

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

ТЕМАТИЧЕСКИЕ ТЕСТИРОВАНИЯ: ЗАДАНИЯ И РЕШЕНИЯ

*Рекомендовано к изданию
УМО "Ядерные физика и технологии"*

Москва 2013

УДК 535+537.86/87(076.5)

ББК 22.34я7

Т32

ТЕМАТИЧЕСКИЕ ТЕСТИРОВАНИЯ: ЗАДАНИЯ И РЕШЕНИЯ.
М.: НИЯУ МИФИ, 2013. – 76 с.

Авт.: В.Н. Белобородов (разд. 1); Н.А. Иванова (разд. 4); В.Н. Игнатов (разд. 3); Н.П. Калашников (разд. 1); Ф.Н. Маркун (разд. 6), А.Ю. Матрончик (разд. 6), С.В. Облизина (разд. 2); Д.А. Самарченко (разд. 1); А.Н. Тюлюсов (разд. 4); Е.В. Хангулян (разд. 7).

Пособие содержит методические рекомендации по решению типичных тестовых заданий по разделу «Механика» курса общей физики. В начале каждого раздела приводится краткое теоретическое введение. Для закрепления материала в конце каждого раздела даны примерные тестовые задания, которые используются для текущего контроля знаний студентов.

Предназначено для студентов 1-го курса НИЯУ МИФИ всех факультетов.

Подготовлено в рамках Программы создания и развития НИЯУ МИФИ.

Рецензенты: д-р физ.-мат. наук, проф. *В.Ф. Федоров* (НИЯУ МИФИ),
д-р физ.-мат. наук, проф. *Ю.А. Коровин* (ИАТЭ НИЯУ МИФИ).

ISBN 978-5-7262-1892-2

© Национальный исследовательский
ядерный университет «МИФИ», 2013

Редактор *Е.Н. Кочубей*

Подписано в печать 15.11.2013. Формат 60×84 1/16

Печ. л. 4,75. Уч.-изд. л. 5,5. Тираж 1500 экз.

Изд. № 1/16. Заказ № 22.

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ».
115409, Москва, Каширское шоссе, 31.

ООО «Полиграфический комплекс «Курчатовский».
144000, Московская область, г. Электросталь, ул. Красная, д. 42.

СОДЕРЖАНИЕ

Тематические тестирования в курсе общей физики	4
Раздел 1. Кинематика материальной точки	5
Раздел 2. Динамика материальной точки (ведение)	15
Раздел 3. Работа. Энергия. Законы сохранения (ведение).....	24
Раздел 4. Момент импульса. Неинерциальные системы отсчета	37
Раздел 5. Механика твёрдого тела	46
Раздел 6. Механика жидкости (ведение).....	58
Раздел 7. Специальная теория относительности.....	66
Рекомендуемая литература	76

ТЕМАТИЧЕСКИЕ ТЕСТИРОВАНИЯ В КУРСЕ ОБЩЕЙ ФИЗИКИ

Среди различных видов контрольных мероприятий (таких, как контрольные работы, самостоятельные работы и т.д.) направленных на определение текущей успеваемости студентов, тематические тестирования занимают особое место. Задачей данных тестирований является определение качества усвоения базового уровня того или иного раздела на основе унифицированного подхода. Как правило, тематические тестирования проводятся в компьютерных классах с применением интернет-технологий.

Следует обратить внимание на то, что применение тематических тестов направлено на определение степени усвоения текущего материала в течение семестра, поэтому они содержат задания различной сложности и типов. В тестах содержаться как качественные вопросы, так и задания с использованием вычислений.

В пособии приведены примерные тесты по основным разделам, изучаемым студентами НИЯУ МИФИ на первом семестре в рамках курса общей физики:

- Кинематика материальной точки;
- Динамика материальной точки;
- Работа. Энергия. Законы сохранения;
- Момент импульса;
- Неинерциальные системы отсчета;
- Механика твердого тела;
- Механика жидкости;
- Специальная теория относительности.

Каждый тест состоит из 6 заданий открытого и/или закрытого типа. Время, предоставляемое студентам для решения тестовых заданий, ограничено и составляет 20 минут на одну тему. Тест считается успешно сданным, если студент решил не менее 60 % задач, т.е. 4 задачи из 6 по каждой теме.

Раздел 1. КИНЕМАТИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Перемещение. Положение материальной точки в пространстве определяется *радиус-вектором* $\vec{r}(t)$. Это вектор, проведенный из начала координат в данную точку пространства (рис. 1.1). Для определения положения материальной точки в пространстве вводятся системы координат.

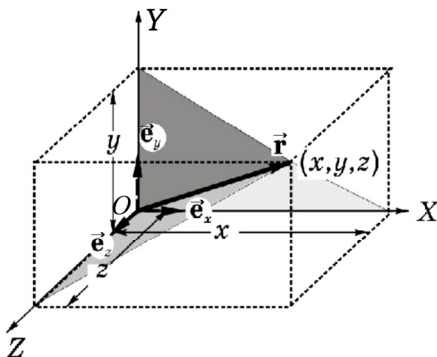


Рис. 1.1

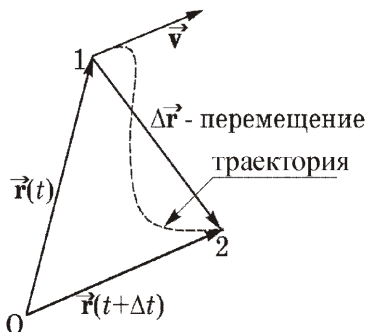


Рис. 1.2

Положение вектора $\vec{r}$ в декартовой системе координат (ДСК) задается тремя координатами точки x, y, z (x, y, z называются проекциями вектора $\vec{r}$ на соответствующие оси X, Y, Z).

Радиус-вектор $\vec{r}$ в ДСК можно представить в виде:

$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z, \quad (1.1)$$

где $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ и $\vec{e}_z$ – орты декартовых осей (рис. 1.1).

Модуль радиуса-вектора равен:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (1.2)$$

Если за промежуток времени Δt материальная точка переместилась вдоль некоторой кривой, называемой *траекторией*, из точки 1 с радиусом-вектором $\vec{r}(t)$ в точку 2 с радиусом-вектором $\vec{r}(t + \Delta t)$ (рис. 1.2), то *приращение* радиуса-вектора за время Δt :

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t), \quad (1.3)$$

называется *перемещением* материальной точки.

Длина траектории называется *путем* s .

В декартовой системе координат положение материальной точки в момент времени t определяется в виде:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y + z(t)\vec{e}_z, \quad (1.4)$$

а перемещение:

$$\Delta\vec{r} = (x_2 - x_1)\vec{e}_x + (y_2 - y_1)\vec{e}_y + (z_2 - z_1)\vec{e}_z = \Delta x\vec{e}_x + \Delta y\vec{e}_y + \Delta z\vec{e}_z,$$

где x_1, y_1, z_1 – координаты точки в момент времени t , x_2, y_2, z_2 – координаты точки в момент времени $t+\Delta t$.

Модуль перемещения материальной точки:

$$|\Delta\vec{r}| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}.$$

Скорость. Мгновенной скоростью (иногда просто скоростью)

$\vec{v}(t)$ в момент времени t называется предел отношения $\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ при Δt стремящимся к нулю. В математике такой предел называется производной от радиуса-вектора $\vec{r}(t)$ по времени t и обозначается $\frac{d\vec{r}}{dt}$.

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (1.5)$$

Направление вектора скорости $\vec{v}(t)$ совпадает с направлением касательной в данной точке траектории и указывает направление движения материальной точки (см. рис. 1.2).

Вектор скорости выражается через его проекции на координатные оси и в ДСК имеет вид:

$$\vec{v} = v_x\vec{e}_x + v_y\vec{e}_y + v_z\vec{e}_z,$$

где компоненты скорости определяются производными соответствующих координат

$$v_x = \frac{dx}{dt} \equiv \dot{x}(t), \quad v_y = \frac{dy}{dt} \equiv \dot{y}(t), \quad v_z = \frac{dz}{dt} \equiv \dot{z}(t). \quad (1.6)$$

Модуль вектора скорости, выраженный через компоненты скорости равен:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)}. \quad (1.7)$$

Чтобы определить перемещение частицы по известному закону изменения скорости $\vec{v}(t)$ необходимо проинтегрировать по време-

ни по выражение $d\vec{r} = \vec{v}(t)dt$. Получим вектор перемещения частицы из точки, в которой она была в момент времени t_1 , в точку, в которой она оказалась в момент времени t_2 :

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{v}(t)dt. \quad (1.8)$$

Для произвольной физической величины f среднее значение по времени (или по промежутку времени от t_1 до t_2) определяется как

$$\langle f \rangle = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f(t)dt. \quad (1.9)$$

Тогда средняя скорость $\langle \vec{v} \rangle$ частицы:

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \vec{v}(t)dt = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}, \quad (1.10)$$

где $\Delta\vec{r}$ – перемещение, которое совершила точка за время Δt . Вектор $\langle \vec{v} \rangle$ совпадает по направлению с $\Delta\vec{r}$.

Если известна зависимость пройденного пути от времени $s(t)$, то модуль скорости v равен производной пути s по времени t :

$$v = \frac{|d\vec{r}|}{dt} = \frac{ds}{dt}. \quad (1.12)$$

Путь s , пройденный частицей со скоростью $\vec{v}(t)$ вычисляется по формуле:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt. \quad (1.13)$$

Ускорение. *Мгновенным ускорением* (иногда просто *ускорением*) $\vec{w}$ называется производная от вектора скорости по времени:

$$\vec{w} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}. \quad (1.14)$$

Ускорение точки можно записать в декартовой системе координат:

$$\vec{w} = w_x \vec{e}_x + w_y \vec{e}_y + w_z \vec{e}_z, \quad (1.15)$$

где компоненты ускорения определяются производными соответствующих проекций вектора скорости:

$$\begin{aligned}
w_x &= \frac{dv_x}{dt} = \dot{v}_x = \ddot{x}(t), \\
w_y &= \frac{dv_y}{dt} = \dot{v}_y = \ddot{y}(t), \\
w_z &= \frac{dv_z}{dt} = \dot{v}_z = \ddot{z}(t).
\end{aligned} \tag{1.16}$$

Модуль вектора ускорения равен:

$$\begin{aligned}
w &= \sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2} = \sqrt{\dot{v}_x^2 + \dot{v}_y^2 + \dot{v}_z^2} = \\
&= \sqrt{\ddot{x}^2(t) + \ddot{y}^2(t) + \ddot{z}^2(t)}.
\end{aligned} \tag{1.17}$$

Используя формулу (1.9), определим среднее ускорение

$$\langle \vec{w} \rangle = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \vec{w}(t) dt = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}, \tag{1.18}$$

где $\vec{v}(t)$ – приращение скорости за время $\Delta t = t_2 - t_1$. Вектор $\langle \vec{w} \rangle$ совпадает по направлению с $\vec{v}(t)$.

Тангенциальное и нормальное ускорения. При движении частицы по криволинейной траектории ускорение $\vec{w} \neq 0$, так как вектор скорости меняется по направлению. Если ввести единичный вектор $\vec{\tau}$, направленный по касательной к траектории в ту же сторону, что и вектор скорости $\vec{v}$ (см. рис. 1.2), и единичный вектор $\vec{n}$ – орт нормали к траектории, направленный к центру кривизны, то ускорение можно разложить на взаимно-ортогональные составляющие (рис. 1.3):

$$\vec{w} = \vec{w}_\tau + \vec{w}_n = w_\tau \vec{\tau} + w_n \vec{n}, \tag{1.19}$$

где w_τ – тангенциальное ускорение, определяемое изменением модуля скорости

$$w_\tau = \frac{dv}{dt}, \tag{1.20}$$

а w_n – нормальное ускорение, направленное к центру кривизны траектории

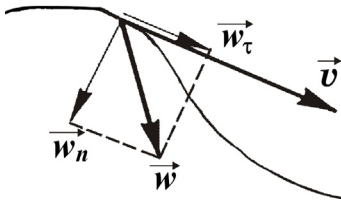


Рис. 1.3

$$w_n = \frac{v^2}{R}, \quad (1.21)$$

R – радиус кривизны траектории.

ПРИМЕР И РЕШЕНИЕ ТЕМАТИЧЕСКОГО ТЕСТА

Тест № 1

1. Небольшое тело бросают с обрыва горизонтально с начальной скоростью $V_x(0) = V_0$. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найти проекцию скорости тела на ось направленную вертикально вверх в зависимости от времени.

- 1) $V_0 - gt$ 2) $V_0 + gt$ 3) $-gt$ 4) gt

2. Зависимость координат частицы от времени описывается законом: $x(t) = l + kt$, $y(t) = c + bt - at^2$ и $z(t) = 0$, где a, b, c, l, k – константы. Определить траекторию частицы.

- 1) окружность 2) гипербола 3) парабола 4) прямая

3. На рис. 1.4 представлен график зависимости проекции скорости частицы, движущейся вдоль оси X , от времени. Определите проекцию средней скорости частицы за 4 с.

- 1) $-0,5$ м/с
2) 0
3) $0,17$ м/с
4) $0,5$ м/с

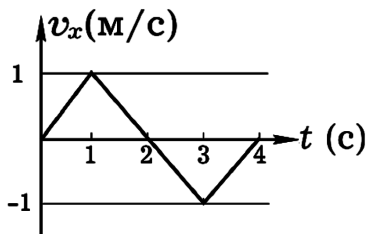


Рис. 1.4

4. За время $\tau = 10$ с точка прошла половину окружности радиуса $R = 160$ см. Найти за это время среднее значение модуля скорости.

- 1) 16 см/с 2) 32 см/с 3) 50 см/с 4) 100 см/с

5. Небольшое тело брошено под углом $\alpha = 60^\circ$ к горизонту с начальной скоростью $v_0 = 10$ м/с. Сопротивлением воздуха пренебречь, принять ускорение свободного падения $g = 10$ м/с².

Радиус кривизны траектории тела в точке бросания равен

- 1) 5 км 2) 10 м 3) 15 м 4) 20 м

6. Компоненты скорости частицы изменяются по законам: $v_x = 2t^3$, м/с; $v_y = -4t$, м/с; $v_z = 25$, м/с. Найти средний вектор ускорения за промежуток времени от $t_1 = 3$ с до $t_2 = 5$ с.

1) $-98 \vec{e}_x + 4 \vec{e}_y$ (м/с²)

2) $-98 \vec{e}_x - 4 \vec{e}_y$ (м/с²)

3) $98 \vec{e}_x + 4 \vec{e}_z$ (м/с²)

4) $98 \vec{e}_x - 4 \vec{e}_y$ (м/с²)

Решения теста № 1

Задача 1. Движение тела в поле тяжести Земли является равноускоренным $\vec{w} = \vec{g}$, т.е. происходит с постоянным ускорением численно равным ускорению свободного падения, направленном вертикально вниз. В этом случае изменение скорости происходит по закону

$$\vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{g}t.$$

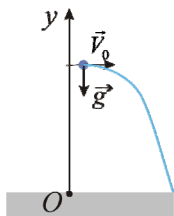


Рис. 1.5

Введя ось Oy , направленную вертикально вверх (рис. 1.5), и учитывая, что скорость в начальный момент времени $\vec{V}_0$ направлена по оси Ox , получим $V_y = -gt$. Правильный ответ 3.

Задача 2. Чтобы определить траекторию частицы, необходимо найти уравнение кривой $y(x)$, исключив время t из уравнений:

$$x(t) = l + kt \quad \text{и} \quad y(t) = c + bt - at^2,$$

Условие $z(t) = 0$ указывает на то, что движение происходит в плоскости xy . Выразив t из первого уравнения $t = \frac{x-l}{k}$, подставим

его во второе $y(x) = c + b \frac{x-l}{k} - a \left(\frac{x-l}{k} \right)^2$.

Это уравнение параболы. Правильный ответ 3.

Задача 3. Среднее значение проекции скорости частицы определяется по формуле (1.9), где $f = v_x(t)$:

$$\langle v_x \rangle = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} v_x(t) dt. \quad (1.22)$$

Поскольку зависимость $v_x(t)$ задана графически, то для нахождения интеграла в (1.22) удобно использовать геометрический смысл определенного интеграла как площади, ограниченной графиком функции. Причем если график лежит выше оси абсцисс, то интеграл равен площади под графиком, а если график лежит ниже оси абсцисс, то интеграл – отрицателен и по модулю равен площади фигуры, ограниченной снизу графиком функции (рис. 1.6). Вычитая площади двух треугольников, получаем

$$\int_{t_1}^{t_2} v_x(t) dt = 1 - 1 = 0.$$

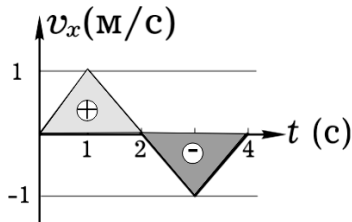


Рис. 1.6

Правильный ответ **2**.

Заметим, что $\int_{t_1}^{t_2} v_x(t) dt = \Delta x$ – проекция перемещения на ось Ox

(или перемещение вдоль оси Ox).

Задача 4. Среднее значение модуля скорости частицы определяется по формуле (1.9), где $f = v(t)$:

$$\langle v \rangle = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt,$$

а учитывая (1.13), получим

$$\langle v \rangle = \frac{s}{t_2 - t_1}, \quad (1.23)$$

где $s = \pi R$ – пройденный за время τ путь. В результате получим

$$\langle v \rangle = \frac{\pi R}{\tau} = \frac{3,14 \cdot 160}{10} = 50,2 \approx 50 \text{ (см/с)},$$

Правильный ответ **3**.

