МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

Н.П. Калашников, А.С. Ольчак

Руководство по решению задач по общей физике «Колебательное движение. Молекулярная физика и термодинамика. Элементы статистической физики»

Рекомендовано к изданию УМО «Ядерные физика и технологии»

МОСКВА 2015

УДК 53(07)
ББК 22.3я7
К17

Калашников Н.П., Ольчак А.С. **Руководство по решению задач по общей физике «Колебательное движение. Молекулярная физика и термодинамика. Элементы статистической физики»:** Учебное пособие. М.: НИЯУ МИФИ, 2015. – 184 с.

Предназначено студентам инженерно-технических направлений и специальностей. Изучение курса создает базис для выработки умения ориентироваться в обильном потоке научно-технической информации, своевременно распознавать перспективные научные направления, оценивать возможность их практического использования и просчитывать последствия тех или иных технологических инноваций. Предложены задачи с примерами решений и задач для самостоятельной работы и контрольных занятий.

Подробно разобраны типичные задачи, характерные для того или иного теоретического раздела, и приведены задачи для самостоятельной работы с ответами для самоконтроля.

Одной из целей курса является воспитание культуры системного подхода, навыков логического мышления, привычки обдумывать результаты, строить правильные рабочие гипотезы и четко формулировать задачу.

Подготовлено в рамках Программы создания и развития НИЯУ МИФИ.

Рецензент д-р физ.-мат. наук, проф., зав. кафедрой физики МФТИ А.В.Максимычев

ISBN 978-5-7262-1661-4

© Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», 2015

Содержание

Предисловие. 5
Цель изучения предмета общей физики. 7
Общие методические рекомендации 9
1. Механические колебания 12
1.1. Кинематика свободных гармонических колебаний. Сложение гармонических колебаний 12
1.1.1. Основные понятия, законы и формулы 12
1.1.2. Методические рекомендации по решению задач 14
1.1.3. Задачи для самостоятельной работы 23
1.2. Динамика гармонических колебаний 27
1.2.1. Основные понятия, законы и формулы 27
1.2.2. Методические рекомендации по решению задач 28
1.2.3. Задачи для самостоятельной работы 39
1.3. Затухающие и вынужденные колебания. Резонанс 43
1.3.1. Основные понятия, законы и формулы 43
1.3.2. Методические рекомендации по решению зада 45
1.3.3. Задачи для самостоятельной работы 50
1.4. Электромагнитные колебательные системы 53
1.4.1. Основные понятия, законы и формулы 53
1.4.2. Методические рекомендации по решению задач 55
1.4.3. Задачи для самостоятельной работы 61
2. Молекулярная физика и термодинамика 64
2.1. Молекулы и атомы 64
2.1.1. Основные понятия, законы и формулы 64
2.1.2. Методические рекомендации по решению задач 65
2.1.3. Задачи для самостоятельной работы 68
2.2. Законы идеального газа 71
2.2.1. Основные понятия, законы и формулы 71
2.2.2. Методические рекомендации по решению задач 72
2.2.3. Задачи для самостоятельной работы 79
2.3. Термодинамика идеального газа 83
2.3.1. Основные понятия, законы и формулы 83
2.3.2. Методические рекомендации по решению задач 85
2.3.3. Задачи для самостоятельной работы 91
2.4. Энтропия в термодинамике 95
2.4.1. Основные понятия, законы и формулы 95
2.4.2. Методические рекомендации по решению задач 96

2.4.3. Задачи для самостоятельной работы 102
2.5. Циклические процессы и тепловые машины 105
2.5.1. Основные понятия, законы и формулы 105
2.5.2. Методические рекомендации по решению задач 105
2.5.3. Задачи для самостоятельной работы 116
2.6. Реальный газ, жидкость и твердое тело. Фазовые переходы и явления на границе раздела фаз 120
2.6.1. Основные понятия, законы и формулы 120
2.6.2. Методические рекомендации по решению задач 122
2.6.3. Задачи для самостоятельной работы 126
3. Элементы статистической физики 130
3.1. Элементы теории вероятности. Распределения. Энтропия в статистической физике 130
3.1.1. Основные понятия, законы и формулы 130
3.1.2. Методические рекомендации по решению задач 131
3.1.3. Задачи для самостоятельной работы 138
3.2. Распределения молекул по координатам, скоростям и энергиям 141
3.2.1. Основные понятия, законы и формулы 141
3.2.2. Методические рекомендации по решению задач 142
3.2.3. Задачи для самостоятельной работы 148
3.3. Элементы физической кинетики 151
3.3.1. Основные понятия, законы и формулы 151
3.3.2. Методические рекомендации по решению задач 153
3.3.3. Задачи для самостоятельной работы 163
Приложение. Справочный материал 166
Список рекомендуемой литературы 181

При изучении наук (физики) примеры полезнее правил.

И. Ньютон

Физика – прежде всего живое творение рук и мозга, которое передается более примером, чем зубрежкой. Она (физика) воплощает искусство решать проблемы материального мира. И поэтому физике надо учиться, но учиться как искусству.

А.Б. Пиппард

ПРЕДИСЛОВИЕ

Стандартный курс общей физики в технических вузах состоит из пяти основных разделов, на изучение каждого из которых обычно отводится один семестр: «Механика», «Колебания и молекулярная физика», «Электричество и магнетизм», «Оптика», «Атомная физика». Именно такой курс на протяжении многих лет читается в НИЯУ МИФИ силами кафедры «Общая физика» на физико-технических факультетах университета.

Существует множество хороших учебников и задачников по курсу общей физики и по его отдельным разделам, втом числе подготовленные на кафедре общей физики НИЯУ МИФИ широко известные классические учебники И. В. Савельева «Общая физика» в 5 томах, Н.П.Калашникова и М.А. Смондырева «Основы физики» в 3-х томах с упражнениями и задачами, «Задачи по общей физике» И.Е. Иродова, «Сборник вопросов и задач по общей физике» И.В Савельева, «Качественные задачи по общей физике» Е.И. Бабаджана, В.И. Гервидса, В.М. Дубовика, Э.А. Нерсесова.

В настоящее время в связи с развитием системы ЕГЭ в средней школе и сокращением аудиторного времени изучения общенаучных дисциплин по программам бакалавриата и подготовки специалистов в высшей школе, по нашему мнению, назрела необходимость подготовки подробных учебных пособий нового типа, содержащих не только теоретический материал и формулировки задач для самостоятельной работы студентов, но и большое количество задач с подробными решениями по каждому тематическому разделу курса. Эти задачи могут изучаться студентами самостоятельно, а также могут методологически помочь преподавателю в

проведении практических занятий со студентами. Кафедра общей физики НИЯУ МИФИ подготовила серию из пяти руководств по решению задач по физике по каждому семестровому разделу курса.

Настоящее пособие представляет вторую часть данной серии – руководство по решению задач по общей физике по разделам курса «Колебательное движение», «Молекулярная физика и термодинамика», «Элементы статистической физики». Именно эти разделы изучаются обычно на втором семестре, сразу по завершении изучения основ механики. Главная целевая аудитория пособия – студенты, изучающие эти разделы курса, и преподаватели, ведущие у них занятия.

Пособие делится на 13 тематических разделов: 4 по колебательному движению, 6 – по молекулярной физике и термодинамике, 3 – по статистической физике и физической кинетике. Это примерно соответствует числу учебных недель в семестре, хотя разделы различаются по сложности и наполненности задачами. В каждом тематическом разделе имеются три части:

1) **основные понятия, законы и формулы,** где приводятся формулировки основных физических законов и формулы, необходимые для решения задач по данному тематическому разделу;
2) **методические рекомендации по решению задач,** где подробно разобраны типичные задачи, характерные для данного тематического раздела, более 10 задач, в зависимости от сложности и объема изучаемого раздела. Всего в пособии подробно разобрано более 130 задач;
3) **задачи для самостоятельной работы**, где приведены задачи для самостоятельной работы с ответами для самоконтроля. Всего в пособии имеется более 300 задач для самостоятельной работы.

Авторы полагают, что проработка в течение семестра этого пособия позволит студентам понять суть и следствия основных физических законов и овладеть методикой и техникой решения задач по разделам «Колебательное движение», «Молекулярная физика и термодинамика», «Элементы статистической физики».

ЦЕЛЬ ИЗУЧЕНИЯ ПРЕДМЕТА ОБЩЕЙ ФИЗИКИ

Предметом общей физики в широком смысле является познание окружающего нас мира. Задача естественных наук состоит в том, чтобы сформировать в нашем сознании такую модель физического мира, которая наиболее полно отражала бы его свойства и обеспечивала такие соотношения между элементами модели, какие существуют между элементами внешнего мира. Джеймс Максвелл писал: «Точные науки стремятся к тому, чтобы свести загадки природы к определению некоторых величин путем операций над числами». Поэтому естественные науки «говорят» с природой на языке математики. Принцип ***«nulla scientia potest sciri sine mathematika»*** (никакую науку нельзя познать без математики) был сформулирован еще в Средневековье. Но откуда взять эти самые числа, которыми оперирует математика, которые должны фигурировать в уравнениях, выражающих те или иные закономерности природы? Единственным источником их может служить сама природа. ***Естествознание*** – комплекс экспериментальных наук, в основе которых лежат наиболее общие закономерности, изучаемые физикой. Естественные науки начинаются с наблюдений и измерений, ими же проверяются и питаются в своем развитии. Конечно, новые идеи в науке появляются и благодаря умозрительным рассуждениям, но окончательный ответ на решающие вопросы может быть получен только в эксперименте.

Данная учебная дисциплина входит в общенаучный цикл основных образовательных программ бакалавриата, специалитета и магистратуры. Для изучения дисциплины необходимы входные компетенции, сформированные у обучающихся в результате освоения дисциплин «математика» и «физика» в старших классах общеобразовательных учебных учреждений. Изучение курса создает базис для выработки умения ориентироваться в обильном потоке научно-технической информации, своевременно распознавать перспективные научные направления, оценивать возможность их использования на практике и просчитывать последствия тех или иных технологических новаций.

Цель освоения учебной дисциплины «Общая физика» состоит в том, чтобы сформировать у студентов научный метод мышления,

воспитать инженерную интуицию, осветить мировоззренческие и методологические проблемы физики, отразить основные черты современной естественнонаучной картины мира, показать важную роль современной физики в решении глобальных проблем человечества (энергетической, экологической и др.); подготовить студентов к изучению специальных курсов теоретической и экспериментальной физики. Одной из задач курса является воспитание культуры системного мышления, навыков логического мышления, привычки обдумывать результаты, строить правильные рабочие гипотезы и четко формулировать задачу. Знакомство с основами фундаментальных наук повышает общую культуру общества, защищает его от мистики и суеверий.

Данная дисциплина участвует в формировании следующих **общепрофессиональных компетенций** (КМ.П.ОП.0.1.):

1. Знание роли физики в современной научно-технической революции – истории становления и развития основных физических понятий и теорий, их философское истолкование; основных направлений развития современной физики; вклада отечественных ученых в развитие физической теории и эксперимента, а также основных законов классической механики и методологии физических исследований, куда входят: экспериментальные основания изучаемых теорий, способов экспериментальной проверки основных выводов теории; принципы измерения физических величин; принципы работы и схем экспериментальных установок для проведения «решающих» физических экспериментов; основы современных методов обработки результатов измерений.
2. Умение самостоятельно работать с учебной литературой; применять изученные закономерности к решению физических задач и анализировать полученные решения; выводить основные соотношения между физическими величинами, следующие из постулатов теории или результатов эксперимента; проводить вычисления с требуемой степенью точности.
3. Наличие навыков сборки и настройки несложных экспериментальных установок; проведения несложных физических экспериментов; работы с современными измерительными приборами; обработки результатов измерений с использованием ЭВМ.

Задачи дисциплины:

- изучение студентами основных понятий, определений и законов молекулярно-кинетической теории, термодинамики и статистической физики;
- формирование у студента способности применять знания, получаемые при изучении курса, к решению практических физических задач;
- получение основ профессиональных навыков проведения несложных физических экспериментов в учебных физических лабораториях;
- обучение студентов самостоятельной работе с учебной литературой;
- подготовка студентов к изучению специальных курсов экспериментальной и теоретической физики.

ОБЩИЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

Физика – самая фундаментальная из всех естественных наук. Она изучает самые простые и общие свойства материи и сравнительно простые явления природы. Поэтому физика составляет универсальную основу всей науки и техники. В настоящее время с физикой связаны самые разнообразные области человеческой деятельности – от космонавтики до нанотехнологий, от информационных технологий до археологии.

Схематично научное исследование какого-либо физического явления можно разделить на четыре этапа: эксперимент (или наблюдения), построение физической модели, математический формализм и (после математического решения проблемы) наступает важный четвертый этап – обсуждение полученного результата, анализ влияния различных параметров на интересующую исследователя величину. Последние этапы являются составными частями физической теории, назначение которой – составить представление о механизме исследуемого явления и дать его количественное описание. Для построения теории (сначала на основании наблюдательных или экспериментальных данных) конструируется образная модель изучаемого явления. Модель есть научная абстракция, т.е. понятие, отражающее наиболее существенные свойства данного яв-

ления. Модель должна быть достаточно простой для того, чтобы стать пригодной для математического описания. Применение математики позволяет получить количественные соотношения между физическими величинами, которые могут быть проверены на опыте. Если теория верна, то ее предсказания должны подтверждаться результатами экспериментов и наблюдений. Физика – экспериментальная наука. Эксперимент в одних случаях позволяет найти искомые закономерности, обнаружить новое явление или новые стороны известного явления; в других случаях он выступает как объективный рефери теории.

Возникает вопрос: что из того материала, который изучается в университете, окажется необходимым в вашей дальнейшей работе? Законы физики? Конечно, основные физические законы знать необходимо, но всё же не это самое главное. Забытую формулировку закона или математическое выражение можно найти в справочнике. Чем больше законов и формул сохранилось в вашей памяти, тем реже вам придется рыться в справочниках, тем выше ваш **профессионализм**, тем выше будет **производительность вашего труда**. В связи с этим среди компетенций, которыми должен обладать будущий специалист, на первое место следует поставить умение владеть **методами** работы. Цель этого пособия и заключается в том, чтобы привить ее читателю основы физического **метода** мышления.

Систематическое решение физических задач – необходимое условие успешного изучения курса физики. Решение задач помогает уяснить физический смысл явлений, закрепляет в памяти основные физические законы, прививает навыки практического применения теоретических знаний, знакомит с характерными масштабами явлений и порядками физических величин, встречающихся на практике. Подобный анализ проведен в ряде задач этого пособия.

При решении физических задач полезно придерживаться определенного порядка действий:

1) слева записать все данные задачи вместе с их численными значениями, искомые в задаче величины и табличные значения используемых физических параметров;

2) выразить все данные задачи в международной системе единиц (СИ). Исключение из этого правила допускается лишь для однородных величин, входящих в ответ в виде отношения: в таком

случае они могут быть выражены в любой (но одной и той же) системе единиц;

3) сделать чертеж, схему или рисунок с обозначениями данных задачи в соответствии с условием задачи («*Рисунок – источник и душа каждого изображения и корень каждой науки*». – *Микеланджело*);

4) установить физические законы, отвечающие содержанию данной задачи. Записать, из какого закона (законов), определения или физического соотношения можно найти искомую величину;

5) решить задачу в общем (буквенном) виде, т.е. выразить искомую величину в буквенных обозначениях величин, заданных в условии;

6) произвести проверку размерностей. Полученная единица измерения должна совпадать с единицей искомой в задаче величины;

7) произвести вычисления;

8) привести в ответе числовое значение с сокращенным наименованием единицы измерения, округлив его разумным образом с учетом точности задания начальных данных и точности использованных уравнений;

9) с точки зрения здравого смысла оценить правдоподобность полученного результата.

Нам представляется, что если вы решите или разберете достаточно большое количество задач этого пособия, то основы физического мышления станут для вас более ясными, физика станет реальной основой вашего дальнейшего развития как полноценной личности эпохи научно-технического прогресса.

1. Механические колебания

1.1. Кинематика свободных гармонических колебаний Сложение колебаний

1.1.1. Основные понятия, законы и формулы

• Дифференциальное уравнение гармонических свободных колебаний:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \ ,$$

где ω_0 – собственная круговая частота колебаний, определяемая параметрами колеблющейся системы.

• Общее решение уравнения гармонических колебаний:

$$x = A\cos\left(\omega t + \varphi_0\right),$$

где x – смещение точки от положения равновесия; t – время; A – амплитуда колебаний; ω – их круговая (циклическая) частота, φ_0 – начальная фаза колебаний; $\varphi = \omega t + \varphi_0$ – фаза колебаний в момент t.

• Круговая частота колебаний:

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T},$$

где ν и T – частота и период колебаний соответственно.

• Скорость точки, совершающей гармонические колебания:

$$v = \dot{x} = -A\omega\sin\left(\omega t + \varphi_0\right).$$

• Ускорение точки при гармоническом колебании:

$$a = \ddot{x} = -A\omega^2\cos\left(\omega t + \varphi_0\right).$$

• Амплитуда A результирующего колебания, полученного при

сложении двух колебаний с одинаковыми частотами, происходящих по одной прямой, определяется формулой

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\left(\varphi_{0,2} - \varphi_{0,1}\right),$$

где A_1 и A_2 – амплитуды составляющих колебаний; $\varphi_{0,1}$ и $\varphi_{0,2}$ – начальные фазы.

• Начальная фаза φ_0 результирующего колебания находится по формуле

$$\mathrm{tg}\varphi_0 = \frac{A_1\sin\varphi_{0,1} + A_2\sin\varphi_{0,2}}{A_1\cos\varphi_{0,1} + A_2\cos\varphi_{0,2}}.$$

• Частота биений, возникающих при сложении двух колебаний, происходящих по одной прямой с различными, но близкими по значению частотами ν_1 и ν_2: $\nu = \nu_1 - \nu_2$.

• Уравнение траектории точки, участвующей в двух взаимно перпендикулярных колебаниях одинаковой частоты с амплитудами A_1 и A_2 начальными фазами $\varphi_{0,1}$ и $\varphi_{0,2}$:

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1A_2}\cos\left(\varphi_{0,2} - \varphi_{0,1}\right) = \sin^2\left(\varphi_{0,2} - \varphi_{0,1}\right).$$

Если разность фаз между колебаниями составляет целое число π, то уравнение траектории соответствует уравнению прямой линии: $y = -\left(A_2 / A_1\right)x$ для $\Delta\varphi = 0{,}2\ \pi, 4\pi$ м т.д. или $y = -\left(A_2 / A_1\right)x$ для $\Delta\varphi = +/-\pi; +/-2\pi$ и т.д.

• В остальных случаях движение происходит по эллипсу. При разности фаз $\Delta\varphi = \pm\pi / 2 + 2\pi n\left(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\right)$ оси этого эллипса расположены по осям *OX* и *OY* и уравнение траектории принимает форму

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1.$$

1.1.2. Методические рекомендации по решению задач

Пример 1.1.1. *Уравнение колеблющейся точки имеет вид*

$x = 3 \sin \pi t$ (*смещение в сантиметрах*). *Определить*: 1) *амплитуду колебания, круговую частоту, период и начальную фазу*; 2) *смещение точки в момент времени* $t_0 = 1/6$ с; *максимальную скорость и максимальное ускорение.*

Решение. 1) Запишем уравнение гармонического колебания в общем виде: $x = A \cos(\omega t + \alpha)$. Сравнивая уравнение, данное по условию задачи, с уравнением, записанным в общем виде, получим

$$A = 3 \text{ см}; \ \omega = \pi \text{ с}^{-1} = 3{,}14 \text{ с}^{-1}; \ \alpha = -\pi/2.$$

Период колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\pi} \text{ с} = 2 \text{ с}.$$

2) При определении смещения подставим в заданное уравнение значение времени: $x = 3 \sin \pi t_0$; $x = 3 \sin \pi \frac{1}{6}$ см $= 1{,}5 \cdot 10^{-2}$ м.

3) Скорость колебательного движения найдем, продифференцировав смещение колеблющейся точки:

$$v = \frac{dx}{dt} = \omega A \cos \omega t.$$

Максимальное значение скорость принимает при $\cos \omega t = 1$, т.е.

$v_{\max} = \omega A = 3\pi$ см/с $\approx 9{,}42 \cdot 10^{-2}$ м/с. Ускорение найдем, продифференцировав выражение для скорости:

$$a = \frac{dt}{dt} = -\omega^2 A \sin \omega t.$$

Знак «минус» показывает, что ускорение направлено в сторону, противоположную смещению. Максимальное значение ускорение принимает при $\sin \omega t = -1$. Тогда $a_{\max} = \omega^2 A = 3\pi^2$ см/с$^2 \approx 0{,}3$ м/с^2.

Пример 1.1.2. *Точка совершает колебания по закону* $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$, *где* $A = 2$ см. *Определить начальную фазу* φ_0, *если* $x(0) = -\sqrt{3}$ см *и* $\dot{x}(0) < 0$. *Построить векторную диаграмму*

для момента $t=0$.

Решение. Из закона движения точки выражаем ее смещение в момент t = 0 через начальную фазу: $x(0)=A\cos\varphi_0$. Отсюда находим: $\cos\varphi_0 = x(0)/A = -\sqrt{3}/2$. Этому значению косинуса соответствуют два угла: $\varphi_0 = \pi \pm \pi/6$.

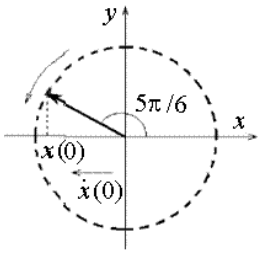

Рис. 1.1.1

Чтобы сделать выбор между этими значениями, найдем производную от $x(t)$: $\dot{x}(t) = -A\omega\sin(\omega t+\varphi_0)$, откуда $\dot{x}(0) = -A\omega\sin(\varphi_0)$. Начальная скорость отрицательна при положительном значении синуса, что бывает при углах $0<\varphi<\pi$. Стало быть, решением нашей задачи является угол $\varphi_0 = \pi - \pi/6 = 5\pi/6$. Векторная диаграмма для $t=0$ изображена на рис. 1.1.1.

Пример 1.1.3. *Материальная точка массой m* = 5 г *совершает гармонические колебания с частотой* $\nu = 0{,}5$ Гц. *Амплитуда колебаний A* = 3 см. *Определить*: 1) *скорость V точки в момент времени* t_0, *когда смещение x* = 1,5 см; 2) *максимальную силу* F_{max}, *действующую на точку*; 3) *полную энергию E колеблющейся точки.*

Решение. 1) Закон движения точки имеет вид $x = A\cos(2\pi\nu t+\varphi_0)$, а закон изменения скорости точки получаем дифференцированием: $V = \dot{x} = -2\pi\nu A\sin(2\pi\nu t+\varphi_0)$. Чтобы выразить скорость через смещение, надо исключить из двух формул время. Для этого возведем оба уравнения в квадрат, разделим первое на A^2, второе на $A^2(2\pi\nu)^2$ и сложим:

$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{V^2}{A^2(2\pi\nu)^2}=1.$$

Решив последнее уравнение относительно v, найдем $V = \pm 2\pi\nu\sqrt{A^2 - x^2}$. Подставляя численные значения, получим $V = \pm 8{,}2$ см/с. Знак «плюс» соответствует случаю, когда направление скорости совпадает с положительным направлением оси x, знак «минус» – когда направление скорости совпадает с отрицательным направлением оси x.

2) Силу, действующую на точку, найдем по второму закону Ньютона: $F = ma$, где выражение для ускорения получается дифференцированием $a = \dot{v} = -A(2\pi\nu)^2 \cos(2\pi\nu t + \varphi_0)$. Отсюда получаем закон изменения силы: $F = -mA(2\pi\nu)^2 \cos(2\pi\nu t + \varphi_0)$, так что максимальное значение силы $F_{\max} = mA(2\pi\nu)^2$. Подставив сюда значения величин ν, m, A, найдем $F_{\max} = 1{,}5$ мН.

3) Проще всего вычислить полную энергию в момент, когда кинетическая энергия достигает максимального значения. В этот момент потенциальная энергия равна нулю. Поэтому полная энергия E, колеблющейся точки равна максимальной кинетической энергии $T_{\max} = m V_{\max}^2 / 2$. Максимальную скорость мы знаем из формулы $V_{\max} = 2\pi\nu A$. Получаем тогда: $E = 2\pi^2\nu^2 m A^2 = 22$ мкДж.

Пример 1.1.4. *Два математических маятника, имеющих одинаковые массы, но разную длину, колеблются с одинаковыми угловыми амплитудами а. У какого из маятников энергия колебаний больше*?

Решение. Полная энергия колебаний материальной точки равна максимальной кинетической или максимальной потенциальной энергиям. В данном случае удобно сравнивать максимальные потенциальные энергии, определяемые максимальным отклонением. При наибольшем отклонении от положения равновесия грузы подняты на высоту $h = l\,(1 - \cos\alpha)$. Так как для обоих маятников угловые амплитуды α одинаковы, то на большую высоту поднимается маятник большей длины. Следовательно, он и обладает большей энергией колебаний.

Пример 1.1.5. *Складываются два колебания одинакового направления, выражаемых уравнениями* $x_1 = A_1 \cos\omega(t + \tau_1)$ *и*

$x_2 = A_2 \cos\omega\left(t + \tau_2\right)$, *где* $A_1 = 1$ см, $A_2 = 2$ см, $\tau_1 = 1/6$ с, $\tau_2 = 1/2$ с, $\omega = \pi\,\text{с}^{-1}$. *Найти амплитуду A и начальную фазу* φ *результирующего колебания.*

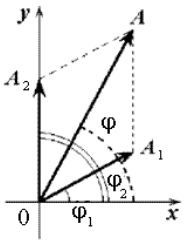

Рис. 1.1.2

К примеру 1.1.5. *Показана векторная диаграмма для начального момента времени. С течением времени все три вектора* (A_1, A_2, A) *вращаются как целое против часовой стрелки с угловой скоростью* ω.

Решение. Преобразуем заданные колебания к стандартному виду: $x_i = A_i \cos\left(\omega t + \varphi_i\right)$, i = 1,2, где начальные фазы $\varphi_i = \omega\tau_i$. Стало быть, $\varphi_1 = \pi/6$ и $\varphi_2 = \pi/2$. Для определения амплитуды A результирующего колебания удобно воспользоваться векторной диаграммой, представленной на рис.1.1.2. Согласно теореме косинусов, получаем $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\left(\varphi_2 - \varphi_1\right)}$. Подставляя численные значения, находим $A = \sqrt{7} = 2{,}65$ см. Формула для тангенса начальной фазы результирующего колебания

$$\text{tg}\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2},$$

также следует из рисунка. Подставим значения A_1, A_2, φ_1, φ_2 и произведем вычисления:

$$\text{tg}\varphi = \frac{\sin\left(\pi/6\right) + 2\sin\left(\pi/2\right)}{\cos\left(\pi/6\right) + 2\cos\left(\pi/2\right)} = \frac{1/2 + 2}{\sqrt{3}/2} = \frac{5}{\sqrt{3}},$$

откуда $\varphi = \text{arctg}\left(5/\sqrt{3}\right) = 0{,}394\pi$ рад $= 70{,}9^\circ$. Поскольку склады-

ваются колебания одинаковой частоты, результирующее колебание будет иметь ту же частоту: $x = A\cos(\omega t + \varphi)$.

Пример 1.1.6. *Материальная точка участвует одновременно в двух взаимно перпендикулярных гармонических колебаниях, уравнения которых* $x = A_1\cos(\omega t)$, $y = A_2\cos\dfrac{\omega t}{2}$, *где* $A_1 = 1$ см, $A_2 = 2$ см, $\omega = \pi c^{-1}$. *Найти уравнение траектории точки. Построить траекторию с соблюдением масштаба и указать направление движения точки.*

Решение. Чтобы найти уравнение траектории точки, исключим время *t* из заданных уравнений. Для этого воспользуемся тригонометрической формулой $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ при $\alpha = \omega t/2$. Получаем тогда уравнение траектории: $x = \dfrac{2A_1}{A_2^2}y^2 - A_1$ – уравнение параболы, ось которой совпадает с осью *Ox*. Из уравнений следует, что смещение точки по осям координат ограничено и заключено в пределах от $-A_1$ до $+A_1$ по оси *Ox* и от $-A_2$ до $+A_2$ по оси *Oy*. График траектории показан на рис.1.1.3. Период результирующего колебания $T = 2\pi/(\omega/2) = 4$ с, на графике показаны положения колеблющейся точки через 1/16 периода. Точка начинает колебание в момент $t = 0$, для которого находим $x = 1$ см, $y = 2$ см (положение *A*). Через четверть периода $(t = 1\text{ с})$ координаты точки равны $x = -1$, $y = 0$ (дно параболы). Через половину периода $(t = 2\text{ с})$ точка находится в положении $B\ (x = 1,\ y = -2)$, после чего начинает движение в обратном направлении вдоль той же параболы, и в момент $t = 4$ с снова оказывается в начальном положении *A*.

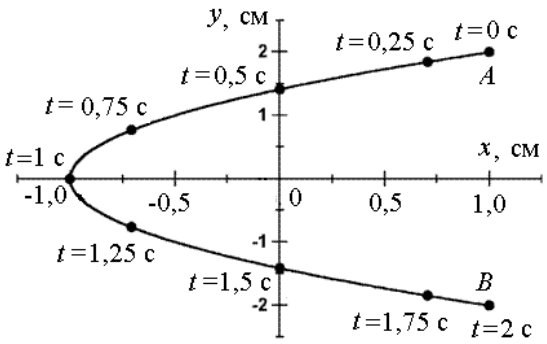

Рис. 1.1.3

Показаны положения точки через 1/16 *периода.*

Пример 1.1.7. *На рис.* 1.1.4. *и рис.* 1.1.5 *изображены зависимости от времени координаты и материальной точки, колеблющейся по гармоническому закону. Определить циклическую частоту колебаний точки.*

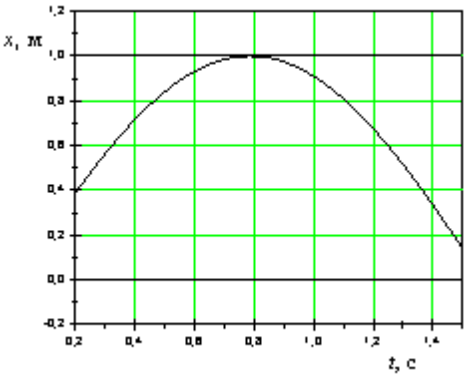

Рис. 1.1.4

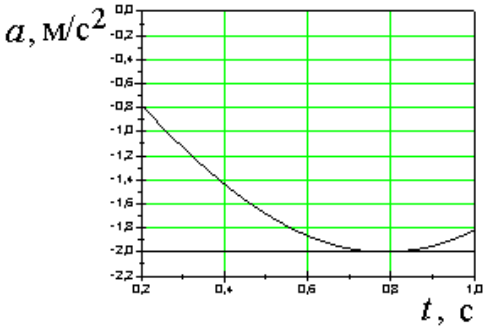

Рис. 1.1.5

Решение. Уравнение гармонических колебаний материальной точки записывается в виде $x(t) = A_0 \cos(\omega t + \alpha)$. Продифференцировав это уравнение по времени, можно получить зависимость от времени скорости и ускорения материальной точки:

$$v(t) = \dot{x} = -A_0 \omega \sin(\omega t + \alpha);$$

$$a(t) = \ddot{x} = -A_0 \omega^2 \cos(\omega t + \alpha).$$

Из анализа графиков $x(t)$ и $a(t)$ следует, что в момент времени $t_1 = 0,8$ с $\cos(\omega t_1 + \alpha)$ равен единице. Следовательно, $x(t_1) / a(t_1) = -\frac{1}{4} = -\frac{1}{\omega^2}$. Таким образом, циклическая частота $\omega = 2 \text{ с}^{-1}$.

Пример 1.1.8. *Складываются два гармонических колебания одного направления с одинаковыми периодами и равными амплитудами A_0. Определить амплитуду результирующего колебания при разности фаз* $\Delta\varphi = \frac{3\pi}{2}$.

Решение. Рассмотрим сложение двух гармонических колебаний одинакового направления и одинаковой частоты. Смещение x колеблющегося тела будет суммой смещений x_1 и x_2, которые запишутся следующим образом:

$$x_1 = A_1 \cos(\omega_0 t + \alpha_1), \; x_2 = A_2 \cos(\omega_0 t + \alpha_2).$$

Используя векторную диаграмму, представим результирующее движение в виде гармонического колебания с частотой ω_0, амплитудой A и начальной фазой α:

$$x = x_1 + x_2 = A\cos(\omega_0 t + \alpha),$$

где $A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\alpha_2 - \alpha_1)$,

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{A_1\sin\alpha_1 + A_2\sin\alpha_2}{A_1\cos\alpha_1 + A_2\cos\alpha_2}.$$

Учитывая, что $A_1 = A_2 = A_0$ и $\alpha_2 - \alpha_1 = \Delta\varphi = \frac{3\pi}{2}$, получаем $A^2 = 2A_0^2$ или $A = A_0\sqrt{2}$.

Пример 1.1.9. Точка M одновременно колеблется по гармоническому закону вдоль осей координат OX и OY с различными амплитудами, но с одинаковыми частотами. Какой вид имеет траектория при разности фаз $\frac{\pi}{2}$?

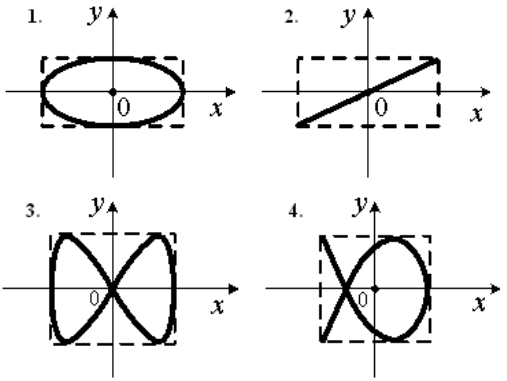

Рис. 1.1.6

Решение. Рассмотрим сложение взаимно перпендикулярных колебаний.

Выберем начало отсчета времени так, чтобы начальная фаза первого колебания была равна нулю. Тогда уравнения колебаний запишутся следующим образом:

$$x = A\cos\omega t;$$
$$y = B\cos(\omega t + \alpha),$$

где α – разность фаз обоих колебаний. Так как по условию задачи $\alpha=\frac{\pi}{2}$, то уравнение колебаний вдоль *OY* можно переписать в виде $y=-B\sin\omega t$. Чтобы получить уравнение траектории $y = y(x)$ в обычном виде, следует исключить из уравнений гармонических колебаний время *t*. Перепишем уравнения колебаний следующим образом:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{A}=\cos\omega t; \\ -\dfrac{y}{B}=\sin\omega t. \end{cases}$$

Возведем оба уравнения в квадрат и почленно сложим:

$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}=\cos^2\omega t+\sin^2\omega t=1,$$

т.е. мы получим уравнение траектории движения точки *M*

$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}=1.$$

Это уравнение эллипса, приведенного к координатным осям, причем полуоси эллипса равны соответствующим амплитудам колебаний. Таким образом, правильный ответ – 3 рис. 1.1.6.

Пример 1.1.10. *Точка участвует одновременно в двух гармонических колебаниях, происходящих во взаимно перпендикулярных направлениях и описываемых уравнениями*

$x = \cos\pi t$ *и* $y = \cos\frac{\pi}{2}t$. *Определить уравнение траектории точки.*

Решение. По условию задачи $x = \cos\pi t$ $y = \cos\frac{\pi}{2}t$. Чтобы получить уравнение траектории, исключим из этих уравнений *t* и выразим *y* через *x*:

$\cos\pi t = \cos^2\frac{\pi}{2}t-\sin^2\frac{\pi}{2}t=\cos^2\frac{\pi}{2}t-(1-\cos^2\frac{\pi}{2}t)=2\cos^2\frac{\pi}{2}t-1=2y^2-1.$

Таким образом, $y(x)=\sqrt{(x+1)/2}$ представляет параболу.

1.1.3. Задачи для самостоятельной работы

Кинематика гармонических колебаний

Задача 1.1.1. Точка совершает гармонические колебания. Максимальная скорость точки равна 0,1 м/с, максимальное ускорение 1 м/с^2. Определить угловую частоту колебаний. $(10\ \text{с}^{-1})$

Задача 1.1.2. Смещение гармонического осциллятора в зависимости от времени определяется соотношением $x(t)=2,4\cos\left(\frac{5\pi}{4}t+\frac{\pi}{6}\right)$, где x измеряется в метрах, а t – в секундах. Найдите: *а*) период и частоту колебаний; *б*) смещение и скорость в момент времени $t=0$; *в*) скорость и ускорение в момент времени $t=1,0$ с. (*а*) T = 1,6 с, ν = 0,625 Гц; *б*) $x(0)=2,1$ м, $v(0)=-4,7$ м/с; *в*) $v(1,0)=9,1$ м/с, $a(1,0)=9,6$ м/с^2)

Задача 1.1.3. Тело массой 1,0 кг совершает колебания по закону $x=0,42\cos(7,40t)$, где t измеряется в секундах, а x – в метрах. Найдите: *а*) амплитуду колебаний; *б*) их частоту; *в*) полную энергию; *г*) кинетическую и потенциальную энергию при $x=0,16$ м. (*а*) A = 0,42 м; *б*) $\nu=1,18$ Гц; *в*) $W_{\text{tot}}=4,83$ Дж; *г*) $W_{\text{kin}}=4,13$ Дж, $W_{\text{pol}}=0,70$ Дж)

Задача 1.1.4. Уравнение колебаний точки имеет вид $x=A\cos\omega(t+\tau)$, где $\omega=\pi\ \text{с}^{-1}$, $\tau=0,2$ с. Определить период T и начальную фазу φ_0 колебаний. ($T=2$ с, $\varphi_0=\pi/5$)

Задача 1.1.5. Определить период T, частоту ν и начальную фазу φ_0 колебаний, заданных уравнением $x=A\sin\omega(t+\tau)$, где $\omega=2,5\pi\ \text{с}^{-1}$, $\tau=0,4$ с. ($T=0,8$ с, $\nu=1,25\ \text{с}^{-1}$, $\varphi_0=\pi$)

Задача 1.1.6. Точка совершает колебания по закону $x=A\cos(\omega t+\varphi_0)$, где A = 4 см. Определить начальную фазу φ_0, если: 1) $x(0)$ = 2 см и $\dot{x}(0)<0$; 2) $x(0)=-2\sqrt{2}$ см и $\dot{x}(0)<0$; 3)

$x(0)=2$ см и $\dot{x}(0)>0$; 4) $x(0)=-2\sqrt{3}$ см и $\dot{x}(0)>0$. Построить векторную диаграмму для момента $t=0$. (1) $\varphi=\pi/3$ рад; 2) $\varphi=3\pi/4$ рад; 3) $\varphi=5\pi/3$ рад; 4) $\varphi=7\pi/6$ рад)

Задача 1.1.7. Точка совершает колебания по закону $x=A\sin(\omega t+\varphi_0)$, где $A=4$ см. Определить φ_0, если: 1) $x(0)=2$ см и $\dot{x}(0)<0$; 2) $x(0)=2\sqrt{3}$ см $\dot{x}(0)>0$; 3) $x(0)=-2\sqrt{2}$ см и $\dot{x}(0)<0$; 4) $x(0)=-2\sqrt{3}$ см и $\dot{x}(0)>0$. Построить векторную диаграмму для момента $t=0$. (1) $\varphi=\pi/6$ рад; 2) $\varphi=\pi/3$ рад; 3) $\varphi=5\pi/4$ рад; 4) $\varphi=5\pi/3$ рад)

Задача 1.1.8. Точка совершает гармонические колебания с амплитудой A = 4 см и периодом T = 2 с. Написать уравнение этих колебаний, считая, что в момент $t=0$ смещения $x(0)=0$ и скорость $x(0)<0$. Определить фазу $\varphi=\omega t+\varphi_0$ для двух моментов времени: 1) когда смещение x = 2 см и $\dot{x}>0$; 2) когда скорость $\dot{x}=-6$ см/с и $x<0$. ($x=4\cos(\pi t+\pi/2)$; 1) $\varphi=5/3$ рад; 2) $\varphi=2{,}644$ рад)

Задача 1.1.9. Точка равномерно движется по окружности против часовой стрелки с периодом T = 6 с. Диаметр d окружности равен 20 см. Написать уравнение движения проекции точки на ось x, проходящую через центр окружности, если в момент времени, принятый за начальный, проекция на ось x равна нулю. Найти смещение x, скорость $\dot{x}$ и ускорение $\ddot{x}$ проекции точки в момент $t=1$с. ($x=-8{,}7$ см, $\dot{x}=-5{,}2$ см, $\ddot{x}=9{,}5$ см/с^2)

Задача 1.1.10. Определить максимальные значения скорости и ускорения точки, совершающей гармонические колебания с амплитудой A = 3 см и циклической частотой $\omega=10$ Гц. ($v_{max}=30$ см/с, $a_{max}=3$ м/с^2)

Задача 1.1.11. Точка совершает колебания по закону $A\cos\omega t$, где A = 5 см, $\omega=2$ Гц. Определить ускорение $|\ddot{x}|$ точки в момент времени, когда ее скорость $\dot{x}=8$ см/с. (12 см /с^2)

Задача 1.1.12. Точка совершает гармонические колебания. Наибольшее смещение точки равно 10 см, наибольшая скорость $v_{max} = 20$ см/с. Найти циклическую частоту ω колебаний и максимальное ускорение a_{max} точки. ($\omega = 2$ Гц, $a_{max} = 40$ см/с^2)

Задача 1.1.13. Максимальная скорость v_{max} точки, совершающей гармонические колебания, равна 10 см/с, максимальное ускорение $a_{max} = 100$ см/с^2. Найти циклическую частоту ω колебаний, их период T и амплитуду A. Написать уравнение колебаний, приняв начальную фазу равной нулю. ($\omega = 10$ Гц, $T = 0{,}63$ с, $A = 1$ см)

Задача 1.1.14. Точка совершает колебания по закону $x = A\sin\omega t$. В некоторый момент времени смещение x точки оказалось равным 5,0 см. Когда фаза колебаний $\varphi = \omega t$ увеличилась вдвое, смещение x стало равным 8,0 см. Найти амплитуду A колебаний. ($A = 8{,}3$ см)

Задача 1.1.15. Колебания точки происходят по закону $x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$. В некоторый момент времени смещение x точки равно 5 см, ее скорость $\dot{x} = 20$ см/с и ускорение $\ddot{x} = -80$ см/с. Найти амплитуду A, циклическую частоту ω, период T колебаний и фазу $\varphi = \omega t + \varphi_0$ в рассматриваемый момент времени. ($\omega = 4$ Гц, $A = 7{,}07$ см, $\varphi = 7\pi/4$)

Задача 1.1.16. Длина математического маятника равна 0,24 м. В момент времени $t = 0$ его запускают, отклонив на угол 14° от вертикали. Пренебрегая трением, вычислите угол отклонения маятника при: *а*) $t = 0{,}25$ с; *б*) $t = 1{,}60$ с; *в*) $t = 5{,}00$ с. (*а*) $\alpha = -0{,}37^\circ$; *б*) $\alpha = -9{,}76^\circ$; *в*) $\alpha = 12{,}0^\circ$)

Задача 1.1.17. Математический маятник качается с амплитудой $10{,}0^\circ$. Какую долю своего периода он находится между $+5{,}0^\circ$ и $-5{,}0^\circ$? Колебания предполагаются гармоническими. (1/3)

Задача 1.1.18. Математический маятник качается с амплитудой $10{,}0^\circ$. Найти симметричный относительно положения равновесия интервал отклонений $(-\alpha, \alpha)$, в котором маятник пребывает ровно половину времени. Колебания предполагаются гармоническими. $(\alpha = 7{,}1^\circ)$

Сложение колебаний

Задача 1.1.19. Два гармонических колебания, направленные по одной прямой и имеющие одинаковые амплитуды и периоды, складываются в одно колебание той же амплитуды. Найти разность фаз складываемых колебаний. ($\Delta\varphi = \rho \pm \pi/3$)

Задача 1.1.20. Определить амплитуду A и начальную фазу φ_0 результирующего колебания, возникающего при сложении двух колебаний одинаковых направления и периода: $x_1 = A_1 \sin \omega t$ и $x_2 = A_2 \sin \omega(t+\tau)$, где $A_1 = A_2 = 1$ см; $\omega = \pi$ с$^{-1}$; $\tau = 0{,}5$ с. Найти уравнение результирующего колебания. ($x = \sqrt{2}\cos(\pi t - \pi/4)$)

Задача 1.1.21.Точка участвует в двух одинаково направленных колебаниях: $x_1 = A_1 \sin \omega t$ и $x_2 = A_2 \cos \omega t$, где $A_1 = 1$ см; $A_2 = 2$ см; $\omega = 1$ Гц. Определить амплитуду A результирующего колебания, его частоту ν и начальную фазу φ_0. Найти уравнение этого движения. ($\nu = 0{,}16$ Гц; $x = \sqrt{5}\cos(t - 0{,}464)$)

Задача 1.1.22. Два одинаково направленных гармонических колебания одного периода с амплитудами $A_1 = 10$ см и $A_2 = 6$ см складываются в одно колебание с амплитудой $A_{\text{рез}} = 14$ см. Определить разность фаз складываемых колебаний равна $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$. ($\Delta\varphi = \pi/3$)

Задача 1.1.23. Складываются два гармонических колебания одного направления с одинаковыми периодами $T_1 = T_2 = 1{,}5$ с и амплитудами $A_1 = A_2 = 2$ см. Начальные фазы колебаний $\varphi_{0,1} = \pi/2$ и $\varphi_{0,2} = \pi/3$. Определить амплитуду A и начальную фазу φ_0 результирующего колебания. Найти его уравнение и построить с соблюдением масштаба векторную диаграмму амплитуд.
($x = 3{,}86\cos\pi(4t/3 + 0{,}417)$)

Задача 1.1.24. Складываются два взаимно перпендикулярных колебания, выражаемых уравнениями $x = A_1 \sin \omega t$ и $y = A_2 \cos \omega(t+\tau)$, где $A_1 = 2$ см, $A_2 = 1$ см; $\omega = \pi$ с$^{-1}$, $\tau = 0{,}5$ с. Найти уравнение траектории и построить ее, показав направление движения точки. ($y = -x/2$)

Задача 1.1.25. Точка совершает одновременно два гармонических колебания, происходящих по взаимно перпендикулярным направлениям и выражаемых уравнениями $x = A_1 \cos \omega t$ и $y = A_2 \cos \omega (t + \tau)$, где A_1 = 4 см, A_2 = 8 см, $\omega = \pi c^{-1}$, $\tau = 1$с. Найти уравнение траектории точки и построить график ее движения. ($y = -2x$)

Задача 1.1.26. Точка участвует одновременно в двух взаимно перпендикулярных колебаниях, выражаемых уравнениями $x = A_1 \cos \omega t$ и $y = A_2 \sin \omega t$, где $A_1 = 2$ см, и $A_2 = 1$ см. Найти уравнение траектории точки и построить ее, указав направление движения. (Эллипс $x^2 / 4 + y^2 = 1$, движение против часовой стрелки)

Задача 1.1.27. Точка одновременно совершает два гармонических колебания, происходящих по взаимно перпендикулярным направлениям и выражаемых уравнениями $x = A_1 \sin \omega t$ и $y = A_2 \cos \omega t$, где A_1 = 0,5 см и $A_2 = 2$ см. Найти уравнение траектории точки и построить ее, указав направление движения. (Эллипс $4x^2 + y^2 / 4 = 1$ движение по часовой стрелке)

Задача 1.1.28. Точка одновременно совершает два гармонических колебания, происходящих по взаимно перпендикулярным направлениям и выражаемых уравнениями: *а*) $x = A \sin \omega t$, $y = A \cos 2\omega t$; *б*) $x = A \cos \omega t$, $y = A \sin 2\omega t$; *в*) $x = A \cos \omega t$, $y = A \cos 2\omega t$; *г*) $x = A \cos 2\omega t$, $y = A_1 \cos \omega t$; *д*) $x = A_1 \sin 2\omega t$, $y = A \cos \omega t$. Найти уравнение траектории точки, построить ее с соблюдением масштаба и указать направление движения. Принять $A = 2$ см; $A_1 = 3$ см. (*а*) парабола $y = 2 - x^2$; *б*) $y^2 = x^2 \left(4 - x^2\right)$; *в*) $y = x^2 - 2$; *г*) парабола $x = 4y^2 / 9 - 2$; *д*) $x^2 = 9y^2 \left(1 - y^2 / 4\right)$)

1.2. Динамика гармонических колебаний

1.2.1. Основные понятия, законы и формулы

• Второй закон Ньютона для гармонических колебательных систем: $ma = -k$, где k – коэффициент квазиупругой силы.

