$\frac{1}{k_1 l} \mathrm{cth}(k_1 l + \varphi_1') = \frac{1}{k_2 l} \mathrm{ctg}(k_2 l - \varphi_2') - \frac{d}{l} . \tag{4.66}$$

Для случая при $k_1 a_1' < 1$ имеем аналогичные уравнения

$$\frac{1}{k_1 l} \mathrm{th}(k_1 l + \xi_1') = \frac{1}{k_2 l} \mathrm{ctg}(k_2 l - \varphi_2') - \frac{d}{l} . \tag{4.67}$$

В связи с тем, что φ_1', ξ_1' и φ_2' являются функциями возбуждения линз k_1 и k_2 согласно выражениям (4.59)–(4.61), то уравнения (4.66) и (4.67) дают связь между k_1 и k_2.

В ФД-плоскости справедливы те же самые рассуждения, осуществляя которые можно прийти к аналогичным (4.54)–(4.66) формулам.

Условия фокусировки (4.66) и (4.67) для ДФ-плоскости можно упростить и представить в более наглядном виде (см. рис. 4.4, *а*). Действительно, уравнения (4.66) и (4.67) можно представить в следующем виде:

$$x_1' = x_2' - d \tag{4.68}$$

для ДФ-плоскости,

$$x_2 = x_1 - d \tag{4.69}$$

для ФД-плоскости.

Здесь x_1', x_2', x_1 и x_2 являются функциями $(k_{1,2} l)$ при заданных относительных параметрах (к длинам линз) a_1, a_1', b_2, b_2'.

Решение уравнений (4.68) и (4.69) находим графическим путем. Действительно, если построить четыре функции в зависимости от (kl), а именно:

$$y_1 = x_1'(kl)\,, \tag{4.70}$$

$$y_2 = x_2'(kl) - d\,, \tag{4.71}$$

$$y_3 = x_1(kl) - d\,, \tag{4.72}$$

$$y_4 = x_2(kl)\,, \tag{4.73}$$

то на этом общем графике (рис. 4.5) можно построить прямоугольник со сторонами, параллельными осям координат. Горизонтальные стороны этого прямоугольника, параллельные оси абсцисс, своими концами должны лежать на кривых $y_1 - y_4$.

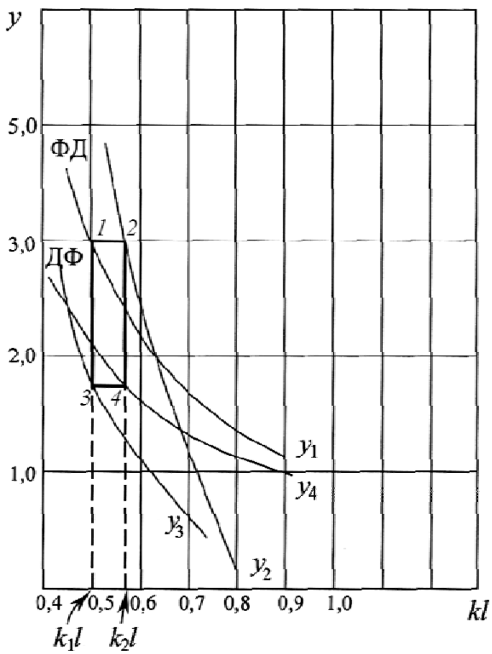


Рис. 4.5. Графическое определение возбуждающих сил

Величины kl, соответствующие вертикальным сторонам прямоугольника, лежащим концами на кривых y_1, y_3 и y_3, y_4, дают значения возбуждающих сил первой и второй линз.

На отрезке между точками *3* и *4* (см. рис. 4.3) фазовый эллипс вновь занимает каноническое положение. Необходимо подчеркнуть, что все показанные на этом рисунке фазовые эллипсы имеют один и тот же центр, лежащий в начале координат.

4.2. Триплеты

Рассмотрим систему квадруполей, состоящую из трех линз. В ней, как и в дублете, может быть осуществлена стигматическая и астигматическая фокусировки. Эта система по сравнению с дублетом обладает большей свободой в выборе параметров. При стигматической фокусировке задание геометрических параметров дублета однозначно определяет фокусные расстояния, возбуждение и увеличение линз. В триплете такое ограничение не наблюдается, так как за счет варьирования параметров всех трех линз можно изменять коэффициент увеличения.

Симметричные триплеты. Триплет – это система магнитных квадрупольных линз, состоящая из последовательности трех соосных квадруполей. В общем случае квадруполи имеют различную оптическую силу. Однако чаще всего используются симметричные триплеты (рис. 4.6). Симметризация триплетов может быть осуществлена двумя путями: первый состоит в том, что внешние линзы равной силы размещены на одинаковых расстояниях от центральной линзы, имеющей длину в два раза большую, а второй – в том, что вся система триплетов состоит из трех одинаковых по длине квадруполей, но поле центрального вдвое выше. В обоих случаях направление полей в квадруполях чередуется.

В приближении тонких линз составим матрицу преобразования триплета, которая позволит определить главные плоскости, фокусные расстояния и коэффициент увеличения. Первоначально составим матрицу для плоскости, в которой внешние линзы дефокусируют, а центральная – фокусирует частицы, т.е. для плоскости ДФД. Эту матрицу получим в результате перемножения пяти матриц

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ P_1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -P_2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ P_1 & 1 \end{pmatrix}, \tag{4.74}$$

где $P_1 = \dfrac{1}{F_1}$; $P_2 = \dfrac{1}{F_2}$; d – расстояние между соседними линзами.

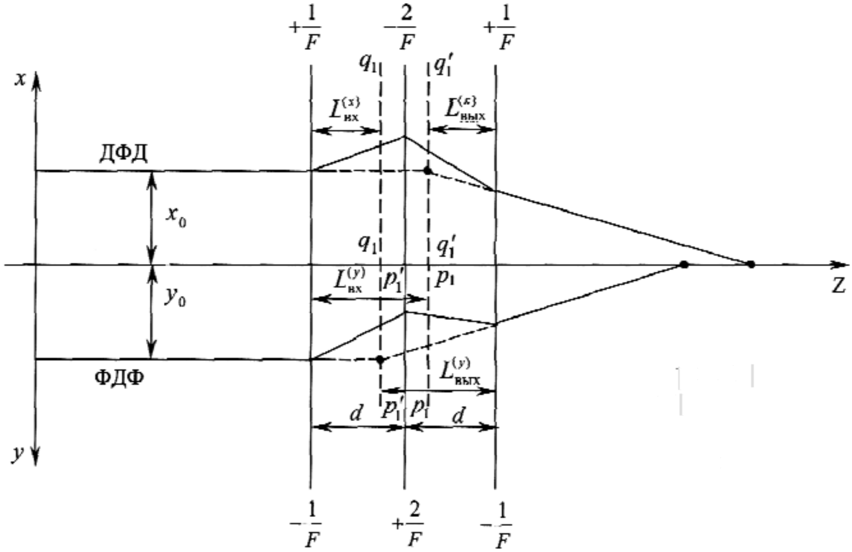


Рис. 4.6. Симметричный триплет

При перемножении матриц в (4.74) можно использовать свойства симметрии, перемножив первые две матрицы. Перемножение двух последних можно опустить, получив выражение для матрицы из первого выражения с переменой мест элементов по главной диагонали. Знаки перед элементами P_1 и P_2 показывают, что крайние элементы являются рассеивающими, а центральный – собирающим.

Из (4.74) найдем матрицу триплета

$$\begin{pmatrix} 1 + 2dP_1 - dP_2 - d^2 P_1 P_2 & 2d - d^2 P_2 \\ 2P_1 + 2dP_1^2 - 2dP_1 P_2 - d^2 P_1^2 P_2 - P_2 & 1 + 2dP_1 - d^2 P_1 P_2 - dP_2 \end{pmatrix}. \quad (4.75)$$

Оказалось, что триплет может быть представлен как тонкая линза с оптической силой $P_{\text{дфд}}$, окруженная дрейфовыми участками протяженностью S каждый. Матрица такой системы будет иметь следующий вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & S \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ P_{\text{дфд}} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & S \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + SP_{\text{дфд}} & 2S + S^2 P_{\text{дфд}} \\ P_{\text{дфд}} & 1 + SP_{\text{дфд}} \end{pmatrix}. \quad (4.76)$$

Поскольку (4.75) и (4.76) являются матрицами симметричных систем, элементы по главной диагонали одинаковы.

Выразим параметры S и $P_{\text{дфд}}$ через параметры составляющих триплет линз. Сравнивая элементы матриц (4.75) и (4.76), получим:

$$1+SP_{\text{дфд}}=1+2dP_1-dP_2-d^2P_1P_2; \tag{4.77}$$

$$P_{\text{дфд}}=2P_1+2dP_1^2-2dP_1P_2-d^2P_1^2P_2-P_2. \tag{4.78}$$

Оказалось, что параметры $P_{\text{дфд}}$ и S можно представить простыми выражениями. Для этого преобразуем уравнение (4.78), умножая его на d. В результате найдем

$$dP_{\text{дфд}}=-\left(1+dP_1\right)\left[2-\left(1+dP_1\right)\left(2-dP_2\right)\right]. \tag{4.79}$$

Из (4.77) с учетом (4.79) имеем

$$S=\frac{\left(2dP_1-dP_2-d^2P_1P_2\right)d}{-\left(1+dP_1\right)\left[2-\left(1+dP_1\right)\left(2-dP_2\right)\right]}=\frac{d}{1+dP_1}. \tag{4.80}$$

Следует отметить, что в выражение (4.80) не входит оптическая сила средней линзы. Это означает, что протяженность окаймляющих среднюю линзу в (4.76) участков зависит только от силы крайних линз. Кроме того, при малых значениях dP_1, т.е.

$$dP_1<<1, \tag{4.81}$$

величина S стремится к d и не зависит от оптических сил P_1 и P_2. Таким образом, при выполнении условия (4.81) симметричный триплет в плоскости ДФД может быть представлен эквивалентной тонкой линзой с оптической силой $P_{\text{дфд}}$ и дрейфовыми участками, равными расстоянию между крайними и центральным квадруполями. При этом протяженность дрейфовых участков, когда расстояние между квадруполями значительно меньше фокусных расстояний крайних линз, остается постоянной величиной. Аналогичное утверждение справедливо и для плоскости ФДФ. Действительно, в этой плоскости выражения для оптической силы и дрейфовых участков можно получить, если изменить знаки перед P_1 и P_2 на обратные. В результате получим

$$dP_{\text{дфд}}=-(1-dP_1)\left[2-(1-dP_1)(2+dP_2)\right], \tag{4.82}$$

$$S_1 = \frac{d}{1 - dP_1} \ . \tag{4.83}$$

При соблюдении условия (4.81) $S_1 = d$.

На практике бывает необходимо обеспечить равенство оптических сил в обеих плоскостях триплета. Сравнивая (4.79) и (4.81), находим связь между оптическими силами центральной и крайних линз:

$$P_2 = \frac{2P_1}{1 + (dP_1)^2} \, . \tag{4.84}$$

Учитывая (4.81), получим

$$P_2 \approx 2P_1 \, . \tag{4.85}$$

Это условие соответствует триплету, в котором оптическая сила крайних квадруполей вдвое меньше силы центральной линзы. Одинаковая в двух ортогональных плоскостях оптическая сила триплета равна

$$P_{\text{дфд}} = P_{\text{фдф}} = P = -2P_1(dP_1)\frac{1 - (dP_1)}{1 + (dP_1)^2} \, . \tag{4.86}$$

При условии (4.81)

$$P \approx -2P_1(dP_1) \, . \tag{4.87}$$

Знак минус здесь указывает на фокусирующее воздействие триплета в обеих плоскостях.

Может возникнуть вопрос о переопределенности системы уравнений при сравнении матриц (4.72) и (4.73), так как не было проведено сравнение элементов T_{12}. Несложные преобразования позволяют убедиться в их тождественности с учетом (4.80) и (4.83).

Найдем расположение главных плоскостей в рассматриваемом симметричном триплете. В плоскости ДФД (x) выходная плоскость лежит от выхода на расстоянии, равном

$$L_{\text{вых}}^{(x)} = -\frac{1}{P_{\text{дфд}}}(1 - T_{11}) = -\frac{1}{P_{\text{дфд}}}(-2dP_1 + dP_2 + d^2 P_1 P_2) \, , \tag{4.88}$$

с учетом (4.79) найдем, что

$$L_{\text{вых}}^{(x)} = -\frac{1}{P_{\text{дфд}}}(-2dP_1 + d^2 P_1 P_2 + dP_2) = \frac{d}{1 + dP_1} \, . \tag{4.89}$$

Входная плоскость лежит от входа на расстоянии

$$L_{\text{вх}}^{(x)} = -\frac{1}{P_{\text{дфд}}}(1 - T_{22}) = \frac{d}{1 + dP_1}. \tag{4.90}$$

Расположение главных плоскостей в плоскости ФДФ установить не представляет труда, а именно: перед P_1 необходимо изменить знак, на обратный. В результате получим:

$$L_{\text{вых}}^{(y)} = L_{\text{вх}}^{(y)} = \frac{d}{1 - dP_1}. \tag{4.91}$$

Из выражений (4.88)–(4.91) следует, что в ортогональных плоскостях относительно середины линзы главные плоскости занимают противоположное положение. Действительно, в плоскости ДФД выходная плоскость лежит ближе к выходу триплета, а в плоскости ФДФ – ближе к его входу. Однако по абсолютной величине расстояния от средней плоскости до главных плоскостей приблизительно равны, что нетрудно показать с помощью (4.90) и (4.91). В приближении (4.78) главные плоскости триплета совпадают с серединой системы.

Проводя сравнение симметричного триплета с одиночным квадруполем, нетрудно установить, что расположение главных плоскостей триплета в ДФД плоскости совпадает с расположением главных плоскостей квадруполя в Д-плоскости, а расположение главных плоскостей триплета в ФДФ-плоскости – с расположением последних в Ф-плоскости. При отсчете расположения главных плоскостей от середины триплета получим следующие выражения для параметров Δ.

В плоскости x (ДФД) при выполнении условия (4.78) имеем

$$\Delta_{\text{вых}}^{(x)} = L_{\text{вых}}^{(x)} - d = \Delta_{\text{вх}}^{(x)} = L_{\text{вх}}^{(x)} - d \approx -dP_1,$$

а в плоскости (ФДФ)

$$\Delta_{\text{вых}}^{(y)} = L_{\text{вых}}^{(y)} - d = \Delta_{\text{вх}}^{(y)} = L_{\text{вх}}^{(y)} - d \approx dP_1.$$

При условии (4.78) можно считать, что фокусировка параллельного пучка в симметричном триплете будет почти стигматической.

Сравнение дублетов и триплетов. При сравнении тех или иных систем руководствуются, прежде всего, тем, для каких целей предназначена система. По ним судят о достоинствах и недостатках системы, используемой для транспортировки. Действительно, если начать сооружать канал для пучков определенных частиц и заданного импульса, т.е. канал, в котором элементы будут эксплуатироваться при фиксированном возбуждении, то, безусловно, в таком канале удобнее применять дублеты, не говоря уже о квадруполях, если это возможно. Если же в процессе работы канала придется регулировать его параметры, то лучше выбрать триплет, как систему с большим числом степеней свободы.

Очевидно, что по сравнению с дублетом триплет является более сложной и менее экономичной системой квадруполей. Расчет триплета носит более сложный характер, чем дублета. Как и дублет, триплет в общем случае есть астигматическая система. Чтобы осуществить стигматическую фокусировку, необходимо подобрать параметры триплета в определенном соотношении. Методика подбора схожа с методикой для дублета. Основное неудобство дублета заключается в том, что изменение параметров в одной плоскости влечет за собой изменение параметров в другой перпендикулярной плоскости. Сюда можно отнести изменение положения главных плоскостей.

Главные плоскости в дублете расположены по разные стороны от дублета на достаточном расстоянии: в ФД-плоскости они расположены ближе к источнику, а в ДФ-плоскости – ближе к изображению. В триплете главные плоскости размещены вблизи середины центрального квадруполя на малом расстоянии. Это еще раз говорит о том, что имеется возможность представить триплет тонкой линзой.

С другой стороны, предположим, что дублет представлен тонкой линзой, тогда положение тонкой линзы в двух взаимно-перпендикулярных направлениях будет различно, и, таким образом, изменение возбуждения повлечет за собой изменение не только фокусирующей силы линзы, но и положения ее главных плоскостей в пространстве (см. рис. 4.2) согласно выражениям (4.50) и (4.51).

Это представляет неудобство при работе с пучками, имеющими различное значение импульса. Если же в симметричном триплете выполняется и условие (4.78), то положение главных плоскостей этой линзы будет зафиксировано независимо от возбуждения.

Дополнительно можно отметить, что если в дублете коэффициенты увеличения в ортогональных плоскостях существенно различались, то в симметричном триплете наоборот, коэффициенты увеличения в плоскостях ДФД и ФДФ в общем случае близки по величине. В симметричном триплете подбор фокусирующих сил в ортогональных плоскостях может осуществляться независимо.

4.3. Квадруплеты (квартеты)

Следующая по сложности система из МКЛ, которая будет рассмотрена, состоит из четырех линз. Такая система называется квадруплетом или квартетом. Как и среди триплетов, наибольшее распространение получили симметричные квадруплеты. Симметричный квадруплет преобразует пучок без промежуточных изображений. Схема симметричного относительно центральной плоскости квартета в приближении тонких линз показана на рис. 4.7.

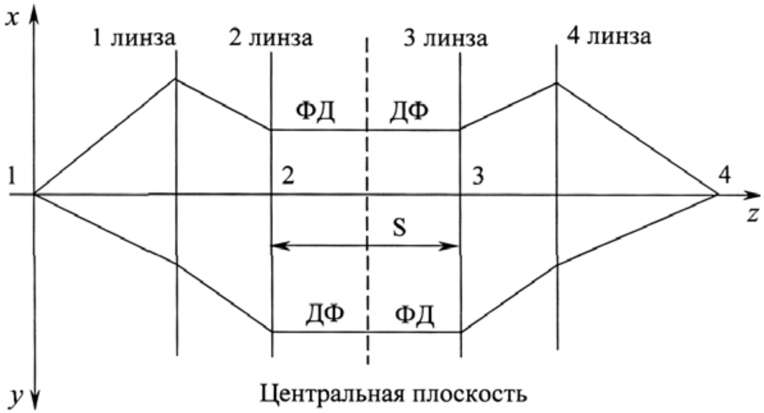


Рис. 4.7. Траектория частиц в симметричном квартете

В квадруплете имеются две пары линз (два дублета). Первая пара преобразует расходящийся пучок в параллельный, а вторая наоборот: параллельный пучок в сходящийся. Направление поля в квадруполях квартета попарно чередуется. Следует отметить, что показанное на рис. 4.7 чередование квадруполей не является единственно возможным. Можно представить квадруплет с чередующимися квадруполями. Правда, в этом случае нарушится симметрия системы. Из рисунка видно, что траектории частиц в ортогональных плоскостях симметричны относительно центральной плоскости. Расстояние между дублетами квадруплета равно S. Между второй и третьей линзами пучок параллелен оси системы. Если сблизить дублеты до соприкосновения средних линз, то будет образована система, аналогичная симметричному триплету.

Вопрос, где могут быть применены симметричные квартеты? Симметричные квартеты бывают очень удобны, если необходимо передать изображение на большое расстояние. Подобная необходимость может возникнуть, скажем, при работе с пучком вторичных частиц, получаемых на мишени, помещенной внутри ускорителя. Крупногабаритную регистрирующую аппаратуру разместить вблизи ускорителя часто бывает трудно, поэтому прибегают к услугам квартетов, которые переносят пучок из одной точки в другую, расположенную вдали от ускорителя.

Симметричные квадруплеты могут работать самостоятельно или входить в транспортирующий канал как составные части, например, в транспортирующий канал сепаратора. Так, на рис. 4.7 изображена пара дублетов, однако может быть взята пара триплетов.

Остановимся на расчете симметричного квадруплета, предназначенного для переноса пучка из одной точки в другую. Первый дублет, обеспечивающий преобразование точечного расходящегося от плоскости 1 пучка в параллельный, начинающийся от плоскости 2, будем описывать матрицей

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix}. \qquad (4.92)$$

Свободное пространство между дублетами длиной S (между плоскостями 2 и 3) будет описано матрицей дрейфового участка. Участок между плоскостями 3 и 4 будем описывать матрицей (2.42)

$$\beta = \begin{pmatrix} T_{22} & T_{12} \\ T_{21} & T_{11} \end{pmatrix},$$

в которой из-за симметрии системы элементы по главной диагонали, переставлены местами. одновременно следует наложить условие $T_{22} = 0$, при выполнении которого расходящийся пучок будет преобразован в параллельный. Общая матрица квадруплета

$$P = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix} = \beta S T =$$
$$= \begin{pmatrix} T_{11}T_{22} + T_{12}T_{21}S & 2T_{22}T_{12} + S^2T_{22}^2 \\ 2T_{11}T_{21} + T_{21}^2 S & T_{11}T_{22} + T_{12}T_{21} + T_{22}T_{21}S \end{pmatrix}. \tag{4.93}$$

Из (4.93) видно, что при $S = 0$ получим матрицу для симметричной системы П, приведенную в (2.43). При условиях $T_{22} = 0$ и $-T_{12}T_{21} = 1$, последнее из которых вытекает из равенства единице определителя матрицы (4.92), получим

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2T_{11}T_{21} + T_{21}^2 S & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \dfrac{S}{T_{21}^2} - \dfrac{2T_{11}}{T_{12}} & -1 \end{pmatrix}.$$

Необходимо отметить, что матрицы T, β и P имеют различный вид в двух ортогональных плоскостях. Коэффициент увеличения квадруплета, равный элементу P_{11}, есть -1. До сих пор предполагалось, что отрезок S может быть выбран произвольно. Однако это справедливо для точечного источника. В действительности источник практически всегда имеет конечные размеры и не является точечным. Поэтому на выходе квартета угловая расходимость пучка будет отлична от угловой расходимости на входе. На самом деле, угловая компонента выходного вектора равна

$$x' = \left(\frac{S}{T_{12}^2} - \frac{2T_{11}}{T_{12}} \right) x_0 - x_0'. \tag{4.94}$$

Если же выбрать величину S из условия $P_{21} = 0$, а именно:

$$S = 2T_{11}T_{12} = -\frac{2T_{11}}{T_{21}}, \tag{4.95}$$

то матрица P будет иметь вид

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{4.96}$$

а угловая расходимость по абсолютной величине на входе и выходе будет одинакова. С помощью матрицы (4.96) пучок испытывает так называемое «антитождественное» преобразование, когда вектор $\begin{pmatrix} x_0 \\ x_0' \end{pmatrix}$ превращается в вектор $\begin{pmatrix} -x_0 \\ -x_0' \end{pmatrix}$.

Проведенное рассмотрение симметричного квадруплета не позволяет определить фокусное расстояние и расположение главных плоскостей. Для того, чтобы найти эти параметры, перемножим в соответствующим порядке матрицы (в приближении тонких линз) квадруполей, образующих симметричный квадруплет, и дрейфовых промежутков между ними.

В результате перемножения в плоскости ДФФД получим в случае одинаковых квадруполей следующую матрицу для симметричного квадруплета

$$\begin{pmatrix} 1-2d^2P^2+d^3P^3 & 2d-3d^2P+d^3P^2 \\ -2dP^2-2d^2P^3+d^3P^4 & 1-2d^2P^2+d^3P^3 \end{pmatrix}, \tag{4.97}$$

откуда найдем, что в этой плоскости фокусное расстояние равно

$$\frac{1}{dP^2\left(2+2dP-d^2P^2\right)}. \tag{4.98}$$

Главные плоскости лежат от краев поверхности на следующих расстояниях

$$L_{\text{вх}} = L_{\text{вых}} = d\,\frac{\left(2-dP\right)}{2+2dP-d^2P^2}\,. \tag{4.99}$$

При условии, когда $dP \ll 1$, выражения (4.98) и (4.99) принимают более простой вид: $L_{\text{вх}} = L_{\text{вых}} \approx d$.

4.4. Периодические системы квадрупольных линз

До сих пор рассмотренные системы могут быть интерпретированы как частные случаи более общей периодической системы квадрупольных линз.

При изучении периодической системы квадрупольных линз могут быть выяснены несколько вопросов, например: об устойчивости движения частиц в данной системе вообще; определение устойчивости в зависимости от сдвига плоскостей симметрии (или асимметрии) соседних квадруполей и т.д.

Определение устойчивости не является абстрактным, так как имеет важное практическое значение. Действительно, при рассмотрении дублетов, триплетов и квадруплетов полагалось, что плоскости соседних квадруполей сдвинуты на 90º. При этом молчаливо утверждалось, что ортогональное расположение плоскостей соседних квадруполей обеспечивает наилучший вариант по устойчивости движения частиц. Вместе с тем это предположение требует доказательства. Данному вопросу будет посвящен этот параграф.

Однако, прежде чем перейти к рассмотрению устойчивости движения частиц в периодической системе квадрупольных линз, сделаем несколько замечаний. Периодические системы квадрупольных линз, как правило, используются для транспортировки пучков частиц на значительные расстояния. В таких системах основная задача состоит не в получении промежуточных изображений, а в стремлении удержать пучок внутри области с заданным диаметром, определяемым размерами ионопровода.

Задача о движении частиц в периодической системе квадрупольных линз аналогична задаче об устойчивости движения в периодической системе ускорителя. Следовательно, как и в ускорителях, свойства периодической системы из квадрупольных линз можно изучить с помощью матрицы, составленной для одного периода. Как и ранее, квадруполи будут рассмотрены в приближении тонких линз.

На рис. 4.8 показана периодическая система одинаковых квадрупольных линз Q с оптической силой $P = 1/F$, расположенных на расстоянии d друг от друга. Плоскости соседних квадруполей повернуты на угол θ, который может изменяться от очень малого значения, соответствующего так называемой спиральной квадрупольной линзе, до 90º. Выбор $\theta > 90°$ ценности не представляет, так как будет повторять встречающиеся случаи при $\theta < 90°$. Анализ устойчивости будем проводить одновременно для движения в двух ортогональных плоскостях x и y неподвижной декартовой системы координат.

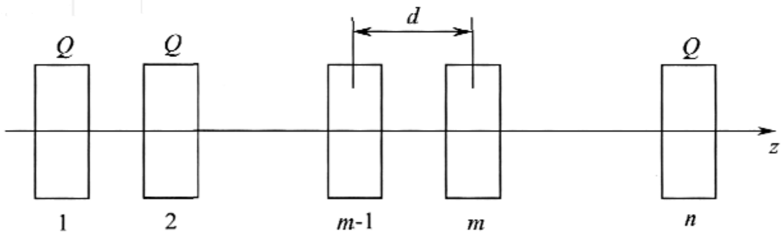


Рис. 4.8. Периодическая структура квадрупольных линз

При этом будет использована другая подвижная (или собственная) система координат (σ, q, z), связанная с квадрупольными линзами. Обе координатные системы имеют одинаковую ось z. Для преобразования вектора $\begin{pmatrix} x \\ x' \\ y \\ y' \end{pmatrix}$ матрица дрейфового участка (S), одинаковая в обеих системах координат, имеет следующий вид:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & d & & \\ 0 & 1 & \multicolumn{2}{c}{0} \\ & & 1 & d \\ \multicolumn{2}{c}{0} & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (4.100)$$

Для квадрупольной линзы в собственной системе координат матрица перехода есть

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & \\ -P & 1 & \multicolumn{2}{c}{0} \\ & & 1 & 0 \\ \multicolumn{2}{c}{0} & P & 1 \end{pmatrix}. \qquad (4.101)$$

Запись матриц (4.100) и (4.101) не вызывает затруднений, так как они были рассмотрены ранее. Остается последний вопрос. Каким образом отразить в матричной форме поворот осей в соседних квадруполях на угол θ? Для этого воспользуемся формулами для преобразования координат точки при повороте осей. Пусть оси квадруполя $m - 1$ (см. рис. 4.8) совпадают с неподвижной системой координат, а оси квадруполя m повернуты относительно их на угол θ. Тогда идентично расположенная относительно полюсов квадруполя точка будет иметь следующие координаты (σ, q), выраженные через координаты неподвижной системы:

$$\left.\begin{aligned} \sigma &= x\cos\theta + y\sin\theta, \\ q &= -x\sin\theta + y\cos\theta. \end{aligned}\right\} \tag{4.102}$$

Беря производные по z из (4.102), находим

$$\left.\begin{aligned} \sigma' &= x'\cos\theta + y'\sin\theta, \\ q' &= -x'\sin\theta + y'\cos\theta. \end{aligned}\right\} \tag{4.103}$$

Выразим вектор $\begin{pmatrix} \sigma \\ \sigma' \\ q \\ q' \end{pmatrix}$ через вектор $\begin{pmatrix} x \\ x' \\ y \\ y' \end{pmatrix}$, объединив (4.102) и (4.103). В результате получим

$$\begin{pmatrix} \sigma \\ \sigma' \\ q \\ q' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x' \\ y \\ y' \end{pmatrix}. \tag{4.104}$$

Для простоты записи обозначим $C = \cos\theta$ и $S = \sin\theta$. Вместо (4.104) получим

$$\begin{pmatrix} \sigma \\ \sigma' \\ q \\ q' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & 0 & s & 0 \\ 0 & c & 0 & s \\ -s & 0 & c & 0 \\ 0 & -s & 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x' \\ y \\ y' \end{pmatrix} = (R) \begin{pmatrix} x \\ x' \\ y \\ y' \end{pmatrix}. \tag{4.105}$$

Матрица перехода для структурного элемента в собственной системе координат, простирающегося от начала одного квадруполя до начала другого, равна произведению трех матриц:

$$\Pi = RST. \tag{4.106}$$

Если периодическая система состоит из n структурных элементов, то ее матрица перехода будет равна Π^n. Перемножая матрицы (4.105), (4.100) и (4.101), получим

$$\Pi = \begin{pmatrix} c(1-dP) & cd & s(1+dP) & sd \\ -cP & c & sP & s \\ -s(1-dP) & -sd & c(1+dP) & cd \\ sP & -s & cP & c \end{pmatrix}. \qquad (4.107)$$

Для анализа устойчивости движения частиц в периодической системе квадрупольных линз достаточно исследовать матрицу (П) (4.107). Составим характеристический определитель

$$\Delta = \det(\mathit{\Pi} - \lambda I) = \begin{pmatrix} c(1-dP)-\lambda & cd & s(1+dP) & sd \\ -cP & c-\lambda & sP & s \\ -s(1-dP) & -sd & c(1+dP)-\lambda & cd \\ sP & -s & cP & c-\lambda \end{pmatrix}, \qquad (4.108)$$

где I – единичная матрица, λ – собственные числа, и приравняем его нулю, что соответствует нетривиальному вектору $\begin{pmatrix} x \\ x' \\ y \\ y' \end{pmatrix}$. В результате приходим к уравнению

$$\lambda^4 - 4c\lambda^3 + \left[2 + 4c^2 - (dP)^2\right]\lambda^2 - 4c\lambda + 1 = 0. \qquad (4.109)$$

Если корни уравнения (4.109) будут чисто мнимыми:

$$\lambda_{1,2} = e^{\pm j\varphi}, \quad \lambda_{3,4} = e^{\pm j\psi}, \qquad (4.110)$$

где φ и ψ являются действительными величинами, то движение заряженной частицы в периодической системе квадрупольных линз будет устойчиво. Величины φ и ψ найдем из сопоставления уравнения (4.109) и вновь составленного уравнения:

$$(\lambda - e^{j\varphi})(\lambda - e^{-j\varphi})(\lambda - e^{+j\psi})(\lambda - e^{-j\psi}) = 0, \qquad (4.111)$$

которое после преобразования принимает следующий вид

$$\lambda^4 - 2(\cos\varphi + \cos\psi)\lambda^3 + 2\lambda^2(1 + 2\cos\varphi\cos\psi) - \\ -2\lambda(\cos\varphi + \cos\psi) + 1 = 0. \qquad (4.112)$$

Действительно, сравнение коэффициентов при одинаковых степенях в уравнениях (4.109) и (4.112) приводит к системе двух уравнений с двумя неизвестными (коэффициенты при нечетных степенях одинаковы как в одном, так и в другом уравнениях)

$$2c = \cos\varphi + \cos\psi,$$

$$4c^2 - d^2P^2 = 4\cos\varphi\cos\psi.$$

Решая эту систему, находим, что

$$\cos\varphi = c + \frac{dP}{2}, \quad \cos\psi = c - \frac{dP}{2}.$$

Движение частиц будет устойчивым, если будет выполнено условие

$$|\cos\theta| + \frac{dP}{2} < 1. \qquad (4.113)$$

Из уравнения (4.113) для действительных значений φ и ψ имеем следующие неравенства

$$-1 < c + \frac{dP}{2} < 1, \quad -1 < c - \frac{dP}{2} < 1,$$

преобразуя которые, найдем

$$-1 - \frac{dP}{2} < c < 1 - \frac{dP}{2}, \quad -1 + \frac{dP}{2} < c < 1 + \frac{dP}{2}.$$

Диапазон изменения параметра c может быть уменьшен до следующих границ $-\left(1 - \frac{dP}{2}\right) < c < 1 - \frac{dP}{2}$, откуда следует условие (4.113).