Задача 5. Тело, брошенное под углом к горизонту, движется равноускоренно ($\vec{w} = \vec{g}$) по криволинейной траектории – параболе, поэтому у него есть нормальное ускорение, определяемое по формуле (1.21). В начальный момент времени, когда скорость тела равна v_0 , радиус кривизны из (1.21)

$$R = \frac{v_0^2}{w_n}. \quad (1.24)$$

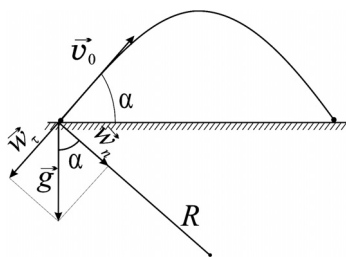


Рис. 1.7

Нормальное ускорение w_n в этот момент времени найдем, разложив вектор полного ускорения на составляющие: $\vec{g} = \vec{w}_\tau + \vec{w}_n$ (рис. 1.7).

Из рисунка получаем $w_n = g \cos \alpha$ и, подставив w_n в (1.24), получим

$$R = \frac{v_0^2}{g \cos \alpha} = 20 \text{ м.}$$

Правильный ответ **4**.

Задача 6. Среднее значение ускорения частицы $\langle \vec{w} \rangle$ определяется по формуле (1.18):

$$\langle \vec{w} \rangle = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1)}{t_2 - t_1}. \quad (1.25)$$

Используя заданную зависимость скорости частицы $\vec{v}(t) = 2t^3 \vec{e}_x - 4t_2 \vec{e}_y + 25 \vec{e}_z$ найдем приращение скорости

$$\begin{aligned} \vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1) &= (2t_2^3 - 2t_1^3) \vec{e}_x + (-4t_2 + 4t_1) \vec{e}_y + (25 - 25) \vec{e}_z = \\ &= 196 \vec{e}_x + (-8) \vec{e}_y + 0 \vec{e}_z \text{ (м/с)}. \end{aligned}$$

Подставив в (1.25) получим $\langle \vec{w} \rangle = 98 \vec{e}_x - 4 \vec{e}_y \text{ (м/с}^2\text{)}$. Правильный ответ **4**.

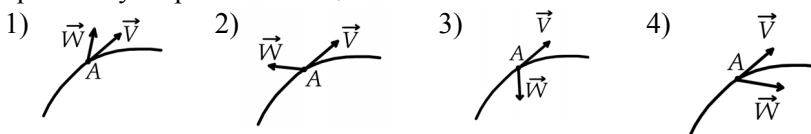
ТЕСТЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Тест № 2

1. Частица движется по окружности с постоянной по модулю скоростью. Куда направлен вектор ее ускорения?

- 1) перпендикулярно окружности от ее центра
- 2) перпендикулярно окружности к ее центру
- 3) по касательной к окружности по направлению движения
- 4) по касательной к окружности против направления движения

2. Частица движется, замедляясь, по криволинейной траектории. Какой из рисунков определяет взаимное направление векторов скорости и ускорения частицы в точке A ?



3. Движение материальной точки происходит по закону: $x = 5t^2$, $y = 4 + 2t$. Ускорение точки в момент времени $t = 1,0$ с равно:

- 1) $10\vec{e}_x$ м/с² 2) $5\vec{e}_x$ м/с² 3) $0\vec{e}_x$ м/с² 4) $(5\vec{e}_x + 2\vec{e}_y)$ м/с²

4. За первые 8 с равноускоренного движения из состояния покоя материальная точка прошла 18,5 м. Сколько она пройдет за вторые 8 с, если характер движения не изменился?

- 1) 18,5 м 2) 37 м 3) 55,5 м 4) 5,25 м

5. За время $\tau = 10$ с точка прошла половину окружности радиуса $R = 160$ см. Найти за это время модуль среднего вектора скорости.

- 1) 16 см/с 2) 32 см/с 3) 50 см/с 4) 100 см/с

6. Тело бросили под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту со скоростью $v = 20$ м/с. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найти тангенциальное ускорение тела в точке бросания.

- 1) 4,90 м/с² 2) $-4,90$ м/с² 3) 8,49 м/с² 4) $-8,49$ м/с²

Тест № 3

1. Точка M движется по спирали с постоянной по величине скоростью, в направлении, указанном стрелкой на рис. 1.8. При этом величина нормального ускорения ...

- 1) не изменяется
2) увеличивается
3) уменьшается
4) равна 0

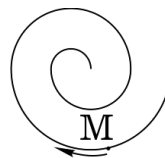


Рис. 1.8

2. Движение материальной точки происходит по закону: $x = 5t^2$, $y = 4 + 2t$. Данное движение является:

- 1) прямолинейным и равномерным
2) равноускоренным

- 3) криволинейным и равномерным
4) прямолинейным

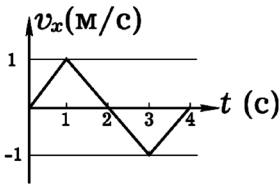


Рис. 1.9

3. На рис. 1.9 представлен график зависимости проекции скорости частицы, движущейся вдоль оси X , от времени. Определите проекцию средней скорости частицы за 2 с.

- 1) $-0,5$ м/с 2) 0
3) $0,17$ м/с 4) $0,5$ м/с

4. За первые 2 с равнозамедленного движения с начальной скоростью 10 м/с материальная точка прошла 10 м, при этом направление движения не изменялось. На какое расстояние она переместится за вторые 2 с, если характер движения не изменился?

- 1) 0 м 2) 5 м 3) 20 м 4) 10 м

5. Небольшое тело брошено под углом $\alpha = \pi/6$ к горизонту. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определить нормальное ускорение в верхней точке траектории.

- 1) $4,90$ м/с² 2) 0 м/с² 3) $8,49$ м/с² 4) $9,8$ м/с²

6. Камень бросили под углом $\alpha = 60^\circ$ к горизонту со скоростью v_0 (рис. 1.10). Среднее тангенциальное ускорение камня $\langle w_\tau \rangle$ за

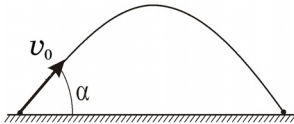


Рис. 1.10

время полёта от момента броска до верхней точки (сопротивлением воздуха пренебречь) равно...

- 1) 0 2) g
3) $-\frac{\sqrt{3}}{4}g$ 4) $-g/2$

Раздел 2. ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ (ВВЕДЕНИЕ)

Законы Ньютона.

Первый закон Ньютона: изолированная материальная точка сохраняет состояние покоя или равномерного и прямолинейного движения. Первый закон Ньютона справедлив только при рассмотрении движения относительно определённого класса систем отсчёта, называемых *инерциальными*.

Второй закон Ньютона: Скорость изменения импульса материальной точки равна действующей на точку силе:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}, \quad (2.1)$$

или

$$\vec{F} = m\vec{w},$$

где m – масса материальной точки, $d\vec{p}$ – приращение ее импульса ($\vec{p} = m\vec{v}$) за время dt , а $\vec{F}$ – действующая на нее сила.

Если на тело одновременно действуют несколько сил (например, $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ и $\vec{F}_3$) то под силой $\vec{F}$ в формуле, выражающей второй закон Ньютона, нужно понимать **равнодействующую всех сил**:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3,$$

в общем случае

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i. \quad (2.2)$$

Среднее значение силы действующей на частицу по времени определяется, согласно (1.9), как:

$$\langle \vec{F} \rangle = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t}, \quad (2.3)$$

где $\Delta \vec{p}$ – приращение импульса материальной точки за время Δt .

Третий закон Ньютона: силы, с которыми две материальные точки действуют друг на друга, равны по модулю и направлены в противоположные стороны вдоль прямой, соединяющей эти точки (рис. 2.1):

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}.$$



Рис. 2.1

Законы Ньютона справедливы только при описании движений относительно инерциальных систем отсчёта.

Закон всемирного тяготения: две частицы с массами m_1 и m_2 (рис. 2.2) притягиваются друг к другу с силой

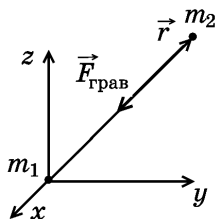


Рис. 2.2

$$\vec{F}_{\text{грав}} = -G \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r} \equiv -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{e}_r, \quad (2.4)$$

где $G = 6,672 \cdot 10^{-11} \frac{\text{М}^3}{\text{кг} \cdot \text{с}^2}$ – гравитационная постоянная, а начало координат совмещено с частицей m_1 .

Сила тяжести

$$\vec{F}_{\text{тяж}} = m\vec{g}, \quad (2.5)$$

где $\vec{g}$ – ускорение свободного падения;

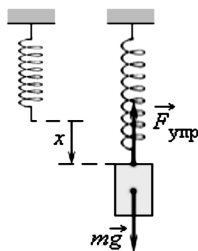


Рис. 2.3

Сила упругости определяется законом Гука:

$$\vec{F}_{\text{упр}} = -k\Delta\vec{r}$$

или в проекции на ось x :

$$F_{\text{упр } x} = -k\Delta x, \quad (2.6)$$

где $\Delta\vec{r}$ или Δx – смещение точки приложения силы относительно положения равновесия, k – жесткость пружины (рис. 2.3).

Вес тела – это сила, с которой тело действует на подвес или опору:

а) если тело покоится вес тела $\vec{P} = -\vec{N} = \vec{F}_{\text{тяж}} = m\vec{g}$, где $\vec{N}$ – сила реакции опоры;

б) если тело и подвес (или опора) движутся в вертикальном направлении с ускорением $\vec{w}$ (рис. 2.4), его вес $\vec{P} = m(\vec{g} - \vec{w})$.

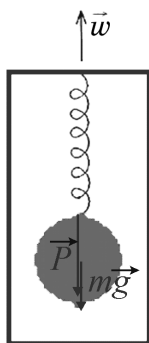


Рис. 2.4

Сила трения скольжения – сила трения, возникающая при перемещении соприкасающихся твердых тел относительно друг друга со скоростью $\vec{v}$:

$$\vec{F}_{\text{тр}} = -\mu N \frac{\vec{v}}{v} \text{ или по модулю } F_{\text{тр}} = \mu N, \quad (2.7)$$

где μ – коэффициент трения, N – сила реакции опоры.

Сила трения возникает не только при скольжении соприкасающихся твердых тел относительно друг друга, но и при попытках вызвать такое скольжение, в этом случае она называется *силой трения покоя*. Сила трения покоя $F_{\text{тр покоя}}$ определяется из второго закона Ньютона и не превосходит некоторого максимального значения $F_{\text{тр покоя}} \leq F_{\text{max}}$.

ПРИМЕР И РЕШЕНИЕ ТЕМАТИЧЕСКОГО ТЕСТА

Тест № 1

1. Сила 60 Н сообщает частице ускорение $0,8 \text{ м/с}^2$. Какая сила сообщит этой частице ускорение 2 м/с^2 ?

- 1) 10 Н 2) 50 Н 3) 100 Н 4) 150 Н

2. Частица массы m в момент времени t_0 начинает двигаться по окружности радиуса R с постоянной скоростью v_0 . Найти силу $F(t)$, действующую на частицу, после начала движения.

- 1) $\frac{mv_0}{t_0}$ 2) $\frac{mv_0^2}{R}$ 3) $m\sqrt{(v_0/t_0)^2 + (v_0^2/R)^2}$ 4) 0

3. На полу лифта, движущегося с ускорением a вертикально вверх, лежит груз массой m . Чему равен вес этого груза?

- 1) mg 2) 0 3) $m(g + a)$ 4) $m(g - a)$

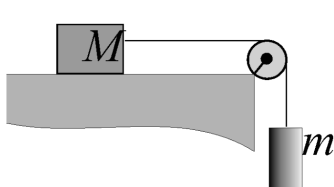
4. Под действием силы $\vec{F}_0$, действующей параллельно наклонной плоскости, тело массы m тащат вверх по наклонной плоскости с постоянной скоростью v . Найти силу трения, действующую на тело со стороны плоскости, составляющей угол α с горизонтом (ось x направлена вниз по наклонной плоскости).

- 1) $(F_0 + mg \cdot \cos \alpha) \cdot \vec{e}_x$ 2) $(F_0 - mg \cdot \sin \alpha) \cdot \vec{e}_x$
3) $-\vec{F}_0 - m\vec{g}$ 4) 0

5. Частица массы m прошла половину окружности радиуса R с постоянной скоростью v . Модуль среднего значения вектора силы равен

- 1) $\frac{mv^2}{\pi R}$ 2) $\frac{mv^2}{R}$ 3) $\frac{2mv^2}{\pi R}$ 4) $\frac{mv^2}{2R}$

6. Брусок массой $M = 3,0$ кг, находящийся на горизонтальном столе, связан нерастяжимой нитью с бруском массой $m = 2,0$ кг (рис. 2.5). Нить перекинута через гладкий блок. При каком коэффициенте трения между бруском M и столом система связанных брусков придет в движение из состояния покоя?



- 1) $\mu < \frac{2}{3}$ 2) $\mu > \frac{2}{3}$
3) $\mu < 0,5$ 4) $\mu > \frac{1}{2}$

Рис. 2.5

Решение теста № 1

Задача 1. Рассчитаем массу частицы по формуле (2.1):

$$m = \frac{F}{w} = \frac{60 \text{ Н}}{0,8 \text{ м/с}^2} = 75 \text{ кг} \text{ и найдем действующую на нее силу при}$$

ускорении 2 м/с^2 : $F = mw = 75 \text{ кг} \cdot 2 \text{ м/с}^2 = 150 \text{ Н}$. Правильный ответ 4.

Задача 2. Чтобы определить действующую на частицу силу, необходимо определить модуль его полного ускорения. При движении частицы по окружности с постоянной скоростью, тангенциальное ускорение $w_\tau = \frac{dv}{dt} = 0$, а нормальное ускорение $w_n = \frac{v_0^2}{R}$. Следовательно, модуль силы $F = \frac{mv_0^2}{R}$. Правильный ответ 2.

Задача 3. Система отсчета, связанная с лифтом, не является инерциальной. На тело действуют сила тяжести $-m\vec{g}$ и сила реак-

ции опоры – $\vec{N}$, но эти силы не уравновешивают друг друга (рис. 2.6). По второму закону Ньютона $m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a}$ или $\vec{N} = m(\vec{a} - \vec{g})$. По третьему закону Ньютона вес тела $\vec{P} = -\vec{N}$.

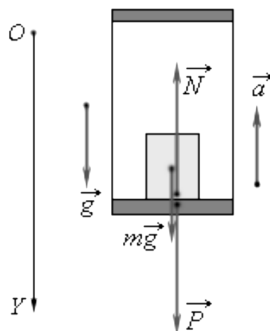


Рис. 2.6

Следовательно, вес тела в ускоренно движущемся лифте $\vec{P} = m(\vec{g} - \vec{a})$. Если координатную ось OY направить вертикально вниз, то векторное уравнение для $\vec{P}$ можно переписать в скалярной форме: $P = m(g + a)$. В этой формуле величины P , g и a следует рассматривать как проекции векторов $\vec{P}$, $\vec{g}$ и $\vec{a}$ на ось OY . Так как эта ось направлена вертикально вниз, $g = \text{const} > 0$, вектор ускорения $\vec{a}$ направлен вертикально вверх, тогда $a < 0$ и следовательно, вес тела всегда будет превышать по модулю силу тяжести. Правильный ответ **3**.

Задача 4. Равнодействующая всех сил приложенных к телу равна нулю (рис. 2.7), так как тело массы m тащат вверх по наклонной плоскости с постоянной скоростью v . Второй закон Ньютона в векторном виде согласно формуле (2.2):

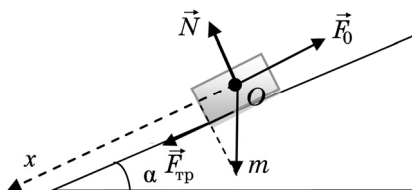


Рис. 2.7

$$\vec{N} + \vec{F}_0 + m\vec{g} + \vec{F}_{\text{тр}} = 0. \quad (2.9)$$

Введя ось Ox , направленную вниз по наклонной плоскости и учитывая, что, $N_x = 0$, уравнение (2.9) примет вид

$$mg \sin \alpha - F_0 + F_{\text{тр}} = 0.$$

В результате получим $\vec{F}_{\text{тр}} = (F_0 - mg \cdot \sin \alpha) \cdot \vec{e}_x$.

Правильный ответ **2**.

Задача 5. Модуль среднего значения вектора силы определяется по формуле (2.3): $|\langle \vec{F} \rangle| = \frac{|\Delta \vec{p}|}{\Delta t}$. Имея в виду, что модуль прира-

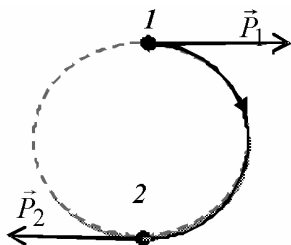


Рис. 2.8

щения импульса частицы при движении по окружности от точки 1 до точки 2 (рис. 2.8):

$$|\Delta \vec{p}| = |\vec{p}_2 - \vec{p}_1| = |m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1| = 2mv,$$

а время движения

$$\Delta t = \frac{S}{v} = \frac{\pi R}{v},$$

получим

$$|\langle \vec{F} \rangle| = \frac{2mv^2}{\pi R}.$$

Правильный ответ 3.