• $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ – собственная круговая частота колебаний, определяемая параметрами колеблющейся системы: для материальной точки массой m, колеблющейся под действием квазиупругой силы, характеризующейся коэффициентом k; $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ для математического маятника, имеющего длину l $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}} = \sqrt{\frac{mgl}{J}}$ для физического маятника, где J – момент инерции колеблющегося тела относительно оси колебаний, l – расстояние центра масс маятника от оси колебаний, $L = \frac{J}{ml}$ – приведенная длина физического маятника; $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{J}}$ для крутильных колебаний тела, подвешенного на упругой нити, где J – момент инерции тела относительно оси, совпадающей с упругой нитью, а жесткость нити k равна отношению упругого момента, возникающего при закручивании нити, к углу, на который нить закручивается;

• Круговая частота колебаний: $\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$, где ν и T – частота и период колебаний соответственно. Используя приведенные выше выражения для собственных круговых частот колебаний различных систем, можно найти соответствующие периоды колебаний.

• Полная энергия материальной точки, совершающей гармонические колебания: $W = kA^2/2 = m\omega^2 kA^2/2$.

1.2.2. Методические рекомендации по решению задач

Пример 1.2.1. *На двух пружинах подвешены грузы массой m_1 и m_2, причем $m_1 > m_2$. При подвешивании грузов к разным свободным пружинам последние получили одинаковые удлинения l. У какого груза больше период колебаний, и какой из грузов при одинаковых амплитудах обладает большей энергией? Массой пружин можно пренебречь.*

Решение. Период гармонических колебаний, происходящих под действием квазиупругой силы $F_{\text{упр}} = -kx$, определяется соотношением $T = \dfrac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$, где k – коэффициент упругости, который определяется силой, вызывающей удлинение пружины на единичную длину. В данном случае удлинение происходит под действием силы тяжести грузов и, следовательно, $k_1 = \dfrac{m_1 g}{l}$ и $k_2 = \dfrac{m_2 g}{l}$. Подставляя k_1 и k_2 в выражение для периода, видим, что массы сокращаются и в обоих случаях периоды одинаковы: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$. Энергию колебаний груза с номером $i\left(i = 1, 2\right)$. можно записать в виде $W_i = A^2 \dfrac{m_i \omega_0^2}{2} = A^2 \dfrac{m_i g}{2l}$. Так как периоды, а следовательно, и частоты равны, и равны по условию задачи амплитуды, то большей энергией обладает груз с большей массой m_1.

Этот же результат (с точностью до постоянного коэффициента) можно получить, воспользовавшись методом анализа размерностей. В условии задачи фигурируют три величины: масса m, удлинение l и время (искомый период T). Кроме того, поскольку к пружинам приложены силы, равные весу грузов, следует ожидать, что в решение должно войти ускорение свободного падения g. Стало быть, можно написать: $T \sim m^a l^b g^c$, где a, b, c – степени, в которые следует возвести соответствующие величины. Учитывая, что размерности правой и левой частей должны быть одинаковы $\left(T = M^a L^b \left(LT^{-2}\right)^c\right)$, получаем для этих степеней систему уравнений: $a = 0$, $b + c = 0$, $1 = -2c$.

Следовательно, $a = 0$, $b = 1/2$, $c = -1/2$, т.е. $T = C\sqrt{l/g}$, где C – не определенный из теории размерностей безразмерный коэффициент, равный, как было получено выше, 2π. В проведенном анализе размерностей мы учли известный факт, что частота (период) гармонических колебаний не зависит от амплитуды.

Если же мы захотим тем же способом решить задачу для энергии, то должны принять во внимание, что последняя зависит от квадрата амплитуды колебаний: $W \sim A^2 m^a l^b g^c$. Амплитуда имеет размерность длины, так что получаем $ML^2T^{-2} = L^2 M^a L^b \left(LT^{-2}\right)^c$. В результате приходим к системе уравнений: $1=a$, $2=2+b+c$, $-2=-2c$, решение которой имеет вид $a=1$, $b=-1$, $c=1$, т.е. $W = CA^2 mg / l$. Сравнение с точным решением дает в этом случае $C=1/2$.

Пример 1.2.2. *Вывести уравнение колебательного движения поршня в сосуде с идеальным газом.*

Решение. Рассмотрим поршень массой *m* и площадью равновесия давление в сосуде равно p_0 (рис. 1.2.1). Это давление складывается из атмосферного давления и давления mg / S, оказываемого поршнем: $p_0 = p_a + \dfrac{mg}{S}$

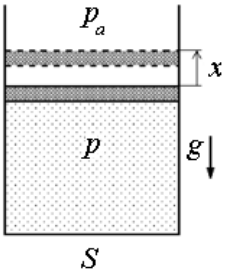

Рис. 1.2.1

Переместим поршень на расстояние *x*. Объем сосуда увеличится и станет равным: $V = V_0 + S_x$. Соответственно уменьшится давление. Новое давление можно найти из уравнения адиабаты:

$$pV^\gamma = p_0 V_0^\gamma, \text{ откуда } p = \frac{p_0}{\left(1 + Sx / V_0\right)^\gamma}.$$

Здесь γ – показатель адиабаты, зависящий от числа степеней свободы молекул газа. При малых колебаниях, когда смещения

поршня много меньше высоты сосуда $\left(x \ll V_0 / S\right)$, можно разложить p в ряд Тейлора: $p \approx p_0\left(1 - x\frac{\gamma S}{V_0}\right)$.

На поршень действуют три силы: сила атмосферного давления $p_a S$, сила давления газа в сосуде pS и сила тяжести $m\,g$. Знаки сил соответствуют выбору положительного направления оси x вверх. Для равнодействующей F этих сил находим

$$F = -p_a S + pS - mg = -S\left(p_0 - \frac{mg}{S}\right) + Sp_0\left(1 - x\frac{\gamma S}{V_0}\right) - mg = -x\frac{\gamma p_0 S^2}{V_0}.$$

Записываем теперь уравнение движения поршня $m\ddot{x} = F$ в виде

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0\ ,\ \omega_0 = \sqrt{\frac{\gamma p_0 S^2}{m V_0}}\ .$$

Пример 1.2.3. *Физический маятник представляет собой стержень длиной* l = 50 см *и массой* m = 270 г *с прикрепленным к одному из его концов диском радиусом* R = 10 см *и массой* M = 500 г (*рис.* 1.2.2). *Определить* 1) *момент инерции маятника,* 2) *расстояние от центра масс до точки подвеса и* 3) *период малых колебаний маятника.*

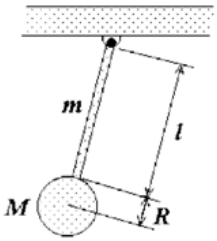

Рис. 1.2.2

Решение. Период колебаний физического маятника определяется по формуле $T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{m_{\text{tot}} g L}}$, где J – момент инерции маятника относительно оси колебаний; m_{tot} – его масса (в нашем случае

$m_{\text{tot}} = M + m = 0,77$ кг); L – расстояние от центра масс до оси колебаний. 1) Момент инерции маятника равен сумме моментов инерции стержня J_1 и обруча J_2. Момент инерции стержня относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его конец, определяется по формуле $J_1 = ml^2 / 3$. Момент инерции диска относительно оси, проходящей через его центр, равен, $J_0 = MR^2 / 2$, по теореме Штейнера момент инерции диска относительно точки подвеса маятника равен $J_2 = J_0 + M\left(l + R\right)^2 = M\left(l^2 + 2lR + 3R^2 / 2\right)$. Полный момент инерции маятника равен тогда: $J = J_1 + J_2 = \dfrac{ml^2}{3} + M\left(l^2 + 2lR + \dfrac{3}{2}R^2\right)$. Подставляя численные значения, находим J = 0,205 кг · м^2. 2) Центр масс маятника находится между центрами масс диска и стержня на расстоянии x от последнего. Расстояние x находится из уравнения $xm = \left(l/2 + R - x\right)M$. Отсюда следует, что $x = \dfrac{M}{m+M}\left(\dfrac{l}{2} + R\right) = 0,227$ м. Расстояние от точки подвеса маятника до его центра масс равно $L = l/2 + x = 0,477$ м. 3) Подставив в формулу значения m_{tot}, J, L, g, найдем период колебаний маятника:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{0,205}{0,77 \times 9,8 \times 0,477}} = 1,50 \text{ с.}$$

Пример 1.2.4. *На космическом корабле в условиях невесомости для измерения массы тела может быть использовано устройство, принцип которого заключается в следующем. Сначала измеряют частоту колебаний упругой системы с известной* (*калибровочной*) *массой, а затем к этой массе добавляют измеряемую и снова определяют частоту колебаний. Как, зная эти частоты, определить неизвестную массу*?

Решение. Если m_0 – известная, а m – измеряемая масса, и ω_0, ω – круговые частоты колебаний систем с известной массой m_0 и суммарной массой $m_0 + m$ соответственно, то $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m_0}}$,

$\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m_0 + m}}$, где k – коэффициент жесткости пружины. Сравнивая выражения для частот, получаем для измеряемой массы: $m = m_0\left(\dfrac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1\right)$.

Пример 1.2.5. *Груз на дне цилиндрической пробирки с площадью поперечного сечения S при погружении пробирки в жидкость удерживает ее в вертикальном положении. После погружения пробирки на некоторую глубину она начинает колебаться относительно положения равновесия. Масса пробирки с грузом равна m, плотность жидкости –* ρ. *Пренебрегая вязкостью жидкости, определить период T колебаний пробирки и расстояние l дна пробирки от поверхности жидкости.*

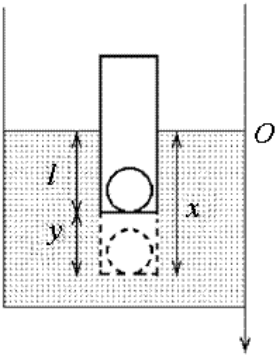

Рис. 1.2.3

Решение. В данном случае роль квазиупругой силы играет сила Архимеда. Направим ось *Ox* вертикально вниз, выбрав за начало отсчета ее пересечение с поверхностью жидкости. Пусть x – координата дна пробирки (рис. 1.2.3). Сила Архимеда равна $F_A = -Sx\rho g$ (знак выбран так, что когда дно пробирки находится ниже уровня жидкости $(x > 0)$, сила Архимеда отрицательна, т.е. направлена вверх). Кроме того, на пробирку действует сила тяжести $P = mg$.

Поэтому уравнение движения записывается в виде: $m\ddot{x} = mg - Sx\rho g$. Таким образом, «коэффициент жесткости» системы равен $k = S\rho g$. В положении равновесия $(x = l)$ обе силы уравновешивают друг друга: $mg = Sl\rho g$, откуда $l = m / S\rho$. Обозначим через y отклонение дна пробирки от равновесного положения: $x = l + y$. Подставляя это представление в уравнение колебаний, получаем $m\ddot{y} + Sy\rho g$ или $\ddot{y} + \omega_0^2 y$, где $\omega_0 = \sqrt{\frac{S\rho g}{m}}$. Частоту колебаний можно также выразить через глубину погружения в состоянии равновесия: $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$, что формально совпадает с частотой колебаний математического маятника длиной *l*. Теперь легко находится и период колебаний:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{S\rho g}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Пример 1.2.6. *Однажды барон Мюнхаузен, путешествуя вблизи Северного полюса, очутился один на отколовшейся плоской льдине площадью S* = 5 м^2. *От огорчения он подпрыгнул. И льдина вместе с ним начала колебаться, совершая одно колебание в секунду. Это его сразу успокоило: зная собственный вес* (*m* = 80 кг), *он тут же определил, что льдина достаточно толстая. Какова толщина льдины? Сопротивлением воды при колебаниях пренебречь.*

Решение. Чтобы определить толщину *d* отколовшейся льдины, достаточно узнать ее массу *M*, поскольку $M = \rho_л Sd$. Эту массу можно, в свою очередь, найти, зная период колебаний льдины, на которой находился барон Мюнхаузен: при изменении осадки на величину Δx возникает возвращающая сила, обусловленная изменением силы Архимеда $\Delta F_A = \rho_л g \Delta V = \rho_л g S \Delta x$. Как видно, возвращающая сила пропорциональна величине отклонения льдины от положения равновесия, поэтому колебания будут гармоническими. Циклическая частота определяется соотношением

$$\omega^2 = \frac{\frac{\Delta F_A}{\Delta x}}{M+m} = \frac{\rho_л g S}{M+m}.$$

Таким образом,

$$M = \frac{\rho_л g S}{\omega^2} - m,$$

а толщина льдины: $d = \frac{M}{\rho_л S} = \frac{\rho_л g S - m\,4\pi^2\,T^{-2}}{4\pi^2 T^{-2}\rho_л S} = 0{,}26$ м.

Пример 1.2.7. *Небольшой металлический шарик массой m, подвешенный на нити длиной l, колеблется над бесконечной равномерно заряженной горизонтальной плоскостью с плотностью положительного заряда и. Определить период колебаний маятника при условии, что на шарике находится заряд Q.*

Решение. Гармонические колебания шарика происходят в однородном электрическом поле, создаваемом равномерно заряженной плоскостью. На отрицательно заряженный шарик это поле действует силой *F*, направленной вертикально вниз и сообщает ему постоянное ускорение *a*. Под действием электрического поля сила натяжения нити возрастает на величину *F*, и модуль создаваемого ею ускорения увеличится от *g* до $g+a$. Период колебания заряженного математического маятника равен $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g+a}}$. Сила, действующая на шарик с зарядом *Q* в электрическом поле с напряженностью *E*, равна *F* = *QE*. Поскольку нам задана поверхностная плотность зарядов *и* на равномерно заряженной бесконечной плоскости и колебания происходят в вакууме $(\varepsilon = 1)$, то $E = \sigma / 2\varepsilon_0$, и, следовательно, $F = \sigma Q / 2\varepsilon_0$. Из основного уравнения динамики имеем для ускорения $a = \frac{\sigma Q}{2\varepsilon_0 m}$, а период гармонических колебаний заряженного шарика имеет вид

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2\varepsilon_0 m l}{2\varepsilon_0 m g + \sigma Q}}.$$

Пример 1.2.8. *Часы с маятником длиной l* = 1 м *за сутки отстают на* Δt = 1 ч. *Что следует сделать с маятником, чтобы часы не отставали*?

Решение. Проследим за движением минутной стрелки, связанной с маятником. За одни сутки минутная стрелка должна совершить N_0 = 24 оборота или определенное число колебаний маятника *N*, причем $N = \frac{t}{T_2}$, где T_2 – период колебаний откорректированных

часов. Отстающие часы совершат то же количество колебаний за время ($t + \Delta t$): $N=\frac{t+\Delta t}{T_1}$, где $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l_1}{g}}$ и $T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{l_2}{g}}$. Чтобы часы не отставали $T_2 < T_1$, необходимо уменьшить длину маятника, т. е. $l_2 < l_1$. Разделив первое соотношение на второе и возведя в квадрат, получаем

$$\Delta l = l_1 - l_2 = l_1 - l_1\frac{t^2}{(t+\Delta t)^2} = l_1\left(1-\frac{t^2}{(t+\Delta t)^2}\right) = 8\ 10^{-2}\ \text{м}.$$

Пример 1.2.9. *В* 1906 г. *Джозеф Томсон предложил модель, согласно которой атом содержит число электронов, равное атомному номеру элемента; весь заряд этих электронов нейтрализуется положительно заряженной средой, масса которой составляет большую часть массы атома. Данная модель получила название «пудинга», так как по представлениям этой модели электроны были вкраплены в положительно заряженную среду, подобно изюму в пудинге. Модель атома водорода представляется тогда в виде равномерно заряженного шара радиусом* $R = 10^{-10}$ м *с полным зарядом* $Q = +e = 1,6\cdot10^{-19}$ Кл. *В нормальном состоянии электрон с зарядом e и массой* $m_в = 9,1\cdot10^{-31}$ кг *находится в центре положительно заряженного шара. Предположим, что электрон смещен относительно центра положительного заряда на небольшое расстояние* r_0. *Если теперь электрон предоставить самому себе, то он начнет колебаться около положения равновесия с амплитудой* r_0. *Какова при этом частота колебаний*?

Решение. Используя выражение для напряженности электрического поля внутри заряженного шара (см., например, [1]) $E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}r$, найдем действующую на электрон возвращающую силу $F = -eE = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R^3}r$. Записываем уравнение движения электрона: $m_e\ddot{r} = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R^3}r$. Отсюда следует стандартное уравнение гармонических колебаний $\ddot{r} + \omega_0^2 r = 0$ с собственной частотой

$\omega_0 = \sqrt{\dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e R^3}}$. Подставляя сюда численные значения, находим $\omega_0 = 1,6 \cdot 10^{16}$ Гц, чему соответствует длина волны $\lambda = 2\pi c / \omega_0 = 120$ нм. Это значение почти совпадает с длиной волны электромагнитного излучения, испускаемого атомом водорода в первом возбужденном состоянии (первая линия серии Лаймана), что подтверждает разумность модели Томсона, которая ухватывает важные черты поведения электрона в атоме.

Пример 1.2.10. *Предположим, что по оси вращения Земли образовано сквозное отверстие с гладкими стенками. У поверхности Земли в образовавшийся туннель опустили без начальной скорости небольшое тело массой m. Определить скорость тела в центре Земли и время, необходимое для того, чтобы тело достигло противоположной точки Земли. Радиус Земли* $R_З$ = 6400 км, *ускорение свободного падения у поверхности Земли* g = 9,8 м/с^2.

Решение. Будем предполагать, что плотность Земли – постоянная величина, и сопротивлением воздуха можно пренебречь. Инерциальную систему отсчёта свяжем с Землёй, начало отсчёта поместим в центр Земли O, а ось x направим вдоль оси вращения Земли: $x(0) = R$; $v(0) = 0$. Рассмотрим произвольное положение материальной точки m, находящейся на расстоянии x от центра Земли в момент времени t. Мысленно разобьём Землю на две области: *а*) шар радиуса x и *б*) шаровой слой толщины $R_З - x$. Со стороны шара на тело действует сила тяготения $F_x = G\dfrac{mM_x}{x^2}$, где M_x – масса этого шара. Используя выражение для средней плотности Земли $\rho = \dfrac{M_З}{\frac{4\pi}{3}R_З^3}$, то есть $M_x = \dfrac{4\pi}{3}\rho x^3$, для силы F_x можно записать $F_x = \dfrac{4\pi}{3}G\rho m x$. Шаровой слой, внешний по отношению к точке m, не оказывает на неё никакого воздействия. Чтобы пояснить это, можно воспользоваться аналогией между гравитационной $\left(F = G\dfrac{m_1 m_2}{r^2}\right)$ и кулоновской

$\left(F = k\frac{q_1 q_2}{r^2} \right)$ силами. С точностью до обозначений они совпадают. Поэтому многое, что нам известно из курса электричества, можно использовать для решения нашего примера. Например: *внешние заряды не создают в полости внутри проводника электрического поля*, то есть на заряды внутри полости не действуют электрические силы. Следовательно, и в нашем случае можно считать равной нулю силу, действующую на материальную точку m со стороны внешнего шарового слоя. (Рекомендуем самостоятельно показать, что сила тяготения, действующая со стороны внешнего шарового слоя толщиной $(R - x)$, равна нулю.) По второму закону Ньютона получаем дифференциальное уравнение колебаний материальной точки: $m\ddot{x} = -F_x$ или $\ddot{x} + \frac{4\pi}{3} G\rho x = 0$, где $\frac{4\pi}{3} G\rho = \omega_0^2$ или $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{R_3}}$. Таким образом, тело брошенное в туннель, совершает гармонические колебания по закону $x = x_0 \cos(\omega_0 t + \alpha_0)$. Амплитуда x_0 и начальная фаза α_0 определяются из начальных условий ($x(0) = R_3$, $v_0 = \dot{x}(0) = 0$ при $t = 0$), то есть $x_0 = R_3$, $\alpha_0 = 0$. Следовательно, закон движения материальной точки m приобретает вид $x = R_3 \cos\omega_0 t$, $v_x = \dot{x} = -R_3\omega_0 \sin\omega_0 t = -\sqrt{gR_3}\sin\omega_0 t$. Так как в центре Земли (начало координат) $x = 0$ и $\cos\omega_0 t = 0$, то $\sin\omega_0 t = 1$ и величина искомой скорости равна $v = \sqrt{gR_3} = 7{,}9 \cdot 10^3$ м/с. Эта скорость равна первой космической скорости для Земли. Период колебаний $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{R_3}{g}} = 5{,}06 \cdot 10^3$ с = 84 мин. Такое время необходимо телу для того, чтобы, попав в туннель с одной стороны Земли, оно достигло другой стороны и вернулось в начальное положение, то есть совершило полное колебание. Следовательно, время для достижения противоположного конца туннеля вдвое меньше и составляет 42 мин.

1.2.3. Задачи для самостоятельной работы

Задача 1.2.1. Материальная точка массой m = 50 г совершает колебания, уравнение которых имеет вид $x = A\cos\omega t$, где $A = 10$ см, $\omega = 5$ Гц. Найти силу F, действующую на точку, в двух случаях: 1) в момент, когда фаза $\omega t = \pi/3$; 2) в положении наибольшего смещения $(x = A)$ точки. (1) – 62,5 мН; 2) – 125 мН)

Задача 1.2.2. Колебания материальной точки массой $m = 0{,}1$ г происходят согласно уравнению $x = A\cos\omega t$, где $A = 5$ см, $\omega = 20$ Гц. Определить максимальные значения возвращающей силы F_{max} и кинетической энергии T_{max}. (2 мН; 50 мкДж)

Задача 1.2.3. Найти возвращающую силу F в момент времени $t = 1$ с и полную энергию E материальной точки, совершающей колебания по закону $x = \cos\omega t$, где масса точки m = 10 г. (4,39 мН; 877 мкДж)

Задача 1.2.4. Максимальное отклонение мембраны громкоговорителя не может превышать $A_{max} = 1$ мкм. При каких частотах ν ускорение мембраны превысит ускорение свободного падения? ($\nu \geq 498$ Гц)

Задача 1.2.5. Колебания материальной точки происходят согласно уравнению $x = A\cos\omega t$, где A = 8 см, $\omega = \pi/6$ с$^{-1}$. В момент, когда возвращающая сила F в первый раз достигла значения -5 мН, потенциальная энергия U точки стала равной 100 мкДж. Найти этот момент времени t и массу точки. ($t_1 = 2$ с, $m = 0{,}456$ г)

Задача 1.2.6. Атомы в кристаллах колеблются с частотой $\nu \sim 10^{13}$ Гц. Представим себе модель атома, в которой они связаны друг с другом «пружинками». Найти коэффициент жесткости такой «пружинки» для кристалла серебра (атомная масса 108 г/моль). (708 Н/м)

Задача 1.2.7. Таракан массой 0,30 г попался в сеть к пауку. Паутина колеблется с частотой $\nu_1 = 15$ Гц. *а*) Определите коэффициент жесткости k паутины. *б*) С какой частотой ν_2 будет колебаться паутина, если в нее попадет насекомое массой 0,10 г? (*а*) $k = 2{,}7$ Н/м; *б*) $\nu_2 = 26$ Гц)

Задача 1.2.8. Гиря, подвешенная к пружине, колеблется по вер-

тикали с амплитудой A = 4 см. Определить полную энергию E колебаний гири, если жесткость пружины k = 1 кН/м. (0,8 Дж)

Задача 1.2.9. Человек массой 75 кг прыгает из окна на сетку, используемую пожарными для спасения людей, с высоты 15 м. При этом сетка провисает на 1,2 м. Считая сетку простой пружиной, вычислите, насколько она провиснет, если этот же человек просто ляжет на нее. Насколько бы сетка провисла, если бы на нее спрыгнули с высоты 30 м? (4,8 см; 1,7 м)

Задача 1.2.10. Пуля массой m = 12,0 г падает в брусок массой M = 300 г, прикрепленный к горизонтальной пружине с коэффициентом жесткости k = 5,20 кН/м, другой конец которой закреплен неподвижно. Амплитуда колебаний бруска после попадания в него пули составляет A = 12,4 см. Какой была скорость пули, если учесть, что после попадания пуля и брусок движутся вместе? (416 м/с)

Задача 1.2.11. Брусок массой M = 4,0 кг прикреплен к горизонтальной пружине с коэффициентом жесткости k = 500 Н/м, другой конец которой закреплен неподвижно. В брусок попадает пуля массой m = 50 г, летящая со скоростью v = 150 м/с, и застревает в нем. 1) Какова амплитуда колебаний бруска? 2) Какая доля кинетической энергии пули перешла в энергию гармонических колебаний бруска? (1) 16,7 см; 2) 12, 3 %)

Задача 1.2.12. Покажите, что средние за период значения потенциальной и кинетической энергий пружинного маятника равны половине их максимальных значений.

Задача 1.2.13. Груз массой m прикреплен к двум пружинам с

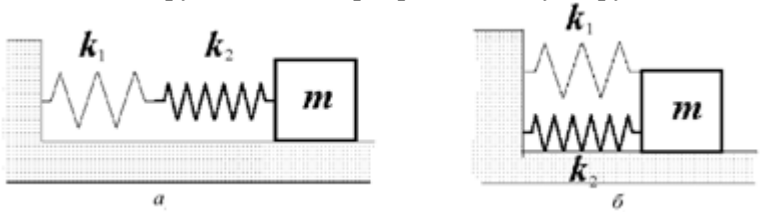

Рис. 1.2.4

коэффициентами жесткости k_1 и k_2, соединенным последовательно рис. 1.2.4, *а*. Доказать, что частота гармонических колебаний в такой системе равна $\nu_{пос} = \dfrac{\nu_1 \nu_2}{\sqrt{\nu_1^2 + \nu_2^2}}$, где ν_1, ν_2 – частоты

колебаний того же груза на каждой из пружин по отдельности.

Задача 1.2.14. Груз массой m прикреплен к двум пружинам с коэффициентами жесткости k_1 и k_2, соединенным параллельно рис. 1.2.4, *б*. Доказать, что частота гармонических колебаний в системе равна $\nu_{\text{пар}} = \sqrt{\nu_1^2 + \nu_2^2}$, где ν_1, ν_2 – частоты колебаний того же груза на каждой из пружин по отдельности.

Задача 1.2.15. Амортизаторы автомобиля представляют собой четыре одинаковые пружины. Собственная частота вертикальных колебаний автомобиля массой M = 1500 кг составляет $\nu_0 = 3$ Гц. Найти коэффициент жесткости k пружин и частоту колебаний ν, если в автомобиле сидят четыре человека со средней массой $m = 75$ кг каждый. (k = 133 кН/м; ν = 2,74 Гц)

Задача 1.2.16. Однородный диск радиусом R = 0,5 м подвешен за край. Чему равны частота ν его малых колебаний относительно точки подвеса и приведенная длина L маятника? ($\nu = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{2g}{3R}} = 0,6$ Гц; $L = 3R/2 = 75$ см)

Задача 1.2.17. Диск радиусом R = 24 см колеблется около горизонтальной оси, проходящей через середину одного из радиусов перпендикулярно плоскости диска. Определить приведенную длину L и период T колебаний такого маятника. (L = 3R / 2 = 36 см; $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{3R}{2g}} = 1,2$ с)

Задача 1.2.18. Однородный диск радиусом R = 0,30 см колеблется около горизонтальной оси, проходящей перпендику-лярно плоскости диска на расстоянии $a = xR$ $(0 \le x \le 1)$ от его центра. Определить значение $\nu_{\max}$, при котором частота колебаний маятника будет наибольшей, и найти эту максимальную частоту $\nu_{\max}$. Построить график зависимости приведенной длины L от x. ($L = R\left(x + \dfrac{1}{2x}\right)$; $x_{\max} = 0,71$; $\nu_{\max} = 0,76$ Гц)

Задача 1.2.19. Тонкий однородный диск радиусом R, подвешенный за край в точке O, колеблется с частотой ν_0. Если вырезать из него часть в виде двух дисков радиусом r = R/2, как показано на

рис. 1.2.5, частота колебаний становится равной ν. Определить отношение ν/ ν_0. (0,96)

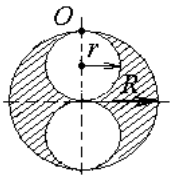

Рис. 1.2.5

Задача 1.2.20. Тело массой m = 4 кг, закрепленное на горизонтальной оси, совершало колебания с периодом $T_1 = 0{,}8$ с. Когда на эту ось был насажен диск так, что его ось совпала с осью колебаний тела, период колебаний стал равен $T_2 = 1{,}2$ с. Радиус диска R = 20 см, масса его равна массе тела. Найти момент инерции J тела относительно оси колебаний. (0,32 кг·м^2)

Задача 1.2.21. Математический маятник длиной $l_1 = 40$ см и физический маятник в виде тонкого прямого стержня длиной l_2, подвешенного за край, колеблются синхронно. Определить длину стержня l_2. (60 см)

Задача 1.2.22. Математический маятник длиной $l_1 = 40$ см и физический маятник в виде тонкого прямого стержня длиной $l_2 = 30$ см колеблются синхронно. Определить расстояние a центра масс стержня от точки подвеса. (2,0 см)

Задача 1.2.23. Физический маятник в виде тонкого прямого стержня длиной l = 120 см колеблется около горизонтальной оси, проходящей перпендикулярно стержню через точку, удаленную на некоторое расстояние a от центра масс стержня. При каком значении a период T колебаний имеет наименьшее значение? (34,6 см)

Задача 1.2.24. Ареометр массой m = 50 г, имеющей трубку диаметром d = 1 см, плавает в воде. Ареометр немного погрузили в воду и затем предоставили самому себе, в результате чего он стал совершать гармонические колебания. Найти период этих колебаний. (1,6 с)

Задача 1.2.25. В открытую с обоих концов U-образную трубку с площадью поперечного сечения S = 0,4 см^2 быстро вливают ртуть массой m = 200 г. Определить период T колебаний ртути в трубке.

Плотность ртути $\rho = 13,6$ г/см^3. (0,86 с)

Задача 1.2.26. Набухшее бревно, сечение которого постоянно по всей длине, погрузилось вертикально в воду так, что над водой находится лишь малая (по сравнению с длиной) его часть. Период колебаний бревна равен 5 с. Определить длину бревна. (6,21 м)

Задача 1.2.27. Частица движется в потенциальном поле $U(x) = k|x|$. Масса и энергия частицы равны, соответственно, m и E. *а*) Чему равен период T колебаний частицы в этом поле? *б*) Являются ли эти колебания гармоническими? (*а*) $T = \dfrac{\sqrt{2mE}}{k}$; *б*) нет, не являются)

Задача 1.2.28. Найдите частоту гармонических колебаний однородного тонкого стержня длины l. Точка подвеса совпадает с одним из концов стержня. ($\omega_0 = \sqrt{\dfrac{3g}{2l}}$)

Задача 1.2.29. Найдите период колебаний маятника настенных часов рис. 1.2.2. Отношение масс стержня и чечевицы равно $\frac{m}{M} = 1/2$. Длина стержня l = 20 см, радиус чечевицы R = 5,0 см. ($T_0 = 1,1$ с)

Задача 1.2.30. По какой траектории движется грузик, совершающий колебания одновременно в двух взаимно перпендикулярных направлениях по законам:

$$x(t) = A\cos\omega_0 t,\ y(t) = A\cos(\omega_0 t + \frac{\pi}{4}).$$

Указание: поверните оси координат на угол 45°. (По эллипсу с полуосями: $A_1 = \dfrac{A}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}$ и $A_2 = \dfrac{A}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}$)

1.3. Затухающие и вынужденные колебания. Резонанс

1.3.1. Основные понятия, законы и формулы

• Дифференциальное уравнение затухающих колебаний: $\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$, где β – коэффициент затухания, ω_0 – собственная круговая частота колебаний.

• Для пружинного маятника, помещенного в вязкую среду, где сила сопротивления пропорциональна скорости $\left(F_{\text{сопр}} = -r\dot{x}\right)$, коэффициент затухания $\beta = \dfrac{r}{2m}$.

• Общее решение дифференциального уравнения затухающих колебаний: $x = A_0 e^{-\beta t}\cos\left(\omega t + \varphi_0\right)$, $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$. При $\beta \ll \omega_0$ движение системы можно считать почти гармоническим колебанием с круговой частотой ω и амплитудой $A(t)$, убывающей со временем по закону $A(t) = A_0 e^{-\beta t}$ (A_0 – амплитуда колебаний в момент $t = 0$).

• Период затухающих колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}.$$

• Логарифмический декремент затухания

$$\lambda = \ln\frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T,$$

где $A(t)$ и $A(t+T)$ – амплитуды двух последовательных колебаний, отстоящих по времени друг от друга на период T. Обратная величина $N_e = \dfrac{1}{\lambda}$ есть число колебаний, совершаемых в течение времени, за которое амплитуда колебаний уменьшается в e раз. Величина $N_2 = \ln(2)/\lambda$ – это число колебаний, совершаемых в течение времени, за которое амплитуда колебаний уменьшается в 2 раза.

• Добротность $Q = \dfrac{\pi}{\lambda} = \dfrac{\pi}{\beta T} = \pi N_e$, где $\lambda = \beta T$ – логарифмический декремент затухания. При слабом ($\beta << \omega_0$) затухании добротность $Q \approx \dfrac{\omega_0}{2\beta}$ пропорциональна числу колебаний , совершаемых системой за время релаксации $\tau = 1/\beta$.

• Убыль энергии колеблющейся системы за один период состав-

ляет $\Delta E = -(2\beta T)E$. При слабом затухании добротность пропорциональна отношению полной энергии, запасенной в колебательной системе в данный момент время, к убыли энергии за один период колебаний $Q = 2\pi \dfrac{E}{|\Delta E|}$.

• Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний: $\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = a_0 \cos\omega t$, где a_0, ω – амплитудное значение и круговая частота внешнего периодического воздействия («силы»).

• Частное решение дифференциального уравнения вынужденных колебаний представляет собой гармоническое колебание с частотой вынуждающей силы: $x(t) - A\cos(\omega t - \varphi)$.

• Амплитуда вынужденных колебаний:

$$A = \frac{a_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2}}.$$

• Фаза вынужденных колебаний: $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{2\beta\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}$.

• Резонансная частота и резонансная амплитуда:

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}\ ,\ A_{\text{рез}} = \frac{a_0}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}.$$

• Отношение резонансной амплитуды к статической амплитуде $(\omega > 0)$ при слабом затухании равно добротности колебательной системы $\dfrac{A_{\text{рез}}}{A(0)} = \dfrac{\pi}{\beta T} = Q$, т.е. добротность Q характеризует резонансные свойства системы.

1.3.2. Методические рекомендации по решению задач

Пример 1.3.1. *Брусок массой* 750 г *колеблется на конце пружины с коэффициентом жесткости* k = 56,0 Н/м. *Брусок движется в жидкости, где на него действует сила сопротивления* $F = -rv$, $r = 0{,}162$ Н · с/м. *а*) *Чему равен период колебаний*? *б*) *На какую*

долю уменьшается амплитуда после каждого колебания? *в*) *Какова начальная амплитуда* A_0, *если при* $t = 0$ *смещение* $x_0 = 0$, *а при* $t = 1{,}00$ с *смещение* $x_1 = 12$ см.

Решение. Действуем по стандартным формулам. Круговая частота колебаний равна $\omega_0 = (k/m)^{1/2} = 8{,}8$ с$^{-1}$. Коэффициент затухания $\beta = r/2m = 0{,}108$ с$^{-1}$. *а*) Период затухающих колебаний . $T = 2\pi\left(k/m - r^2/4m^2\right)^{1/2} = 0{,}727$ с . *б*) За одно колебание амплитуда уменьшается в $\exp(-\beta T)$ раз. Процент уменьшения составляет 100 % $(1-\exp(-\beta T)) = 7{,}6$ %. *в*) Уравнение движения (учитывая, что вначале брусок находится в положении равновесия): $x(t) = A_0\exp(-\beta t)\sin(\omega_0 t)$. При $t = 1$ с смещение равно 12 см. Используем это знание: $x(t) = A_0\exp(-\beta t)\sin(\omega_0 t) = 12$ см. Откуда $A_0 = 12$ см $\cdot \exp(\beta t)\sin^{-1}(\omega_0 t) = 18{,}9$ см.

Пример 1.3.2. *Амплитуда затухающих колебаний маятника длиной* $l = 1$ м *за* $t = 10$ мин *уменьшилась в два раза. Определить логарифмический декремент затухания* λ.

Решение. Период колебаний математического маятника равен $T = 2\pi(l/g)^{1/2}$. Если амплитуда колебаний маятника за $t = 10$ мин уменьшилась в два раза, то за это время маятник совершает $N_2 = \ln(2)/\lambda$ колебаний. С другой стороны: $t = TN_2 = 2\pi(l/g)^{1/2}\ln(2)/\lambda = 600$ с. Отсюда $\lambda = 2\pi(l/g)^{1/2}\ln(2)/t = 2{,}32 \cdot 10^{-3}$

Пример 1.3.3. *Тело массой* $m = 1$ кг *находится в вязкой среде с коэффициентом сопротивления* $r = 0{,}05$ кг/с. *С помощью двух одинаковых пружин жесткостью* $k = 50$ Н/м *каждая тело удерживается в положении равновесия, пружины при этом не деформированы. Тело сместили от положения равновесия и отпустили. Определить:* 1) *коэффициент затухания* β ; 2) *частоту* ν *колебаний*; 3) *логарифмический декремент затухания* λ; 4) *число* N_e *колебаний, по прошествии которых амплитуда уменьшилась в e раз.*

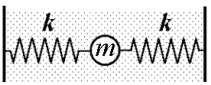

Рис. 1.2.7

Решение. Все по стандартным формулам: $\beta = r/2m = 0{,}025$ с$^{-1}$

$\upsilon = (k/m)^{1/2}/2\pi = 1{,}59$ Гц $\lambda = \beta T = \beta/\upsilon = 0{,}0157$ $N_e = \dfrac{1}{\lambda} = 64$.

Пример 1.3.4. *Шарик массой m, прикреплённый к пружине жёсткости k, находится в жидкости с вязкостью* η. *Шарик вывели из положения равновесия и отпустили. При каком радиусе шарика R его движение будет носить характер апериодического процесса*?

Решение. Колебания прекращаются, и движение шарика становится апериодическим при выполнении условия $\beta \geq \omega_0$. Коэффициент затухания β связан с коэффициентом сопротивления *r* соотношением $\beta = r/2m$. В свою очередь коэффициент сопротивления, который можно найти из формулы Стокса, равен $r = 6\pi\eta R$. Учитывая, что $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$, имеем $\dfrac{6\pi\eta R}{2m} > \sqrt{\dfrac{k}{m}}$. Следовательно, $R > \dfrac{\sqrt{km}}{3\pi\eta}$.

Пример 1.3.5. *Как изменяются* A_0 (*амплитуда смещения при* $\omega=0$), *максимальная амплитуда A и резонансная частота* $\omega_{\text{рез}}$ *при уменьшении сопротивления среды, если все остальные параметры, определяющие вынужденные колебания остаются постоянными*?

Решение. Смещение A_0 при $\omega=0$ есть смещение под действием статической силы. Поэтому оно определяется отношением максимальной вынуждающей силы F_0 к коэффициенту упругости *k*: $A_0 = F_0 / k$. По условию задачи, F_0 и *k* остаются постоянными. Поэтому A_0 не зависит от сопротивления среды. Резонансная частота, определяемая выражением $\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$, тем ближе к собственной частоте ω_0 , чем меньше коэффициент затухания β . Так как $\beta = r / 2m$, а масса колеблющегося тела, согласно условию, остается постоянной, то с уменьшением *r* уменьшается β и растет $\omega_{\text{рез}}$. Амплитуда при резонансной частоте $A_{\text{рез}} = \dfrac{F_0}{2\beta m\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$ возрастает с уменьшением сопротивления среды ($A_{\text{рез}} \to \infty$ при $\beta \to 0$).

Пример 1.3.6. *Под действием силы тяжести электродвигателя консольная балка, на которой он установлен, прогнулась на* $h = 1{,}0$ мм. *При какой частоте вращения* ν *якоря электродвигателя может возникнуть опасность резонанса*?

Решение. По закону Гука прогиб балки *h* пропорционален весу груза *mg* и обратно пропорционален коэффициенту упругости балки *k*: Иначе говоря $k = mg / h$. Собственная частота колебаний балки составит $\omega = (k / m)^{1/2} = (g / h)^{1/2}$. Опасность резонанса возникнет при совпадении (почти совпадении) частоты вращения вала двигателя и собственной частоты колебаний балки: $\upsilon = \omega / 2\pi = \left(g / h \right)^{1/2} / 2\pi = \sim 16$ Гц.

Пример 1.3.7. *Определить, на сколько резонансная частота отличается от частоты* $\nu_0 = 1$ кГц *собственных колебаний системы, характеризуемой коэффициентом затухания* $\beta = 400$ с$^{-1}$.