На рис. 4.9 изображена область устойчивости (заштрихованная) на плоскости dP и θ. Там же для сравнения показана функция $|\cos\theta|$. Как видно из рисунка, наибольшая область устойчивости в периодических системах квадрупольных линз достигается при углах $\theta = \frac{\pi}{2}$, соответствующих ортогональному расположению плоскостей симметрии (или асимметрии) соседних квадруполей. Если

$\theta = \frac{\pi}{2}$, то при фиксированном значении оптической силы P величина расстояния между линзами будет наибольшей. В связи с тем, что выражение (4.109) было получено без ограничений на число квадруполей, данный вывод относится к любому числу квадруполей.

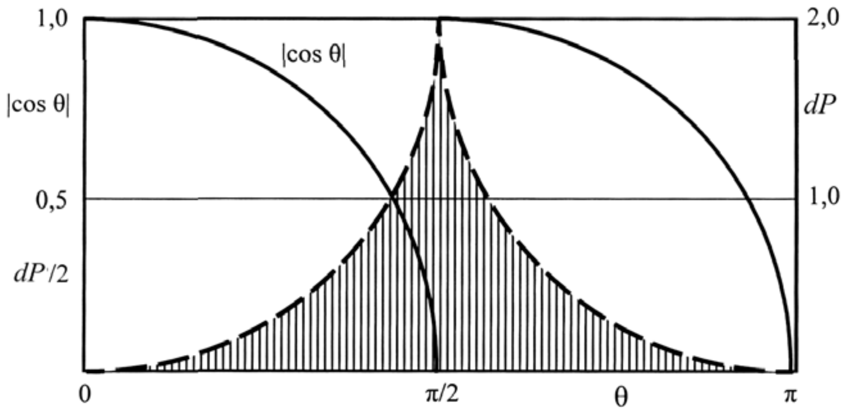


Рис. 4.9. Область устойчивости периодической системы квадрупольных линз

5. ЭЛЕМЕНТЫ СИСТЕМ ТРАНСПОРТИРОВКИ ЧАСТИЦ ВЫСОКОЙ ЭНЕРГИИ. ОТКЛОНЯЮЩИЕ И АНАЛИЗИРУЮЩИЕ МАГНИТЫ

К другим элементам транспортирующих каналов, которые могут быть использованы также самостоятельно, следует отнести магниты.

При работе с пучками заряженных частиц, в том числе и высокоэнергетических, практически всегда бывает необходимо производить отклонение и анализ их по импульсу. Отклонение пучка вызвано требованием «развести» его по различным регистрирующим приборам и мишеням, которые чаще всего не могут быть размещены вдоль одной оси из-за того, что не являются прозрачными. Анализ частиц по импульсам производят всегда, когда необходимо выделить частицы с фиксированным импульсом. Проведение анализа особенно важно, если приходится работать со вторичными частицами, образованными на мишенях. В этом случае отклоняющий магнит позволяет выделить частицы с заданными параметрами траектории и значением импульса. Из-за конечности размеров щели выделяются пучки с некоторым разбросом по импульсу.

Отклонение и анализ пучков возможны в том случае, если они проходят через поперечные магнитные поля. При этом осевая траектория частиц искривлена. Отклонение пучков в магнитах можно совместить с фокусировкой, если использовать неоднородное поле с показателем n. В другом случае можно применять и однородное поле с краевой фокусировкой. Совмещение этих функций бывает необходимо тогда, когда приходится работать с пучком нестабильных частиц. Такое совмещение позволяет сократить длину магнитной системы и тем самым уменьшить потери частиц из-за распада. С другой стороны, отклоняющие и фокусирующие функции можно разделить, пользуясь в каждом случае наиболее подходящими магнитными системами. Например, для фокусировки можно взять более эффективную систему магнитных квадрупольных линз, а для отклонения – магниты с однородным полем. Как и при рассмотрении магнитных квадрупольных линз, представляет интерес определить оптические свойства отклоняющих и анализирующих магнитов. Оптические свойства будут рассмотрены с помощью матричного формализма. Поэтому следует изучить движение заряженных частиц в произвольном магнитном поле.

5.1. Движение заряженных частиц в магнитном поле с плоскостью симметрии

Рассмотрим магнитные поля с плоскостью симметрии, которая совпадает с медианной плоскостью. Осевые траектории лежат в плоскости симметрии. Ввиду того, что мы будем рассматривать малые отклонения от осевой траектории, удобно использовать так называемую натуральную систему координат, связанную с сопровождающим трехгранником орбиты, в качестве ортов которого выбраны главная внешняя нормаль $\vec{x}_0$, касательная $\vec{S}_0$ и бинормаль

$\vec{z}_0$ (рис. 5.1). Обозначим через ρ радиус окружности, касательной к осевой траектории, а через $\vec{R}$ – радиус-вектор частицы, движущейся по осевой траектории.

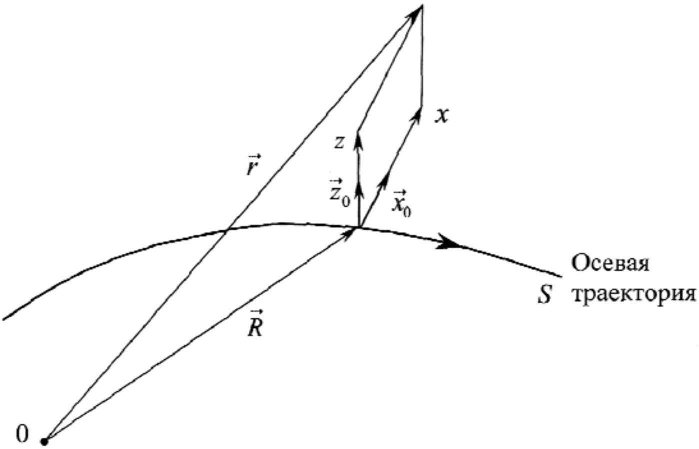


Рис. 5.1. Натуральная система координат

Производные по времени от движущихся ортов криволинейной системы координат вытекают из хорошо известных формул Сере–Френе:

$$\dot{\vec{R}} = \upsilon_S \vec{S}_0 \cong \upsilon_0 \vec{S}_0 , \tag{5.1}$$

где υ_0 – скорость частиц, движущихся вдоль осевой траектории, и

$$\dot{\vec{S}}_0 = -\frac{\upsilon_0}{\rho}\vec{x}_0 ; \tag{5.2}$$

$$\dot{\vec{x}}_0 = \frac{\upsilon_0}{\rho}\vec{S}_0 ; \tag{5.3}$$

$$\dot{\vec{z}}_0 = 0 , \tag{5.4}$$

где $\upsilon_S \approx \upsilon_0 = \dfrac{ds}{dt}$, а кручение отсутствует, так как осевые траектории лежат в плоскости. Здесь следует отметить, что в формулы Сере–Френе входят производные по длине дуги. Поэтому с помощью введения скорости осуществлен переход к производным во времени.

Радиус вектор производной (не осевой) частицы равен $\vec{r}$

$$\vec{r} = x\vec{x}_0 + z\vec{z}_0 + \vec{R}\,. \qquad (5.5)$$

Скорость этой частицы равна

$$\vec{V} = \dot{\vec{r}} = \dot{z}\vec{z}_0 + z\dot{\vec{z}}_0 + \dot{\vec{R}} + \dot{x}\vec{x}_0 + x\dot{\vec{x}}_0\,. \qquad (5.6)$$

С учетом (5.1), (5.3) и (5.4) вместо (5.6) получим

$$\vec{V} = \dot{z}\vec{z}_0 + x\dot{\vec{x}}_0 + \dot{\vec{S}}\upsilon_0\left(1+\frac{x}{\rho}\right), \qquad (5.7)$$

откуда видно, что по осевой траектории частицы движутся со скоростью υ_0. Определив

$$\frac{d}{dt}(\dot{z}\vec{z}_0) = \ddot{z}\vec{z}_0 + \dot{z}\dot{\vec{z}}_0 = \ddot{z}\vec{z}_0\,;$$

$$\frac{d}{dt}(\dot{x}\vec{x}_0) = \ddot{x}\vec{x}_0 + x\vec{x}_0 = \ddot{x}\vec{x}_0 + \dot{x}\frac{\upsilon_0}{\rho}\vec{S}_0\,;$$

$$\frac{d}{dt}\left(\upsilon_0\left(1+\frac{x}{\rho}\right)\vec{S}_0\right) = \left[\dot{\upsilon}_0\left(1+\frac{x}{\rho}\right) + \upsilon_0\frac{\dot{x}}{\rho}\right]\vec{S}_0 - \frac{\upsilon_0^2}{\rho}\left(1+\frac{x}{\rho}\right)\vec{x}_0\,,$$

найдем

$$\dot{\vec{V}} = \ddot{\vec{r}} = \ddot{z}\vec{z}_0 + \left[\ddot{x} - \frac{\upsilon_0^2}{\rho}\left(1+\frac{x}{\rho}\right)\right]\vec{x}_0 + \left[2\dot{x}\frac{\upsilon_0}{\rho} + \dot{\upsilon}_0\left(1+\frac{x}{\rho}\right)\right]\vec{S}_0\,. \qquad (5.8)$$

Подставим полученные выражения в уравнение движения частицы (при $\vec{E}=0,\ \vec{B}_S=0$)

$$m\frac{d\vec{V}}{dt} = e\left[\vec{E}\vec{B}\right]. \qquad (5.9)$$

В результате получим

$$m\left\{\ddot{z}\vec{z}_0 + \left[\ddot{x} - \frac{\upsilon_0^2}{\rho}\left(1+\frac{x}{\rho}\right)\right]\vec{x}_0 + \left[2\dot{x}\frac{\upsilon_0}{\rho} + \dot{\upsilon}_0\left(1+\frac{x}{\rho}\right)\right]\vec{S}_0\right\} =$$

$$= e\cdot\begin{vmatrix} \vec{S}_0 & \vec{x}_0 & \vec{z}_0 \\ \upsilon_0\left(1+\dfrac{x}{\rho}\right) & \dot{x} & \dot{z} \\ 0 & B_x & B_z \end{vmatrix}, \qquad (5.10)$$

где нуль в определителе означает, что поле вдоль осевой траектории отсутствует. Это справедливо в случае отсутствия полей рассеяния. Сравнивая выражения в правой и левой частях выражения при ортах $\vec{x}_0$ и $\vec{z}_0$, получим

$$\ddot{x} - \frac{\upsilon_0^2}{\rho}\left(1 + \frac{x}{\rho}\right) = -\frac{e}{m}\left[\upsilon_0\left(1 + \frac{x}{\rho}\right)B_z\right]; \tag{5.11}$$

$$\ddot{z} = \frac{e}{m}\upsilon_0\left(1 + \frac{x}{\rho}\right)B_x\,. \tag{5.12}$$

Переходя снова к дифференцированию по S, находим, что

$$\dot{x} = \upsilon_0 x'\,;\ \dot{z} = \upsilon_0 z'\,;\ \ddot{x} = \upsilon_0^2 x'' + \dot{\upsilon}_0 x'\,;\ \ddot{z} = \upsilon_0^2 z'' + \dot{\upsilon}_0 z'\,. \tag{5.13}$$

Подставляя выражения (5.13) в (5.11) и (5.12) получим

$$x'' + \frac{\dot{\upsilon}_0}{\upsilon_0^2}x' - \frac{1}{\rho}\left(1 + \frac{x}{\rho}\right) = -\frac{e}{\rho}\frac{\upsilon}{\upsilon_0}\left(1 + \frac{x}{\rho}\right)B_Z\,; \tag{5.14}$$

$$z'' + \frac{\dot{\upsilon}_0}{\upsilon_0^2}z' = \frac{e}{\rho}\frac{\upsilon}{\upsilon_0}\left(1 + \frac{x}{\rho}\right)B_x\,, \tag{5.15}$$

где υ – скорость частицы, движущейся с импульсом $p_0 + \Delta p = p$.

В линейном приближении

$$B_x = Gz;\ B_z = B_0 + Gx, \tag{5.16}$$

где

$$B_0 = B_Z\Big|_{\substack{x=0\\ z=0}}\,; \quad G = \frac{\partial B_Z}{\partial x}\Big|_{\substack{x=0\\ z=0}}\,.$$

Преобразуем уравнения (5.14) и (5.15) в линейном приближении, считая, что траектории и импульс произвольных частиц мало отличаются от тех же параметров осевой частицы. Действительно, при $\Delta p / p_0 << 1$

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p_0 + \Delta p} = \frac{1}{p_0\left(1 + \dfrac{\Delta p}{p_0}\right)} \approx \frac{1}{p_0}(1 - \delta);$$

где $\delta = \dfrac{\Delta p}{p_0}$, $\dfrac{\upsilon}{\upsilon_0} \approx 1 + \dfrac{x}{\rho}$, $\dot{\upsilon}_0 = 0$ (так как ускорение частиц отсутствует), вместо (5.14) и (5.15) имеем

$$x'' - \frac{1}{\rho} - \frac{x}{\rho^2} = -\frac{eB_0}{p_0} - \frac{eGx}{p_0} - \frac{eB_0}{p_0}\frac{2x}{\rho} + \frac{eB_0\delta}{p_0} \;; \qquad (5.17)$$

$$z'' - \frac{e}{p_0}Gz = 0 \,. \qquad (5.18)$$

Для осевой траектории ($x = 0,\ z = 0,\ \delta = 0$) получим из (5.18)

$$\frac{1}{\rho} = \frac{eB_0}{p_0} = \left(\frac{eB_Z}{p_0}\right)\Bigg|_{\substack{z=0\\x=0}} = h \,, \qquad (5.19)$$

где h – кривизна траектории. Для моноимпульсных частиц ($\delta = 0$) с учетом (5.19) имеем следующее уравнение движения частиц в горизонтальной плоскости

$$x'' + \left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{eG}{p_0}\right)x = 0 \,. \qquad (5.20)$$

Коэффициенты, входящие в уравнения (5.18) и (5.20), можно связать с показателем магнитного поля n. По определению

$$n = -\left(\frac{\rho}{B_Z}\frac{\partial B_Z}{\partial x}\right)\Bigg|_{\substack{x=0\\z=0}} = -\frac{\rho}{B_0}G \,. \qquad (5.21)$$

С помощью (5.21) определим величину $\frac{eG}{p_0}$:

$$\frac{eG}{p_0} = -\frac{e}{p_0}\frac{B_0}{\rho}n = -\frac{n}{\rho^2} \,,$$

подставив которую в (5.20) и (5.18), найдем

$$\frac{d^2x}{dS^2} + \frac{(1-n)}{\rho^2}x = 0 \,; \qquad (5.22)$$

$$\frac{d^2z}{dS^2} + \frac{n}{\rho^2}z = 0 \,. \qquad (5.23)$$

Если рассмотреть пучок, в котором частицы имеют разброс по импульсу, уравнение (5.20) при $p \neq p_0$ будет иметь следующий вид:

$$\frac{d^2x}{dS^2} + \frac{(1-n)}{\rho^2}x = \frac{1}{\rho}\delta \,. \qquad (5.24)$$

Вертикальное движение в линейном приближении от разброса по импульсу не зависит, поэтому вид уравнения (5.18) при $\delta \neq 0$ не изменится. Найдем решение уравнения (5.24), а затем представим его в матричной форме. Для этого введем новую переменную

$$u = \frac{1-n}{\rho^2}x - \frac{1}{\rho}\delta . \tag{5.25}$$

Из (5.25) находим $u' = \frac{1-n}{\rho^2}x'$ и $u'' = \frac{1-n}{\rho^2}x''$. Подставляя последнее выражение и (5.5) в уравнение (5.24), получим

$$u'' + \frac{(1-n)}{\rho^2}u = 0 . \tag{5.26}$$

Отсюда

$$u = C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{1-n}}{\rho}S\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{1-n}}{\rho}S\right).$$

Возвращаясь к переменной величине x, получим

$$x = \left[C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{1-n}}{\rho}S\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{1-n}}{\rho}S\right)\right]\frac{\rho^2}{1-n} + \frac{\rho\delta}{1-n}; \tag{5.27}$$

$$x' = \left[-\frac{\sqrt{1-n}}{\rho}C_1 \sin\left(\frac{\sqrt{1-n}}{\rho}S\right) + C_2\frac{\sqrt{1-n}}{\rho}\cos\left(\frac{\sqrt{1-n}}{\rho}S\right)\right]\frac{\rho^2}{1-n} . \tag{5.28}$$

При $S = 0$ справедливы следующие начальные условия $x = x_0$ и $x' = x_0'$. Подставим их в (5.27) и (5.28), чтобы определить константы C_1 и C_2. Первое начальное условие дает $x_0 = C_1\frac{\rho^2}{1-n} + \frac{\rho}{1-n}\delta$, откуда находим

$$C_1 = x_0\frac{1-n}{\rho} - \frac{1}{\rho}\delta , \tag{5.29}$$

а второе – $x_0' = C_2\frac{\sqrt{1-n}}{\rho}\frac{\rho^2}{1-n}$, из которого следует что

$$C_2 = x_0'\frac{\sqrt{1-n}}{\rho} . \tag{5.30}$$

С учетом (5.29) и (5.30) перепишем (5.27) и (5.28):

$$\left.\begin{aligned}
x &= x_0\cos\left(\frac{\sqrt{1-n}}{\rho}S\right)+x_0'\frac{\rho}{\sqrt{1-n}}\sin\left(\frac{\sqrt{1-n}}{\rho}S\right)+\\
&+\frac{\rho}{1-n}\left[1-\cos\left(\frac{\sqrt{1-n}}{\rho}S\right)\right]\delta;\\
x' &= -x_0\frac{\sqrt{1-n}}{\rho}\sin\left(\frac{\sqrt{1-n}}{\rho}S\right)+x_0'\cos\left(\frac{\sqrt{1-n}}{\rho}S\right)+\\
&+\frac{1}{\sqrt{1-n}}\sin\left(\frac{\sqrt{1-n}}{\rho}S\right)\delta.
\end{aligned}\right\} \tag{5.31}$$

Запишем (5.31) в матричной форме

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\sqrt{1-n}}{\rho}S\right) & \frac{\rho}{\sqrt{1-n}}\sin\left(\frac{\sqrt{1-n}}{\rho}S\right) \\ -\frac{\sqrt{1-n}}{\rho}\sin\left(\frac{\sqrt{1-n}}{\rho}S\right) & \cos\left(\frac{\sqrt{1-n}}{\rho}S\right) \end{pmatrix}+ \\ +\begin{pmatrix} \frac{\rho}{1-n}\left(1-\cos\frac{\sqrt{1-n}}{\rho}S\right) \\ \frac{\rho}{1-n}\sin\frac{\sqrt{1-n}}{\rho}S \end{pmatrix}\delta. \tag{5.32}$$

Для записи выражения (5.32) можно применить матрицу третьего порядка, а именно:

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \\ \delta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\sqrt{1-n}}{\rho}S\right) & \frac{\rho}{\sqrt{1-n}}\sin\left(\frac{\sqrt{1-n}}{\rho}S\right) & \frac{\rho}{1-n}\left(1-\cos\left(\frac{\sqrt{1-n}}{\rho}S\right)\right) \\ -\frac{\sqrt{1-n}}{\rho}\sin\left(\frac{\sqrt{1-n}}{\rho}S\right) & \cos\left(\frac{\sqrt{1-n}}{\rho}S\right) & \frac{\rho}{1-n}\sin\left(\frac{\sqrt{1-n}}{\rho}S\right) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ x_0' \\ \delta \end{pmatrix}. \tag{5.33}$$

Элемент $T_{23} = T'_{13}$ (см. о некоторых свойствах матриц третьего порядка в гл. 1).

Решение уравнения (5.24) можно построить другим путем, зная решения однородного уравнения (без правой части, когда $\delta = 0$. Известно, что если S_x и C_x – линейно независимые решения однородного уравнения (5.24), то решение неоднородного уравнения будет иметь вид:

$$D = S_x \int_0^S C_x \frac{1}{\rho} dS - C_x \int_0^S S_x \frac{1}{\rho} dS . \tag{5.34}$$

Нахождение D производится при $\delta = 1$. (Это условие не снимает общности, так как если коэффициент δ включить в выражение (5.34), то его необходимо включить далее и в правую часть (5.41), уравнение (5.42) от этого не изменится.) В данном случае S_x и C_x есть соответственно синусное и косинусное решения:

$$S_x = \frac{\rho}{\sqrt{1-n}} \sin \frac{\sqrt{1-n}}{\rho} S ; \tag{5.35}$$

$$C_x = \cos \frac{\sqrt{1-n}}{\rho} S . \tag{5.36}$$

Подставляя эти решения в (5.34), найдем

$$D = \frac{\rho}{1-n} \left(1 - \cos \frac{\sqrt{1-n}}{\rho} S \right) . \tag{5.37}$$

Отсюда получим

$$D' = \frac{\rho}{\sqrt{1-n}} \sin \frac{\sqrt{1-n}}{\rho} S . \tag{5.38}$$

Коэффициенты D и D' называются линейной и угловой дисперсией.

Дисперсия – это частное решение неоднородного уравнения (5.24), которое соответствует траектории частицы с импульсом $p = p_0 + \Delta p$, влетающей в магнитное поле в точке S = 0 с начальными данными $D(0) = D'(0) = 0$.

Если S_x и C_x удовлетворяют уравнениям

$$C_x'' + \frac{1-n}{\rho^2} C_x = 0\,; \tag{5.39}$$

$$S_x'' + \frac{1-n}{\rho^2} S_x = 0\,, \tag{5.40}$$

то дисперсия будет удовлетворять уравнению

$$D'' + \frac{1-n}{\rho} D = \frac{1}{\rho}\,. \tag{5.41}$$

Таким образом, решение уравнения (5.24) можно выразить в следующем виде

$$x = C_x x_0 + S_x x_0' + D\delta\,. \tag{5.42}$$

Необходимо подчеркнуть, еще раз, что введение понятия дисперсии было вызвано стремлением описать движение частицы с импульсом, отличным от величины ρ_0, движущейся по осевой траектории.

Для вертикального движения дисперсионные члены отсутствуют. Решение уравнения (5.23) в матричной форме имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} z \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\sqrt{n}}{\rho}S & \frac{\rho}{\sqrt{n}}\sin\frac{\sqrt{n}}{\rho}S \\ -\frac{\sqrt{n}}{\rho}\sin\frac{\sqrt{n}}{\rho}S & \cos\frac{\sqrt{n}}{\rho}S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_0 \\ z_0' \end{pmatrix}. \tag{5.43}$$

Теперь перейдем к рассмотрению отклоняющего секторного магнита с неоднородным полем.

5.2. Секторный магнит с неоднородным полем

Рассмотрим секторный магнит с неоднородным полем и азимутальной протяженностью, равной θ_0. Будем считать, что осевая траектория проходит нормально к краям магнита (рис. 5.2). В этом случае угол отклонения частиц равен θ_0.

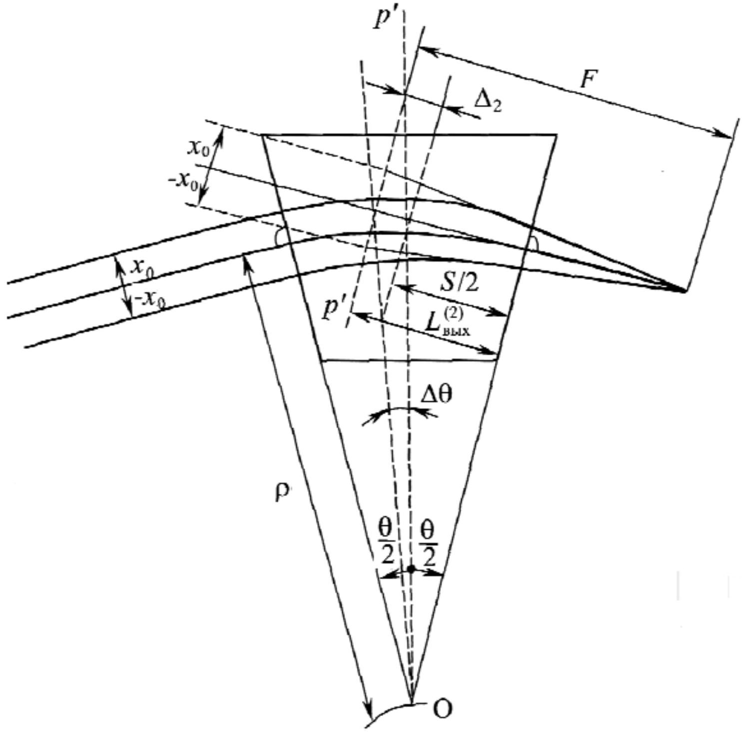


Рис. 5.2. Траектории частиц в секторном магните

На выходе из магнита в горизонтальной плоскости пучок частиц будет иметь следующие параметры:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_1' \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\omega & \dfrac{\rho}{\sqrt{1-n}}\sin\omega & \dfrac{\rho}{1-n}(1-\cos\omega) \\ -\dfrac{\sqrt{1-n}}{\rho}\sin\omega & \cos\omega & \dfrac{1}{\sqrt{1-n}}\sin\omega \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_0' \\ \delta \end{pmatrix}, \quad (5.44)$$

где $\omega = \sqrt{1-n}\theta_0$; $\theta_0 = \dfrac{S}{\rho}$, и в вертикальной плоскости:

$$\begin{pmatrix} z \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\Omega & \dfrac{\rho}{\sqrt{n}}\sin\Omega \\ -\dfrac{\sqrt{n}}{\rho}\sin\Omega & \cos\Omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_0 \\ z_0' \end{pmatrix}, \qquad (5.45)$$

где $\Omega = \sqrt{n}\theta_0$.

Определим оптические свойства секторного магнита, первоначально рассмотрев бездисперсный случай, когда δ = 0. Как было отмечено ранее, для такого случая можно использовать двумерную квадратную матрицу. Фокусное расстояние в горизонтальной плоскости равно

$$F_{\text{г}} = -\frac{1}{T_{21}} = \frac{\rho}{\sqrt{1-n}}\frac{1}{\sin\omega} = \frac{S}{\omega\sin\omega}, \qquad (5.46)$$

Главная выходная плоскость находится от края магнита на расстоянии

$$L_{\text{вых}}^{(\text{г})} = F_{Г}(1-T_{11}) = \frac{S(1-\cos\omega)}{\omega\sin\omega} = \frac{S}{2}\frac{\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}}{\frac{\omega}{2}}. \qquad (5.47)$$

Величина

$$\Delta_r = L_{\text{вых}}^{(\text{г})} - \frac{S}{2} = \frac{S}{2}\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}}{\frac{\omega}{2}} - 1\right). \qquad (5.48)$$

Если разложить в ряд выражение (5.48), то нетрудно установить, что $\Delta_r > 0$. Величине Δ_r соответствует угол $\Delta\theta = \dfrac{\Delta_r}{\rho}$, который следует откладывать от середины магнита ближе к входу.