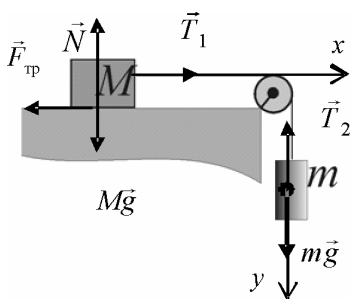


Рис. 2.9

Задача 6. Силы, действующие на каждый из брусков, показаны на рис. 2.9. Уравнения динамики для грузов и уравнения связи имеют вид:

для бруска M

$$M\vec{a}_1 = \vec{T}_1 + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}};$$

для бруска m

$$m\vec{a}_2 = \vec{T}_2 + m\vec{g};$$

$$F_{\text{тр}} = \mu N; |\vec{T}_1| = |\vec{T}_2| = T.$$

Так как нить нерастяжима, то

$a_1 = a_2 = a$. Проектируя уравнения движения на оси системы координат, получим

$$x: Ma = T - \mu Mg,$$

$$y: ma = mg - T.$$

Решая эту систему, получим ускорение: $a = \frac{g(m - \mu M)}{(M + m)}$. Заме-

тив, что ускорение отлично от нуля, если $m > \mu M$, делаем вывод,

что движение начнется при коэффициенте трения $\mu < \frac{m}{M}$.

Правильный ответ 1.

ТЕСТЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Тест № 2

1. Порожний грузовый автомобиль массой 4 т начал движение с ускорением $0,3 \text{ м/с}^2$. Какова масса груза, принятого автомобилем, если при той же силе тяги он трогается с места с ускорением $0,2 \text{ м/с}^2$?

- 1) 2 т 2) 50 т 3) 100 т 4) 2000 т

2. Материальная точка движется по окружности со скоростью согласно зависимости $v_\tau(t)$, представленной на рис. 2.10 (τ – единичный вектор положительного направления). Выберите правильное направление силы, действующей на материальную точку в момент времени t_5 из указанных на рис. 2.11.

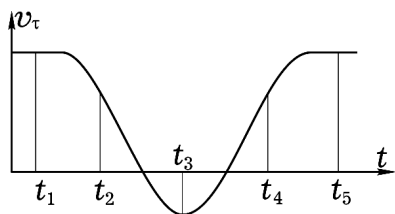


Рис. 2.10

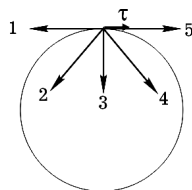


Рис. 2.11

- 1) 1 2) 2 3) 3 4) 5

3. На полу лифта, движущегося с ускорением a вертикально вниз, лежит груз массой m . Чему равен вес этого груза?

- 1) mg 2) 0 3) $m(g + a)$ 4) $m(g - a)$

4. Под действием силы $\vec{F}_0$, действующей параллельно наклонной плоскости, тело массы m тащат по наклонной плоскости с постоянной скоростью v . Найти силу нормальной реакции опоры, действующую на тело со стороны плоскости, составляющей угол α с горизонтом. (Ось y направлена вверх перпендикулярно наклонной плоскости.)

- 1) $mg \cdot \cos \alpha \cdot \vec{e}_y$ 2) $\vec{F}_0 - m\vec{g} \cdot \sin \alpha$
 3) $-\vec{F}_0 - m\vec{g}$ 4) $mg \cdot \sin \alpha \cdot \vec{e}_y$

5. Частица массы m прошла три четверти окружности радиуса R с постоянной скоростью v . Модуль среднего значения вектора силы равен

- 1) $\frac{\sqrt{8}mv^2}{3\pi R}$ 2) 0 3) $\frac{3mv^2}{2\pi R}$ 4) $\frac{2mv^2}{3\pi R}$

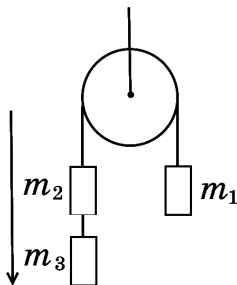


Рис. 2.12

6. Система грузов, соединенных нерастяжимыми невесомыми нитями, движется так, как показано на рис. 2.12. Нить скользит по неподвижному блоку без трения. Чему равен модуль ускорения каждого груза системы?

- 1) g 2) $g \frac{m_3 + m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + m_3}$
3) 0 4) $g \frac{m_1 + m_2 - m_3}{m_1 + m_2 + m_3}$

Тест № 3

1. В инерциальной системе отсчета движутся два тела. Первому телу массой m сила F сообщает ускорение w . Чему равна масса второго тела, если сила $F/2$ сообщила ему ускорение $4w$?

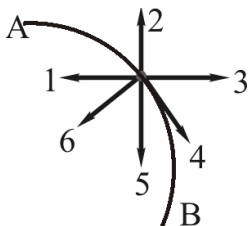


Рис. 2.13

- 1) $2m$ 2) $\frac{m}{8}$ 3) $\frac{m}{2}$ 4) m

2. Материальная точка движется по криволинейной траектории AB под действием одной силы (рис. 2.13). Во всех точках траектории $v \neq 0$. Какие направления силы возможны?

- 1) 2,3,4 2) 1,2,3,4
3) 1,5,6 4) 6,5,4

3. Летчик делает мертвую петлю. Найти вес летчика в нижней точке петли, если его масса m , радиус петли R , скорость самолета v .

- 1) $-m \frac{v^2}{R} + mg$ 2) $m \frac{v^2}{R} - mg$ 3) 0 4) $m \frac{v^2}{R} + mg$

4. Небольшой брусок массой m тянут за нить так, что он движется с постоянной скоростью по горизонтальной плоскости с коэф-

эффициентом трения k . Направление натяжения нити составляет с горизонтом угол α . Сила натяжения нити может быть найдена по формуле

- 1) $\frac{mgk}{\cos \alpha + k \sin \alpha}$ 2) $\frac{kmg}{\cos \alpha}$ 3) $\frac{mgk}{\sin \alpha}$ 4) kmg

5. На тело массой $m = 10$ кг действует постоянная по модулю и направлению сила $F = 5,0$ Н в течение 2,0 с. Модуль приращения импульса равен...

- 1) $2,5 \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}$ 2) $10 \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}$ 3) $20 \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}$ 4) $50 \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}$

6. Система грузов, находящихся на наклонной плоскости и соединенных нерастяжимыми невесомыми нитями, движется так, как показано на рис. 2.14 (нить между телами 1 и 2 натянута). Нить скользит по неподвижному блоку

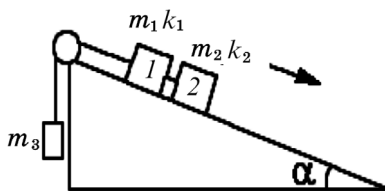


Рис. 2.14

без трения, k_1, k_2 – коэффициенты трения с наклонной плоскостью соответственно тел 1 и 2. Чему равен модуль ускорения каждого груза системы?

- 1) $g \frac{(m_1 + m_2) \cdot \sin \alpha - m_3 - (k_1 m_1 + k_2 m_2) \cos \alpha}{m_1 + m_2 + m_3}$
- 2) $g \frac{(m_1 + m_2) \cdot \sin \alpha - m_3}{m_1 + m_2 + m_3}$
- 3) $g \frac{(m_1 + m_2) \cdot \sin \alpha + (k_1 m_1 + k_2 m_2) \cos \alpha - m_3}{m_1 + m_2 + m_3}$
- 4) $g \frac{m_1 + m_2 - m_3}{m_1 + m_2 + m_3}$

Раздел 3. РАБОТА. ЭНЕРГИЯ. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ (ВВЕДЕНИЕ)

Работа. Под *элементарной работой* δA^1 силы $\vec{F}$ подразумевают скалярное произведение этой силы на перемещение $d\vec{r}$:

$$\delta A = \vec{F} d\vec{r}.$$

В зависимости от условий задачи элементарную работу можно представить еще в нескольких видах:

$$\delta A = F ds \cos \alpha = F_s ds = F (ds)_F,$$

где α – угол между векторами $\vec{F}$ и $d\vec{r}$, $ds = |d\vec{r}|$ – элементарный путь, а F_s и $(ds)_F$ – соответственно проекции вектора силы $\vec{F}$ на направление элементарного перемещения $d\vec{r}$ и вектора элементарного перемещения $d\vec{r}$ на направление силы $\vec{F}$.

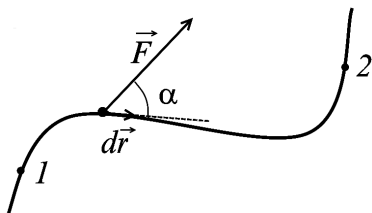


Рис. 3.1

Работой силы $\vec{F}$ на участке траектории 1–2 называют сумму всех элементарных работ совершенных этой силой на элементарных участках пути от точки 1 до точки 2 (рис. 3.1):

$$A = \int_1^2 \vec{F} d\vec{r} = \int_1^2 F_s ds = \int_1^2 F \cos \alpha ds. \quad (3.1)$$

Работа является алгебраической величиной, в зависимости от взаимного направления векторов силы и элементарного перемещения она может быть как положительной, так и отрицательной и равной нулю в случае, когда эти вектора перпендикулярны друг другу.

¹Выбранное обозначение δA подчеркивает, что элементарная работа в общем случае не является дифференциалом некоторой функции (для сравнения в учебнике Савельева И.В. [2] элементарная работа определена как неполный дифференциал $d'A$).

Мощность. Для характеристики скорости, с которой совершается работа, вводится величина, называемая *мощностью*.

Мгновенной мощностью силы $\vec{F}$ называют работу, совершенную силой за единицу времени:

$$P = \frac{\delta A}{dt}. \quad (3.2)$$

Исходя из определения элементарной работы можно получить еще одно выражение для мощности силы $\vec{F}$:

$$P = \frac{\delta A}{dt} = \frac{\vec{F} d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \vec{v}. \quad (3.3)$$

Как и работа, мощность – алгебраическая величина.

Зная мощность силы $\vec{F}$, можно найти работу, которую совершает эта сила за промежуток времени от t_1 до t_2

$$A = \int_{t_1}^{t_2} P dt.$$

Кроме мгновенной мощности, действие силы можно характеризовать еще и средней за промежуток времени от t_1 до t_2 мощностью

$$\langle P \rangle = \frac{A}{t_2 - t_1} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} P dt}{t_2 - t_1}. \quad (3.4)$$

Кинетическая энергия. Механическая энергия бывает двух видов – кинетическая, связанная с движением частиц, и потенциальная, обусловленная взаимодействием между частицами.

Кинетическая энергия материальной точки массой m , движущейся со скоростью v , определяется по формуле

$$T = \frac{mv^2}{2}. \quad (3.5)$$

Теорема о приращении кинетической энергии: работа суммарной силы, действующей на частицу, при перемещении по траектории от точки 1 до точки 2 равна приращению кинетической энергии этой частицы:

$$A_{\Sigma} = \Delta T = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}. \quad (3.6)$$

Консервативные и неконсервативные силы. Если на частицу, помещенную в произвольную точку пространства, действует сила, то говорят, что частица находится в поле сил. Поле, остающееся постоянным во времени, называют *стационарным* полем.

Из определения работы следует, что работа зависит от формы траектории, по которой движется частица. Однако существуют такие стационарные силовые поля, в которых работа силы $\vec{F}$ оказывается независимой от формы траектории, а определяется только начальной и конечной точками траектории. Такие силы называются *консервативными*.

Силы, работа которых зависит от формы траектории, в свою очередь, называются *неконсервативными*.

Определение консервативности силы можно сформулировать и по другому: консервативными называются силы, работа которых на замкнутой траектории равна нулю.

Рассмотрим примеры консервативных сил.

Работа однородной силы тяжести. Представим силу тяжести в виде $\vec{F} = -mg\vec{e}_z$, где $\vec{e}_z$ – орт вертикальной оси z , направленной вверх. Работа силы тяжести при перемещении частицы из точки 1 в точку 2

$$A = \int_1^2 (-mg) dz = -mg(z_2 - z_1) = mg(z_1 - z_2). \quad (3.7)$$

Таким образом, работа силы тяжести определяется начальным z_1 и конечным z_2 положениями частицы.

Работа упругой силы. По закону Гука сила упругости (2.6) прямо пропорциональна деформации пружины x :

$$\vec{F}_{\text{упр}} = -kx\vec{e}_x.$$

Суммарная работа силы упругости при растяжении пружины на величину x_0 из первоначально недеформированного состояния

$$A = \int_0^{x_0} (-kx) dx = -\frac{kx_0^2}{2}. \quad (3.8)$$

Работа центральной силы. Центральная сила может быть представлена в виде

$$\vec{F} = F(r)\vec{e}_r,$$

где r – расстояние от центра поля, а $\vec{e}_r$ – орт радиуса-вектора, проведенного из центра поля в точку расположения частицы.

Работа сил центрального поля может быть записана в виде

$$A = \int_{r_1}^{r_2} F(r)dr. \quad (3.9)$$

Полученное выражение зависит только от вида функции $F(r)$ и значений начального и конечного расстояний до частицы от центра r_1 и r_2 соответственно, поэтому мы можем утверждать, что любая центральная сила будет консервативной.

Важными примерами центральных полей могут служить силы *гравитационного* или *электрического* взаимодействия тел. Обе эти силы – консервативны.

Потенциальная энергия частицы во внешнем силовом поле.

В стационарном поле консервативных сил работа, совершаемая силами поля при перемещении частицы из точки с радиусом-вектором $\vec{r}_1$ в точку с радиусом-вектором $\vec{r}_2$, может быть представлена как убыль некоторой функции координат частицы

$$A_{12}^{\text{конс}} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}d\vec{r} = U(\vec{r}_1) - U(\vec{r}_2). \quad (3.10)$$

Введенная таким образом функция $U(\vec{r})$ называется *потенциальной энергией* частицы во внешнем силовом поле. Потенциальная энергия определена не однозначно, а с точностью до произвольной постоянной. Значение потенциальной энергии можно определить следующим образом

$$U(\vec{r}) = U_0 + A_{r_0},$$

где A_{r_0} – работа сил поля при перемещении частицы из точки с радиусом-вектором $\vec{r}$ в точку O . Значение U_0 потенциальной энергии в точке O выбирается произвольным образом, обычно равным нулю.

Зная потенциальную энергию $U(\vec{r})$, можно определить работу, совершаемую над частицей консервативными силами. Согласно

(3.10) работа консервативных сил равна убыли потенциальной энергии.

Полная механическая энергия частицы. Полной механической энергией частицы называется сумма кинетической и потенциальной энергий

$$E = T + U. \quad (3.11)$$

Закон сохранения полной механической энергией: в консервативном поле сил полная механическая энергия частицы остается постоянной: $E = T + U = \text{const}$.

Если на частицу, кроме консервативных сил, действуют ещё и неконсервативные, то приращение полной механической энергии частицы равно работе неконсервативных сил:

$$\Delta E = A_{1-2}^{\text{неконс}}. \quad (3.12)$$

Связь между потенциальной энергией и силой. На частицу в консервативном поле сил, заданном потенциальной энергией, действует сила, проекции которой на декартовы оси равны:

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} \quad \text{и} \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}. \quad (3.13)$$

То есть вектор силы можно определить следующим образом:

$$\vec{F} = -\left\{ \frac{\partial U}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{e}_z \right\}.$$

Выражение, стоящее в фигурных скобках, есть ни что иное, как *градиент*¹ потенциальной энергии U .

Пользуясь, введенными обозначениями, связь между силой и потенциальной энергией можно представить в виде:

$$\vec{F} = -\nabla U. \quad (3.14)$$

Для центрального поля $U(\vec{r}) = U(r)$ и сила

¹ Градиентом скалярной функции f называют произведение символического вектора (вектора Набла) или оператора на скаляр f . Для обозначения градиента используют два способа: $\text{grad } f$ или ∇f , где $\nabla \dots = \frac{\partial \dots}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial \dots}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial \dots}{\partial z} \vec{e}_z$ – вектор Набла в декартовых координатах ($\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi$ в сферических).

$$\vec{F} = -\frac{\partial U}{\partial r} \vec{e}_r,$$

где r – расстояние от начала координат.

Силы внутренние и внешние. Замкнутая система. Рассмотрим систему, состоящую из N материальных точек (частиц). Все силы, действующие на произвольную частицу системы, могут быть разделены на два класса, руководствуясь тем, со стороны какой частицы они действуют.

Если сила действует со стороны других частиц, входящих в эту систему, то сила называется *внутренней*. Если же сила действует со стороны частицы, не входящей в эту систему, то сила называется *внешней*.

Систему частиц, взаимодействующих друг с другом, но не взаимодействующих ни с какими посторонними телами, называют *замкнутой* или *изолированной*. Иначе говоря, если на систему материальных точек не действуют внешние силы, то такая система замкнута.

Кинетическая энергия системы частиц. Рассмотрим кинетическую энергию системы, состоящей из N частиц. Кинетическая энергия является аддитивной величиной, соответственно, кинетическая энергия системы определяется как сумма кинетических энергий частиц входящих в эту систему

$$T^{\text{сист}} = \sum_{i=1}^N T_i = \sum_{i=1}^N \frac{m_i v_i^2}{2}. \quad (3.15)$$

Теорема о приращении кинетической энергии системы: приращение кинетической энергии системы равно работе, которую совершают все силы, действующие на все частицы системы:

$$\Delta T = \sum_{i=1}^N A_{i\Sigma},$$

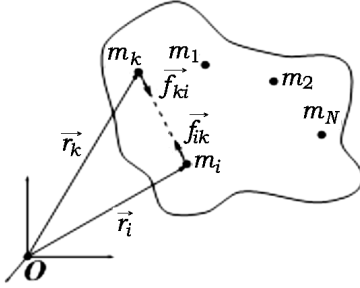
где $A_{i\Sigma}$ – работа, которую совершают все силы, действующие на i -ю частицу.

Потенциальная энергия системы частиц во внешнем потенциальном поле:

$$U^{\text{сист}} = \sum_{i=1}^N U(\vec{r}_i), \quad (3.16)$$

где $U(\vec{r}_i)$ – потенциальная энергия i -й частицы во внешнем консервативном поле сил.