Решение. Воспользуемся стандартными формулами: резонансная частота связана с собственной частотой и коэффициентом затухания формулой $\omega_{рез} = \left(\omega_0^2 - 2\beta^2 \right)^{1/2}$. Сравним численно величины, входящие в подкоренное выражение: $\omega_0 = 2\pi\nu_0 = \sim 6{,}28 \cdot 10^3$ с$^{-1}$ $\gg \beta = 400$ с$^{-1}$. Используя разложение в ряд Тейлора по малому параметру $x = \omega_0^2 / 2\beta^2$, находим: $\omega_{рез} = \left(\omega_0^2 - 2\beta^2 \right)^{1/2} = \omega_0 - \beta^2 / \omega_0$. Различие, с учетом деления на 2π (чтобы перевести круговые частоты в Герцы), составит 1,06 Гц (около 0,1 %)

Пример 1.3.8. *На рис.* 1.2.8 *изображен график затухающих колебаний, где S – колеблющаяся величина, описываемая уравнением* $x(t) = A_0 e^{-t/\tau} \sin\left(\omega t + \varphi \right)$. *Определите время релаксации* τ *(в секундах).*

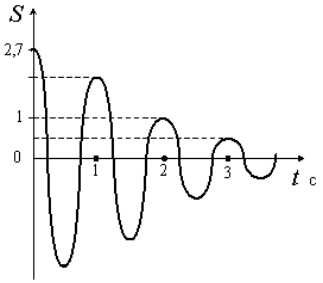

Рис. 1.2.8

Решение. Затухающие колебания характеризуются амплитудой, которая изменяется по закону $A(t)=A_0e^{-t/\tau}$, причем логарифмический декремент затухания $\lambda=\ln\dfrac{A(t^*)}{A(t^*+T)}=\ln e^{\frac{T}{\tau}}=\dfrac{T}{\tau}$ связан с временем релаксации τ. Из графика можно определить отношение $\dfrac{A(0)}{A(t=2)}=2,7=e^{\frac{2}{\tau}}$. Следовательно, $\ln 2,7=\dfrac{2}{\tau}$. Поэтому $\tau=\dfrac{2}{\ln 2,7}\approx 2$ с.

Пример 1.3.9. *Как изменяются* A_0 (*амплитуда смещения при* $\omega=0$), *максимальная амплитуда A и резонансная частота* $\omega_{рез}$ *при уменьшении сопротивления среды, если все остальные параметры, определяющие вынужденные колебания остаются постоянными*?

Решение. Смещение A_0 при $\omega=0$ есть смещение под действием статической силы. Поэтому оно определяется отношением максимальной вынуждающей силы F_0 к коэффициенту упругости k $A_0=F_0/k$. По условию задачи, F_0 и k остаются постоянными. Поэтому A_0 не зависит от сопротивления среды. Резонансная частота, определяемая выражением $\omega_{рез}=\sqrt{\omega_0^2-2\beta^2}$, тем ближе к собственной частоте ω_0, чем меньше коэффициент затухания β. Так как $\beta=r/2m$, а масса колеблющегося тела, согласно условию, ос-

тается постоянной, то с уменьшением r уменьшается β и растет $\omega_{рез}$. Амплитуда при резонансной частоте $A_{рез} = \dfrac{F_0}{2\beta m\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$ возрастает с уменьшением сопротивления среды ($A_{рез} \to \infty$ при $\beta \to 0$).

Пример 1.3.10. *Найдите решение уравнения* $\ddot{x} + \omega_0^2 x = bt$, *удовлетворяющее начальным условиям*: $x(0) = x_0 \neq 0,\ \dot{x}(0) = 0.$

Решение. С помощью подстановки $y = x - \dfrac{bt}{\omega_0^2}$ преобразуем указанное в условии задачи уравнение к уравнению гармонических колебаний $\ddot{y} + \omega_0^2 y = 0$. Его общее решение представляется в известном виде: $y(t) = a\cos(\omega_0 t + \alpha)$. Тогда $x(t) = a\cos(\omega_0 t + \alpha) + \dfrac{bt}{\omega_0^2}$. Из начальных условий следует, что $a\cos\alpha = x_0$, и $a\sin\alpha = \dfrac{b}{\omega_0^3}$. Следовательно, амплитуда колебаний $a = \sqrt{x_0^2 + \left(\dfrac{b}{\omega_0^3}\right)^2}$, а для начальной фазы колебаний имеем $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{b}{\omega_0^3 x_0}$.

1.3.3. Задачи для самостоятельной работы

Затухающие колебания

Задача 1.3.1. Амплитуда слабо затухающих колебаний уменьшается на 4,6 % за каждый период. *а*) Какая доля энергии теряется за одно колебание? *б*) Во сколько раз уменьшится начальная амплитуда за 20 полных периодов? (*а*) 9 %; *б*) 2,56 раза)

Задача 1.3.2. За время t = 8 мин амплитуда затухающих колебаний уменьшилась в три раза. Определить коэффициент затухания β. ($\beta = 2{,}29 \cdot 10^{-3}$ с$^{-1}$)

Задача 1.3.3. Логарифмический декремент колебаний маятника равен $\lambda = 0{,}003$. Определить число N полных колебаний, которые

должен сделать маятник, чтобы амплитуда уменьшилась в два раза. ($N = 231$)

Задача 1.3.4. Гиря массой m = 500 г подвешена к спиральной пружине жесткостью k = 20 Н/м и совершает упругие колебания в некоторой среде. Логарифмический декремент колебаний $\lambda = 0{,}004$. Определить число N полных колебаний, которые должна совершить гиря, чтобы амплитуда колебаний уменьшилась в n = 2 раза. За какое время t произойдет это уменьшение? (N = 173, $t = 172$ с)

Задача 1.3.5. Определить период T затухающих колебаний, если период T_0 собственных колебаний системы равен 1 с и логарифмический декремент колебаний $\lambda = 0{,}628$. (1,005 с)

Задача 1.3.6. Найти число N колебаний системы, в течение которых энергия системы уменьшилась в n = 2 раза. Логарифмический декремент колебаний $\lambda = 0{,}01$. ($N \approx 35$)

Задача 1.3.7. Тело массой m = 0,6 кг, подвешенное к спиральной пружине жесткостью k = 30 Н/м, совершает в некоторой среде упругие колебания. Логарифмический декремент затухания λ = 0,01. Определить: 1) время, за которое амплитуда колебаний уменьшится в 3 раза; 2) число полных колебаний тела, при котором амплитуда колебаний также уменьшилась в 3 раза. (1) t = 97,6 с; 2) N = 110)

Задача 1.3.8. Гармонический осциллятор с затуханием за период колебаний теряет 5,0 % механической энергии. *а*) Насколько его циклическая частота ω отличается от «собственной» частоты ω_0? *б*) Через, сколько периодов амплитуда колебаний уменьшается в e раз? (*а*) $(\omega - \omega_0) / \omega_0 = -8{,}3 \cdot 10^{-6}$; *б*) 39)

Вынужденные колебания. Резонанс

Задача 1.3.9. Вагон массой m = 80 т имеет четыре рессоры. Жесткость k пружин каждой рессоры равна 500 кН/м. При какой скорости v вагон начнет сильно раскачиваться вследствие толчков на стыках рельс, если длина l рельса равна 12,8 м?
($v = 10{,}2$ м/с = 36,7 км/ч)

Задача 1.3.10. Колебательная система совершает затухающие колебания с частотой $\nu = 1000$ Гц. Определить частоту ν_0 собственных колебаний, если резонансная частота $\nu_{рез} = 998$ Гц. ($\nu_0 = 1002$ Гц)

Задача 1.3.11. Определить логарифмический декремент колебаний λ колебательной системы, для которой резонанс наблюдается при частоте, меньшей собственной частоты $\nu_0 = 10$ кГц на $\Delta\nu = 2$ Гц. ($\lambda = 0{,}089$)

Задача 1.3.12. Период T_0 собственных колебаний пружинного маятника равен 0,55 с. В вязкой среде период T того же маятника стал равным 0,56 с. Определить резонансную частоту $\nu_{рез}$ колебаний. ($\nu_{рез} = 1{,}75$ Гц)

Задача 1.3.13. Пружинный маятник (жесткость k пружины равна 10 Н/м, масса m груза равна 100 г) совершает вынужденные колебания в вязкой среде с коэффициентом сопротивления $r = 0{,}02$ кг/с. Определить коэффициент затухания β и резонансную амплитуду $A_{рез}$ если амплитудное значение вынуждающей силы $F_0 = 10$ мН. ($\beta = 0{,}1$ с$^{-1}$, $A_{рез} = 5$ мм)

Задача 1.3.14. Тело совершает вынужденные колебания в среде с коэффициентом сопротивления $r = 1$ г/с. Считая затухание малым, определить амплитудное значение вынуждающей силы, если резонансная амплитуда $A_{рез} = 0{,}5$ см и частота ν_0 собственных колебаний равна 10 Гц. ($F_0 = 0{,}314$ мН)

Задача 1.2.15. К спиральной пружине жесткостью k =10 Н/м подвесили грузик массой m = 10 г и погрузили всю систему в вязкую среду. Приняв коэффициент сопротивления r равным 0,1 кг/с, определить: 1) частоту ν_0 собственных колебаний; 2) резонансную частоту $\nu_{рез}$; 3) резонансную амплитуду $A_{рез}$, если вынуждающая сила изменяется по гармоническому закону и ее амплитудное значение $F_0 = 0{,}02$ Н; 4) отношение резонансной амплитуды к статистическому смещению под действием силы (1) $\nu_0 = 5{,}03$ Гц; 2) $\nu_{рез} = 4{,}91$ Гц; 3) $A_{рез} = 6{,}25$ мм; 4) $A_{рез}/A(0) = 3{,}1$)

Задача 1.3.16. Во сколько раз амплитуда вынужденных колебаний будет меньше резонансной амплитуды, если частота изменения вынуждающей силы будет больше резонансной частоты: 1) на

10 %? 2) в 2 раза? Коэффициент затухания β в обоих случаях принять равным 0,1 ω_0 (ω_0 – круговая частота собственных колебаний). (1) в 1,51 раза; 2) в 15,1 раза)

Задача 1.3.17. Амплитуда вынужденных колебаний гармонического осциллятора достигает значения 28,6 F_0 / m при резонансе на частоте 382 Гц. Чему равна добротность Q системы? ($Q = 1,65 \cdot 10^8$)

З**адача 1.3.18.** На сколько процентов отличается период затухающих колебаний осциллятора от периода его гармонических колебаний при декременте затухания $\lambda = 0,628$? (на 0,5 %)

Задача 1.3.19. Найдите отношение $\dfrac{x(t_{n+1})}{x(t_n)}$ для двух соседних экстремумов смещения осциллятора из положения равновесия $x(t)$, если известен логарифмический декремент затухания λ. ($\exp(-\lambda/2)$)

Задача 1.3.20. Две колебательные системы имеют параметры: *а*) $T_1 = 10^{-8}$ с, $\beta_1 = 10^5$ с$^{-1}$ и *б*) $T_2 = 10^{-3}$ с, $\beta_2 = 10^2$ с$^{-1}$. Колебания какой из систем затухают быстрее, а именно: какая из систем сделает меньшее число колебаний за время τ_e? (Вторая)

Задача 1.3.21. Найдите амплитуду ускорения $\ddot{x}$ и сдвиг его фазы относительно смещения частицы x, совершающей затухающие колебания. ($x_m = a(t)\omega_0^2$; $\Delta\varphi = 2\alpha + \pi$)

Задача 1.3.22. Найдите добротность колебательной системы при относительной потере средней энергии $\eta = 0,01$. ($Q = \dfrac{2\pi}{\eta} = 628$)

Задача 1.3.23. Найдите смещение грузика на пружине $x(t)$ в двух предельных случаях: *а*) малой массы грузика m и *б*) малой жёсткости пружины. ($а$) $x(t) = x_0 \exp(-kt/r)$; $б$) $x(t) = x_0 + \dfrac{m}{r}\dot{x}_0\left[1 - \exp(-rt/m)\right]$)

1.4. Электромагнитные колебательные системы*

1.4.1. Основные понятия, законы и формулы

• Круговая частота ω_0 для электромагнитных колебаний в контуре с электроемкостью C и индуктивностью L: $\omega_0 = (LC)^{-1/2}$.

• Период электромагнитных колебаний в контуре (рис. 1.4.1) (формула Томпсона): $T = 2\pi (LC)^{1/2}$.

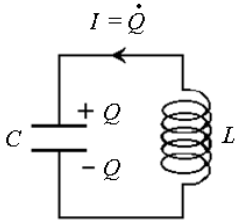

Рис. 1.4.1

• Круговая частота ω для электромагнитных колебаний в контуре с электроемкостью C, индуктивностью L и активным сопротивлением R: $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$.

• Период электромагнитных колебаний в контуре с активным сопротивлением:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}}.$$

• Коэффициент затухания $\beta = \frac{R}{2L}$.

• Полная энергия электромагнитных колебаний в контуре:

*Электромагнитные явления подробно изучаются в последующих разделах курса общей физики. Но математика задач на электрические колебания в электромагнитном колебательном контуре ничем не отличается от математики задач на механические колебания. По этой причине мы включаем несколько задач на эту тему в данное пособие.

$$W = \frac{LI_{\max}^2}{2} = \frac{Q_{\max}^2}{2C},$$

где $I_{\max}$ – амплитудное значение тока через индуктивность, а $Q_{\max}$ – амплитудное значение заряда на конденсаторе.

• Для электромагнитного контура при малом по сравнению с собственной частотой коэффициенте затухания добротность выражается в виде $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$.

1.4.2. Методические рекомендации по решению задач

Пример. 1.4.1. *Вывести уравнение колебательного движения в электромагнитном колебательном контуре.*

Решение. Рассмотрим колебательный контур, состоящий из конденсатора емкостью *C* и катушки индуктивностью *L*. Сопротивлением катушки и проводов пренебрегаем. Пусть в цепи идет ток *I*, заряжающий конденсатор. Так как внешняя ЭДС к контуру не приложена, ЭДС самоиндукции равна напряжению на конденсаторе. Имеем два уравнения:

$$I = dQ / dt;\ U = -LdI / dt = Q / C.$$

Подставляя первое уравнение во второе, получаем уравнение для изменения заряда на конденсаторе: $-Ld^2Q/dt^2 = Q/C$, которое перепишем в стандартном виде: $d^2Q / dt^2 + Q/LC = 0$, откуда с очевидностью следует, что заряд конденсатора будет меняться по периодическому закону с круговой частотой $\omega = (LC)^{-1/2}$. Уравнение для заряда можно продифференцировать еще раз и получить совершенно аналогичное уравнение для силы тока в катушке индуктивности: $d^2I / dt^2 + I / LC = 0$.

Пример. 1.4.2. *Вывести уравнение колебательного движения в электромагнитном колебательном контуре при наличии в нем активного сопротивления R.*

Решение. Рассмотрим теперь колебательный контур, состоящий из конденсатора емкостью *C* и катушки индуктивностью *L* и активного сопротивления *R*. Пусть в цепи идет ток *I*, заряжающий конденсатор. Так как внешняя ЭДС к контуру не приложена, ЭДС самоиндукции равна сумме напряжения на конденсаторе падения напряжения на сопротивлении. Имеем два уравнения: $I = dQ / dt$; $U = -LdI / dt - IR = Q / C$. Подставляя первое уравнение во второе, получаем уравнение для изменения заряда на конденсаторе: $d^2Q / dt^2 + (R / L)dQ / dt + Q / LC = 0$. Это уравнение, очевидно, является уравнением гармонических затухающих колебаний с декрементом затухания $\beta = R / 2L$.

Пример 1.4.3. *Колебательный контур состоит из катушки с индуктивностью* $L = 0{,}1$ мГн *и конденсатора переменной электроемкости от* $C_1 = 100$ пФ *до* $C_2 = 900$ пФ. *Определить диапазон длин электромагнитных волн, которые могут вызывать резонанс в*

этом контуре. Активное сопротивление контура принять равным нулю.

Решение. Период колебаний в контуре находим по формуле Томсона: $T = 2\pi(LC)^{1/2}$. Период колебаний в электромагнитной волне связан с ее длиной соотношением $\lambda = cT$, где $c = 3\cdot10^8$ м/с – скорость распространения электромагнитных волн в вакууме (практически такая же и в воздухе) – скорость света. Соответственно длины волны, которые могут вызвать резонанс в колебательном контуре, лежат в диапазоне от

$$\lambda_2 = 2\pi c(LC_2)^{1/2} = 190 \text{ м до } \lambda_1 = 2\pi c(LC_1)^{1/2} = 570 \text{ м}.$$

Это так называемый диапазон средних длин волн, который был очень популярен в радиовещании в XX веке.

Пример 1.4.4. *Колебательный контур, состоящий из воздушного конденсатора с двумя пластинами площадью* $S = 100$ см *каждая и катушки индуктивностью* $L = 1$ мкГн, *резонирует на волну длиной* $\lambda = 10$ м. *Определить расстояние d между пластинами конденсатора.*

Решение. Прежде всего, приведем связь между длиной λ электромагнитной волны в вакууме и ее частотой ν (эта и подобные формулы будут неоднократно использованы в следующем разделе): $\lambda\nu = c$, где $c = 3\cdot10^8$ м/с – скорость света в вакууме. Расстояние между пластинами конденсатора можно найти из формулы электроемкости плоского конденсатора: $C = \varepsilon_0\varepsilon S/d$, где ε – диэлектрическая проницаемость среды, заполняющей конденсатор. В нашем случае $\varepsilon = 1$, так что $d = \dfrac{\varepsilon_0 S}{C}$. Из формулы Томсона $T = 2\pi\sqrt{LC},$ определяющей период колебаний в электрическом контуре, находим электроемкость $C = \dfrac{T^2}{4\pi^2 L}$. Контур резонирует на длину волны λ, т.е. на частоту $\nu = c/\lambda$, откуда находим период собственных колебаний: $T = \dfrac{\lambda}{c}$. Подставив период в формулу для электроемкости, находим $d = 4\pi^2 c^2 \varepsilon_0 \dfrac{SL}{\lambda^2}$.

Произведем вычисления:

$$d = 4\pi^2 \times \left(3 \cdot 10^8\right)^2 \times 8{,}85 \cdot 10^{-12} \times \frac{10^{-2} \times 10^{-6}}{10^2} = 3{,}14 \cdot 10^{-3} = 3{,}14 \text{ мм}.$$

Пример 1.4.5. *Разность потенциалов на обкладках конденсатора в колебательном контуре изменяется по закону* U=50 cos $(10^4\pi t)$. *Емкость конденсатора* $C = 9 \cdot 10^{-7}$ Ф. *Найти индуктивность контура* L *и длину волны* λ, *соответствующую этому контуру.*

Решение. Из формулы Томсона $T = 2\pi\sqrt{LC}$ найдем $L = \frac{T^2}{4\pi^2 C}$ или, учитывая, что $T = 2\pi/\omega$, $L = \frac{1}{C\omega^2}$. Сравнивая уравнение $U = 50 \cos (10^4\pi t)$ с общей формой уравнения гармонических колебаний, имеем $\omega = 10^4\pi c^{-1}$. Следовательно, $L = \frac{1}{C(10^4\pi)^2} \approx 1{,}1$ мГн.

Пример 1.4.6. *Колебательный контур состоит из катушки индуктивностью* L = 0,1 Гн *и конденсатора электроемкостью* C = 39,5 мкФ. *Заряд конденсатора* $Q_{\max}$ = 3 мкКл. *Пренебрегая сопротивлением контура, записать*: 1) *уравнение изменения силы тока в цепи в зависимости от времени*; 2) *уравнение изменения напряжения на конденсаторе в зависимости от времени.*

Решение. Согласно формуле Томсона собственная частота колебаний в контуре равна

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{I}{LC}}.$$

Поэтому заряд на обкладках конденсатора изменяется по закону: $Q(t) = Q_{\max}\cos\ \omega_0 t$. Дифференцируя это выражение, находим уравнение изменения силы тока в цепи в зависимости от времени $I(t) = \frac{dQ}{dt} = -\ \mathrm{Q_{max}}\omega_0 \sin\ \omega_0 t = \mathrm{Q_{max}}\omega_0 \cos\ (\omega_0 t + \frac{\pi}{2})$. Учитывая связь напряжения на обкладках с величиной заряда

$$U_c = \frac{Q}{C},$$

определяем уравнение изменения напряжения на конденсаторе в зависимости от времени $U_c\ (t) = \frac{\mathrm{Q_{max}}}{C}\cos\ \omega_0 t$. Подставляя численные значения из условия задачи, находим:

1) $I(t)$ = 1,5 cos $(160\pi t + \frac{\pi}{2})$ мА; 2) $U_c\ (t) = 76\cos(160\pi t)$ мВ.

Пример 1.4.7. *В момент времени* t=0 *батарею с* ЭДС ε=12 В. *подключают последовательно с сопротивлением* R=30 Ом *и ин-*

дуктивностью L = 220 мГн. *а*) *Чему равна постоянная времени RL-цепочки*? *б*) *За какое время сила тока достигнет половины максимального значения*? *Чему в этот момент будут равны*: *в*) *мощность, потребляемая от батареи, и г*) *скорость накопления энергии магнитным полем катушки*?

Решение. Нарастание тока в *RL*-цепочке после подсоединения батареи определяется уравнением закона Ома: $\varepsilon - L\frac{dI}{dt} = RI$, $I(0) = 0$, решение которого имеет вид $I = \frac{\varepsilon}{R}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$, где $\tau = L/R$ вызывается постоянной времени *RL*-цепочки. *а*) Подставляя численные значения, находим $\tau = 220 \cdot 10^{-3} / 30 = 7{,}3$ мс. *б*) Максимальная сила тока $I_{\max} = \varepsilon / R$. Уравнение $I = I_{\max} / 2$ приводит к равенству $\exp(-t/\tau) = 1/2$, откуда искомый момент времени $t_{1/2} = \tau \ln 2 = 5{,}1$ мс. *в*) В этот момент сила тока равна $I_{1/2} = \varepsilon / 2R = 0{,}2$ А, а мощность, отбираемая от батареи, равна $P_{tot}(t_{1/2}) = \varepsilon I_{1/2} = 2{,}4$ Вт. *г*) Энергия, накопленная катушкой индуктивности в произвольный момент времени, равна $W = LI^2 / 2$. Отсюда получаем скорость накопления энергии:

$$\frac{dW}{dt} = LI\frac{dI}{dt} = LI\frac{\varepsilon}{R}\frac{R}{L}e^{-t/\tau} = P_{tot}e^{-t/\tau}.$$

В момент $T = t_{1/2}$ имеем $dW/dt = P_{tot}(t_{1/2})/2 = 1{,}2$ Вт. Видно, что только часть мощности, отбираемой от батареи, поступает в катушку индуктивности. Остальная часть, как мы уже знаем из предыдущего примера, рассеивается на сопротивлении *R*:

$$P_R = I^2 R = IR\frac{\varepsilon}{R}\left(1 - e^{-t/\tau}\right) = P_{tot}\left(1 - e^{-t/\tau}\right).$$

В момент времени $t = t_{1/2}$ получаем $P_R = P_{tot}(t_{1/2})(1 - 1/2) = 1{,}2$ Вт.

Пример 1.4.8. *Колебательный контур состоит из катушки индуктивностью* L = 10 мГн *и, конденсатора электроемкостью* C = 0,1 мкФ *и резистора сопротивлением* R = 20 Ом. *Определить, через сколько полных колебаний амплитуда силы тока в контуре уменьшится в e раз.*

Решение. Если *N* полных колебаний совершилось за время *t*, то

$N = \frac{t}{T}$, где T – период колебаний в контуре. Максимальное значение тока в контуре изменяется со временем по закону:

$$I_{\max N} = I_{\max 0} e^{-\beta t}.$$

По условию задачи $I_{\max N} = I_{\max 0} e^{-1}$, т.е. $\beta t = 1$. Так как $\beta = \frac{R}{2L}$, то

$$t = \frac{1}{\beta} = \frac{2L}{R}.$$

Таким образом, количество полных колебаний в контуре за время t определяется соотношением

$$N = \frac{t}{T} = \frac{\frac{2L}{R}}{\frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}}} = \frac{L}{2R}\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}.$$

Подставляя численные значения из условия задачи, находим $N = 5$.

Пример 1.4.9. *Колебательный контур состоит из катушки индуктивностью* $L = 25$ мГн *и, конденсатора электроемкостью* $C = 10$ мкФ *и резистора сопротивлением* $R = 1$ Ом. *Заряд конденсатора* $Q_{\max} = 1$ мКл. *Определить*: 1) *период колебаний контура*; 2) *логарифмический декремент затухания колебаний*; 3) *уравнение зависимости изменения напряжения на пластинах конденсатора от времени.*

Решение. Период колебаний контура определяется соотношением

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}}.$$

Подставляя в определение логарифмического декремента выражения для коэффициента затухания и периода колебаний, находим

$$\lambda = \beta\, T = \frac{R}{2L}\,\frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}} = \frac{\pi R}{L\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}}.$$

Так как величина заряда на обкладках конденсатора меняется по закону: $Q(t) = Q_{\max} e^{-\beta t}\cos\,\omega t$, то уравнение зависимости изменения напряжения на пластинах конденсатора от времени имеет вид $U(t) = \frac{Q_{\max}}{C} e^{-\beta t}\cos\,\omega t$. Подставляя численные значения из условия задачи, получаем 1) $T = 3{,}14$ мс; 2) $\lambda = 0{,}063$; 3) $U(t) = 100 e^{-20t}\cos 637\pi t$.В.

Пример 1.4.10. *Определить логарифмический декремент затухания колебаний, при котором энергия колебательного контура за* $N = 5$ *полных колебаний уменьшится в* $n = 8$ раз.

Решение. Записывая выражение для энергии электромагнитных колебаний в контуре $W = \frac{LI^2}{2}$ через значение тока через индуктивность, можно определить изменение величины тока в контуре за N колебаний: $I = \sqrt{\frac{2W}{L}}$, т.е. $\frac{I_0}{I_N} = \sqrt{\frac{W_0}{W_N}} = \sqrt{n}$. Учитывая, что $I_N = I_0\ e^{-\beta t}$, где $t = TN$, находим $\ln \sqrt{n} = N\,\beta t = N\lambda$. Таким образом, $\lambda = \frac{\ln \sqrt{n}}{N}$. С учетом численных значений из условия задачи имеем $\lambda = 0{,}21$.

Пример 1.4.11. *В момент $t = 0$ замыкается цепь, состоящая из последовательно соединенных катушки с индуктивностью L = 40 мГн, резистора R = 3,0 Ом и заряженного конденсатора C = 4,8 мкФ. Максимальный заряд на обкладках конденсатора равен Q_0 = 5 нКл.* 1) *Показать, что в этом контуре будут происходить колебания.* 2) *Определить частоту колебаний.* 3) *За какое время начальная амплитуда колебаний заряда уменьшится наполовину*? 4) *Чему равно амплитудное значение силы тока*? 5) *При каком значении сопротивления R колебания в контуре не возникают*?

Решение. 1) Затухание будет докритическим, если $R^2 < 4L/C$. Это условие выполнено: R^2 = 9,0 Ом^2 меньше $4L/C$ = 3,3 Ом^2, поэтому в контуре будут возбуждаться колебания. 2) Так как величина R мала по сравнению с L/C, можно использовать соотношение

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}};\ \nu = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} = 2{,}3\ \text{кГц}.$$

3) Согласно $Q = Q_0 e^{-\frac{R}{2L}t}\cos(\omega_0 t + \varphi)$ амплитуда уменьшится вдвое, когда $e^{-\frac{R}{2L}t} = \frac{1}{2}$ или $t = \frac{2L}{R}\ln 2$ = 18 мс. 4) Чтобы определить ток I, продифференцируем выражение для заряда на обкладках конденсатора

$$I = \frac{dQ}{dt} = Q_0 e^{-\frac{R}{2L}t}\left(-\frac{R}{2L}\cos\omega_0 t - \frac{1}{\sqrt{LC}}\sin\omega_0 t\right).$$

Поскольку R много меньше $\sqrt{LC}$, членом с $\cos\omega_0 t$ можно пренебречь, и тогда ($\omega_0 \approx \sqrt{\frac{1}{LC}}$):

$$I \approx -\frac{Q_0}{\sqrt{LC}}\, e^{-\frac{R}{2L}t}\sin\omega_0 t.$$

Начальная амплитуда силы тока равна $\frac{Q_0}{\sqrt{LC}}$.

5) Чтобы затухание было критическим или сверхкритическим, должно быть выполнено неравенство $R^2 \geq 4L/C = 3{,}3$ Ом^2, откуда R должно быть больше 180 Ом.

1.4.3. Задачи для самостоятельной работы

Задача 1.4.1. Переменный конденсатор настройки радиоприемника имеет емкость 1500 пФ, когда приемник настроен на станцию, работающую на частоте 550 кГц. *а*) Какой должна быть емкость для настройки контура на станцию, работающего на частоте 1600 кГц? *б*) Чему равна индуктивность контура (предполагается, что она постоянна)? (*а*) 177 пФ; *б*) 56 мГн)

Задача 1.4.2. Пользуясь определениями Фарады и Генри, покажите, что $T = 2\pi(LC)^{1/2}$ имеет размерность с$^{-1}$.

Задача 1.4.3. Колебательный контур состоит из катушки индуктивностью L и конденсатора, величина емкости которого может изменяться в 4 раза от C до $4C$. В каких пределах может изменяться длина волны, на которую резонирует контур? (в 2 раза)

Задача 1.4.4. Индуктивность колебательного контура равна 0,5 мГн. Какова должна быть электроемкость C контура, чтобы он резонировал на длину волны 628 м? (222 пФ)

Задача 1.4.5. Уравнение изменения силы тока в колебательном контуре со временем имеет вид $I = -(0{,}02\ A)\sin\left[\left(400\pi\ \text{с}^{-1}\right)t\right]$. Индуктивность контура L = 1 Гн. Найти период колебаний и емкость контура. (0,005 с; 0,6 мкФ)

Задача 1.4.6. Емкость переменного конденсатора контура приемника изменяется в пределах от C_1 до $C_2 = 9C_1$. Найти диапазон длин волн контура приемника, если емкости C_1 соответствует длина волны $\lambda = 3$ м. (от 3 м до 9 м)

Задача 1.4.7. Колебательный контур состоит из индуктивности $L = 10^{-2}$ Гн, емкости C = 0,25 мкФ и сопротивления R = 2 Ом. Найти, на сколько процентов уменьшится разность потенциалов на обкладках конденсатора за время одного периода. (~ 6 %)

Задача 1.4.8. Колебательный контур имеет емкость 5,0 нФ и индуктивность 5,0 мГн. Логарифмический декремент затухания равен $5 \cdot 10^{-3}$. За, какое время вследствие затухания потеряется 99 % энергии контура? (~ 30 мс)

Задача 1.4.9. Какое сопротивление R необходимо ввести в LC-контур (L = 200 мГн, C = 1200 пФ), чтобы изменить частоту колебаний на 0,1 %? Увеличивается или уменьшается частота колебаний? (1155 Ом)

Задача 1.4.10. В RCL-контуре за один период колебаний в тепло переходит 3,5 % энергии. Чему равна величина R, если $L = 80$ мГн и C = 1 мкФ? (1,6 Ом)

Задача 1.4.11. Определите относительную потерю η энергии колебательного контура за один период колебаний при $\beta << \omega_0$.

$$(\eta \approx 2\lambda = 2\pi R\sqrt{\frac{C}{L}})$$

Задача 1.4.12. Определите тепловую энергию Q, которая выделится на сопротивлении R за время $t >> T$ (T − период колебаний в контуре). $(Q = \frac{q_0^2}{2C})$

Задача 1.4.13. Рассмотрим два колебательных контура с одинаковыми катушками и конденсаторами. В катушку одного из контуров вставили железный сердечник, увеличивающий ее индуктивность в n = 4 раза. Определить отношение резонансных частот контуров, если максимальные заряды на конденсаторах одинаковы. $(\nu_2/\nu_1 = \sqrt{\frac{1}{n}} = 0{,}5)$

Задача 1.4.14. Колебательный контур состоит из индуктивности 10^{-2} Гн, электроемкости 0,405 мкФ сопротивления 2 Ом. Определить, во сколько раз уменьшится разность потенциалов на обкладках конденсатора за время одного периода. (В 1,04 раза)

Задача 1.4.15. Конденсатор электроемкостью С зарядили до напряжения $U_{\max}$ и замкнули на катушку индуктивностью L. Пренебрегая сопротивлением контура, определить амплитудное значение силы тока в данном колебательном контуре. $(I_{\max} = U_{\max}\sqrt{C/L})$

Задача 1.4.16. Катушка (без сердечника) длиной l = 50 см и площадью S_1 = 3 см^2 имеет N = 1000 витков и соединена параллельно с воздушным конденсатором. Конденсатор состоит из двух пластин площадью S_2 = 75 см^2 каждая. Расстояние между пластинами d = 5 мм. Диэлектрик – воздух. Определить период колебаний полученного контура. $(T = 2\pi\sqrt{\frac{\varepsilon_0 \mu_0 N^2 S_1 S_2}{d\, l}};$ 628 нс.)

Задача 1.4.17. Колебательный контур**,** состоящий из катушки индуктивности и воздушного конденсатора, настроен на длину волны λ_1 = 300 м. Расстояние между пластинами конденсатора при этом равно d_1 = 4,8 мм. Каким должно быть это расстояние, чтобы контур был бы настроен на длину волны λ_2 = 240 м?

($d_2 = d_1(\frac{\lambda_1}{\lambda_2})^2$; d_2 = 7,5 мм)

Задача 1.4.18. Колебательный контур имеет индуктивность L = 1,6 мГн, электроемкость C = 0,04 мкФ и максимальное напряжение $U_{\max}$ на зажимах, равное $U_{\max}$ = 200 В. Определить максимальную силу тока $I_{\max}$ в контуре. Сопротивление контура пренебрежимо мало. ($I_{\max}$ = 1 А)

Задача 1.4.19. Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью C = 2,22 10^{-9} Ф и катушки, намотанной из медной проволоки диаметром d = 0,5 мм. Длина катушки l = 20 см. Определить логарифмический декремент затухания колебаний.

($\lambda = \frac{8\,\rho\sqrt{\pi l C}}{d^2\sqrt{\mu\mu_0}}$ = 0,018)

Задача 1.4.20. Колебательный контур имеет электроемкость C = 1,11 $\cdot 10^{-9}$ Ф и индуктивность L = 5 мГн. Логарифмический декремент затухания колебаний равен λ = 0,005. За какое время потеряется вследствие затухания 99 % энергии контура?

($t = \frac{T ln\ 100}{2\lambda}$ = 6,8 мс)

Задача 1.4.21. Чему равно отношение энергии магнитного поля колебательного контура к энергии его электрического поля для момента времени $t = T/8$ с? ($\frac{W_м}{W_{эл}} = 1$)

Задача 1.4.22. Ток в *RL*-контуре возрастает от нуля до половины максимального значения за 1,56 мс. Определить сопротивление R, если L = 310 Гн. (0,138 МОм)

2. Молекулярная физика и термодинамика

2.1. Молекулы и атомы

2.1.1. Основные понятия, законы и формулы

• Основное утверждение молекулярно-кинетической теории: все вещества состоят из молекул и атомов, которые взаимодействуют друг с другом и находятся в непрестанном хаотическом движении.

• 1 моль = N_A штук единиц вещества (атомов или молекул) – единица измерения количества вещества в молекулярной физике и химии. $N_A = 6{,}022 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$ – число Авогадро.

В 2011 года на XXIV Генеральной конференции по мерам и весам единогласно принято предложение определить моль без привязки к массе атома углерода.

• Закон Авогадро: 1 моль идеального газа при нормальных условиях занимает объем $V_m = 22{,}4 \cdot 10^{-3}$м^3.

• 1 Ангстрем = 10^{-10} м – атомная единица измерения расстояний, примерно соответствующая размерам отдельных атомов и простых молекул.

• $m_{ат} = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ кг – атомная единица массы, примерно равная массе атома водорода.

• 1 калория = 4,19 Дж.

• 1 эВ = $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Дж – единица измерения энергии, удобная в молекулярной физике и химии.

• Число молекул, содержащихся в теле $N = \dfrac{m}{\mu} N_A$, где $N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$ – число Авогадро; m – масса тела; μ [г/моль] – молярная масса, численно равная атомной массе молекулы данного вещества; $m/\mu = \nu$ – количество вещества, измеряемое в молях.

• Молярная масса смеси газов $\mu = \dfrac{\sum_i^n m_i}{\sum_i^n \nu_i}$, где m_i – масса i-го компонента смеси, $\nu_i = m_i / \mu_i$ – количество вещества i-го компонента смеси, n – число компонентов.

2.1.2. Методические рекомендации по решению задач

Пример 2.1.1. *Сколько молекул содержится в стакане воды*? *Объем воды в стакане* $V = 180$ мл.

Решение. Число молекул в стакане воды определяется формулой $N = \nu N_A$, где $\nu = m/\mu$ – количество вещества в молях. Молярная масса воды $\mu = 18$ г/моль, Масса воды в стакане равна ее объему V, умноженному на плотность $\rho = 1$ г/мл. Подставляя все в основную формулу, получаем: $N = \rho V N_A/\mu = 6{,}02 \cdot 10^{24}$ штук.

Пример 2.1.2. *Сколько молекул вы вдыхаете*, *если при одном вдохе вы получаете* 1,0 л *воздуха*?

Решение. Объем одного моля равен 22,4 л. Следовательно, 1,0 л воздуха равен 1/22,4 = 0,045 моль. Таким образом, 1,0 л воздуха содержит $0{,}045\, N_A = 2{,}7 \cdot 10^{22}$ молекул.

Пример 2.1.3. *В сосуде вместимостью* $V = 5$ л *находится однородный газ количеством вещества* $\nu = 0{,}2$ моль. *Определить*, *какой это газ*, *если его плотность* $\rho = 1{,}12$ кг/м^3.

Решение. Для определения вида газа найдем его молекулярную массу $\mu = \rho\, V/\nu = 28$ г/моль. Следовательно, данный газ – азот N_2.

Пример 2.1.4. *В пресное озеро площадью* $S = 1$ км^2 *и средней глубиной* $h = 9$ м *бросили кристаллик поваренной соли массой* 1 мг. *Когда соль полностью растворится и ионы натрия и хлора равномерно размешаются по объему озера*, *сколько ионов натрия попадет в стакан взятой из озера воды*? *Объем воды в стакане* $V = 180$ мл.

Решение. 1. Число молекул в стакане воды мы уже знаем из примера 2.1.1: $N_c = \rho V N_A/\mu = 6{,}02 \cdot 10^{24}$ штук.

2. Число молекул в озере находим аналогично, подставляя в качестве объема площадь озера, умноженную на его среднюю глубину:

$$N_o = \rho S h N_A/\mu = 3{,}01 \cdot 10^{35} \text{ штук.}$$

3. Число молекул в кристаллике соли равно $N_{NaCl} = m N_A/\mu_{NaCl}$. Молярная масса соли $\mu_{NaCl} = 58$ г/моль.

Соответственно $N_{NaCl} = 1{,}03 \cdot 10^{19}$ штук. Число ионов натрия очевидно равно числу молекул соли. 4. Число ионов натрия, которое попадет в стакан озерной воды, очевидно, пропорционально доле объема воды из озера, зачерпнутой стаканом: $N_{Na} = N_{NaCl}\, N_c/N_o = m V N_A/S h \mu_{NaCl} = 2{,}06 \cdot 10^8$ – двести миллионов!

Пример 2.1.5. *Сколько энергии W можно получить из m* = 1 кг ^{235}U, *если при распаде каждого ядра выделяется* ε ~ 60 МэВ *энергии.*

Решение. Очевидно, необходимо найти число атомов урана *N* в 1 кг вещества и умножить на ε. По стандартным формулам получаем $W = \varepsilon m / Am_{AT}$, где $A = 235$ – массовое число для урана. Нужно только пересчитать энергию в Джоули. (1эВ = $1{,}6\cdot10^{-19}$ Дж). Получается: $W = \varepsilon m/Am_{AT} = \sim 2{,}4\cdot10^{13}$ Дж. Попробуем оценить, что это за энергия. При сжигании 1 г бензина можно получить ~ 40 кДж энергии. Следовательно, от одного килограмма урана можно получить столько же энергии, сколько от 600 т бензина! На самом деле, конечно, получается меньше, поскольку не все ядра урана распадаются.

Пример 2.1.6. *Найти молярную массу* μ *смеси* 21 % (*по массе*) *кислорода и* 79 % *азота.*

Решение. Количество вещества в смеси газов равно сумме количества вещества каждого из компонентов: $\nu = \nu_{O_2} + \nu_{N_2}$, т.е.

$$\nu = \frac{m_{O_2}}{\mu_{O_2}} + \frac{m_{N_2}}{\mu_{N_2}}.$$

Молярная масса μ смеси есть отношение массы: *m* смеси к количеству вещества ν :

$$\mu = \frac{m}{m_{O_2}/\mu_{O_2} + m_{N_2}/\mu_{N_2}} = \frac{1}{w_{O_2}/\mu_{O_2} + w_{N_2}/\mu_{N_2}}.$$

Здесь $w_{O_2} = m_{O_2}/m = 0{,}21$ – массовая доля кислорода, а $w_{N_2} = m_{N_2}/m = 0{,}79$ – массовая доля азота, данные в условиях задачи. Молярные массы кислорода и азота находим с помощью таблицы Менделеева: $\mu_{O_2} = 32\cdot10^{-3}$ кг/моль, $\mu_{N_2} = 28\cdot10^{-3}$ кг/моль. Подставляя указанные числовые данные, находим

$$\mu = \frac{1}{0{,}21/0{,}032 + 0{,}79/0{,}028} = 28{,}7\cdot10^{-3} \text{ кг/моль}.$$

Данная смесь газов близка по составу к обычному воздуху.

Пример 2.1.7. *Определить, какое количество частиц находится в* 1 г *парообразного иода, если степень диссоциации его равна* 0,5. (*Степенью диссоциации называют отношение числа молекул, распавшихся на атомы, к общему числу молекул газа. Степень диссоциации показывает, какая часть молекул распалась на атомы.*) *Масса одного киломоля иода* J_2 *равна* 254 кг/кмоль.

Решение. Если степень диссоциации равна α, то в сосуде находится $2\alpha\frac{m}{\mu}$ киломолей атомного иода *J* и $(1-\alpha)\frac{m}{\mu}$ киломолей молекулярного иода J_2. *Общее число киломолей в сосуде равно*

$$2\alpha\frac{m}{\mu}+(1-\alpha)\frac{m}{\mu},$$

и тогда искоиое число частиц

$$N = N_A\left[2\alpha\frac{m}{\mu}+\ (1-\ \alpha)\ \frac{m}{\mu}\right].$$

Подставляя числовые данные задачи, получим $N = 3{,}56\ \cdot 10^{21}$.

Пример 2.1.8. *В сосуде вместимостью V* = 1,12 л *находится азот при нормальных условиях. Часть молекул газа при нагревании до некоторой температуры оказалась диссоциированой на атомы. Степень диссоциации* α = 0,3. *Определить количество вещества*: 1) *ν – азота до нагревания*; 2) $\nu_{мол}$ *– молекулярного азота после нагревания*; 3) $\nu_{ат}$ *– атомарного азота после нагревания*; 4) $\nu_{пол}$ *– всего азота после нагревания.*

Решение. 1) При нормальных условиях количество вещества в сосуде $\nu = V / V_m$ (где $V_m = 22{,}410^{-3}$м^3/моль – молярный объем), ν = 50 ммоль; 2) в результате нагревания останется $\nu_{мол}$ = ν (1 – α) молекулярного азота, т.е. $\nu_{мол}$ = 35 ммоль; 3) количество атомарного азота после нагревания составит $\nu_{ат}$ = 2 ν α = 30 ммоль; 4) полное число молей азота после нагревания равно $\nu_{пол} = \nu_{мол} + \nu_{ат}$ = 65 ммоль.

Пример 2.1.9. *Оценить, какую площадь S поверхности может покрыть пленка бензина, при растекании по ней V* = 1 см^3 *бензина в один молекулярный слой*? *Характерный размер молекул бензина d* ~ 10 нм.

Решение. Здесь ключевое слово – «оценить». Какую площадь занимает на поверхности одна молекула? Зависит от ее формы (шар, диск, что-то еще). Но для оценки с точностью до десятков процентов вполне можно считать, что на одну молекулу приходится ~ d^2 площади, а толщина слоя равна примерно ~ *d*.

Соответственно площадь слоя равна его объему, поделенному на толщину: $S = V / d = 100$ м^2.

Пример 2.1.10. *Определить среднее расстояния* $\langle l \rangle$ *между центрами молекул водяных паров при нормальных условиях и сравнить его с диаметром d самих молекул.*

Решение. Сначала определим диаметр молекулы воды. Предположим, что вода заполняет куб. Число молекул в кубе $N = (L/d)^3 = V/d^3$ (L – длина ребра куба, d – диаметр молекулы). Число молекул можно выразить также соотношением

$$N = \nu N_\text{A} = \frac{m}{\mu} N_\text{A} = \frac{\rho V}{\mu} N_\text{A},$$

где ν – количество вещества жидкости в кубе, m – масса, ρ – плотность, μ – молярная масса жидкости. Приравнивая правые части выражений для числа частиц и выражая из полученного равенства диаметр d молекулы, находим $d = \sqrt[3]{\frac{\mu}{\rho N_\text{A}}}$. Для воды $d = 0{,}311$ нм. Рассмотрим теперь среднее расстояние между центрами молекул в водяном паре $\langle l \rangle = \sqrt[3]{V_1}$ (V_1 – объем куба, приходящегося на одну молекулу). Таким образом, для искомой величины $\langle l \rangle / d$ имеем $\langle l \rangle / d = \sqrt[3]{V_m \rho / \mu} = 10{,}7$.