Из рис. 5.2 и формулы (5.46) видно, что секторный магнит с неоднородным полем, характеризуемым показателем *n* оказывает на пучок моноэнергетических частиц фокусирующее воздействие с оптической силой

$$\frac{1}{F_r} = \frac{\omega\sin\omega}{S}.$$

Действительно, частицы, влетающие в магнит не по оси, будут испытывать различное воздействие со стороны магнитного поля, а именно: частицы, входящие в магнит с большим радиусом, будут иметь траекторию большей протяженности в магнитном поле, чем частицы, входящие с меньшим радиусом.

Поэтому угол отклонения от первоначальной траектории в первом случае будет больше, чем во втором.

При рассмотрении траекторий движения в поворотных магнитах удобно ввести понятие «мнимого» источника, положение которого можно определить, если продолжить выходные траектории сначала до пересечения с главной плоскостью, а затем дальше. Чтобы определить расположение главной плоскости и середины магнита, на этой прямой необходимо отложить отрезки $L_{\text{вых}}^{(\text{г})}$ и $S/2$.

Для вертикального движения аналогично (5.46)–(5.48) имеем

$$F_{\text{в}} = \frac{S}{\Omega \sin \Omega}; \tag{5.49}$$

$$L_{\text{вых}}^{(\text{в})} = \frac{S}{2}\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{\Omega}{2}}{\frac{\Omega}{2}}\right); \tag{5.50}$$

$$\Delta_{\text{в}} = \frac{S}{2}\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{\Omega}{2}}{\frac{\Omega}{2}} - 1\right). \tag{5.51}$$

Следует обратить внимание на сходства выражений для $L_{\text{вых}}^{(\text{в})}$ для квадруполей и отклоняющих магнитов, причем в квадруполях следует иметь ввиду фокусирующую плоскость. Одинаковый характер воздействия (фокусирующего) является причиной совпадения выражений для $L_{\text{вых}}$. В отличие от горизонтального движения при построении траекторий вертикального движения мнимый источник не понадобится.

Случай, когда $\delta = 0$, хотя и интересен сам по себе, все же обладает меньшей общностью по сравнению со случаем $\delta \neq 0$. Движение пучка с разбросом по импульсу связано с проявлением дополнительных дисперсионных свойств магнитной системы. При $\delta = 0$ были определены оптические параметры магнита: $F_{\text{г}}$, $L_{\text{вых}}^{(\text{г})}$, $\Delta_{\text{г}}$ и др., а при $\delta \neq 0$ к ним еще добавляется линейная и угловая дисперсии: D и D'. Остановимся на построении траекторий частиц, главных плоскостей и фокусных расстояний при $\delta \neq 0$ ($\Delta p > 0$) более подробно.

Для большей наглядности рассмотрим осевую траекторию, нормально расположенную по отношению к краям магнита $\left(x_0 = x_0' = 0\right)$. По направлению этой траектории влетает частица не только с импульсом p_0, а с импульсом $p = p_0 + \Delta p$. Из общих соображений следует, что радиус траектории такой частицы будет отличаться от величины ρ, и поэтому частица будет выходить из магнита под углом $\Delta\varphi$ к осевой траектории, определяемым выражением

$$\operatorname{tg}\Delta\varphi = x' = \frac{dx}{ds} = \theta_0 \frac{\sin\omega}{\omega}\frac{\Delta p}{p_0}, \tag{5.52}$$

которое при малых отклонениях ($\Delta\varphi << I$) превращается в

$$\Delta\varphi = \theta_0 \frac{\sin\omega}{\omega}\frac{\Delta p}{p_0} \tag{5.53}$$

и испытывает смещение x

$$x = \frac{\rho\left(1-\cos\omega\right)}{1-n}\frac{\Delta p}{p_0}. \tag{5.54}$$

Интересно найти точку пересечения дисперсионной траектории с осевой. Если продолжить внутрь магнита касательные к этим траекториям, то точка пересечения будет лежать на расстоянии l от выходного края магнита, определяемом из соотношения $l = \dfrac{x}{\Delta\varphi}$, которое преобразуется после подстановки в него выражений (5.53) и (5.54) к виду

$$l = \frac{\rho(1-\cos\omega)\Delta p}{(1-n)\theta_0 \dfrac{\sin\omega\cdot p_0}{\theta_0\sqrt{1-n}}\dfrac{\Delta p}{p_0}} = S\frac{1-\cos\omega}{\omega\sin\omega}. \tag{5.55}$$

Сравнивая (5.47) и (5.55), приходим к выводу, что точка пересечения осевой и дисперсионной траекторий приходится на главную плоскость. Таким образом, поворот дисперсионной траектории происходит на главной плоскости магнита.

Из выражения (5.55) видно, что точка пересечения осевой и дисперсионной траекторий не зависит от разброса по импульсу. Данное утверждение вытекает еще из того, что $l = L^{(\text{г})}_{\text{вых}}$.

На рис. 5.3 изображены траектории частиц при наличии дисперсии. В горизонтальной плоскости будет два изображения. Если изображение расположено на расстоянии b от середины магнита, то линейная дисперсия в этой точке будет равна

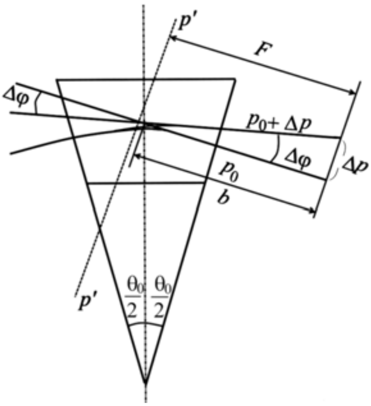


Рис. 5.3. Траектория частиц в секторном магните ($\delta \neq 0$)

$$\Delta\rho = (b + \Delta_{\text{г}})\theta_0 \frac{\sin\omega}{\omega}\frac{\Delta p}{p_0}. \quad (5.56)$$

При малых значениях ω ($\omega \ll 1$) выражение (5.36) принимает вид: $\Delta\rho = \left(b + \Delta_{\text{г}}\right)\theta_0 \frac{\Delta p}{p_0}$. В случае, когда главная плоскость расположена близко к середине магнита, т.е. когда величина $\Delta_{\text{г}}$ мала, $\Delta\rho \approx b\theta_0 \frac{\Delta p}{p_0}$.

В случае отсутствия разброса по импульсу $\Delta p = 0$ величина $\Delta\rho$ обращается в нуль, а дисперсионная траектория сливается с осевой. Следовательно, по известным параметрам пучка и магнита: импульсу и разбросу частиц, величине поля и показателя n можно построить осевую траекторию, найдя оптические параметры магнита, и дисперсионную траекторию, определив линейную (5.37) и угловую дисперсии (5.38).

5.3. Секторный магнит с однородным полем

В случае, когда требования, предъявляемые к вертикальному движению, не очень жестки, может быть применен магнит с однородным полем ($n = 0$). Для магнита с угловой протяженностью θ_0 матрицы радиального (5.44) и вертикального (5.45) движений приобретают вид

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_1' \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_0 & \rho\sin\theta_0 & \rho(1-\cos\theta_0) \\ -\dfrac{1}{\rho}\sin\theta_0 & \cos\theta_0 & \sin\theta_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_0' \\ \delta \end{pmatrix}, \tag{5.57}$$

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \rho\theta_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_0 \\ z_0' \end{pmatrix}, \tag{5.58}$$

где $\rho\theta_0 = S$ – длина пути частицы в секторном магните.

Из (5.58) видно, что в вертикальном направлении однородное магнитное поле действует на заряженную частицу так же, как свободный дрейфовый участок, т.е. оно не осуществляет вертикальную фокусировку. В этом случае можно использовать краевую фокусировку, чтобы не дать частицам разойтись в вертикальном направлении.

Для прямолинейных границ и нормальных к ним траекторий оптические параметры магнита несложно получить при условии $n = 0$ из выражений для последних в магнитах с неоднородным полем. Действительно, фокусное расстояние равно

$$F_{\text{г.о}} = \frac{\rho}{\sin\theta_0}, \tag{5.59}$$

а расстояние, на котором лежит выходная плоскость –

$$L_{\text{вых}}^{(\text{г.о})} = F_{\text{г.о}}(1-\cos\theta_0) = \frac{\rho(1-\cos\theta_0)}{\sin\theta_0} = \rho \cdot \operatorname{tg}\frac{\theta_0}{2}. \tag{5.60}$$

Параметр $\Delta_{\text{г.о}}$ равен

$$\Delta_{\text{г.о}} = L_{\text{вых}}^{\text{г.о}} - \frac{S}{2} = \frac{S}{2}\left(\frac{\operatorname{tg}\dfrac{\theta_0}{2}}{\dfrac{\theta}{2}} - 1 \right). \tag{5.61}$$

Следовательно, главная плоскость секторного магнита с однородным полем лежит на пересечении касательной к траектории на выходе из магнита и центральной его линии (при $\theta = \dfrac{\theta_0}{2}$). Линейная D_0 и угловая D_0' дисперсии соответственно равны

$$\rho\left(1-\cos\theta_0\right)\frac{\Delta p}{p_0} \qquad \text{и} \qquad \sin\theta_0\frac{\Delta p}{p_0}.$$

В секторном магните с однородным полем справедливо так называемое правило Барбера, которое упрощает нахождение расположения изображения.

На рис. 5.4 показан секторный магнит с однородным полем.

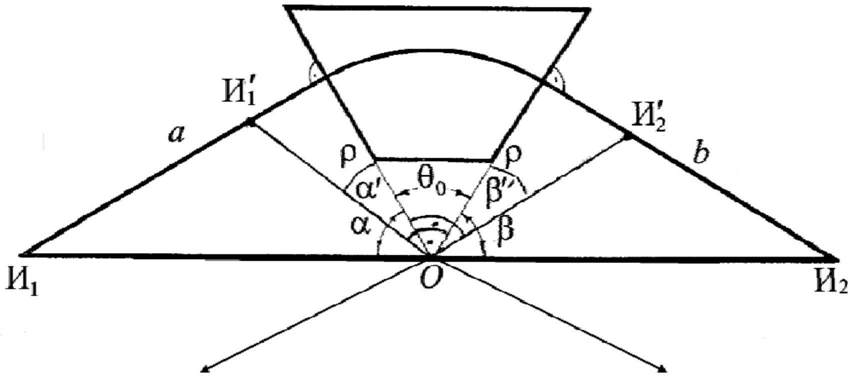


Рис. 5.4. Секторный магнит с однородным полем

Источник $И_1$ и изображение $И_2$ расположены от магнита на расстояниях a и b. Правило Барбера гласит, что точечный источник $И_1$ и точечное изображение $И_2$ лежат на одной прямой с центром кривизны O:

$$\alpha+\theta_0+\beta=\pi. \tag{5.62}$$

Углы α и β показаны на рис. 5.4.

Чтобы доказать правило Барбера, перемножим три матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta_0 & \rho\sin\theta_0 \\ -\dfrac{1}{\rho}\sin\theta_0 & \cos\theta_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{5.63}$$

где средняя матрица секторного магнита взята при $\delta = 0$. Перемножая матрицы, входящие в (5.63), и приравнивая элемент T_{12} нулю (условие существования изображения), найдем

$$a\cos\theta_0+\rho\sin\theta_0-\frac{ab}{\rho}\sin\theta_0+b\cos\theta_0=0. \tag{5.64}$$

На рис. 5.4 видно, что $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{\rho}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{b}{\rho}$. Разделив (5.64) на $\rho\cos\theta_0$, получим

$$\frac{a}{\rho} + \operatorname{tg}\theta_0 + \frac{b}{\rho} - \frac{b}{\rho}\frac{a}{\rho}\operatorname{tg}\theta_0 = 0$$

или

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\theta_0 + \operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\theta_0 = 0,$$

откуда

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\theta_0}{1 - \operatorname{tg}\theta_0 \operatorname{tg}\alpha} = \operatorname{tg}(\alpha + \theta_0) = -\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}(\pi - \beta),$$

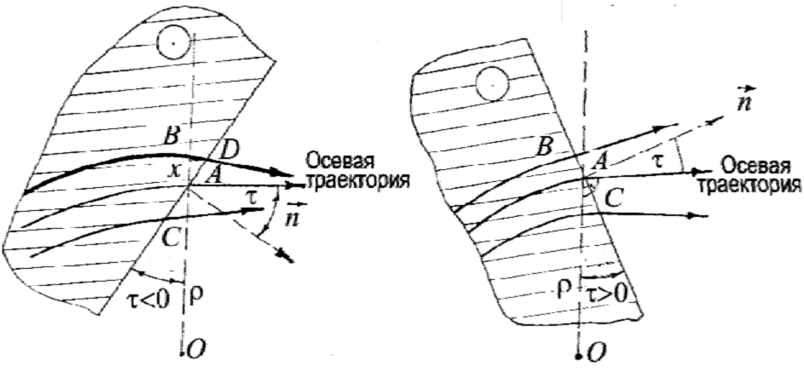
и, следовательно, получим условие (5.62).

По известному расположению источника, центра кривизны и параметру правило Барбера позволяет определить местонахождение изображения.

5.4. Учет влияния краевой фокусировки

Все предыдущее изучение оптических свойств отклоняющих магнитов проводилось в предположении того, что осевые траектории отклоняемых частиц перпендикулярны краям магнитов. Если же это условие не будет выполняться, то будет возникать краевая фокусировка (или дефокусировка в зависимости от угла наклона траектории к границе).

На рис. 5.5 показаны траектории частиц у края магнита. Через точку *A* проходит осевая орбита, $\vec{n}$ – внешняя нормаль к краям магнита, а угол τ лежит между осевой траекторией и нормалью к границе магнита. Магнитные силовые линии выходят из плоскости рисунка. Частицы с траекториями через точки *B* и *C* будут находиться в магнитном поле неодинаковое время. В случае траектории с точкой *B* частицы будут пребывать более продолжительное время в магнитном поле, чем частица с точкой *A*, а в случае траектории с точкой *C* – меньшее. Поэтому крайние траектории будут сходиться к осевой (рис. 5.5, *а*). *Радиальная фокусировка наблюдается, если центр кривизны O и нормаль будут лежать по одну сторону от* *осевой траектории. В этом случае угол является отрицательной величиной.* В противном случае, когда центр кривизны и нормаль будут находиться по разные стороны от осевой траектории ($\tau < 0$), выходящий из магнита пучок будет расходящимся (рис. 5.5, *б*).



а *б*

Рис. 5.5. Траектории частиц у края магнита:
а – фокусировка; *б* – дефокусировка в радиальном направлении

В вертикальном направлении будет иметь место фокусировка, если радиальное движение будет иметь расходящийся характер и наоборот.

Установим вид матрицы края магнита для радиального движения. По сравнению с нормальным движением частицы с траекторией, проходящей через точку *B*, будут проходить в поле дополнительное расстояние *BD*, равное примерно $x\mathrm{tg}\tau$, при условии, что $x \ll \rho$. Радиус кривизны для орбиты с точкой *B* равен

$$r_B = \frac{p_0}{eB_z(r_B)}, \tag{5.65}$$

где $r_B = \rho + x$, p_0 – импульс частиц; $B_z(r_B)$ – вертикальная составляющая магнитной индукции в точке *B*; e – заряд частиц. Выразим импульс p_0 через параметры осевой орбиты:

$$p_0 = eB_0\rho, \tag{5.66}$$

где использованы обозначения, введенные в (5.16). Подставляя (5.66) в (5.65), получим выражение

$$r_B = \frac{B_0\rho}{B_Z(\rho + x)},$$

которое с учетом (5.16) и (5.31) преобразуем к виду

$$r_B = \frac{\rho}{1 - \dfrac{nx}{\rho}}. \qquad (5.67)$$

При радиусе r_B касательная к траектории на выходе магнита поворачивается на угол θ, равный отношению расстояния $x\mathrm{tg}\tau$ и r_B. Тогда угол

$$\theta = \frac{x \cdot \mathrm{tg}\,\tau}{r_B} = \frac{x \cdot \mathrm{tg}\,\tau}{\rho}\left(1 - \frac{nx}{\rho}\right), \qquad (5.68)$$

а при условии $x << \rho$, т.е. в линейном приближении, переходит в

$$\theta = \frac{dx}{ds} = \frac{x\,\mathrm{tg}\,\tau}{\rho}. \qquad (5.69)$$

Кроме того, будем считать, что в линейном приближении траектория не претерпевает смещения относительно осевой траектории, изменяется только угол ее наклона. Данное предположение имеет место при малых углах τ. Следовательно, край магнита отождествляется с тонким элементом, для которого уравнения преобразования начального вектора $\begin{pmatrix} x_0 \\ x_0' \end{pmatrix}$ в конечный $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_1' \end{pmatrix}$ имеют вид

$$x_1 = x_0; \quad x_1' = x_0' + \theta = x_0' + \frac{x_0}{\rho}\mathrm{tg}\tau.$$

В матричной форме эти уравнения можно представить следующим образом:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{\mathrm{tg}\tau}{\rho} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_0' \end{pmatrix}. \qquad (5.70)$$

Отсюда несложно установить, что край магнита при выполнении принятых предположений будет описан матрицей тонкой линзы, причем при $\tau < 0$ он фокусирует, а при $\tau > 0$ – расфокусирует частицы. При $\tau = 0$ теряются фокусирующие свойства края магнита и матрица (5.70) превращается в единичную. Фокусное расстояние края магнита равно

$$F_Z = \pm \frac{\rho}{\mathrm{tg}|\tau|}, \tag{5.71}$$

где знаки $\pm$ относятся к фокусирующему и дефокусирующему случаям соответственно. В вертикальном направлении матрица перехода для края магнита будет отличаться от матрицы, входящей в выражение (5.70). Установим это с помощью рис. 5.6, *а*, на котором изображен вид края магнита сверху, и рис. 5.6, *б*, на котором видна вертикальная проекция края магнита.

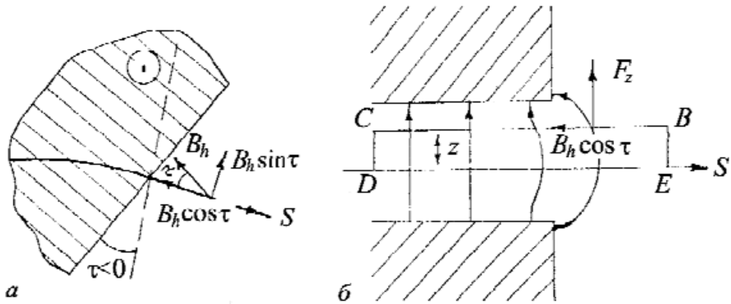


Рис. 5.6. К выводу матрицы вертикального движения у края магнита

Разложим нормальную к краю магнита составляющую радиального поля на две составляющие, направленные параллельно траектории движения и перпендикулярно ей (рис. 5.6, *б*). На частицу, движущуюся на расстоянии z от медианной плоскости, действует сила

$$F_Z = -evB_h \sin\tau, \tag{5.72}$$

где v – скорость частицы, а остальные обозначения следуют из рис. 5.6, *а*. В данном случае сила F_z направлена от медианной плоскости. Полное изменение вертикального импульса равно

$$\Delta p_z = \int_C^B F_z dt = -e \sin\tau \int_C^B B_h dS, \tag{5.73}$$

где S – расстояние вдоль траектории. Для оценки интеграла из (5.73) воспользуемся выражением $\oint \vec{B} d\vec{l}$, равным нулю, если отсутствуют токи внутри контура интегрировании. Для контура *BCDEB* имеем

$$-\int_C^B B_h \cos\tau dS + B_0 z + 0 + 0 = 0\,, \tag{5.74}$$

где первое слагаемое обусловлено интегрированием по траектории частицы, второе – по отрезку *DC*, третье, равное нулю, – по отрезку *ED*, на котором магнитное поле перпендикулярно отрезку контура, и, наконец, четвертое, равное нулю, – по отрезку *BE*, где поле обращается в нуль. При этом предполагается, что отрезок *BE* расположен на бесконечно далеком расстоянии от края магнита.

Изменение угла наклона траектории в вертикальном направлении, определяемое как отношение изменения вертикального импульса к полному импульсу, равно

$$z' = \frac{\Delta p_z}{p_0} = -\frac{e\sin\tau B_0 z}{p_0\cos\tau} = -\frac{z}{\rho}\mathrm{tg}\,\tau\,. \tag{5.75}$$

При выводе (5.75) предполагается, что при движении у края магнита смещение траектории относительно медианной плоскости практически не меняется. Матричная форма связи входного и выходного векторов имеет вид:

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{\mathrm{tg}\tau}{\rho} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_0 \\ z_0' \end{pmatrix}. \tag{5.76}$$

Матрица в (5.76) при $\tau < 0$ оказывает рассеивающее воздействие.

Следует отметить, что использование линейного приближения, а следовательно, и матричного аппарата, без существенного искажения членами разложения более высокого порядка, справедливо вплоть до углов τ, равных около 40°.

5.5. Магнит произвольной формы

Перейдем теперь к получению матрицы магнита произвольной конфигурации и с произвольным наклоном траекторий к краям магнита. На рис. 5.7 показан магнит *ABCD*, в который частицы влетают и вылетают по траектории, составляющей с краями магнита угол, отличный от прямого. Введением заштрихованных клиньев данный магнит можно превратить в секторный, края которого перпендикулярны траекториям. Этот магнит можно окружить тонкими клиньями, описываемыми матрицами (5.70) и (5.76).

Стрелками на рис. 5.7 обозначена осевая траектория частицы, а цифрами *1* и *2* – нормали, проведенные из точек входа и выхода траектории из магнита к его краям. Углы, образованные траекторией и этими нормалями, обозначены через τ_1 и τ_2. Знак «+» означает обрезание поля, а «–» добавление его. Для магнита, изображенного на рис. 5.7, его передний край будет осуществлять фокусировку по горизонтали и расфокусировку по вертикали. Задний край, наоборот, будет обеспечивать вертикальную фокусировку и горизонтальную дефокусировку. Соответствующим набором углов τ_1 и τ_2 можно добиться одновременной фокусировки по вертикали и горизонтали. Таким образом, произвольный магнит может быть описан матрицей, полученной от произведения трех матриц: секторного магнита и двух матриц тонких линз краевых участков. Действительно, выходной вектор

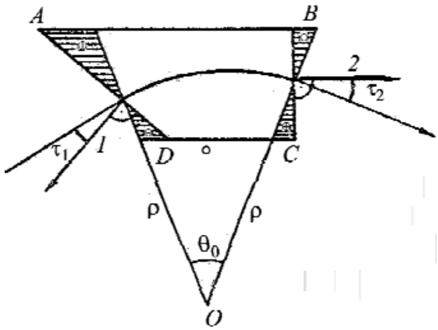


Рис. 5.7. Магнит с краевой фокусировкой

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_1' \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{\operatorname{tg}\tau_2}{\rho} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\omega & S\dfrac{\sin\omega}{\omega} & \dfrac{\rho(1-\cos\omega)}{1-n} \\ -\dfrac{\omega}{S}\sin\omega & \cos\omega & \dfrac{\sin\omega}{\omega} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{\operatorname{tg}\tau_1}{\rho} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{5.77}$$

Здесь пока не конкретизируется влияние краев на движение частицы, а вместо двумерных введены квадратные матрицы третьего порядка.

Перемножая матрицы (5.77), находим вектор $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_1' \\ \delta \end{pmatrix}$ в горизонтальной плоскости

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_1' \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\omega + \frac{s}{\rho}\frac{\sin\omega}{\omega}\mathrm{tg}\tau_1 & S\,\frac{\sin\omega}{\omega} & \frac{\rho(1-\cos\omega)}{(1-n)} \\ \frac{\cos\omega}{\rho}\left(\mathrm{tg}t_1 + \mathrm{tg}\tau_2\right) - \frac{\omega\sin\omega}{S} + \\ + \frac{\theta_0}{\rho}\frac{\sin\omega}{\omega}\mathrm{tg}\tau_1\,\mathrm{tg}\tau_2 & \cos\omega + \frac{S}{\rho}\frac{\sin\omega}{\omega}\mathrm{tg}\tau_2 & \theta_0\frac{\sin\omega}{\omega} + \mathrm{tg}\tau_2\frac{(1-\cos\omega)}{(1-n)} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_0' \\ \delta \end{pmatrix}$$

(5.78)

Отсутствие зависимостей линейной дисперсии от угла τ_2 в (5.78) является следствием представления краев магнита тонкими линзами. В реальном случае, особенно при больших значениях τ_2, эта зависимость будет проявляться.

Выражение для вектора $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_1' \end{pmatrix}$ в вертикальной плоскости можно найти, если перемножить матрицу (5.45) на матрицы краевых участков, подобных (5.76). В этом случае получим

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\Omega - \frac{1}{\sqrt{n}}\sin\Omega\,\mathrm{tg}\tau_1 & \frac{\rho}{\sqrt{n}}\sin\Omega \\ -\frac{\cos\Omega}{\rho}\left(\mathrm{tg}\tau_1 + \mathrm{tg}\tau_2\right) - \frac{\sqrt{n}}{\rho}\sin\Omega + \\ + \frac{\sin\Omega}{\rho\sqrt{n}}\mathrm{tg}\tau_1\mathrm{tg}\tau_2 & \cos\Omega - \frac{1}{\sqrt{n}}\sin\Omega\,\mathrm{tg}\tau_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_0 \\ z_0' \end{pmatrix}.$$

(5.79)

Для вертикального движения (5.79) дисперсионная зависимость отсутствует. Появление отрицательных знаков перед отдельными слагаемыми матричных элементов объясняется противоположным влиянием краевой фокусировки на вертикальное движение по сравнению с горизонтальным.

Для магнита произвольной формы справедливо правило Картана, аналогичное правилу Барбера. Правило Картана позволяет с помощью геометрических построений определить расположение изображения в медианной плоскости клинообразного фокусирующего магнита. Эти построения показаны на рис. 5.8.

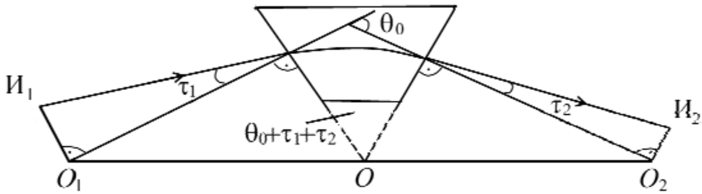


Рис. 5.8. Пояснение правила Картана

В клинообразном магните частицы поворачиваются на угол θ_0, $И_1$ и $И_2$ есть точечные источник и изображение. Правило Картана гласит о том, что проекции источника O_1 и изображения O_2 на нормали, проведенные к краям магнита, лежат на одной прямой с точкой пересечения граней магнита *O*. Если края магнита параллельны, то изображение отсутствует, так как точка *O* находится на бесконечности, а частицы, движущиеся не по осевой траектории, находятся такое же количество времени в магнитном поле, как и осевая.

5.6. Поле на краю магнита

Ранее предполагалось, что поле на краю магнита резко спадает. Однако это выполняется далеко не всегда. Поэтому, как и в квадрупольных линзах, когда была введена эффективная длина линзы, которая учитывала выпучивание поля за геометрические размеры линзы с помощью прямоугольного приближения, в отклоняющих магнитах реальное поле у границы также резко не обрывается (рис. 5.9), а следовательно, необходимо вводить соответствующие аппроксимации.

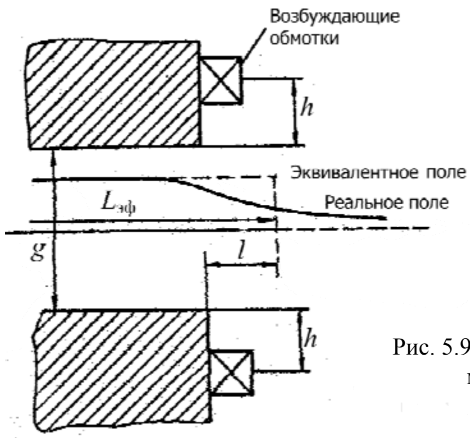


Рис. 5.9. Поле на краю магнита

Можно использовать понятие эффективной длины магнита в медианной плоскости, например

$$L_{эф} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} B_z(S)dS}{B_0},$$

где $B_z(S)$ – вертикальное поле по длине осевой траектории, B_0 – поле в центре магнита. Обычно интерес представляют зависимости эффективной длины магнита от параметра B_0 и ширины магнитной дорожки (межполюсного зазора). Эти зависимости чаще всего определяются эмпирически.

При увеличении B_0 изменяется эффективная длина магнита. Это происходит потому, что из-за наличия углов на краях полюсов магнита происходит концентрация силовых линий, которая при увеличении индукции сопровождается неравномерным насыщением участков магнита вдоль осевой траектории. Например, для прямоугольной границы магнита параметр $\eta = \frac{L_{жел} - L_{эф}}{g}$ где $L_{жел}$ – длина железа, $L_{эф}$ – эффективная длина магнита, g – расстояние между полюсами, при увеличении индукции до величины 2 Тл наблюдается резкое уменьшение параметра η. Избавиться от неравномерности параметра η можно путем введения скосов на границах магнита. Действительно, при скосе под углом 45° наблюдается слабое изменение параметра η во всем диапазоне изменения B_0, а при гиперболической конфигурации скосов можно добиться независимости эффективной длины магнита от индукции B_0.

5.7. Технические параметры и особенности отклоняющих магнитов

Как не важны оптические вопросы магнитов, однако при разработке транспортирующих каналов, в которые входят отклонающие магниты, при их монтаже и наладке приходится обращаться к техническим параметрам. Ведь только соответствующий выбор этих параметров позволяет обеспечить те или иные свойства магнитных систем, которые оказывают влияние на формирование необходимых свойств пучка.

Основным изготовителем различных отклоняющих магнитов (электромагнитов) является НИИЭФА им. Д.В. Ефремова, хотя во многих случаях приходится изготавливать необходимые магниты по индивидуальным разработкам (в МИФИ все анализирующие магниты изготовлены собственными силами). Параметры различных электромагнитов можно найти в справочниках по электрофизической аппаратуре промышленного изготовления, выпущенных НИИЭФА в 1963, 1969 и 1976 годах. Остановимся на некоторых из них.