Рассмотрим систему частиц, взаимодействующих между собой посредством центральных сил. Пусть положения этих частиц определяются радиусами-векторами $\vec{r}_i$ и $\vec{r}_k$. Разность этих векторов



$\vec{R}_{ik} = \vec{r}_k - \vec{r}_i$ – вектор, проведенный от i -й частицы к k -й частице (рис. 3.2). Силы взаимодействия между этими частицами могут быть представлены в виде

$$\vec{f}_{ik} = f(R_{ik}) \frac{\vec{R}_{ik}}{R_{ik}}.$$

Рис. 3.2

Потенциальная энергия взаимо-

действия системы частиц:

$$U_{\text{вз}} = \sum_{i=1}^N \sum_{i < k}^N U_{\text{вз}ik} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,k=1 \\ i \neq k}}^N U_{\text{вз}ik}, \quad (3.17)$$

где $U_{\text{вз}ik} = \int f(R_{ik}) dR_{ik}$ – потенциальная энергия взаимодействия i -й и k -й частиц.

Закон сохранения энергии для системы материальных точек. Рассмотрим систему, состоящую из N взаимодействующих материальных точек, с массами $m_1, m_2, \dots, m_N$. Разобьем все силы, действующие на i -ю материальную точку на три группы:

консервативные силы взаимодействия выбранной i -й материальной точки с остальными $N-1$ материальными точками, входящими в систему – $\vec{f}_{ik}$;

внешние консервативные силы – $\vec{F}_i^{\text{конс}}$;

внутренние и внешние неконсервативные силы $\vec{F}_i^{\text{неконс}}$.

Полной механической энергией системы материальных точек называется величина

$$E = T^{\text{сист}} + U^{\text{сист}} + U_{\text{вз}}, \quad (3.18)$$

где $T^{\text{сист}}$ – кинетическая энергия системы (3.15), $U^{\text{сист}}$ – потенциальная энергия системы во внешнем консервативном поле сил (3.16), $U_{\text{вз}}$ – потенциальная энергия взаимодействия системы (3.17).

Закон сохранения механической энергии системы взаимодействующих материальных точек: *полная механическая энергия системы взаимодействующих материальных точек, на которые действуют только консервативные силы, сохраняется*

$$E = T^{\text{сист}} + U^{\text{сист}} + U_{\text{вз}} = \text{const} . \quad (3.19)$$

Если в системе присутствуют неконсервативные силы и $A^{\text{неконс}} \neq 0$, то приращение полной механической энергии системы:

$$\Delta E = A^{\text{неконс}} . \quad (3.20)$$

ПРИМЕР И РЕШЕНИЕ ТЕМАТИЧЕСКОГО ТЕСТА

Тест № 1

1. Действуя вертикальной постоянной силой в 196 Н, поднимают груз массой в 10 кг на высоту 10 м. Какая часть совершенной работы пойдет на изменение потенциальной энергии силы тяжести?

- 1) три четверти 2) половина 3) четверть 4) вся

2. На частицу действует сила $F = \alpha \vec{r}$ (Н), где $\vec{r}$ – радиус-вектор частицы. Найти работу этой силы при перемещении частицы по произвольной траектории из точки P_1 , модуль радиуса-вектора которой равен $r_1 = 2,0$ (м), в точку P_2 с $r_2 = 1,0$ (м).

- 1) $-1,5\alpha$ Дж 2) $-2,5\alpha$ Дж 3) $1,5\alpha$ Дж 4) $2,5\alpha$ Дж

3. Первоначально покоившаяся частица, находясь под действием силы $\vec{F} = 1,0e_x + 2,0e_y + 3,0e_z$ (Н), переместилась из точки $(2,0;4,0;6,0)$ (м) в точку $(3,0;6,0;9,0)$ (м). Найти приращение кинетической энергии ΔT частицы.

- 1) 10 Дж 2) 12 Дж 3) 14 Дж 4) 17 Дж

4. Для частицы массы $m=1,0$ кг известна зависимость от времени ее скорости: $v(t) = 2te_x + 3t^2e_y + t^3e_z$ (м/с). Найти мощность $P(t)$, развиваемую равнодействующей силой.

- 1) $(2 + 6t + 3t^2)$ (Вт) 2) $(2t + 3t^2 + t^3)$ (Вт)
 3) $(4t + 18t^3 + 3t^5)$ (Вт) 4) $(4t^2 + 18t^3 + 3t^5)$ (Вт)

5. Цепь длиной 1,0 м и массой 10 кг, лежащую на столе, медленно поднимают за один конец на высоту, равную ее длине. Определить работу внешней силы по подъему цепи (рассмотреть поведение центра тяжести системы).

- 1) 30 Дж 2) 35 Дж 3) 40 Дж 4) 50 Дж

6. При растяжении недеформированной пружины на некоторое расстояние совершена работа в 15 Дж. При дальнейшем растяжении пружины на некоторое расстояние была совершена работа в 45 Дж. Во сколько раз, растяжение пружины во втором случае, отличается от растяжения пружины в первом случае?

- 1) в 2 раза больше 2) в 2 раза меньше
 3) в $\sqrt{3}$ раз больше 4) в $\sqrt{3}$ раз меньше.

Решение теста № 1

Задача 1. Работу силы $\vec{F}$ можно вычислить по формуле $A = \int_1^2 \vec{F} d\vec{r}$. Так как сила $\vec{F}$ постоянна, то её можно вынести из-под знака интеграла

$$A = \vec{F} \Delta \vec{r} = Fh.$$

Таким образом. $A = 196\text{Н} \times 10 \text{ м}$, т.е. $A = 1960$ Дж.

Изменение потенциальной энергии в поле тяжести по формуле (3.7) равно: $\Delta U = mgh = 980$ Дж. Отсюда следует, что на изменение потенциальной энергии силы тяжести идет $\frac{\Delta U}{A} = \frac{1}{2}$ часть работы постоянной силы.

Правильный ответ 2.

Задача 2. В задаче тело движется в центральном поле сил. Работа вычисляется по формуле (3.9):

$$A = \int_{r_1}^{r_2} F(r) dr .$$

Подставляя выражение для силы в интеграл, получим

$$A = \int_{r_1}^{r_2} \alpha \vec{r} d\vec{r} = \int_{r_1}^{r_2} \alpha r dr ,$$

где $\alpha \vec{r} d\vec{r} = \alpha r \vec{e}_r dr = \alpha r dr$.

Мы учли, что $\vec{e} d\vec{r}$ – приращение модуля вектора $\vec{r}$. Тогда

$$A = \frac{\alpha r_2^2}{2} - \frac{\alpha r_1^2}{2} = -1,5\alpha \text{ Дж}.$$

Правильный ответ 1.

Задача 3. Решение задачи опирается на использование теоремы о кинетической энергии (3.6):

$$A_{\Sigma} = \Delta T .$$

Так как сила однородна, то работа находится по формуле:

$$A = \vec{F} \Delta \vec{r} .$$

Подставляя численные значения, получим: $\Delta T = 14 \text{ Дж}$.

Правильный ответ 3.

Задача 4. В данной задаче мощность лучше искать по формуле (3.3):

$$P = \frac{\delta A}{dt} = \frac{\vec{F} d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \vec{v} .$$

Силу найдём из второго закона Ньютона: $\vec{F} = m\vec{w}$.

$$\vec{w} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 2\vec{e}_x + 6t\vec{e}_y + 3t^2\vec{e}_z .$$

Выполнив скалярное произведение, получим:

$$P = m(2\vec{e}_x + 6t\vec{e}_y + 3t^2\vec{e}_z)(2t\vec{e}_x + 3t^2\vec{e}_y + t^3\vec{e}_z) .$$

Учитывая, что скалярное произведение ортов:

$$\vec{e}_i \vec{e}_j = 1, \text{ если } i = j,$$

$$\vec{e}_i \vec{e}_j = 0, \text{ если } i \neq j,$$

получим $P = (4t + 18t^3 + 3t^5) \text{ Вт}$.

Правильный ответ 3.

Задача 5. В задаче используется закон сохранения механической энергии (3.12):

$$\Delta E = A_{1-2}^{\text{неконс}}.$$

Так как цепь поднимают медленно, то можно не принимать в расчет приращение кинетической энергии. Следовательно, работа сторонних сил равна приращению потенциальной энергии. В качестве потенциальной энергии тела принимают потенциальную энергию центра тяжести. Так как цепь однородна, центр тяжести находится в ее середине. Таким образом, $A = \frac{mgl}{2} = 50 \text{ Дж}$.

Правильный ответ 4.

Задача 6. Работа внешних сил, действующих на пружину, противоположна по знаку работе сил упругости (3.8):

$$A = \frac{k\Delta l^2}{2}.$$

При растяжении пружины на Δl_1 : $A_1 = \frac{k\Delta l_1^2}{2}$.

При растяжении пружины на Δl_2 : $A_2 = \frac{k(\Delta l_1 + \Delta l_2)^2}{2}$.

Разделив второе равенство на первое, получим

$$\frac{\Delta l_2}{\Delta l_1} = -1 + \sqrt{\frac{A_2}{A_1}} = 2.$$

Правильный ответ 1.

ТЕСТЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Тест № 2

1. Определить работу упругой силы пружины с коэффициентом упругости $k = 2 \frac{\text{Н}}{\text{м}}$ при растяжении пружины на $\Delta l = 0,5 \text{ см}$, если в начале пружина была не деформирована.

1) $0,5 \cdot 10^{-4} \text{ Дж}$

2) $0,25 \cdot 10^{-4} \text{ Дж}$

3) $-0,5 \cdot 10^{-4} \text{ Дж}$

4) $-0,25 \cdot 10^{-4} \text{ Дж}$

2. Сила, действующая на частицу, имеет вид $\vec{F} = a\vec{e}_x$ (Н), где a – константа. Вычислить работу A этой силой при перемещении частицы из точки с координатами (1,2,3) (м) в точку с координатами (7,8,9) (м).

- 1) 2а Дж 2) 3а Дж 3) 6а Дж 4) 8а Дж

3. Потенциальная энергия частицы определяется выражением $U = a(x^2 + y^2 + z^2)$, где a – положительная константа. Частица начинает двигаться из точки с координатами (3,3,3) (м). Найти ее кинетическую энергию в момент, когда частица находится в точке с координатами (1,1,1) (м).

- 1) 10а 2) 16а 3) 20а 4) 24а

4. На покоящуюся частицу массой 10 кг, находящуюся в точке A на горизонтальном участке AB длиной 2,0 м гладкой поверхности, начинает действовать сила величиной 20 Н, направленная под углом 60° к горизонту. Какую скорость будет иметь эта частица в точке B ?

- 1) 2,0 м/с 2) 1,4 м/с 3) 4,0 м/с 4) 1,0 м/с

5. Потенциальная энергия частицы имеет вид: $U = axyz$, где a – положительная постоянная. Определить работу, совершаемую силами поля над частицей при ее перемещении из начальной точки $P_1(1,2,3)$ в конечную $P_2(2,3,4)$.

- 1) – 20а 2) – 18а 3) 18а 4) 20а

6. Тело массы m бросили вертикально вверх со скоростью $\vec{v}_0$ (рис. 3.3). В своем полете тело поднялось на высоту h . Чему равна работа сил сопротивления воздуха?

- 1) $-m\frac{\vec{v}_0^2}{2} + mgh$ 2) $m\frac{\vec{v}_0^2}{2} - mgh$
3) $-m\frac{\vec{v}_0^2}{2} - mgh$ 4) 0



Рис. 3.3

Тест № 3

1. Тело, находящееся в шахте, бросили вертикально вверх со скоростью 10 м/с, при этом оно достигло высоты 4,0 м над поверх-

ностью Земли. С какой глубины бросили тело? (Соппротивление воздуха пренебрежимо мало.)

- 1) 1,0 м 2) 9,0 м 3) 2,0 м 4) 6,0 м

2. Частица массы m движется по окружности радиуса R со скоростью, зависящей от времени по закону $v(t) = v_0 t / t_0$. Найти работу силы, действующей на частицу, за половину оборота.

- 1) $\pi m v_0 R / t_0$ 2) $2\pi m v_0 R / t_0$ 3) $2\pi m v_0^2$ 4) $\pi m v_0^2$

3. Сила, действующая на частицу, имеет вид $\vec{F}(x, y) = 2xy\vec{e}_x + x^2\vec{e}_y$, где F – в ньютонах, а x и y – в метрах. Найти ее потенциальную энергию, учитывая, что в начале координат потенциальная энергия равна нулю.

- 1) xy^2 2) $-xy^2$ 3) $-x^2y$ 4) x^2y

4. Потенциальная энергия частицы имеет вид: $U(x, y) = \alpha(x^2 - y^2)$ (Дж). Сила, действующая на неё в точке $(-1, 1)$ м, равна...

- 1) $\alpha(2\vec{e}_x + 2\vec{e}_y)$ (Н) 2) $\alpha(2\vec{e}_x - 2\vec{e}_y)$ (Н)
3) $\alpha(-2\vec{e}_x + 2\vec{e}_y)$ (Н) 4) 0

5. Частица массы m движется по криволинейной траектории так, что ее тангенциальное ускорение изменяется с расстоянием s , отсчитанным вдоль траектории от начального положения частицы, по закону $w_\tau = \alpha s$, где α – постоянная. Работа всех действующих на частицу сил на пути S равна...

- 1) $m\alpha s^2/2$ 2) $m\alpha s^2$ 3) 0 4) $3 m\alpha s^2/2$

6. Тело массы m с постоянной скоростью втаскивают на наклонную плоскость, образующую угол α с горизонтом, действуя на тело силой F , направленной вдоль наклонной плоскости. К тому моменту, когда тело поднимается на высоту h от основания плоскости, работа всех сил, действующих на тело, равна...

- 1) $(mg - F\sin\alpha)h$
2) $(mgs\sin\alpha - F)h$
3) $(mg - F/\sin\alpha)h$
4) 0

Раздел 4. МОМЕНТ ИМПУЛЬСА. НЕИНЕРЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА

Момент импульса. Пусть частица движется по некоторой траектории и в данный момент времени ее радиус-вектор равен $\vec{r}$, а импульс $\vec{p} = m\vec{v}$ (рис. 4.1).

Кроме импульса существует еще одна векторная характеристика движения – момент импульса.

По определению, моментом импульса частицы относительно точки O называется векторное произведение радиус-вектора на импульс частицы:

$$\vec{M}_O = [\vec{r}, \vec{p}] = [\vec{r}, m\vec{v}]. \quad (4.1)$$

Согласно определению, $\vec{M} \perp \vec{r}$, и $\vec{M} \perp \vec{p}$, а его направление определяется по правилу правого винта (рис. 4.2). По определению векторного произведения

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{p}] = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix} =$$

$$= (yp_z - zp_y) \cdot \vec{e}_x - (xp_z - zp_x) \cdot \vec{e}_y + (xp_y - yp_x) \cdot \vec{e}_z.$$

Из рис. 4.3 видно, что модуль вектора момента импульса частицы равен $M = rp \sin \alpha = lp$, где $l = r \sin \alpha$ – длина перпендикуляра, опущенного из точки O на прямую, вдоль которой направлен импульс частицы.

Эта длина l называется *плечом импульса относительно точки O* .

Проекция вектора $\vec{M}$ на некоторую ось z называется моментом импульса частицы относительно оси:

$$M_z = [\vec{r}, \vec{p}]_{\text{пр } z}. \quad (4.2)$$

В декартовой системе координат:

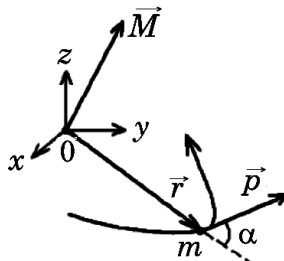


Рис. 4.1

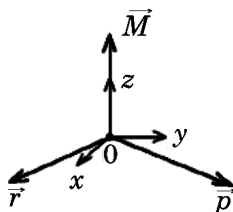


Рис. 4.2

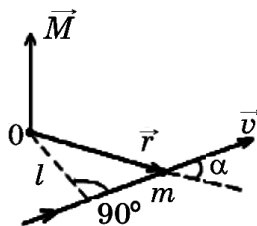


Рис. 4.3

$$M_z = [\vec{r}, \vec{p}]_{\text{пр}z} = xp_y - yp_x.$$

Момент импульса аддитивная величина, следовательно, момент импульса системы тел определяется как

$$\vec{M}_{\text{сист}} = \sum_i \vec{M}_i. \quad (4.3)$$

Моментом силы относительно точки O называется векторное произведение радиуса-вектора на импульс частицы:

$$\vec{N}_O = [\vec{r}, \vec{F}]. \quad (4.4)$$

Так же, как и для момента импульса, момент силы $\vec{N} \perp \vec{r}$, и $\vec{N} \perp \vec{F}$, а его направление определяется по правилу правого винта (рис. 4.4), образуя с $\vec{r}$ и $\vec{F}$ правую тройку векторов (рис. 4.5).

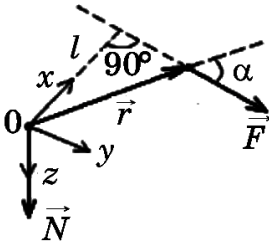


Рис. 4.4

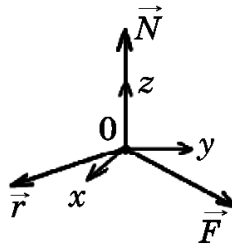


Рис. 4.5

Модуль момента импульса частицы равен $N = rF \sin \alpha = lF$, где $l = r \sin \alpha$ – длина перпендикуляра, опущенного из точки O на прямую, вдоль которой действует сила $\vec{F}$. Эта длина l называется *плечом силы относительно точки O* .

Уравнение моментов относительно точки O :

$$\frac{d\vec{M}_O}{dt} = \sum_i \vec{N}_{O_i}^{\text{внеш}}. \quad (4.5)$$

Одним из основных свойств момента импульса является закон сохранения: *момент импульса замкнутой системы тел сохраняется*.

Следует обратить внимание, что может сохраняться момент импульса не только замкнутой системы, но и системы тел, находящихся в центральном поле сил, так как $\vec{N}_{O_i}^{\text{внеш}} = 0$ относительно центра поля точки O .