Пример 2.1.11. *Кубическая кристаллическая решетка железа* ($^{56}_{26}$Fe) *содержит один атом железа на элементарный куб, повторяя который, можно получить всю решетку кристалла. Определить расстояние между ближайшими атомами железа, если плотность железа* $\rho = 7{,}9$ г/см^3, *атомная масса A* = 56.

Решение. В кристаллической решетке железа 1 моль содержит N_A ячеек. Объем одного моля железа μ/ρ. Объем же, приходящийся на одну ячейку, равен $\mu/\rho N_A$. Размер элементарного куба (наименьшее расстояние между центрами атомов железа) равен $d = \sqrt[3]{\mu/\rho N_\text{A}} = 23\ 10^{-10}$ м.

2.1.3. Задачи для самостоятельного решения

Задача 2.1.1. Определите массу золотого слитка, в котором содержится то же количество атомов, что и в слитке железа массой 1 кг. (m = (197/56) кг = 3,5 кг)

Задача 2.1.2. Сколько молекул содержится при нормальных условиях в 1 кг водорода H_2, кислорода O_2? ($N_{H_2} = 3 \cdot 10^{26}$; $N_{O_2} = 1{,}9 \cdot 10^{25}$)

Задача 2.1.3. За 10 суток полностью испарилось из стакана 100 г воды. Сколько в среднем вылетело молекул с поверхности воды за 1 с? (примерно $4 \cdot 10^{18}$ молекул)

Задача 2.1.4. Какую площадь S водной поверхности покроет нефтяная пленка при растекании 1 т нефти? Толщина пленки d равна 20 молекулярным слоям, средняя молярная масса нефти $\mu = 1000$ кг/моль, плотность нефти $\rho = 800$ кг/м^3. Для простоты считать, что молекулы нефти имеют форму кубиков. ($S = 4{,}9 \cdot 10^6$ м^2 $= 490$ га)

Задача 2.1.5. Сколько понадобится нефти, чтобы покрыть пленкой всю водную поверхность Земли (см. задачу 2.1.4)? Радиус Земли $R_з$ = 6400 км, океаны занимают 2/3 площади поверхности Земли. (m = 70 Мт)

Задача 2.1.6. Сколько в год нужно урана ^{235}U, чтобы покрыть потребности в энергии города Москвы? Считается, что город потребляет в среднем примерно 10 ГВт электрической мощности. При распаде 1 атома урана выделяется 60 МэВ энергии. ($m \sim 16$ т)

Задача 2.1.7. Сколько молекул вдыхает человек за один вдох, если объем вдыхаемого воздуха составляет 3 л, а плотность воздуха – 1,3 кг/м^3. Молярная масса воздуха – 29 г/моль. ($m \sim 1 \cdot 10^{23}$)

Задача 2.1.8. Чему равна молярная масса вещества, если при плотности в 9000 кг/м^3 в 1 дм^3 содержится 160 молей вещества. ($\mu \sim 56$ г/моль)

Задача 2.1.9. В баллоне находится смесь идеальных газов: $\nu_1 = 0{,}1$ моля азота, $\nu_2 = 0{,}2$ моля углекислого газа, $\nu_3 = 0{,}2$ моля угарного газа. Определить молярную массу смеси. (34,4 г/моль)

Задача 2.1.10. Какое количество частиц находится в 16 г наполовину диссоциированного кислорода? ($N = 4{,}5 \cdot 10^{23}$)

Задача 2.1.11. В баллоне находится газообразный азот с плотностью $\rho = 0.47$ кг/м^3. Определите концентрацию атомов азота в баллоне. ($\sim 1 \cdot 10^{25}$ 1/м^3)

Задача 2.1.12. В баллоне вместимостью V = 3 л находится кислород массой m = 4 г. Определить концентрацию n молекул газа. ($n = 25 \cdot 10^{24}$ м$^{-3}$)

Задача 2.1.13. В баллоне находится смесь идеальных газов, молярная масса которой равна $40 \frac{\text{г}}{\text{моль}}$. Смесь содержит ν_1 = 0,2 моля азота; углекислого газа, ν_2 = 0,3 моля кислорода. Определить количество угарного газа. ($\nu_{CO} = 0{,}053$)

Задача 2.1.14. В морозный день на поверхности оконного стекла сконденсировалось $34 \cdot 10^{22}$ молекул воды. Какова масса образовавшегося льда? (~ 10 г)

Задача 2.1.15. Оцените минимальное расстояние между центрами соседних атомов железа, считая его кристаллическую решетку кубической. Плотность железа ρ = 7,8 г/см^3, молярная масса $\mu = 0{,}056$ кг/моль. (~ 0,23 нм)

Задача 3.1.16. Поверхность изделия площадью 1 см^2 покрыли одноатомным слоем золота. Считая, что атомы золота образовали квадратную решетку с расстояниями между центрами $2{,}9 \cdot 10^{-10}$ м, определите, на сколько возросла масса изделия. Молярная масса золота μ = 197 кг/кмоль. (~ 0,4 нг)

Задача 2.1.17. Для уменьшения влажности воздуха в упаковке с техническими изделиями помещают сорбенты. Через какое время сорбент поглотит 10 г воды, если ежесекундно поглощается $1 \cdot 10^{22}$ молекул воды? (10 мин)

Задача 2.1.18. Объем, занимаемый одной молекулой тяжелой воды, $V = 3 \cdot 10^{-29}$ м^3, ее молярная масса μ = 0,02 кг/моль. Определите плотность тяжелой воды. (2 г/см^3)

Задача 2.1.19. В сосуде вместимостью 5 л при нормальных условиях находится азот. Определить: 1) количество вещества ν; 2) массу m азота; 3) концентрацию n его молекул в сосуде. (1) ν = 0,223 моль; 2) m = 6,24 г; 3) $n = 2{,}69 \cdot 10^{25}$ м$^{-3}$)

Задача 2.1.20. В сосуде находится смесь кислорода и водорода. Масса смеси равна 3,6 г. Массовая доля ω_1 кислорода составляет 0,6. Определить количество вещества ν смеси, ν_1 и ν_2 каждого газа в отдельности.

Задача 2.1.21. Предельно допустимая концентрация молекул ртути ($^{80}_{201}$Hg) в воздухе равна $3 \cdot 10^{16}$ м$^{-3}$, а хлора ($^{17}_{35}$Cl) –

$8{,}5\cdot10^{18}$ м$^{-3}$. Определить, при какой массе каждого из веществ в одном кубическом метре воздуха появится опасность отравления. (0,01 мг; 1 мг)

2.2. Законы идеального газа

2.2.1. Основные понятия, законы и формулы

• Основное уравнение молекулярно-кинетической теории газов $p = \frac{2}{3} n \langle E_{\text{пост}} \rangle$, где $\langle E_{\text{пост}} \rangle$ – средняя кинетическая энергия поступательного движения молекул, а n – концентрация молекул (их число в единице объема).

• Средняя кинетическая энергия одной молекулы $\langle E \rangle = \frac{i}{2} k_{\text{Б}} T$,

где T – абсолютная температура; i – сумма числа поступательных, вращательных и удвоенного числа колебательных степеней свободы молекулы $k_{\text{Б}} = R / N_A = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К – постоянная Больцмана. Для одноатомных газов i = 3, для двухатомных i = 5 при обычных условиях, но может равняться 3 (при низких температурах) или 7 (при высоких).

• Зависимость давления газа от концентрации молекул и температуры $p = n k_{\text{Б}} T$.

• Средняя квадратичная скорость молекулы

$$\sqrt{\langle v_{\text{кв}}^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3kT}{m_1}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}},$$

где m_1 – масса одной молекулы.

• Нормальные условия идеального газа:
давление p = 1 атм = 760 мм рт. ст. = 101,3 кПа;
температура $T = 0^{\circ}$C = 273 К.

• Закон Авогадро: 1 моль идеального газа при нормальных условиях занимает объем $V_m = 22{,}4\,10^{-3}$м^3, т.е. молярный объем $V_m = 22{,}4$ л.

• Параметры состояния газа, находящегося в состоянии термодинамического равновесия, связаны между собой **уравнением состояния**: $f(p, V, T, m, \mu) = 0$.

• Уравнение Клапейрона – Менделеева: $pV = \frac{m}{\mu}RT$,

где R – универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/моль К, m – масса газа, μ – молярная масса.

• Закон Дальтона: $p = \sum_i p_i$, где p – давление смеси газов, p_i – парциальное давление i-го компонента смеси.

2.2.2. Методические рекомендации по решению задач

Пример 2.2.1. *Определить среднюю кинетическую энергию* $\langle E_{\text{вращ}} \rangle$ *вращательного движения одной молекулы кислорода при температуре* T = 286 К, *а также кинетическую энергию* $W_{\text{вращ}}$ *вращательного движения всех молекул этого газа*, *если его масса* $m = 4$ г.

Решение. Известно, что на каждую степень свободы молекул газа приходится одинаковая средняя энергия $k_{\text{Б}}T/2$. Так как молекула кислорода является двухатомной, а, следовательно, обладает двумя вращательными степенями свободы, то средняя кинетическая энергия вращательного движения молекулы кислорода

$$\langle E_{\text{вращ}} \rangle = 2\frac{1}{2}k_{\text{Б}}T = k_{\text{Б}}T .$$

Подставив в эту формулу значения $k_{\text{Б}}$ и T, получим

$$\langle E_{\text{вращ}} \rangle = 1{,}38 \cdot 10^{-23} \times 286 = 3{,}95 \cdot 10^{-21} \text{ Дж.}$$

Средняя кинетическая энергия вращательного движения всех молекул газа выражается соотношением $W_{\text{вращ}} = N\langle E_{\text{вращ}} \rangle$, где число молекул газа $N = N_{\text{А}}\frac{m}{\mu}$. В результате находим

$$W_{\text{вращ}} = N_{\text{А}}\frac{m}{\mu}\langle E_{\text{вращ}} \rangle = 6{,}02 \cdot 10^{23} \times \frac{4 \cdot 10^{-3}}{32 \cdot 10^{-3}} \times 3{,}95 \cdot 10^{-21} = 297 \text{ Дж.}$$

Пример 2.2.2. *В баллоне находится азот под давлением* 200 кПа. *Концентрация молекул* $4{,}1\cdot10^{25}$м$^{-3}$. *Определить среднюю энергию, приходящуюся на одну степень свободы. Результат представить в электрон-вольтах* (эВ*)*.

Решение. Средняя энергия молекул газа вычисляется по формуле $\langle E\rangle = \frac{i}{2}k_{\text{Б}}T$, где i – сумма поступательных, вращательных и удвоенного числа колебательных степеней свободы. Молекула азота содержит два атома, поэтому i = 5 (колебательные степени свободы являются «замороженными»). На одну степень свободы приходится $\frac{1}{2}\,kT$. Основное уравнение молекулярно-кинетической теории газов связывает давление с температурой $p = nkT$. Поэтому $\frac{1}{2}\,kT = \frac{p}{2n} = 0{,}24\cdot10^{-20}$ Дж. Так как 1 эВ = $1{,}6\cdot10^{-19}$ Дж, то $\langle E_{\text{ст}}\rangle = 0{,}015$ эВ.

Пример 2.2.3. Определить число степеней свободы молекул газа, если при нормальных условиях плотность газа равна ρ = 1,3 г/см^3 и скорость распространения звука в нем v = 330 м/с.

Решение. Скорость звуковых волн в газе равна $v = \sqrt{\gamma\frac{p}{\rho}}$, где p и ρ – давление, и плотность невозмущенного волной газа. Показатель адиабаты $\gamma = \frac{i+2}{i}$, где i – число степеней свободы. Следовательно, $v = \sqrt{\frac{i+2}{i}\,\frac{p}{\rho}}$, откуда находим $i = 2\ /\ (\frac{\rho v^2}{p} - 1)$. Нормальные условия предполагают, что $p = 10^5$ Па. Таким образом, подставляя численные значения, находим i = 5.

Пример 2.2.4. *Смесь кислорода и азота находится в сосуде под давлением* $p = 1$ МПа. *Определить парциальное давление и* p_{O_2} *газов*, p_{N_2} *если масса кислорода составляет* 20 % *массы смеси*.

Решение. Каждый компонент смеси подчиняется уравнению Клапейрона – Менделеева: $P_{O_2}V = \nu_{O_2}RT$; $P_{N_2}V = \nu_{N_2}RT$. Объем и температура компонент смеси одинаковы. Парциальные давления оказываются пропорциональны количествам вещества компонент смеси, выражаемых в молях. Массы компонент смеси равны:

$m_{O_2} = \mu_{O_2} \nu_{O_2}$; $m_{N_2} = \mu_{N_2} \nu_{N_2}$. Соответственно отношение количеств вещества компонент смеси равно:

$$\nu_{N_2} / \nu_{O_2} = m_{N_2} \mu_{O_2} / m_{O_2} \mu_{N_2} = 80\,\% \cdot 32 / 20\,\% \cdot 28 = 32/7 = 4{,}56.$$

Здесь подставлены молярные массы кислорода (32 г/моль) и азота (28 г/моль). Тому же числу будет равно и отношение парциальных давлений $P_{N_2} / P_{O_2} = 32/7 = 4{,}56$. С другой стороны, сумма парциальных давлений тоже известна: $P_{N_2} + P_{O_2} = 1$ МПа. Решая систему из двух уравнений с двумя неизвестными, находим

$$P_{O_2} = (7/39)\ \text{МПа} = 0{,}18\ \text{МПа};\ P_{N_2} = (32/39)\ \text{МПа} = 0{,}82\ \text{МПа}.$$

Пример 2.2.5. *Воздушный пузырек на дне озера глубиной* $H = 16$ м *имеет объем* $V_1 = 1$ мм^3. *Температура на дне равна* $T_1 = 5^\circ$C, *а на поверхности* $T_2 = 16^\circ$C. *Определите объем пузырька* V_2 *в тот момент, когда он достигнет поверхности воды*.

Решение. Запишем уравнение Клапейрона – Менделеева для пузырька возле дна озера (где давление равно атмосферному $P_A = 101$ кПа плюс гидростатическому $\rho g H$) и у поверхности (там давление атмосферное): $(P_A + \rho g H) V_1 = \nu R T_1$; $P_A V_2 = \nu R T_2$. Разделив первое уравнение на второе, получаем

$$(1 + \rho g H / P_A)\,(V_1 / V_2) = T_1 / T_2.$$

Из последнего уравнения выражаем объем V_2:

$$V_2 = V_1\,(1 + \rho g H / P_A)\,(T_2 / T_1) = 2{,}7\ \text{мм}^3.$$

Пример 2.2.6. *В баллоне содержится* 5 кг *кислорода при давлении* $3 \cdot 10^5$ Па *и температуре* 300 К. *Каким стало давление в баллоне, когда было израсходовано* 2 кг *кислорода, а температура увеличилась на* 20°C?

Решение. Запишем уравнение Клапейрона – Менделеева двух случаев до расходования кислорода: $p_1 V = \frac{m_1}{\mu} R T_1$ и после:

$$p_2 V = \frac{m_2}{\mu} R T_2.$$

Учитывая, что $m_2 = m_1 - \Delta m$ и $T_2 = T_1 + \Delta T$, разделим почленно уравнения Клапейрона – Менделеева для начального и конечного состояний:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{m_1 T_1}{(m_1 - \Delta\text{m})(T_1 + \Delta\text{T})}.$$

Таким образом, $p_2 = p_1 \frac{(m_1 - \Delta\text{m})}{m_1} \frac{(T_1 + \Delta\text{T})}{T_1} = 1{,}92\ 10^5$ Па.

Пример 2.2.7. *Оценить число ударов молекул о единицу площади поверхности в единицу времени при нормальном давлении воздуха и нормальной температуре.*

Решение. Важнейшее слово – «оценить»! Не вычислять точно, а оценить по порядку величины. Для простоты будем считать, что все молекулы имеют одинаковые значения проекций их скорости на ось, перпендикулярную поверхности, равные их среднему значению $\langle V_x \rangle$. Очевидно, что половина молекул летит в сторону поверхности, а половина – в обратном направлении. Соответственно за время dt с поверхностью площади S столкнётся половина из числа молекул, находившихся изначально в слое толщины $dl = \langle V_x \rangle\, dt$ вблизи поверхности соударения:

$$dN = nS \langle V_x \rangle\, dt / 2,$$

где n – количество молекул в единице объема. Из основного закона МКТ можно найти значение плотности числа молекул $n = p/kT$. Среднюю скорость молекулы вдоль оси X можно найти, зная, что на каждую степень свободы движения (в частности, на поступательное движение вдоль оси X) приходится одинаковая энергия: $m \langle V_x \rangle^2 / 2 = kT / 2 \Rightarrow \langle V_x \rangle = (kT/m)^{1/2}$. Здесь $m = Am_{ат}$ – масса одной молекулы, равная атомной единице массы, умноженной на массовое число молекулы A. Для воздуха, например, $A = 29$. В расчете на единицу времени и площади поверхности, число ударов составит

$$dN / Sdt = n \langle V_x \rangle / 2 = n(kT/m)^{1/2} / 2.$$

Выразим плотность числа молекул из параметров газа: $n = p/kT$ и получаем (для $P = 10^5$ Па, $T = 273$ К):

$$dN / Sdt = n(kT/m)^{1/2} / 2 = p/2(kTm)^{-1/2} = \sim 4 \cdot 10^{27}\ \text{с}^{-1} \cdot \text{м}^{-2}.$$

Можно подойти к решению этой задачи и с другой стороны. По второму закону Ньютона, сила, с которой газ действует на стенку в направлении X, равна передаваемому ей в единицу времени импульсу: $F_x = dP_x / dt$.

При упругом ударе молекулы о стенку, перпендикулярную направлению X, компонента ее импульса, продольная X, меняет знак на обратный (молекула упруго «отскакивает» от стенки). Стенка при каждом ударе в среднем получает импульс

$$\Delta p_x = 2m \langle v_x \rangle = 2(kTm)^{-1/2}.$$

Умножив эту величину на число ударов молекул в единицу времени о стенку, найдем силу F_x. Поделив силу на площадь

стенки, находим давление: $p = 2m\langle v_x\rangle\, dN / Sdt$. Отсюда выражаем число ударов молекул о стенку в единицу времени и в расчете на единицу площади стенки молекулы к стенке импульса:

$$dN / Sdt = P / 2m\langle v_x\rangle = P / 2(kTm)^{-1/2} = \sim 4\cdot 10^{27}\text{с}^{-1}\cdot\text{м}^{-2}.$$

Пример 2.2.8. *Средняя кинетическая энергия молекул газа при температуре T зависит от их структуры, что связано с возможностью различных видов движения атомов в молекуле. Определить среднюю кинетическую энергию атомов гелия* (He).

Решение. Внутренняя энергия молекул идеального газа U складывается из: 1) энергии поступательного движения; 2) энергии вращательного движения; 3) энергии колебательного движения:

$$U = \frac{i}{2}RT,$$

где i – *эффективное* число степеней свободы $i = i_{\text{пост}} + i_{\text{вр}} + 2i_{\text{кол}}$. Согласно закону Больцмана о равнораспределении энергии по степеням свободы средняя энергия одной молекулы будет равна $\langle E\rangle = \frac{i}{2}k_{\text{Б}}T$. Так как гелий (He) одноатомный газ, то $I = 3$ и $\langle E\rangle_{\text{He}} = \frac{3}{2}k_{\text{Б}}T$.

Пример 2.2.9. *Давление в автомобильной шине объемом* $V = 0{,}3$ м^3 *равно* $p_0 = 1{,}5$ атм. *Шина накачивается насосом с емкостью хода поршня* $v = 3\times 10^{-3}$ м^3 *до давления* $p_N = 2$ атм. *Сколько ходов поршня N потребуется, если процесс накачки происходит достаточно медленно, так что система сохраняет температуру окружающей среды. Атмосферное давление принять равным* $p_a = 1$ атм.

Решение. Сначала из уравнения состояния определяем массу воздуха, перекачиваемую за один ход поршня в шину: $\Delta m = p_a v\frac{\mu}{RT_0}$, где T_0 – температура окружающей среды. Аналогично начальная масса воздуха в шине равна $m_0 = p_a V\frac{\mu}{RT_0}$. После N ходов поршня масса воздуха в шине станет равной

$m_N = m_0 + N\Delta m = (p_0 V + N p_a v)\dfrac{\mu}{RT_0}$, а давление в ней определится из уравнения состояния $p_N V = \dfrac{m_N}{\mu} RT_0$, откуда получаем $p_N = p_0 + N p_a \dfrac{v}{V}$. Из этого уравнения уже нетрудно найти число ходов поршня: $N = \dfrac{p_N - p_0}{p_a}\dfrac{V}{v}$. Подставляя числовые данные, учтем, что в данном случае нет необходимости переводить атмосферы в паскали, поскольку в ответ входит только безразмерная комбинация давлений: $N = \dfrac{2-1{,}5}{1} \times \dfrac{0{,}3}{3\cdot 10^{-3}} = 50.$ Отметим, что результат не зависит от температуры T_0.

Пример 2.2.10. *В подземной полости радиусом* $r = 100$ м *проводится подземное испытание ядерного оружия мощностью* 50 килотонн. *Оценить давление газа в полости и минимальную глубину испытательной шахты, чтобы продукты взрыва не вырвались наружу.*

Решение. Для решения задачи в приведенной формулировке нам пока не хватает данных. Сначала надо найти полную энергию газа, образовавшегося при взрыве. Намек на ее величину содержится в указании так называемого тротилового эквивалента. По традиции энергию взрыва сравнивают с энергией взрыва тротила (тола). Энергия W взрыва 50-килотонной бомбы эквивалентна энергии взрыва $5\cdot 10^4$ т $= 5\cdot 10^7$ кг тротила. В справочнике находим, что энергия взрыва 1 кг тротила равна 4,2 МДж. Таким образом, при взрыве этой бомбы выделяется энергия $W = 4{,}2\cdot 10^6 \times 5\cdot 10^7 = 2{,}1\cdot 10^{14}$ Дж. Поскольку взрыв происходит в полости, будем считать, что вся эта энергия превратилась в кинетическую энергию продуктов взрыва. Будем считать, что продукты взрыва представляют из себя одноатомный газ. Средняя кинетическая энергия каждого атома равна, с одной стороны, $< E >= 3k_Б T/2$ (где T – температура этого газа), а с другой – она равна энергии взрыва, поделенной на число атомов образовавшегося газа $<E> = W/\nu N_A$, где ν – количество молей

образовавшегося газа. Так как нам известен объем полости $V = 4\pi r^3 / 3 \approx 4,2 \cdot 10^6$ м^3, то величину давления в ней находим с помощью уравнения Клапейрона – Менделеева:

$$P = vRT / V = vk_Б N_A T / V = 2vN_A < E > /3V = 2W / 3V = 3,1 \cdot 107 \text{ Па.}$$

Получим теперь ответ на второй вопрос задачи. Газы не вырвутся наружу, если внешнее давление породы над полостью превышает давление продуктов взрыва. Внешнее давление можно оценить по известной формуле гидростатики: $p_{внеш} = \rho g h$, где ρ –плотность породы. В справочнике находим, например, плотность гранита $\rho = 2600$ кг/м^3, которую можно взять за основу оценки. Из равенства $p = p_{внеш}$ находим минимальную глубину шахты h:

$$h = \frac{p}{\rho g} = \frac{3,1 \cdot 10^7}{2,6 \cdot 10^3 \times 9,8} \approx 1,2 \text{ км.}$$

Пример 2.2.11. *В большой сосуд с водой был опрокинут цилиндрический сосуд* (*рис.* 2.2.1). *Уровни воды внутри и вне цилиндрического сосуда находятся на одинаковой высоте. Расстояние l от уровня воды до дна опрокинутого сосуда равно* 40 см. *На какую высоту* Δh *поднимается вода в цилиндрическом сосуде при понижении температуры от* $T_1 = 310$ К *до* $T_2 = 273$ К? *Атмосферное давление нормальное.*

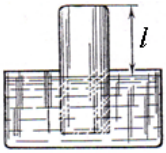

Рис. 2.2.1

Решение. Давление воздуха p_1 в цилиндрическом сосуде до понижения температуры уравнивается атмосферным давлением p_0:

$$p_0 = p_1 \qquad (2.2.1)$$

После понижения температуры атмосферное давление уравнивается суммой двух давлений: p_2 воздуха в сосуде и Δp, создаваемого столбом воды высотой Δh:

$$p_0 = p_2 + \Delta p = p_2 + \rho g \Delta h \,. \qquad (2.2.2)$$

Приравняв правые части формул (2.2.1) и (2.2.2) и выразив p_2, найдем

$$p_2 = p_1 - \rho g \Delta h \,. \qquad (2.2.3)$$

Давление, объем и температура воздуха в цилиндре связаны с уравнением газового состояния:

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2} \text{ или } \frac{p_1 S h_1}{T_1} = \frac{p_2 S h_2}{T_2} \,.$$

Сократив на S, получим $p_1 h_1 / T_1 = p_2 h_2 / T_2$.

Подставив сюда выражение p_2 по формуле (2.2.3), а также учтя, что $h_2 = h_1 - \Delta h$, после преобразования найдем

$$\Delta h^2 - \left(h_1 + \frac{p}{\rho g} \right) \Delta h + \frac{p_1 h_1}{\rho g} \left(1 - \frac{T_2}{T_1} \right) = 0 \,.$$

Решив это квадратное уравнение и отбросив второе значение Δh, не имеющее физического смысла, получим $\Delta h = 4{,}5$ см.

2.2.3. Задачи для самостоятельной работы

Задача 2.2.1. В сосуде объемом V = 0,01 м^3 при температуре $T = 280$ К содержится смесь газов – азота массой $m_1 = 7$ г и водорода массой $m_2 = 1$ г. Определить давление смеси газов. ($p = 175$ кПа)

Задача 2.2.2. Баллон объемом V = 30 л: содержит смесь водорода и гелия при температуре T = 300 К и давлении $p = 831$ кПа масса смеси равна m = 24 г. Определить массу водорода m_1 и массу гелия m_2. (m_1 = 16 г, m_2 = 8 г)

Задача 2.2.3. Определить концентрацию n молекул идеального газа при температуре T = 300 К и давлении p = 1 мПа. ($n = 2{,}42 \cdot 10^{17}$ м$^{-3}$)

Задача 2.2.4. Воздушный пузырек на дне озера глубиной 16 м имеет объем 1 см^3. Температура на дне равна 5° С, а на поверхности – 16° С. Определите объем пузырька в тот момент, когда он достигнет поверхности воды. (2,7 см^3)

Задача 2.2.5. Определить давление p идеального газа при двух значениях температуры газа: *а*) T = 3 К и *б*) T = 1000 К. Концентрация молекул газа $n = 10^{19}$ см$^{-3}$. (*а*) p = 414 Па; *б*) $p = 138$ кПа)

Задача 2.2.6. Кубический сосуд объемом $8{,}0 \cdot 10^{-3}$ м^3 заполнен воздухом при атмосферном давлении и температуре 20° С. Сосуд закрыт и нагрет до температуры 150° С. Какая результирующая сила будет действовать на каждую из граней кубического сосуда? (5,8 кН)

Задача 2.2.7. Какое количество N молекул находится в комнате объемом V = 50 м^3 при температуре T = 300 К и давлении $p = 10^5$ Па? ($N = 1{,}2 \cdot 10^{27}$)

Задача 2.2.8. Аквалангист, находясь на глубине 12 м от поверхности воды, вдохнул воздух и заполнил весь объем своих легких, равный 5,5 л. До какого объема расширятся его легкие, если он быстро выпрыгнет на поверхность? Благоразумно ли поступать таким образом? (до ~ 12 л; очень неразумно)

Задача 2.2.9. Самое низкое давление, получаемое с помощью самой совершенной вакуумной техники, приблизительно равно 10^{-12} Н/м^2. Сколько молекул содержится при таком давлении в 1 см^3 при температуре 0°С? (~ 260 молекул)

Задача 2.2.10. Дом имеет объем 600 м^3. 1) Какова масса воздуха внутри дома при температуре 0°С? 2) Если температура повысилась до 25°С, то какая масса воздуха войдет в дом или выйдет из него? (1) ~ 770 кг; 2) ~ 65 кг выйдет из дома)

Задача 2.2.11. Баллон содержит азот массой m = 2 г при температуре T = 280 К. Определить суммарную кинетическую энергию $W_{\text{пост}}$ поступательного движения всех молекул газа. ($W_{\text{пост}}$ = 249 Дж)

Задача 2.2.12. Чему равна кинетическая энергия W молекул двухатомного газа, заключенного в сосуд объемом V = 2 л и находящегося под давлением $p = 1{,}5 \cdot 10^5$ Па? (W = 750 Дж)

Задача 2.2.13. Определить энергию теплового движения молекул метана CH_4, находящихся в баллоне объемом 5 л при

давлении 4,9 кПа. Какую часть этой энергии составляет энергия вращательного движения (колебательное движение «заморожено») (74 Дж; 37 Дж)

Задача 2.2.14. Давление газа p = 1 мПа, концентрация молекул этого газа $n = 10^{10}$ см$^{-3}$. Определить температуру газа T и среднюю кинетическую энергию $\langle E_{\text{пост}} \rangle$ поступательного движения молекул газа. Выразить последнюю в джоулях и электрон-вольтах. (T = 7,25 кК, $\langle E_{\text{пост}} \rangle = 1{,}5 \cdot 10^{-19}$ Дж = 0,94 эВ)

Задача 2.2.15. Определить среднее значение $\langle E \rangle$ полной кинетической энергии одной молекулы гелия, кислорода и водяного пара при температуре T = 400 К. Результат выразить в джоулях и электрон-вольтах. ($\langle E_{\text{He}} \rangle = 8{,}28 \cdot 10^{-21}$ Дж = 52 мэВ; $\langle E_{\text{O}_2} \rangle = 1{,}38 \cdot 10^{-20}$ Дж = 86 мэВ; $\langle E_{\text{H}_2\text{O}} \rangle = 1{,}66 \cdot 10^{-20}$ Дж = 103 мэВ)

Задача 2.2.16. Определить кинетическую энергию $\langle E_1 \rangle$, приходящуюся в среднем на одну степень свободы молекулы азота при температуре T = 1 кК, а также среднюю кинетическую энергию $\langle E_{\text{пост}} \rangle$ поступательного движения, $\langle E_{\text{вращ}} \rangle$ вращательного движения и среднее значение полной кинетической энергии $\langle E \rangle$ молекулы. Результаты выразить в джоулях и электрон-вольтах. ($\langle E_1 \rangle = 6{,}9 \cdot 10^{-21}$ Дж = 43 мэВ; $\langle E_{\text{пост}} \rangle = 20{,}7 \cdot 10^{-21}$ Дж = 129 мэВ; $\langle E_{\text{вращ}} \rangle = 13{,}8 \cdot 10^{-21}$ Дж = 86 мэВ; $\langle E_1 \rangle = 34{,}5 \cdot 10^{-21}$ Дж = 215 мэВ)

Задача 2.2.17. При какой температуре средняя кинетическая энергия $\langle E_{\text{пост}} \rangle$ поступательного движения молекул газа равна 25,8 мэВ? (T = 200 К)

Задача 2.2.18. Определить количество вещества ν и число N молекул газа, содержащегося в колбе объемом $V = 240$ см^3 при температуре T = 290 К и давлении p = 50 кПа. ($\nu = 4{,}98$ моль; $N = 3 \cdot 10^{21}$)

Задача 2.2.19. Имеются два сосуда с одним и тем же газом при одинаковой температуре. Плотность газа в первом сосуде $\rho_1 = 80$ кг/м^3, во втором $\rho_2 = 20$ кг/м^3. Определите, какая плотность газа ρ будет

в сосуде, если их соединить. Объем первого сосуда в n = 3 раза меньше объема второго. (ρ = 35 кг/м^3)

0Задача 2.2.20. Определить среднюю кинетическую энергию $\langle E \rangle$ одной молекулы водяного пара при температуре T = 500 К. Результат выразить в джоулях и электрон-вольтах. ($\langle E \rangle = 20{,}7 \cdot 10^{-21}$ Дж = 129 мэВ)

Задача 2.2.21. Космический корабль, возвращающийся с Луны, входит в атмосферу Земли со скоростью около 40000 км/час. Молекулы (предположим, что это азот) ударяются о нос космического корабля с такой же скоростью. Какой температуре соответствует эта скорость движения молекул? ($T \sim 140$ кК)

Задача 2.2.22. Оцените число ударов молекул воздуха о поверхность оконного стекла площадью $\Delta S = 1$ м^2 со стороны комнаты за интервал времени $\Delta t = 1$ с. Температура воздуха в классе $t = 27^\circ$ С, давление $p = 10^5$ Па, молярная масса воздуха $\mu = 29$ г/моль . ($\sim 4 \cdot 10^{27}$ с$^{-1}$м$^{-2}$)

Задача 2.2.23. Три баллона емкостью $V_1 = 3$ л, $V_2 = 7$ л и $V_3 = 5$ л наполнены, соответственно, кислородом при давлении $p_1 = 0{,}2$ МПа, азотом – при $p_2 = 0{,}3$ МПа и углекислым газом при p_3 = 0,6 МПа. Температура газов одинакова. Баллоны соединяют между собой. Каково давление смеси после установления исходной температуры? (0,38 МПа)

Задача 2.2.24. В сосуде содержится смесь газов – азота массой $m_1 - 7$ г и водорода массой $m_2 = 1$ г; температура в сосуде – $T = 280$ К, давление p = 15 кПа. Определить плотность смеси газов. (0,07 кг/м^3)

Задача 2.2.25. Два баллона соединены трубкой с краном. В первом газ находится при давлении $p_1 = 0{,}1$ МПа, во втором – при $p_2 = 60$ кПа. Объем первого баллона $V_1 = 1$ л, второго $V_2 = 3$ л. Какое давление устанавливается в баллонах, если открыть кран? Процесс изотермический. (70 кПа)

2.3. Термодинамика идеального газа

2.3.1. Основные понятия, законы и формулы

• Первое начало термодинамики (закон сохранения энергии): для бесконечно малых изменений $\delta Q = dU + dA$. т.е. при получении системой количества теплоты δQ (количество теплоты – количественная мера энергии хаотического движения молекул, переданная от одной системы другой) часть ее тратится на изменение внутренней энергии dU, а остаток – на совершение работы dA (работа – мера механической энергии переданной от одной системы к другой). При конечных изменениях параметров системы $Q_{1->2} = \Delta U_{12} + A_{1->2}$, где $Q_{1\to2}$ и $A_{1\to2}$ – количество полученной теплоты и совершенная работа при переходе системы из состояния 1 в состояние 2. Эти величины зависят от пути перехода. Величина ΔU_{12} есть изменение внутренней энергии системы; оно зависит только от начального 1 и конечного 2 состояний системы, но не от способа перехода от одного к другому.

• Внутренняя энергия идеального газа

$$U = \frac{i}{2}\frac{m}{\mu}RT = \frac{i}{2}pV = \frac{pV}{\gamma - 1},$$

где i – эффективное число степеней свободы; μ – молярная масса газа; $\gamma = 1 + 2 / i$ – показатель адиабаты.

• Работа газа: $A = \int_1^2 pdV$, где интеграл берется от начального до конечного состояния процесса.

• Изохорный процесс: V = const, $A_{1->2} = 0$;

$$Q_{1\to2} = U_{12} = \frac{V(p_2 - p_1)}{\gamma - 1} = \frac{m}{\mu}R\frac{(T_2 - T_1)}{\gamma - 1}.$$

• Изобарный процесс: p = const. Работа, совершаемая газом

$$A_{1\to2} = p(V_2 - V_1) = \frac{m}{\mu}R(T_2 - T_1).$$

Изменение внутренней энергии:

$$U_{12} = \frac{p(V_2 - V_1)}{\gamma - 1} = \frac{m}{\mu} R \frac{(T_2 - T_1)}{\gamma - 1}.$$

Количество теплоты, переданное газу:

$$Q_{1\to 2} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} p(V_2 - V_1) = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{m}{\mu} R(T_2 - T_1).$$

• Изотермический процесс: T = const. Работа, совершаемая газом:

$$A_{1\to 2} = \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{V_2}{V_1} = \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{p_1}{p_2}.$$

Изменение внутренней энергии $U_{12} = 0$. Количество теплоты, переданное газу: $Q_{1\to 2} = A_{1\to 2}$.

• Адиабатный процесс: $\delta Q = 0$. Уравнение Пуассона для адиабатного процесса $pV^{\gamma} = \text{const}$, или $TV^{\gamma-1} = \text{const}$.

Работа, совершаемая газом при адиабатном расширении:

$$A_{1\to 2} = \frac{p_1 V_1 - p_2 V_2}{\gamma - 1} = \frac{m}{\mu} R \frac{T_1 - T_2}{\gamma - 1} = \frac{m}{\mu} \frac{RT_1}{\gamma - 1} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma - 1} \right].$$

Изменение внутренней энергии: $U_{12} = -A_{1\to 2}$

• Политропный процесс – процесс, при котором теплоемкость остается постоянной. Уравнение политропного процесса: $pV^n = \text{const}$, где n – показатель политропы. Все вышеперечисленные изопроцессы являются частными случаями политропного (табл.2.3.1)

Таблица 2.3.1

Процесс	**Показатель политропы**
Изотермический	$n = 1$
Изохорный	$n = +/-\infty$
Изобарный	$n = 0$
Адиабатный	$n = \gamma$

Работа, совершаемая газом при политропном расширении в общем случае (кроме изотермического процесса), определяется той же формулой, что и в адиабатном процессе, с заменой показателя γ на n.

• Теплоемкость системы $C = dQ / dT$ определяет, сколько джоулей тепла должна получить (отдать) система, чтобы увеличить (уменьшить) температуру на 1 К. Теплоемкость зависит от: 1) свойств системы, 2) количества вещества в ней, 3) совершаемого процесса.

• Теплоемкость адиабатического процесса равна нулю ($dQ = 0$). Теплоемкость изотермического процесса бесконечна ($dT = 0$).

• Молярная теплоемкость c_m – теплоемкость одного моля вещества, удельная теплоемкость c – теплоемкость единицы массы вещества. Связь между ними дается соотношением $c_m = \mu c$

• Молярные теплоемкости:

при постоянном объеме

$$c_{m,V} = \frac{R}{\gamma - 1} = \frac{i}{2}R, \;\; c_V = \frac{i}{2}\frac{R}{\mu},$$

при постоянном давлении

$$c_{m,p} = \frac{\gamma}{\gamma - 1}R = \frac{i+2}{2}R, \;\; c_V = \frac{i+2}{2}\frac{R}{\mu},$$

• Уравнение Майера для разности молярных теплоемкостей:

$$c_{m,p} - c_{m,V} = R$$

• Показатель адиабаты $\gamma = c_{m,p} / c_{m,V} = c_p / c_V = 1 + 2 / i.$

• Показатель политропы

$$n = \left(c_{m,p} - c_{m,n}\right) / \left(c_{m,V} - c_{m,n}\right) = \left(c_p - c_n\right) / \left(c_V - c_n\right).$$

Здесь – $c_{m,n}$ и c_n – соответственно молярная и удельная теплоемкости процесса с показателем политропы n.

2.3.2. Методические рекомендации по решению задач

Пример 2.3.1. *Сколько теплоты поглощают* m = 200 г *водорода, нагреваясь от* $T_1 = 0^\circ\mathrm{C}$ *до* $T_2 = 100^\circ\mathrm{C}$ *при постоянном*

давлении? *Каков прирост внутренней энергии газа*? *Какую работу совершает газ*?

Решение. Теплота Q, поглощаемая газом при изобарическом нагревании, определяется по формуле $Q = mc_p\,(T_2 - T_1)$, где m – масса нагреваемого газа, c_p – удельная теплоемкость газа при постоянном давлении. Как известно,

$$c_p = \frac{i+2}{2\mu}R,$$

где i – эффективное число степеней свободы молекулы газа; μ – масса моля газа. Подставив выражение для c_p в формулу для Q, получим

$$Q = \frac{m}{\mu}R\frac{i+2}{2}\Delta T = \frac{0,2}{2\cdot 10^{-3}}\times 8,31\times\frac{5+2}{2}\times 100 = 291 \text{ кДж}.$$

Внутренняя энергия газа выражается формулой

$$U = \frac{i}{2}\frac{m}{\mu}RT,$$

так что ее изменение равно 0.

Пример 2.3.3. *В комнате объемом* $V = 75$ м^3 *находится двухатомный газ* (*воздух*) *при температуре* $t_1 = 12^\circ$ С ($T_1 = 285$ К). *Включают обогреватель и поднимают температуру воздуха до* $t_2 = 22^\circ$ С ($T_2 = 295$ К). *Поскольку комната не герметизирована, давление газа остается все время постоянным* $p = 100$ кПа. *Найти изменение внутренней энергии газа в комнате. Какая энергия была потрачена на обогрев окружающей среды*?

Решение. Ответ несколько неожиданный: с одной стороны, внутренняя энергия газа в комнате не изменилась, поскольку остались прежними и его давление, и объем. С другой стороны, часть газа из комнаты вышла: если вначале там содержалось $\nu_1 = pV / RT_1 = 75\times 10^5 / \left(8,31\times 285\right) = 3166,76$ молей вещества, то после подогрева осталось лишь $\nu_2 = pV / RT_2 = 75\times 10^5 / (8,31\times 295) = 3059,41$. На улицу вышло $\delta\nu = \nu_1 - \nu_2 = 107,35$ молей воздуха или 100 % $\left(\Delta\nu / \nu_1\right) = 3,39$ % его начального количества. Подсчитаем, сколько энергии ушло на

«обогрев» улицы. Условно разобьем весь процесс на два этапа (на самом деле они происходят одновременно, но это не меняет сути дела). На первом этапе мы обогреваем герметичную комнату. Начальная внутренняя энергия газа $U_1 = pV/(\gamma - 1) = 75 \times 10^5 / 0,4 = 18,75$ МДж. Поскольку внутренняя энергия пропорциональна температуре, после нагрева герметичной комнаты она становится равной $U_2 = U_1(T_2/T_1) = 18,75 \times (295/285) = 19,408$ МДж, то есть от печки получена энергия $\Delta U = U_2 - U_1 = 0,658$ МДж. На втором этапе мы удаляем из комнаты 3,39 % подогретого воздуха, и вместе с ним ту же долю энергии. Удаляемая энергия $0,0339 \times U_2 = 0,0339 \times 19,408 = 0,658$ МДж в точности равна энергии, полученной от печки. Иным путем мы снова пришли к тому же выводу.

Итак, теперь ясно, что ушедший на улицу воздух унес с собой *всю* энергию, полученную от печки. В чем же тогда роль печки? Стоило ли ее вообще включать, если она обогревает только улицу? Полезный эффект печки состоит в том, что та же полная внутренняя энергия распределена между меньшим количеством молекул. Значит, возросла средняя энергия, приходящаяся на одну молекулу. По теореме о равнораспределении энергии возрастает и средняя энергия молекул тел, находящихся в комнате. Стало быть, повысится их температура (затраты энергии на это в решении не учитывались).

Пример 2.3.4. *Из скольких атомов состоят молекулы газа, если при «замораживании» колебательных степеней свободы показатель адиабаты* γ *увеличивается в* 1,2 раза?

Решение. Показатель адиабаты равен $\gamma = 1 + 2/i$,
где $i = 3 + n_{вр} + 2\,n_{кол}$; 3 – число поступательных степеней свободы, $n_{вр}$ – число вращательных степеней свободы (2 – для двухатомной молекулы или 3 – для трехатомной); $n_{кол}$ – число колебательных степеней свободы (1 – для двухатомной молекулы, $3n - 6$ – для n-атомной). В нашем случае отношение нового показателя адиабаты к старому равно: $(1 + 2/(3 + n_{вр})) / (1 + 2/(3 + n_{вр} + 2n_{кол})) = 1,2$. Для 2-атомной молекулы получится $(1+2/5)/(1+2/7) = 49/45 < 1,2$.

Для *n*-атомной молекулы, если подставить значения числа колебательных степеней свободы, получится (4*n* – 4) / (3*n* – 2). Эта величина равна 1,2 (6 / 5) при *n* = 4. Газ – четырехатомный.

Пример 2.3.5. *Пусть система получила при постоянном давлении определенное количество теплоты Q. Какая часть расходуется на совершение работы A, а какая – на увеличение внутренней энергии газа*? *Как ответ зависит от вида используемого газа*?

Решение. Из соотношения для работы при постоянном давлении $A_{1\to 2|p=\text{const}} = p\left(V_2 - V_1\right) = \dfrac{m}{\mu} R\left(T_2 - T_1\right)$

следует, что $A_{1\to 2|p=\text{const}} = \dfrac{\gamma - 1}{\gamma} Q_{1\to 2|p=\text{const}}$, $U_{12|p=\text{const}} = \dfrac{1}{\gamma} Q_{1\to 2|p=\text{const}}$. Чем больше γ, тем большая часть тепла переходит в работу: для одноатомных газов $A = 2Q/5 = 0,4Q$, для двухатомных $A = 2Q/7 \approx 0,286Q$ и для многоатомных газов $A = Q/4 = 0,25Q$.