Выпускаются электромагниты типа СП следующих видов:

– с круглыми полюсными наконечниками;

– с секторными полюсными наконечниками;

– с полюсными наконечниками различной конфигурации;

– специальные для исследования парамагнитного резонанса, космических лучей и др.

В параметрах электромагнитов имеется много схожего с аналогичными параметрами магнитных квадрупольных линз. Действительно, как и в случае квадрупольных линз, для изготовления магнитопровода электромагнитов используется низкоуглеродистая сталь, для охлаждения обмоток возбуждения применяют водяное или естественно-воздушное охлаждение с теми же самыми особенностями, какие были отмечены при изучении квадрупольных линз.

У большинства электромагнитов имеются приспособления для регулировки их в пространстве. Конфигурация магнитопровода зависит от требований, предъявляемых к магнитному полю. Обмотка возбуждения состоит из двух секционированных катушек, устанавливаемых в жестких каркасах.

Среди специфических особенностей электромагнита следует отметить возможность изменения воздушного зазора и замены полюсных наконечников, наличие шимм и замену полюсных наконечников крышкой камеры ионопровода. В некоторых электромагнитах предусмотрены дополнительные обмотки, предназначенные для стабилизации, компенсации и модуляции поля. Кроме того, одни магниты имеют вертикальное направление силовых линий, а другие – горизонтальное. В некоторых модификациях электромагнитов используется импульсное возбуждение обмоток.

В табл. 5.1 приведены технические параметры различных электромагнитов и их особенности. На рис. 5.10 показаны формы полюсных наконечников.

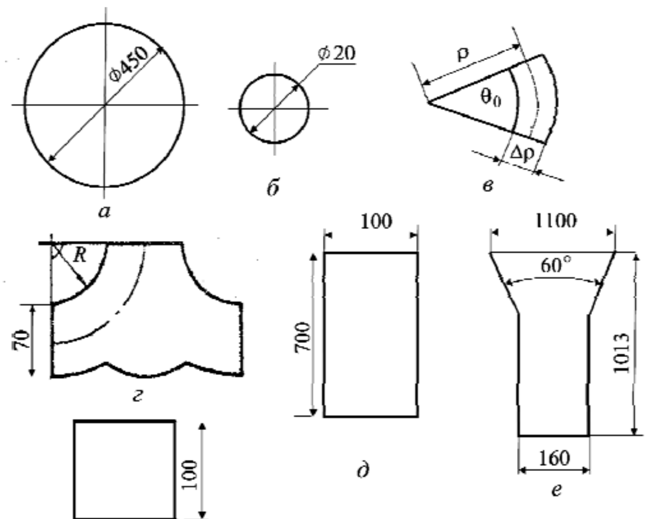


Рис. 5.10. Формы полюсных наконечников:
а – диаметр 450 мм; *б* – диаметр 20 мм; *в* – ρ = 440 мм, θ_0 = 75°, $\Delta\rho$ = 240 мм; *г* – R = 500 мм; *д* – F = 700 см^2; *е* – F = 5450 см^2; *ж* – F = 100 см^2

Т а б л и ц а 5.1

ПАРАМЕТРЫ ЭЛЕКТРОМАГНИТОВ

Направление силовых линий	Воздушный зазор, мм	Напряженность поля H_0, Э	Номинальный ток возбуждения I, А	Падение напряжения на обмотке U, В	Водяное охлаждение		Общий вес, т	Особенности электромагнитов
					перепад напора h, кг/см^2	общий расход воды Q, л/мин		
Вертикальное	80	12000	62	110	Охлаждение естественное воздушное		8,4	Круглые полюсные наконечники
Горизонтальное	5	45000	426	180	4	35	5,7	- « -
Вертикальное	50	11000	56	80	3	2,5	7,6	Секторные полюсные наконечники
Горизонтальное	25	8500	27,2	110	2	7	1,9	- « -
Вертикальное	50	17300	480	190	5	47	1,9	Полюсные наконечники различной конфигурации
Вертикальное	100	16500	600	150	5	34	43,3	Имеется комлект из пяти пар сменных полюсных наконечников
Горизонтальное	580	5000	300	180	4	33	80	Электромагнит специального назначения для изучения космических лучей

6. СИСТЕМЫ, СОСТОЯЩИЕ ИЗ КВАДРУПОЛЬНЫХ ЛИНЗ И МАГНИТОВ

Существуют различные системы квадрупольных линз и магнитов. Назначение этих систем бывает самое разнообразное. В данной главе будут рассмотрены системы, в которых скомпенсировано влияние разброса частиц по импульсу и искажение структуры пучка при прохождении через канал транспортировки. Влияние разброса частиц по импульсу при движении их в канале может проявляться в потере интенсивности, а искажение структуры пучка связано с изменением его свойств. К таким системам относятся ахроматические и изохронные системы.

6.1. Ахроматические и изохронные системы

Прежде чем приступить к рассмотрению конкретных систем, включающих набор магнитов и квадрупольных линз, остановимся на некоторых общих свойствах и определениях. К сожалению, единство терминологии в литературе отсутствует. Например, часто сложная магнитная система называется бездисперсной, если у нее в первом приближении по $\delta = \dfrac{\Delta p}{p}$ полностью скомпенсирована линейная дисперсия. Система, у которой скомпенсирована и линейная, и угловая дисперсии, называется ахроматической. Можно встретить определение бездисперсной системы как системы, у которой скомпенсирована как линейная, так и угловая дисперсии.

Нами в дальнейшем будут использованы термины бездисперсная и ахроматическая системы с уточнением дисперсии, которая скомпенсирована. Компенсация дисперсии не означает отсутствие ее по всей длине магнитной системы. Компенсация дисперсии достигается только в какой-то определенной точке, например, на выходе системы.

Запишем условие отсутствия дисперсии в точке $S = S_1$, лежащей на осевой траектории частиц:

$$D_1 = D_1' = 0 . \tag{6.1}$$

Для того чтобы выполнить условия (6.1), используем уравнение (5.34), опустив индекс x. Умножая его на S_1', находим выражение для линейной дисперсии на выходе системы

$$S_1'B_1 = -S_1'C_1\int_0^{S_1}\frac{S}{\rho}d\sigma + S_1'S_1\int_0^{S_1}\frac{C}{\rho}d\sigma = 0\,, \tag{6.2}$$

где σ – элемент дуги осевой траектории, по которой производится интегрирование в пределах от 0 до S_1. Дифференцирование выражения (5.34) с учетом (6.1) приводит к следующему условию

$$D_1' = S_1'\int_0^{S_1}\frac{C}{\rho}d\sigma + \frac{S_1C_1}{\rho} - C_1'\int_0^{S_1}\frac{S}{\rho}d\sigma - C_1\frac{S_1}{\rho} = 0\,,$$

откуда находим, что

$$S_1'\int_0^{S_1}\frac{C}{\rho}d\sigma = C_1'\int_0^{S_1}\frac{S}{\rho}d\sigma\,. \tag{6.3}$$

Подставляя (6.3) и (6.2), получим

$$D_1 = -\left(S_1'C_1 - S_1C_1'\right)\int_0^{S_1}\frac{S}{\rho}d\sigma = 0\,. \tag{6.4}$$

Выражение в скобках (6.4) есть на что иное, как определитель матрицы перехода, поэтому

$$\int_0^{S_1}\frac{S}{\rho}d\sigma = 0\,. \tag{6.5}$$

Аналогичное выражение можно получить и для косинусного решения, а именно:

$$\int_0^{S_1}\frac{C}{\rho}d\sigma = 0\,. \tag{6.6}$$

Таким образом, критерием ахроматичности системы, т.е. системы со скомпенсированной линейной и угловой дисперсиями, служат условия:

$$\int_0^{S_1}\frac{S}{\rho}d\sigma = \int_0^{S_1}\frac{C}{\rho}d\sigma = 0\,. \tag{6.7}$$

Условия бездисперсности и ахроматичности магнитных систем (6.5), (6.6) или (6.7) можно выразить через элементы матриц перехода. Одновременно с этим сформулируем критерий изохронности системы.

В гл. 5 приведено уравнение для скорости произвольной частицы (5.7). Квадрат модуля этой скорости будет равен

$$\upsilon^2 = \dot{z}^2 + \dot{x}^2 + \upsilon_0^2 \left(1 + \frac{x}{\rho}\right)^2, \tag{6.8}$$

где z и x – отклонения от осевой траектории, а ρ – радиус окружности, касательной к осевой траектории.

Перейдем к производным по длине осевой траектории:

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dS}{dt}\right)^2 \left(\frac{dr}{dS}\right)^2 = \left(\frac{dS}{dt}\right)^2 \left(\frac{dz}{dS}\right)^2 + \left(\frac{dS}{dt}\right)^2 \left(\frac{dx}{dS}\right)^2 + \upsilon_0^2 \left(1 + \frac{x}{\rho}\right)^2.$$

Принимая во внимание, что $\upsilon_0 = \dfrac{ds}{dt}$, найдем выражение для элемента дуги $d\tau$:

$$\frac{d\tau}{dS} = \sqrt{z'^2 + x'^2 + \left(1 + \frac{x}{\rho}\right)^2}. \tag{6.9}$$

Следовательно, это выражение позволяет определить длину траектории произвольной частицы в зависимости от параметров осевой траектории S и отклонения от нее. Нас будет интересовать разность между длинами произвольной и осевой траекторий

$$\Delta l = \tau - S_1. \tag{6.10}$$

Разложим правую часть (6.9)

$$\frac{d\tau}{dS} = \left(1 + \frac{x}{\rho}\right) \sqrt{1 + \frac{x'^2 + z'^2}{\left(1 + \frac{x}{\rho}\right)^2}} \approx \left(1 + \frac{x}{\rho}\right) \sqrt{1 + \left(1 - \frac{x}{\rho}\right)^2 \left(x'^2 + z'^2\right)} \approx$$

$$\approx 1 + \frac{x}{\rho} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x}{\rho}\right)^2 \left(x'^2 + z'^2\right)\left(1 + \frac{x}{\rho}\right) \approx \tag{6.11}$$

$$\approx 1 + \frac{x}{\rho} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x}{\rho}\right)\left(x'^2 + z'^2\right).$$

Следует отметить, что при $\rho \to \infty$ выражение (6.11) будет справедливо для системы квадрупольных линз, а длина произвольной траектории будет зависеть от производных x' и z'. Для квадрупольных линз различие в траекториях будет проявляться лишь во втором порядке или выше.

При рассмотрении систем ограничимся линейным приближением. Разность хода будет равна

$$\Delta l = \int_0^{S_1} \frac{x}{\rho} d\sigma, \tag{6.12}$$

где единица в правой части (6.11) после интегрирования дает длину осевой траектории и поэтому переходит в левую часть. Отклонение от осевой траектории в горизонтальной плоскости x равно (5.42)

$$x = T_{11}x_0 + T_{12}x_0' + T_{13}\delta, \tag{6.13}$$

где T_{11}, T_{12}, T_{13} – элементы матрицы перехода.

Подставляя (6.13) в уравнение (6.12), получим

$$\Delta l = x_0 \int_0^{S_1} \frac{T_{11}}{\rho} d\sigma + x_0' \int_0^{S_1} \frac{T_{12}}{\rho} d\sigma + \delta \int_0^{S_1} \frac{T_{13}}{\rho} d\sigma + \Delta l_0, \tag{6.14}$$

где Δl_0 – разность хода в начале системы. Эта разность могла бы быть введена ранее, например, в (6.12), что, однако, не имеет принципиального значения. Следовательно, элементы нижней строки матрицы (2.57) равны

$$T_{41} = \int_0^{S_1} \frac{T_{11}}{\rho} d\sigma, \tag{6.15}$$

$$T_{42} = \int_0^{S_1} \frac{T_{12}}{\rho} d\sigma, \tag{6.16}$$

$$T_{43} = \int_0^{S_1} \frac{T_{13}}{\rho} d\sigma, \tag{6.17}$$

$$T_{44} = 1. \tag{6.18}$$

Последнее выражение отражает то, что в рассматриваемой системе входная разность хода изменяться не может. Из (5.34) в связи с тем, что $S \equiv T_{12}$, $C = T_{11}$ и $D \equiv T_{13}$, имеем

$$D = T_{13} = T_{12}\int_0^{S_1}\frac{T_{11}}{\rho}d\sigma - T_{11}\int_0^{S_1}\frac{T_{12}}{\rho}d\sigma = T_{12}T_{41} - T_{11}T_{42}, \qquad (6.19)$$

откуда находим, что

$$D' = T_{23} = T'_{13} = T'_{12}\int_0^{S_1}\frac{T_{11}}{\rho}d\sigma - T'_{11}\int_0^{S_1}\frac{T_{12}}{\rho}d\sigma$$

или

$$T_{23} = T_{22}\int_0^{S_1}\frac{T_{11}}{\rho}d\sigma - T_{21}\int_0^{S_1}\frac{T_{12}}{\rho}d\sigma = T_{22}T_{41} - T_{21}T_{42}, \qquad (6.20)$$

так как

$$T_{22} = T'_{12} \text{ и } T_{21} = T'_{11}. \qquad (6.21)$$

Из (6.19) и (6.20) можно определить матричные элементы T_{41} и T_{42}. Действительно:

$$T_{41} = T_{11}T_{23} - T_{21}T_{13}, \qquad (6.22)$$

$$T_{42} = T_{12}T_{23} - T_{22}T_{13}. \qquad (6.23)$$

На основании (6.17) с помощью (6.19) и (6.20) приходим к заключению, что для ахроматичной системы необходимо, чтобы

$$T_{13} = 0 \quad \text{и} \quad T_{23} = 0. \qquad (6.24)$$

В этом случае выходные параметры частицы не будут зависеть от величины δ. Условие (5.24) для ахроматических систем непосредственно вытекает из рассмотрения трехмерной матрицы (2.52). Выражения (6.8)–(6.23) позволяют перейти к критерию изохронности системы.

Из (6.2) и (6.23) видно, что если выполняются условия (6.24), то элементы четырехмерной матрицы T_{41} и T_{42} обращаются в нуль. Однако говорить об изохронности системы, для которой выполняется условие $\Delta l = \Delta l_0$, т.е. разность хода в магнитной системе остается такой же, какой она была на входе, не приходится. Система будет изохронной, если, кроме (6.24), будет иметь место условие

$$T_{43} = \int_0^{S_1}\frac{T_{13}}{\rho}d\sigma = \int_0^{S_1}\frac{D}{\rho}d\sigma = 0. \qquad (6.25)$$

Таким образом, магнитная система будет изохронна, если выполняются три условия: (6.5), (6.6) или (6.24) и (6.25).

Следует обратить внимание на то, что все изохронные системы всегда ахроматичны, однако не все ахроматические системы изохронны, так как кроме (6.24) еще необходимо выполнение условия (6.25). В частном случае, когда по каналу транспортировки движутся моноэнергетические частицы, для изохронности системы достаточно выполнения критерия ахроматичности (6.24).

6.2. Примеры ахроматической и изохронной симметричных систем

Первоначально рассмотрим простейшую ахроматическую систему, состоящую из трех идентичных секторных магнитов M_1, M_2 и M_3 с однородным полем (рис. 6.1). Эта система отклоняет частицы от первоначальной оси на угол θ_0.

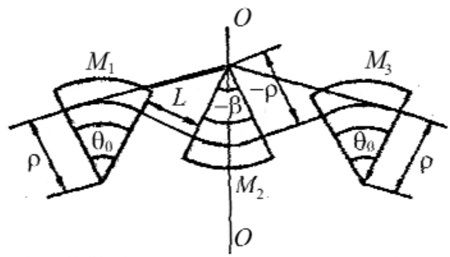


Рис. 6.1. Ахроматическая система из трех магнитов

Угол поворота крайних магнитов равен θ_0, а радиус осевой траектории в них ρ. Центральный магнит поворачивает частицы на угол $(-\beta)$, причем радиус траектории также меняет знак на обратный. Противоположный знак перед углом β обусловлен различием в направлениях движения: в магнитах M_1 и M_3 частицы поворачиваются по часовой стрелке, а в магните M_2 – против. Обратный знак у радиуса кривизны траектории частиц в магните M_2 объясняется тем, что центр кривизны лежит по другую сторону от траектории по сравнению с центром кривизны для магнитов M_1 и M_3. Поскольку рассматривается система симметрична, относительно плоскости O–O, можно ограничиться определением матрицы первой половины системы. Она равна произведению матриц первого магнита, свободного участка длиной L и половины центрального магнита, а именно:

$$\begin{pmatrix} \cos\frac{\beta}{2} & \rho\sin\frac{\beta}{2} & -\rho\left(1-\cos\frac{\beta}{2}\right) \\ -\frac{\sin\frac{\beta}{2}}{\rho} & \cos\frac{\beta}{2} & -\sin\frac{\beta}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta_0 & \rho\sin\theta_0 & \rho(1-\cos\theta_0) \\ -\frac{\sin\theta_0}{\rho} & \cos\theta_0 & \sin\theta_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{6.26}$$

При отрицательных значениях угла поворота и радиуса кривизны центрального магнита изменение знаков наблюдается только перед элементами T_{13} и T_{23}, перед остальными элементами знаки сохраняются. Это очевидно, из матрицы, а также из простых рассуждений. Действительно, дисперсионные траектории при противоположных углах поворота и радиусах кривизны будут отклоняться в различные стороны от осевой траектории. Рассмотрим пучок, параллельный в обеих плоскостях по отношению к осевой траектории. В вертикальной плоскости параллельность пучка будет сохраняться, потому, что секторный магнит с однородным полем представляет дрейфовый участок протяженностью $S = \rho\theta_0$. Необходимо, например, сфокусировать пучок в плоскости симметрии O–O. В этом случае должно выполняться условие $T_{11} = 0$. Перемножая матрицы (6.26) и положив элемент T_{11} равным нулю, находим расстояние между магнитами

$$L = \rho\left(\operatorname{ctg}\theta_0 - \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right). \tag{6.27}$$

Сделаем небольшое отступление, которое пригодится в дальнейшем. При $\beta = 0$ фокус проходящего через магнит с однородным полем параллельного пучка будет лежать на расстоянии $L = \rho\operatorname{ctg}\theta_0$ от заднего края магнита, что хорошо согласуется с правилом Барбера для бесконечного источника.

Для того чтобы система из трех магнитов (см. рис. 6.1) была ахроматической, необходимо выполнение условия $T_{23} = 0$. Из этого условия находим расстояние между магнитами

$$L = \rho\left(\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{ctg}\theta_0 - \frac{2}{\sin\theta_0} \right). \qquad (6.28)$$

Условия (6.27) и (6.28) будут выполняться одновременно, если

$$\theta_0 = \beta. \qquad (6.29)$$

При этом

$$L = \rho\left(\operatorname{ctg}\theta_0 - \operatorname{tg}\frac{\theta_0}{2} \right). \qquad (6.30)$$

Таким образом, чтобы построить симметричную ахроматическую систему из трех идентичных магнитов с углом поворота θ_0 для фокусировки параллельного пучка в плоскости симметрии, необходимо магниты разместить на расстоянии, определяемым выражением (6.30). Из (6.30) видно, что построить такую ахроматическую систему не всегда возможно. Действительно, ее можно построить, если $L \geq 0$, т.е. $\operatorname{ctg}\theta_0 - \frac{\operatorname{tg}\theta_0}{2} \geq 0$. Отсюда находим

$$\frac{\cos\theta_0}{\sin\theta_0} - \frac{1-\cos\theta_0}{\sin\theta_0} = \frac{2\cos\theta_0 - 1}{\sin\theta_0} \geq 0, \ \cos\theta_0 \geq 1/2 \ \text{и} \ \theta_0 \leq 60^\circ.$$

Следовательно, поворотный угол θ_0 не должен превышать величину 60°. Результирующая матрица (6.26) с учетом (6.30) принимает следующий вид:

$$(T) = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{\rho}{2\sin\dfrac{\theta_0}{2}} & \rho\left(2\cos\dfrac{\theta_0}{2} - 1\right) \\ -\dfrac{2}{\rho}\sin\dfrac{\theta_0}{2} & \dfrac{\cos\frac{3}{2}\theta_0}{2\cos^2\dfrac{\theta_0}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (6.31)$$

Матрица (6.31) показывает, что на первой половине системы происходит компенсация угловой дисперсии. Компенсация линейной дисперсии происходит на второй половине системы. Полная матрица системы равна

$$\Pi = \begin{pmatrix} -1 & \dfrac{\rho\cos\frac{3}{2}\theta_0}{\sin\theta_0\cos\frac{\theta_0}{2}} & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (6.32)$$

Из выражения для матрицы (6.31) нетрудно установить, что рассмотренная симметричная система преобразует параллельный пучок в параллельный.

Заканчивая рассмотрение бездисперсионных и ахроматических систем, следует отметить, что они, как правило, используются для отклонения пучка заряженных частиц на заданную экспериментальную площадку.

Теперь рассмотрим изохронную симметричную систему, состоящую из трех секторных магнитов с однородным поле с углом поворота θ_0 M_1, M_2 и M_3 и четырех квадрупольных линз Q_1–Q_4, образующих два дублета (рис. 6.2). Прямая O–O есть ось симметрии. Квадрупольные линзы рассматриваем в приближении тонких линз. На входе в систему, показанную на рис. 6.2, траектории пучка частиц параллельны осевой траектории в горизонтальной и вертикальной плоскостях.

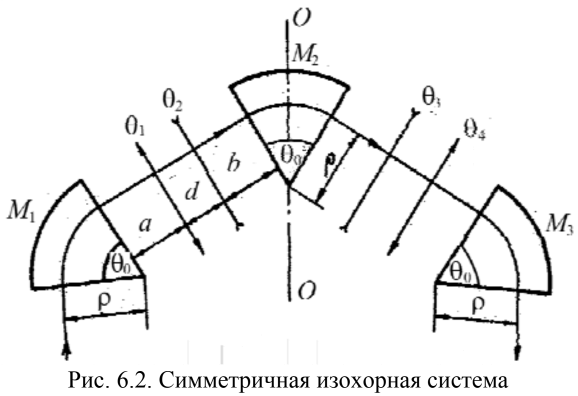


Рис. 6.2. Симметричная изохорная система

Необходимо обеспечить такие условия, при которых пучок, параллельный оси в горизонтальной плоскости на входе преобразовывался в параллельный пучок в плоскости симметрии. Это означает, что в матрице T для горизонтального движения в первой половине симметричной системы необходимо положить $T_{21} = 0$. Кроме того, для изохронизма необходимо, чтобы элементы T_{23} и T_{43} обращались в нуль. Одновременно требуется, чтобы в вертикальной плоскости пучок фокусировался в плоскости симметрии. Ввиду того, что секторный магнит с однородным полем не оказывает воздействия на вертикальное движение, фокусировку могут осуществлять только дублеты квадрупольных линз. Для этого в матрице перехода для вертикального движения следует положить $T_{11} = 0$. Эти четыре условия дают выражения для определения параметров изохронной системы (промежуточные выкладки опущены):

$$\frac{a}{\rho} = \mathrm{ctg}\,\theta_0 + \frac{2dP_2}{3\theta_0}, \tag{6.33}$$

$$\frac{b}{\rho} = \mathrm{ctg}\,\theta_0 - \frac{2dP_1}{3\theta_0}, \tag{6.34}$$

$$dP_1 = \frac{dP_2 + \frac{3}{2}\theta_0 \cdot d/\rho}{1 + dP_2}, \tag{6.35}$$

$$\begin{gathered} 4(dP_2)^3 \frac{\rho}{d}\left[1 - \frac{3}{2}\theta_0\left(\mathrm{ctg}\theta_0 + \frac{\theta_0}{2}\right)\right] + \\ +15\theta_0 (dP_2)^2\left[1 - \frac{2}{5}\frac{\rho}{d}\left(\mathrm{ctg}\theta_0 + \frac{\theta_0}{2}\right)\left(1 + \frac{3}{4}\theta_0\frac{d}{\rho}\right)\right] + \\ +6\theta_0 (dP_2)\left(1 + \frac{3}{2}\theta_0\frac{d}{\rho}\right) + 3\theta_0\left[1 + \frac{3\theta_0}{2}\left(\mathrm{ctg}\frac{\theta_0}{2} + \frac{\theta_0}{2}\right)\right] = 0, \end{gathered} \tag{6.36}$$

где P_1 и P_2 – оптические силы квадрупольных линз, а остальные параметры показаны на рис. 6.2. По заданным значениям θ_0 и d/ρ из (6.36) можно определить оптическую силу второй линзы P_2, а затем с помощью (6.35) и первой P_1. Далее нетрудно найти параметры a/ρ и b/ρ.

Из уравнения (6.33) видно, что параллельный пучок фокусируется в горизонтальной плоскости первым магнитом в точку, расположенную перед первым дублетом Q_1–Q_4 на расстоянии $\frac{2dP_2\rho}{3\theta_0}$.

Полная матрица преобразования с учетом (6.33)–(6.36) имеет вид

$$\Pi = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\rho(\sin\theta_0 + \sin 2\theta_0 - 3\theta_0)}{\sin^2\theta_0} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (356)$$

Разобранная система служит примером, когда на отдельные элементы возлагаются различные функции. Магниты поворачивают и фокусируют в горизонтальном направлении, а линзы фокусируют частицы в вертикальном и горизонтальном направлениях.

В заключение следует подчеркнуть, что неизохронность магнитных систем значительно уменьшается в ахроматических системах (T_{41} и T_{42} равны нулю). При работе с высокоэнергетическими частицами, когда углы поворота в магнитах малы, критерия ахроматичности бывает достаточно для проведения многих экспериментов.

7. АБЕРРАЦИИ МАГНИТНЫХ СИСТЕМ

7.1. Различные типы аберраций

Под аберрацией подразумевается любое отклонение поведения частиц в магнитной системе от того, которое подчиняется матричному формализму, т.е. от поведения в линейном приближении.

При выводе уравнений движения в различных магнитных системах были приняты упрощающие предположения, которые, не оказывая принципиальных ограничений на анализ движения, существенно упрощали рассуждения. Упрощения состояли в рассмотрении параксиального движения, пренебрежении нелинейными членами разложения поля, отсутствии связи между движением в горизонтальной и вертикальной плоскостях и т.д. Следовательно, хотя была рассмотрена близкая к реальной, но все же идеальная модель. Вместе с тем практика работы с высокоэнергетическими пучками при наличии постоянного стремления к увеличению интенсивности пучков требует использовать периферийные области апертур линз и магнитов, где поле отлично от приосевого, используемого в идеальном случае. Поэтому в действительности необходимо вносить поправки на различные аберрации. Причины возникновения аберраций носят разнообразный характер: отклонение движения от параксиального, когда необходимо учитывать не только нелинейные члены, но и связь между горизонтальным и вертикальным движениями, наличие краевых эффектов и неоднородности пучка частиц по импульсу.

Аберрации могут быть разделены на два класса: *физические аберрации*, зависящие от неоднородности материала магнита, неточности расположения элементов магнитной системы, например, смещение оптической оси линзы, поворот плоскостей симметрии из-за неоднородности частиц по импульсу (эта аберрация называется хроматической) и т.д., и *математические аберрации*, о которых речь шла выше.

В квадрупольных линзах имеют место следующие аберрации:

а) из-за приближенного анализа движения;

б) из-за неточности квадрупольного поля, вызванного усечением профиля полюсов;

в) из-за эффектов на краях линз (частицы влетают и вылетают из линзы не при одинаковых условиях).

Эффективная длина линз неодинакова по апертуре линзы. При отступлении от оси она уменьшается, при этом справедливо следующее условие

$$L_{эф}(0) - L_{эф}(r_0) = 0{,}15 r_0\,, \tag{7.1}$$

где $L_{эф}(0)$ – эффективная длина на оси линзы, $L_{эф}(r_0)$ – эффективная длина на краю апертуры. Это обстоятельство приводит к размытию пучка. Такие аберрации иногда называют геометрическими.

В гл. 3, посвященной квадрупольным линзам, было отмечено изменение фокусных расстояний $F_с$ и $F_д$ при отклонении импульса частиц от номинального значения. Результатом отклонения импульса будет размытие пучка.

Борьба с геометрической аберрацией упрощается в связи с тем, что во время работы с целью избежать наведенной радиоактивности и фона, возникающего из-за соударений пучка со стенками ионопровода, стараются держать пучок около оси системы. Это существенно снижает геометрическую аберрацию.

Для коррекции хроматической аберрации существуют различные способы: клиновидного поглотителя, секступольной линзы, корректирующего магнита и косой щели. Материал по этим способам можно найти в различных пособиях.

7.2. Оценка хроматической аберрации

В общем случае для вычисления аберрационных эффектов используют ЭВМ. Здесь будет рассмотрен случай, когда имеется возможность провести аналитическое исследование хроматической аберрации. Такое рассмотрение возможно при условии малого разброса частиц по импульсу: $\Delta p / p_0 \ll 1$.

Покажем, что траекторию частицы с импульсом, отличным от номинального можно построить, зная траекторию частицы, движущуюся с импульсом p_0. Обозначим траекторию частицы с импульсом p_0 через $x(S)$ и изменение траектории при наличии разброса по импульсу, т.е. хроматическую аберрацию, через $\eta(S)$. Эти функции удовлетворяют следующим уравнениям:

$$x'' \pm k^2 x = 0. \tag{7.2}$$

$$\left(x+\eta\right)'' \pm k^2\left(1-\frac{\Delta p}{p_0}\right)\left(x+\eta\right) = 0, \tag{7.3}$$

где k^2 – параметр, соответствующий импульсу p_0. Вычитая верхнее уравнение из нижнего и пренебрегая членами второго порядка малости, получим

$$\eta'' \pm k^2\eta = \pm\frac{\Delta p}{p_0}k^2 x = -\frac{\Delta p}{p_0}x''. \tag{7.4}$$

Чтобы определить выражение для η, умножим (7.4) на x. В результате получим уравнение

$$\eta'' x \pm \eta k^2 x = \frac{d}{dS}\left(\eta' x - \eta x'\right) = \pm\frac{\Delta p}{p_0} k^2 x^2 = -\frac{\Delta p}{p_0} x'' x\,,$$

после интегрирования которого находим

$$\eta' x - \eta x' = \pm\frac{\Delta p}{p_0}\int_0^S k^2 x^2 dS = -\frac{\Delta p}{p_0}\int_0^S x'' x dS\,. \qquad (7.5)$$

Преобразовав левую часть уравнения (7.5), получим

$$\eta\left(S\right) = \pm\frac{\Delta p}{p_0} x(S)\int_0^S \frac{1}{x^2}\int_0^\sigma x^2 k^2 dS d\sigma\,. \qquad (7.6)$$

Таким образом, зная функцию $x(S)$ траектории частицы с импульсом p_0, с помощью выражения (7.6) можно оценить хроматическую аберрацию.

8. ПРАКТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ ЮСТИРОВКИ МАГНИТНЫХ СИСТЕМ

При наладке транспортирующих каналов, необходимо знать реальные характеристики магнитных систем. Информация по этому вопросу получается в результате магнитных измерений. Размещение элементов магнитных систем (линз, магнитов и др.) вдоль выбранного направления обычно контролируется при помощи геодезических приборов. Однако точность такого контроля бывает недостаточной, поэтому прибегают к другим приемам. Вместо геометрических осей стараются использовать магнитные оси. На практике стремятся эти оси совместить. Здесь будут рассмотрены несколько методов, с помощью которых удается визуализировать нулевую ось поля и форму орбиты.

8.1. Визуализация оси квадрупольной линзы

Визуализация нулевой оси (вернее, точек на ней) основана на действии эффекта Коттона–Мутона. Прежде чем перейти к описанию установки для юстировки квадрупольной линзы коротко остановимся на самом эффекте Коттона–Мутона. Известно, что данный эффект связан с проявлением *искусственного двойного лучепреломления в изотропных средах под влиянием различных воздействий.* К таким воздействиям необходимо отнести механические деформации, электрическое (эффект Керра) и магнитное поля.

В последних двух случаях происходит переориентация молекул вещества: в электрическом поле – из-за поляризации, а в магнитном – из-за взаимодействия внешнего поля с магнитным моментом молекул.

Характеристикой оптической анизотропии (двойного лучепреломления) служит разность показателей преломления обыкновенного η_0 и необыкновенного η_e лучей, которая в случае механической деформации – пропорциональна напряжению, в эффекте Керра – квадрату напряженности электрического поля, и, наконец, в эффекте Коттона–Мутона – квадрату напряженности магнитного поля перпендикулярного лучу света. При эффекте Коттона–Мутона разность показателей преломления равна

$$\eta_0 - \eta_e = kH^2, \tag{8.1}$$

где H – напряженность поперечного магнитного поля, а k – коэффициент пропорциональности. Разности показателей преломления соответствует разность хода Δ (и разность фаз σ), приобретаемая лучами на пути l, выраженная в длинах волн λ:

$$\sigma = \frac{2\pi\Delta}{\lambda} = \frac{2\pi l}{\lambda}(\eta_0 - \eta_e) = kH^2. \tag{8.2}$$

В связи с тем, что в выражениях (8.1) и (8.2) магнитное поле H входит в квадрате, ни разность показателей преломления $(\eta_0 - \eta_e)$, ни разность хода Δ, ни разность фаз σ не будут изменяться при изменении направления поля. Величину k/λ иногда называют постоянной Коттона–Мутона. Кроме того, известно, что если вещество с искусственным двойным лучепреломлением поместить между двумя поляризаторами, то интенсивность плоско-поляризованного света на выходе второго поляризатора будет зависеть от взаимного расположения плоскостей поляризатора. Если оба поляризатора будут параллельны, то интенсивность света будет пропорциональна $\cos^2\frac{\sigma}{2}$, а если будут скрещены, то будет пропорциональна $\sin^2\frac{\sigma}{2}$. Следовательно, интенсивность света будет зависеть от напряженности магнитного поля *H*.

Вариант подобный визуализации осей в МКЛ может быть осуществлен следующим образом (рис. 8.1).

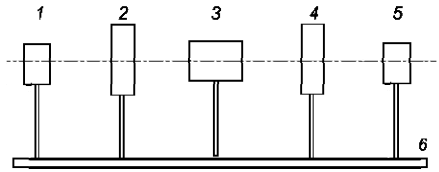


Рис. 8.1. Схема юстировки квадрупольной линзы

Поляризованный в одной из плоскостей световой луч от источника *1*, направляется на пару скрещенных поляризованных фильтров *2* и *4* (например, призм Николя) между которыми находится сосуд *3* длиной в несколько сантиметров с коллоидным раствором закиси оксида железа Fe_3O_4. Расположенные на единой плите *6*, все приборы помещают в апертуру МКЛ.

Система работает в следующем режиме: когда поле равно нулю, свет не проходит через систему фильтров, когда же поле отлично от нуля, то появляется тонкий темный крест на красноватом фоне, наблюдаемый с помощью телескопа *5*. Положение пересечения полос темного креста соответствует нулевому полю. С помощью такого метода можно определить положение оси поля с точностью не хуже 0,1 мм. Перемещением сосуда *3* и плиты 6 можно произвести осевую юстировку квадруполя.

Заслуживает внимания еще один способ нахождения положения магнитной оси МКЛ, основанный на том, что диамагнетик выталкивается магнитным полем. Этот способ еще больше упрощает процесс измерения при сохранении точности. Коллоидный раствор парамагнитной соли $FeCl_3$ с добавленной в него каплей воды (диамагнитной жидкости той же плотности) помещают в кювету, которую размещают в магнитном поле МКЛ. Затем ее освещают лучом света незначительной мощности (15–20 Вт). В магнитном поле квадруполя капля воды будет стремиться занять положение, в котором магнитное поле будет равно нулю. Положение капли, определяющее расположение оси магнитного квадруполя, можно наблюдать с помощью теодолита.

Точность способа измерения зависит от размера капли воды. Для капли диаметром 1,2 мм средняя ошибка определения центра капли не превышает 0,05 мм, при этом в процессе измерения происходит вытягивание капли вдоль оси квадруполя.

Юстировка МКЛ может быть осуществлена с помощью потока электронов и флюоресцирующих экранов. При этом возбуждение линзы осуществляется с помощью переменного тока. В этом случае фокусирующая и дефокусирующие плоскости МКЛ непрерывно меняются местами с частотой изменения тока.

Хорошей юстировке линзы на экране будет соответствовать равноконечный прямоугольный крест, образованный тонкими штрихами. Смещение центра МКЛ относительно пучка, наклон линзы по отношению к оси и другие эффекты установки МКЛ будут сопровождаться тем, что крест станет неравноконечным. Этот способ может быть использован и при юстировке системы линз. Например, если плоскости симметрии и антисимметрии в соседних МКЛ относительно друг друга будут сдвинуты, то будут сдвинуты и кресты, создаваемые каждой линзой.

8.2. Метод гибкой нити

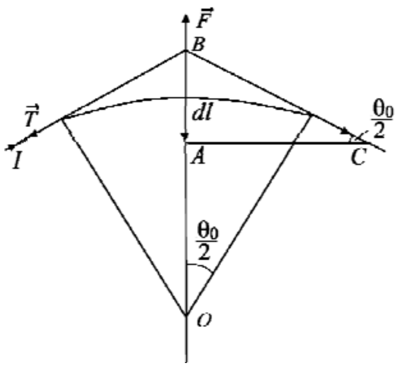


Рис. 8.2. Проводник с током в магнитном поле

Определение траекторий заряженных частиц с импульсом p в магнитном поле может быть осуществлено с помощью гибкой тонкой нити, по которой протекает ток. Такая нить показана на рис. 8.2.

Рассмотрим элемент нити длиной dl и током I. В магнитном поле B, перпендикулярном плоскости рисунка, на этот элемент будет действовать сила

$$F = IBdl\,, \tag{8.3}$$

которая уравновешивается за счет натяжения нити. Из треугольника *ABC* (см. рис. 8.2) находим, что компенсирующая сила

$$F = 2T\sin\left(\theta_0 / 2\right). \tag{8.4}$$

Сравнивая (8.3) и (8.4), находим

$$IBdl = 2T\sin\left(\theta_0 / 2\right). \tag{8.5}$$

Откуда после умножения (8.5) на $\cos(\theta_0 / 2)$ получаем

$$IBdl\cos\left(\theta_0 / 2\right) = T\sin\theta_0\,. \tag{8.6}$$

При малых значениях θ_0 можно положить $\cos\theta_0 / 2 \approx 1$ и $\sin\theta_0 \approx dl / \rho$. Подставляя эти выражения в (8.6), находим

$$B\rho = T / I\,, \tag{8.7}$$

причем если B взято в теслах, ρ – в метрах, а I – амперах, то T необходимо брать в ньютонах. Отсюда можно по заданным величинам B, T и I определить радиус траектории ρ.

Используя известное выражение $\beta W = pc = 300B\rho$, получим формулу для импульса частиц, которые будут двигаться по траектории, совпадающей с токовой нитью:

$$p = 300\frac{T}{I},\ \text{МэВ/с}\,. \tag{8.8}$$

Метод тонкой гибкой нити с током может быть использован как в однородном, так и неоднородном полях. Этот метод имеет большую точность при повышенных значениях импульса. Действительно, при малых импульсах появляются трудности, связанные с необходимостью создавать малые натяжения при максимальном токе. При этом величина натяжения должна во много раз превышать собственный вес проводника. Это необходимо для того, чтобы провисание нити не оказывало влияние на результаты измерений. Однако сильное натяжение проводника требует при фиксированном значении импульса увеличения его поперечного сечения для пропускания тока большой величины, но тогда сила тяжести может привести к погрешности в измерении. Таким образом, требования противоречат друг другу.

Определение параметров проволоки с точностью 0,05–0,10 мм может быть проведено с помощью микроскопов. На погрешность метода, кроме веса проволоки, влияет трение в блоке, с помощью которого обеспечивается натяжение. Для уменьшения трения можно использовать специальные подшипники, например, на воздушной подушке. Точность определения параметров магнитных элементов при этом не хуже 0,1%. В ускорителях со слабой фокусировкой около 0,1%.

9. МЕТОДЫ СЕПАРАЦИИ ЧАСТИЦ ВЫСОКОЙ ЭНЕРГИИ

9.1. Общие требования и задачи

На одном из этапов развития физики высоких энергий большое значение имели сепараторы. Сепарация частиц необходима для выделения чистых пучков «нужных» вторичных частиц, которые образуются по следующей схеме: ускоренный в ускорителе до предельной энергии пучок первичных частиц, например протонов, сбрасывается на мишень, в которой образуются вторичные частицы, различные по массе, энергии, импульсу, заряду и другим параметрам.

Основную часть среди вторичных частицу составляют π-мезоны и протоны и лишь от 1 до 20 % (в зависимости от энергии первичных частиц и импульса вторичных частиц) падает на K-мезоны и антипротоны. Работа с неочищенными вторичными пучками очень трудоемка, поэтому необходимо выделить полезные частицы и освободиться от фона других вторичных частиц. Фоновые частицы, хотя и имеют одинаковый с полезными импульс, отличаются от последних скоростью. Однако затруднения в расшифровку результатов измерений могут дать не только фоновые вторичные частицы, но и полезные частицы, если они нестабильны.

Для того чтобы улучшить условия проведения и сократить время эксперимента, необходимо ослабить фон и по возможности выделить чистый пучок полезных частиц. В этом состоит главная задача сепарации. Сепарация может быть достигнута различными способами, так как каждая из вторичных частиц обладает набором таких характеристик, как масса, заряд, магнитный момент, время жизни и др. Каждый из этих параметров может быть положен в основу метода разделения или, точнее сказать, выделения заданного рода частиц из смеси двух или нескольких сортов.

Как правило, выделение нужных частиц сопровождается пространственным разделением частиц, которое позволяет направить полезные частицы в регистрирующую аппаратуру. Хотя вторичные частицы обладают набором характеристик, не все характеристики могут быть использованы для сепарации. Это связано или с техническими возможностями, которые бывают ограничены, или с тем, что предпочтение отдается массе, заряду и времени жизни. В настоящее время чаще всего сепарация осуществляется путем применения электрического и магнитного полей. Кроме того, для сепарации использовалось взаимодействие заряженных частиц со средой. По принципу действия и физическим особенностям методы сепарации отличаются друг от друга. В связи с этим требования к сепараторам бывают различными и формируются в процессе изучения частиц. Во всех сепараторах стремятся получить как можно более чистые пучки полезных частиц, т.е. наибольший коэффициент сепарации, который равен

$$k = \frac{(n_{\text{ф}} / n_{\text{п}})_{\text{б.с}}}{(n_{\text{ф}} / n_{\text{п}})_{\text{с.с}}}, \tag{9.1}$$

где в числитель входит отношение фоновых и полезных частиц до сепарации, а в знаменатель – отношение тех же величин после сепарации.

С ростом энергии вторичных частиц методы сепарации все более усложняются. Усложняются конструкции сепараторных установок и механизмы, работающие при сепарации. Размеры и стоимость сепараторов возрастают настолько, что необходимо выбрать оптимальные пути и решения при конструировании сепараторов. Метод сепарации на основе взаимодействия ускоренных частиц с поглотителем будет опущен. Перейдем к электростатическим сепараторам.

9.2. Электростатические сепараторы

Принцип работы электростатического сепаратора. Принцип электростатической сепарации заключается в следующем (рис. 9.1). Моноимпульсные частицы с относительными скоростями β_1 и β_2 влетают по оси ортогональной системы координат *xyz* в поперечное электрическое поле $\vec{E}$ протяженностью *l* и направлением силовых линий, параллельной оси *x*. При пролете в поперечном электрическом поле наличие разности скоростей приведет к тому, что частицы будут находиться разные интервалы времени в поле. В результате частицы будут отклонены в поперечном направлении на различные углы α_1 и α_2. После прохождения отрезка с полем $\vec{E}$ будут два пучка частиц, разделенных в пространстве, с углом разделения

$$\Delta\alpha = \alpha_1 - \alpha_2, \qquad (9.2)$$

следовательно, угол разделения $\Delta\alpha$ будет пропорционален разности времени пролета частицами с массой m_1 и m_2.

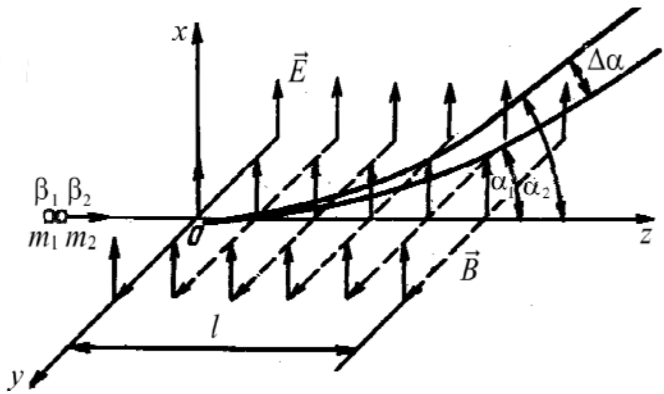


Рис. 9.1. Электростатическая сепарация

Основные кинематические соотношения. Плоскость $x0z$ назовем плоскостью сепарации. Уравнение движения частицы с импульсом p_x и зарядом *e* в плоскости сепарации имеет вид

$$\frac{dp_x}{dt} = eE, \qquad (9.3)$$

где E – постоянная величина.

Интегрируя (9.3), получим при начальных условиях $p_x\big|_{t=0} = 0$ следующее уравнение

$$p_x = eE\tau, \tag{9.4}$$

где τ – время пролета заряжебнной частицей участка l с поперечным электрическим полем. Разность времени пролета частицами со скоростями β_1 и β_2 участка l равна

$$\Delta\tau = \tau_1 - \tau_2 = \frac{l}{c}\Delta\left(\frac{1}{\beta}\right), \tag{9.5}$$

где

$$\Delta\left(\frac{1}{\beta}\right) = \frac{1}{\beta_1} - \frac{1}{\beta_2}. \tag{9.6}$$

Предположим, что $p_x \ll p$, т.е. импульс частиц значительно превосходит отклоняющий импульс. Данное предположение практически всегда выполняется при электростатической сепарации частиц высокой энергии.

Разность поперечных импульсов частиц 1 и 2-го сортов равна

$$\Delta p_x = p_{x1} - p_{x2} = eE\tau_1 - eE\tau_2 = \frac{eEl}{c}\Delta\left(\frac{1}{\beta}\right). \tag{9.7}$$

Угол разделения Δα частиц на выходе участка с полем E равен

$$\Delta\alpha = \frac{\Delta p_x}{p}. \tag{9.8}$$

Выражение (9.8) справедливо при условии $p_x \ll p$. Это условие позволяет заменить криволинейные траектории прямолинейными. Подставляя (9.7) в (9.8), получим

$$\Delta\alpha = \frac{eEl}{pc}\Delta\left(\frac{1}{\beta}\right). \tag{9.9}$$

Оценим величину Δα для крайне релятивистского случая, когда

$$\beta_1 \approx \beta_2 \approx 1. \tag{9.10}$$

Известно, что

$$\beta = \frac{pc}{W} = \frac{pc}{\sqrt{(pc)^2 + (m_0c^2)^2}}, \tag{9.11}$$

где m_0c^2 – энергия покоя; p – импульс частицы.

Для частицы со скоростью β_1 из (9.11) в крайне релятивистском приближении имеем

$$\beta_1 \cong \left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{m_{01}c^2}{pc}\right)^2\right]^{-1}, \tag{9.12}$$

а для частицы со скоростью β_2 аналогично получим

$$\beta_2 \cong \left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{m_{02}c^2}{pc}\right)^2\right]^{-1}. \tag{9.13}$$

Подставляя (9.12) и (9.13) в (9.6) находим

$$\Delta\left(\frac{1}{\beta}\right)=\frac{1}{2(pc)^2}\Delta(W_0^{\,2}), \tag{9.14}$$

где

$$\Delta(W_0^{\,2})=[(m_{01}c^2)^2-(m_{02}c^2)^2]. \tag{9.15}$$

Таким образом, разность обратных величин скоростей двух частиц пропорциональна разности квадратов энергий покоя.

Подставляя выражение (9.14) в (9.9), получим выражение для угла разделения

$$\Delta\alpha=\frac{eEl\Delta(W_0^{\,2})}{2(pc)^3}. \tag{9.16}$$

Из этого выражения видно, что угол разделения возрастает с увеличением E и сильно уменьшается при увеличении импульса p. Следовательно, частицы при больших импульсах электростатическим образом сепарировать практически невозможно.

Опыт работы показывает, что в электростатических сепараторах можно разделять частицы с импульсами, не превышающими величину приблизительно 10–20 ГэВ/с.

Не менее важной характеристикой сепарации по сравнению с $\Delta\alpha$ является линейное разделение Δx, которое может быть увеличено за счет введения дрейфового расстояния, которое свободно от электрического поля, что, в свою очередь, позволит улучшить условия сепарации.

Найдем выражение для линейного разделения Δx. Для этого используем уравнение (9.3), в котором перейдем к дифференцированию по продольной координате z:

$$\frac{dp_x}{dt} = \frac{dz}{dt}\frac{dp_x}{dz} = eE \qquad (9.17)$$

или

$$\frac{dp_x}{dz} = \frac{eE}{v} = \frac{eE}{\beta c},$$

где $v = dz/dt$.

Проинтегрировав выражение (9.17) с учетом начальных условий $p_x\big|_{z=0} = 0$, получим

$$p_x = \frac{eE}{\beta c} z\ . \qquad (9.18)$$

Перепишем (9.18) для случая, когда масса частицы не изменяется в процессе движения (β = const):

$$m\frac{dx}{dt} = m\frac{dz}{dt}\frac{dx}{dz} = \frac{eEz}{\beta c},$$

откуда находим

$$\frac{dx}{dz} = \frac{eEz}{m\beta^2 c^2}\,. \qquad (9.19)$$

Полагая, что на входе в пространстве с полем отклонение частицы от оси отсутствует, найдем

$$x = \frac{eEz^2}{2pc}\frac{1}{\beta}. \qquad (9.20)$$

На входе, когда $z = l$, отклонение от оси z для первой частицы будет равно $x_1 = \dfrac{eEz^2}{2pc}\dfrac{1}{\beta_1}$, а для второй – $x_2 = \dfrac{eEz^2}{2pc}\dfrac{1}{\beta_2}$.

Тогда линейное разделение

$$\Delta x_l = x_1 - x_2 = \frac{eEl^2}{2pc}\left(\frac{1}{\beta_1} - \frac{1}{\beta_2}\right) = \frac{eEl^2}{2pc}\Delta\left(\frac{1}{\beta}\right). \qquad (9.21)$$

Выражение для линейного разделения можно переписать поиному:

$$\Delta x_l = \frac{eEl\Delta(W_0{}^2)}{2(pc)^3}\frac{l}{2}, \qquad (9.22)$$

причем первый сомножитель есть ни что иное как угол разделения.

Следовательно, если после участка с поперечным полем $\vec{E}$ находится дрейфовое пространство протяженностью L, то линейное разделение равно (рис. 9.2)

$$\Delta x_L = \frac{eEl\Delta(W_0^2)}{2(pc)^3}\left(\frac{l}{2}+L\right). \tag{9.23}$$

Таким образом, есть возможность увеличить линейное разделение за счет пролетного расстояния L. Однако это сопровождается чрезмерным увеличением длины всего сепараторного канала.

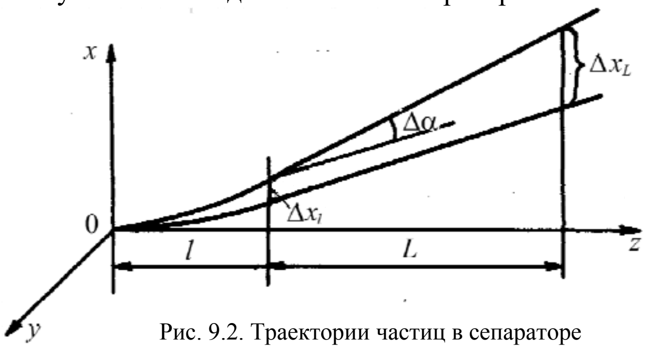


Рис. 9.2. Траектории частиц в сепараторе с дрейфовым участком

Электростатический сепаратор с магнитным полем. Условия проведения эксперимента со вторичными частицами часто требуют сохранения первоначального направления движения полезного сорта частиц. Чтобы это обеспечить, используют поперечное магнитное поле $\vec{B}$, направленное параллельно оси y (см. рис. 9.1). При наличии поперечного магнитного поля картина разделения частиц будет отличаться от той, которая изображена на рис. 9.2. Рассмотрим диаграмму сил, которые действуют на частицу, движущуюся со скоростью υ_1 (рис. 9.3).

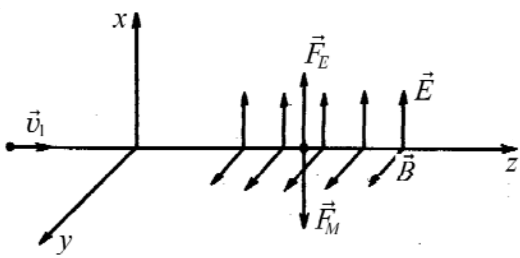


Рис. 9.3. Направление электрического и магнитного полей

Теперь на частицу кроме силы со стороны электростатического поля $\vec{F}_E$ будет действовать сила $\vec{F}_M$, обусловленная магнитным полем. Направление этих сил противоположное, поэтому магнитное поле уменьшает отклонение частиц под действием электрического поля. При определенной величине поля B силы $\vec{F}_E$ и $\vec{F}_M$ будут равны, что позволит частицам, например, со скоростью υ_1 двигаться по оси z без отклонения. Уравнение движения для рассматриваемой частицы имеет следующий вид

$$\frac{dp_{x1}}{dt} = eE - e\upsilon_1 B \,. \tag{9.24}$$

Данная частица будет двигаться без отклонения ($\frac{dp_{x1}}{dt} = 0$), если выбрать магнитное поле равным

$$B = \frac{e}{\upsilon_1} = \frac{E}{\beta_1 c} \,. \tag{9.25}$$

На частицы, движущиеся со скоростью β_2, будет действовать поперечная сила

$$\frac{dp_{x2}}{dt} = eE - e\upsilon_2 B = eE\left(1 - \frac{\beta_2}{\beta_1}\right). \tag{9.26}$$

Направление отклонения частиц со скоростью β_2 по отношению к частицам со скоростью β_1 будет зависеть от величины β_2, т.е. если $\beta_2 > \beta_1$, то отклонение частиц будет вниз относительно оси z, если $\beta_2 < \beta_1$, то – вверх.

Из уравнения (9.26) видно, что если мы имеем пучок ультрарелятивистских частиц, т.е. $\beta_1 \approx \beta_2 \approx 1$, то разделение частиц, как уже было отмечено ранее, будет затруднено, так как правая часть последнего уравнения будет равна нулю. Следовательно, частица со скоростью β_2 также не будет отклоняться от оси системы.

Следует отметить, что несмотря на наличие поля $\vec{B}$, угол разделения будет оставаться тем же самым. Это нетрудно показать, воспользовавшись выражением (9.26). Следовательно, траектория выделяемых частиц в сепараторе с магнитным полем будет оставаться прямолинейной, при сохранении угла разделения ($\Delta\alpha_B = \Delta\alpha$).

Рассмотренный вариант применения магнитного поля не является единственным. Существуют два других способа расположения магнитов. Первый способ состоит в том, что на входе и выходе ставят два небольших компенсирующих магнита M_1 и M_2 с направлением поля, указанным на рис. 9.4, *а*. Данный способ применяют при сравнительно высоких энергиях, когда углы поворота невелики, и это из-за незначительной кривизны траектории не приводит к существенному уменьшению полезной апертуры сепаратора.

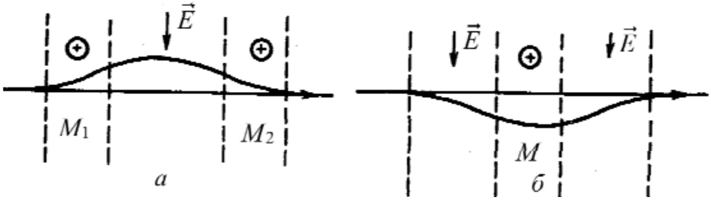


Рис. 9.4. Варианты расположения компенсирующих магнитов
в электростатическом сепараторе

Второй способ, состоящий в разделении участка с электрическим полем $\vec{E}$ на две части и размещения между ними компенсирующего магнита M (рис. 9.4, *б*), позволяет снизить апертуру сепаратора. Уменьшение апертуры сепаратора произойдет за счет того, что снизится длина секции, в которой осуществляется отклонение частиц в одном направлении.

В связи с тем, что электрическое поле сепаратора создается между пластинами конденсатора, последние в вариантах с магнитным полем могут быть выполнены не плоскими, а криволинейными. Кроме отмеченных преимуществ, магнитная компенсация в сепараторах имеет принципиальное значение, связанное с обычной дисперсией, сопровождающей разброс частиц по импульсу. Оказывается, что при сепарации с магнитным полем происходит компенсация дисперсии. Действительно, если пучок одноименных частиц движется с некоторым разбросом $\pm\Delta p$, то в электростатическом сепараторе без компенсирующего магнита основная и дисперсионные траектории будут иметь вид, показанный на рис. 9.5 (траектории, проходящие выше оси z). Траектории, проходящие ниже оси z, относятся к движению в магнитном поле без электрического поля сепарации $\vec{E}$.

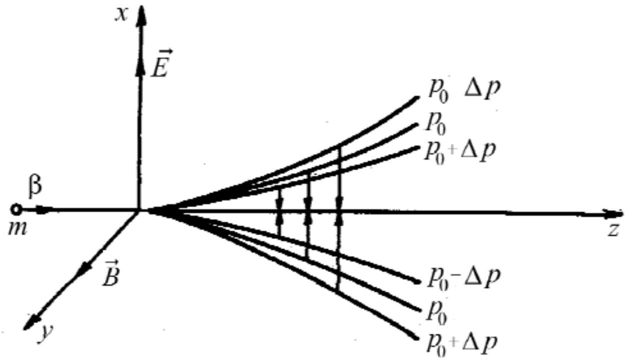


Рис. 9.5. Компенсация дисперсии в электростатическом сепараторе с магнитным полем

При одновременном воздействии на частицу полей $\vec{E}$ и $\vec{B}$, кроме превращения траектории полезной частицы в прямолинейную, происходит компенсация дисперсии, так как частицы с одинаковым импульсом отклоняются относительно оси z (или частиц с импульсом p_0) в различные стороны. Следовательно, на выходе не будет наблюдаться расширение изображения выделяемых частиц.

Таким образом, по своим свойствам электростатический сепаратор с магнитным полем приближается к ахроматическим системам.

Матрица преобразования и аксептанс электростатического сепаратора. Рассмотрение электростатического сепаратора с магнитным полем позволяет сделать заключение о том, что между отклоняющим магнитом и электростатическим сепаратором существует определенное сходство, которое заключается в наличии дисперсионных свойств как у одного, так и у другого.

Собственно иначе и быть не могло, так как в противном случае не имела бы место компенсация дисперсии за счет противоположного воздействия на частицу магнитного и электрического полей.