Неинерциальные системы отсчета. Законы Ньютона справедливы только в инерциальных системах отсчета (ИСО). Относительно всех инерциальных систем отсчета данное тело движется с одинаковым ускорением. Тем не менее, второй закон Ньютона можно использовать и в неинерциальных системах отсчета (НИСО), но для этого приходится вводить дополнительные силы, действующие на данное тело в НИСО – силы инерции.

Рассмотрим движение материальной точки A в неинерциальной системе отсчета, движущейся поступательно относительно инерциальной системы отсчета с постоянным ускорением $\vec{w}_0$. В данном случае соотношение между ускорениями точки в ИСО $\vec{w}$ и НИСО $\vec{w}'$:

$$\vec{w} = \vec{w}' + \vec{w}_0. \quad (4.6)$$

Пусть на материальную точку A в ИСО действует суммарная сила $\vec{F}$. Тогда в ИСО можно записать второй закон Ньютона, а умножив соотношение (4.6) на массу тела и комбинируя со вторым законом Ньютона, получаем:

$$m\vec{w}' = \vec{F} + (-m\vec{w}_0). \quad (4.7)$$

В правой части (4.7), появляется слагаемое, связанное с тем, что система отсчета неинерциальная. Это слагаемое называется поступательной силой инерции:

$$\vec{F}_{\text{ин}} = -m\vec{w}_0. \quad (4.8)$$

В случае произвольно движущейся НИСО выражение для связи ускорений в ИСО и НИСО имеет вид:

$$\vec{w} = \vec{w}' + \vec{w}_0 + 2[\vec{\omega}, \vec{v}'] - \omega^2 \vec{r}'_{\perp} + [\vec{\beta}, \vec{r}'], \quad (4.9)$$

где $\vec{r}'_{\perp}$ – вектор, перпендикулярный мгновенной оси вращения, $\vec{\beta}$ – угловое ускорение.

Умножая ускорение в ИСО, определяемое формулой (4.9), на массу материальной точки и подставляя во второй закон Ньютона, записанный в ИСО, получим аналог второго закона Ньютона для НИСО:

$$m\vec{w}' = \vec{F} - m\vec{w}_0 - 2m[\vec{\omega}, \vec{v}'] + m\omega^2 \vec{r}'_{\perp} - m[\vec{\beta}, \vec{r}']. \quad (4.10)$$

Таким образом, для написания уравнения движения материальной точки в неинерциальных системах отсчета в общем случае необходимо добавить к силам взаимодействия четыре силы инерции. Одна из них – поступательная сила инерции (4.9). Вторая сила в правой части (4.10) называется силой Кориолиса:

$$\vec{F}_{\text{Кор}} = -2m[\vec{\omega}, \vec{v}'] = 2m[\vec{v}', \vec{\omega}].$$

Третья сила в правой части (4.10) называется центробежной силой:

$$\vec{F}_{\text{цб}} = m\omega^2 \vec{r}'_{\perp}.$$

Четвертая сила в правой части (4.10) связана с изменением угловой скорости вращения НИСО:

$$\vec{F}_{\beta} = -m[\vec{\beta}, \vec{r}'] = m[\vec{r}', \vec{\beta}].$$

Эта сила определенного названия не имеет.

ПРИМЕР И РЕШЕНИЕ ТЕМАТИЧЕСКОГО ТЕСТА

Тест № 1

1. Частица движется по часовой стрелке по окружности с постоянной по модулю скоростью (рис. 4.6). Куда направлен ее момент импульса относительно центра окружности?

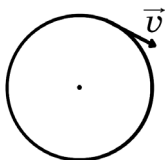


Рис. 4.6

- 1) перпендикулярно окружности к центру
- 2) перпендикулярно окружности от центра
- 3) перпендикулярно плоскости рисунка от нас
- 4) перпендикулярно плоскости рисунка на нас

2. Материальная точка массой 1 кг движется с постоянной скоростью $\vec{v} = \{1, 2, 3\}$ м/с. Определить ее момент импульса $\vec{M}$ относительно начала координат в тот момент, когда она находилась в точке $\vec{r} = \{-1, 2, 1\}$.

- | | |
|---|--|
| 1) $\vec{M} = \{-1, -2, 1\}$ кг·м ² /с | 2) $\vec{M} = \{4, 4, -4\}$ кг·м ² /с |
| 3) $\vec{M} = \{-4, -4, 4\}$ кг·м ² /с | 4) $\vec{M} = \{0, 4, -1\}$ кг·м ² /с |

3. Небольшое тело массы m бросили под углом α к горизонту с начальной скоростью v . Зависимость от времени t модуля момента импульса тела относительно точки бросания описывается соотношением (g – ускорение свободного падения)...

1) $\frac{1}{2}mvgt^2 \sin \alpha$

2) $\frac{1}{2}mvgt^2 \cos \alpha$

3) $mvgt^2 \cos \alpha$

4) $\frac{1}{2}mvgt^2 \tan \alpha$

4. На подставке лежит груз массой 2,0 кг. Подставку начинают опускать вниз с ускорением $0,5 \text{ м/с}^2$. Найти ускорение груза a в системе отсчёта, связанной с Землёй и a' в системе отсчёта, связанной с подставкой.

1) $a = 0,5 \text{ м/с}^2$, $a' = 0 \text{ м/с}^2$

2) $a = 1,3 \text{ м/с}^2$, $a' = 0 \text{ м/с}^2$

3) $a = 9,8 \text{ м/с}^2$, $a' = 0,5 \text{ м/с}^2$

4) $a = 0 \text{ м/с}^2$, $a' = 0,5 \text{ м/с}^2$

5. В вагоне поезда, движущегося со скоростью 72 км/ч по закруглению радиусом 400 м, на пружине подвешен груз массой 1,0 кг. Найти центробежную силу инерции, действующую на груз в системе отсчета, связанной с вагоном.

1) 0

2) 1,0 Н

3) 9,8 Н

4) 10 Н

6. Поезд массой 150 т идет в меридиональном направлении на север. На широте 60° на поезд действует сила Кориолиса 371 Н. С какой скоростью движется поезд?

1) 10 м/с

2) 15 м/с

3) 72 км/ч

4) 108 км/ч

Решение теста № 1

Задача 1. В случае вращательного движения момент импульса определяется по правилу правого винта. Таким образом, направление момента импульса совпадает с направлением угловой скорости, которая направлена перпендикулярно плоскости вращения и согласно правилу правого винта от нас.

Правильный ответ 3.

Задача 2. Момент импульса относительно точки по определению $\vec{M} = [\vec{r}, \vec{p}]$. Учитывая, что импульс $\vec{p} = m\vec{v}$, получаем

$$\vec{M} = [\vec{r}, m\vec{v}] = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= (6 - 2) \cdot \vec{e}_x - (3 - (-1)) \cdot \vec{e}_y + (-2 - 2) \cdot \vec{e}_z.$$

Получаем $\vec{M} = \{4, 4, -4\}$ кг·м²/с. Правильный ответ 2.

Задача 3. Зависимость от времени импульса тела, брошенного под углом к горизонту, определяется соотношением

$$\vec{p}(t) = \{mv \cos \alpha, mv \sin \alpha - gt, 0\},$$

а радиус вектора

$$\vec{r}(t) = \{mvt \cos \alpha, mvt \sin \alpha - gt^2/2, 0\}.$$

Используя формулу (4.1)

$$\vec{M} = [\vec{r}, m\vec{v}] = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ mvt \cos \alpha & mvt \sin \alpha - gt^2/2 & 0 \\ mv \cos \alpha & mv \sin \alpha - gt & 0 \end{vmatrix} =$$

$$(mvt \cos \alpha (mv \sin \alpha - gt) - mv \cos \alpha (mvt \sin \alpha - gt^2/2)) \cdot \vec{e}_z,$$

получаем $|\vec{M}| = \frac{mVgt^2 \cos \alpha}{2}.$

Правильный ответ 2.

Задача 4. Ускорение подставки меньше ускорения свободного падения, таким образом, тело от нее не оторвется и, ускорение тела в системе отсчета, связанной с Землей, будет совпадать с ускорением подставки $\vec{a} = \vec{a}_0$. В неинерциальной системе отсчета, связанной с подставкой $\vec{a}' = \vec{a} + \vec{a}_0$, т.е. равна нулю.

Правильный ответ 1.

Задача 5. Центробежная сила инерции по определению равна $\vec{F}_{цб} = m\omega^2 \vec{r}'_{\perp}$, так как угловая скорость вращения НИСО, $\omega = V/r$, то $F_{цб} = mv^2/r$.

Скорость поезда в системе СИ $v = 72 \text{ км/ч} = 20 \text{ м/с}$. Подставив числовые значения, получаем 1,0 Н.

Правильный ответ 2.

Задача 6. Кориолисова сила инерции по определению равна $\vec{F}_{\text{Кор}} = 2m[\vec{v}', \vec{\omega}]$. Угловая скорость вращения Земли равна $\omega = 7,3 \cdot 10^{-5}$ рад/с, а угол между вектором скорости и вектором угловой скорости равен широте. Заданная сила Кориолиса приводит к скорости в 20 м/с, что равно 72 км/ч.

Правильный ответ 3.

ТЕСТЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Тест № 2

1. Модуль импульса частицы, движущейся по окружности радиусом $R = 0,3$ м по часовой стрелке (рис.

4.7), изменяется со временем по закону

$$p(t) = (2 - 3t) \text{ кг} \cdot \text{м/с}.$$

Чему равен момент сил, приложенных к частице, относительно оси z ?

- 1) $0,6 \text{ Н} \cdot \text{м}$ 2) $0,9 \text{ Н} \cdot \text{м}$
3) $-0,6 \text{ Н} \cdot \text{м}$ 4) $-0,9 \text{ Н} \cdot \text{м}$

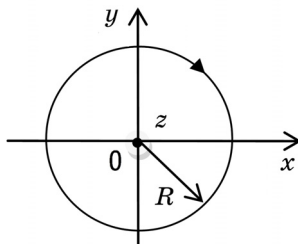


Рис. 4.7

2. Материальная точка массой 1 кг движется с постоянной скоростью $\vec{v} = \{1, 2, 3\}$ м/с. Определить ее момент импульса относительно оси Ox в тот момент, когда она находилась в точке $\vec{r} = \{-1, 2, 1\}$ м.

- 1) $0 \text{ кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}$ 2) $-4 \text{ кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}$ 3) $-8 \text{ кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}$ 4) $4 \text{ кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}$

3. Частица массы $m = 1,0$ кг имеет в некоторый момент времени радиус-вектор $\vec{r} = 2,0(\vec{e}_x + \vec{e}_y)$ м и скорость $\vec{v} = 5,0\vec{e}_x$ м/с. Чему равен момент импульса частицы относительно начала координат?

- 1) $-10\vec{e}_x \text{ кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}$ 2) $-10\vec{e}_z \text{ кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}$
3) $10\vec{e}_y \text{ кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}$ 4) $0 \text{ кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}$

4. На подставке лежит груз массой 2,0 кг. Подставку начинают опускать вниз с ускорением $0,5 \text{ м/с}^2$. Найти величину и направление силы инерции $\vec{F}_{\text{ин}}$, действующей на груз, в системе отсчёта, связанной с подставкой.

1) $\vec{F}_{\text{ин}} = 1 \text{ Н}$, вниз

2) $\vec{F}_{\text{ин}} = 1 \text{ Н}$, вверх

3) $\vec{F}_{\text{ин}} = 20 \text{ Н}$, вниз

4) $\vec{F}_{\text{ин}} = 20 \text{ Н}$, вверх

5. В вагоне поезда, движущегося со скоростью 20 м/с по закруглению радиусом $0,4 \text{ км}$, на пружине подвешен груз. В системе отсчета, связанной с вагоном, на груз действует центробежная сила инерции $1,0 \text{ Н}$. Найти массу груза.

1) $0,1 \text{ кг}$

2) $0,5 \text{ кг}$

3) $1,0 \text{ кг}$

4) $2,0 \text{ кг}$

6. Поезд массой 150 т идет в меридиональном направлении на север со скоростью 72 км/ч . Чему равна кориолисова сила, если поезд находится на широте 60° ?

1) 436 Н

2) 147 Н

3) 185 Н

4) 377 Н

Тест № 3

1. Частица массы $m = 30 \text{ г}$ движется по окружности радиуса $R = 45 \text{ см}$ с постоянной по модулю скоростью $v = 27 \text{ м/с}$. Найти модуль момента импульса частицы относительно центра окружности.

1) $0,365 \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}}$

2) $36,5 \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}}$

3) $36,5 \cdot 10^3 \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}}$

4) $365 \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}}$

2. Материальная точка массой 1 кг движется с постоянной скоростью $\vec{v} = \{1, 2, 3\} \text{ м/с}$. Определить ее момент импульса $\vec{M}$ относительно начала координат в тот момент, когда она находилась в точке $\vec{r} = \{-1, -2, 1\} \text{ м}$.

1) $\vec{M} = \{-8, -2, 1\} \text{ кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}$

2) $\vec{M} = \{8, -4, 0\} \text{ кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}$

3) $\vec{M} = \{-8, 4, 0\} \text{ кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}$

4) $\vec{M} = \{0, 4, -1\} \text{ кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}$

3. Частица массы $m = 0,01 \text{ кг}$ движется в плоскости $y = 3,0 \text{ м}$ с постоянной скоростью $\vec{v} = -10\vec{e}_x \text{ (м/с)}$. Чему равен момент импульса частицы относительно оси x ?

1) $0,3 \text{ кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}$

2) $-0,3 \text{ кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}$

3) $0 \text{ кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}$

4) $30 \text{ кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}$

4. На подставке лежит груз массой $1,0 \text{ кг}$. Подставку начинают поднимать вверх с ускорением $1,0 \text{ м/с}^2$. Найти ускорение груза в системе отсчета, связанной с подставкой.

1) $8,8 \text{ м/с}^2$

2) 0 м/с^2

3) $9,8 \text{ м/с}^2$

4) $1,0 \text{ м/с}^2$

5. В вагоне поезда, движущегося по закруглению радиусом 400 м, на пружине подвешен груз массой 1,0 кг. В системе отсчета, связанной с вагоном, на груз действует центробежная сила инерции 1,0 Н. Найти скорость вагона. Ответ выразить в км/ч.

- 1) 18 км/ч 2) 36 км/ч 3) 54 км/ч 4) 72 км/ч

6. Поезд массой 150 т идет в меридиональном направлении на север со скоростью 72 км/ч. На поезд действует сила Кориолиса 377 Н. На какой широте находится поезд?

- 1) 60° 2) 45° 3) 30° 4) 15°

Раздел 5. МЕХАНИКА ТВЁРДОГО ТЕЛА

Кинематика твердого тела. *Твердое тело* – система материальных точек, расстояния между которыми не меняются в процессе движения.

Твердое тело имеет 6 степеней свободы: 3 поступательные и 3 вращательные. Следовательно, для задания его положения в пространстве необходимо 6 кинематических переменных.

Принято выделять поступательное, вращательное и плоское виды движения твёрдого тела.

Поступательным движением абсолютно твердого тела называют такое движение, при котором любая прямая, проведенная между двумя любыми материальными точками тела, при движении остается все время параллельной самой себе.

При *вращательном движении тела вокруг неподвижной оси* все его точки движутся по окружностям, центры которых лежат на оси вращения.

Плоское движение – движение, при котором все точки перемещаются в параллельных плоскостях.



Рис. 5.1

Рассмотрим твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной оси (рис. 5.1). Принято углы поворота описывать вектором $\vec{d\phi}$, направленным вдоль оси поворота и связанным с направлением вращения *правилом правого винта*. Модуль вектора $\vec{d\phi}$ равен углу поворота $d\phi$. Бесконечно малые (элементарные) углы поворота $\vec{d\phi}$ удовлетворяют правилу сложения векторов. Повороты на конечные углы $\Delta\phi$ этому правилу не удовлетворяют и поэтому не могут считаться векторами.

Для описания вращательного движения точки вводят понятие вектора угловой скорости $\vec{\omega}$:

$$\vec{\omega} = \frac{\vec{d\phi}}{dt}. \quad (5.1)$$

Угловая скорость $\vec{\omega}$ направлена вдоль оси, вокруг которой вращается тело и совпадает с направлением элементарного углового перемещения $\vec{d\phi}$ (см. рис. 5.1).

Элементарное перемещение точки твердого тела, положение которой задается радиусом-вектором $\vec{r}$ (см. рис. 5.1) равно

$$d\vec{r} = [\vec{d\phi}, \vec{r}]. \quad (5.2)$$

Связь между скоростью $\vec{v}$ точки при вращательном движении и угловой скоростью можно найти по определению скорости (1.5), используя соотношения (5.2):

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \left[\frac{d\vec{\phi}}{dt}, \vec{r} \right] = [\vec{\omega}, \vec{r}]. \quad (5.3)$$

Модуль линейной скорости точки равен:

$$v = \omega r \sin \alpha = \omega R, \quad (5.4)$$

где R – расстояние от точки до оси вращения.

Изменение вектора угловой скорости $\vec{\omega}$ со временем характеризуют вектором углового ускорения $\vec{\beta}$:

$$\vec{\beta} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}. \quad (5.5)$$

Продифференцировав (5.3) по времени, найдем полное ускорение точки:

$$\vec{w} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt}, \vec{r} \right] + \left[\vec{\omega}, \frac{d\vec{r}}{dt} \right] = [\vec{\beta}, \vec{r}] + [\vec{\omega}, \vec{v}]. \quad (5.6)$$

Соотношение (5.6) выражает связь между линейным ускорением точки твердого тела $\vec{w}$ и угловыми скоростью $\vec{\omega}$ и ускорением $\vec{\beta}$ в общем случае.