Пример 2.3.6. *Горючая смесь в двигателе Дизеля воспламеняется при температуре* $T_2 = 1100$ К. *Начальная температура смеси* $T_1 = 350$ К. *Во сколько раз нужно уменьшить объем смеси при сжатии, чтобы она воспламенилась*? *Сжатие считать адиабатным. Показатель адиабаты для смеси* $\gamma = 1,4$.

Решение. Удобнее воспользоваться уравнением адиабатного процесса в форме $T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1}$. Отсюда сразу следует выражение для степени сжатия горючей смеси:

$$\frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{1/\gamma-1} = \left(\frac{1100}{350}\right)^{5/2} \approx 17,5.$$

Пример 2.3.7. *Газовый процесс происходит по закону* $PV^2 = \text{const}$. *Является ли теплоемкость постоянной величиной в данном процессе*? *Если да – определите показатель политропы n, величину молярной теплоемкости* c_n *и найдите величину работы газа A при расширении от объема* V_1 *до объема* V_2.

Решение. Уравнение политропного процесса (процесса с постоянной теплоемкостью) имеет вид: $PV^n = \text{const}$. Следовательно, наш процесс, безусловно, политропный с показателем политропы *n* = 2.

Теплоемкость процесса в расчете на один моль вещества находим из формулы

$$n = (c_p - c_n) / (c_V - c_n) => c_n = R\,(i/2 - 1/(n-1)).$$

Величину работы газа A при расширении от объема V_1 до объема V_2 также определяем по стандартной формуле:

$$A = RT_1(1 - (V_1/V_2)^{n-1}) / (n-1) = RT_1(V_2 - V_1)/V_2.$$

Пример 2.3.8. *Предположим, что для некоего материала давление, температура и объем связаны соотношением* (*уравнение состояния*) $pV = aT - bT^2$. *Найти выражение для работы материала при изменении его температуры от* T_1 *до* T_2 *при постоянном давлении.*

Решение. Поскольку давление постоянно, имеем для работы стандартное выражение $A_{1\to 2|p=\text{const}} = p(V_2 - V_1) = \frac{m}{\mu} R(T_2 - T_1)$.

Используя уравнение состояния, находим

$$A_{1\to 2} = a(T_2 - T_1) - b(T_2^2 - T_1^2) = (T_2 - T_1)\left[a - b(T_2 + T_1)\right].$$

Пример 2.3.9. *Расширяясь, водород совершил работу* $A = 6$ кДж. *Определите количество теплоты* Q, *подведенное к газу, если процесс протекал*: *а*) *изобарно*; *б*) *изотермически.*

Решение. Рассмотрим сначала изобарное расширение. Из уравнений Менделеева – Клапейрона следует связь количества теплоты и совершенной работы: $A_{1\to 2|p=\text{const}} = p(V_2 - V_1) = \frac{m}{\mu} R(T_2 - T_1)$.

Изменение внутренней энергии газа: $U_{12|p=\text{const}} = \frac{p(V_2 - V_1)}{\gamma - 1} = \frac{m}{\mu} R \frac{T_2 - T_1}{\gamma - 1}$.

Складывая, находим количество теплоты, переданное газу в этом процессе:

$$Q_{1\to 2|p=\text{const}} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} p(V_2 - V_1) = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{m}{\mu} R(T_2 - T_1).$$

Следовательно, $Q_{1\to 2} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} A_{1\to 2} = \frac{7}{2} A = 21$ кДж. Мы использовали

значение $\gamma = 7/5$ для двухатомного газа. Для изотермического расширения, как мы видели, полученное количество теплоты просто равно произведенной работе: $Q_{1\to 2} = A = 6$ кДж.

Пример 2.3.10. *Молярные теплоемкости гелия* (He) *в процессах* $1-2$ *и* $1-3$ *равны* C_1 *и* C_2 *соответственно* (*рис*. 2.3.1).

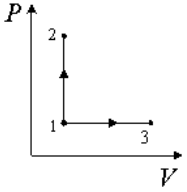

Рис. 2.3.1

Определить отношение C_1 / C_2.

Решение. Теплоемкость системы – это физическая величина, равная количеству теплоты, которое необходимо передать системе, чтобы изменить её температуру на один кельвин (градус):

$$C = \frac{\delta Q}{dT}.$$

Поэтому количество теплоты зависит от процесса, то теплоемкость также зависит от способа подвода тепла к системе.

Процессы, изображенные на графике, представляют: процесс $1\to 2$ изохорный $(V_1 = V_2)$, процесс $1\to 3$ изобарический ($p_1 = p_2$). Следовательно, $C_1 = C_V$ и $C_2 = C_P$. Для гелия (одноатомного газа $i = 3$) молярные теплоемкости при постоянном объеме и постоянном давлении соответственно равны

$$C_V = \frac{i}{2}R = \frac{3}{2}R C_P = C_V R = \frac{5}{2}R.$$

Таким образом, искомое отношение

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{C_V}{C_P} = \frac{3}{5}.$$

Пример 2.3.11. *Средняя кинетическая энергия молекул газа при температуре* T *зависит от их структуры, что связано с возможностью различных видов движения атомов в молекуле. Определить среднюю кинетическую энергию молекул гелия* (He).

Решение. Внутренняя энергия молекул идеального газа U складывается из энергии:

1) поступательного движения;
2) вращательного движения;
3) колебательного движения:

$$U = \frac{i}{2} RT,$$

где i – *эффективное* число степеней свободы

$$i = i_{\text{пост}} + i_{\text{вр}} + 2i_{\text{кол}}.$$

Согласно закону Больцмана о равнораспределении энергии по степеням свободы средняя энергия одной молекулы будет равна

$$< E >= \frac{i}{2} k_B T.$$

Так как гелия (Не) одноатомный газ, то $i = 3$, а

$$< E >= \frac{3}{2} k_B T.$$

2.3.3. Задачи для самостоятельного решения

Задача 2.3.1. Азот массой m = 5 кг, нагретый на $\Delta T = 150$ К сохранил неизменный объем. Найти: 1) теплоту Q, сообщаемую газу; 2) изменение ΔU его внутренней энергии; 3) совершенную газом работу A. (A = 0; $Q = \Delta U = 556$ кДж)

Задача 2.3.2. Газ, занимавший объем $V = 12$ л под давлением $p = 100$ кПа, был изобарно нагрет от температуры $T_1 = 300$ К до температуры $T_2 = 400$ К. Определить работу A расширения газа. ($A = 400$ Дж)

Задача 2.3.3. Азот находится в закрытом сосуде объемом $V = 3$ л при температуре $T_1 = 300$ К и давлении $p_1 = 300$ кПа. После нагревания давление в сосуде стало $p_2 = 2,5$ МПа. Определить температуру T_2 азота после нагревания и теплоту Q, сообщенную азоту. (T_2 = 2500 К; Q = 16,5 кДж)

Задача 2.3.4. При изобарном расширении двухатомного газа была совершена работа A = 160 Дж. Найти теплоту Q, сообщенную газу. (Q = 560 Дж)

Задача 3.3.5. Чему равна внутренняя энергия 3,0 мол идеального двухатомного газа при температуре 600 К, если все степени свободы активны? (4 кДж)

Задача 2.3.6. Азот массой m = 200 г расширяется изотермически при температуре T = 280 К, причем объем газа увеличивается в 2 раза. Найти: 1) изменение ΔU внутренней энергии газа; 2) совершенную при расширении газа работу A; 3) теплоту Q, полученную газом. ($\Delta U = 0$; $A = Q$ = 11,5 кДж)

Задача 2.3.7. Теплоемкость порции газа, может быть практически какой угодно в зависимости от показателя политропы процесса, в котором участвует газ. Подберем такой процесс, при котором теплоемкость порции гелия в количестве 1 мол составляла в нем 20 Дж/К. При этом моль гелия в сосуде с поршнем увеличил свою температуру на ΔT = 10 К. Расширился при этом газ или сжимался? Чему равен показатель политропы процесса? Какую работу совершил газ? (n = – 0,17; газ расширился; $A \cong -70$ Дж)

Задача 2.3.8. Идеальный двухатомный газ сжимается при постоянном давлении 2,0 атм от объема 10,0 л до 2,0 л (при этом какое-то количество теплоты уходит из системы и температура понижается). Затем газу сообщается некоторое количество теплоты таким образом, что объем газа не меняется, а его давление и температура повышается до тех пор, пока температура не становится равной начальной. Вычислите: *а*) полную работу A, совершаемую над газом; *б*) полное количество теплоты Q, сообщенное газу. (A = 1,6 кДж; Q = 4 кДж)

Задача 2.3.9. Какое количество теплоты нужно сообщить 12,0 м^3 азота, первоначально находившегося при температуре 20°С, чтобы его объем удвоился при постоянном давлении 1,00 атм? (4,2 МДж)

Задача 2.3.10. Расширяясь, водород совершил работу A = 6 кДж. Определить количество теплоты Q, подведенное к газу, если процесс протекал: *а*) изобарно; *б*) изотермически. (*а*) 21 кДж; *б*) 6 кДж)

Задача 2.3.11. При изотермическом расширении газа, имеющего объем V = 2 м^3, давление его меняется от $p_1 = 500$ кПа до $p_2 = 400$ кПа. Найти совершенную при расширении работу. (A = 0,22 МДж.)

Задача 2.3.12. Водород при нормальных условиях имел объем $V_1 = 100$ м^3. На сколько изменилась внутренняя энергия газа при адиабатическом изменении его объема до $V_2 = 150$ м^3? $(\Delta U = -3{,}8$ МДж$)$

Задача 2.3.13. Два грамма гелия, расширяясь адиабатически, совершили работу $\Delta A = 300$ Дж. Определите изменение внутренней энергии ΔU и температуры ΔT гелия. (ΔU = – 300 Дж; ΔT = 48 К)

Задача 2.3.14. Покажите, что работа, совершаемая газом, который медленно (адиабатически) расширяется из состояния (p_1, V_1) до состояния (p_2, V_2), определяется выражением

$$\Delta A = \frac{p_1, V_1 - p_2, V_2}{\gamma - 1}.$$

Задача 2.3.15. Воздух, занимавший объем $V_1 = 10$ л при давлении $p_1 = 100$ кПа, был адиабатически сжат до объема V_2 = 1 л. Определить давление после сжатия p_2. $(p_2 = 2{,}5$ МПа$)$

Задача 2.3.16. Определить работу A адиабатического расширения водорода массой m = 4 г, если температура газа понизилась на $\Delta T = 10$ К. (A = 416 Дж)

Задача 2.3.17. Автомобильная шина накачана до давления $P_{атм}$ = 220 кПа при температуре T_1 = 290 К. Во время движения она нагрелась до температуры T_2 = 330 К и лопнула. Считая процесс, происходящий после повреждения шины, адиабатным, определить изменение температуры ΔT вышедшего из нее воздуха. Атмосферное давление равно $p_{атм}$ = 100 кПа. (ΔT = – 76 К)

Задача 2.3.18. В сосуде объемом V = 10 л находится гелий под давлением $p_1 = 10^5$ Па. Стенки сосуда могут выдержать внутреннее давление $p_2 = 10^6$ Па. Определить, какое максимальное количество теплоты Q можно сообщить газу в этом сосуде? (Q = 13,5 кДж)

Задача 2.3.19. На рис. 2.3.2 показан горизонтальный неподвижный цилиндр, в котором находится ν молей одноатомного идеального газа, давление которого равно p_0, а температура T_0. Поршень массой M может свободно перемещаться в цилиндре и в начальный момент удерживается в неподвижном состоянии. Масса газа много меньше массы поршня. Внешним импульсным

воздействием поршню сообщается скорость u. Определить максимальную температуру газа при дальнейшем движении поршня по инерции. Система теплоизолирована, теплоемкостями поршня сосуда, а также внешним давлением и трением пренебречь. ($T_{\max} = T_0 + Mu^2 / 3\nu R$)

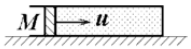

Рис. 2.3.2

Задача 2.3.20. Разность удельных теплоемкостей некоторого двухатомного газа равна $c_p - c_V = 260$ Дж/кг. Найти молярную массу μ газа и его удельные теплоемкости c_p и c_v. О каком газе идет речь? ($\mu = 0,032$ кг / моль – кислород, $c_p = 910$ Дж / (кг · К); $c_V = 650$ Дж / (кг · К))

Задача 2.3.21. Найти молярные теплоемкости $c_{m,p}$, $c_{m,V}$ и показатель адиабаты γ смеси газов, содержащей кислород и аргон, если количества вещества того и другого газа в смеси одинаковы. ($c_{m,V} = 16,6$ Дж / (моль · К); $c_{m,p} = 24,9$ Дж / (моль · К); $\gamma = 1,50$)

Задача 2.3.22. Определить удельные теплоемкости c_p, c_V и показатель адиабаты γ смеси газов, содержащих $V_1 = 5$ л водорода и $V_2 = 3$ л гелия. Газы находятся при одинаковых условиях. ($c_V = 6,42$ кДж / (кг · К), $c_p = 9,45$ кДж / (кг · К), $\gamma = 1,47$)

Задача 2.3.23. Докажите, что касательная к любой точке графика адиабатического процесса на pV – диаграмме более сильно наклонена, чем соответствующая касательная к кривой изотермического процесса.

Задача 2.3.24. Идеальный двухатомный газ в количестве ν моль расширяется адиабатически от объема V_1 до V_2. Начальное давление P_1. Определить: *а*) начальную T_1 и, конечную T_2 температуры, *б*) изменение внутренней энергии ΔU, *в*) работу A, совершенную над газом, *г*) количество теплоты Q, теряемое газом. Предполагается, что молекулы не колеблются. (*а*) $T_1 = P_1V_1 / \nu R$; $T_2 = P_1 {V_1}^{2,4} / \nu R {V_2}^{1,4}$; *б*) $\Delta U = 1,4\ P_1V_1\ ((V_1 / V_2)^{1,4} - 1)$; *в*) $A = 1,4\ P_1V_1\ ((V_1 / V_2)^{1,4} - 1)$; *г*) $Q = 0$)

Задача 2.3.25. Идеальный газ переходит из состояния 1 в состояние 2 первый раз посредством процесса I, другой раз – посредством процесса II. В ходе какого процесса количество теплоты, полученное газом, больше? (*В первом*).

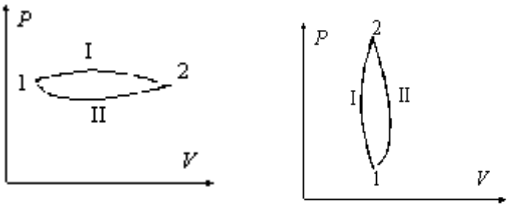

Рис. 2.3.3

Задача 3.3.26. Идеальный газ переходит из состояния 1 в состояние 2 первый раз посредством процесса I, другой раз – посредством процесса II. 1) В ходе какого процесса количество теплоты, полученное газом, больше? 2) Какие знаки имеют работы, совершенные газом в первом и втором процессах? ($Q_1 > Q_2$; $A_1 = A_2 = 0$)

2.4. Энтропия в термодинамике

2.4.1. Основные понятия, законы и формулы

• Второе начало термодинамики: в изолированной системе при любых процессах энтропия S не может убывать. При равновесных обратимых процессах она остается постоянной. При неравновесных – возрастает. Убывание энтропии возможно только при взаимодействии с внешними телами.

• Другие формулировки (следствия) второго начала термодинамики:

1) невозможно осуществить процесс, е*динственным конечным результатом* которого будет переход теплоты от менее нагретого тела к более нагретому (Р. Клаузиус, 1850);

2) невозможно осуществить процесс, *единственным конечным результатом* которого будет превращение некоторого количества теплоты полностью в работу (У. Томсон (лорд Кельвин), 1851).

• Прирост энтропии при малых изменениях: $dS = dQ / T$, где dQ – переданная (отданная) теплота, T – температура. При конечных изменениях $\Delta S = \int dQ / T$, где интеграл вычисляется от начальной до конечной точки процесса.

• Переданная (отданная) теплота: $dQ = TdS \geq pdV + dU$, где pdV – элементарная работа газа, dU – приращение внутренней энергии.

• Переданное в процессе системе тепло: $Q = \int TdS$, где интеграл вычисляется от начальной до конечной точки процесса. Геометрически – это площадь под графиком процесса на диаграмме $T(S)$.

• Связь энтропии с другими термодинамическими параметрами:

$$S(T, V_\mu) = \nu(R\ln V_\mu + C_V \ln T + s)\ S(p, V_\mu) =$$

$$= \nu\,(C_P \ln V_\mu + C_V \ln p + s')\ S(T, p) = \nu(C_P \ln T - R\ln p + s''),$$

где ν – количество вещества в молях; V_μ – молярный объем газа; C_P, C_V – молярные теплоемкости при постоянном давлении и объеме соответственно; p – давление; T – температура газа. Величины s, s', s'' – некоторые константы, с точностью до которых определена энтропия.

• Свободная энергия (Гельмгольца): $F = U - TS$.

2.4.2. Методические рекомендации по решению задач

Пример 2.4.1. *Изобразить для идеального газа примерные графики изобарного, изохорного, изотермического и адиабатического процессов на диаграммах $T(S)$, $V(S)$, $p(S)$. Для всех процессов на каждом графике принять одну общую исходную точку* (*рис*.2.4.1).

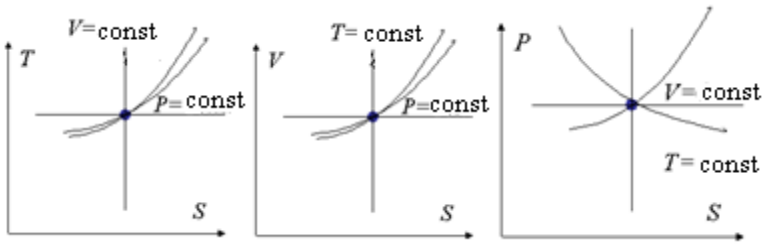

Рис. 2.4.1

Решение. 1) Начнем с $T(S)$. Для изотермического и адиабатического (изоэнтропического) процесса графики зависимости, очевидно, прямые линии – горизонтальная и вертикальная соответственно. Для изобары воспользуемся формулой

$$S(T, p) = \nu(C_P \ln T - R\ln p + s'').$$

Выразим температуру через энтропию, учитывая, что все остальные величины в формуле – это константы:

$$\nu C_P \ln T = \text{const} + S => T = \text{const} \exp(S / \nu C_P).$$

Аналогично для изохорного процесса с помощью формулы связи $S(T, V)$ находим $T = \text{const} \exp(S/\nu C_V)$. Поскольку теплоемкость C_V меньше, чем C_P, график $T(S)$для изохорного процесса будет расти несколько быстрее, чем для изобарного. 2) График $V(S)$. Для изохорного и адиабатического (изоэнтропического) процесса графики зависимости, очевидно, прямые линии – горизонтальная и вертикальная соответственно. Для изобары воспользуемся формулой $S(V, p) = \nu(C_P \ln V_\mu + C_V \ln p + s') => V_\mu = \text{Const} \exp(S / \nu C_P)$. Аналогично, для изотермического процесса с помощью формулы связи $S(T, V)$ находим $V_\mu = \text{const} \exp(S / \nu R)$. Поскольку R меньше, чем C_P, график $V(S)$для изотермического процесса будет расти несколько быстрее, чем для изобарного. 3) График $P(S)$. Все аналогично. Для изобарного и адиабатического (изоэнтропного) процесса графики зависимости, очевидно, прямые линии – горизонтальная и вертикальная соответственно. Для изохоры воспользуемся формулой

$$S(V, P) = \nu(C_P \ln V_\mu + C_V \ln P + s') => P = \text{const} \exp(S / \nu C_V).$$

Для изотермического процесса с помощью формулы связи $S(T, P)$ находим $P = \text{const} \exp(– S / \nu R)$. Заметим, что для изотермического процесса экспонента получается падающей.

Пример 2.4.2. *Камень массой* m = 10 кг *упал с высоты* h =10 м *на Землю. Температура камня и окружающей среды* T = 20˚С. *Определить изменение энтропии системы* «*камень – Земля*»*.*

Решение. Падение камня – процесс необратимый. Изменение энтропии в этом процессе можно определить, используя первое начало термодинамики $\Delta Q = \Delta U + A$. Так как $\Delta Q = T\,\Delta S$, то $T\,\Delta S = \Delta U + A$. По условию задачи температура, а следовательно, и внутренняя энергия не изменяются ($\Delta U = 0$). Работа же A равна изменению потенциальной энергии системы «камень – Земля»:

$$A = \Delta E_{\text{пот}} = mgh.$$

Отсюда:

$$\Delta S = \frac{mgh}{T}.$$

Подставляя числовые значения из условия задачи, получаем

$$\Delta S = 6{,}688 \text{ Дж/К}.$$

Пример 2.4.3. *Во сколько раз следует изотермически увеличить объем идеального газа в количестве* $\nu = 5$ моль, *чтобы приращение его энтропии составило* $\Delta S = 45{,}65 \frac{\text{Дж}}{\text{К}}$?

Решение. В изотермическом процессе T = const, поэтому элементарное количество теплоты, согласно первому началу термодинамики $\delta Q = \delta A = pdV$, $dU = 0$. Тогда приращение энтропии

$$\Delta S = \int_{p_1}^{p_2} p \frac{dV}{T}.$$

Температуру выразим из уравнения состояния идеального газа:

$$pV = \nu RT, \text{ т.е. } T = \frac{pV}{\nu R}.$$

Подставляем, получаем

$$\Delta S = \int_{p_1}^{p_2} p \frac{dV}{pV} \nu R = \nu R \int_{p_1}^{p_2} \frac{dV}{V} = \nu R \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right).$$

Перепишем последнее выражение в виде

$$\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = \frac{\Delta S}{\nu R},$$

потенцируем, и получим окончательное выражение:

$$\frac{V_2}{V_1} = e^{\frac{\Delta S}{\nu R}} \approx 3.$$

Пример 2.4.4. *В некотором диапазоне температур энтропия системы изменяется по закону* $S = a + bT$, *где* a, b *– некоторые константы. Какое количество теплоты* Q *получает система при нагревании от температуры* T_1 *до температуры* T_2?

Решение. Мы знаем, что $dQ = TdS = > bTdT$. Ответ вычисляется простым интегрированием: $Q = \int TdS = b\int TdT = b(T_2^2 - T_1^2) / 2$.

Пример 2.4.5. *Имеется* 1 кг *азота в объеме* 1 л *и при давлении* 1 кПа. *Затем газ расширяется*, *приобретая объем* 2 л *и снижая давление до* 500 Па. *Определить*: 1) *приращение внутренней энергии газа* ΔU; 2) *приращение энтропии газа* ΔS.

Решение. По закону Менделеева – Клапейрона $PV = \nu RT$. При численных данных нашей задачи (PV = const) это означает, что температура не меняется. Следовательно, внутренняя энергия тоже не меняется $\Delta U = 0$. С энтропией сложнее. При постоянной температуре ее можно выразить через объем или через давление (C – константа):

$$S(T, V_\mu) = \nu(R\ln V_\mu + C_V \ln T + s) = C + \nu R \ln V_\mu \; S(T, P) =$$
$$= \nu(C_P \ln T - R\ln P + s'') = C - \nu R \ln P.$$

В любом случае приращение энтропии равно

$$\Delta S = \nu R \ln(V_2 / V_1) = \nu R \ln(P_1 / P_2) = \nu R \ln(2) \cong 0{,}7 \nu R.$$

Остается определить количество вещества (азота). Оно равно его массе, деленной на массу молярную:

$$\nu = m / \mu = 1000 \text{ г} / 28 \text{ г/моль} \cong 35{,}7 \text{ моль}.$$

Окончательный ответ: $\Delta S =\sim 0{,}7 \nu R \cong 208$ Дж/К.

Пример 2.4.6. *Идеальный газ при температуре* T = 300 К *совершает обратимый изотермический процесс, в ходе которого* ***над*** *газом совершается работа* A' = – 900 Дж. *Найти приращение энтропии* ΔS *и свободной энергии* ΔF *газа*.

Решение. При постоянной температуре T = 300 К внутренняя энергия газа не меняется, а вся работа связана с отдачей тепла. Раз над газом работа совершена отрицательная – значит, газ совершил работу A' = 900 Дж, положительную за счет тепла, от газа отданного. Определение прироста энтропии:

$$\Delta S = \Delta Q / T = A'/T = 3 \text{ Дж/К}.$$

Приращение свободной энергии составит

$$\Delta F = \Delta U - T\Delta S = A' = 900 \text{ Дж}.$$

Пример 2.4.7. *Круговой процесс на диаграмме* $T(S)$ *имеет вид эллипса, с главными осями, продольными осям* T *и* S. *Максимальная и минимальная температуры равны соответственно* 900 К *и* 300 К. *Максимальная и минимальная энтропии равны соответственно* 400 *и* 800 Дж/К. *Какую работу* A *совершил газ в ходе* 1-го цикла *этого процесса*?

Решение. Работа газа геометрически совпадает с площадью внутри графика процесса $T(S)$. Далее – чистая геометрия. Площадь эллипса есть произведение его главных полуосей на число π. В нашем случае главные полуоси – это полуразности максимальных и минимальных значений температуры и энтропии. Отсюда следует и ответ:

$A = \pi$(900 К – 300 К) (800 Дж/К – 400 Дж/К) / 4 = 0,19 МДж.

Пример 2.4.8. *Сосуд разделен перегородкой на две одинаковые по объему части. В каждой содержится по одному молю газа при одинаковом давлении* P *и одинаковой температуре* T. *Перегородку убирают, и газы смешиваются. Процесс, очевидно, необратимый. Найти приращение энтропии.*

Решение. Объем газов, очевидно, молярный. До смешения суммарная энтропия двух одинаковых объемов газа составляла

$$S_1(T, V_\mu) = 2R \ln V_\mu + 2C_V \ln T + s.$$

После смешения молярный объем каждой из компонентов смеси удвоился, и их суммарная энтропия составила

$$S_2(T,\ V_\mu) = 2R\ln 2V_\mu + 2C_V \ln T + s.$$

Приращение энтропии, очевидно, положительное (как и должно быть в соответствии со вторым началом термодинамики) и равно

$$S_2 - S_1 = 2R\ln 2V_\mu - 2R\ln V_\mu = 2R\ln 2 \cong 5{,}8 \text{ Дж/К}.$$

Пример 2.4.9. *Рассмотрим неравновесный процесс. Пусть в начальном состоянии имеются два одинаковых идеальных газа с равными массами m при одинаковой температуре T, но разных давлениях p_1 и p_2. Определите изменение энтропии ΔS при соединении сосудов с газом.*

Решение. В первый момент после соединения сосудов, когда газы еще не смешались, энтропия системы равна сумме энтропии газов в отдельных сосудах: $S_1 + S_2 = \dfrac{2m}{\mu}\left(c_{m,\,p} \ln T - \dfrac{R}{2} \ln p_1 p_2 + S_0 \right)$.

Найдем теперь объемы сосудов: $V_1 = \dfrac{m}{\mu} RT \dfrac{1}{p_1}$, $V_2 = \dfrac{m}{\mu} RT \dfrac{1}{p_2}$.

После соединения сосудов масса газа становится равной $2m$, а объем – $V_1 + V_2$. Значит, давление p после соединения сосудов равно $p = \dfrac{2m}{\mu} R \dfrac{T}{V_1 + V_2} = \dfrac{2p_1 p_2}{p_1 + p_2}$. Поэтому энтропия газа после соединения сосудов равна $S = \dfrac{2m}{\mu}\left(c_{m,\,p} \ln T - R \ln \dfrac{2p_1 p_2}{p_1 + p_2} + S_0 \right)$.

Изменение энтропии

$$\Delta S = S - S_1 - S_2 = \frac{m}{\mu} R \left(\ln p_1 p_2 - 2 \ln \frac{2p_1 p_2}{p_1 + p_2} \right) = \frac{m}{\mu} R \ln \frac{(p_1 + p_2)^2}{4 p_1 p_2}.$$

Под знаком логарифма стоит величина, всегда бóльшая единицы. Стало быть, энтропия увеличилась: $\Delta S > 0$. Самостоятельно предлагается решить аналогичную задачу: определить изменение энтропии при смешивании равных масс двух одинаковых идеальных газов, находящихся при одинаковом давлении *p,* но

разных температурах T_1 и T_2. Ответ: $\Delta S = \frac{m}{\mu} c_{m,p} \ln \frac{(T_1 + T_2)^2}{4T_1T_2}$, $\Delta S > 0$.

Пример 2.4.10. *Определите приращение энтропии воды массой* $m =$ 0,1 кг *при нагревании ее от температуры* $t_1 = 0^\circ$ C *до температуры* $t_2 = 100^\circ$ C *и последующем превращением воды в пар*.

Решение. Находим отдельно изменение энтропии воды при нагревании ΔS_1 и превращении ее в пар ΔS_2. Воспользуемся выражением $\Delta S = \int_1^2 \frac{cdt}{t}$. При нагревании $\Delta S_1 = \int_{T_1}^{T_2} \frac{c_{\text{уд}}}{T} m dT$, где теплоемкость C заменена произведением удельной теплоемкости $c_{\text{уд}}$ и массы воды. После интегрирования имеем $\Delta S_1 = c_{\text{уд}} m \ln \frac{T_2}{T_1}$. Подставляя численные значения, находим $\Delta S_1 = 131$ Дж/К. При испарении воды температура остается постоянной. Поэтому, интегрируя выражение $dS = \delta Q / T$ при постоянной температуре, получаем $\Delta S_2 = \frac{Q_{\text{исп}}}{T_2} = \frac{rm}{T_2}$, где r – удельная теплота испарения воды.

После вычислений находим

$$\Delta S_2 = 606 \text{ Дж/К}, \Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = 737 \text{ Дж/К}.$$

Пример 2.4.11. *Определите изменение энтропии, если температура одного моля идеального газа увеличивается в* $e \approx 2{,}7$ *раза при процессах*: 1) *изобарическом*; 2) *изохорическом*; 3) *адиабатическом*.

Решение. Записав, первое начало термодинамики в виде $\delta Q = dU + pdV$ и заменив δQ, используя выражение $dS = \delta Q/T$, получаем $TdS = dU + pdV$. Учитывая, что изменение внутренней энергии одного моля идеального газа $dU_\mu = c_V dT$, где c_V – молярная теплоемкость газа при постоянном объеме.

Тогда $TdS = vc_V dt + pdV$. 1) Продифференцируем уравнение Клапейрона – Менделеева $pV = vRT$ при изобарическом процессе:

$pdV = \nu RdT$. С учетом этого соотношения перепишем первое начало термодинамики: $TdS = dU + pdV = \nu c_V dt + \nu RdT$ или $dS = \nu\left(c_V + R\right)\frac{dT}{T} = \nu c_p \frac{dT}{T}$. После интегрирования последнего выражения получаем $\Delta S = \Delta S = \nu c_p \ln\frac{T_2}{T_1} = \nu c_p \ln e = \nu c_p$. 2) При изохорическом процессе $dV = 0$. Тогда $TdS = \nu c_V dT$ или $dS = \nu c_V \frac{dT}{T}$. После интегрирования этого выражения находим % $\Delta S = \nu c_V \ln\frac{T_2}{T_1} = \nu c_V \ln e = \nu c_V$. 3) При адиабатическом процессе $\delta Q = 0$, и в соответствии с $dS = \delta Q / T$ находим $\Delta S = 0$.

2.4.3. Задачи для самостоятельной работы

Задача 2.4.1. Изобразить для идеального газа примерные графики изобарического, изохорического, изотермического и адиабатического процессов на диаграммах $S(T)$, $S(V)$, $S(P)$. Для всех процессов на каждом графике принять одну общую исходную точку. (Подсказка – см. пример 2.4.1)

Задача 2.4.2. Изобразить на диаграммах $P(S)$ и $V(S)$ графики изотермического, изохорного, изобарного и изоэнтропного процессов. Начальная точка всех процессов – общая. (Подсказка – см. пример 2.4.1)

Задача 2.4.3. В результате адиабатического расширения температура 1 моля одноатомного газа понижается на 10 К. Энтропия газа – 20 Дж/моль К. Найти приращение свободной энергии газа. (75 Дж/моль)

Задача 2.4.4. Один моль одноатомного идеального газа нагревается от 27°С до 127°С. В ходе процесса давление газа изменяется по экспоненциальному закону

$$P = P_0 \exp(aT),$$

где $a = 10^{-3}\,К^{-1}$. Найти количество теплоты, полученное газом. (3,8 кДж)

Задача 2.4.5. Энтропия 1 грамма азота при температуре 300 К и давлении в 1 атм равна ~ 7 Дж/К. Найти энтропию 2 г азота при

температуре 100°С и давлении в 2 атм. (~ 14 Дж/К)

Задача 2.4.6. Энтропия 1 моля кислорода при температуре 300 К и давлении в 1 атм равна ~ 210 Дж/К. В результате изотермического расширения объем газа увеличился в 2 раза. Найти энтропию газа в конечном состоянии. (~ 220 Дж/К)

Задача 2.4.7. Определить приращение энтропии одного моля идеального одноатомного газа при нагревании его от 0° до 273°С в случае, когда нагревание происходит: *а*) при постоянном объеме; *б*) при постоянном давлении. (*а*) 8,6 Дж/К; *б*) 14,4 Дж/К)

Задача 2.4.8. Как зависит от температуры теплоемкость вещества, если его энтропия в этом интервале температур пропорциональна температуре? (Теплоемкость тоже пропорциональна температуре)

Задача 2.4.9. Найти зависимость энтропии моля двухатомного идеального газа от его молярного объема V_μ в процессе, где давление газа растет пропорционально объему. ($S = 6R\ln(V_\mu) + \text{const}$)

Задача 2.4.10. Моль идеального газа совершает процесс, в ходе которого энтропия меняется пропорционально абсолютной температуре. Внутренняя энергия газа в результате процесса растет от 6 до 7 кДж/моль. Начальная энтропия равна 200 Дж/моль·К. Найти работу, совершаемую газом в ходе процесса. (A = 9,4 кДж)

Задача 2.4.11. Теплоизолированный сосуд разделен на две равные части перегородкой. В одной половине сосуда содержится один моль идеального газа, в другой – вакуум. Перегородку удаляют. Как изменяются внутренняя энергия газа и его энтропия? ($\Delta U = 0$, $\Delta S = R\ln 2$)

Задача 2.4.12. Теплоизолированный сосуд разделен на две равные части перегородкой. В одной половине сосуда содержится один моль идеального газа, в другой два моля другого газа. Температура и давление газов одинаковы. Перегородку удаляют. Как изменится энтропия системы? ($\Delta S = R(\ln 3 + 2\ln 1{,}5) \sim 2R$)

Задача 2.4.13. При неизменном атмосферном давлении 100 кПа температура воздуха в комнате объемом 50 м^3 поднялась от 15° до 20°С. Чему равно приращение энтропии? (– 6,1 кДж/К)

Задача 2.4.14. Сосуд разделен перегородкой на две части с соотношением объемов 1 : 2. В каждой содержится по одному молю газа при одинаковом давлении P и одинаковой температуре T.

Перегородку убирают и газы смешиваются. Процесс, очевидно, необратимый. Найти приращение энтропии. ($\Delta S = 2R\ln 4{,}5 \sim 25$ Дж/К)

Задача 2.4.15. Смешали воду массой m_1 = 5 кг при температуре T_1 = 280 К с водой массой m_2 = 8 кг при температуре T_2 = 350 К. Определите: 1) температуру θ смеси; 2) изменение ΔS энтропии**,** происходящее при смешивании.

Задача 2.4.16. В результате изохорного нагревания водорода массой m = 1 г давление p газа увеличилось в два раза. Определите изменение ΔS энтропии газа.

Задача 2.4.17. Определите изменение ΔS энтропии при изобарном расширении азота массой m = 4 г от объема V_1 = 5 л до объема V_2 = 9 л.

Задача 2.4.18. Кусок льда массой m = 200 г, взятый при температуре $t_1 = -10^\circ$ С, был нагрет до температуры $t_2 = 0^\circ$ С и расплавлен, после чего образовавшаяся вода была нагрета до температуры $t = 10^\circ$ С. Определите изменение ΔS энтропии в ходе указанных процессов.

Задача 2.4.19. Лед массой m_1 = 2 кг, взятый при температуре $t_1 = 0^\circ$ С, превращен в воду той же температуры с помощью пара, имеющего температуру $t_2 = 100^\circ$ С. Определите массу m_2 израсходованного пара. Каково изменение ΔS энтропии системы «лед – пар»?

Задача 2.4.20. Водород массой m = 100 г изобарно нагрет так, что его объем увеличился в n = 3 раза, а затем водород был изохорно охлажден так, что давление его уменьшилось в n = 3 раза. Определите изменение ΔS энтропии в ходе указанных процессов.

Задача 2.4.21. Кислород массой m = 2 кг увеличил свой объем в n = 5 раз один раз изотермически, а другой – адиабатически. Определите изменение ΔS энтропии в каждом из указанных процессов.

Задача 2.4.22. Один моль идеального газа изотермически расширился так, что при этом происходит увеличение энтропии на 8,31 Дж/К. Определить, во сколько раз при этом увеличился объем газа. (В 3 раза)

2.5. Циклические процессы и тепловые машины

2.5.1. Основные понятия, законы и формулы

• Работа газа в циклическом процессе: 1) $A = \int pdV$, где интеграл берется по всему циклу. Геометрический смысл – площадь под графиком зависимости ($p(V)$). 2) $A = \int SdT$, где интеграл берется по всему циклу. Геометрический смысл – площадь под графиком зависимости $S(T)$.

• Термический КПД теплового двигателя

$$\eta = (Q_1 - Q_2) / Q_1 = A / Q_1,$$

где Q_1 – количество теплоты, полученное рабочим телом от нагревателя; Q_2 – количество теплоты, переданное рабочим телом охладителю; $A = Q_1 - Q_2$ – работа, совершенная рабочим телом.

• КПД цикла Карно $\eta_C = (T_{max} - T_{min}) / T_{min}$, где T_{max} – температура нагревателя, T_{min} – температура охладителя.

• Холодильный коэффициент холодильной установки:

$\eta' = Q_2 / (Q_1 - Q_2) = Q_2 / A$, где Q_1 – количество теплоты, переданное нагревателю, Q_2 – количество теплоты, забранное у охладителя.

КПД холодильной установки $\eta_{хол} = \dfrac{Q_2}{Q_1} = \dfrac{Q_2}{Q_2 + A} = \dfrac{\eta'}{1 + \eta'}$.

Для холодильника Карно: $\eta' = \dfrac{T_2}{T_1 - T_2}$, $\eta_{хол} = \dfrac{T_2}{T_1}$, где $T_1 (T_2)$ – абсолютные температуры нагревателя (охладителя).

2.5.2. Методические рекомендации по решению задач

Пример 2.5.1. *Один моль идеального газа совершает цикл* (*замкнутый процесс*), *состоящий из двух изохор и двух изобар* (*см. рис.* 2.5.1). *Температура в точках* 1 *и* 3 *равны* T_1 *и* T_3 *соответственно. Определить работу* ΔA, *совершенную газом за цикл*, *если точки* 2 *и* 4 *лежат на одной изотерме.*

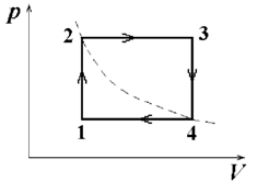

Рис. 2.5.1

Решение: 1) Запишем уравнения Клапейрона – Менделеева для четырех поворотных точек цикла. Учтем, что количество газа равно 1 моль. $p_1V_1 = RT_1$; $p_2V_1 = RT_2$; $p_2V_3 = RT_3$; $p_1V_3 = RT_2$. Здесь учтено, что объем во второй точке равен начальному, объемы в точках 3 и 4 одинаковы и одинаковы температуры в точках 2 и 4. 2) Делим первое уравнение на второе и четвертое на третье. Находим: $p_1 / p_2 = T_1 / T_2 = T_2 / T_3 => T_2^2 = T_1T_3$. 3) Работа газа за цикл геометрически совпадает с площадью внутри цикла на диаграмме pV. Эта работа при направлении обхода цикла по часовой стрелке будет положительной:

$$A = (p_2 - p_1)(V_3 - V_1) = RT_3 - 2RT_2 + RT_1 = R(T_3^{1/2} - T_1^{1/2})^2.$$

Пример 2.5.2. *Доказать, что* КПД *цикла Карно*, *действительно равен разности температур нагревателя* T_1 *и холодильника* T_2, *деленному на температуру нагревателя* T_1.

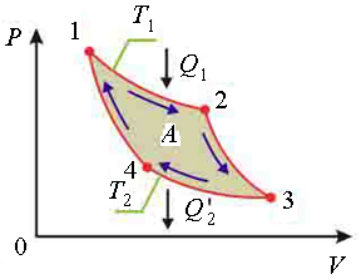

Рис. 2.5.2

Решение. Решим задачу двумя способами. 1) Рассмотрим цикл Карно на диаграмме $p(V)$. Он состоит из двух изотерм с температурами T_1 на участке 1 – 2 и T_2 на участке 3 – 4, и двух адиабат 2 – 3 и 4 – 1. По определению, КПД тепловой машины

равен разности подведенного Q_1 и отведенного Q_2' количества теплоты, деленной на количество теплоты подведенное:

$$\text{КПД} = (Q_1 - Q_2') / Q_1.$$

На адиабатических участках теплота не подводится и не отводится, так что их можно при вычислении КПД не учитывать. На изотермических участках не происходит изменения внутренней энергии газа, а подведенное (отведенное) количество теплоты совпадает с величиной совершенной газом (или над газом на участке *3 – 4*) работы. Работа в свою очередь совпадает с площадью под графиком соответствующего процесса и равна

$$A_{12} = \nu RT_1 \ln(V_2 / V_1); \; A_{34}' = \nu RT_2 \ln(V_3 / V_4).$$

Отношения объемов в этих формулах нам пока не известны, но их можно найти с помощью уравнений изотермических и адиабатических процессов на всех 4 участках цикла:

$$p_1V_1 = p_2V_2, \; p_2V_2^{\gamma} = p_3V_3^{\gamma}, \; p_3V_3 = p_4V_4, \; p_4V_4^{\gamma} = p_1V_1^{\gamma}.$$

Далее выполняем не совсем тривиальный математический прием: делим второе уравнение на первое, а четвертое на третье. Получаем

$$V_2^{\gamma-1} = (p_3 / p_1)\,(V_3^{\gamma} / V_1), \; V_4^{\gamma-1} = (p_1 / p_3)\,(V_1^{\gamma} / V_3).$$

Теперь перемножим полученные уравнения: $(V_2V_4)^{\gamma-1} = (V_1V_3)^{\gamma-1}$.

Очевидно, что $V_2V_4 = V_1V_3 \Rightarrow V_2/V_1 = V_3/V_4$. Мы видим, что отношения объемов, входящие в выражения для работы A_{12} и A_{34}' одинаковы! А поскольку работа в изотермическом процессе совпадает с количеством полученной (отданной) теплоты, то выражение для КПД цикла можно записать в виде:

$$\text{КПД} = (Q_1 - Q_2') / Q_1 = (A_{12} - A_{34}') / A_{12} = (T_1 - T_2) / T_1.$$

При этом логарифмы с «неизвестными» отношениями объемов благополучно сократились.

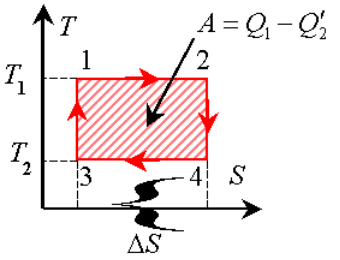

Рис. 2.5.3

2) Вторым способом доказать это можно, рассмотрев цикл Карно на диаграмме $T(S)$. Здесь график процесса имеет вид простого прямоугольника. Площадь под участком *1 – 2* соответствует количеству подведенной теплоты, а площадь внутри прямоугольника – разности подведенной и отведенной на участке *3 – 4* теплоты. Заметив, что разность энтропий между точками 2 и 1 совпадает с разностью энтропий между точками *3* и *4*, сразу же получаем результат: КПД = $(Q_1 - Q_2')$ / Q_1 = $(T_1 - T_2)$ / T_1. Обратите внимание, как использование понятия энтропии упрощает доказательство!

Пример 2.5.3. *На рис.* 2.5.4 *изображен цикл Карно в координатах* (T, S), *где S – энтропия. Укажите, на каком этапе происходит изотермическое расширение.*

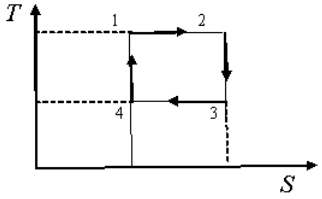

Рис. 2.5.4

Решение. Реализация максимально возможного КПД достигается в так называемом цикле Карно, когда идеальный газ проходит замкнутый цикл, составленный из двух адиабат и двух изотерм.