Определим дисперсию электростатического сепаратора, которая возникает из-за прохождения частиц с различной массой (с различными скоростями). Для этого необходимо рассмотреть движение фоновых частиц. Из уравнения (9.26) получим после перехода к дифференцированию по осевой координате

$$x''=\frac{eE}{pcB^2}\left(1-\frac{\beta_2}{\beta_1}\right)=\frac{eE}{pc}\left(\frac{1}{\beta_2}-\frac{1}{\beta_1}\right). \qquad (9.27)$$

Решая уравнение (9.27) с учетом начальных условий $x\big|_{z=0}=x_0$ и $x'\big|_{z=0}=x_0'$, найдем компоненты выходного вектора фоновых частиц

$$x=x_0+x_0'l+\frac{eE}{pc}\Delta\left(\frac{1}{\beta}\right)\frac{l^2}{2}, \qquad (9.28)$$

$$x'=x_0'+\frac{eE}{pc}\Delta\left(\frac{1}{\beta}\right)l, \qquad (9.29)$$

который перепишем в матричной форме

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ x_0' \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \frac{eE}{pc}\frac{l^2}{2} \\ \frac{eE}{pc}l \end{pmatrix}\Delta\left(\frac{1}{\beta}\right). \qquad (9.30)$$

Матрица первого слагаемого совпадает с матрицей для дрейфового участка длиной l. Второе слагаемое правой части уравнения (9.30) характеризует линейное и угловое отклонение фоновых частиц от оси сепаратора, по которой они влетели в него, т.е.дисперсию частиц по массе, а параметр $\Delta(1/\beta)$ аналогичен разбросу по импульсу. Вектор дисперсии $\begin{pmatrix} \frac{eE}{pc}\frac{l^2}{2} \\ \frac{eE}{pc}l \end{pmatrix}$ можно преобразовать к средней плоскости (по длине) сепаратора. Для этого необходимо вектор дисперсии умножить на обратную матрицу уравнения (9.30) для перехода длиной $l/2$

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{l}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{eE}{pc}\frac{l^2}{2} \\ \frac{eE}{pc}l \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{eE}{pc}l \end{pmatrix}. \qquad (9.31)$$

Таким образом, электростатический сепаратор отклоняет траектории фоновых частиц на угол

$$\Delta\alpha = x' = \frac{eE}{pc} l \Delta\left(\frac{1}{\beta}\right), \tag{9.32}$$

отсчитываемый от середины сепаратора. Иными словами, угловая дисперсия сепаратора соответствует отклонению фоновых частиц на угол, определяемый выражением (9.32).

Продолжая сравнение электростатического сепаратора с отклоняющим магнитом, можно отметить, что если в магните отклонение дисперсионной траектории происходит на выходной главной плоскости, то в сепараторе – на его середине.

Теперь перейдем к оценке аксептанса сепаратора. Обозначим через α расстояние между пластинами сепаратора, между которыми создается поперечное электрическое поле. На фазовой плоскости (рис. 9.6) пропускная способность сепаратора для средней плоскости $z = l/2$ соответствует площади ромба. Одной из диагоналей ромба служит расстояние a, а другой – максимальный угол, при котором частицы, влетая в сепаратор, пройдут через него. В реальном случае линейные и угловые компоненты частиц пучка должны быть меньше, чем a и a/l. Действительно, только минимальная часть пучка будет проходить через сепаратор при максимальных углах отклонения. Обозначим максимальное отклонение частиц в пучке через A, тогда

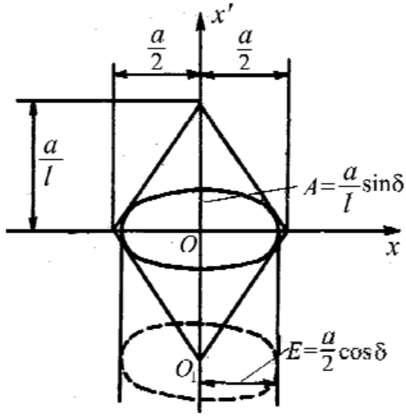


Рис. 9.6. Аксептанс электростатического сепаратора

$$A = \frac{a}{l}\sin\delta, \tag{9.33}$$

где $\sin\delta$ – коэффициент заполнения.

Величина A – одна из полуосей эллипса, который вписан в ромб, изображенный на рис. 9.6. Рассматривая одновременно уравнения одной из сторон ромба, касательной к эллипсу, и самого эллипса, можно показать, что вторая полуось равна

$$E_1 = \frac{a}{2}\cos\delta\,. \tag{9.34}$$

Эмиттанс пучка, вписанного в ромб, есть

$$\varepsilon = A \cdot E_1 = \frac{a^2}{4l}\sin 2\delta. \tag{9.35}$$

Отсюда видно, что максимальный эмиттанс пучка будет при $\delta = \pi / 4$.

Может возникнуть желание согласовать пропускную способность сепаратора (ромб) с эмиттансом пучка таким образом, чтобы фазовый объем пучка занял по возможности наибольшую площадь внутри ромба. Данный случай будет соответствовать расположению эллипса, когда максимальная ось эллипса совпадает с осью x'. Однако на самом деле нужно рассматривать два эллипса. Один с центром O характеризует пучок полезных частиц, а другой с центром O_1 – фоновых. Для полного разделения необходимо, чтобы эти эллипсы не перекрывались, поэтому и выбрана конфигурация фазового эллипса, указанного на рис. 9.6, так как в другом случае необходимо обеспечить значительно больший угол разделения, что бывает часто технически трудно осуществить. Для характеристики сепарации введем коэффициент качества разделения

$$R = \frac{|\Delta x'|}{2A}, \tag{9.36}$$

в котором входящие величины следует взять из выражений (9.32) и (9.33).

Из (9.36) получим выражение для коэффициента заполнения

$$\sin\delta = \frac{eEl^2}{2pcaR}\Delta\left(\frac{1}{\beta}\right) \le \frac{1}{\sqrt{2}}\,. \tag{9.37}$$

В последнем выражении знак равенства соответствует максимальному эмиттансу пучка ($\delta = \pi / 4$), а знак неравенства – неполному использованию пропускной способности сепаратора. Таким образом, коэффициент заполнения $\sin\delta$ можно определить как максимальный угол отклонения частиц пучка, или коэффициент использования фазового пространства сепаратора по координате x.

При полном разделении должно выполняться условие $R \geq 1$, которое соответствует случаю, когда эллипсы полезных и фоновых частиц касаются.

Максимальный эмиттанс пучка полезных частиц, прошедших через сепаратор определяет его аксептанс.

Если вместо E ввести V/a, где V – напряжение на одной из пластин сепаратора при заземленной другой, то максимальный эмиттанс пучка будет равен

$$\varepsilon = \frac{1}{4}\frac{e}{pc}\frac{Vl}{R}\Delta\left(\frac{1}{\beta}\right)\cos\delta, \tag{9.38}$$

где

$$\cos\delta = \sqrt{1-\left[\frac{eV}{2pc}\frac{l^2}{a}\frac{1}{R}\Delta\left(\frac{1}{\beta}\right)\right]^2}. \tag{9.39}$$

Для аксептанса системы справедливо следующее выражение

$$\varepsilon = \frac{1}{4\sqrt{2}}\frac{e}{pc}\frac{Vl}{R}\Delta\left(\frac{1}{\beta}\right). \tag{9.40}$$

Используя (9.14) нетрудно показать, что аксептанс сепаратора при работе с ультрарелятивистскими частицами обратно пропорционален кубу импульса: при $R \geq 1$ и $\delta = \pi/4$ имеем

$$Э \sim \frac{1}{(pc)^3}. \tag{9.41}$$

Область применения электростатических сепараторов. Произвести оценку максимального импульса разделяемых в электростатическом сепараторе частиц позволяет выражение (9.40). Не касаясь конкретных численных оценок, проведем качественные рассуждения. Из (9.40) при $R \geq 1$ можно получить зависимость максимального импульса от напряжения V, длины дефлектора l и аксептанса. Действительно,

$$(pc)_{\text{макс}} \sim \left(\frac{Vl}{Э}\right)^{1/3}. \tag{9.42}$$

Отсюда видно, что в принципе есть несколько путей для продвижения по шкале импульсов, а именно: за счет уменьшения аксептанса системы Э, увеличения напряжения на электродах и увеличения длины сепаратора. Однако изменение любой величины на порядок приведет к увеличению значения (pc) чуть больше, чем в два раза.

Существенное снижение аксептанса сепаратора ниже величины 0,1–0,2 мм·мрад при высоте мишени около 1–2 мм вряд ли целесообразно, так как это приведет к значительному уменьшению интенсивности сепарированного пучка. Таким образом, один из путей не позволяет повысить максимальный импульс сепарируемых частиц.

Что касается длины дефлекторов, то, по-видимому, величину около 20 м следует признать предельной. Действительно, чрезмерное увеличение длины затруднено из-за расходимости пучка и невозможности обеспечить высокую стабильность и однородность полей $\vec{E}$ и $\vec{B}$. Флуктуация угла отклонения связана с флуктуациями электрического δE и магнитного δB полей следующим образом:

$$\frac{\delta\alpha}{\alpha} = \frac{\delta E}{E} + \frac{\delta B}{B}, \qquad (9.43)$$

где $\alpha = \dfrac{eEl}{pc\beta}$.

Величина $\dfrac{\delta\alpha}{\alpha}$ должна быть значительно меньше относительного угла разделения $\dfrac{\Delta\alpha}{\alpha}$. С другой стороны, из (9.9) следует, что $\dfrac{\Delta\alpha}{\alpha} = \dfrac{\Delta\beta}{\beta}$. Это равенство при $\beta_1 \approx \beta_2 \approx 1$ превращается в $\dfrac{\Delta\alpha}{\alpha} = \Delta\beta$, т.е. относительный угол разделения зависит от разности скоростей сепарируемых частиц. Поэтому на стабильность полей $\vec{E}$ и $\vec{B}$ накладываются следующие требования:

$$\frac{\delta E}{E} \ll \Delta\beta, \quad \frac{\delta B}{B} \ll \Delta\beta. \qquad (9.44)$$

Наконец, обсудим последний фактор, определяющий максимальную величину импульса сепарируемых частиц: напряжение V

(или напряжённость поля E). До сих пор получены величины E порядка 200 кВ/см. Такая цифра достигается в сепараторе, в котором в качестве анода взята нержавеющая сталь, а катода – оксидированные стекла с электронной проводимостью. При удельном объемном сопротивлении образцов катода $1\cdot10^7$–$1\cdot10^8$ Ом/см, обеспеченном за счет подогрева катода, была достигнута напряженность электрического поля величиной 215 кВ/см. При электродах из нержавеющей стали эта величина составляла всего 125 кВ/см.

Следовательно, сепарация с помощью электростатических полей ограничивается техническими возможностями, обеспечивающими необходимую величину и стабильность полей Е и В. Можно считать, что предельным значением импульса для антипротонов, вероятно, служит величина 15 ГэВ/с, а для K-мезонов – 10 ГэВ/с.

9.3. Электродинамические сепараторы

Разновидности электродинамических сепараторов. Ограниченность возможностей электростатической сепарации заставило искать другие пути повышения эффективности использования вторичных частиц. Необходимость разработки новых методов сепарации была обусловлена введением в строй ряда ускорительных комплексов с энергией почти до 100 ГэВ. Вторичные частицы, вылетающие из мишеней, обладают импульсами, превышающими те значения, которые поддаются разделению с помощью электростатической сепарации. С целью повышения предельного импульса сепарируемых частиц во многих лабораториях было предложено использовать высокочастотные электромагнитные поля.

Хотя методы высокочастотной сепарации разнообразны, по принципу действия их можно разделить на два типа: продольного и поперечного. Из названия вытекает механизм работы того или иного сепаратора. В сепараторе поперечного типа разделение происходит в поперечном электромагнитном поле непосредственно, а в сепараторе продольного типа создается дополнительный импульсный разброс вторичных частиц. Разделение их в пространстве достигается при последующем магнитном анализе. Наибольшее развитие получили сепараторы поперечного типа.

Односекционные сепараторы. Сепараторы поперечного типа возникли применительно к линейным ускорителям с ВЧ-структурой пучка ускоренных частиц. Один из первых вариантов подобного сепаратора был предложен В. Панофским, руководителем СЛАК, и независимо в СССР Д. Волковым в 1956 г.

Первичные частицы представляют собой сгустки, чередующиеся с интервалом *T*, где *T* – период ускоряющего напряжения. Полагая, что время взаимодействия первичных частиц с мишенью Δt (или время вылета вторичных частиц из нее) мало по сравнению с *T*, можно считать, что вторичные частицы будут повторять структуру первичных частиц, вылетающих из ускорителя.

Очевидно, что для сепарации частиц более всего удобно применять поля с тем же самым периодом *T*, что были использованы для ускорения. В силу условия $\Delta t \ll T$ после магнитного анализа можно считать, что частицы двух сортов с массами m_1 и m_2 относительно электромагнитного поля распределены так, как это показано на рис. 9.7, *а*.

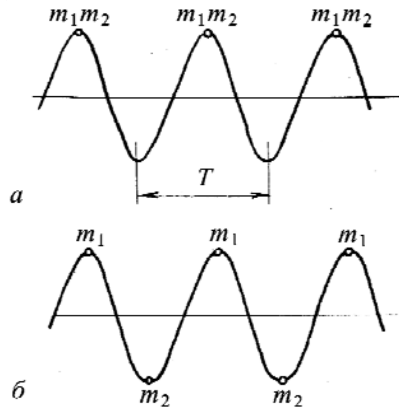


Рис. 9.7. Расположение сепарируемых частиц относительно магнитного поля:
а – после магнитного поля;
б – после дрейфового пространства

Расположение моноимпульсных частиц, показанное на рис. 9.7,*а*, справедливо для случая, если после мишени и анализирующего магнита сразу расположена сепараторная секция. Данное заключение справедливо при условии, что протяженность анализирующего магнита незначительна, и поэтому в нем не происходит разделение сгустков моноимпульсных частиц из-за различия в скоростях.

Что будет происходить со вторичными частицами, если после анализирующего магнита они попадут в дрейфовое пространство? По мере прохождения дрейфового пространства будет иметь место продольное разделение частиц по массам: более легкие частицы будут уходить вперед, а более тяжелые – отставать.

Определим длину разделения частиц Δz на базе L дрейфового пространства. Частицы со скоростью β_1 пролетят базу L за время $t_1 = \dfrac{L}{\beta_1 c}$, а частицы со скоростью β_2 – за это время пролетят расстояние $\beta_2 c \dfrac{L}{\beta_1 c} = L\dfrac{\beta_2}{\beta_1}$. Расстояние Δz, на которое разойдутся частицы на базе L , равно

$$\Delta z = L\frac{\beta_2}{\beta_1} - L = L\beta_2\left(\frac{1}{\beta_1} - \frac{1}{\beta_2}\right). \qquad (9.45)$$

Отсюда видно, что чем больше будет база L, тем дальше друг от друга разойдутся частицы, т.е. расстояние Δz будет больше.

При наличии разделения Δz на базе L, равном

$$\Delta z = \frac{\lambda}{2}(2n+1), \qquad (9.46)$$

где λ – длина волны, а n = 0, 1, 2,…, частицы окажутся расположенными относительно высокочастотного поля, создаваемого в последующей за базой L сепараторной секции, на противоположных гребнях (рис. 9.7, *б*).

Если в сепараторной секции возбуждена волна поперечного типа, то частицы получат противоположные по знаку угловые отклонения α_1 и α_2, которые в сумме дадут полный угол разделения

$$\Delta\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 = \frac{eE_0 l}{p_0 c}\left(\frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_2}\right), \qquad (9.47)$$

где E_0 – амплитуда напряженности ВЧ-поля, l – длина сепараторной секции. Выражение (9.47) получено в предположении, что скольжение частиц относительно волны отсутствует. Это предположение выполняется только для одного сорта частиц, однако, если выбрать величину l относительно малой, то можно считать, что и для второго сорта частиц скольжением можно пренебречь. Из (9.47) видно, что угол разделения зависит от времени пролета частиц в электродинамическом сепараторе.

В электростатическом сепараторе угол разделения пропорционален разности времени пролета частиц.

В ультрарелятивистском случае, когда $\beta_1 \approx \beta_2 \approx 1$ угол разделения равен

$$\Delta\alpha = \frac{2eE_0 l}{p_0 c}. \tag{9.48}$$

Определим связь между длиной волны λ в сепараторной секции и длиной базы L. Наиболее благоприятный вариант получится при $n = 0$.

Сравнивая выражения (9.45) и (9.46) для релятивистских частиц, получим

$$\frac{\lambda}{2} = L\left(\frac{1}{\beta_1} - \frac{1}{\beta_2}\right) = L\Delta\left(\frac{1}{\beta}\right). \tag{9.49}$$

Подставляя в (9.49) выражение (9.14), найдем длину базы

$$L = \frac{\lambda}{2\Delta\left(\frac{1}{\beta}\right)} = \frac{\lambda (p_0 c)^2}{\Delta (W_0)^2}. \tag{9.50}$$

Отсюда видно, что для уменьшения величины L необходимо переходить на работу сепаратора с меньшей длиной волны λ.

Двухсекционный сепаратор Блюитта. Следующей разновидностью электродинамических сепараторов поперечного типа служит устройство, предложенное Блюиттом. Схема этого сепаратора (рис. 9.8, *а*) позволяет избежать зависимости работы сепаратора от временной структуры пучка, т.е. от режима работы ускорителя. Сепаратор содержит два дефлектора D_1 и D_2 и два поглотителя $П_1$ и $П_2$.

Дефлекторы представляют собой диафрагмированные волноводы, в которых возбуждается электромагнитная волна поперечного типа. На этом же рисунке показано расположение сепарируемых частиц относительно волны в первом и втором дефлекторах (рис. 9.8, *б*).

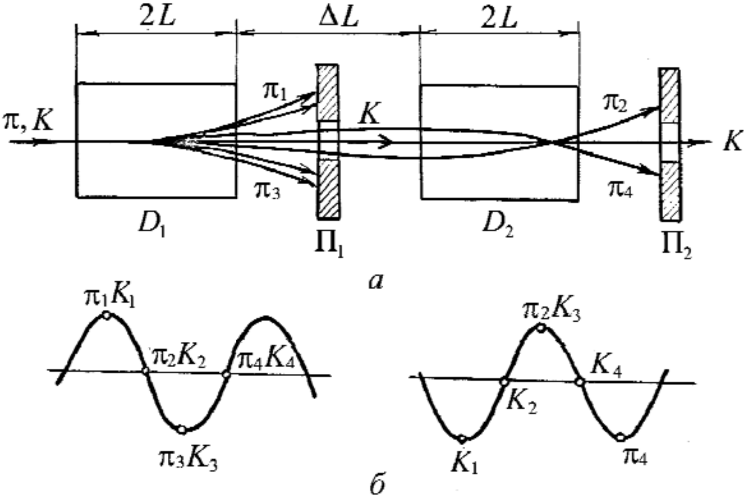


Рис. 9.8. Разделение частиц по схеме Блюитта

Динамика работы сепаратора заключается в следующем. Вторичные частицы, образованные на внутренней мишени, выводятся из ускорителя с фиксированным импульсом и направляются в первый дефлектор D_1 строго по оси. При прохождении дефлектора необходимо, чтобы полезные частицы K изменяли свою начальную фазу на величину, кратную 2π. Такое условие соответствует случаю, когда частицы, проскользив относительно волны, не получат поперечного отклонения. Из этого условия определим длину дефлектора D_1. Действительно,

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{1}{\beta_r} - \frac{1}{\beta_b}\right), \tag{9.51}$$

где φ – фаза частицы со скоростью β_r относительно волны, движущейся со скоростью β_b вдоль оси волновода с длиной волны λ, которое несложно получить из выражения для фазы $\varphi = \omega t - k_z z$.

Из уравнения фазовых колебаний (9.51) имеем условие для определения длины дефлектора: $\Delta\varphi_k = \frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{1}{\beta_k} - \frac{1}{\beta_b}\right)\Delta z = 2\pi$, откуда

находим

$$2L = \Delta z = \frac{\lambda}{\left(\frac{1}{\beta_k} - \frac{1}{\beta_b}\right)}, \tag{9.52}$$

где β_k – относительная скорость полезных частиц. Таким образом, частицы со скоростью β_k будут вылетать из первого дефлектора длиной $2L = \Delta z$, определяемой выражением (9.52), при тех же фазах, при которых они влетели в него.

Скорость электромагнитной волны подбирается так, чтобы обеспечить полный синхронизм ее движения с движением фоновых π-частиц. Следовательно, фоновые частицы не будут испытывать скольжения относительно электромагнитной волны. В этом нетрудно убедиться, рассмотрев уравнение (9.51) при $\beta_r = \beta_\pi = \beta_b$.

Проследим за динамикой полезных и фоновых частиц, которые на входе в первый дефлектор распределены равномерно. После прохождения первого дефлектора фоновые частицы (π-мезоны) с фазами π_1 и π_3 или вблизи них будут отклонены в разные стороны от оси и задержаны первым поглотителем $П_1$. Фоновые частицы с фазами π_2 и π_4 или вблизи них и полезные *K* частицы будут проходить через поглотитель $П_1$.

Полное разделение фоновых и полезных частиц будет достигнуто с помощью второго дефлектора такой же длины, как и первый, причем необходимо позаботиться о том, чтобы частицы π_2 и π_4 влетели во второй дефлектор $Д_2$ в пучностях поля. Иными словами, на участке между дефлекторами частицы π_2 и π_4 должны изменить свою фазу относительно поля волны на π/2 (рис. 9.8, *б*). Требуемый сдвиг частиц относительно волны можно обеспечить за счет выбора расстояния между дефлекторами. Определим расстояние между дефлекторами ΔL.

Согласно (9.45) на этом расстоянии частицы разойдутся на расстояние Δz_1. С другой стороны на этом расстоянии набегает разность фаз между частицами $K_{2,4}$ и $\pi_{2,4}$, равная или кратная π /2. Если частица π_2 будет сдвигаться влево относительно частицы K_2, тогда время, за которое частицы набегают разность фаз π/2, будет равно $t_1 = T/4$, где *T* – период колебаний электромагнитной волны. Если же частица будет сдвигаться вправо, то время $t_2 = \frac{T}{2} + \frac{T}{4}$. Выражение для t_2 более общее, чем для t_1, поэтому запишем эти два выражения в общем виде: $t_2 = \frac{nT}{2} + \frac{T}{4}$. Следовательно,

$$t_2 = \frac{nT}{2} + \frac{T}{4} = \frac{\Delta z_1}{\beta_\pi c} = \frac{\Delta L \beta_\pi}{\beta_\pi c} \Delta\left(\frac{1}{\beta}\right), \tag{9.53}$$

где $\Delta\left(\frac{1}{\beta}\right) = \frac{1}{\beta_k} - \frac{1}{\beta_\pi}$. Подставляя (9.52) в (9.53), получим

$$\frac{n}{2} \cdot \frac{\lambda}{c} + \frac{\lambda}{4c} = \frac{\Delta L}{2L} \frac{\lambda}{c},$$

откуда находим

$$\Delta L = \frac{L}{2}(2n+1). \tag{9.54}$$

Выражение (9.54) позволяет определить длину дрейфового пространства из условия набега разности фаз между K- и π-частицами, равной $\pi/2$. Одновременно из рис. 9.8, *б* видно, что отклоняющие поля в дефлекторах D_1 и D_2 находятся в противофазах. По какой причине дефлекторы D_1 и D_2 необходимо возбуждать в противофазах? Практически по оси сепаратора без возмущения будут двигаться K-частицы, вошедшие при нуле поля и с нулевым входным вектором. K-частицы, влетающие в дефлектор D_1 при условиях, отличных от названных, будут иметь возмущение траектории. Кроме того, причиной возмущения траектории может быть и неоднородность поля по сечению дефлектора D_1. Чтобы скомпенсировать возмущение траекторий полезных частиц, применяют противофазное возбуждение. Прошедшие через отверстие в первом поглотителе частицы π_2 и π_4, попав в максимумы отклоняющего поля второго дефлектора, будут испытывать наибольшее отклонение в разные стороны от оси. Частицы, влетающие вблизи этих фаз, будут также отклонены, но на меньший угол. K-частицы пройдут без изменения как первый, так и второй дефлекторы.

Еще раз необходимо отметить, что особенность работы сепаратора Блюитта состоит в том, что он позволяет работу сепаратора и ускорителя без ограничений, т.е. сепаратор разделяет пучки, имеющие любую временную структуру. Это часто бывает очень удобно. Однако в таком сепараторе из-за большой длины волноводов сильно зарезается пропускная способность. К выводу о большой длине волновода нетрудно прийти, рассмотрев (9.52).

Сепаратор Панофского–Шнелла. Чтобы повысить пропускную способность сепаратора, Панофским и Шнеллом была предложена схема сепарации, в которой дефлекторы имеют значительно меньшую длину, чем в сепараторе Блюитта. Схема сепаратора Панофского–Шнелла показана на рис. 9.9, *а*. На рис. 9.9, *б* показано расположение сепарируемых частиц по отношению к волне в первом и втором дефлекторах.

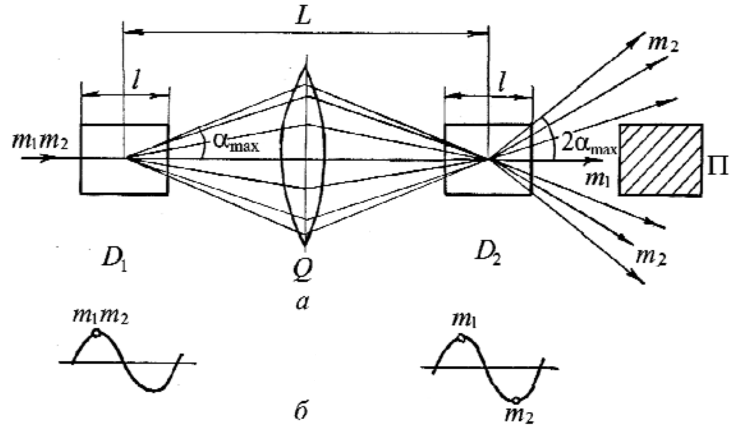


Рис. 9.9. Сепаратор Панофского–Шнелла

Схема сепаратора включает, кроме двух дефлекторов, расположенных на расстоянии L, магнитный объектив Q, например, симметричный квартет, проектирующий середину первого дефлектора на центр второго. Справа от дефлекторов находится поглотитель П, который задерживает попадающие на него частицы.

Принцип действия сепаратора Панофского–Шнелла заключается в следующем.

Моноимпульсный пучок вторичных частиц с массами m_1 и m_2 влетает в дефлектор D_1. В нем частицы, испытывая воздействие со стороны поперечного поля, отклоняются от оси системы, причем частицы обоих сортов в зависимости от фазы влета будут испытывать различное отклонение, не превышая максимальный угол $\alpha_{\text{макс}} = \dfrac{eE_0 l}{p_0 c}$ как в одну, так и в другую стороны от оси, где E_0 – амплитуда напряженности электрического поля, а l – длина дефлектора. На дрейфовом расстоянии между дефлекторами произойдет продольное разделение частиц: более легкие частицы обгонят тяжелые. Можно подобрать длину базы L такой величины, чтобы во второй дефлектор частицы разных сортов влетали в противофазах (рис. 9.9, *б*).

Следовательно, выбором фаз частиц в дефлекторах можно полностью скомпенсировать угловое отклонение одних частиц и удвоить его для других. В поглотитель будут попадать не только частицы m_1, но и небольшая доля частиц m_2, которые прошли дефлекторы вблизи нуля поля. В произвольном случае будет происходить не полная компенсация.

Получим выражение для угла отклонения частиц при произвольном расстоянии между дефлекторами. Ввиду того, что симметричный квартет поворачивает изображение, угол отклонения в первом дефлекторе необходимо взять со знаком минус. В результате общий угол отклонения частиц в первом и втором дефлекторах будет равен

$$\alpha = -\alpha_{\text{макс}}[\sin(\omega t) - \sin(\omega t + \varphi)] = 2\alpha_{\text{макс}} \sin\frac{\varphi}{2}\cos(\omega t + \frac{\varphi}{2}), \quad (9.55)$$

где ω – угловая частота поперечного электромагнитного поля, t – время, φ – разность фаз влета во второй дефлектор частиц m_1 и m_2.

Из (9.55) видно, что амплитуда углового отклонения

$$\alpha = 2\alpha_{\text{макс}} \sin\frac{\varphi}{2}. \quad (9.56)$$

С помощью (9.45) запишем выражение для величины в релятивистском случае, а именно:

$$\varphi = \omega\frac{\Delta z}{c} = \frac{\omega L \Delta(W_0{}^2)}{2(p_0 c)^2}. \quad (9.57)$$

Угол отклонения α с учетом (9.57) равен

$$\alpha = \alpha_{\text{макс}} \sin\left(\frac{\omega L}{4c} \cdot \frac{\Delta(W_0^2)}{(p_0 c)^2}\right). \tag{9.58}$$

Выбрав L для заданного импульса p_0 таким образом, что $\varphi = \pi$, получим полностью скомпенсированное угловое отклонение фоновых частиц (см. рис. 9.9, *а*).

Для частиц с импульсом p, отличным от p_0, получим выражение для угла отклонения в следующем виде:

$$\alpha = \alpha_{\text{макс}} \cdot 2\sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{p_0^2}{p^2}\right). \tag{9.59}$$

При условии, что $p >> p_0$, имеем

$$\alpha \approx 2\alpha_{\text{макс}} \frac{\pi}{2} \frac{p_0^2}{p^2}. \tag{9.60}$$

Из выражения (9.60) видно, что если импульс частиц сильно отличается от номинального значения p_0 , т.е. при $p >> p_0$, то зависимость угла отклонения от импульса одинакова как в сепараторе Панофского–Шнелла, так и электростатических сепараторах. Эта зависимость обратно пропорциональна кубу импульса.

Разделение трехкомпонентного пучка в сепараторе Панофского–Шнелла. Теперь остановимся на разделении трехкомпонентного пучка в двухдефлекторном сепараторе Панофского–Шнелла. Этот вариант более сложный по сравнению с двухкомпонентной сепарацией и, естественно, накладывает дополнительные условия. Действительно, в случае трехкомпонентного пучка частиц с массами m_1, m_2 и m_3 можно подобрать сдвиг фаз между частицами, образуемый при пролете базы L таким образом, что два сорта частиц, скажем с массами m_1 и m_2 не будут отклоняться, а третий сорт m_3 будет приобретать удвоенное отклонение. Этого можно достигнуть, если частицы с массой m_1 и m_2 будут сдвинуты на целое число волн, а по отношению к ним частицы с массой m_3 будут находиться в противофазе, а именно:

$$\varphi_{m_1 m_2} = 2\pi n, \quad \varphi_{m_1 m_3} = (2n-1)\pi. \tag{9.61}$$

Следует отметить, что разделение в двухсекционном сепараторе трехкомпонентного пучка наиболее эффективно может быть осуществлена только при фиксированных значениях импульса.