В случае вращения точек тела вокруг *неподвижной оси* векторы $\vec{\beta}$ и $\vec{r}$ лежат в одной плоскости, а $\vec{\omega}$ и $\vec{v}$ взаимно перпендикулярны (рис. 5.2).

Направление вектора $[\vec{\beta}, \vec{r}]$ совпадает с направлением тангенциального ускорения $\vec{w}_\tau$, а направление вектора $[\vec{\omega}, \vec{v}]$ с на-

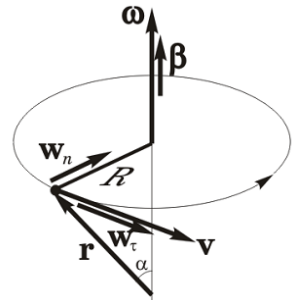


Рис. 5.2

правлением нормального ускорения $\vec{w}_n$:

$$\vec{w}_n = [\vec{\omega}, \vec{v}] = [\vec{\omega}[\vec{\omega}, \vec{r}]] = \vec{\omega}(\vec{\omega}, \vec{r}) - \vec{r}(\vec{\omega}, \vec{\omega}) = -\omega^2 \vec{R}.$$

Нормальное ускорение направлено к оси вращения.

Таким образом, в случае вращения точек тела вокруг *неподвижной оси*:

$$\vec{w}_\tau = [\vec{\beta}, \vec{r}] \quad \text{и} \quad \vec{w}_n = -\omega^2 \vec{R} = \omega^2 R \cdot \vec{n} = \frac{v^2}{R} \vec{n}. \quad (5.7)$$

Принимая во внимание (5.4), получаем

$$\vec{w}_\tau = \beta r \sin \alpha \vec{\tau} = \beta R \vec{\tau}.$$

Полная скорость любой точки тела при сложном движении может быть представлена в виде:

$$\vec{v} = \vec{v}_{\text{пост}} + \vec{v}_{\text{вращ}} = \vec{v}_0 + [\vec{\omega}, \vec{r}]. \quad (5.8)$$

Движение тела в каждый момент времени будет наложением двух движений – вращения вокруг некоторой оси и поступательного движения этой оси

Если вектор поступательного движения $\vec{v}_0$ перпендикулярен вектору угловой скорости вращения $\vec{\omega}$, то движение твердого тела является *плоским*. При плоском движении у твердого тела существует *мгновенная ось вращения* – прямая, проходящая через точки тела, скорость которых равна нулю в данный момент времени.

Для грамотного использования законов динамики твёрдого тела надо помнить ряд основных понятий.

Центром масс (или *центром инерции* системы) называется точка, радиус вектор которой $\vec{r}_C$ связан с массами $m_1, m_2, \dots, m_N$ и радиусами-векторами $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N$ материальных точек входящих в систему:

$$\vec{r}_C = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \dots + m_N \vec{r}_N}{m_1 + m_2 + \dots + m_N} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i},$$

в случае твердого тела его необходимо разбить на элементарные кусочки с номером i массой m_i .

Скорость центра масс можно получить простым дифференцированием:

$$\vec{v}_c = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i / \sum_{i=1}^N m_i .$$

Уравнение движения центра масс твердого тела

$$m \vec{w}_C = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{(\text{внеш})}, \quad (5.9)$$

где $\vec{F}_i^{(\text{внеш})}$ – внешние силы, $\vec{w}_C = \frac{d^2 \vec{r}_C}{dt^2} = \frac{d\vec{v}_C}{dt} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{w}_i}{m}$ – ускорение

центра масс тела, $m = \sum_{i=1}^N m_i$ – масса тела.

Центр масс твердого тела движется так же, как двигалась бы материальная точка с массой, равной массе тела, под действием всех приложенных к телу внешних сил.

Соответственно, справедлив закон сохранения импульса системы $\sum_i m_i \vec{v}_i = \text{const}$ при условии, что $\sum_i \vec{F}_i^{(\text{внеш})} = 0$.

Из уравнения динамики для центра масс следует закон статики – условие равновесия твердого тела: сумма внешних сил равна нулю.

Следующее понятие – понятие момента силы $\vec{N}_O$ относительно точки O : $\vec{N}_O = [\vec{r}; \vec{F}]$, где $\vec{r}$ – радиус-вектор, проведённый из точки O в точку приложения силы $\vec{F}$, направление момента силы определяется по правилу правого винта. Модуль момента сил определяется выражением $N = rF \sin \alpha$ (или сила умноженная на плечо R), где α – угол между радиусом-вектором и силой. Проекция момента силы N_z на ось Z называется моментом силы относительно оси Z . Момент импульса точки $\vec{M} = [\vec{r}; \vec{p}]$ определяется полностью аналогично. Момент импульса твердого тела

$$\vec{M} = \sum_i \vec{M}_i = \sum_i [\vec{r}_i; \vec{p}_i].$$

Второе уравнение динамики твёрдого тела – это так называемое уравнение моментов относительно точки O :

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \sum_i \vec{N}_i^{\text{внеш}}. \quad (5.10)$$

Точку O обычно выбирают либо в центре масс, либо в центре симметрии, либо на заранее известной (закреплённой) оси вращения.

Если $\sum_i \vec{N}_i^{\text{внеш}} = 0$, то получаем закон сохранения момента импульса: $\vec{M} = \text{const}$. Также из уравнения моментов в случае заведомого (статика) отсутствия вращения получается $\sum_i \vec{N}_i^{\text{внеш}} = 0$ или попросту правило рычага.

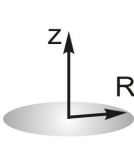
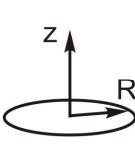
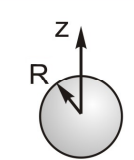
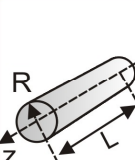
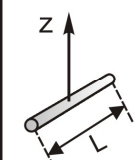
Как правило, в задаче всего одна ось вращения, и уравнение моментов (5.10) проецируют на неё (ось Z). При этом

$$M_z = I_z \omega_z, \quad (5.11)$$

где I_z – момент инерции твёрдого тела относительно оси Z ; $I_z = \sum_i m_i r_i^2$, где r_i – расстояние от элементарной массы m_i до оси Z . Выражение (5.11) справедливо в случае, если ось Z либо жёстко фиксирована, либо является осью симметрии тела.

Для часто встречающихся тел приведём таблицу их моментов инерции.

Таблица 5.1

сплошной диск	тонкое кольцо (полый цилиндр)	шар	сплошной цилиндр	стержень
				
$mR^2/2$	mR^2	$2mR^2/5$	$mR^2/2$	$mL^2/12$

Для подсчёта $I_{z'}$ для другой оси Z' параллельной данной оси Z , проходящей через центр масс системы, воспользуемся теоремой Гюйгенса–Штейнера:

$$I_{z'} = I_z + a^2 \sum_i m_i, \quad (5.12)$$

где a – расстояние между осями Z и Z' .

Уравнение моментов для закреплённой оси можно записать в более простом виде (уравнение динамики вращательного движения):

$$I_z \beta_z = \sum_i N_{zi}^{\text{внеш}}, \quad (5.13)$$

где β_z – проекция углового ускорения тела на ось Z . В основном в таком виде его и используют.

Закон сохранения энергии для твёрдого тела следует из теоремы о приращении кинетической энергии E :

$$E_2 - E_1 = A_{12},$$

где A_{12} – работа внешних сил при эволюции системы из состояния 1 в состояние 2. Работа сил подсчитывается по одной из двух формул.

Первая формула $A_{12} = \sum_i \int_1^2 \vec{F}_i d\vec{r}_i$ используется в случае однородного силового поля и может представляться в виде формулы работы над центром масс $A_{12} = \int_1^2 \vec{F}_c d\vec{r}_c$. Вторая формула применяется для вращательного движения вокруг фиксированной оси:

$$A_{12} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} N_z d\varphi.$$

По теореме Кёнига кинетическая энергия твердого тела представима выражением:

$$E = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{I_c \omega^2}{2}, \quad (5.14)$$

где $m = \sum_{i=1}^N m_i$ – масса тела I_c – момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс.

ПРИМЕР И РЕШЕНИЕ ТЕМАТИЧЕСКОГО ТЕСТА

Тест № 1

1. Твердое тело вращается вокруг неподвижной оси z так, что зависимость угла его поворота от времени t описывается законом $\varphi = at - bt^2$, где a и b – положительные постоянные. Найти проекцию углового ускорения β_z на ось z .

- 1) $2b$ 2) $-2b$ 3) $a - 2bt$ 4) $\frac{at^2}{2} - \frac{bt^3}{3}$

2. Колесо радиуса R катится без проскальзывания по горизонтальной дороге с постоянной скоростью $\vec{v}$. Чему равна скорость верхней точки колеса?

- 1) $\vec{v}$ 2) $2\vec{v}$ 3) $\vec{v}/2$ 4) 0

3. Найти момент инерции сплошного однородного диска массы m радиусом R относительно оси, перпендикулярной к его плоскости и проходящей через край диска.

- 1) $\frac{mR^2}{2}$ 2) mR^2 3) $\frac{3mR^2}{2}$ 4) $\frac{7mR^2}{5}$

4. Найти модуль импульса тонкого однородного стержня массы m и длины l , вращающегося с угловой скоростью ω вокруг перпендикулярной оси, проходящей через его конец.

- 1) $m\omega l/4$ 2) $m\omega l/2$ 3) $m\omega l$ 4) $2m\omega l$

5. На горизонтальной плоскости находится однородный диск, масса которого 1,0 кг. К верхней точке диска приложена горизонтальная сила $F = 3,0$ Н. Считая, что дальнейшее движение происходит без проскальзывания, определите ускорение центра масс диска.

- 1) $4,0 \text{ м/с}^2$ 2) $3,0 \text{ м/с}^2$ 3) $2,0 \text{ м/с}^2$ 4) $1,5 \text{ м/с}^2$

6. Однородный шар массой $m = 1,5$ кг и радиуса $R = 0,5$ м вращается с угловой скоростью $\omega = 20$ рад/с вокруг неподвижной оси, проходящей через его центр. Какую работу совершат внешние силы, чтобы остановить шар?

- 1) -10 Дж 2) -20 Дж 3) -30 Дж 4) -40 Дж

Решение теста № 1

Задача 1. Сначала находим угловую скорость в проекции на ось z по формуле (5.1):

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}, \quad \omega(t) = a - 2bt.$$

После, беря ещё одну производную по времени от угловой скорости $\omega(t)$, найдём проекцию углового ускорения на ось z :

$$\beta_z = \frac{d\omega}{dt} = -b.$$

Правильный ответ 2.

Задача 2. Скорость любой точки твёрдого тела при плоском движении складывается из скорости движения центра масс и вращения вокруг него. Центр колеса движется со скоростью $\vec{v}_C = \vec{v}$, вращательную составляющую скорости можно найти, рассмотрев покоящуюся (не проскальзывающую) нижнюю точку колеса. Скорость нижней точки

$$\vec{v} = \vec{v}_C + \vec{v}_{\text{вращ.}} = 0$$

и, соответственно, скорость вращения $v_{\text{вращ.}} = v$.

Таким образом, легко найти скорость верхней точки колеса

$$\vec{v} = \vec{v}_C + \vec{v}_{\text{вращ.}} = 2\vec{v}.$$

Правильный ответ 2.

Задача 3. Момент инерции диска относительно оси, проходящей через его центр равен $I = \frac{mR^2}{2}$ (см. табл. 5.1). По теореме

Гюйгенса–Штейнера (5.12), момент инерции тела относительно заданной оси $I = \frac{mR^2}{2} + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2$.

Правильный ответ 3.

Задача 4. Модуль импульса стержня находится интегрированием по оси x , направленной вдоль стержня и имеющей начало координат на оси вращения. Масса маленького кусочка стержня длиной dx , находящегося на расстоянии x от начала координат, равна

$dm = \frac{m}{l} dx$, а его скорость $v = x \cdot \omega$. Таким образом, находим им-

$$\text{пульс всего стержня } p = \int_0^l x \cdot \omega \cdot \frac{m}{l} \cdot dx = \frac{ml\omega}{2}.$$

Правильный ответ 2.

Задача 5. Рассмотрим движение центра масс диска – точки O . На рис. 5.4 показаны силы, действующие на диск: заданная сила $\vec{F}$, нормальная реакция опоры $\vec{N}$, сила тяжести $m\vec{g}$ и сила трения покоя $\vec{F}_{\text{тр}}$. Направление силы трения априорно не известно и определяется решением задачи. Уравнение движения центра масс (5.9) для диска имеет вид

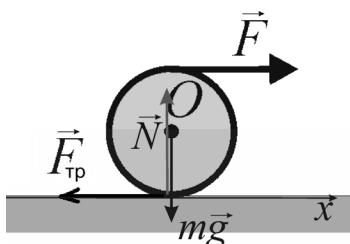


Рис. 5.4

$$m\vec{w}_O = \vec{F} + \vec{N} + m\vec{g} + \vec{F}_{\text{тр}}.$$

В проекции на горизонтальную ось x :

$$mw_O = F - F_{\text{тр}}. \quad (5.15)$$

Уравнение моментов (5.13) в проекции на ось Z , входящую в рисунок и проходящую через точку O :

$$I \cdot \beta = FR + F_{\text{тр}} R. \quad (5.16)$$

Также заметим, что момент инерции диска $I = \frac{mR^2}{2}$ и при движении без проскальзывания угловое ускорение $\beta = \frac{w_O}{R}$.

Решая получившуюся систему уравнений (5.15) и (5.16), найдем для ускорения центра масс $w_O = \frac{4F}{3m}$. Численная подстановка даёт $w_O = 4 \text{ м/с}^2$. Заметим, что если подставить найденное выражение для ускорения w_O в (5.15), то можно найти силу трения покоя $F_{\text{тр}} = -F/3$, знак «минус» указывает, на самом деле сила трения направлена в сторону противоположную, показанной на рис. 5.4.

Правильный ответ 1.

Задача 6. По теореме о приращении кинетической энергии, работа внешних сил равна приращению кинетической энергии тела. Кинетическая энергия раскрученного шара равна

$$E_{\kappa} = \frac{I\omega^2}{2},$$

где момент инерции шара $I = \frac{2mR^2}{5}$. Таким образом,

$$E_{\kappa 1} = \frac{2mR^2\omega^2}{10}.$$

$$\text{Искомая работа } A = E_{\kappa 2} - E_{\kappa 1} = -E_{\kappa 1} = -\frac{2mR^2\omega^2}{10}.$$

Результат численных расчётов даёт -30 Дж.

Правильный ответ 3.

ТЕСТЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Тест № 2

1. Твердое тело вращается вокруг неподвижной оси так, что зависимость угла его поворота от времени t описывается законом $\varphi = \alpha t^2$, где α – положительная постоянная. Определить среднее значение его угловой скорости $\langle \omega \rangle$ за промежуток времени от 0 до τ .

- 1) $\alpha\tau$ 2) α 3) $\alpha\tau^2$ 4) α/τ

2. Сплошной круговой цилиндр радиуса $1,0$ м катится без скольжения по горизонтальной поверхности с постоянной угловой скоростью 2 рад/с. Модуль скорости точек, расположенных на геометрической оси цилиндра и абсолютная величина ускорения точек поверхности цилиндра равны соответственно

- 1) 1 м/с; 2 м/с² 2) 1 м/с; 4 м/с² 3) 2 м/с; 4 м/с² 4) 4 м/с; 4 м/с²

3. Найти момент инерции однородного шара массы m радиусом R относительно горизонтальной оси, проходящей на расстоянии $0,30R$ от центра шара.

- 1) $\frac{2mR^2}{5}$ 2) $\frac{49mR^2}{100}$ 3) $\frac{7mR^2}{10}$ 4) $\frac{7mR^2}{5}$

4. Кинетическая энергия сплошного цилиндра, вращающегося относительно неподвижной оси с частотой 6 об/с, равна 60 Дж. Найти момент импульса этого цилиндра относительно оси вращения.

1) $3,18 \text{ кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}$

2) $0,52 \text{ кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}$

3) $2,56 \text{ кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}$

4) $1,57 \text{ кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}$

5. Чему равно отношение кинетических энергий вращательного и поступательного движений сплошного однородного цилиндра, скатывающегося без проскальзывания с наклонной плоскости?

1) 3,5

2) 2,5

3) 1,5

4) 0,5

6. Карандаш, длина которого 0,15 м, поставленный вертикально, падает на стол. Какую линейную скорость будет иметь в конце его падения середина стержня? Считать, что трение такое, что нижний конец карандаша не проскальзывает.

1) 1,06 м/с

2) 1,5 м/с

3) 0,75 м/с

4) 2,1 м/с

Тест № 2

1. Твердое тело вращается вокруг неподвижной оси z так, что зависимость угла его поворота от времени t описывается законом $\varphi = at - bt^2$, где a и b – положительные постоянные. Найти момент времени τ , в который тело останавливается.

1) $\frac{a}{2b}$

2) $\frac{a}{b}$

3) $\frac{3a}{2b}$

4) $\frac{2a}{b}$

2. Момент инерции однородного шара радиуса R и массой m относительно оси, отстоящей от центра шара на расстоянии $\frac{R}{2}$, определяется выражением

1) $\frac{11mR^2}{20}$

2) $\frac{13mR^2}{20}$

3) $\frac{2mR^2}{5}$

4) $\frac{7mR^2}{5}$

3. Сплошной однородный цилиндр массы m и радиуса R вращается без трения вокруг оси симметрии. На него действуют две параллельные силы: $\vec{F}_1$ проходит через ось и перпендикулярна к ней, а $\vec{F}_2$ – направлена по касательной к поверхности цилиндра. Найти угловое ускорение цилиндра.