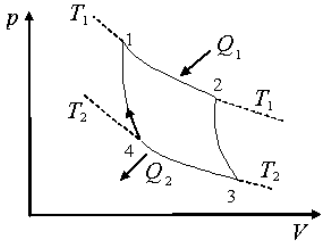

Рис. 2.5.5

Изотерма *1→2*. На этом участке газ находится в контакте с нагревателем и происходит изотермическое расширение от объема V_1 до объема V_2. Температура T_1 не меняется, следовательно, не изменяется внутренняя энергия, а вся полученная теплота расходуется на совершение газом работы: $Q_1 = Q_{1\to 2} = A_{1\to 2}$.

Адиабата *2→3*. Здесь система отсоединяется от нагревателя и не обменивается теплом с внешней средой $Q_{2\to3}=0$. Процесс *2→3* является изоэнтропическим. Работа совершается за счет внутренней энергии газа, и его температура падает до значения T_2 (T_2 – температура холодильника).

Изотерма *3→4*. Система подключается к холодильнику, и газ начинает сжиматься. Внутренняя энергия остается неизменной, под газом совершается работа ($A_{3\to4}<0$), а выделяющееся тепло $Q_2=\left|\ Q_{3\to4}\ \right|=A_{3\to4}$ передается холодильнику.

Адиабата *4→1*. Система отключена от внешней среды и продолжает сжиматься изоэнтропически, что приводит к повышению её температуры до T_1. Точки 4 и 1 лежат на адиабате, в конечном итоге система возвращается в первоначальное состояние. В условии задачи цикл Карно изображен в координатах (*T*, *S*):

процесс (*1→2*) – изотермическое расширение;

процесс (*2→3*) – изоэнтропическое (адиабатическое) расширение;

процесс (*3→4*) – изотермическое сжатие при температуре холодильника;

процесс (*4→1*) – изоэнтропическое (адиабатическое) сжатие. Следовательно, изотермическое расширение происходит на этапе (*1→2*)

Пример 2.5.4. *Для отопления дома установлен тепловой насос мощностью* 150 кВт. *При этом требуется поддерживать температуру в помещении* 20˚С *при наружной температуре* T = 0˚С. *Определить необходимую механическую мощность и коэффициент использования энергии* (КИЭ) *теплового насоса.*

Решение. Используем для расчета схему обратного цикла Карно. При изотермическом сжатии *1 – 2* (рис. 2.5.5) при более высокой температуре T_1 машина получает механическую работу и отдает столько же теплоты:

$$Q_{12}= R\,T_1 \ln\frac{V_2}{V_1}.$$

Во время изотермического расширения *3 – 4* у окружающей среды при температуре T_2 отнимается количество теплоты, равное совершаемой над средой работе

$$A_{34} = R\,T_2 \ln\frac{V_2}{V_1}.$$

Полная механическая работа определяется площадью фигуры, ограниченной изотермами и адиабатами

$$A_{\text{полн}} = R(T_1 - T_2)\ln\frac{V_2}{V_1}.$$

По определению, коэффициент использования энергии КИЭ называется величина

$$\eta = \frac{T_1}{T_1 - T_2} = \frac{Q_{12}}{A_{34}} = 6{,}46.$$

Для работы теплового насоса мощностью 150 кВт потребуется механическая мощность

$$A = \frac{Q_{12}}{\eta} = 23{,}2 \text{ кВт}.$$

Пример 2.5.5. *Тепловая машина, работающая по циклу Карно, в качестве рабочего тела использует воздух, который при нормальных условиях* (*давление* p_1=10^5 Па, *температура* T_1= 273 K) *занимает объем* V_1= 1 л, *а после изотермического и адиабатического расширения объемы соответственно равны* V_2= 3 л и V_3= 5 л (*рис.* 2.5.6). *Определить работу* A_i, *совершаемую газом на каждом участке цикла, полную работу* $A_{\text{полн}}$ *за весь цикл и* КПД *цикла.*

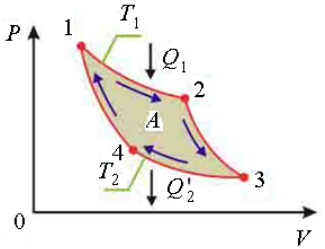

Рис. 2.5.6

Решение. Цикл Карно (рис. 2.5.6) состоит из двух изотерм (*1 – 2* и *3 – 4*) и двух адиабат (*2 – 3* и *4 – 1*). Работа при изотермическом расширении газа *1 – 2* равна $A_{1-2} = RT_1\frac{m}{\mu}\ln\frac{V_2}{V_1}$. Найдем количество молей газа из уравнения Клапейрона – Менделеева

$$p_1V_1 = \frac{m}{\mu}RT_1;\ \frac{m}{\mu} = \frac{p_1V_1}{RT_1} = 0{,}044 \text{ моль};\ A_{1-2} = 110 \text{ Дж}.$$

Работа при адиабатическом расширении газа *2 – 3* равна

$$A_{2-3} = \frac{m}{\mu}\frac{RT_1}{\gamma-1}\left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right] = \frac{m}{\mu}\frac{RT_1}{\gamma-1}\left[1 - \frac{T_2}{T_1}\right] = \frac{p_1V_1}{\gamma-1}\left[1 - \frac{T_2}{T_1}\right]$$

Найдем температуру T_2 из уравнения адиабатического процесса *2 – 3*:

$$\frac{T_2}{T_1} = (\frac{V_2}{V_3})^{\gamma-1};\ T_2 = T_1(\frac{V_2}{V_3})^{\gamma-1} = 226\ \text{К};\ A_{2-3} = 43\ \text{Дж}.$$

Работа при изотермическом сжатии газа *3 – 4* равна

$$A_{3-4} = \mathrm{R}T_2\,\frac{m}{\mu}\ln\frac{V_4}{V_3}.$$

Найдем объем газа после изотермического сжатия V_4 из уравнения адиабатического процесса *4 – 1*:

$$\frac{T_1}{T_2} = (\frac{V_4}{V_1})^{\gamma-1};\ V_4 = V_1(\frac{T_1}{T_2})^{\frac{1}{\gamma-1}} = 1{,}6\ \text{л};\ A_{3-4} = -97{,}2\ \text{Дж}.$$

Работа при адиабатическом сжатии газа *4 – 1* равна

$$A_{4-1} = \frac{m}{\mu}\,\frac{RT_2}{\gamma-1}\left[1-\frac{T_1}{T_2}\right] = -43\ \text{Дж}.$$

Работа за весь цикл

$$A_{\text{полн}} = \sum_{i=1}^{4} A_i = A_{1-2} + A_{2-3} + A_{3-4} + A_{4-1} = 12{,}8\ \text{Дж}.$$

КПД цикла Карно равен:

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 0{,}17.$$

Пример 2.5.6. *Многоатомный идеальный газ совершает цикл Карно* (*см. рис.* 2.5.6), *при этом в процессе адиабатического расширения объем газа увеличивается в n* = 4 раза. *Определить термический* КПД *цикла.*

Решение. Согласно определению термического КПД

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1},\ \text{имеем}\ \eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}.$$

Отношение температур можно найти из уравнения адиабатического процесса:

$$\frac{T_2}{T_1} = (\frac{V_2}{V_3})^{\gamma-1}.$$

Показатель адиабаты

$$\gamma = \frac{i+2}{i},\ \gamma - 1 = \frac{2}{i}.$$

Следовательно,

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 1 - (\frac{V_2}{V_3})^{\gamma-1} = 0{,}37.$$

Пример 2.5.7. *Нагреватель тепловой машины, работающей по обратимому циклу Карно, имеет температуру* T_1 = 473 К. *Определить температуру* T_2 *охладителя, если при получении от нагревателя количества теплоты* Q_1 = 1 Дж *машина совершает работу A* = 0,4 Дж? *Потери на трение и теплоотдачу не учитывать.*

Решение. Температура охладителя может быть найдена из выражения для термического КПД машины, работающей по циклу Карно, $\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}$. Отсюда $T_2 = T_1(1 - \eta)$. Термический КПД тепловой машины выражает отношение количества теплоты, которое было превращено в механическую работу A, к количеству теплоты Q_1, которое получено рабочим телом тепловой машины из внешней среды (от нагревателя), т.е. $\eta = A/ Q_1$. Таким образом, мы можем записать выражение для температуры холодильника T_2 в виде: $T_2 = T_1(1 - A / Q_1)$. Учитывая, что $T_1 = 473$ К, после вычислений получим $T_2 = 284$ К.

Пример 2.5.8. *Котел тепловой станции работает при температуре около* $t_1 = 550^\circ$ С. *Отработанное тепло отводится к реке при температуре около* $t_2 = 20^\circ$ С. *Каков максимально возможный* КПД *этой станции*?

Решение. Поскольку в формуле для КПД цикла Карно используются абсолютные температуры, надо перейти от шкалы Цельсия к шкале Кельвина: $T_1 = 550 + 273 = 823$ К; $T_2 = 20 + 273 = 293$ К. Теперь находим КПД тепловой станции: $\eta = (823 - 293)/823 = 64{,}4$ %. Конечно, реальный КПД станции заметно ниже. Если цикл Карно осуществить в обратном направлении (против часовой стрелки), то для определения эффективности холодильной установки надо использовать формулы

$$\eta' = \frac{T_2}{T_1 - T_2}, \ \eta_{\text{хол}} = \frac{T_2}{T_1}.$$

Печально, но чем ниже температура внешней среды T_1, тем меньше мы нуждаемся в холодильнике, и тем эффективнее он работает. Приведем численный пример. Если кондиционер поддерживает в комнате температуру $t_2 = 20^\circ$ С, а температура наружного воздуха равна $t_1 = 30^\circ$ С, то для холодильного коэффициента имеем $\eta' = 293/10 = 29{,}3$, а для КПД $\eta_{\text{хол}} = 293/303 = 96{,}7$ %. Конечно, на самом деле температура тепловыделяющего элемента больше наружной температуры на 20 – 30 градусов, так что разность температур может достигать

$30-40$ градусов, что приводит к значениям $\eta' \approx 7 \div 10$, $\eta_{\text{хол}} \approx 88 \div 91$ %. Напомним, что речь идет об идеальных установках, работающих по циклу Карно. Реальный типичный кондиционер потребляет мощность 750 Вт, перекачивая за час около 5 МДж тепловой энергии. Это значит, что за секунду кондиционер совершает работу A = 750 Дж и отнимает у воздуха в комнате теплоту $Q_2 = 5 \cdot 10^6 / 3600 \approx 1{,}4$ кДж. Отсюда находим

$$\eta' = Q_2 / A \approx 1400 / 750 \approx 1{,}9$$

и

$$\eta_{\text{хол}} = Q_2 / \left(Q_2 + A\right) \approx 1400 / 2150 \approx 65 \ \%.$$

Мы видим, что реальный кондиционер гораздо менее эффективен, нежели идеальный холодильник Карно.

Пример 2.5.9. *Пусть в домашнем холодильнике поддерживается температура* $t_2 = -3^\circ$C (T_2 = 270 К), *а температура в кухне равна* $t_1 = 27^\circ$C (T_1 = 300 К). *Пусть далее мотор холодильника потребляет мощность* N = 200 Вт. *Предполагая, что холодильник работает по циклу Карно и тепловыделяющий элемент имеет температуру окружающего воздуха, определить мощность потока тепловой энергии, перекачиваемой из камеры холодильника в кухню.*

Решение. За время t мотор совершит работу $A = Nt$. КПД холодильника $\eta_{\text{хол}} = T_2 / T_1 = Q_2 / Q_1 = \left(Q_1 - A\right) / Q_1$, откуда находим количество теплоты, поступающее в кухню в единицу времени:

$$\frac{Q_1}{t} = N \frac{T_1}{T_1 - T_2} = 200 \frac{300}{300 - 270} = 2 \ \text{кВт}.$$

Обратите внимание на то, что холодильник работает как весьма эффективный *обогреватель* помещения. Надо только оплачивать потребляемую мотором мощность 200 Вт, а в кухню поступит в 10 раз большая энергия, 90 % которой перекачивается из камеры холодильника (90 % – КПД холодильника в этом примере). Любопытно, что если бы вместо холодильника был включен обогреватель той же мощности, то он нагревал бы помещение в 10 раз слабее.

Пример 2.5.10. *На рис.* 2.5.7 *представлен цикл тепловой машины в координатах T, S, где T – термодинамическая температура, S – энтропия. Укажите нагреватели и холодильники с соответствующими температурами.*

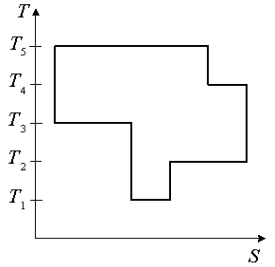

Рис. 2.5.7

Решение. Диаграмма цикла тепловой машины в координатах температура и энтропия (*T*, *S*) характеризуется следующими процессами:

Изотерма *1→2*. В контакте с нагревателем (при температуре T_5) происходит изотермическое расширение.

Адиабата *2→3*. Здесь система отсоединяется от нагревателя и не обменивается теплом с внешней средой $Q_{2\to3}=0$. Процесс *2→3* является изоэнтропическим.

Изотерма *3→4*. Система в контакте с нагревателем при температуре T_4 изотермически расширяется.

Адиабата *4→1*. Система отключена от внешней среды и продолжает сжиматься изоэнтропически, что приводит к повышению её температуры до T_1. Точки *4* и *1* лежат на адиабате, в конечном итоге система возвращается в первоначальное состояние.

Адиабата *4→5*. Система не обменивается теплом с внешней средой $Q_{4\to5}=0$. ($S_4 = S_5$). Процесс *4→5* является изоэнтропическим, температура системы падает до значения T_2 (холодильник).

Изотерма *5→6*. На этом участке система находится в контакте с холодильником T_2 и происходит изотермическое сжатие.

Адиабата *6→7*. Система теплоизолирована, не обменивается теплом с внешней средой $Q_{6\to7}=0$. Процесс *6→7* является изоэнтропическим ($S_6 = S_7$), температура системы падает до значения T_1 (холодильник).

Изотерма *7→8*. Система подключается к холодильнику с температурой T_1 и изотермически сжимается.

Адиабата *8→9*. Здесь система отсоединяется от холодильника T_1 не обменивается теплом с внешней средой $Q_{8\to 9} = 0$. Процесс *8→9* является изоэнтропическим сжатием до состояния температуры T_3.

Изотерма *9→10*. На этом участке система находится в контакте с холодильником T_3 и происходит изотермическое сжатие.

Адиабата *10→11*. Система отключается от внешней среды и продолжает сжиматься изоэнтропически, что приводит к повышению её температуры до T_5. Точки *10* и *1* лежат на адиабате, в конечном итоге система возвращается в первоначальное состояние. Следовательно, рассматриваемый в задаче цикл тепловой машины характеризуется нагревателями с температурами T_5, T_4 и холодильниками с температурами T_2, T_3, T_1. Таким образом, нагреватели – T_4, T_5; холодильники – T_1, T_2, T_3.

Пример 2.5.11. *В цилиндре под поршнем находится водород массой* m = 0,02 кг *при температуре* T_1 = 300 К. *Водород начал расширяться адиабатно, увеличив свой объем в пять раз, а затем был сжат изотермически, причем объем газа уменьшился в пять раз. Найти температуру* T_2 *в конце адиабатного расширения и работу* A, *совершенную газом. Изобразить процесс графически.*

Решение. Температуры и объемы газа, совершающего адиабатный процесс, связаны между собой соотношением

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1},$$

где γ – показатель адиабаты (для водорода как двухатомного газа $\gamma = 1,4$).

Отсюда получаем выражение для конечной температуры T_2:

$$T_2 = T_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}.$$

Подставляя числовые значения заданных величин, находим

$$T_2 = 300\left(\frac{1}{5}\right)^{1,4-1}\ \text{К} = 300\left(\frac{1}{5}\right)^{0,4}\ \text{К}.$$

Прологарифмируем обе части полученного выражения:

$$\lg T_2 = \lg 300 + 0,4\left(\lg 1 - \lg 5\right) = 2,477 + 0,4\left(-0,699\right) =$$
$$= 2,477 - 0,280 = 2,197.$$

Зная $\lg T_2$, по таблицам антилогарифмов находим искомое значение T_2: $T_2 = 157$ К.

Работа A_1 газа при адиабатном расширении определяется по формуле

$$A_1 = \frac{m}{M} c_V \left(T_1 - T_2\right) = \frac{m}{M}\frac{i}{2} R\left(T_1 - T_2\right).$$

Подставив сюда числовые значения величин, после вычисления получим

$$A_1 = \frac{0,02}{2\cdot 10^{-3}}\frac{5}{2}\cdot 8,31\left(300 - 157\right) \text{ Дж} = 29,8\cdot 10^3 \text{ Дж} = 29,8 \text{ кДж}.$$

Работа A_2 газа при изотермическом сжатии выражается формулой

$$A_2 = RT_2\left(m / M\right)\ln\left(V_2 / V_1\right).$$

Произведя вычисления по этой формуле, найдем $A_2 = -21$ кДж.

Знак «минус» показывает, что при сжатии газа работа совершена внешними силами.

Общая работа, совершенная газом при рассмотренных процессах,

$$A = A_1 + A_2 = 29,8 \text{ кДж} + \left(-21 \text{ кДж}\right) = 8,8 \text{ кДж}.$$

2.5.3. Задачи для самостоятельной работы

З**адача 2.5.1.** Один моль газа претерпевает цикл из двух изобар и двух изохор, показанный на рис. 2.5.8. Точки *2* и *4* лежат на одной изотерме. Известны давления P_1, P_2 и начальный объем газа V_1. Найти: 1) температуры во всех точках цикла; 2) работу A, совершенную газом за цикл. 3) КПД цикла. ($A = R(T_2^{1/2} - T_1^{1/2})^2$)

Задача 2.5.2. В результате кругового процесса газ совершил работу A = 1 Дж и передал охладителю теплоту $Q_2 = 4,2$ Дж. Определить термический КПД η цикла. ($\eta = 0,192$)

Задача 2.5.3. Совершая замкнутый цикл, газ получил от нагревателя теплоту $Q_1 = 4$ кДж. Какую работу A совершил газ в результате протекания всего цикла, если термический КПД цикла $\eta = 0,1$? ($A = 400$ Дж)

Задача 2.5.4. Газ, совершающий цикл Карно, отдает охладителю 2/3 теплоты Q_1, полученной от нагревателя. Температура охладителя T_1 = 280 К. Определить температуру T_1 нагревателя. ($T_1 = 420$ К)

Задача 3.5.5. Газ совершает цикл Карно. Абсолютная температура T_1 нагревателя в три раза выше абсолютной температуры T_2 охладителя. Нагреватель передал газу теплоту $Q_1 = 42$ кДж. Какую работу A совершил газ? (A = 28 кДж)

Задача 2.5.6. Газ совершает цикл Карно. Абсолютная температура T_1 нагревателя в четыре раза выше абсолютной температуры T_2 охладителя. Какую долю теплоты, получаемой за один цикл от нагревателя, газ отдает охладителю? ($Q_2 / Q_1 = 1/4$)

Задача 2.5.7. Двигатель, который работает с КПД, равным половине теоретического максимального значения Карно, имеет температуры нагревателя и холодильника равные, соответственно, 527°C и 127°C. Двигатель совершает работу, имея мощность 800 кВт. Какое количество теплоты он отдает в течение часа? (600 кВт·ч = 2,16 ГДж)

Задача 2.5.8. Тепловой двигатель, работающий по идеальному циклу Карно, использует нагреватель при 427° С и имеет КПД, равный 25 %. Какой должна быть температура нагревателя при той же температуре охладителя, чтобы КПД повысился до 35 %? (530°C)

Задача 2.5.9. Газ совершает цикл Карно. Температура охладителя T_2 = 280 К. Во сколько раз увеличится КПД цикла, если температура нагревателя повысится от T_1 = 400 К до $T_1' = 600$ К? ($\eta' / \eta = 1{,}88$)

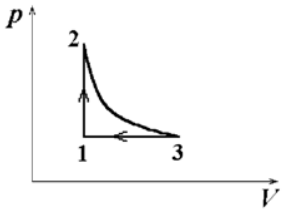

Рис. 2.5.8

Задача 2.5.10. На рис. 2.5.8 изображена pV – диаграмма для обратимого теплового двигателя, в котором в качестве рабочего тела используется 1 моль аргона (одноатомный идеальный газ). Точки *2* и *3* лежат на изотерме T = 400 К. Процесс *1 – 2* протекает при постоянном объеме, процесс *3 – 1* – при постоянном давлении. Отношение объемов $V_3/V_1 = 3$. Чему равен КПД этого двигателя? (~ 21 %)

Задача 2.5.11. Тепловой двигатель производит 7250 Дж теплоты, совершая полезную работу 2250 Дж. Чему равен КПД этого двигателя? (~ 24 %)

Задача 2.5.12. Изобретатель предлагает проект создания тепловой машины, которая за определенный интервал времени забирает $Q_1 = 110$ МДж тепла из нагревателя при температуре $T_1 = 415$ К, производит работу A = 16,7 кВт · ч и температура охладителя которой равна T_2 = 212 К. Вложили ли бы вы деньги в инвестирование этого проекта? ($\eta_{\text{проект}} = 0,55$, $\eta_C = 0,49$ – инвестирование нецелесообразно)

Задача 2.5.13. Тепловая электростанция производит работу в форме электроэнергии с КПД η = 40 % и выходной мощностью P = 850 МВт. Для отвода отработанного тепла используются охлаждающие трубы. Какой объем воздуха (в км^3) нагревается ежесуточно, если допустимое повышение температуры воздуха составляет 7,5°С? Скажется ли это существенно на местном климате? Если бы нагретый воздух образовал слой толщиной 200 м, то какую площадь он покрыл бы за сутки (24 ч) работы станции? Теплоемкость воздуха при постоянном давлении $c_p = 7,0$ кал/(моль · К).

Задача 2.5.14. Представим себе, что вблизи одного из земных полюсов, где температура окружающей среды равна – 40°С пробурили глубокую скважину до глубины, где температура составляет 800° С. Каков теоретический предел на КПД тепловой машины, работающей между этими температурами? (η = 0,783)

Задача 2.5.15. Мотор холодильника совершает работу A = 150 Дж, отбирая из камеры количество теплоты $Q_2 = 560$ Дж. Каковы холодильный коэффициент η' и КПД η холодильника?

Какое количество теплоты Q_1 поступило в кухню? ($\eta' = 3{,}73$, $\eta = 0{,}79$, $Q_1 = 710$ Дж)

Задача 2.5.16. Производя кубики льда, холодильник забрал из морозильной камеры с температурой -12°C количество тепла, равное 177 кДж. Холодильный коэффициент $\eta' = 5{,}7$, в комнате поддерживается температура 26°C. Найти КПД установки и определить, какое количество тепла передано в комнату и какую работу, надо затратить для функционирования холодильника. Сравнить холодильный коэффициент и КПД с аналогичными величинами для холодильника Карно, работающего между теми же температурами. ($\eta_{хол} = 0{,}85$, $A = 31$ кДж, $Q_1 = 208$ кДж, $\eta'_C = 6{,}9$, $\eta_C = 0{,}87$)

Задача 2.5.17. Кондиционер работает между температурами $T_2 = 21^{\circ}$ C и $T_1 = 33^{\circ}$ C. Его холодильный коэффициент составляет 14 % от коэффициента холодильника Карно, работающего между теми же температурами, причем мощность охлаждающего потока составляет $Q_2 / \Delta t = 1{,}2$ кВт. Какова мощность мотора, приводящего в действие кондиционер? ($P = 350$ Вт)

Задача 2.5.18. На диаграммах $T(V)$ и $T(p)$ изобразите процессы, состоящие из 2 изобар и 2 изохор. (Подсказка – см. пример 2.5.1)

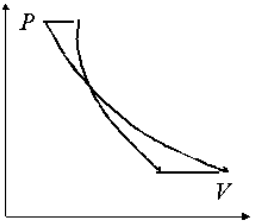

Рис. 2.5.9

Задача 2.5.19. Циклический процесс состоит из пересекающихся изотермы и адиабаты, а также из двух изобар (см. рис. 2.5.8). Изобразите этот процесс на диаграмме $T(S)$. (Подсказка – см. примеры 2.5.2 – 2.5.3)

Задача 2.5.20. Циклический процесс состоит из 2 изобар и 2 изохор. Изобразите этот процесс на диаграмме $T(S)$. (Подсказка – см. пример 2.5.1)

Задача 2.5.21. Один моль двухатомного газа совершает цикл, состоящий из двух изохор и двух изобар. Определить КПД цикла, если газ, занимающий объем 10 л при давлении $p_1 = 10^5$ Па, увеличил эти параметры вдвое. (η = 0,1)

Задача 2.5.22. Определить температуру горючей смеси в цилиндре двигателя внутреннего сгорания в конце такта сжатия, если давление до сжатия 76 кПа, в конце сжатия 851 кПа, начальная температура 315 К, степень сжатия (отношение объемов, занимаемых газом в цилиндре двигателя при крайних положениях поршня) равна 6,3. (560 К)

Задача 2.5.23. Давление воздуха в цилиндре дизеля в начале такта сжатия равно 86 кПа, в конце такта сжатия равно 3,45 МПа, при этом температура повышается от 323 до 923 К. Определить степень сжатия (отношение объемов, занимаемых газом в цилиндре двигателя при крайних положениях поршня). (14)

2.6. Реальный газ, жидкость и твердое тело. Фазовые переходы и явления на границе раздела фаз

2.6.1. Основные понятия, законы и формулы

•Формула Ван-дер-Ваальса (уравнение состояния реального газа) для одного моля газа: $\left(p + \frac{a}{V_м^2}\right)\left(V_м - b\right) = RT$ *a, b* – постоянные Ван-дер-Ваальса, которые для разных газов можно найти в справочниках.

•Формула Ван-дер-Ваальса (уравнение состояния реального газа) для произвольного количества вещества *ν*:

$$\left(p + \frac{\nu^2 a}{V^2}\right)\left(V - \nu b\right) = \nu RT\ .$$

•Внутренняя энергия реального газа с поправками Ван-дер-Ваальса: $U_{\text{В-д-В}} = \nu C_V T - \frac{\nu^2 a}{V}$.

•Изотермы Ван-дер-Ваальса (рис. 2.6.1) (реальная изотерма с фазовым переходом указана прерывистой линией).

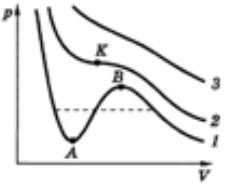

Рис. 2.6.1

·Относительная влажность воздуха H: отношение давления паров воды в атмосфере (абсолютной влажности) к величине давления насыщенного пара при данной температуре: $H = P_{H_2O} / P_{нас}$.

·Количество теплоты, необходимое для испарения определенной массы жидкости: $Q_{исп} = rm = r_{\mu}(m/\mu)$. Здесь r – удельная теплота парообразования, r_{μ} – молярная теплота парообразования. При конденсации пара в жидкость такое же количество теплоты выделяется. Количество теплоты, необходимое для расплавления определенной массы твердого тела:

$$Q_{пл} = qm = q_{\mu}(m/\mu).$$

Здесь q – удельная теплота плавления, q_{μ} – молярная теплота плавления. При кристаллизации жидкости в твердое тело такое же количество теплоты выделяется.

·Закон Дюлонга – Пти: молярная теплоемкость простых металлов примерно равна $C_{\mu} = 3R$, где R – универсальная газовая постоянная.

·Закон Дебая: при очень низких температурах молярная теплоемкость многих твердых веществ пропорциональна кубу абсолютной температуры:

$$c_p = k\left(\frac{T}{\theta_D}\right)^3,$$

где θ_D – температура Дебая и k – коэффициент пропорциональности (табличные величины).

·Капиллярное давление под изогнутой поверхностью жидкости: $\Delta P = 2\alpha/R$ для сферической поверхности; $\Delta P = \alpha/R$ для цилиндрической поверхности, где α – коэффициент

поверхностного натяжения, R – радиус кривизны поверхности. Высота подъема (или глубина опускания) жидкости в капиллярной трубке: $h = 2\alpha \cos\theta/\rho g r$, где α – коэффициент поверхностного натяжения, θ – краевой угол смачивания, ρ – плотность жидкости, g – ускорение свободного падения, r – радиус капилляра.

2.6.2. Методические рекомендации по решению задач

Пример 2.6.1. *Найти наибольший объем V, который может занимать вода в жидком виде массой m* = 1 кг.

Решение. Из вида изотерм Ван-дер-Ваальса следует, что наибольший объем вещество, оставаясь жидкостью, может занимать в критической точке $V = V_c = (m/\mu)V_{m,c}$.

Значение $V_{m,c}$ = 0,056 л/моль – молярный объем жидкости в критической точке для воды (табличная величина). (3,1 л – в три раза больше объема воды при обычных условиях!)

Пример 2.6.2. *Получить для реального* (в*ан-дер-ваальсовского*) *газа уравнение адиабаты в переменных $T(V)$ и $P(V)$.*

Решение. Уравнение адиабаты в указанных переменных для идеального газа имеет вид: PV^{γ}= const; $TV^{\gamma-1}$ = const. Заносим поправки Ван-дер-Ваальса и находим ответ:

$$(P+\nu^2 a/V^2)(V-\nu b)^{\gamma} = \text{const};\ T(V-\nu b)^{\gamma-1} = \text{const}.$$

Пример 2.6.3. *Найти выражение для энтропии одного моля реального газа в зависимости от температуры T и молярного объема газа V_{μ}.*

Решение. Формула для зависимости энтропии от молярного объема и температуры идеального газа имеет вид:

$$S(T, V_{\mu}) = R\ln V_{\mu} + C_V \ln T + \text{const}.$$

Что надо поменять для газа реального (в соответствии с поправками Ван-дер-Ваальса)? Отнять постоянную b от молярного объема. И все! $S(T, V_{\mu}) = R\ln(V_{\mu} - b) + C_V \ln T + \text{const}$.

Пример 2.6.4. *Если атмосферное давление равно $P_{\text{атм}}$* = 757 мм *ртутного столба*, *относительная влажность воздуха $H_{\text{отн}}$* = 86 %, *а температура воздуха t* = 20°C *– какова абсолютная влажность воздуха* (*масса водяных паров в единице объема*)? *Какую долю* η *от атмосферного давления составляет парциальное давление водяных паров*?

Решение. Сначала переведем значение атмосферного давления

в СИ. Давление ртутного столба высотой h равно $p = \rho g h = 13{,}55 \cdot 10^3 \times 9{,}81 \times 0{,}757 = 100{,}6$ кПа (плотность ртути $\rho = 13{,}55$ т/м^3). По табл. П. 9 находим давление насыщенных паров при данной температуре воздуха: $p_{\text{н}} = 2{,}34$ кПа. Парциальное давление паров воды $p_i = p_{\text{н}}\left(r/100\,\%\right) = 2{,}34 \times 0{,}86 = 2{,}01$ кПа, и мы можем уже ответить на второй вопрос задачи: $\eta = p_i / p = 2{,}01/100{,}6 = 0{,}02$. Теперь применим уравнение Клапейрона – Менделеева для водяного пара. Поскольку искомая абсолютная влажность есть не что иное, как плотность водяного пара $r_a = m/V$, то немедленно находим

$$r_a = \frac{p_i \mu}{RT} = \frac{2{,}01 \cdot 10^3 \times 18 \cdot 10^{-3}}{8{,}31 \times 293} = 14{,}9 \text{ г/м}^3.$$

Пример 2.6.5. *Если температура при неизменном давлении и концентрации водяного пара понизится, то в воздухе может появиться туман. Если парциальное давление водяного пара составляет* 2 кПа, *при какой температуре* $t_{\text{р}}$ *это произойдет*? *Какое количество росы выпадет на землю при понижении температуры до* $t_1 = 10^\circ$ C?

Решение. Надо найти температуру $t_{\text{р}}$ (ее называют *точкой росы*), при которой давление $p_{\text{н}}$ насыщенного водяного пара станет равным парциальному давлению 2 кПа, относительная влажность воздуха достигнет 100 % и дальнейшее понижение температуры приведет к конденсации «излишков» пара. В табл. П. 9 (см. приложение) нет значения 2 кПа для давления насыщенного пара, но имеются значения 1,71 кПа для 15°C и 2,18 кПа для 20°C. Поскольку интервал между 15°C и 20°C не столь велик, для более точного определения точки росы используем линейное приближение: будем считать, что в указанном интервале зависимость давления от температуры дается формулой

$$p_{\text{н}} = 1{,}71 + \frac{t-15}{5}\left(2{,}34 - 1{,}71\right) = 0{,}126t - 0{,}180,$$

где давление измеряется в килопаскалях, а температура – в градусах Цельсия. Приравнивая $p_{\text{н}}$ и p_i, находим искомую точку росы: $t_{\text{р}} = \left(2{,}01 + 0{,}18\right)/0{,}126 \approx 17^\circ$ C. При понижении температуры

до значения $t_1 = 10^\circ$C давление насыщенного пара понижается до $p_{i,1} = 1,23$ кПа, как следует из той же табл. П. 9. В этой же пропорции уменьшается плотность водяных паров: $r_{a,1} = r_a \cdot \left(p_{i,1} / p_i \right) = 9,1$ г/м^3. Следовательно, из каждого кубометра воздуха на землю выпадет (14,9 – 9,1) = 5,8 г воды.

Пример 2.6.6. *Какое количество теплоты необходимо затратить, чтобы нагреть* 1 моль *льда от температуры* – 200°C *до температуры плавления* (*считаем, что во всем диапазоне температур теплоемкость льда постоянна и равна* $c_л$ = 2,1 кДж/кг), *затем расплавить, нагреть образовавшуюся воду до температуры кипения* (*считаем, что во всем диапазоне температур теплоемкость воды постоянна и равна* $c_в$ = 4,18 кДж/кг) *и, наконец, полностью испарить ее*? *Сравнить количества теплоты, затрачиваемые на каждом этапе процесса. Какое количество тепловой энергии придется затратить в расчете на одну молекулу* H_2O? *Ответ выразить в электрон-вольтах.*

Решение: Используем стандартные формулы для всех четырех этапов процесса:

$$Q = c_Л(0^\circ\text{C} - (-200^\circ\text{C})) + qm + \text{Св} \cdot 100^\circ\text{C} + rm = 7,6 \text{ кДж} +$$
$$+ 6,0 \text{ кДж} + 7,5 \text{ кДж} + 40,5 \text{ кДж} = 61,6 \text{ кДж}.$$

Основные затраты теплоты (около 65 %) приходятся на испарение воды. Чтобы определить затраты тепловой энергии в расчете на одну молекулу, надо разделить полученный результат на число Авогадро переводной коэффициент

$$1,6 \cdot 10^{-19} \text{ эВ/Дж}: E = 6,16 \cdot 10^4 / 6 \cdot 10^{23} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} = 0,64 \text{ эВ}.$$

Эта величина характеризует величину энергии связи между молекулами в кристалле льда.

Пример 2.6.7. *Оценить, при какой* (*примерно*) *температуре закон Дебая должен переходить в закон Дюлонга – Пти.*

Решение: При переходной температуре оба закона должны указывать на одинаковые теплоемкости, то есть должно выполняться условие $k(T/\theta_D)^3 \sim 3R$. Следовательно, $T \sim \theta_D(3R/k)^{1/3}$. Для многих веществ постоянная R во много раз меньше k. Но после извлечения из их отношения корня кубического разница сильно сокращается.

Пример 2.6.8. *Считая процесс образования мыльного пузыря изотермическим, определить работу A, которую необходимо совершить, чтобы увеличить его диаметр от* d_1 = 6 мм *до* d_2 = 60 мм. *Коэффициент поверхностного натяжения мыльного раствора принять равным* α = 40 мН/м.

Решение. По определению коэффициент поверхностного натяжения

$$\alpha = \frac{\Delta E}{\Delta S}.$$

Здесь ΔE – поверхностная энергия, связанная с площадью ΔS поверхности пленки. $\Delta E = A$, а $\Delta S = 2S_2 - 2S_1$ ($S_2 = \pi d_2^2$, $S_1 = \pi d_1^2$). Учитывая, что T = const и α = const, получаем

$$A = \alpha\, 2\pi\, (d_2^2 - d_1^2) = 890 \text{ мкДж}.$$

Пример 2.6.9. *Решето имеет плоское дно с круглыми отверстиями диаметром d* = 1 мм. *Какой толщины h слой воды сможет удержаться в решете не проливаясь сквозь отверстия*? *Считать, что вода не смачивает материал решета*.

Решение. Если вода не смачивает материал решета, то капли жидкости смогут удержаться в отверстиях за счет давления, создаваемого изогнутой сферически поверхностью капли (рис. 2.6.2).

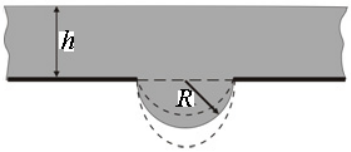

Рис.2.6.2

Минимальный возможный радиус кривизны капли равен радиусу отверстия. Поверхность такой капли создаст давление: $\Delta P = 2\alpha/R = 4\alpha/d$, где α – коэффициент поверхностного натяжения воды. Это давление противостоит гидростатическому давлению слоя воды толщиной h: $P = \rho g h$, где ρ – плотность воды, g – ускорение свободного падения. Вода сможет удержаться в решете, если это давление не превысит давления поверхностного натяжения капли: $\rho g h \leq 4\alpha/d$. Таким образом, решето способно удержать слой воды, толщиной не более $h = 4\alpha/\rho g d$ = 2,8 см.

Пример 2.6.10. *Две вертикальные, параллельные друг другу стеклянные пластины частично погружены в воду. Зазор между*

пластинами имеет ширину d = 0,5 мм. *Ширина пластин по горизонтали составляет* l = 10 см. *Считая смачивание полным*, *определить*: *а*) *высоту* h *на которую поднимется вода в зазоре*; *б*) *силу* F, *с которой пластины притягивают друг к другу*.

Решение: Поскольку давление, создаваемое цилиндрически изогнутой поверхностью жидкости, в два раза меньше, чем сферической, то и подъем жидкости между двумя пластинами будет в 2 раза меньше, чем в трубке с диаметром, равным зазору между пластинами: $h = 2\alpha/\rho g d = 3$ см, где α – коэффициент поверхностного натяжения, ρ – плотность жидкости, g – ускорение свободного падения. Краевой угол смачивания равен 0. Сила притяжения пластин определяется произведением действующего на пластины капиллярного давления на площадь смоченной поверхности: $F = \Delta P l h = 4\alpha^2 l/\rho g d^2 = 0{,}8H$.

2.6.3. Задачи для самостоятельной работы

Задача 2.6.1. Один моль азота охлажден до температуры –100°С. Определить давление газа, если занимаемый им объем равен: *а*) 1,0 л; *б*) 0,1 л. Сравнить с давлением, которое существовало бы в газе, если он сохранял свойства идеального. (*а*) 1,36 МПа = $0{,}95P_{\text{ид}}$; б) 10 МПа = $0{,}7\ P_{\text{ид}}$)

Задача 2.6.2 Решить задачу 2.6.1 для двух молей азота при тех же значениях температуры и объемов. Сравнить с результатами задачи 2.6.1. (*а*) 2,6 МПа = $0{,}9P_{\text{ид}}$; *б*) 80 МПа = $2{,}7P_{\text{ид}}$)

Задача 2.6.3. Углекислый газ массой 6,6 кг при давлении 0,1 МПа занимает объем 3,75 м^3. Определить температуру газа, если: 1) газ реальный; 2) газ идеальный. Поправки a и b в уравнении Ван-дер-Ваальса принять равными соответственно $a = 0{,}361$ Нм^4/моль^2 и $b = 4{,}28\,10^{-5}$ м^3/моль. (1) $T_1 = 302$ К; 2) $T_2 = 301$ К)

Задача 2.6.4. Один моль азота расширяется адиабатически в пустоту от объема 1,0 л до объема 10,0 л. Найти приращение температуры газа (учитывая, что газ реальный). ($\Delta T = -5{,}8$ К)

Задача 2.6.5. Два моля азота расширяются в пустоту от объема 2,0 л до объема 10,0 л. Какое количество теплоты следует сообщить газу, чтобы его температура осталась прежней (газ – реальный). (Q = 38 Дж)

Задача 2.6.6. Некое вещество при температуре T и давлении P претерпевает фазовый переход «жидкость – пар». Объем вещества меняется при этом от V_1 (жидкость в начале испарения) до V_2 (насыщенный пар). Известны масса m и удельная теплота испарения вещества q. Найти: 1) работу A, совершенную веществом в процессе фазового перехода; 2) количество теплоты Q, полученное в процессе перехода; 3) приращение внутренней энергии ΔU; 4) приращение энтропии ΔS; 5) приращение свободной энергии ΔF. (1) $A = P(V_2 - V_1)$; 2): $Q = qm$; 3) $\Delta U = qm - P(V_2 - V_1)$; 4) $\Delta S = \Delta Q/T = qm/T$; 5) $\Delta F = \Delta U - T\Delta S = -P(V_2 - V_1)$)

Задача 2.6.7. С помощью справочной табл. П. 7 (см. приложение) найти отношение молярной теплоты плавления к абсолютной температуре плавления для простых двухвалентных металлов – W, Au, Cu, Ni, Pt. Сравнить полученные отношения. (Все отношения попадают в диапазон (9,7$\pm$0,5) Дж/моль. Разброс всего 5 %)

Задача 2.6.8. В тонкостенной пластиковой бутылке находится $m_0 = 1$ кг переохлажденной воды. В бутылку бросили сосульку массой $m_1 = 100$ г, имеющую ту же температуру, что и вода в бутылке. После установления теплового равновесия в бутылке оказалось $m_2 = 900$ г жидкости. Какую температуру имела переохлажденная вода? Теплоемкостью бутылки и потерями тепла пренебречь. ($t \cong -8{,}5^{\circ}$C)

Задача 2.6.9. Конькобежец массой 67 кг, движущийся со скоростью 10 м/с, скользит по льду и останавливается. Если лед находится при температуре 0°C и 50 % теплоты, произведенной в результате трения, поглощается льдом, то какое количество льда растает? (5 г)

Задача 2.6.10. Определите количество теплоты, необходимое для нагревания 3 молей каменной соли от температуры ~ 0 К до 40,0 К (выполняется закон Дебая). Для каменной соли температура Дебая $\theta_D = 281$ К и коэффициент пропорциональности в законе Дебая $k = 1940$ Дж/(моль· К) (0,67 кДж)

Задача 2.6.11. Для поддержания неизменной температуры воды в сосуде в него капают горячей водой из чайника, температура которого 80°C. (Капли быстро смешиваются с водой сосуда, «лишняя» вода вытекает из сосуда через верх). При температуре

окружающей среды 20°С для поддержания температуры в сосуде равной 50°С приходится капать 10 раз в минуту. Какая температура установится в сосуде, если капать в два раза чаще? А если капать в два раза реже? Считать, что теплоотдача пропорциональна разности температур. (60° и 40°С соответственно)

Задача 3.6.12. В кухне на столе стоит стакан, в который налили 200 г воды и бросили несколько кусочков льда. В воду погружен термометр, и мы можем наблюдать за его показаниями по мере таяния льда. Первые $\tau_1 = 20$ мин температура не менялась, затем она начала возрастать и за время $\tau_2 = 5$ мин увеличилась на два градуса. Сколько льда было в стакане? Удельную теплоту плавления льда принять равной 330 кДж/кг, удельная теплоемкость воды составляет 4,2 кДж/(кг · К). (22 г)

Задача 2.6.13. Водяной нагреватель может производить 8000 ккал/ч. Сколько воды сможет он нагреть в течение часа от 20° до 60°С? (200 кг)

Задача 2.6.14. Используя закон Дюлонга – Пти определить удельную теплоемкость меди и алюминия. (0,39 Дж/г·К и 0,92 Дж/г·К соответственно)

Задача 2.6.15. Сферическая капелька ртути разделена на: *а*) 10; *б*) 100; *в*) 1000 одинаковых меньших капелек соответственно. Как при этом изменилось капиллярное давление под поверхностью капелек? (Возросло в: *а*) 2,15; *б*) 4,64; *в*) 10 раз соответственно)

Задача 2.6.16. В стеклянную трубку с внутренним диаметром 20 мм соосно вставлена стеклянная палочка диаметром 19 мм. Считая смачивание полным, определить высоту капиллярного поднятия воды в зазоре между трубкой и палочкой. (3 см)

Задача 2.6.17. Капля ртути объемом 22,5 мм^3 помещена между двумя параллельными стеклянными пластинами. С какой силой надо прижимать пластины друг е другу, чтобы установить между ними зазор в 3 мкм. Ртуть стекло не смачивает. (2,4 кН)

Задача 2.6.18. В капилляре диаметром d = 100 мкм вода поднимается на высоту h = 30 см. Определить коэффициент поверхностного натяжения α воды, если ее плотность ρ = 1 г/см^3. (α = 22 мН/м)

Задача 2.6.19. Определить радиус R капли спирта, вытекающей из узкой вертикальной трубки r = 1 мм. Считать, что в момент

отрыва капля сферическая. Коэффициент поверхностного натяжения спирта α = 22 мН/м, а его плотность ρ = 0,8 г/см^3. (R = 1,61 мм)

Задача 2.6.20. Воздушный пузырек диаметром d = 0,02 мм находится на глубине h = 25 см под поверхностью воды. Определить давление воздуха в этом пузырьке. Атмосферное давление принять нормальным. Коэффициент поверхностного натяжения воды α = 73 мН/м, а ее плотность ρ = 1 г/см^3. ($p = p_0 + \rho g h + \frac{4\alpha}{d} = 118$ кПа)

Задача 2.6.21. Какую работу надо совершить против сил поверхностного натяжения, чтобы разбить сферическую каплю ртути радиусом 3 мм на две одинаковые капли. ($A = 1{,}47 \cdot 10^{-5}$ Дж)

3. Элементы статистической физики

3.1. Элементы теории вероятности. Распределения. Энтропия в статистической физике

3.1.1. Основные понятия, законы и формулы

• Вероятность события с дискретным числом исходов:

пусть N – общее число одинаковых опытов с разными возможными результатами, занумерованными индексом i; N_i – число выпавших результатов типа i, тогда вероятностью события типа i является предел:

• сложение вероятностей: вероятность выпадения в одном из испытаний **ИЛИ** результата типа i, **ИЛИ** результата типа k:

$$P_{i \text{ или } k} = P_i + P_k, \text{ где } P_i = \lim_{N\to\infty} \frac{N_i}{N}.$$

• Умножение вероятностей: вероятность выпадения в двойном испытании **И** результата типа i, **И** результата типа k: $P_{i \text{ и } k} = P_i \, x \, P_k$.