Тип волны в дефлекторах. В качестве дефлектора используется диафрагмированный волновод, в котором возбуждается волна *HEM* или как ее называют гибридная волна *EH*.

Почему остановились на диафрагмированных волноводах? Имеется несколько причин.

1. Аксиальная симметрия системы позволяет упростить технологию изготовления.

2. Диафрагмированные волноводы широко и глубоко изучены во многих странах, где построены линейные электронные ускорители.

3. Поиски новых систем показали, что вновь изученные системы не дали результатов, которые были бы лучше, чем результаты, полученные на диафрагмированных волноводах.

Создание волны *HEM* обеспечивается соответствующим возбуждением и выбором геометрических размеров диафрагмированных волноводов. Волна *HEM* имеет характерные черты как волны E_{11}, так и H_{11}. Эпюру магнитного поля волны *HEM* изобразить трудно, поэтому нарисуем лишь электрические силовые линии поля (рис. 9.10, *а*), которое возбуждается в диафрагмированном волноводе.

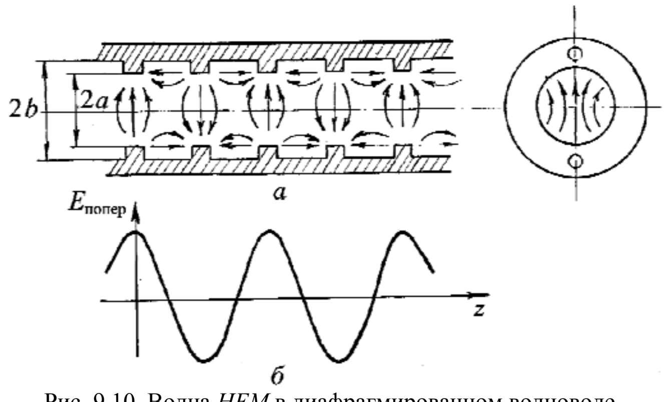


Рис. 9.10. Волна *HEM* в диафрагмированном волноводе

На рис. 9.10, *б* изображен вид колебаний π_{HEM}, так как длина волны укладывается на длине двух ячеек. При виде колебаний $\pi/2$ продольные силовые линии будут занимать четыре ячейки. Магнитные силовые линии перпендикулярны электрическим силовым линиям. Поверхность их будет искривлена. Силовые линии электрического поля совпадают с силовыми линиями E в волне H_{11}. На рис. 9.10 показано изменение поперечного поля вдоль оси системы. Параметр $2a$ выбирается так, чтобы исключить потери частиц.

9.4. Сравнение электродинамических и электростатических сепараторов

В процессе рассмотрения сепарации частиц постоянно подчеркивалось, что электродинамические сепараторы имеют преимущество перед электростатическими. С другой стороны, очевидно, что продвижение по шкале импульсов сопровождается увеличением длины и количества дефлекторов сепарационного тракта. С этой точки зрения электродинамический и электростатический сепараторы мало чем отличаются.

Основное различие состоит в угле разделения. Угол разделения ультрарелятивистских частиц в электростатических сепараторах равен

$$\Delta\alpha_{\text{эс}} = \frac{eEl({W_{01}}^2 - {W_{02}}^2)}{2(pc)^3}, \tag{9.62}$$

а в электродинамических волноводных сепараторах поперечного типа

$$\Delta\alpha_{\text{эд}} = \frac{2eEl}{pc}. \tag{9.63}$$

Из выражений (9.62) и (9.63) видно, что зависимость угла разделения от импульса в электродинамических сепараторах более слабая, чем в электростатических:

$$\Delta\alpha_{\text{эс}} \sim \frac{1}{(pc)^3}, \quad \Delta\alpha_{\text{эд}} \sim \frac{1}{pc}.$$

Данное различие обусловлено отличием времени взаимодействия частиц с поперечным полем. В первом случае электростатического сепаратора угол разделения зависит от разности времени пролета частиц, а во втором – от самого времени пролета.

10. СИСТЕМЫ ВЫВОДА ЧАСТИЦ ИЗ ЦИКЛИЧЕСКИХ УСКОРИТЕЛЕЙ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

Для эффективного использования пучков ускоренных частиц на различные энергии в исследовательских центрах были разработаны и созданы системы вывода частиц, предусматривающие работу со всем пучком сразу или по частям. Так возникли системы быстрого и медленного выводов частиц из циклических ускорителей.

Удаление высокоэнергетических частиц с равновесных траекторий требует достаточных усилий с использованием различных приемов, например, специальных мишеней или ударных (кикерных) магнитов для раскачки бетатронных колебаний и заброски частиц в стационарные массивные магниты, которые невозможно расположить на равновесной траектории. При частичном использовании ускоренного пучка (медленном выводе) применяется набор магнитных элементов для наведения частиц на резонанс.

Системы вывода частиц можно отнести как к составным частям, так и к выходным устройствам ускорителей. Здесь системы вывода будут отнесены к выходным устройствам ускорителя, так как они предназначены для работы с уже ускоренными пучками.

В данной главе будут рассмотрены системы вывода, используемые в слабофокусирующих и сильнофокусирующих ускорителях на высокие энергии. Первоначально остановимся на наиболее ранних системах вывода, которые нашли применение в ускорителях со слабой фокусировкой.

10.1. Системы вывода частиц из слабофокусирующих ускорителей

Использование внутренних мишеней для вывода частиц. Система вывода Пиччони была широко применена на кольцевых ускорителях со слабой фокусировкой. Эта система обладает наибольшей эффективностью именно для слабофокусирующих магнитных систем. Принцип работы ее состоит в следующем (рис. 10.1). При достижении конечной энергии отключается ускоряющее поле при продолжающем нарастать магнитном поле.

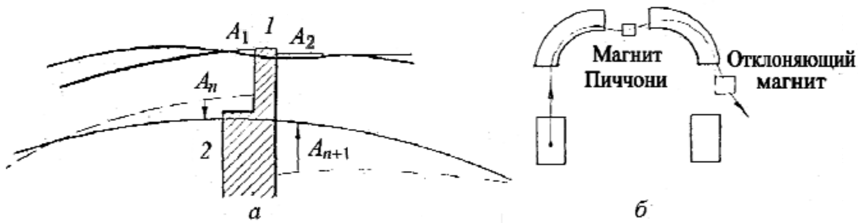


Рис. 10.1. Система вывода частиц Пиччони:
а – двухступенчатая мишень; *б* – схема вывода

В результате происходит сворачивание траектории частиц к внутренней стенке ускорительной камеры. На пути движения частиц стоит двухступенчатая мишень: тонкая *1* и толстая *2* (рис. 10.1,*а*). Сначала частицы проходят через тонкую ступень мишени, которая вводится внутрь камеры после того, как произойдет затухание бетатронных колебаний в процессе ускорения. При многократном прохождении тонкой ступени мишени происходит уменьшение радиуса равновесной траектории (из-за потерь энергии) и амплитуды бетатронных колебаний до тех пор, пока частицы не попадут на толстую ступень мишени. При прохождении этой ступени происходит значительная потеря энергии и резкое снижение радиуса равновесной траектории, одновременно наблюдается резкое возрастание амплитуды бетатронных колебаний

В результате через половину длины бетатронных колебаний будет иметь место максимальное отклонение частиц к внутренней стенке камеры. В месте максимального отклонения частиц стоит так называемый магнит Пиччони с обратным по направлению к основному полем. Магнит Пиччони меняет кривизну траектории, в результате чего в одном из квадрантов частицы движутся по диагонали и попадают в отклоняющий (выводной) магнит. После отклоняющего магнита частицы выходят из зоны действия основного магнитного поля ускорителя.

Таким образом, можно заключить, что двухступенчатая мишень служит для раскачки радиальных бетатронных колебаний, после чего частицы попадают в элементы отклоняющей системы (магнит Пиччони и отклоняющий магнит), которые в процессе ускорения невозможно разместить вблизи равновесной траектории. Эффективность системы вывода Пиччони доведена до 65 %.

Недостатки системы Пиччони состоят в в том, что ее можно использовать только в ускорителях на невысокие энергии (не выше нескольких ГэВ). При бо́льших значениях энергии труднее обеспечить достаточные потери энергии в мишени, если взять более толстую мишень, то из-за многократного рассеяния и увеличения разброса по импульсу ухудшаются фазовые параметры пучка.

Способ Пиччони малоэффективен и затруднен для протонных синхротронов с переменным градиентом, так как амплитуда бетатронных колебаний значительно меньше, а частота радиальных колебаний выше, чем в ускорителях со слабой фокусировкой. При прохождении через мишень теряемая частицей энергия ΔW обеспечивает относительное изменение радиуса траектории

$$\frac{\Delta R}{R} \cong \frac{1}{\nu_r^{\,2}} \frac{\Delta W}{W}, \tag{10.1}$$

где $\Delta R/R$, $\Delta W/W$ – относительные изменения радиуса и энергии частицы, ν_r – число радиальных бетатронных колебаний.

В слабофокусирующем ускорителе для случая релятивистских частиц

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{1}{(1-n)} \cdot \frac{\Delta W}{W} = \frac{1}{\nu_r^{\,2}} \frac{\Delta W}{W}, \tag{10.2}$$

где n – показатель магнитного поля.

Медленный вывод частиц из синхрофазотрона Объединенного института ядерных исследований (ОИЯИ). В основе работы системы медленного вывода частиц из ускорителя со слабой фокусировкой лежит резонанс бетатронных радиальных колебаний $\nu_r = 2/3$. С помощью этой системы удается вывести из ускорителя не менее 90 % ускоренного пучка.

Наведение на резонанс $\nu_r = 2/3$ производится в следующей последовательности. В конце ускорителя, когда магнитное поле достигло значения, соответствующего плоской вершине, а пучок движется по орбите с радиусом R_0, вводится возмущение вертикальной компоненты магнитного поля. При этом показатель поля снижается до величины, приводящей к искажению равновесной орбиты. Этот способ наведения на резонанс характеризуется постоянством эффективности вывода и простотой управления резонансом.

Быстрый вывод частиц из синхрофазотрона ОИЯИ. Система быстрого вывода была создана для облучения пузырьковых камер протонами и легкими ядрами. При этом длительность вывода не должна превышать нескольких сотен мкс при интенсивности 10-20 частиц в импульсе.

В связи с невозможностью применения в слабофокусирующем ускорителе системы быстрого вывода с использованием ударного магнита была изучена возможность использования заброса частиц в выводной магнит резонанса $\nu_r = 2/3$, т.е того самого резонанса, который используется также и при медленном выводе. Было установлено, что время развития резонанса при скачкообразном изменении частоты радиальных бетатронных колебаний составляет около 50 мкс. Следовательно, данный резонанс можно использовать для быстрого вывода. Кроме того, необходимо иметь в виду, что работа с пузырьковыми камерами, сопровождающаяся невысокой загрузкой последних, позволяет выводить незначительную часть ускоренного пучка, т.е. не требует обеспечения высокого коэффициента вывода и большой глубины заброса частиц в зазор выходного магнита. Схема быстрого вывода показана на рис. 10.2. На этом же рисунке показана система медленного вывода.

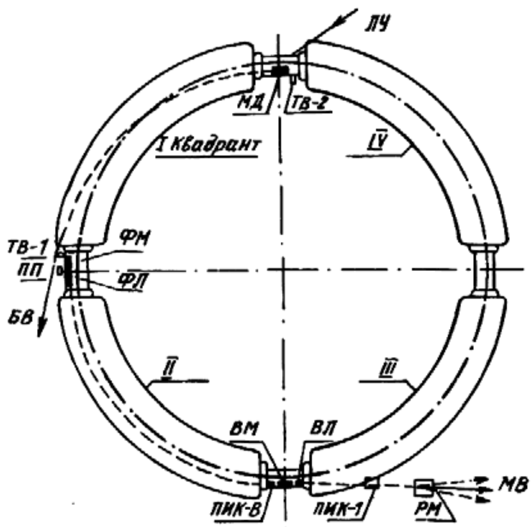


Рис. 10.2. Схема быстрого (БВ) и медленного (МВ) выводов пучка из синхрофазотрона: ФМ – септум-магнит; ФЛ – линза; ПП – механизм перемещения для ФМ и ФЛ; ВМ и ВЛ – магнит и линза второй ступени; РМ – раздаточный магнит; МД – магнит-дефлектор, ТВ-1, ТВ-2 – телекамеры, ПИК-В, ПИК-1 – проволочные ионизационные камеры

Система быстрого вывода включает магнит-дефлектор МД, расположенный в первом прямолинейном промежутке на внутреннем радиусе $R_{мд}$, который меньше равновесного радиуса R_0. Невысокие требования к интенсивности выведенного пучка позволяют зафиксировать положение МД и не перемещать его в течение всего ускорительного цикла.

Обычно при быстром выводе в резонанс попадает небольшая доля циркулирующего пучка (5–10%). При этом быстрый вывод характеризуется следующими параметрами: поле в ускорителе B = = 1 Тл, частота f_0 = 1415, 36 кГц, амплитуда тока в магнитном дефлекторе МД $I_{мд}$ = 19 кА, длительность вывода $\tau_{выв}$ = 600 мкс.

Совмещение быстрого и медленного выводов в синхрофазотроне ОИЯИ. Совмещение быстрого и медленного выводов в одном цикле позволяет повысить эффективность работы ускорителя. Совмещение может быть осуществлено в двух различных вариантах: при разных и одинаковых уровнях энергии.

В первом случае необходимо последовательное включение системы медленного и быстрого выводов на соответствующих уровнях магнитного поля ускорителя. Оптимальная работа каждого из выводов достигается за счет независимой настройки.

На рис. 10.3 показаны диаграммы изменения ведущего магнитного поля B и токов медленного ($I_{мв}$) и быстрого ($I_{бв}$) выводов, когда первоначально осуществляется быстрый вывод, а затем медленный и, наоборот, сначала – медленный, а затем быстрый.

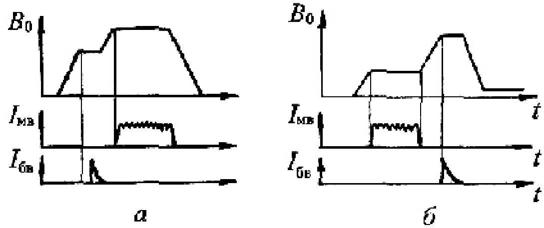


Рис. 10.3. Совместные режимы быстрого (*а*) и медленного (*б*) выводов пучка на разных уровнях энергии

С технической точки зрения труднее совместить два вывода при одной энергии, так как длительность составляет 0,5 с. Это время должно эффективно использоваться для медленного вывода при одновременном механическом перемещении элементов системы вывода, в частности, септум – магнита и линзы.

Диаграммы изменения магнитного поля, токов $I_{мв}$ и $I_{бв}$ показаны на рис. 10.4.

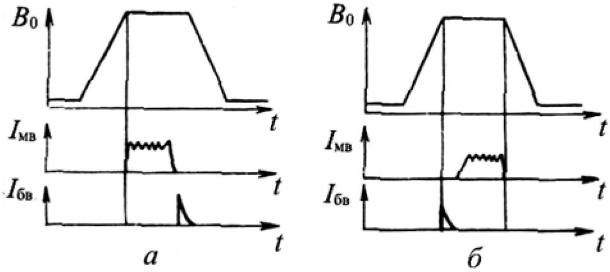


Рис. 10.4. Совместные режимы быстрого (*а*) и медленного (*б*) выводов пучков на одинаковом уровне энергии

10.2. Быстрый вывод частиц из сильнофокусирующих ускорителей

Общие вопросы и принципы действия. Продолжительность быстрого вывода всех частиц или отдельных сгустков (банчей) составляет промежуток времени не более времени одного оборота частицы. Последнее зависит от длины траектории частицы в кратности ускорения q.

Область применения быстрого вывода определяется как требованиями физических экспериментов, так и требованиями со стороны ускорителей. Действительно, в случае генерации вторичных частиц с малым коэффициентом их образования быстрый вывод является наиболее целесообразным. В данном случае уместно сослаться на формирование нейтринных пучков в различных лабораториях мира (г. Серпухов, Чикаго и др.). Целесообразно применять быстрый вывод и в промежуточном ускорителе (бустере) для перевода частиц в большое кольцо ускорителя или накопителя на более высокую энергию.

Для отдельных временных интервалов, связанных с длительностью сгустков, продолжительностью быстрого вывода и срабатывания элементов его, рассмотрим движение частиц в конце ускорения. В это время на орбите вращаются равномерно распределенные по азимуту банчи с фазовой протяженностью α на расстояниях β друг от друга, выраженных в градусах частоты обращения. Параметры α и β можно выразить в градусах радиочастоты, используя выражения $\alpha_f = \alpha q$ и $\beta_f = \beta q$, где α_f и β_f – протяженность банчей и угловое расстояние между ними, взятые в градусах радиочастоты. Очевидно, что $\alpha + \beta = \dfrac{2\pi}{q}$.

Оценим период следования одного сгустка для ускорителя с радиусом траектории $R = 250$ м и при $q = 30$:

$$\tau_{\alpha+\beta} = \frac{2\pi R}{qC} = \frac{250 \cdot 2\pi}{30 \cdot 3 \cdot 10^8} = 1{,}75 \cdot 10^{-7}\, c = 175 \text{ нс}.$$

Для $\alpha_f = 90°$, $\alpha = 3°$, $\beta = 9°$ и, соответственно, $\tau_\alpha = 44$ нс и $\tau_\beta = 131$ нс.

Таким образом, в конце ускорения на орбите находится 30 сгустков длительностью около 44 нс, следующих с интервалом приблизительно 131 нс. Если необходимо вывести один сгусток, то следует обеспечить время срабатывания элементов быстрого вывода не более 131 нс, а если все сгустки 5,25 мкс.

Данные временные интервалы, особенно первый, накладывают определенные требования на магнитные элементы быстрого вывода. Особенности этих элементов будут рассмотрены позже, а сейчас остановимся на принципе работы быстрого вывода, который будет проиллюстрирован на примере системы, работающей в Брукхейвене (США) (рис. 10.5). На оси траектории ускорителя расположен ударный магнит (часто его называют «быстрый кикер») – магнит с низким значением индуктивности обмотки, в котором возбуждается поле на короткий промежуток времени, соответствующий интервалу следования сгустков. Проходя через ударный магнит, частицы сгустка испытывают отклонение от оси.

Следует отметить, что по сравнению с системой Пиччони здесь производит раскачку радиальных колебаний ударный магнит вместо толстой мишени. Благодаря быстродействию ударный магнит располагается на равновесной траектории до начала процесса ускорения.

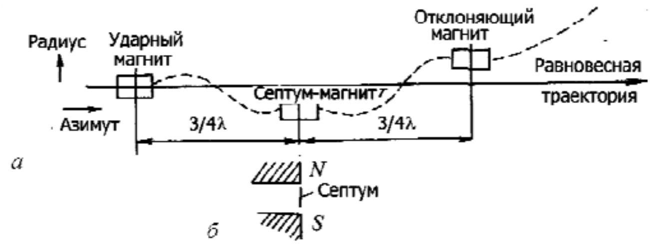


Рис. 10.5. Схема вывода частиц из ускорителя Брукхэйвена:
а – схема вывода; *б* – септум-магнит (вид сверху, повёрнутый на 90° по часовой стрелке)

Через 3/4 длины бетатронных колебаний частицы попадают в септум-магнит, расположенный вблизи равновесной орбиты. Это оказалось возможным благодаря устройству септум-магнита. Действительно, септум-магнит представляет обычный магнит с тонкой металлической пластиной – септумом, которая предназначена для устранения полей рассеяния и ликвидации их влияния на движение частиц в процессе ускорения. Положение септум-магнита в процессе ускорения может изменяться, а именно: в начале ускорения, когда амплитуды бетатронных колебаний еще значительны, септум-магнит должен быть отодвинут подальше от равновесной траектории, а в конце – его можно расположить вблизи ее. Выбор толщины септума и поля в септум-магните требует компромиссного подхода. В идеальном случае необходима «нулевая» толщина септума и максимальное поле. Однако за счет пондеромоторных сил септум может быть искривлен. Поэтому септум делают достаточно толстым, а поле достаточно малым.

Как и в магните Пиччони, поле в септум-магните направлено в противоположную сторону по отношению к основному полю. Функция, возложенная на него идентична: изменять кривизну траектории.

Далее на расстоянии $\frac{3}{4}\lambda$, где λ – длина волны бетатронных колебаний, размещен отклоняющий магнит, выполняющий те же самые функции, что и в системе Пиччони. Необходимо еще подчеркнуть, что благодаря быстродействию ударного магнита имеется возможность выводить отдельные сгустки частиц. Рассмотренная на рис. 10.5 схема не является единственной в своем роде. В ЦЕРНе на протонном синхротроне на энергию 28 ГэВ, например, септум-магнит и отклоняющий магнит были объединены в один. Эффективность быстрого вывода частиц достигала 95%.

Дополнительно следует отметить, что система быстрого вывода, как и любая другая, должна оказывать незначительное воздействие на эмиттанс пучка.

Система быстрого вывода ускорителя Института физики высоких энергий (ИФВЭ). Действующая в настоящее время на протонном синхротроне ИФВЭ система быстрого вывода частиц показана на рис. 10.6. На этом рисунке показаны блоки магнитной системы ускорителя, начиная с 15-го и до 30-го. В промежутках между отдельными блоками размещены элементы системы вывода: ударный магнит УМ-16, отклоняющие магниты ОМ-24, ОМ-26 и ОМ-30. С помощью этой системы может быть осуществлен быстрый вывод частиц по направлениям *A*, *B* и *C*. Система быстрого вывода ускорителя ИФВЭ работает аналогичным образом, как на ускорителе в Брукхейвене.

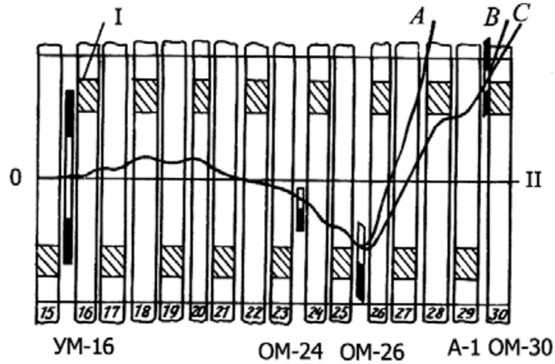


Рис. 10.6. Схема системы быстрого вывода протонов из ускорителя ИФВЭ

Для первоначального отклонения ускоренного пучка используется полноапертурный ферритовый ударный магнит УМ-16. В этом магните возбуждается импульс магнитного поля длительностью 150 нс. Ударный магнит может быть изготовлен в двух вариантах: с полным и неполным охватом всего сечения вакуумной камеры. В первом случае в межполюсном зазоре размещено все поперечное сечение вакуумной камеры. Во втором максимальный зазор меньше, чем высота вакуумной камеры, поэтому в таком варианте должна быть предусмотрена система передвижения магнита в радиальном направлении. В этом случае магнит имеет меньшие размеры и мощность питания.

Ударный магнит УМ-16, выполненный по первому варианту, состоит из 10 секций (рис. 10.7), в каждой из которых создается поле до 0,1 Тл путем разряда накопительной линии, предварительно заряженной до напряжения 80 кВ.

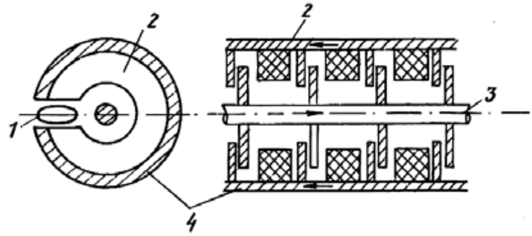


Рис. 10.7. Схема ударного магнита:
1 – вакуумная камера; *2* – ферритовый магнитный сердечник; *3* – провод прямого направления; *4* – кожух-провод обратного направления

На рис. 10.7 показан ударный магнит в виде линии с распределенными постоянными. Индуктивность линии представлена в виде С-образных ферритовых колец, а емкость – в виде емкости между этими кольцами или специальными пластинами. Обмотка, состоящая фактически из одного витка включает центральный проводник и кожух, по которым протекает ток возбуждения (направления тока показаны стрелками). Такая конструкция обмотки позволяет снизить индуктивность обмотки до минимума.

Вдоль оси вакуумной камеры (см. рис. 10.6) по направлению движения частиц на расстоянии около ¾ длины волны бетатронных колебаний расположен подвижной септум-магнит ОМ-24. Толщина одновиткового токового септума составляет 3 мм, длина магнита – 1,5 м, поле в зазоре – до 1 Тл. Магнит ОМ-24 подводится к краю пучка перед моментом вывода. Он отклоняет пучок в зазор неподвижного выводного магнита ОМ-26. Длина этого магнита равна 3 м, максимальное поле в зазоре – 1,5 Тл, толщина септума – 5 мм.

Магнит 0М-26 наделен распределяющими функциями, а именно: в зависимости от величины поля ускоренный пучок был введен по направлению *A*, где он попадал в камеру «Мирабель», или по направлению магнита ОМ-30, после которого пучок попадал либо в направлении *B* для нейтринных исследований, либо в направлении *C* для работы с камерой «Людмила». Как и в схеме Пиччони отклоняющий магнит расположен вне вакуумной камеры. Он имеет следующие параметры: длину – 0,58 м и поле в зазоре до 1,8 Тл.

Разработанная программа возбуждения магнитов позволяет осуществить вывод пучка в одном цикле ускорения по различным направлениям, при этом предусмотрена трехкратная работа системы вывода. Минимальный интервал между соседними выводами составляет 200 мс. Уровень энергии выведенного пучка может варьироваться от выстрела к выстрелу от 30 до 70 ГэВ. При каждом выстреле могут быть выведены из ускорителя от 1 до 30 сгустков ускоренного пучка. При этом время вывода может изменяться от 15 нс до 5 мкс. Эти данные согласованны с требованиями в.ч. сепаратора. Эффективность вывода близка к 100 %. Она определяется путем измерения сигналов с трансформатора тока, расположенного в пространстве вне ускорителя (например, в направлениях *A*, *B* и *C*), и опорного трансформатора тока, установленного в прямолинейном промежутке ускорителя и вычисления их отношения с помощью ЭВМ. Точность измерения эффективности вывода составляет 1–2 %. На практике часто бывает необходимым совместить быстрый и медленный выводы.

Медленный вывод частиц из ускорителя ИФВЭ. Разработанная система предназначена для медленного вывода из ускорителя пучка протонов с энергией от 20 до 70 ГэВ. Медленный вывод отличается от быстрого тем, что позволяет выпускать частицы порциями. Вывод протонов производится на плоской части магнитного цикла, длительность которого может составлять до 1,5 с. Работа системы вывода основана на использовании резонансной раскачки радиальных бетатронных колебаний. Динамика частиц при резонансной раскачке радиальных колебаний требует самостоятельного рассмотрения. Так как этому вопросу посвящено много работ, остановимся на его качественной стороне.

Действительно, чтобы вызвать резонансную раскачку бетатронных колебаний, необходимо в магнитной системе создать какое-то возмущение, которое будет приводить движение частиц в камере ускорителя к резонансу. Если мы хотим создать линейный резонанс, то в уравнении радиальных бетатронных колебаний следует учесть, например, периодическое возмущение в правой части, а именно $x'' + \nu^2 x = Ax\cos n\theta$, где ν – частота собственных колебаний; n, A – частота и амплитуда возмущения; θ – азимутальная координата. При $n = \nu$ имеет место линейный резонанс.

Нелинейные резонансы будут возникать в том случае, когда в правой части уравнения движения в качестве сомножителей еще присутствуют различные степени x. Например, при полуцелом резонансе ($\nu = n/2$), когда уравнение движения частицы имеет вид: $x'' + \nu^2 x = Ax\cos\theta$ будет происходить не линейное возрастание амплитуды радиальных колебаний, которое наблюдается при линейном резонансе, а экспотенциальное. Более быстрое нарастание амплитуды бетатронных колебаний, чем экспоненциальное, будет иметь вместо при резонансе $\nu = n/3$ для следующей правой части уравнения движения: $Ax^2\cos\theta$.

Таким образом, выбор способа возбуждения, соответствующего той или иной правой части, дает возможность обеспечить определенную скорость наведения частиц на резонанс, а следовательно и вывода.

Для реальных условий ускорителя ИФВЭ наиболее целесообразным оказался нелинейный резонанс третьего порядка с частотой радиальных колебаний $\nu_r = 9\dfrac{2}{3}$.

Система медленного вывода работает следующим образом. После возбуждения резонанса частицы забрасываются в зазор септум-магнита ОМ-18 (ОМ-18 располагается перед 18 магнитом системы ускорителя ИФВЭ, ОМ-20 – перед 20-м и т.д. (см. на рис. 10.6)). Он является подвижным и в рабочем положении располагается на расстоянии 3 см от равновесной орбиты. В магните ОМ-18 пучок испытывает небольшое отклонение на угол 0,27 мрад, необходимое для заброса его в зазор следующего магнита ОМ-20. При длине

ОМ-18, равной 1,5 м, поле в его зазоре не превышает 500 Э, что позволяет уменьшить толщину септума до 0,5 мм. С помощью подвижного отклоняющего магнита ОМ-20 пучок забрасывается либо в неподвижный отклоняющий магнит ОМ-22 и выводится по направлению *D* (на рисунке не показанно), либо в неподвижный отклоняющий магнит ОМ-28 и выводится по направлению *B*.

Пучок протонов, заброшенный в зазор магнита ОМ-20, обладает эмиттансом, равным 1 мм мрад. Эта величина приблизительно совпадает с эмиттансом внутреннего ускоренного пучка. Чтобы размер пучка на входе в магнит ОМ-28 составлял около 1 см, что совпадает с аналогичной величиной при быстром выводе, было подобрано расположение магнитов ОМ-20 и ОМ-28. Это обстоятельство позволяет использовать в канале *B* одну и ту же фокусирующую систему как для быстрого, так и для медленного выводов.