1) $2F_1/(mR)$

2) $2(F_1 + F_2)/(mR)$

3) $2\sqrt{F_1^2 + F_2^2}/(mR)$

4) $2F_2/(mR)$

4. На горизонтальной плоскости находится однородный диск, масса которого 1,0 кг. На диск действует горизонтальная сила $F = 3,0$ Н. Считая, что дальнейшее движение происходит без проскальзывания, определите силу трения, действующую на диск

1) 3,0 Н, направлена направо

2) 3,0 Н, направлена налево

3) 1,0 Н, направлена направо

4) 1,0 Н, направлена налево

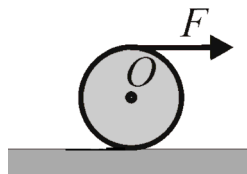


Рис. 5.5

5. Сплошной однородный круговой цилиндр радиусом R скатывается с высоты h без скольжения по наклонной плоскости, составляющей угол α к горизонту. Начальная скорость тела равна нулю. Скорость центра масс цилиндра в конце спуска может быть определена по формуле

1) $\sqrt{\frac{4gh}{3}}$

2) $\sqrt{\frac{4gR}{3}}$

3) $\sqrt{\frac{4gh}{3\cos\alpha}}$

4) $\sqrt{2gh}$

6. С одной наклонной плоскости начинают скатываться без проскальзывания в одинаковых условиях 4 однородных тела одинаковой массы и одного радиуса: кольцо, диск, цилиндр, шар. Какое тело скатится быстрее всех?

1) кольцо

2) диск

3) цилиндр

4) шар

Раздел 6. МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ (ВВЕДЕНИЕ)

Линии тока. Состояние движения жидкости можно задать, указав для каждой точки пространства, занятого жидкостью, вектор скорости $\vec{v}$ частицы. Совокупность векторов $\vec{v}(\vec{r})$, заданных для всех точек пространства, характеризует *поле вектора скорости* стационарного течения.

Будем рассматривать *несжимаемую жидкость*, полагая ее плотность ρ всюду одинаковой и постоянной. В данный момент времени каждая частица жидкости имеет определенную скорость. Мысленно проведем в жидкости плавную линию так, чтобы в каждой ее точке мгновенная скорость частиц в один и тот же момент времени была направлена по касательной к линии. Назовем ее *линией тока*.

Очевидно, что таких линий можно провести в жидкости бесконечно много. Условимся проводить их с такой густотой, чтобы число линий ΔN , пронизывающих площадку ΔS , ориентированную перпендикулярно течению, было пропорционально (численно равно) величине скорости движения частиц (рис. 6.1). Таким образом, движение жидкости можно изобразить при помощи линий тока.

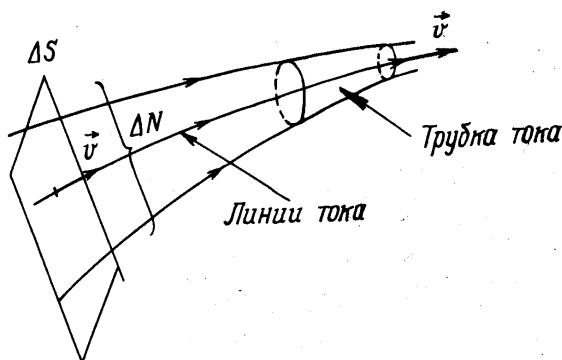


Рис. 6.1

Трубка тока. Уравнение неразрывности струи. *Тружкой тока* называется часть жидкости, ограниченная линиями тока. Сечение трубки тока выбирают достаточно малым, чтобы по всему сечению скорость движения частиц была одинаковой.

Выделим часть трубки тока между сечениями S_1 и S_2 (рис. 6.2). Скорости течения жидкости в этих сечениях соответственно равны v_1 и v_2 .

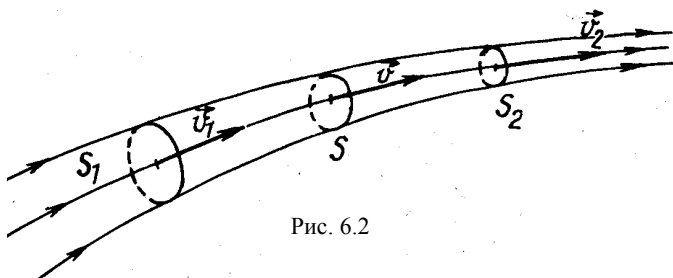


Рис. 6.2

Для сечений S_1 и S_2 с учетом закона сохранения массы и стационарности течения можно записать: $v_1 S_1 = v_2 S_2$. Таким образом, для несжимаемой жидкости в любом сечении одной и той же трубки тока величина

$$vS = \text{const.} \quad (6.1)$$

Этот результат представляет *уравнение неразрывности струи* для трубки тока. Произведение vS есть количество жидкости (объем жидкости), протекающей через сечение S за единицу времени, и называется *потоком жидкости* (или объемным расходом) через сечение S .

Уравнение Бернулли. Рассмотрим тонкую трубку тока несжимаемой идеальной жидкости. Частица жидкости за время dt перемещается вдоль трубки тока на $d\vec{r} = \vec{v}dt$ (рис. 6.3).

Приращение кинетической энергии частицы жидкости при движении вдоль линии тока равно сумме работ сил давления и тяжести. Тогда вдоль трубки тока остается постоянной величина

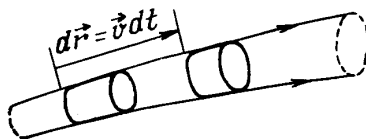


Рис. 6.3

$$\frac{\rho v^2}{2} + \rho g z + p = B = \text{const}, \quad (6.2)$$

где z — вертикальная координата сечения, отсчитываемая от произвольного уровня. Это соотношение называется *уравнением Бернулли*, а величина B — постоянной Бернулли.

Истечение жидкости из отверстия. Найдем время τ , за которое из цилиндрического сосуда через малое отверстие вблизи дна выльется вся жидкость, если в начальный момент ($t = 0$) сосуд высотой H доверху наполнен. Площадь основания цилиндра S . Площадь отверстия s . Выделим в жидкости трубку тока, имеющую сечениями с одного конца открытую поверхность жидкости в сосуде, а с другой стороны – поверхность отверстия, через которое жидкость вытекает. Давления в обоих сечениях одинаковы и равны атмосферному давлению. Если считать скорость жидкости в пределах выделенного сечения одинаковой, то из уравнения Бернулли и уравнения неразрывности имеем

$$\rho gh + \frac{\rho v_0^2}{2} = \frac{\rho v^2}{2}, \quad v_0 S = v s,$$

где h – высота открытой поверхности жидкости над отверстием; $v_0 = -dh/dt$ – скорость опускания свободной поверхности жидкости; v – скорость истечения из отверстия. Отсюда для скорости истечения жидкости из отверстия, расположенного на глубине h под открытой поверхностью, находим

$$v = \sqrt{2gh(1 + s^2/S^2)}.$$

Если сечение отверстия много меньше сечения сосуда ($s \ll S$), то соотношение упрощается:

$$v = \sqrt{2gh}. \quad (6.3)$$

Это выражение представляет известную *формулу Торричелли*. Время τ , за которое из цилиндрического сосуда через малое отверстие вблизи дна выльется вся жидкость, равно

$$\tau = - \int_H^0 \frac{dh}{v_0},$$

где $v_0 = vs/S = \frac{s}{S} \sqrt{2gh}$ – скорость опускания свободной поверхности жидкости. Проинтегрировав выражение, получим

$$\tau = \frac{S}{s} \sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

Ламинарное и турбулентное течения. Важнейшим параметром, определяющим характер течения жидкости, является число Рейнольдса

$$\text{Re} = \frac{\rho v_0 l}{\eta}, \quad (6.4)$$

где η – вязкость жидкости, v_0 – скорость течения; l – характерный линейный размер. При достаточно малых числах Рейнольдса благодаря силам внутреннего трения (вязкости) течение воды носит слоистый ламинарный характер. При увеличении скорости движения при достижении определенного критического значения числа Re характер течения существенно меняется. Слоистость движения нарушается. Частицы интенсивно перемешиваются. Такое движение называется *турбулентным*. Значение числа Рейнольдса, при котором наступает турбулентный режим течения, называется критическим числом Рейнольдса $\text{Re}_{\text{кр}}$, например, для труб $\text{Re}_{\text{кр}} \sim 2 \cdot 10^3$.

Движение тел в жидкостях и газах. Течения, возникающие в жидкостях при движении тел, являются очень сложными. Важнейшим параметром, определяющим характер сил, действующих на тело со стороны жидкости, остается число Рейнольдса. Силу, действующую со стороны жидкости на тело и направленную в сторону, противоположную направлению движения, называют *сопротивлением движения*, или *лобовым сопротивлением*. Лобовое сопротивление при малых $\text{Re} \ll 1$ является силой трения, которую называют *сопротивлением трения*. По порядку величины

$$F_{\text{тр}} \approx \eta v_0 l, \quad (6.5)$$

где l – характерный линейный размер тела; v_0 – скорость тела. Коэффициент пропорциональности в соотношении зависит от формы тела. Например, для шара, если в качестве l принять радиус шара, то коэффициент пропорциональности равен 6π , и мы получим формулу Стокса

$$F_{\text{тр}} = 6\pi\eta v_0 R.$$

ПРИМЕР И РЕШЕНИЕ ТЕМАТИЧЕСКОГО ТЕСТА

Тест № 1

1. Уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости имеет вид:

1) $\rho g + p = \text{const}$ 2) $\rho g z + p = \text{const}$ 3) $\frac{\rho v^2}{2} + p = \text{const}$ 4) $vS = \text{const}$

2. Формула Торричелли имеет вид:

1) $v = \sqrt{gh}$ 2) $v = \sqrt{2gh}$ 3) $v = 2\sqrt{gh}$ 4) $v = \sqrt{gh/2}$

3. Какова скорость истечения идеальной жидкости из малого отверстия в стенке широкого сосуда, если высота уровня жидкости над отверстием равна 4.9 м. Вязкостью жидкости пренебречь.

1) 0,98 м/с 2) 98 м/с 3) 9,8 м/с 4) 98 км/ч

4. Какая величина называется числом Рейнольдса?

1) $Re = \frac{v_0^2}{lg}$ 2) $Re = \frac{\rho v_0 l}{\eta}$ 3) $Re = \frac{v_0 \tau}{l}$ 4) $Re = \frac{v_0}{C_m}$

5. Течение жидкости вязкостью 1мПа·с и плотностью 10^3 кг/м³ в круглой трубе диаметром 1 м будет ламинарным при скорости течения v_0 не больше, чем

1) 10 м/с 2) 0,2 см/с 3) 20 см/с 4) 1 м/с

6. Уравнение Бернулли имеет вид:

1) $p = p_0 + \rho g z$ 2) $\frac{\rho v^2}{2} + \rho g = B$

3) $\frac{\rho v^2}{2} + \rho g z + p = B$ 4) $\frac{\rho v^2}{2} + p = B$

Решение теста № 1

Задача 1. Для несжимаемой жидкости в любом сечении одной и той же трубки тока величина $vS = \text{const}$. Этот результат представляет уравнение неразрывности струи для трубки тока.

Правильный ответ 4.

Задача 2. Если сечение отверстия много меньше сечения сосуда, то скорость истечения жидкости равна $v = \sqrt{2gh}$. Это выражение представляет известную формулу Торричелли.

Правильный ответ 2.

Задача 3. Используем формулу Торричелли:

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9,8 \cdot 4,9} = 9,8 \text{ м/с}.$$

Правильный ответ 3.

Задача 4. Параметром, определяющим характер течения жидкости, является число Рейнольдса:

$$\text{Re} = \frac{\rho v_0 l}{\eta},$$

где η – вязкость жидкости, v_0 – скорость течения; l – характерный размер течения.

Правильный ответ 2.

Задача 5. При значении чисел Рейнольдса меньше некоторого критического $\text{Re}_{\text{кр}}$ (для труб $\text{Re}_{\text{кр}} \approx 2300$), благодаря силам внутреннего трения (вязкости) течение воды носит слоистый ламинарный характер. Учитывая, что для труб характерный размер течения равен диаметру трубы, запишем определение (6.4):

$$\text{Re} = \frac{\rho v_0 d}{\eta} \leq \text{Re}_{\text{кр}},$$

отсюда скорость течения жидкости

$$v_0 \leq \frac{\text{Re}_{\text{кр}}}{\rho d} \eta = \frac{2300}{10^3 \cdot 1} 10^{-3} \approx 0,2 \text{ см/с}.$$

Правильный ответ 2.

Задача 6. Вдоль трубки тока сохраняется величина

$$\frac{\rho v^2}{2} + \rho g z + p = B,$$

где z – вертикальная координата сечения, отсчитываемая от произвольного уровня. Это соотношение называется уравнением Бернулли, а величина B называется постоянной Бернулли.

Правильный ответ 3.

ТЕСТЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Тест № 2

1. В широком сосуде проделано небольшое отверстие. Высота жидкости над отверстием 5 м. Скорость истечения жидкости из отверстия равна (при ускорении свободного падения 10 м/с^2)...

- 1) 4 м/с 2) 6 м/с 3) 10 м/с 4) 14 м/с

2. Обтекание воздухом шарика имеет ламинарный характер при числах Рейнольдса, не больших, чем

- 1) 10^2 2) 10^3 3) 10 4) 1

3. Формула Стокса имеет вид:

- 1) $F = \eta v_0 S d$ 2) $F = \rho v_0 S$ 3) $F = 6\pi\eta v_0 R$ 4) $F = \rho_{\text{ж}} v_{\text{т}} S$

4. Шар радиуса R движется в среде с вязкостью η и плотностью ρ со скоростью v . При малых значениях числа Рейнольдса $Re \ll 1$ сила сопротивления среды пропорциональна...

- 1) v 2) v^2 3) $\sqrt{v}$ 4) v^{-1}

5. Определить отношение коэффициентов вязкости двух жидкостей η_1/η_2 , если скорости равномерного падения шара в первой жидкости равна $v_1 = 0,2 \text{ м/с}$, а во второй – $v_2 = 0,4 \text{ м/с}$. и плотности жидкостей одинаковы. Движение считать ламинарным.

- 1) 4,0 2) 1,5 3) 3,0 4) 2,0

6. Во сколько раз скорость установившегося падения шара радиусом $r_1 = 10 \text{ см}$ в вязкой жидкости отличается от скорости падения шара радиуса $r_2 = 5 \text{ см}$, если сила сопротивления F_1 для первого шара в $n = 1,4$ раза больше силы сопротивления F_2 для второго шара. Течение жидкости ламинарное.

- 1) 0,5 2) 0,7 3) 0,25 4) 1,0

Тест № 3

1. Насос поднимает воду из колодца глубиной 20 м, перекачивая ежесекундно 100 л воды. Площадь сечения трубы 10 см^2 . Найти минимальную мощность насоса.

- 1) 2 кВт 2) 20 кВт 3) 1 кВт 4) 10 кВт

2. В сосуд налита вода до высоты h . Вся поверхность воды закрыта поршнем массы m и площадью S . Найти скорость истечения воды из узкого отверстия в дне сосуда. Течение воды ламинарное и ее вязкостью можно пренебречь.

- 1) $\sqrt{2gS/h}$ 2) $\sqrt{2mg/\rho S}$ 3) $\sqrt{2gh + 2mg/\rho S}$ 4) $\sqrt{2gh}$

3. В дне цилиндрического ведра, наполненного жидкостью до уровня $H = 20$ см, пробивается отверстие. Определить время Δt , в течение которого вся вода вытечет, если площадь жидкости в ведре $S_1 = 10^3$ см², площадь отверстия $S_2 = 0,05$ см² ($S_1 \gg S_2$). Жидкость считать идеальной. Ускорение свободного g падения взять равным 10 м/с².

- 1) 283 с 2) 335 с 3) 577 с 4) 4000 с

4. На какую высоту поднимется столбик воды в манометрической трубке, установленной на катере, движущемся со скоростью $v = 5,0$ м/с. Течение воды ламинарное и ее вязкостью можно пренебречь.

- 1) 0,5 м 2) 0,8 м 3) 1,0 м 4) 1,3 м

5. Шар радиусом $r = 10$ см привязан к длинному шнуру и движется за катером со скоростью $v = 5,0$ м/с. Определить силу натяжения шнура, если он натянут горизонтально. Коэффициент динамической вязкости $\eta = 1,8$ Па·с.

- 1) 17,0 Н 2) 21,6 Н 3) 34,9 Н 4) 43,2 Н

6. Найти силу давления воды водохранилища глубиной $h = 50$ м на плотину длиной $L = 200$ м. Плотность воды $\rho = 1 \cdot 10^3$ кг/м³. Атмосферное давление 10^5 Па.

- 1) 1,5 МН 2) 3,5 ГН 3) 2,5 ГН 4) 10 МН

Раздел 7. СПЕЦИАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Постулаты теории. В основе специальной теории относительности лежат постулаты Эйнштейна.

Первый постулат носит название *принципа относительности Эйнштейна*, и представляет собой обобщение принципа относительности Галилея:

Все физические явления протекают одинаковым образом во всех инерциальных системах отсчета, т.е. все законы природы и уравнения, их описывающие, инвариантны при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой.

Другими словами, все инерциальные системы отсчета эквивалентны по своим физическим свойствам, и никаким опытом нельзя в принципе выделить одну из них как предпочтительную.

Второй постулат утверждает:

Скорость света в вакууме не зависит от движения источника света и одинакова во всех направлениях.

Согласно первому принципу законы природы одинаковы во всех инерциальных системах отсчёта, поэтому предельная скорость распространения взаимодействий должна быть одинакова во всех инерциальных системах отсчета. Скорость света, одинаковая во всех инерциальных системах отсчета, как раз и является предельной скоростью распространения взаимодействий и предельной скоростью передачи какой-либо информации.