• Вероятность события с непрерывным числом исходов. Для непрерывно распределенной величины X: вероятность при испытании найти ее в интервале от X до $X + dX$ равна $dP(x) = f(x)dx$, где $f(x)$ – функция распределения вероятности для непрерывно распределенной величины.

• Вероятность и ее основные свойства:

вероятность невозможного события нулевая $P = 0$;

вероятность достоверного события равна единице $P = 1$;

вероятность неотрицательна $P \geq 0$.

Нормировка вероятности на единицу:

$$\sum_i P_i = \frac{\sum N_i}{N} = 1, \ \int dP_x = \int f(x)\,dx = 1.$$

Вероятность того, что x принадлежит интервалу от x_1 до x_2: для непрерывно распределенной величины вероятность того, что величина x точно равна x_0, нулевая.

• Для любой функции $F(x)$ от непрерывно распределенной переменной x среднее значение этой функции на интервале от x_1 до x_2 равно: $P(x_1 \leq x \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$.

• Равномерное распределение: если вероятности обнаружения при испытании любого значения переменной x одинаковы, то

$$f(x) = \text{const}.$$

• Нормальное распределение (распределение Гаусса) характерно для большого числа случайных процессов. Здесь μ – среднее значение (математическое ожидание) случайной величины, указывает $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ – положение максимума кривой плотности распределения; σ – дисперсия (характерный разброс значений случайной величины).

• Статистический вес состояния (результата испытания) – это количество способов, которым может реализоваться данное состояние (результат испытания) – Ω_i. Статистический вес прямо пропорционален вероятности выпадения данного результата (реализации данного состояния).

• Энтропия – $S = C\ln(\Omega_i)$ – натуральный логарифм статистического веса состояния, умноженный на некоторую константу, удобную в том или ином случае. В статистической физике это постоянная Больцмана.

3.1.2. Методические рекомендации по решению задач

Пример 3.1.1. *Какова вероятность того, что при однократном бросании кости выпадет четное число*?

Решение. Поскольку выпадение какого-то из чисел исключает выпадение другого, то эти события несовместимы. На гранях кости имеются четные числа (2, 4, 6), вероятности, появления которых одинаковы: $P(2) = P(4) = P(6) = 1/6$. Вероятность выпадения четного числа вычисляем по правилам сложения вероятностей: $1/6 = 1/6 = 1/6 = 1/2$. Очевидность полученного результата иллюстрирует высказывание французского математика Лапласа, что теория вероятностей есть здравый смысл, сведенный к математическому исчислению.

Пример 3.1.2. *Пусть бросаются две игральные кости. Какова вероятность, что сумма чисел на гранях равна* 12?

Решение. Такой исход возможен при выпадении шестерок на каждой из костей, причем число очков на одной из костей с очевидностью не влияет на число очков на другой. Искомая вероятность равна $(1/6) \cdot (1/6) = 1/36$.

Пример 3.1.3. *Какова вероятность того, что в результате* 5 *бросков монетки выпадет три орла и две решки*?

Решение. Будем для краткости обозначать орлы нулями, а решки – единицами. Выпадение орла или решки на любом броске равновероятно – вероятности $P(0) = P(1) = 1/2$. Зададимся вопросом, а какие вообще возможны исходы такого испытания? 1) Могут выпасть 5 орлов подряд (00000). Вероятность такого события определяется методом перемножения вероятностей: $1/2\times1/2\times1/2\times1/2\times1/2 = 1/32$. 2) Могут выпасть 4 орла и одна решка, но это может произойти уже пятью способами. Обозначим каждый способ последовательность нулей и единиц: 10000 01000 00100 00010 00001. 5 – это статистический вес данного результата. Вероятность реализации любой из последовательностей 1/32 $P_k = N\ !/k!(N–k)!\ 2^N$. Общая вероятность получения 4 орлов и 1 решки – 5/32. 3) Теперь 3 орла и 2 решки. Цепочка возможных способов реализации будет еще длиннее: 11000 10100 10010 10001 01100 01010 01001 00110 00101 00011 – всего 10 вариантов. 10 – это статистический вес данного результата. Вероятность его, очевидно, 10/32 = 5/16. Продолжим, однако, дальше. 3 возможных результат мы проанализировали, но есть еще три – симметричные. В силу равной вероятности выпадения орлов и решек, 3 решки и 2 орла получатся с вероятностью 5/16, 4 решки и 1 орел с вероятностью 5/32, а 5 решек с вероятностью 1/32. Всего 6 возможных результатов. Сложим все вероятности:

$$1/32 + 5/32 + 10/32 + 10/32 + 5/32 + 1/32 = 32/32 = 1,$$

что естественно. $32 = 2^5$ – общее число способов реализации всех возможных 6 результатов. Заметим, что 6 = 5 + 1, где 5 – число бросков в серии испытаний. Без доказательств обобщим полученный результат на случай произвольного числа бросков N. В таких сериях будет $N + 1$ возможных результатов, которые могут реализоваться 2^N числом способов. Вероятность реализации результата из k орлов и $N – k$ решек определяется известной формулой из математической комбинаторики: если число N очень велико, это распределение вероятности превращается в нормальное (гауссово). Посмотрите на рис. 3.1.1. Там изображена гистограмма распределения результатов для 10 бросков монетки, а рядом – непрерывная функция гауссова распределения. Если N очень велико – гистограмма превращается фактически в непрерывную

функцию. Это можно доказать, используя приближенную формулу Стирлинга: $\ln(N!) = N\ln N - N + \ln(2\pi N)/2$.

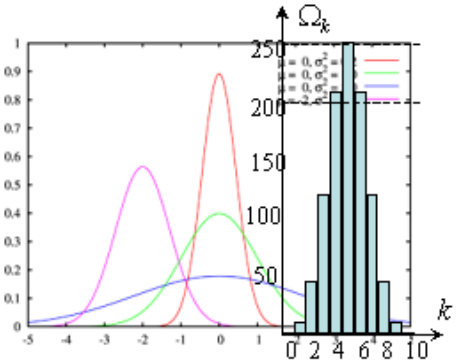

Рис. 3.1.1

Пример 3.1.4. *Теперь бросаем монетку на дальность – не целясь, в квадратный лоток со стороной* 1 м. *Монетки всегда падают в лоток, но в разные точки – равновероятно. Какова вероятность того, что монетка упадет на расстоянии* 10 см *от ближнего края лотка*?

Решение. Обозначим расстояние до переднего края лотка буквой x. Любое значение переменной x реализуется равновероятно. Следовательно, функция распределения $f(x) = \text{const}$. Найдем эту константу из условия нормировки: интеграл от нее от $x_1 = 0$ до $x_2 = 1$ м (вся область возможных результатов) должен равняться единице. То есть $f(x) = \text{const} = 1$ м$^{-1}$. Вероятность, что x принадлежит интервалу от x_1 до x_2: в нашем случае эта вероятность 0:

1) *функция вероятности распределения положения маятника по координатам* $f(x)$;

2) *среднее значение координаты* $< x >$;

3) *среднее значение модуля координаты* $< |x| >$;

4) *среднее значение квадрата координаты* $< x^2 >$.

Решение. Вспомним первую часть нашего семестрового курса и запишем уравнение гармонических колебаний:

$$x(t) = A\sin(2\pi t/T + \varphi).$$

1) Вероятность того, что маятник имеет координату в интервале от x до $x + dx$ по определению равна $dP_x = f(x)dx$. С другой стороны, из естественных физических соображений, вероятность в

случайный момент времени найти маятник в этом интервале координат должна быть пропорциональна *времени нахождения маятника* в данном интервале dt! Попробуем его найти. Если этот интервал мал, то $x(t+dt) = x(t) + x'(t)dt$ или $x\ (t+dt) - x(t) = dx = x'(t)dt$. Величину производной $x'(t)$ вычислим явно:

$$x'(t) = (A\sin(2\pi t/T + \varphi))' = (2\pi A/T)\cos(2\pi t/T + \varphi).$$

Нам, однако, надо бы выразить dt только через x и dx так, чтобы время t в это выражение явно не входило. Это можно сделать, заметив, что для любого t $A^2\cos^2(2\pi t/T + \varphi) + A^2 sin^2(2\pi t/T + \varphi)) = A^2$, а следовательно, $x'(t) = (2\pi A/T)\cos(2\pi t/T + \varphi) = (2\pi/T)(A^2 - x^2)^{1/2}$. Теперь можно явно записать величину интервала времени dt, в течение которого маятник находится в интервале координат dx вблизи координаты x: $dt = dx/x'(t) = Tdx/2\pi(A^2 - x^2)^{1/2}$. Такое событие случается один раз на каждые полпериода гармонической функции. Следовательно, вероятность этого события вычисляется делением интервала времени dt на $T/2$:

$$dP_x = f(x)dx = dx/\pi(A^2 - x^2)^{1/2} => f(x) = 1/\pi(A^2 - x^2)^{1/2}.$$

Теперь, зная функцию распределения, вычислим средние величины.

2) $< x > = \int_{-A}^{A} xf(x)dx = 0$. Почему сразу 0? Функция $f(x)$ – четная. Следовательно, подынтегральная функция – нечетная и в симметричных пределах интеграл от нее равен нулю. Это совершенно естественный результат: маятник симметрично отклоняется от нулевой координаты в обе стороны.

3) $< |x| > = \int_{-A}^{A} |x|f(x)dx = 2\int_{0}^{A} xf(x)dx = 2A/\pi$. Здесь подынтегральная функция четная. Подставьте и убедитесь в правильности ответа обе стороны.

4) $< x^2 > = \int_{-A}^{A} x^2 f(x)dx = A^2/2$. Проверьте интеграл самостоятельно.

Пример 3.1.6. *Имеется коллектив из ста человек. Мы знаем, сколько человек имеют рост в тех или иных пределах* (*табл.* 3.1.1).

Таблица 3.1.1

Диапазон, см	<165	165-170	170-175	175-180	180-185	>185
Число, чел.	10	25	35	15	10	5

Какова вероятность того, что рост наугад выбранного человека из этого же коллектива превышает 175 см?

Решение. Вероятность того, что рост наугад выбранного человека попадает в тот или иной интервал равна по определению отношению числа людей, имеющих рост в этом интервале, к общему числу людей в коллективе. То есть, числа в таблице надо поделить на 100. По закону сложения вероятностей приходим к ответу: 0,15 + 0,1 + 0,05 = 0,3 Аналогично находится вероятность того, что рост будет ниже 175 см: 0,1 + 0,25 + 0,35 = 0,7. Зададим теперь вопрос: чему равна вероятность того, что произвольно выбранный индивидуум имеет хоть какой-нибудь рост? Вероятность эта равна 0,3 + 0,7 = 1, что очевидно, потому как должен же человек иметь хоть какой-нибудь рост? Это пример условия нормировки вероятности. Вероятность эта равна единице:

$$\sum_i P_i = \frac{10}{100} + \frac{25}{100} + \frac{35}{100} + \frac{15}{100} + \frac{10}{100} + \frac{5}{100} = \frac{100}{100} = 1,$$

что согласуется с определением вероятности.

Пример 3.1.7. *Рассмотрим теперь три коллектива по сто человек в каждом, один из которых состоит исключительно из блондинов, другой – из брюнетов, а третий – из шатенов. Пусть в каждом из них имеется то же самое распределение по росту, что и рассмотренном выше примере. Перемешаем коллективы и получим новый коллектив из трехсот человек. Ясно, что при таком перемешивании распределение по росту не изменилось, причем рост индивидуума не зависит от цвета его волос. Вероятности того, что индивидуум будет брюнетом, блондином или шатеном равны между собой* (1/3)*. Какова вероятность, что наугад выбранный* человек *окажется брюнетом с ростом в пределах от* 175 см *до* 180 см?

Решение. Ответ получается на основе закона умножения вероятностей: (1/3) 0,15 = 0,05.

Пример 3.1.8. *Идеальный газ содержит N молекул, заключенных в объеме V. Определите, какова вероятность того, что в выделенной мысленно малой части объема v содержится n молекул.*

Решение. Представим себе, что весь объем первоначально пуст, и мы «набрасываем» туда молекулы одну за одной. Вероятность того, что случайно брошенная молекула попадет в малый

выделенный объем равна $p = \frac{v}{V}$. Вероятность того, что в этом объеме окажутся ровно n частиц, а остальные $N - n$ окажутся в остальной части сосуда $V - v$ равна $p^n (1-p)^{N-n}$. Число способов, которыми n произвольных молекул может быть выбрано из общего числа N молекул, равно числу сочетаний из N элементов по n, которое равно

$$C_N^n = \frac{N!}{n!(N-n)!}.$$

Полная вероятность нахождения в объеме n произвольно выбранных молекул равна

$$w_N(n) = \frac{N!}{n!(N-n)!}\left(\frac{v}{V}\right)^n \left(1-\frac{v}{V}\right)^{N-n}.$$

Полученное выражение носит название ***биномиального распределения.***

Пример 3.1.9. *Рассмотрим пример* 3.1.8 *в предельном случае* $N \gg n$.

Решение. При $N \gg n$ в биномиальном законе можно пренебречь n в показателе степени и, кроме того, переписать:

$$w_N(n) = \frac{N(N-1)...(N-n+1)}{n!} p^n (1-p)^N \approx \frac{<n>^n}{n!}\left(1-\frac{<n>}{N}\right)^N,$$

где $< n > = pN$. Получаем $w(n) = \lim\limits_{N\to\infty} w_N(n) = \frac{<n>^n}{n!} e^{-<n>}$.

Полученная формула носит название ***распределение Пуассона.***

Пример 3.1.10. *При термоэлектронной эмиссии происходит вылет электронов с поверхности металла или полупроводника. Предполагая, что*: 1) *вылеты электронов статистически независимые события*; 2) *вероятность вылета одного электрона за бесконечно малый промежуток времени dt равна* $\lambda\, dt$ (λ *– постоянная величина*), *определить вероятность вылета n электронов за время t.*

Решение. Обозначим через $P_n(t)$ вероятность вылета n электронов за время t, а через $P_0(t)$ – вероятность невылета ни одного электрона за это же время. Используя предположение о статистической

независимости событий вылета электронов и учитывая правило подсчета вероятности двух последовательных событий, получаем

$$P_n(t + dt) = P_{n-1}(t)\, P_1(dt) + P_n(t)\,(1 - P_1(dt));$$
$$P_0(t + dt) = P_0(t)\,(1 - P_1(dt)),$$

где $P_1(dt)$ – вероятность вылета одного электрона за бесконечно малое время dt. Эта вероятность равна $P_1(dt) = \lambda\, dt$. Раскладывая теперь левые части первых двух соотношений в ряд по степеням dt и устремляя dt к нулю, находим

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = \lambda[P_{n-1}(t) - P_n(t)],\ \frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t).$$

К полученной системе дифференциальных уравнений для $P_n(t)$ следует еще добавить начальное условие, которое можно записать так:

$$P_n(0) = \begin{cases} 1, \text{когда } n = 0; \\ 0, \text{когда } n \neq 0. \end{cases}$$

Решение системы дифференциальных уравнений с начальными условиями легко находится и имеет вид

$$P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!}\, e^{-\lambda t} \text{ (распределение Пуассона)}$$

Пример 3.1.11. *Найдите асимптотическое выражение формулы Пуассона для случая, когда среднее число частиц в выделенном объеме велико.*

Решение. При больших значениях n для $n!$ можно записать асимптотическое выражение – формулу Стирлинга $\ln n! = n \ln n - n$. Логарифмируя формулу Пуассона, находим: $\ln w(n) = n \ln n + n =$

$$= (< n > - \Delta n) \ln < n > \ < n > - < n > - (< n > - \Delta n) \ln < n > \ (1 - \frac{\Delta n}{n}) +$$

$$+ < n > - \Delta n = -(< n > - \Delta n) \ln (1 - \frac{\Delta n}{n}) - \Delta n \approx \frac{(\Delta n)^2}{2n} - \frac{(\Delta n)^2}{n} + \ldots. =$$

$$= -\frac{(\Delta n)^2}{2n} + \cdots, \text{ откуда получаем}$$

$$w(n) = \text{const} \exp\left(-\frac{(< n > - \Delta n)^2}{2 < n >} \right).$$

Постоянная находится из условия нормировки. В результате получам:

$$w(n)\,dn = \frac{1}{\sqrt{2\pi < n >}} \exp\left(-\frac{\left(< n > -\Delta n \right)^2}{2 < n >} \right) dn .$$

Полученное выражение носит название ***распределения Гаусса.***

Пример 3.1.12. *Статистический вес идеального газа, находящегося в герметическом баллоне, зависит от внутренней энергии в соответствии с формулой* $\Omega = CU^{\frac{3N}{2}}$, *где C – некоторая постоянная, зависящая от объема и количества газа, N – число молекул газа, U – внутренняя энергия газа. Выведите формулу для расчета энтропии газа.*

Решение. Применив определение энтропии, получаем

$$S = k \ln \Omega = \frac{3}{2} kN \ln U + k \ln C .$$

3.1.3. Задачи для самостоятельной работы

Задача 3.1.1. Пусть бросаются две игральные кости. Какова вероятность, что сумма чисел на гранях равна 11? (1/18)

Задача 3.1.2. В урне лежат 100 тщательно перемешанных шаров, отличающихся друг от друга только цветом: 30 белых, 25 красных и 45 зеленых. Какова вероятность вынуть красный шар. (1/4)

Задача 3.1.3. В урне лежат 100 тщательно перемешанных шаров, отличающихся друг от друга только цветом: 30 белых, 25 красных и 45 зеленых. Какова вероятность вынуть цветной шар. (7/10)

Задача 3.1.4. В урне лежат 4 четыре одинаковых шара, занумерованных цифрами 1, 2, 3, 4. Какова вероятность того, что при последовательном вынимании двух шаров они окажутся с номерами 1 и 2? (1/6)

Задача 3.1.5. Есть три коллектива по сто человек в каждом, один из которых состоит исключительно из блондинов, другой – из брюнетов, а третий – из шатенов. Пусть в каждом из них имеется то же самое распределение по росту, что и в примере 3.1.2. Перемешаем коллективы и получим новый коллектив из трехсот человек. Вопрос: какова вероятность, что наугад выбранный

человек окажется брюнетом с ростом в пределах от 175 см до 180 см? (0,05)

Задача 3.1.6. Имеется коллектив из ста человек. Мы знаем, сколько человек имеют рост в тех или иных пределах (табл. 3.1.2).

Таблица 3.1.2

Диапазон, см	<165	165-170	170-175	175-180	180-185	>185
Число, чел.	10	25	35	15	10	5

Каков средний рост человека в этом коллективе? (170,25 см)

Задача 3.1.7. Для нормального распределения $f(x) = A \exp(-ax^2)$ найти приближенную вероятность нахождения системы в интервале от 0,9999 до 1,0001. ($dP = 0{,}0002\, A \exp(-a)$)

Задача 3.1.8. По условиям примера 3.1.4 найти вероятность того, что монетка упадет не дальше 10 см от ближнего края лотка и не ближе 30 см от боковых краев. ($P = 0{,}04$)

Задача 3.1.9. Найти нормировочные константы A, средние значения $\langle x \rangle$, $\langle |x| \rangle$, $\langle x^2 \rangle$ для однородной функции распределения $f(x) = A$, определенной на интервале: а) от $-a$ до $+a$; б) от 0 до 2 a. (*а*) $A = 1/2a$; $\langle x \rangle = 0$, $\langle |x| \rangle = a/2$, $\langle x^2 \rangle = a^2/3$; *б*) $A = 1/2a$; $\langle x \rangle = \langle |x| \rangle = a$, $\langle x^2 \rangle = 4a^2/3$)

Задача 3.1.10. Решить задачу 3.1.9 для функции распределения $f(x) = A(1 - |x| / a)$, определенной на интервале от $-a$ до $+a$. (*а*) $A = 1/a$; $\langle x \rangle = 0$, $\langle |x| \rangle = a/3$, $\langle x^2 \rangle = a^2/6$)

Задача 3.1.11. Вероятность того, что для некоторой системы значения величин x и y лежат в интервалах $[x, x + dx]$ и $[y, y + dy]$, записывается в виде

$$dW(x, y) = C\, e^{-\alpha(x^2+y^2)}\, dx\, dy \quad (\alpha > 0).$$

Считая, что областями изменения переменных x и y являются $[-\infty; \infty]$ и $[-\infty; \infty]$, определить нормировочную постоянную C. ($C = \frac{\alpha}{\pi}$)

Задача 3.1.12. Вероятность того, что для некоторой системы значения величин x и y лежат в интервалах $[x, x + dx]$ и $[y, y + dy]$, записывается в виде $dW(x, y) = C\, e^{-\alpha(x^2+y^2)}\, dx\, dy$ ($\alpha > 0$).

Считая, что областью изменения переменной y является $[-\infty;\ \infty]$, определить вероятность того, что значение величины x будет лежать в интервале $[x,\ x+dx]$. ($dw(x) = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\, e^{-\alpha x^2}\, dx$)

Задача 3.1.13. Статистический вес некоторого состояния термодинамической системы равен: *а*) $1{,}0\cdot(10^{10})^{20}$; *б*) $5{,}0\cdot(10^{10})^{20}$ (обратите внимание на огромные числа – это реальные числа для макроскопических молекулярных систем!) Чему равна энтропия S для этих состояний? Чему равна по порядку величины относительная разность энтропий $\Delta S/S$? ($S = 3{,}2$ мДж/К; $\Delta S/S \sim 10^{-20}$)

Задача 3.1.14. N молекул идеального газа находятся в некотором сосуде. Разделим мысленно сосуд на две одинаковые половины A и B. Определить вероятность того, что в половине A сосуда окажется n молекул. Рассмотреть случаи, когда $N = 5$ и $n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$. ($P_n = \frac{N!}{n!(N-n)!2^N}$; соответственно $\frac{1}{32}$, $\frac{5}{32}, \frac{10}{32}, \frac{10}{32}, \frac{5}{32}, \frac{1}{32}$)

Задача 3.1.15. Сравните точные значения величин $\ln(N!)$ с их приближенными значениями, вычисленными по формуле Стирлинга $\ln(N!) = N\ln N - N + \ln(2\pi N)/2$ для $N = 5$ и $N = 10$. (4,7875 и 4,7809 (– 0,35 %), 15,1044 и 15,0961 (– 0,05 %))

Задача 3.1.16. Определите среднее значение величины x, ее среднеквадратичное значение, среднеквадратичную флуктуацию и относительную флуктуацию, если $dw = \text{const}\ e^{-\alpha x}dx$. ($dw = \alpha e^{-\alpha x}dx$;

$$< x >= \frac{1}{\alpha};\ < x^2 >= \frac{2}{\alpha^2};\ < (\Delta x)^2 >= \frac{2}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha^2} = \frac{1}{\alpha^2};\ \delta x = \frac{\sqrt{(\Delta x)^2}}{x} = 1)$$

Задача 3.1.17. Некоторая система может с равной вероятностью находится в N различных состояниях. Определите вероятность того, что система находится в одном из этих состояний. ($w = \frac{1}{N}$)

Задача 3.1.18. Система характеризуется распределением вероятностей $dw = \text{const}\ xy\ dx\ dy$, где переменные x и y лежат в

интервалах $0 \le x \le a$; $0 \le y \le b$. Нормировать распределение вероятностей. ($dw = \frac{4}{(ab)^2} xy\,dx\,dy$)

Задача 3.1.19. Определите вероятность того, что система имеет данное значение величины x при любом значении величины y.

($dw = \frac{2}{a^2} x\,dx$)

Задача 3.1.20. В сосуде объемом V находится 4 молекулы идеального газа. Определить вероятность w того, что в одной половине сосуда будет одна молекула, а в другой – три. (0,25)

Задача 3.1.21. Некоторая термодинамическая система перешла из состояния 1 в состояния 2. Статистический вес второго состояния превосходит статистический вес первого состояния $\kappa = 2$ раза. Чему равно приращение энтропии системы ΔS_{1-2}? ($\Delta S_{1-2} = 0{,}96\ 10^{-23}$ Дж/К)

3.2. Распределения молекул газа по координатам, скоростям и энергиям

3.2.1. Основные понятия, законы и формулы

• Равномерное распределение молекул газа по координатам (вероятности обнаружения молекул) в состоянии теплового равновесия: $f(r) = f(x)f(y)f(z) = \text{const} = 1/V$, где V – объем, занимаемый газом.

• Распределение Больцмана (распределение частиц в силовом поле): $n = n_0\exp(-U/kT)$, где n – концентрация частиц, U – их потенциальная энергия, n_0 – концентрация частиц в области, где $U = 0$, k – постоянная Больцмана. В частности, в однородном поле силы земного притяжения $n = n_0\exp(-mgh/kT) = n_0\exp(-\mu gh/RT)$, где m – масса молекулы, μ – молекулярная масса, h – высота над поверхностью Земли, R – универсальная газовая постоянная. В поле центробежной силы $n = n_0\exp(-m\omega^2 r^2/2kT)$, где ω – угловая скорость вращения, r – расстояние от оси вращения.

• Барометрическая формула (зависимость давления в атмосфере от высоты): $P = P_0\exp(-\mu gh/RT)$, где P_0 – давление у поверхности Земли. В смеси газов барометрическая формула применима также и к каждой парциальной компоненте смеси.

• Распределение молекул по координатным компонентам скоростей (нормальное распределение).

$$\varphi\left(V_x\right)=\sqrt{\frac{m}{2\pi kT}}\exp\left(-\frac{mV_x^2}{2kT}\right)$$

• Распределение молекул по модулю скорости (распределение Максвелла):

$$F\left(V\right)=\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\exp\left(-\frac{mV^2}{2kT}\right)4\pi V^2$$

• Наиболее вероятная скорость молекул газа (соответствует максимаму распределения Максвелла):

$$V_{\text{вер}}=\sqrt{\frac{2kT}{m}}\,.$$

• Средняя скорость молекул газа

$$\left\langle V\right\rangle=\sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}\,.$$

• Среднеквадратичная скорость молекул газа:

$$V_{\text{ср.кв}}=\sqrt{\frac{3kT}{m}}\,.$$

• Распределение молекул по энергиям (распределение Максвелла – Больцмана):

$$dN_{x,y,z}=\frac{2n_0}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{E}{kT}}\exp\left(-\frac{E+U\left(x,y,z\right)}{kT}\right)dx\,dy\,dz\frac{dE}{kT}\,,$$

здесь $E = mV^2/2$ – кинетическая энергия молекулы, U – потенциальная энергия молекулы.

3.2.2. Методические рекомендации по решению задач

Пример 3.2.1. *Шарообразный баллон с газом в состоянии теплового равновесия имеет радиус R. Определить*: *а*) *среднее расстояние от молекул до центра шара*, *б*) *среднеквадратичное расстояние от молекул до центра шара*, *в*) *медианное расстояние от молекул до центра шара* (*такое расстояние*, *что одна половина молекул находится ближе к центру*, *а другая – дальше*).

Решение. Функция распределения молекул по координатам в состоянии теплового равновесия (и в отсутствии внешних сил) –

константа: $f(x, y, z) = 1/V$, где $V = 4\pi R^3/3$ – объем шара. *а*) Среднее расстояние до центра шара находим по стандартной формуле: $< r > = \int r f(r) d^3r = \int r 4\pi r^2 dr/V = 3R/4 = 0{,}75R$. *б*) Аналогично вычисляем средний квадрат расстояния от молекул до центра шара: $< r^2 > = \int r^2 f(r\ ) d^3r = \int r^2 4\pi r^2 dr/V = 3R^2/5$. Извлекая корень квадратный, получим $r_{ср.кв} = 0{,}77R$. *в*) А вот для определения средне-медианного расстояния и интегрировать не придется! В шарике с этим радиусом должно содержаться половина всех молекул газа – то есть, объем шара с таким радиусом должен быть ровно в 2 раза меньше, чем объем баллона.

Результат: $4\pi r^3_{med} / 3 = 4\pi R^3/6 => r_{med} = R / 2^{1/3} = 0{,}79R$.

Пример 3.2.2. *Определить, на какой высоте давление кислорода уменьшается в два раза* (*при* $T = 300$ К).

Решение. Применяем барометрическую формулу

$$p(h) = \frac{p_0}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} = \exp\left(-\frac{\mu g h}{RT}\right).$$

Тогда

$$\ln\frac{1}{2} = -\frac{\mu g h}{RT} \Rightarrow h = \frac{RT\ln 2}{\mu g} \simeq 5{,}5 \text{ км}.$$

Пример 3.2.3. *Барометр в кабине летящего самолета всё время показывает одинаковое давление* p = 79 кПа*, благодаря чему летчик считает высоту* h_1 *полета неизменной. Однако температура воздуха за бортом самолета изменилась с* t = 5 ℃ *до* t = 1 С. *Какую ошибку* Δh *в определении высоты допустил летчик*? *Давление* p_0 *у поверхности Земли считать нормальным.*

Решение. Для решения задачи воспользуемся барометрической формулой $p(h) = p_0\exp(-\mu g h/RT)$. Барометр может показывать неизменное давление p при различных температурах T_1 и T_2 за бортом только в том случае, если самолет находится не на высоте h (которую летчик считает неизменной), а на некоторой другой высоте h_2.

Запишем барометрическую формулу для этих двух случаев:

$$p = p_0\exp(-\mu g h_1/RT_1);\ p = p_0\exp(-\mu g h_2/RT_2).$$

Найдем отношение p_0/p, и обе части полученного равенства прологарифмируем: $\ln p_0/p = \mu g h_1/RT_1$; $\ln p_0/p = \mu g h_2/RT_2$.

Из полученных соотношений выразим высоты h_2, и h_1 и найдем их разность: $\Delta h = h_2 - h_1 = \frac{R \ln p_0/p}{\mu g}(T_2 - T_1)$.

Подставляя в полученное соотношение значения величин:

$$\Delta h = -28{,}5 \text{ м}.$$

Знак «–» означает, что $h_2 < h_1$ и, следовательно, самолет снизился на 28,5 м по сравнению с предполагаемой высотой.

Пример 3.2.4. *У поверхности воздух представляет собой смесь газов*: $N_2 - 78{,}08$ %, $O_2 - 20{,}95$ %, $CO_2 - 0{,}03$ %, *инертные газы* – 0,94 %. *Как изменится относительное количество кислорода к азоту в изотермической атмосфере* ($T = 300$ К) *на высоте* 10 км.

Решение. Применяем формулу распределения Больцмана для концентрации молекул:

$$\frac{n(O_2)}{n(N_2)} = \frac{n_0(O_2)}{n_0(N_2)} \exp\left[-\frac{(\mu O_2 - \mu N_2)gh}{RT}\right] = \frac{0{,}21}{0{,}78} e^{-016} = 0{,}27e^{-0{,}16} = 0{,}23.$$

Отношение концентраций кислорода и азота уменьшится от 0,27 до 0,23. Интересно отметить, что состав воздуха с удалением от поверхности Земли будет меняться количественно: возрастет концентрация газов с малой молярной массой, например водорода и гелия. Надо только не забывать, что наш расчет справедлив лишь для изотермической атмосферы и сравнительно небольших высот, для которых ускорение свободного падения изменяется незначительно: $g = \text{const}$, $T = \text{const}$.

Пример 3.2.5. *Найти, какая часть общего числа молекул идеального газа имеет скорости, отличающиеся от наиболее вероятной на* 1 %.

Решение. Функция распределения молекул по скоростям – это функция распределения Максвелла:

$$F(V) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mV^2}{2kT}\right) 4\pi V^2.$$

По условию нормировки интеграл от этой функции по всем скоростям (площадь под графиком функции) равен единице. Искомая доля частиц – это площадь под участком графика распределения Максвелла на участке скоростей, отличающихся от наиболее вероятной всего на 1 %. Это немного. Приблизительно можно вычислить эту площадь, умножив значение функции

Максвелла в верхней точке на указанный интервал скоростей. Произведем необходимые вычисления. Наиболее вероятная скорость

$$V_{\text{вер}} = \sqrt{\frac{2kT}{m}}\,.$$

Значение функции Максвелла в этой точке $F(V_{\text{вер}}) = 4(m/2\pi kT)^{1/2}/e$. Интервал скоростей ($\pm 1$ % от нее) составляет $\Delta V = 0{,}02(2kT/m)^{1/2}$. Умножая одно на другое, находим искомую долю частиц:

$$0{,}08/\pi^{1/2}e = 0{,}0166 = 1{,}66\ \%.$$

Заметим, что она не зависит ни от каких физических факторов.

Пример 3.2.6. *Найти среднюю скорость молекул азота и кислорода при температуре* $T = 27^{\circ}$C.

Решение. Просто применяем известную формулу:

$$< V > = (8kT/\pi m)^{1/2} = (8RT/\pi\mu)^{1/2}.$$

Подставляя $R = 8{,}31$ Дж/моль·К, $T = 300$ К и соответствующие молярные массы, находим $<V>_{O_2} = 445$ м/с, $<V>_{N_2} = 478$ м/с. Интересно отметить, что молекулы проходят за секунду путь, равный почти половине километра. Но не нужно забывать о соударениях молекул. Из-за них молекула по прямой движется очень недолго, и ее путь представляет собой ломаную линию. Молекула, двигаясь с огромной скоростью по отдельным звеньям ломаной траектории, перемещается от слоя к слою газа сравнительно медленно.

Пример 3.2.7. *Средняя скорость атомов гелия равна* $< v >$. *Найти среднюю энергию атомов гелия при той же температуре.*

Решение. Казалось бы, надо просто возвести среднюю скорость в квадрат, умножить на массу атома гелия и поделить на 2. Но не все так просто! Средняя энергия молекул и атомов $< E > = mV^2_{\text{ср.кв}}/2$. Поскольку $< V >^2 = 8kT/\pi m$, $a = V^2_{\text{ср.кв}} = 3kT/m$, энергия $< E > = 3\pi m < V >^2/16$.

Пример 3.2.8. *В опыте Жана Батиста Перрена использовалась взвесь маленьких каучуковых шариков* (*радиусом* $r = 0{,}2$ мкм, *плотностью* $\rho = 1{,}25$ г/см^3) *в воде. Измерялась плотность числа шариков во взвеси на разной высоте ото дна сосуда. Оказалось, что при смещении точки наблюдения всего на* $\Delta h = 30$ мкм, *плотность числа шариков уменьшается в* 2,1 *раза. Исходя из этих данных, вычислить постоянную Больцмана k.*

Решение. Используем формулу для распределения Больцмана, полагая, что шарики – это как бы молекулы: $n = n_0\exp(-U/kT)$. На шарики действует сила тяжести и сила Архимеда, равнодействующая которых постоянна и равна $F = (\rho - \rho_{воды})Vg$, где $= 4\pi r^3/3$ – объем шариков. Этой силе можно сопоставить потенциальную энергию $U = (\rho - \rho_{воды})Vgh$. Подставляя U в формулу Больцмана и, проделав несложные преобразования, находим

$$n(h + \Delta h) = n_0 \exp(-(\rho - \rho_{воды})Vg(h + \Delta h)/kT) =$$
$$= n_0 \exp(-(\rho - \rho_{воды})Vgh/kT)\exp(-(\rho - \rho_{воды})Vg\Delta h/kT) =$$
$$= n(h)\exp(-(\rho - \rho_{воды})Vg\Delta h/kT) = >$$
$$= > n(h + \Delta h)/n(h) = \exp(-(\rho - \rho_{воды})Vg\Delta h/kT) = 1/2{,}1 = >$$
$$= > (\rho - \rho_{воды})Vg\Delta h/kT = \ln 2{,}1 = >$$
$$= > k = (\rho - \rho_{воды})Vg\Delta h/T\ln 2{,}1 = 1{,}4 \cdot 10^{-23}\ \text{Дж/К}.$$

Точность вполне удовлетворительная.

Пример 3.2.9. *На рис.* 3.2.1 *представлен график функции распределения молекул идеального газа по скоростям* (*распределение Максвелла*), *где* $f\left(\vec{V}\right) = \frac{1}{N}\frac{dN}{dV}$ *– доля молекул, скорости которых заключены в интервале скоростей от V до V + dV в расчете на единицу этого интервала.*

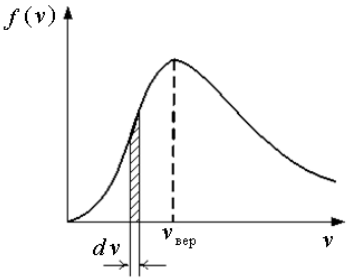

Рис. 3.2.1

Выберите верные утверждения из следующих вариантов ответов:

1. *Площадь заштрихованной полоски равна доле молекул со скоростями в интервале от V до V+dV.*

2. *С ростом температуры максимум кривой смещается вправо.*

3. *С ростом температуры площадь под кривой растет.*

Решение. На рис. 3.2.1 изображен график распределения Максвелла (функции распределения молекул идеального газа по скоростям):

$$f(V)\frac{1}{N}\frac{dN}{dV}=4\pi\left(\frac{m_0}{2\pi k_{\text{Б}}T}\right)^{3/2}V^2\exp\left(-\frac{m_0V^2}{2k_{\text{Б}}T}\right).$$

Величина $f(V)\,dV$ есть вероятность найти частицу с модулем скорости, лежащим в интервале от V до $V + dV$ (т.е. площадь заштрихованной полоски). Условие нормировки распределения $f(V)$ имеет вид

$$\int_0^\infty f(V)dV=1$$

(т.е. площадь под кривой характеризует вероятность достоверного события и не зависит от температуры).

Скорость $V_{\text{вер}}$, отвечающая максимальному значению функции распределения, называется наиболее вероятной и равна

$$V_{\text{вер}}=\sqrt{\frac{2k_{\text{Б}}T}{m_0}},$$

(т.е. с ростом температуры смещается вправо). Таким образом, правильными ответами являются № 1 и № 2.

Пример 3.2.10. *На рис.* 3.2.2 *представлены графики функций распределения молекул идеального газа по скоростям (распределения Максвелла) для различных газов* H_2, He, N_2 *при данной температуре.*

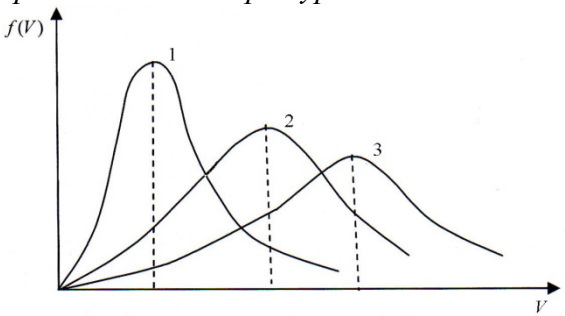

Рис. 3.2.2

Какой график какому газу соответствует?

Варианты ответов:

1. H_2 – 1; He – 2; N_2 – 3;
2. H_2 – 2; He – 1; N_2 – 3;
3. H_2 – 3; He – 2; N_2 – 1;
4. H_2 – 3; He – 1; N_2 – 2;
5. H_2 – 1; He – 3; N_2 – 2;
6. H_2 – 2; He – 3; N_2 – 2.

Решение. Выражение для функции распределения Максвелла $f(V)$ имеет вид

$$f(V)=\frac{1}{N}\frac{dN}{dV}=4\pi\left(\frac{m_0}{2\pi k_в T}\right)^{3/2}V^2\exp\left(-\frac{m_0V^2}{2k_в T}\right).$$

Скорость $V_{вер}$, отвечающая максимальному значению функции распределения, называется наиболее вероятной:

$$V_{вер}=\sqrt{\frac{2k_в T}{m_0}}.$$

В этой точке $f(V)$ принимает максимальное значение:

$$V_{вер}=\frac{4}{e}\sqrt{\frac{m_0}{2\pi k_в T}}.$$

Следовательно, наиболее вероятная скорость для разных газов (H_2, He, N_2) обратно пропорциональна квадратному корню из молекулярной массы:

$$V_{вер}(N_2):V_{вер}(He):V_{вер}(H_2)=\frac{1}{\sqrt{\mu_{N_2}}}:\frac{1}{\sqrt{\mu_{He}}}:\frac{1}{\sqrt{\mu_{H_2}}}\approx 0{,}2:0{,}5:0{,}7.$$

Таким образом, правильный ответ № 3.

3.2.3. Задачи для самостоятельной работы

Задача 3.2.1. Пылинки, взвешенные в воздухе, имеют массу $m=10^{-18}$ г. Во сколько раз уменьшится их концентрация n при увеличении высоты на $\Delta h=10$ м? Температура воздуха T = 300 К. (В ~ 20 млрд раз)

Задача 3.2.2. На какой высоте h над поверхностью Земли атмосферное давление вдвое меньше, чем на ее поверхности? Считать, что температура T = 290 К воздуха не изменяется с высотой. Молекулярная масса воздуха $\mu = 29$ г/моль. (5,9 км)

Задача 3.2.3. Определить отношение давления воздуха на высоте 1 км к давлению на дне скважины глубиной 1 км. Воздух у поверхности Земли находится при нормальных условиях, и его температура не зависит от высоты. (0,778)

Задача 3.2.4. Идеальный газ с молярной массой μ находится в однородном поле тяжести, ускорение свободного падения в котором равно g. Определить зависимость давление газа как функцию высоты h, если при $h = 0$, давление $p = p_0$, а температура изменяется с высотой как $T = T_0(1 - ah)$ (a – const).
($p(h) = p_0(1 - ah)^n$, где $n = \frac{\mu g}{aRT_0}$)

Задача 3.2.5. Ротор центрифуги радиусом $r = 0,2$ м заполнен газообразным соединением урана с фтором UF_6 при температуре T = 100 К. Уран состоит из двух изотопов: ^{235}U и ^{238}U. Доля w_0 атомов изотопа ^{235}U в центре ротора составляет 0,7 % (природный уран). Определить долю w этого изотопа ^{235}U в обогащенном уране вблизи стенок ротора, если он вращается с угловой скоростью $\omega = 10^4$ рад/с. (w = 4,8 %)

Задача 3.2.6. Самая низкая температура в космосе составляет T = 2,7 К. Какова среднеквадратичная скорость молекул водорода при такой температуре? (183 м/с)

Задача 3.2.7. Раскаленная атмосфера Солнца (его корона) имеет температуру $T = 2 \cdot 10^6$ К и давление p = 0,030 Па. Какова среднеквадратичная скорость свободных электронов в короне? (масса электрона $m_c = 9,11 \cdot 10^{-31}$ кг) ($v_{кв} = 9,53 \cdot 10^6$ м/с)

Задача 3.2.8. Во сколько раз необходимо расширить адиабатически газ, состоящий из жестких двухатомных молекул, чтобы их среднеквадратичная скорость уменьшилась в 1,5 раза. (76 раз).