Для возбуждения резонансных условий с помощью двух пар секступольных линз создается 29 гармоника квадратичной нелинейности. Величина $\frac{d^2H}{dt^2}$ в секступольных линзах составляет 180 Э/см^2 при длине 1,2 м. Это обеспечивает шаг нарастания амплитуды при забросе пучка в магнит ОМ-18, равный 20–25 мм и позволяет получить расчетную эффективность вывода свыше 90 %.

Наведение на резонанс осуществляется с помощью квадрупольной линзы, расположенной в одном из прямолинейных промежутков. При изменении градиента в линзе уменьшается расстройка на $\delta = \nu_r - 9\frac{2}{3}$ и происходит захват в резонанс частиц с различными амплитудами радиальных бетатронных колебаний. Длительность вывода зависит от времени изменения градиента в линзе. Предусматривается два режима работы: медленный, длительностью до 1 с и многооборотный быстрый, длительность которого при частичном выводе будет составлять около 1 мс.

Необходимо отметить, что медленный и быстрый выводы могут быть совмещены и работать на плато магнитного цикла с длительностью 1,5 с. Быстрый вывод предполагается осуществлять на начальном участке плато, когда пучок еще сгруппирован в сгустки. Затем ускоряющее напряжение выключается, после чего в течение нескольких десятков миллисекунд пучок разгруппировывается. После разгруппирования можно производить медленный вывод.

После завершения быстрого вывода подвижной магнит ОМ-24 удаляется из полезной апертуры вакуумной камеры, а подвижные магниты ОМ-18 и ОМ-20 одновременно вводятся в свое рабочее положение. В это же время включаются линзы наведения на резонанс. Диаграмма работы медленного и быстрого выводов относительно магнитного цикла ускорителя приведена на рис. 10.8.

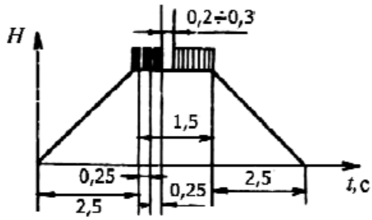


Рис. 10.8. Изменение магнитного поля ускорителя во времени

11. КРИСТАЛЛИЧЕСКАЯ ОПТИКА ПУЧКОВ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ ВЫСОКОЙ ЭНЕРГИИ

11.1. История развития вопроса

Интерес к транспортировке заряженных частиц в кристаллах возникал неоднократно. Впервые он возник в начале XX в., когда при проведении исследований дифракции рентгеновских лучей было установлено упорядоченное расположение атомов в кристалле. Тогда Штарк высказал предположение о том, что в определенных направлениях кристалл должен обладать прозрачностью для заряженных частиц. Хотя для проверки своего предположения он предлагал использовать протонные пучки, трудно поверить в то, что Штарк предполагал реальные диапазоны энергии протонов, с которыми уже в конце XX в. оперировала кристаллическая оптика. Естественно, что отсутствие реальных протонных пучков ГэВ-ной энергии стало причиной охлаждения, интереса к идее Штарка, в последствии названной «каналированием».

Вторичное обращение к каналированию произошло в начале 60-х гг. XX в. Интерпретация эффекта каналирования была дана Линдхардом. В это время были проведены многочисленные эксперименты по каналированию в кристаллах заряженных частиц с энергией около нескольких МэВ.

Следующий третий этап развития каналирования заряженных частиц (КЗЧ) связан с областью ультрарелятивистских энергий, получение которых оказалось возможным только с помощью ускорителей заряженных частиц (УЗЧ). Инициатором третьего возвращения к КЗЧ стал Э.Н. Цыганов, выпускник кафедры «Электрофизических установок» МИФИ, который в 1976 г. теоретически показал возможность отклонения заряженных частиц больших энергий с помощью изогнутых кристаллов. Эта идея нашла подтверждение в совместных экспериментах группы ОИЯИ – ФНАЛ в Дубне в 1979 г. Эффект КЗЧ давался не просто. Действительно, если первоначально в экспериментах с изогнутыми монокристаллами (ИМК) эффективность отклонения (ЭО), т.е. отношение интенсивностей отклоненного пучка к падающему на изогнутый монокристалл, составляла не более десятых долей процента, то в экспериментах в ЦЕРН, когда энергия отклоненных протонов составляла 450 ГэВ, ЭО приблизилась к 50 %.

Однако поворотом в ИМК эффект КЗЧ не ограничился. Позже совместная группа ИФВЭ–ПИЯФ на ускорителе ИФВЭ показала, что наряду с отклонением пучки заряженных частиц будут фокусироваться в плоскости отклонения, когда выходной торец кристалла срезан по поверхности цилиндра таким образом, чтобы все плоскости, касательные к атомным плоскостям кристалла пересекались на некотором расстоянии от него.

Поворот заряженных частиц в ИМК оказался полезным в качестве выходного оборудования ускорителей, а именно: для вывода ускоренных пучков протонов из циклических ускорителей. В экспериментах, проводимых в ОИЯИ (1984 г.) при энергиях до 8 ГэВ, была получена эффективность вывода (ЭВ), составляющая 10^{-4}, в ИФВЭ (1989 г.) при 70 ГэВ – $3\cdot10^{-3}$, а в ЦЕРНе при 120 ГэВ $\cdot10^{-1}$. Как видно, ЭВ растет с энергией протонов. Высказывается мнение, что при продвижении по шкале энергий, например, в суперколлайдере LHC, использование ИМК остается единственным способом, обеспечивающим возможность проведения экспериментов как на встречных пучках, так и с неподвижной мишенью.

Остается ответить на основной вопрос, за счет чего удается в ИМК эффективно и оперативно воздействовать на заряженные частицы? Кратко можно ответить на этот вопрос следующим образом: из-за того, что разность потенциалов между атомными плоскостями ИМК порядка 20–30 В, при расстоянии между ними около 1–2 Å поперечные электрические поля в ИМК составляют величины ГВ/м и более.

Оценим величину необходимого магнитного поля, адекватного по своему воздействию поперечным электрическим полям, имеющим место в ИМК. Для скоростей, равных скорости света c, величина магнитной индукции

$$B = \frac{E}{c} = \frac{1\ \text{ГВ/см}}{3\cdot 10^{8}\ \text{м/с}} = \frac{10^{11}\ \text{В}\cdot\text{с}}{3\cdot 10^{8}\ \text{м}^{2}} \approx 300\ \text{Тл}\,.$$

Подобные величины вряд ли будут достигнуты в электромагнитах, работающих даже в сверхпроводящих режимах, в т.ч. высокотемпературных. В условиях имеющего место энергетического кризиса и высокой стоимости электроэнергии вряд ли найдется альтернатива кристаллической оптике.

По-видимому, основное внимание следует обратить на техническую сторону вопроса.

Физика каналирования заряженных частиц (ЗЧ). Под понятием каналирования подразумевают явление, заключающееся в том, что траектория проходящей вблизи середины каналов, имеющих направление главных осей кристалла, частица принимает стабильный характер, а именно: в процессе движения вдоль канала на частицы действуют периодические силы, фокусируя их или реже дефокусируя. В фокусирующем случае поперечное движение в канале состоит из двух составляющих: длинноволнового колебания и коротковолновой вибрации за счет периода решетки. Первая имеет постоянную амплитуду и длину волны, равную v/T, где v – скорость частицы, а T – период среднего поперечного гармонического колебания. В случае, когда амплитуда колебания велика, последнее перестает быть гармоническим, т.е. траектория частицы теряет стабильность.

Проявление каналирования или его отсутствие, когда происходит ненаправленное движение, присутствующее в неупорядоченных системах, можно установить качественным путем. Пусть частица совершает колебания поперек оси канала. Эти колебания поперёк оси канала характеризуются энергией $W_{\text{кол}}$. Когда $W_{\text{кол}}$ превышает барьер, отделяющий рассматриваемый канал от соседнего, то движущаяся частица легко может перейти в соседний канал. Проведем качественную оценку величины энергии барьера канала $W_{\text{б}}$, в котором движется частица с зарядом Z_1e (для протонов $Z_1 =$ $= 1$). Величина W будет зависеть от Z_1 и Z_2 среды. Поперечная энергия движения $W\sin^2\psi$, где W энергия частицы, ψ – угол между направлением движения частицы и направлением канала. Квадрат у $\sin\psi$ вытекает из следующих соображений: $u_\perp = u\sin\psi$, возводя в квадрат которое, имеем

$$u^2{}_\perp = u^2\sin^2\psi \quad \text{или} \quad \frac{mu_\perp^2}{2} = \frac{mu^2}{2}\sin^2\psi$$

и окончательно

$$W_\perp = W\sin^2\psi.$$

Когда $W\sin^2\psi > W_{\text{б}}$, то заряженная частица может выйти из канала.

Из этого условия найдем $\sin\psi > \left(\frac{W_{\text{б}}}{W}\right)^{1/2}$, откуда при малых величинах угла ψ следует

$$\psi > \left(\frac{W_{\text{б}}}{W}\right)^{1/2} = W_{\text{крит}}, \qquad (11.1)$$

где $\psi_{\text{крит}}$ – критический угол, при котором $W_{\text{б}} = W$.

Процесс каналирования будет иметь место, только в том случае, если угол ψ будет меньше $\psi_{\text{крит}}$. Если заряженная частица начинает движение вблизи оси канала, можно не опасаться ее ухода из канала и рассматривать собственно каналирование. Ему соответствует телесный угол

$$\Omega_{\text{крит}} \sim \pi\frac{W_{\text{б}}}{W}. \qquad (11.2)$$

Дополнительно следует отметить, что существуют два источника потерь энергии заряженными частицами при каналировании. *Электронное торможение* происходит за счет соударений с электронами при возбуждении или вырывании электронов атома. Из-за того, что электроны являются легкими частицами, доля переданного тяжёлой заряженной частицей импульса электрону мала. Соответственно и электронное торможение будет предпочтительным. Большее влияние оказывает *ядерное торможение*, которое возникает при почти упругих столкновениях с атомами. Вклад в торможение могут вносить дефекты кристаллической решетки.

11.2. Некоторые расчетные соотношения

Случай прямого кристалла. В классической теории каналирования было введено понятие под названием *скользящее столкновение* (СС). Под СС следует понимать такое, при котором изменение импульса налетающей частицы значительно меньше полной величины этого импульса. Для СС характерен прицельный параметр q – расстояние между невозмущенной траекторией налетающей частицы и положением атома среды до СС (рис. 11.1), а также потенциальная энергия взаимодействия $U(r)$, которая является функцией расстояния между падающей частицей и атомом в какой-то момент времени. Сила взаимодействия между зарядами Z_1 и Z_2 равна F.

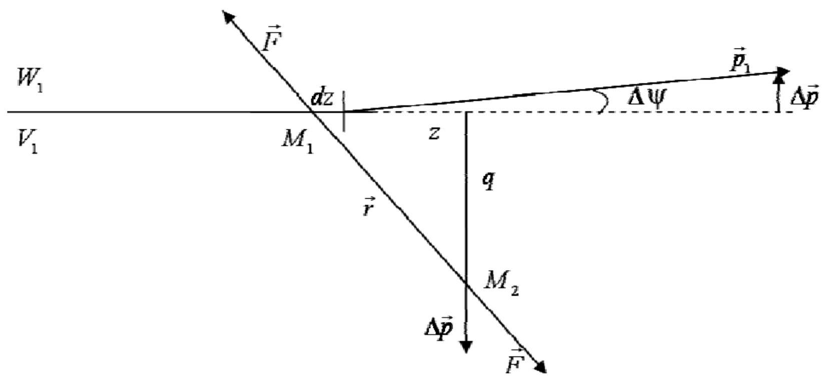


Рис. 11.1. Скользящее столкновение

Энергия и скорость налетающей частицы соответственно равны W_1 и V_1. Модуль силы F равен

$$F = -\frac{\partial U}{\partial r}. \qquad (11.3)$$

С помощью (11.3) можно определить силу, действующую между частицей и атомом на отрезке dz (см. рис. 11.1) вдоль траектории заряженной частицы. Проецируя эту силу на вертикальное направление с помощью множителя q/r, умножая на отрезок времени dz/V_1 действия этой силы и производя интегрирование от $-\infty$ до ∞, получим полное изменение поперечного импульса $\Delta\vec{p}$. Действительно

$$\left|\Delta\vec{p}\right| = \int_{-\infty}^{\infty}\left(-\frac{\partial U}{\partial r}\right)\frac{q}{r}\cdot\frac{dr}{V_1}. \qquad (11.4)$$

Необходимо найти величину dz. Для этого воспользуемся очевидным выражением $z^2 = r^2 - q^2$, откуда с помощью дифференцирования имеем

$$2zdz = 2rdr \text{ и } dz = \frac{rdr}{\sqrt{r^2 - q^2}}.$$

Подставив это выражение в (11.4) и изменив пределы интегрирования (при $z = 0$ $r = q$, при $z \to \infty$ $r \to \infty$), получим

$$\left|\Delta\vec{p}\right| = \frac{2}{u_1}\int_{q}^{+\infty}\left(-\frac{\partial U(r)}{\partial r}\right)\frac{qdr}{\sqrt{r^2 - q^2}}. \qquad (11.5)$$

Входящий в (11.5) интеграл обозначим через $I(q)$ в силу того, что при выбранном потенциале $U(r)$ он является функцией только прицельного параметра q.

На рис. 11.2 показана траектория каналированной частицы.

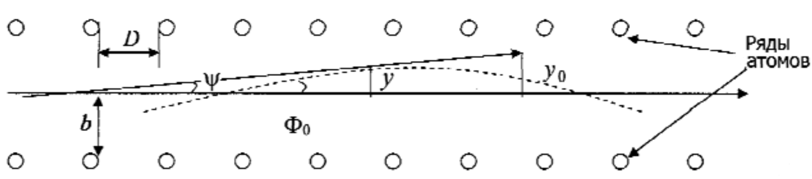


Рис. 11.2. Траектория каналированной частицы между двумя рядами атомов (D – межатомное расстояние в ряду атомов, b – полурасстояние между рядами атомов)

Угол отклонения каналированной частицы равен

$$\Delta\psi = \frac{\Delta p}{p}. \tag{11.6}$$

откуда, принимая во внимание, что $W_1 = pV_1$, имеем

$$\Delta\psi = \frac{\Delta p V_1}{W_1} = \frac{2\Delta p}{V_1} \cdot \frac{V_1}{W_1} = \frac{2}{W_1} \cdot I(q). \tag{11.7}$$

Из (11.7) видно, что угол отклонения обратно пропорционален энергии налетающей частицы. Это естественно, так как при большой энергии пролетающая между рядами атомов частица находится меньшее время в поперечном силовом поле.

Теперь остановимся на рис. 11.2 более подробно. Изображенной на нем траектории каналированной частицы присуще отклонение от оси канала y и малый угол ψ с его осью. Если межатомное расстояние в ряду атомов D, то для пролета отрезка nD частице потребуется время nD/V_1. При этом угол ψ изменится в n раз больше, чем при единичном СС. И это справедливо только при малых изменениях y и ψ. Из-за того, что на частицу действует возвращающая сила, скорость изменения угла ψ на одном отрезке D можно представить выражением

$$\dot{\psi} = \frac{V_1}{D} \cdot \Delta\psi$$

или, используя (11.7),

$$\dot{\psi} = -\frac{V_1}{D} \cdot \frac{2}{W_1} I(b-y) = -\frac{2}{DM_1V_1} I(b-y). \tag{11.8}$$

Кроме того, при выполнении условий малости смещения и угла отклонения траектории каналированной частицы, а также постоянства скорости V_1 (частица движется только в поперечном электростатическом поле), можно записать

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = \frac{dz}{dt} \cdot \frac{dy}{dz} \approx V_1 \cdot \psi$$

или, еще раз дифференцируя по времени

$$\ddot{y} = V_1 \cdot \dot{\psi}. \tag{11.9}$$

Подставляя в (11.9) выражение для $\dot{\psi}$ из (11.8), после не очень сложных преобразований получим

$$\ddot{y} = -V_1 \frac{2}{DM_1V_1} I(b-y)\,,$$

откуда следует

$$M_1\ddot{y} = -\frac{2}{D} I(b-y), \tag{11.10}$$

где справа стоит упомянутая ранее эффективная возвращающая сила в сторону к оси канала. Отметим важное обстоятельство: сила $F(y)$ не зависит от энергии частицы W_1. Поэтому имеет место консервативное силовое поле. Этот вывод лежит в рамках принятого предположения для СС. Таким образом, есть возможность замены кристалла эффективной потенциальной ямой с энергией $U(y)$ или потенциалом канала, которые можно определить с помощью интегрирования возвращающей силы

$$U(y) = \int_0^y F(y)dy = \frac{2}{D}\int_0^y I(b-y)dy\,. \tag{11.11}$$

Полученное выражение относится к двум рядам атомов.

Еще раз следует отметить, что замена реального кристалла потенциальной ямой возможно при условии, что траектория частицы медленно меняется с увеличением числа соударений, а прицельные параметры q достаточно велики, что выполняется в случае предположения СС.

Наличие обратной пропорциональности $U(y)$ от D указывает на то, что потенциальная энергия будет наибольшей для рядов, более плотно упакованных атомами.

Аналогичный вывод справедлив и для КЗЧ между двумя плоскостями. Только в этом случае имела бы место обратно пропорциональная зависимость от поверхностной плотности атомов, а не линейной, как это было в случае с двумя рядами атомов. При этом для потенциальной энергии имеет значение плотность упаковки атомных поверхностей.

С целью сравнения и установления достоинств цепочек и плоскостей атомов остановимся более подробно на последних. Непрерывная, усредненная по координатам, равномерно заполненной атомами плоскости энергия взаимодействия (потенциал) согласно предположению Линхарда равна

$$U_{\text{пл}}(y) = \frac{1}{2\varepsilon} N d_p Z_i Z e^2 \left(\sqrt{y^2 + 3a_{\text{тф}}^2} - y \right), \qquad (11.12)$$

где N – плотность атомов, $d_p = 2b$, $Z_i e$ – заряд каналированной частицы, Z – атомный номер составляющих плоскость атомов кристалла, e – заряд электрона, y – текущая координата в плоскости взаимодействия, $a_{\text{тф}} = 0{,}8853 a_{\text{в}} Z^{-1/3}$, а $a_{\text{в}}$= 0,529 Å – параметр экранирования Томаса–Ферми при условии, что $Z_i << Z$, ε – диэлектрическая постоянная кристалла.

Тепловые колебания атомов, в реальном случае, изменяют статическую энергию взаимодействия на расстояниях порядка амплитуды тепловых колебаний. Общая энергия взаимодействия движущейся в кристалле частицы складывается из энергий взаимодействия с отдельными плоскостями.

Рассмотрим динамику частицы высокой энергии

$$(p^2 c^2 + m_0^2 c^4)^{1/2}$$

в поперечном направлении с энергией взаимодействия (потенциалом) $U_{\text{пл}}(y)$ (11.12). При условии, что поперечная компонента импульса частицы p_y много меньше продольной p_z, запишем уравнение сохранения полной энергии:

$$W = (p_y^2 c^2 + p_z^2 c^2 + m_0^2 c^4)^{1/2} + U(y) = \text{const}, \qquad (11.13)$$

где у потенциала $U_{\text{пл}}(y)$ опущен индекс «пл».

Преобразуем (11.13) и обозначим

$$W_z = (p_z c^2 + m_0^2 c^4)^{1/2},$$

тогда

$$W = U(y) + W_z \left(1 + \frac{p_y^2 c^2}{W_z^2} \right)^{1/2} \approx$$

$$\approx U(y) + W(z) + \frac{1}{2} \frac{p_y^2 c^2}{W_z} = \text{const}. \qquad (11.14)$$

Члены в выражении (11.14), зависящие от поперечных импульса и координаты, образуют поперечную энергию W_y, равную

$$W_y = U(y) + \frac{1}{2} \frac{p_y^2 c^2}{W_z}. \qquad (11.15)$$

При движении в поперечном потенциале изменения p_z, а следовательно, W_z не происходит, поэтому W_y сохраняется:

$$W_y = \frac{p_y^2 c^2}{2W_z} + U(y) = \frac{p_z^2 c^2}{2W_z}\theta^2 + U(y) = \text{const}, \tag{11.16}$$

где ранее было оговорено, что отношение $\theta = \dfrac{p_y}{p_z}$ мало.

Дополнительно положим, что $W_z \cong W$, $p_z = p$, и используем известное соотношение $pc = \beta W$, где $\beta = V / c$. Очевидно, что в принятых предположениях θ совпадает с (11.6). Подставляя последнее в первую часть (11.16), получим

$$\frac{p^2 c^2}{2pc}\theta^2 + U(y) = \frac{pV}{2}\theta^2 + U(y) = \text{const}\,. \tag{11.17}$$

Из (11.17) путем дифференцирования по Z можно получить уравнение одномерного поперечного движения частицы в потенциале плоскостного канала $U(y)$:

$$\left[\frac{pV}{2}\theta^2 + U(y)\right]' = 0\,,$$

$$\frac{2pV}{2}\frac{p_y}{p}\frac{d^2 y}{dz^2} + U'(y) = 0\,, \tag{11.18}$$

$$p_y V\frac{d^2 y}{dz^2} + U'(y) = 0\,.$$

Если представить потенциал $U(y)$ гармонической зависимостью

$$U(y) = U_0\left(\frac{y}{b}\right)^2, \tag{11.19}$$

где U_0 – амплитуда гармонического потенциала или глубина потенциальной ямы, в которой частица совершает колебания, то дифференцируя по y (11.19) и подставляя полученное в выражение в (11.18), получим

$$p_y V y'' + 2U_0\frac{y}{b^2} = 0\,, \tag{11.20}$$

где $\dfrac{2U_0}{b^2 pV} = \omega^2$, $\omega = \dfrac{1}{b}\sqrt{\dfrac{2U_0}{pV}}$, откуда длина волны колебания частицы

$$\lambda = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi b\sqrt{\frac{pV}{2U_0}}\ . \qquad (11.21)$$

В случае каналирования протона с энергией 20 ТэВ в монокристалле кремния величина λ составляет около 0,6 мм. Каналирование частицы имеет место, если поперечная энергия будет меньше глубины потенциальной ямы U_0:

$$\frac{pV}{2}\theta^2 + U(y) < U_0\,. \qquad (11.22)$$

При $y = 0$ найдем предельный угол захвата частицы в режиме каналирования

$$\theta_k = \sqrt{\frac{2U_0}{pV}}, \qquad (11.23)$$

который для плоскости (110) кремния при энергии протонов 100 ГэВ равен 20 мкрад.

Следует помнить, что ядерное взаимодействие будет сопровождаться нарушением каналирования, названным декалированием (ДК). Частица, которая приблизилась к атомной плоскости на расстояние около $a_{\text{тф}}$, будет деканалирована. Поэтому для каналированной частицы вводят критические параметры:

поперечную координату

$$y_{\text{кр}} \cong b - a_{\text{тф}}\,,$$

критический угол каналирования

$$\theta_{\text{кр}} = \sqrt{\frac{2W_{\text{кр}}}{pV}}\ .$$

Здесь $W_{\text{кр}} = U(y_{\text{кр}})$ – поперечная критическая энергия. Для демонстрации режима каналирования обычно используют фазовую плоскость x, θ, на которой траектории каналированных частиц представлены семейством эллипсов для различных поперечных энергий W_y.

Обычно полагают, что на входе в кристалл частицы равномерно распределены как по y (от $-\infty$ до $+\infty$), так и по θ (от $-\theta$ до $+\theta$). Поэтому вероятность захвата $a_{\text{пр}}$ в режим каналирования равна отношению площади фазового эллипса при энергии $W_{\text{кр}}$ (или аксептанса плоскостного канала) к фазовой площади, занимаемой пучком (или его эмиттансу). В случае гармонического межплоскостного потенциала и прямого кристалла

$$A_{\text{пр}} = \frac{y_{\text{кр}}}{b}\frac{\pi}{4}\frac{\theta_{\text{кр}}}{\Phi}, \tag{11.24}$$

где Φ – расходимость пучка влетающих в кристалл частиц. Когда частицы движутся параллельно плоскостям кристалла, то

$$A_{\text{пр}} = \frac{y_{\text{кр}}}{b},$$

а если под углом θ, то $A_{\text{пр}}$ уменьшается на множитель

$$\left[1 - \frac{\theta^2}{\theta_{\text{кр}}}\right]^{1/2}.$$

Случай изогнутого кристалла. Когда речь идет об изогнутом монокристалле (ИМК), то следует подчеркнуть слабую изогнутость, иначе частицы не будут успевать «следить» за изогнутостью. Сделав такое важное замечание, остановимся на КЗЧ в плоскостном канале с постоянным радиусом изгиба R более подробно.

Положим, что в межплоскостном пространстве в точке Z частица имеет сопутствующие координаты y и θ. Для записи уравнения движения этой частицы можно использовать (11.18), добавив в него центробежную силу $\frac{pV}{R}$:

$$pV\frac{d^2y}{dz^2} + U'(y) + \frac{pV}{R} = 0. \tag{11.25}$$

Таким образом, в ИМК частица движется не в потенциале $U(y)$ прямого кристалла, а в потенциале

$$U_R(y) = U(y) + \frac{pV}{R}y, \tag{11.26}$$

Откуда видно, что с возрастанием кривизны $\frac{pV}{R}$ глубина потенциала $U_R(y)$ уменьшается, а при некотором предельном значении $\left(\frac{pV}{R}\right)_{\text{пр}}$ потенциальная яма пропадает, и КЗЧ прекращается.

Предельный радиус изгиба определяется максимальным полем между плоскостями, а именно:

$$\left(\frac{pR}{R}\right)_{\text{пр}} = U'_{\text{макс}}(y). \tag{11.27}$$

Соотношение (11.27) есть равенство в предельном случае центробежной силы и силы со стороны межплоскостного электрического поля.

Как правило, максимального значения $U'(y)$ достигает вблизи атомной плоскости, поэтому предельный радиус

$$R_{\text{пр}} = \frac{pV}{U'(b)}, \tag{11.28}$$

причем для кремния $U'(b) \approx 5$ ГэВ/см. Фазовая область, занимаемая каналированными частицами, при росте кривизны $\frac{pV}{R}$ сокращается в размерах и приближается к атомной плоскости. Хотя частицы и продолжают совершать гармонические колебания с периодом, не зависящем от радиуса R изгиба кристалла, колеблются они вокруг нового положения равновесия, равного

$$y_0 = \frac{y_{\text{кр}} R_{\text{пр}}}{R}. \tag{11.29}$$

Глубина ямы $W_{\text{кр}}$ сокращается на множитель $\left(1 - \frac{R_{\text{пр}}}{R}\right)^2$. Вероятность захвата в режим КЗЧ в ИМК равна

$$A_{\text{ИМК}} = \frac{y_{\text{кр}}}{b} \frac{\pi}{4} \frac{\theta_{\text{кр}}}{\Phi} \left(1 - \frac{R_{\text{пр}}}{R}\right)^2, \tag{11.30}$$

откуда видно, что $A_{\text{имк}}$ отличается от $A_{\text{пр}}$ множителем

$$\left(1-\frac{R_{\text{пр}}}{R}\right)^2.$$

Максимальный угол, на который в ИФВЭ были отклонены протоны, был равен 130 мрад, а максимальная интенсивность составляла 10^{10} протонов за цикл. В ЦЕРНе была достигнута эффективность отклонения, равная 50 %, т.е. была отклонена половина пучка.

Использование коротких монокристаллов в ИФВЭ позволило осуществить вывод 10^{12} протонов за цикл при эффективности отклонения около 85 %.

Список литературы

1. Котов В.И., Миллер В.В. Фокусировка и разделение по массам частиц высоких энергий. М.: Атомиздат, 1969.

2. Штеффен К. Оптика пучков высоких энергий. М.: Мир, 1969.

3. Бенфорд А. Транспортировка пучков заряженных частиц. М.: Атомиздат, 1969.

4. Явор С.Я. Фокусировка пучков заряженных частиц квадрупольными линзами. М.: Атомиздат, 1969.

5. Электрофизическая аппаратура промышленного изготовления. Справочник. М.: Госатомиздат, 1963.

6. Гаврилов Н.М. Выходные устройства ускорителей. Ч.I. М.: МИФИ, 1978, 2000; Ч.II – 1979; Ч.III – 1987.

7. Гаврилов Н.М. Электрофизическое оборудование для работ с высокоэнергетическими частицами. М.: МИФИ, 1978.

8. Томсон М. Каналирование частиц в кристаллах // УФН. 1969. Т. 99. Вып. 2. С. 297–317.

9. Линдхард Й. Влияние кристаллической решётки на движение быстрых заряженных частиц // УФН. 1969. Т. 99. Вып. 2. С. 249–296.

10. Бирюков В.М., Котов В.И., Чесноков Ю.А. Управление пучками заряженных частиц высоких энергий при помощи изогнутых монокристаллов // УФН. 1994. Т. 164. № 10. С. 1017–1040.

11. Афонин А.Г., Баранов В.Т., Бирюков В.М. и др. Вывод пучка протонов из ускорителя ИФВЭ с помощью коротких кристаллов кремния. Препринт ИФВЭ 2003–33 (Протвино, 2003).

Николай Михайлович Гаврилов
Сергей Всеволодович Сомов

ОБОРУДОВАНИЕ ДЛЯ РАБОТЫ
С УСКОРЕННЫМИ ПУЧКАМИ

Учебное пособие

Редактор *М. В. Макарова*
Макет подготовлен *Е. Н. Кочубей*

Подписано в печать 10.12.2009. Формат 60×84 1/16.
П.л. 14,0. Уч.-изд.л. 14,0. Тираж 100 экз.
Изд. № 1/4/81 Заказ № 37

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ».
115409, Москва, Каширское шоссе, 31

ООО «Полиграфический комплекс «Курчатовский».
144000, Московская область, г. Электросталь, ул. Красная, д. 42