Преобразования Лоренца. Пусть система отсчёта K' движется с постоянной скоростью v относительно неподвижной системы отсчёта K . Выберем оси x и x' параллельно друг другу и параллельно вектору скорости системы K' , как это показано на рис. 7.1.

Предположим, что начала координат O и O' совпадали в начальный момент времени при $t = t' = 0$. Предположим теперь, что в момент времени t в K -системе в точке с координатами x , y и z произошло некоторое событие A . Преобразования Лоренца определяют момент времени t' , в который это событие произошло в системе отсчета K' и координаты x' , y' , z' точки, в которой произошло событие A в штрихованной системе отсчета.

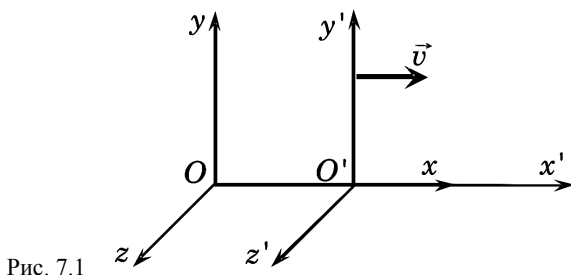


Рис. 7.1

При переходе от системы K к системе K' (прямые) преобразования Лоренца имеют вид:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}; \quad y' = y; \quad z' = z; \quad t' = \frac{t - xv/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (7.1)$$

Преобразования при переходе от системы K' к системе K (обратные) имеют аналогичный вид и отличаются только знаком перед скоростью

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}; \quad y = y'; \quad z = z'; \quad t = \frac{t' + x'v/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (7.2)$$

Симметричный вид преобразований является следствием равноправия всех систем отсчета.

Следствия из преобразований Лоренца.

1. *Относительность понятия одновременности.* События одновременные в одной системе отсчета, в другой системе отсчета не одновременны.

2. *Лоренцево сокращение.* Пусть в движущейся K' системе отсчета имеется эталон длины l_0 , расположенный вдоль оси x' и неподвижный относительно этой системы. Для измерения его длины в K системе необходимо провести одновременный замер координат его концов. Из преобразований Лоренца следует, что длина эталона в системе K

$$l = l_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}. \quad (7.3)$$

Таким образом, длина тел в направлении их движения оказывается меньше относительно неподвижной системы отсчёта (так называемое *лоренцево* сокращение длины).

Собственной длиной стержня называется его длина l_0 в системе отсчёта, относительно которой он покоится. Поперечные размеры тел вдоль осей y и z , перпендикулярных направлению движения, не сокращаются. Следовательно, изменяется форма тел.

3. *Промежуток времени между событиями, происходящими в одной пространственной точке.* Если в системе отсчёта K' в одной и той же пространственной точке x_0' происходят два события в разные моменты времени t_1' и t_2' , то в системе K в соответствии с преобразованиями Лоренца промежуток времени Δt между этими событиями

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (7.4)$$

Промежуток времени $\Delta t' = \Delta t_0$, измеренный по часам, неподвижным относительно данной системы отсчёта, *называется собственным временем.*

Интервал. *Интервалом* между двумя точечными событиями в системе отсчёта K называется величина равная

$$\Delta s = \sqrt{c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2}. \quad (7.5)$$

Интервал инвариантен относительно преобразований Лоренца.

В зависимости от того, какой знак имеет квадрат интервала, интервалы делятся на три типа:

пространственноподобные, если $\Delta s^2 < 0$;

времениподобные при $\Delta s^2 > 0$;

светоподобные для которых $\Delta s^2 = 0$.

Если интервал между двумя событиями пространственноподобный, то можно найти такую систему отсчета, в которой эти события происходят одновременно, то есть эти события не могут быть причинно связанными. Для времениподобных интервалов всегда существует система отсчета, в которой они произошли в одной пространственной точке. События, разделенные времениподобны-

ми или светоподобными интервалами могут быть причинно связанными.

Преобразование скоростей. Пусть в системе K в плоскости xu движется частица со скоростью $\vec{u}$, проекции которой u_x и u_y . посредством преобразований Лоренца можно найти скорость этой частицы в системе K' , которая движется относительно системы K со скоростью $\vec{v}$ направленной вдоль оси x (см. рис. 7.1).

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{c^2}}, \quad u'_y = \frac{u_y \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{u_x v}{c^2}}. \quad (7.6)$$

Обратное преобразование скоростей записывается аналогично, с учетом изменения знака скорости.

Релятивистский импульс. Импульс релятивистской частицы

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (7.7)$$

На рис. 7.2 представлена зависимость релятивистского импульса от скорости.

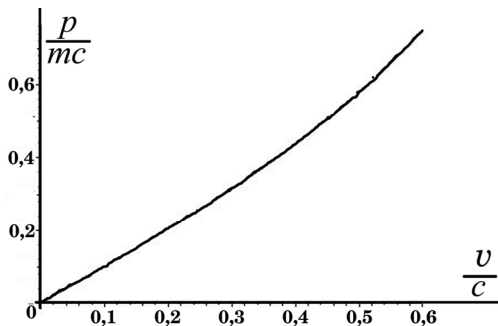


Рис. 7.2

Основное уравнение релятивистской динамики имеет вид

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \quad \text{или} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = \vec{F}. \quad (7.8)$$

Энергия релятивистской частицы. Рассматривая работу совершаемую силой $\vec{F}$ (7.8), можно получить выражение для энергии релятивистской частицы – *полной энергии*:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (7.9)$$

На рис. 7.3 представлена зависимость энергии релятивистской частицы от скорости. Из графика видно, что если скорость частицы будет равна нулю, то энергия становится равной

$$E_0 = mc^2. \quad (7.10)$$

Это – *энергия покоя* частицы, связанная с общей внутренней энергией тела.

Кинетическая энергия релятивистской частицы будет равна полной энергии за вычетом энергии покоя

$$T = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - mc^2. \quad (7.11)$$

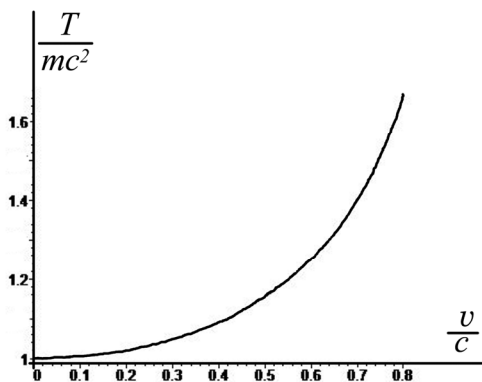


Рис. 7.3

Импульс релятивистской частицы можно выразить через кинетическую энергию следующим образом

$$p = \frac{1}{c} \sqrt{T(T + 2mc^2)}. \quad (7.12)$$

Преобразование импульса и энергии. Из преобразований Лоренца следует, что при переходе из системы K в систему K' , кото-

рая движется относительно системы K со скоростью $\vec{v}$, направленной вдоль оси x (см. рис. 7.1), релятивистские импульс и энергия будут меняться в соответствии с законами:

$$p'_x = \frac{p_x - Ev/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad p'_y = p_y, \quad p'_z = p_z, \quad E' = \frac{E - p_x v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (7.13)$$

Механика системы частиц. Для системы релятивистских частиц выполняются законы сохранения полной энергии и релятивистского импульса.

$$E = \sum_i \frac{m_i c^2}{\sqrt{1 - v_i^2/c^2}} = \text{const},$$

$$\vec{p} = \sum_i \frac{m \vec{v}_i}{\sqrt{1 - v_i^2/c^2}} = \text{const}.$$

Эти законы будут выполняться и в процессах, в которых число частиц не остается неизменным (рождение частиц, аннигиляция и т.п.).

ПРИМЕР И РЕШЕНИЕ ТЕМАТИЧЕСКОГО ТЕСТА

Тест № 1

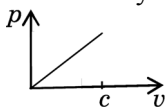
1. Найдите правильное окончание утверждения: *во всех инерциальных системах отсчета имеют одну и ту же величину...*

- 1) сила, действующая на частицу
- 2) ускорение частицы
- 3) сумма кинетической энергии и энергии покоя частицы
- 4) скорость радиосигнала в вакууме, излучаемого движущимся передатчиком.

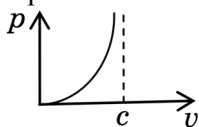
2. При какой скорости движения релятивистское сокращение длины движущегося тела составит 25 %?

- | | |
|--------------------------|--------------------------|
| 1) $1,98 \cdot 10^8$ м/с | 2) $2,99 \cdot 10^8$ м/с |
| 3) $2,46 \cdot 10^8$ м/с | 4) $1,20 \cdot 10^8$ м/с |

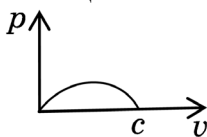
3. Какой из графиков качественно правильно отражает зависимость импульса релятивистской частицы от ее скорости?



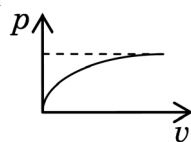
1)



2)



3)



4)

4. Два события произошли в K -системе в мировых точках с координатами $x_1 = 3,0$ м, $t_1 = 10$ нс и $x_2 = 5,0$ м, $t_2 = 20$ нс. Найти промежуток времени между этими событиями в системе, в которой они произошли в одной пространственной точке.

1) 2,5 нс

2) 5,0 нс

3) 7,5 нс

4) 10 нс

5. Солнце каждую секунду излучает в окружающее пространство около $3,75 \cdot 10^{26}$ Дж энергии. Какова скорость уменьшения массы Солнца за счет излучения?

1) $4,2 \cdot 10^{11}$ кг/с 2) $8,4 \cdot 10^9$ кг/с 3) $4,2 \cdot 10^9$ кг/с 4) $2,1 \cdot 10^9$ кг/с

6. Две одинаковые частицы массами $m = 0,30 \frac{\text{МэВ}}{c^2}$ движутся

навстречу друг другу со скоростями $v = 0,6c$, где c – скорость света в вакууме. Найти массу частицы, образовавшейся в результате лобового столкновения.

1) $0,60 \frac{\text{МэВ}}{c^2}$ 2) $0,65 \frac{\text{МэВ}}{c^2}$ 3) $0,70 \frac{\text{МэВ}}{c^2}$ 4) $0,75 \frac{\text{МэВ}}{c^2}$

Решение теста № 1

Задача 1. Радиосигнал передается посредством электромагнитных волн, которые распространяются в вакууме со скоростью $c = 2,998 \cdot 10^8$ м/с вне зависимости от выбора инерциальной системы отсчета и скорости движения передатчика.

Правильный ответ 4.

Задача 2. Уменьшение длины движущегося тела определяется выражением (7.3)

$$l = l_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

По условиям задачи сокращение длины движущегося тела составляет 25 %, то есть $l_0 - l = 0,25l_0$ или $l = 0,75l_0$. Подставив это значение в (7.3), получим, что скорость движения тела

$$v = c\sqrt{1 - (0,75)^2} = 1,98 \cdot 10^8 \text{ м/с},$$

где c – скорость света в вакууме, принимаемая равной $3,00 \cdot 10^8 \text{ м/с}$.

Правильный ответ 1.

Задача 3. Зависимость импульса релятивистской частицы от ее скорости определяется выражением (7.7)

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Из этой зависимости следует, что при стремлении скорости частицы к скорости света импульс должен стремиться к бесконечности. Этому условию удовлетворяет только график, приведенный на рисунке 2.

Правильный ответ 2.

Задача 4. Преобразования Лоренца оставляют инвариантным интервал Δs . Выпишем квадрат интервала между событиями в системе отсчета K :

$$\Delta s^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2.$$

В некоторой системе K' эти события произошли в одной пространственной точке, то есть $x'_1 = x'_2$, тогда в этой системе K' квадрат интервала между событиями будет определяться выражением $\Delta s'^2 = c^2(t'_2 - t'_1)^2$, и будет равен квадрату интервала в системе K .

Из инвариантности интервалов следует, что промежуток времени между событиями в системе K' равен

$$\begin{aligned} t'_2 - t'_1 &= \sqrt{\frac{\Delta s'^2}{c^2}} = \sqrt{\frac{c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2}{c^2}} = \sqrt{\frac{5 \text{ м}^2}{9 \cdot 10^{16} \text{ м}^2/\text{с}^2}} = \\ &= 7,45 \cdot 10^{-9} \text{ с}. \end{aligned}$$

Правильный ответ 3.

Задача 5. В соответствии с законами релятивистской динамики общая внутренняя энергия тела, называемая энергией покоя, связана с его массой соотношением $E = mc^2$.

Солнце излучает каждую секунду за счет своей внутренней энергии порцию энергии $\Delta E = 3,75 \cdot 10^{26}$ Дж, тогда теряемая им каждую секунду масса $\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2} = 4,17 \cdot 10^9$ кг.

Правильный ответ 3.

Задача 6. Для системы релятивистских частиц выполняются законы сохранения полной энергии и релятивистского импульса. Так как до столкновения частицы двигались навстречу друг другу с одинаковыми скоростями, то их суммарный импульс равен нулю:

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + \frac{m(-\vec{v})}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = 0.$$

В результате столкновения образовалась одна частица, импульс которой должен быть равен нулю, то есть образовавшаяся частица покоится, и ее энергия равна энергии покоя. Тогда закон сохранения энергии запишется в виде

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = Mc^2,$$

где M – масса образовавшейся частицы.

Из закона сохранения энергии следует

$$M = \frac{2m}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = 0,75 \frac{\text{МэВ}}{c^2}.$$

Правильный ответ 4.

ТЕСТЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Тест № 2

1. Полная энергия релятивистской частицы массы m , движущейся со скоростью v равна:

$$1) \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - mc^2 \quad 2) mv^2/2 \quad 3) \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad 4) mc^2$$

2. Собственное время жизни частицы равно $2 \cdot 10^{-6}$ с (скорость света в вакууме принять $c = 3 \cdot 10^8$ м/с). Интервал между событиями рождения и гибели частицы равен...

- 1) 300 м 2) 600 м 3) 900 м 4) 1200 м

3. Электрон движется со скоростью $0,6c$ (масса электрона $m_e = 0,911 \cdot 10^{-30}$ кг). Определить импульс электрона.

- 1) $2,05 \cdot 10^{-22}$ кг м/с 2) $1,82 \cdot 10^{-20}$ кг м/с
3) $3,29 \cdot 10^{-24}$ кг м/с 4) $1,20 \cdot 10^{-22}$ кг м/с

4. Во сколько раз увеличивается продолжительность существования нестабильной частицы (по часам неподвижного наблюдателя), если она начинает двигаться со скоростью, составляющей 99 % скорости света?

- 1) в 7,1 раза 2) в 10 раз 3) в 5,3 раза 4) в 3,1 раза

5. Кинетическая энергия электрона равна $T = 8,16 \cdot 10^{-14}$ Дж, масса электрона $m_e = 0,911 \cdot 10^{-30}$ кг, скорость света в вакууме $c = 2,998 \cdot 10^8$ м/с. Определить скорость электрона.

- 1) $4,82 \cdot 10^8$ м/с 2) $3,17 \cdot 10^8$ м/с 3) $2,60 \cdot 10^8$ м/с 4) $1,57 \cdot 10^8$ м/с

6. Две релятивистские частицы движутся в лабораторной системе отсчета со скоростями $0,6c$ и $0,9c$, где c – скорость света в вакууме, вдоль одной прямой. Определите их относительную скорость, если частицы движутся в одном направлении.

- 1) $0,195c$ 2) $0,345c$ 3) $0,825c$ 4) $0,975c$

Тест № 3

1. Преобразования Лоренца оставляют инвариантным...

- 1) ускорение 2) интервал 3) импульс 4) время

2. Частица движется со скоростью $0,95c$ относительно некоторой системы отсчета. Какой промежуток времени Δt , отсчитанный по часам в той же системе отсчета, соответствует $t = 1$ мкс собственного времени частицы?

- 1) 0,32 мкс 2) 4,8 мкс 3) 1,8 мкс 4) 3,2 мкс

3. При какой скорости движения релятивистское сокращение длины движущегося тела составит 25 %?

- 1) $1,98 \cdot 10^8$ м/с 2) $2,99 \cdot 10^8$ м/с 3) $2,46 \cdot 10^8$ м/с 4) $1,20 \cdot 10^8$ м/с

4. Два события произошли в K -системе в мировых точках с координатами $x_1 = 3,0$ м, $t_1 = 10$ нс и $x_2 = 10$ м, $t_2 = 20$ нс. Найти расстояние между этими событиями в системе, в которой они произошли одновременно.

- 1) 4,3 м 2) 6,3 м 3) 8,3 м 4) 10,3 м

5. Космический корабль движется к Земле со скоростью 0,9с, где $c = 3 \cdot 10^8$ м/с – скорость света в вакууме. Какое расстояние пройдет этот корабль в системе отсчета, связанной с Землей за время 1,0 с, отсчитанное по часам, находящимся на корабле?

- 1) 348 Мм 2) 548 Мм 3) 688 Мм 4) 708 Мм

6. π^+ -мезон движется в лабораторной системе отсчета со скоростью $V = 0,85c$, где c – скорость света в вакууме. Каково время жизни π^+ -мезона в лабораторной системе отсчета, если его собственное время жизни $\tau_0 = 2,6 \cdot 10^{-8}$ с?

- 1) $3,2 \cdot 10^{-8}$ с 2) $3,9 \cdot 10^{-8}$ с 3) $4,9 \cdot 10^{-8}$ с 4) $5,2 \cdot 10^{-8}$ с

Рекомендуемая литература

Основная

1. Калашников Н.П., Смондырев М.А. Основы физики. М.: Дрофа, 2007.
2. Савельев И.В. Курс общей физики. Волны. Оптика. Кн.1. М.: АСТ Астрель, 2008.

Дополнительная

3. Иродов И.Е. Основные законы механики. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2010.