Задача 3.2.9. Найдено, что наиболее вероятная скорость молекул газа при температуре T_1 совпадает со среднеквадратичной

скоростью тех же молекул при температуре газа T_2. Вычислить отношение T_2 / T_1. ($T_2 / T_1 = 0{,}67$)

Задача 3.2.10. При какой температуре средняя скорость молекул азота превышает среднюю скорость молекул кислорода на 20 %? ($T = 288$ К)

Задача 3.2.11. При какой температуре средняя скорость молекул азота меньше их среднеквадратичной скорости на 50 м/с? ($T = 454$ К)

Задача 3.2.12. При какой температуре среднеквадратичная скорость молекул кислорода больше их наиболее вероятной скорости на 100 м/с? ($T = 381$ К)

Задача 3.2.13. Определить среднее значение обратной величины скорости молекулы в идеальном газе. ($\langle\frac{1}{v}\rangle = \sqrt{\frac{2m}{\pi kT}} = \frac{4}{\pi\langle v\rangle}$)

Задача 3.2.14. В запаянном сосуде содержится 1 моль гелия при температуре 20°С. Какое количество теплоты следует сообщить газу, чтобы средняя скорость его молекул увеличилась на 1 %? (73 Дж)

Задача 3.2.15. Найти среднее значение модуля одной координатной компоненты скорости молекул азота, находящегося в тепловом равновесии при температуре 300 К? (239 м/с)

Задача 3.2.16. Метеорит пробивает в обшивке космического корабля отверстие, площадь которого $S = 1$ мм^2. Объем жилых помещений корабля $V = 100$ м^3, температура воздуха в них $t = 27$°С при давлении 100 кПа. Оцените запас времени, имеющийся у космонавтов для надевания скафандров. (Примерно 10 дней)

Задача 3.2.17. Закрытая с одного конца труба длиной 1 м вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через открытый конец трубы с угловой скоростью 62,8 рад/с. Давление окружающего воздуха 100 кПа, температура – 293 К. Найти давление воздуха вблизи закрытого конца трубы? (102 кПа)

Задача 3.2.18. Решить задачу 3.2.17, считая, что труба закрыта с обоих концов, а до начала вращения давление в трубе совпадало с атмосферным? (101 кПа)

Задача 3.2.19. Космический корабль входит в атмосферу Земли со скоростью 36 000 км/час. Молекулы (предположим, что это азот) ударяются о нос космического корабля с такой же скоростью.

Какой температуре соответствует эта скорость движения молекул? (~ 13 000 К)

Задача 3.2.20. В сосуде находится кислород при температуре 1600 К. Какая доля молекул кислорода имеет кинетическую энергию, превышающую $6{,}65 \cdot 10^{-20}$ Дж. (20 %)

Задача 3.2.21. При какой температуре газа, состоящего из смеси азота и кислорода, будут отличаться друг от друга на Δv = 30 м/с. (370 К)

Задача 3.2.22. У поверхности Земли молекул гелия He в 10^5 раз, а водорода H_2 в 10^6 раз меньше, чем молекул азота N_2. На какой высоте число молекул гелия He будет равно числу молекул азота N_2. Температуру принять равной 273 К. (≈ 110 км)

Задача 3.2.23. В центрифуге с ротором радиусом *a,* равным 0,5 м, при температуре T = 300 К находится в газообразном состоянии вещество с молярной массой μ = 1 кг/моль. Определить отношение концентраций n_a/n_0 стенок ротора и в центре его, если ротор вращается с частотой ν = 30 $с^{-1}$. ($n_a/n_0 = e^{\frac{2\pi^2\nu^2\mu a^2}{RT}} = 5{,}91$)

Задача 3.2.24. Распределение молекул по скоростям при эффузионном истечении газа (эффузионным называется истечение газов через отверстия, малые по сравнению с длиной свободного пробега молекулы) отличается от максвелловского и имеет вид $f(v) = Cv^3\ e^{-mv^2/(2kT)}\,dv$. Определить из условия нормировки коэффициент C. ($C = \frac{m^2}{2k^2T^2}$)

Задача 3.2.25. Зная функцию распределения молекул по скоростям в эффузионном молекулярном пучке

$$f(v) = \frac{m^2}{2k^2T^2} v^3\ e^{-mv^2/(2kT)},$$

определить выражения для: 1) наиболее вероятной скорости $v_{\text{вер}}$; 2) средней арифметической скорости $\langle v \rangle$. ($v_{\text{вер}} = \sqrt{3kT/m}$; $\langle v \rangle = 3\sqrt{\pi kT/8m}$)

3.3. Элементы физической кинетики

3.3.1. Основные понятия, законы и формулы

• Среднее число соударений, испытываемых одной молекулой газа в единицу времени, $\langle z \rangle = \sqrt{2}\pi d^2 n \langle \upsilon \rangle$, где d – эффективный

диаметр молекулы; n – концентрация молекул; $\langle \upsilon \rangle$- средняя арифметическая скорость молекул.

• Средняя длина свободного пробега молекул газа: $\lambda = \dfrac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}$.

• Среднее время свободного пробега молекул газа

$$< t > = \lambda / < v > = (m / \pi kT)^{1/2} / 4nd^2.$$

• Импульс (количество движения), переносимый молекулами из одного слоя газа в другой через элемент поверхности, $dp = \eta \dfrac{d\upsilon}{dz} \Delta S dt$, где η – динамическая вязкость газа; $\dfrac{d\upsilon}{dz}$ – градиент (поперечный) скорости течения его слоев; ΔS – площадь элемента поверхности; dt – время переноса.

• Динамическая вязкость $\eta = \frac{1}{3} \rho \langle \upsilon \rangle \langle l \rangle$, где ρ – плотность газа (жидкости); $\langle \upsilon \rangle$ – средняя скорость хаотического движения его молекул; λ – их средняя длина свободного пробега.

• Эмпирический закон Ньютона: между слоями жидкости или газа действуют силы внутреннего трения $F_{тр} = \eta \Delta S |dv/dz|$, где η – коэффициент динамической вязкости, ΔS – площадь слоя, на который действует сила; $|dv/dz|$ – модуль скорости изменения скорости (от слоя к слою) в потоке в направлении, перпендикулярном потоку.

• Закон Фурье: поток тепла через поверхность площади ΔS пропорционален градиенту температуры и направлен в сторону ее убывания: $dQ / dt = -\chi \Delta S dT / dz$, где χ – коэффициент теплопроводности.

• Теплопроводность (коэффициент теплопроводности) газа $\lambda = \frac{1}{3} c_V \rho \langle \upsilon \rangle \langle l \rangle$ или $\lambda = \frac{1}{6} kn \langle \upsilon \rangle \langle l \rangle$, где c_V – удельная теплоемкость газа при постоянном объеме; ρ – плотность газа; $\langle \upsilon \rangle$ – средняя арифметическая скорость его молекулы; λ – средняя длина свободного пробега молекул.

• Закон Фика: $\Delta m = -D\frac{dn}{dx}m_1 S\Delta t$, где Δm – масса газа, перенесенная в результате диффузии через поверхность площадью ΔS за время Δt; D – диффузия (коэффициент диффузии); $\frac{dn}{dx}$ – градиент концентрации молекул; m_i – масса одной молекулы.

• Коэффициент диффузии для газов: $D = \lambda < v > / 3$.

• Коэффициент теплопроводности для газов $\chi = \lambda < v > \rho C_V/3$, где ρ – плотность газа, C_V – его теплоемкость.

• Коэффициент вязкости для газов $\eta = \lambda < v > \rho/3$.

• При движении с постоянной скоростью u тел сферической формы радиусом R в жидкости (газе) для определения силы внутреннего трения можно использовать формулу Стокса: $F = 6\pi\eta u R$.

3.3.2. Методические рекомендации по решению задач

Пример 3.3.1. *Как зависит длина свободного пробега молекул* λ *и среднее время между их столкновениями* $< t >$ *от давления газа* p?

Решение. Из параметров, входящих в формулы для $< t >$ и λ, от давления непосредственно зависит концентрация молекул n $p = nkT \geq n = p/kT$. Подставляя n в формулы для $< t >$ и λ, находим: $\lambda = kT/1{,}41pd^2$, $< t > = (mkT)^{1/2}/4pd^2$.

Пример 3.3.2. *Средняя длина свободного пробега* λ *молекулы углекислого газа при нормальных условиях равна* 40 нм. *Определите среднеарифметическую скорость* $< V >$ *молекул и число* $< z >$ *соударений, которые испытывает молекула углекислого газа за одну секунду.*

Решение. Средняя арифметическая скорость молекул определяется соотношением $< v > = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}$, где μ – молярная масса вещества. Поставляя числовые значения, получаем $< V > = 362$ м/с. Среднее число $< z >$ соударений молекулы в одну секунду определяется отношением средней скорости $< V >$ молекулы к средней длине ее свободного пробега λ $< z > = < V > / \lambda$. Подставляя

в это соотношение значения для $< V >$ = 362 м/с, λ = 40 нм, получаем $< z > = 9{,}05\ 10^9\ с^{-1}$.

Пример 3.3.3. *Используя выражение для длины свободного пробега*, *оценить*: 1) *максимальное расстояние видимости в лесу*, 2) *зависимость расстояния видимости в тумане от размера капель*, 3) *величину критической массы урана в атомной бомбе.*

Решение. Идея длины свободного пробега действительно может быть использована для оценки видимости в лесу, в тумане или даже для грубой оценки критической массы урана в атомной бомбе.

Сначала напомним, как можно не очень строго, но очень просто получить оценку для средней длины свободного пробега молекул λ. От чего она в принципе может зависеть? Очевидно – от концентрации молекул $n[1/м^3]$, причем чем больше концентрация, тем меньше длина свободного пробега. Очевидно – от размера (сечения) молекулы $\sigma\ [м^2] \sim d^2$, причем чем больше σ, тем меньше длина свободного пробега. То есть и плотность, и сечение должны войти в формулу в знаменателе: $\lambda \sim a/n\sigma$, где a – безразмерный численный коэффициент. Точный расчет с учетом движения молекул и их разных размеров показывает (см., например, [1]), что коэффициент этот равен $1/\sqrt{2} = 0{,}71$. Уточнение по порядку величины несущественное. Для наших последующих оценок будем полагать, что $\lambda \sim 1/n\sigma$. Дальше можно было просто использовать эту формулу для λ, но поучительнее провести более подробные рассуждения.

1) Итак, представим фонарь, установленный среди леса. Если не учитывать рассеяние света, то все деревья отбрасывают тени, ширина которых примерно равна диаметру деревьев. Будем считать, что все деревья имеют одинаковый диаметр d и очень большую высоту. Пусть n – плотность посадки деревьев (их число на единицу площади), l – среднее расстояние между деревьями. Очевидно, что $n \sim 1/l^2$.

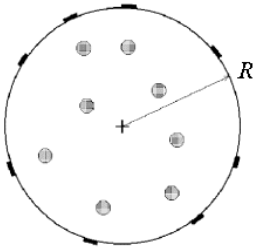

Рис. 3.3.1

На рис. 3.3.1 положение фонаря отмечено крестиком, вокруг проведена окружность радиусом R, деревья показаны кружками, а их тени на окружности отмечены черным. Внутрь окружности попадает $\pi R^2 n$ деревьев. Полная длина тени на окружности равна $\pi R^2 nd$. Мы видим, что полная длина тени растет как квадрат радиуса и при каком-то значении R превысит длину окружности $2\pi R$. Но если вся окружность покрыта тенями, то свет дальше не пройдет. Это значение R и будет максимальным расстоянием видимости в лесу. Теперь понятно, что оно определяется из равенства $\pi R^2 ndR$, то есть мы получили оценку $R \approx \dfrac{2}{nd} = \dfrac{2l^2}{d}$. Установим теперь связь полученного результата с формулой для средней длины свободного пробега. У нас движущаяся «молекула» (луч света) соударяется с «молекулами» – деревьями, имеющими диаметр d. Он играет роль сечения соударения в плоском случае. Соответственно, средняя длина пробега луча света (радиус видимости) по порядку величины составит $R \sim 1/n\sigma \sim l^2/d$. Фактически тот же результат, но полученный просто и сразу. Для численного примера возьмем значения, исходя из практического опыта. В сибирской тайге при среднем диаметре лиственниц 0,25 м и среднем расстоянии между ними ~ 2 м радиус видимости составит всего около 30 м, а среди подмосковных березок того же размера, но отстоящих друг от друга на 5 – 6 м, радиус видимости будет порядка 200 м.

2) Теперь, пусть фонарик светит в тумане, где роль «молекул» – деревьев – выполняют капли воды. В отличие от задачи про лес (плоской), теперь геометрия задачи трехмерная. То есть она даже

ближе к задаче про свободный пробег молекул. Роль сечения соударения луча света с каплями будет играть их поперечное сечение. По порядку величины и чтобы не возиться с громоздкими численными коэффициентами, будем считать его равным квадрату диаметра капли. Второй параметр – концентрация капель в единице объема. Результат: $R \sim 1/n\sigma \sim 1/nd^2$. Для численной оценки возьмем диаметр капель воды в тумане $d \sim 10^{-4}$ м, а для концентрации капель возьмем значение $n \sim 10^7$ м$^{-3}$. Тогда видимость в тумане составит $R \sim 10$ м. Это, действительно, густой туман.

Вопрос для любознательных: *а откуда мы взяли оценку концентрации числа молекул* $n \sim 10^7$ м$^{-3}$? *Проведем эти оценки* (*по порядку величины*). *Давление насыщенного водяного пара при, например*, 20°C *составляет* $p_H \sim 2{,}1$ кПа. *Применяя уравнение Клапейрона – Менделеева*, *находим плотность водяного пара при* 100 % *влажности*: $m/V = p_H \mu_{H_2O}/RT \sim 15$ г/м^3. *При резком понижении температуры весь пар конденсируется в капли указанного размера* $d \sim 10^{-4}$ м. *Это экспериментальный факт. Такие капли неразличимы на глаз*, *но имеют размер много больше длин волн видимого света, отчего хорошо его поглощают и рассеивают. Образуется густой туман. Масса одной капли по порядку величины равна* $m_{\text{кап}} \sim \rho_{H_2O} d^3 \sim 10^{-6}$ г. *Число капель на кубометр составляет* $n \sim 10^7$ м$^{-3}$, *что мы и использовали выше. Таким образом зависимость расстояния видимости в тумане от размера капель дается*, *соотношением* $R \sim 10^5 d$. *При предельно малых капельках с диаметром порядка десяти длин световой волны* $d \sim 10^{-5}$ м *видимость сокращается до одного метра. Что называется*, «*не видно дальше своего носа*». *При еще меньших размерах капель наша модель становится неверной*, *так как свет уже нельзя рассматривать как совокупность частиц с ничтожно малым размером. Начинают играть роль эффекты дифракции, и выражение для эффективного сечения взаимодействия света с каплями уже не будет определяться чисто геометрическим сечением капель.*

3) Решенная задача имеет также отношение к вопросу о критической массе урана-235, применяемого для изготовления атомных бомб. Вместо света в этой задаче мы имеем нейтроны, а

вместо капель – ядра ^{235}U. В случае столкновения с ядрами нейтроны расщепляют их на осколки, и при этом вылетает еще 3 – 4 нейтрона. При надкритическом радиусе количество нейтронов будет расти и возникнет цепная реакция – произойдет атомный взрыв. За основу определения критического радиуса по порядку величины можно взять радиус видимости $R \sim 1/nd^2$, где $d \sim 2\cdot10^{-14}$ м – эффективный радиус взаимодействия нейтрона и ядра урана, $n \sim 5\cdot10^{28}$ м $^{-3}$– концентрация ядер урана. Теперь можно оценить критический радиус $R \sim 5$ см. Его критический объем составит ~ 0,5 дм^3, а критическая масса ~ 10 кг.

Отметим, что мы не выдаем никаких секретов производства ядерного оружия: слишком грубы наши оценки. Единственная наша цель – продемонстрировать еще раз единство законов физики, действующих в самых разнообразных системах.

Пример 3.3.4. *Какое количество тепловой энергии уносится в единицу времени через окно площадью* $S = 2$ м^2 *и расстоянием между стеклами* $d = 5$ см, *если в комнате поддерживается температура* $t_1 = 20^\circ$C, *а на улице стоит мороз* $t_2 = -20^\circ$C?

Решение. Сразу заметим: поскольку величины градуса по шкалам Цельсия и Кельвина совпадают, то разность температур $T_1 - T_2 = t_1 - t_2 = 40$ К. Коэффициент теплопроводности воздуха χ = 0,034 Дж/м·с·К. Для стекла этот коэффициент в 20 раз больше, так что его наличие можно не учитывать. К тому же толщина стекла много меньше промежутка между стеклами. Поэтому от мороза нас оберегает именно воздушная прослойка между стеклами. В соответствии со сказанным, в этом промежутке устанавливается линейное распределение температуры, так что $T(z)$ постоянна и равна $T(z) = (T_1 - T_2)/d$. Поток тепловой энергии в единицу времени равен тогда

$$dQ/dt = -\chi S(T_1 - T_2)/d = 54 \text{ Вт}.$$

Расход тепловой энергии через одно окно за месяц составит примерно $Q = \sim 40$ кВт·ч. Решая эту задачу, мы неявно сделали сильное предположение, что температура внутреннего стекла совпадает с температурой в комнате, а наружного – с температурой окружающего воздуха. Из практики каждый знает, что это не так: на самом деле, наружная поверхность теплее, а внутренняя – холоднее. В реальности градиент температур в промежутке между

рамами может быть раза в два меньше, что, соответственно уменьшает поток тепловой энергии наружу.

Пример 3.3.5. *Капля чернил на поверхности воды постепенно расплывается в расширяющееся пятно. Оценить зависимость радиуса пятна от времени.*

Решение. Концентрация диффундирующей жидкости меняется в соответствии с уравнением $\partial n/\partial t = D\Delta n$. Его решение в общем случае не простая задача. В нашем случае – когда задача двумерная и решение должно быть радиально симметричным – мы просто приведем это решение без доказательств для времени, когда радиус пятна стал уже много больше начального:

$$n(r, t) = A(Dt)^{-1/2} \exp(-r^2/4Dt),$$

где величина A должна определяться из начальных условий задачи (по начальной концентрации чернил). Для нашей задачи это, впрочем, не важно. Посмотрим на экспоненту. Если $r^2 < 4Dt$, экспонента близка к единице и плотность чернил будет достаточно высока. При $r^2 > 4Dt$ экспонента стремительно убывает, и концентрация чернил будет незаметна. Следовательно, видимая граница пятна будет иметь радиус $r \sim 2(Dt)^{1/2}$. Размеры пятна растут пропорционально корню квадратному из величины прошедшего времени.

Пример 3.3.6. *В аудиторию входит студентка. Оценить время, через которое запах ее духов достигнет экзаменатора, если расстояние до него* $l \sim 4$ м.

Решение. Воспользуемся решением предыдущей задачи: на расстояние молекулы духов продиффундируют за время $t \sim l^2/2D$. Оценим коэффициент диффузии D молекул в воздухе при нормальных условиях (комнатная температура и атмосферное давление): $D = \lambda < v > / 3 = \sim 10^{-4}$ м^2/с (оценку можно проверить самостоятельно). Получим результат: $t \sim l^2/2D \sim 10^5$ с ~ 1 сут.

Ответ явно несуразен и противоречит всему мировому опыту приема экзаменов. Из этого примера ясно, что распространение запахов по комнате происходит не вследствие диффузии, а из-за более быстрых процессов – конвекционных течений воздуха в комнате.

Пример 3.3.7. *В потоке газа, направленном вдоль оси X, скорость газа растет в положительном направлении оси Y. В*

каком направлении происходит перенос импульса направленного движения?

Решение. На рис. 3.3.2 изображено движение потока газа вдоль оси X с указанием вектора скорости газа, которая расчет в положительном направлении оси Y (эпюра скоростей): $\vec{u} = \vec{u}(y)$.

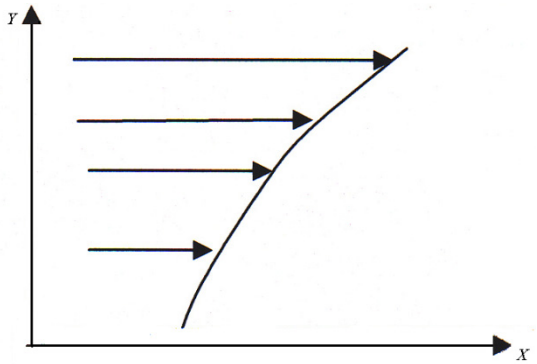

Рис. 3.3.2

Каждая молекула газа участвует в двух движениях: хаотическом тепловом, средняя скорость которого равна $<V_T>$, и упорядоченном движении со скоростью $\vec{u} = \vec{u}(y)$, много меньше ей, чем $<V_T>$. Молекула газа, с большими значениями y, вследствие теплового движения переносит в нижележащие слои больший импульс направленного движения $m\vec{u}$, в итоге импульс более быстро движущегося слоя убывает, а движущегося медленно – возрастает.

Таким образом, перенос импульса направленного движения происходит в отрицательном направлении от Y.

Пример 3.3.8. *Между двумя металлическими листами площадью* S = 1 м^2 *имеется прослойка вязкой жидкости толщиной* d = 1 мм. *Определить силу, которую надо приложить к одному из листов, чтобы он скользил относительно второго со скоростью* v =1 м/с.

Решение. Будем считать, что скорость слоев жидкости от одного ограничивающего листа до другого меняется по линейному закону. Тогда производная в законе Ньютона $dv/dz = v/d$. Сила вязкого трения по закону Ньютона составит: $F_{тр} = \eta Sv/d$. Именно ее надо преодолеть внешней силе.

Для численных оценок надо подставить коэффициент вязкости из таблиц. Если прослойка жидкости – это вода при комнатной температуре (η = 1 мПа·с), то искомая сила составит ~ 1 Н. Если же это мазут, например, (η = 2 Па·с), то сила составит уже 2 кН.

Пример 3.3.9. *В результате некоторого процесса вязкость идеального газа увеличилась в* 2 *раза, а коэффициент диффузии – в* 4 *раза. Во сколько раз изменилось давление идеального газа в рассматриваемом процессе*?

Решение. В идеальном газе коэффициент диффузии $D = \frac{1}{3} < v > \lambda$, где λ – средняя длина свободного пробега ($\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}$); $< v >$ – средняя скорость теплового движения молекул ($< v >= \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}$). Вязкость идеального газа определяется выражением $\eta = \frac{1}{3} < v > \lambda\rho$, где ρ – плотность идеального газа. Используя уравнение состояния идеального газа ($p = nkT$), нетрудно видеть, что $D = \frac{1}{3} < v > \lambda \sim T^{3/2} \cdot \frac{1}{p}$. Аналогично для вязкости идеального газа получаем $\eta = D\rho \sim T^{3/2} \frac{1}{p} \cdot \frac{p}{T} \sim T^{1/2}$. Таким образом, коэффициент диффузии и вязкость связаны соотношением $D \sim \eta^3 \frac{1}{p}$. В процессе рассматриваемом в задаче изменение давления пропорционально $p \sim \frac{\eta^3}{D}$, т.е. p увеличивается в 2 раза.

Пример 3.3.10. *Какой наибольшей скорости может достичь дождевая капля диаметром* d = 0,3 мм? *Коэффициент вязкости воздуха принять равным* $\eta = 1{,}8 \cdot 10^{-5}$ кг/м *с. Плотность воды* ρ = 1000 кг/м^3.

Решение. На падающую дождевую каплю действуют три силы:

1) сила тяжести $F_T = mg = \rho_{\text{воды}} Vg$, где $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{6}\pi d^3$ – объем капли;

2) сила сопротивления (вязкого трения), которая определяется по формуле Стокса $F_C = 6\pi\eta u R = 3\pi\eta u d$;

3) выталкивающая сила Архимеда $F_A = \rho_{\text{возд}} Vg$. Так как $\rho_{\text{возд}} \ll \rho_{\text{воды}}$, в данном случае ею можно пренебречь. При установившемся движении скорость максимальна, а ускорение капли равно нулю, следовательно, результирующая сила, действующая на дождевую каплю, равна нулю, т.е. $F_T - F_C = 0$ или $3\pi\eta u d = \rho_{\text{воды}} \frac{1}{6}\pi d^3 g$. Окончательно имеем

$$u = \frac{\rho_{\text{воды}} d^2 g}{18\eta} = 8{,}2 \cdot 10^{-4} \text{ м/с}.$$

Пример 3.3.11. *Два тонкостенных коаксиальных цилиндра длиной* $l = 10$ см *могут свободно вращаться вокруг их общей оси z. Радиус R большого цилиндра равен* 5 см. *Между цилиндрами имеется зазор размером d* = 2 мм. *Оба цилиндра находятся в воздухе при нормальных условиях. Внутренний цилиндр приводят во вращение с постоянной частотой* $n_1 = 20$ с$^{-1}$. *Внешний цилиндр заторможен. Определить, через какой промежуток времени с момента освобождения внешнего цилиндра он приобретет частоту вращения* $n_2 = 1$ с$^{-1}$. *При расчетах изменением относительной скорости цилиндров пренебречь. Масса m внешнего цилиндра равна* 100 г.

Решение. При вращении внутреннего цилиндра слой воздуха увлекается им и начинает участвовать во вращательном движении. Вблизи поверхности этого цилиндра слой воздуха приобретает со временем практически такую же линейную скорость, как и скорость точек на поверхности цилиндра, т.е. $v = 2\pi n_1 (R - d)$. Так как $d \ll R$, то приближенно можно считать

$$v \approx 2\pi n_1 R. \qquad (3.3.1)$$

Вследствие внутреннего трения момент импульса передается соседним слоям и, в конечном счете, внешнему цилиндру. За интервал времени Δt внешний цилиндр приобретает момент импульса

$$L = pR, \qquad (3.3.2)$$

где p – импульс, полученный за Δt внешним цилиндром. Отсюда $p = L / R$. С другой стороны,

$$p = \eta \frac{dv}{dz} S \Delta t, \qquad (3.3.3)$$

где η – динамическая вязкость; $\frac{dv}{dz}$ – градиент скорости; S – площадь поверхности цилиндра ($S = 2\pi Rl$).

Приравняв правые части выражений (3.3.2) и (3.3.3) и выразив из полученного равенства искомый интервал Δt, получим

$$\Delta t = \frac{L}{\eta R \frac{dv}{dz} S}. \qquad (3.3.4)$$

Найдем входящие в эту формулу величины L, $\frac{dv}{dz}$ и S. Момент импульса $L = J\omega_2$, где J – момент инерции цилиндра ($J = mR^2$); m – его масса; ω_2 – угловая скорость внешнего цилиндра ($\omega_2 = 2\pi n_2$). С учетом этого запишем $L = mR^2 \cdot 2\pi n_2 = 2\pi mR^2 n_2$.

Градиент скорости $\frac{dv}{dz} = \frac{v}{z} = \frac{v}{d}$. Площадь цилиндра равна $S = 2\pi Rl$. Подставив в (3.3.4) выражения L, $\frac{dv}{dz}$, S, получим

$$\Delta t = \frac{mdn_2}{\eta v l}.$$

Заменив здесь v по (3.3.1), найдем

$$\Delta t = \frac{mdn_2}{2\pi\eta R l\, n_1}. \qquad (3.3.5)$$

Динамическая вязкость воздуха η = 17,2 мкПа·с = $1{,}72 \cdot 10^{-5}$ Па·с. Подставив в (3.3.5) значения входящих в нее величин и произведя вычисления, получим

$$\Delta t = \frac{100 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot 1}{2 \cdot 3{,}14 \cdot 1{,}72 \cdot 10^{-5} \cdot 5 \cdot 10^{-2} \cdot 10 \cdot 10^{-2} \cdot 20} \text{ с} = 18{,}5 \text{ с}.$$

3.3.3. Задачи для самостоятельной работы

Задача 3.3.1. Средняя длина свободного пробега молекул азота при нормальных условиях равна ~ $1 \cdot 10^{-7}$ м. Каков эффективный диаметр молекул? (0,3 нм)

Задача 3.3.2. При температуре 300 К и некотором давлении средняя длина свободного пробега λ молекул кислорода равна 0,1 мкм. Определить среднее число $< z >$ столкновений, испытываемых молекулами в 1 с, если сосуд откачать до 0,1 первоначального давления. Температуру считать постоянной. ($4{,}45 \cdot 10^{-8}$ $с^{-1}$)

Задача 3.3.3. Определить среднюю продолжительность $< t >$ свободного пробега молекул водорода при температуре 27˚С и давлении 5 кПа. Эффективный диаметр молекулы водорода принять равным 0,28 нм. (13,3 нс)

Задача 3.3.4. Пятнадцать сферических горошин диаметром $d = 1$ см помещены в сосуд объемом $V = 1$ л. Сосуд начинают встряхивать. Какова средняя длина свободного пробега горошин? (15 см)

Задача 3.3.5. В глубинах космоса летает очень большой сосуд, в котором хаотически движутся маленькие стальные шарики, одна половина которых имеет диаметр d, а другая $2d$. Шарики упруго сталкиваются между собой и со стенками сосуда, потерь энергии при этом нет. Какие удары происходят чаще – маленьких шариков о маленькие или больших шариков о большие? Каково отношение чисел первых и вторых ударов? (Чаще соударяются большие шарики; $\sqrt{2}$)

Задача 3.3.6. Газ кислород при температуре 300 К и давлении 100 кПа. Определить: *а*) среднюю длину свободного пробега; *б*) среднее время свободного пробега; *в*) среднее расстояние между молекулами. (*а*) 75 нм; *б*) 0,17 нс; *в*) 3,3 нм)

Задача 3.3.7. Найти число столкновений в секунду между молекулами азота, содержащимися в объеме 1 $м^3$ при давлении 100 кПа и температуре 300 К. (~ $0{,}84 \cdot 10^{35}$)

Задача 3.3.8. Теплопроводность гелия при температуре 0˚С и давлении 101 кПа равна 0,143 Вт/м·К. Чему равны коэффициент диффузии и вязкость гелия при тех же условиях? ($2{,}6 \cdot 10^{-4}$ $м^2/с$)

Задача 3.3.9. Определить, какая масса азота находится в сосуде объемом 100 см^3, если средняя длина свободного пробега молекул газа составляет λ = 23,2 нм. Эффективный диаметр молекул азота d = 0,28 нм. (m = 0,5 г)

Задача 3.3.10. Азот находится под давлением 100 кПа при температуре 290 К. Определить коэффициенты диффузии D и внутреннего трения η. Эффективный диаметр молекул азота принять равным 0,38 нм. ($D = 9{,}74\cdot10^{-6}$ м^2/с; $\eta = 1{,}13\cdot10^{-5}$ кг/(м·с))

Задача 3.3.11. Коэффициент самодиффузии в кислороде при температуре 0°С и давлении 101 кПа равен $1{,}8\cdot10^{-5}$ м^2/с. Чему равна средняя длина свободного пробега молекул кислорода при тех же условиях? (130 нм)

Задача 3.3.12. Стена комнаты имеет ширину 6 м и высоту 2,5 м. Толщина стены d = 25 см. Материал – кирпич с χ = 0,77 Вт/м·К. Оценить количество тепла, уходящее через стену на улицу в единицу времени, если разность температур снаружи и в комнате составляет ΔT = 40 К? (1,8 кВт)

Задача 3.3.13. Между двумя очень большими плоскими пластинами имеется зазор в 1 см, заполненный аргоном под давлением 100 кПа. Температуры пластин равны 299 К и 301 К. Оценить плотность теплового потока [Вт/м^2]? (~ 1 Вт/м^2)

Задача 3.3.14. Термос содержит 1 л воды при температуре 90 К. Зазор между внутренней и внешней стенками термоса составляет 5 мм и заполнен разреженным газом при давлении 0,1 Па. Оценить время, за которое температура в термосе понизится на 10°С, если температура внешней среды составляет 20°С. (~ 40 ч)

Задача 3.3.15. Горизонтально расположенный диск радиусом 20 см подвешен на тонкой упругой нити над таким-же диском, вращающимся с угловой скоростью 20 рад/с. На какой угол закрутится нить, если зазор между дисками составляет 5 мм, а коэффициент кручения нити (отношение вращающего момента к углу закручивания нити) равен 0,36 мН/м? (~ 0,5 рад)

Задача 3.3.16. Средняя длина свободного пробега молекул азота при нормальных условиях равна $\lambda = 0{,}80\cdot10^{-5}$ см. Каков эффективный диаметр молекул? (d = 0,323 нм)

Задача 3.3.17. Оцените максимально допустимое давление в

кинескопе длиной 45 см, если 98 % всех электронов должны попасть на экран, не столкнувшись ни с одной молекулой воздуха.($p \leq 1{,}8$ мПа)

Задача 3.3.18. Экспериментально измеренная средняя длина свободного пробега молекул углекислого газа при нормальных условиях приблизительно равна $5{,}6 \cdot 10^{-8}$ м. Оцените диаметр молекулы углекислого газа. Сделайте то же самое для гелия, в котором $\lambda \approx 25 \cdot 10^{-8}$ м при нормальных условиях. ($d_{CO_2} = 3{,}9 \cdot 10^{-10}$ м; $d_{He} = 2 \cdot 10^{-10}$ м)

Задача 3.3.19. Определить, во сколько раз отличаются коэффициенты динамической вязкости η углекислого газа и азота, если оба газа находятся при одинаковых температуре и давлении. Эффективные диаметры молекул этих газов считать равными. ($\eta_1/\eta_2 = 1{,}25$)

Задача 3.3.20. Определить коэффициент теплопроводности χ азота, если коэффициент динамической вязкости η для него при тех же условиях равен 10 мкПа · с. ($\chi = 7{,}42$ мВт/(м · К))

Задача 3.3.21. Ниже какого давления можно говорить о вакууме между стенками сосуда Дюара, если расстояние между стенками сосуда l_0 = 8 мм, а температура t = 17°С? Эффективный диаметр молекул воздуха d принять равным 0,37 нм. (p = 1,54 Па)

Задача 3.3.22. Во сколько раз увеличится объем газа при адиабатическом процесс, если длина свободного пробега его молекул увеличилась в 2,34 раза? ($V_2/V_1 = 2$)

Задача 3.3.23. Средняя длина свободного пробега λ_1 молекул водорода при нормальных условиях составляет 0,1 мкм. Определить среднюю длину их свободного пробега при давлении 0,1 Па, если температура газа остается постоянной. ($\lambda = 101$ м)

ПРИЛОЖЕНИЕ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

Таблица П. 1

Множители и приставки для образования десятичных кратных и дольных единиц и их наименований

Множитель	**Приставка**	**Обозначение**
10^{18}	экса	э
10^{15}	пета	п
10^{12}	тера	т
10^{9}	гига	г
10^{6}	мега	м
10^{3}	кило	к
10^{2}	гекто	г
10	дека	да
10^{-1}	деци	д
10^{-2}	санти	с
10^{-3}	милли	м
10^{-6}	микро	мк
10^{-9}	нано	н
10^{-12}	пико	п
10^{-15}	фемто	ф
10^{-18}	атто	а

Таблица П.2

Буквы греческого алфавита

Α α	альфа	Ι ι	йота	Ρ ρ	ро
Β β	бета	Κ κ	каппа	Σ σ	сигма
Γ γ	гамма	Λ λ	лямбда	Τ τ	тау
Δ δ	дельта	Μ μ	мю	Υ υ	ипсилон
Ε ε	эпсилон	Ν ν	ню	Φ φ	фи
Ζ ζ	дзета	Ξ ξ	кси	Χ χ	хи
Η η	эта	Ο ο	омикрон	Ψ ψ	пси
Θ θ	тета	Π π	пи	Ω ω	омега

Таблица П. 3

Плотность веществ

Твердые тела	$\rho, 10^3$ **кг/м^3**	**Жидкости**	$\rho, 10^3$ **кг/м^3**
Алюминий	2,69	Азотная кислота	1,50
Береза	≈ 0,6	Ацетон	0,80
Бетон	≈ 2,2	Бензин	0,7
Бронза	≈ 8,3	Вода	1,00
Висмут	9,78	Глицерин	1,26
Вольфрам	19,35	Дизельное топливо	0,86
Гранит	≈ 2,6	Керосин	0,8
Дуб	≈ 0,8	Мазут	≈ 0,95
Дюралюминий	≈ 2,8	Масло касторовое	0,96
Железо, сталь	7,87	Масло растительное	≈ 0,91
Золото	19,32	Масло трансформаторное	≈ 0,87
Инвар	7,9	Молоко	1,03

Продолжение табл. 3

Твердые тела	$\rho, 10^3$ **кг/м^3**	**Жидкости**	$\rho, 10^3$ **кг/м^3**
Иридий	22,42	Нефть	≈ 0,84
Каменная соль	2,18	Олифа	0,94
Латунь	≈ 8,5	Ртуть	13,6
Лед	0,917	Серная кислота	1,83
Магний	1,738	Сероуглерод	1,26
Марганец	≈ 7,3	Скипидар	0,87
Медь	8,96	Соляная кислота	1,10
Мрамор	≈ 2,7	Спирт	0,79
Никель	8,91	Эфир	0,72
Опал	2,2	**Газы при** $p = 1{,}013 \cdot 10^5$ **Па** $T = 273$ **К**	ρ **, кг/м^3**
Платина	21,45		
Плутоний	19,84	Азот	1,25
Пробка	0,24	Аргон	1,78
Свинец	11,336	Водород	$8{,}988 \cdot 10^{-2}$
Серебро	10,50	Воздух	1,29
Сосна	≈ 0,5	Гелий	0,1785
Стекло	≈ 2,6	Кислород	1,429
Титан	4,505	Криптон	3,733
Топаз	3,6	Ксенон	5,897
Цинк	7,133	Углекислый газ	1,98
Уголь (антрацит)	≈ 1,6	Фтор	1,696
Уран	19,01	Хлор	3,214

Таблица П. 4

Удельная теплоемкость при комнатных температурах

Твердые тела	c_p, **кДж/(кг·К)**	**Жидкости**	c_p, **кДж/(кг·К)**
Алюминий	0,896	Ацетон	2,16
Бетон	0,92	Бензин	2,09
Вольфрам	0,134	Вода	4,19
Дерево	2,39	Глицерин	2,39
Железо	0,465	Масло машинное	1,67
Золото	0,130	Ртуть	0,138
Кирпич	0,92	Спирт	2,39
Лед	2,09	**Газы**	c_p, **кДж/(кг·К)**
Медь	0,385	Азот	1,038
Свинец	0,13	Водород	14,27
Серебро	0,234	Воздух	1,009
Сталь	0,481	Гелий	5,238
Стекло	0,779	Кислород	0,917
Цинк	0,389	Углекислый газ	0,846

Таблица П. 5

Удельная теплота сгорания твердых и жидких веществ

Твердые тела	H, **МДж/кг**	**Жидкости**	H, **МДж/кг**
Антрацит	31	Бензин	42
Бурый уголь (брикеты)	21	Бензол	40
Дерево свежее	8	Дизельное топливо	42,7
Дерево сухое	15	Керосин	40,8
Древесный уголь	31	Мазут	41
Кокс	31	Нефть	41
Торф	15	Спирт	27

Таблица П. 6

Теплотворная способность газов

Газ	H_u, МДж/м^3	Газ	H, МДж/м^3
Аммиак	14,2	Метан	35,9
Ацетилен	56,9	Пропан	93,4
Бутан	124	Сероводород	23,7
Бытовой газ	15,9	Этан	64,5
Водород	10,8	Этилен	60,0

Таблица П. 7

Температура плавления и молярная теплота плавления

Вещество	$T_{пл}$, °C	q_m, кДж/моль	Вещество	$T_{пл}$, °C	q_m, кДж/моль
Азот	- 210,012	0,7207	Кислород	- 218,79	0,4459
Алюминий	660,24	10,8	Криптон	- 157,37	1,64
Аргон	- 189,30	1,190	Медь	1083	13,0
Ацетон	- 95,4	5,72	Натрий	97,9	2,60
Бензол	5,51	9,837	Никель	1455	17,6
Висмут	217,4	11,0	Платина	1772	20
Вода	0,00	6,013	Ртуть	- 38,89	2,30
Водород	- 259,19	0,117	Свинец	327,44	4,77
Вольфрам	3420	35,1	Серебро	960,5	11,3
Гелий*	- 271,4	0,007	Соль NaCl	801	28,2
Глицерин	20	18,47	Спирт	113,3	5,02
Железо	1538	13,8	Титан	1608	15,1
Золото	1063,4	12,6	Уран	1134	9,2
Иод	113,6	15,77	Хлор	-101,03	6,61
Калий	63,5	2,33	Цинк	419,5	7,2

* Данные по ^{4}He относятся к давлению p = 3,0 МПа; при нормальном давлении твердая фаза отсутствует.

Таблица П. 8

Температура кипения и молярная теплота парообразования

Вещество	$t_{пл}$, °C	r_m, кДж/моль	**Вещество**	$t_{пл}$, °C	r_m, кДж/моль
Азот	- 195,812	5,59	Кислород	-182,97	6,833
Алюминий	2520	293	Криптон	-153,22	9,046
Аргон	- 185,9	6,5	Медь	2543	1302
Ацетон	56,2	29,09	Натрий	886	90,1
Бензол	80,099	30,76	Никель	2800	370
Висмут	1552	177	Платина	3827	511
Вода	100,00	40,683	Ртуть	356,66	59,23
Водород	- 252,77	0,916	Свинец	1745	178
Вольфрам	5680	770	Серебро	2167	251
Гелий*	- 268,934	0,0837	Соль NaCl	1490	138
Глицерин	290		Спирт	78,5	38,74
Железо	2872	350	Титан	3287	410
Золото	2877	331	Уран	4030	494
Иод	184,35	41,8	Хлор	- 34,1	20,41
Калий	761	76,6	Цинк	906,2	115,3

Таблица П. 9

Давление насыщенных паров воды при разных температурах

Температура, °С	**Давление, кПа**	**Температура, °С**	**Давление, кПа**
0	0,61	55	15,35
5	0,87	60	19,83
10	1,23	65	25,02
15	1,71	70	31,18
20	2,34	75	38,57
25	3,17	80	47,37
30	4,25	85	57,82
35	5,63	90	70,12
40	7,38	95	84,53
45	9,60	100	101,32
50	12,34		

Таблица П. 10

Эффективный диаметр d молекул, динамическая вязкость η *и теплопроводность* λ *газов при атмосферном давлении и* $T = 300$ К

Газ	***d*, нм**	η, мкПа · с	λ, мВт/(м · К)
Азот	0,38	17,9	25,7
Аргон	0,35	22,7	17,7
Ацетон		7,77	11,2
Водород	0,28	8,94	183
Водяной пар		9,13	15,8
Воздух		18,5	24,1
Гелий	0,22	19,9	152
Кислород	0,36	20,7	26,7
Криптон		25,5	9,6
Углекислый газ		15,0	16,6
Фтор		23,6	27
Хлор		13,7	8,8

Таблица П. 11

Критические параметры и постоянные Ван дер Ваальса

Газ	$T_{кр}$, **К**	$p_{кр}$, **МПа**	$V_{кр}$, $10^{-6}\ \frac{м^3}{моль}$	a, $\frac{Н \cdot м^4}{моль^2}$	b, $10^{-6}\ \frac{м^3}{моль}$
Азот	126,25	3,399	92,1	0,1368	38,607
Аммиак	405,45	11,283	73,1	0,4249	37,347
Аргон	150,65	4,86	75.2	0,1361	32,191
Водород	33,24	1,297	65,5	0,02484	26,635
Водяной пар	647,30	22,12	56,3	0,5524	30,413
Воздух	413,8	3,77	-	1,3247	114,09
Гелий	5,20	0,229	57,5	0,00344	23,599
Кислород	154,78	5,081	78	0,1375	31,662
Криптон	209,38	5,50	92,3	0,2324	39,549
Озон	261,05	5,53	89,4	0,3592	49,038
Ртуть	1763	153,5	36,5	0,5905	11,936
Углекислый газ	304,15	7,387	91	0,3652	12,792
Фтор	144	5,6	66,2	0,1085	26,854
Хлор	417	7,71	124	0,6576	56,202

Таблица П. 12

Коэффициент поверхностного натяжения и динамическая вязкость жидкостей при 20° С.

Жидкость	σ, **мН/м**	η, **мПа·с**	**Жидкость**	σ, **мН/м**	η, **мПа·с**
Ацетон	23,7	0,322	Керосин	28,9	1,5
Бензол	28,88	0,648	Ртуть	465	1,554
Вода	72,88	1,002	Спирт	22,8	1,20
Глицерин	59,4	1480	Эфир	17,0	0,24

Таблица П. 13

Соотношения между некоторыми внесистемными единицами и единицами СИ

Измеряемая величина	**Название единицы**	**Символ**	**Значение в СИ**
Длина	1 ангстрем	1 Å	10^{-10} м
	1 астрономическая единица	1 а.е.	$1{,}496 \cdot 10^{11}$ м
	1 световой год	1 св. год	$0{,}946 \cdot 10^{16}$ м
	1 парсек	1 ПК	$3{,}086 \cdot 10^{16}$ м
Площадь	1 барн	1 б	10^{-28} м^2
	1 ар (сотка)	1 ар	100 м^2
	1 гектар	1 га	10^4 м^2
Объем	1 литр	1 л	1 дм^3 = 10^{-3} м^3
Плоский угол	1 градус	1°	$1{,}745 \cdot 10^{-2}$ рад
	1 минута (1°/60)	1′	$2{,}909 \cdot 10^{-4}$ рад
	1 секунда (1′/60)	1″	$4{,}848 \cdot 10^{-6}$ рад
Время	1 минута	1 мин	60 с
	1 час	1 ч	3 600 с
	1 сутки	1 сут	86 400 с 3,156- 10^7 с
	1 год	1 год	

Продолжение табл. П. 13

Измеряемая величина	**Название единицы**	**Символ**	**Значение в СИ**
Скорость	1 километр в час	1 км/ч	0,2778 м/с
Масса	1 грамм 1 тонна	1 г 1 т	10^{-3} кг 10^{3} кг
Плотность	1 г/см^3	1 г/см^3	10^{3} кг/м^3
Энергия	1 электрон-вольт 1 калория	1 эВ 1 кал	$1{,}602 \cdot 10^{-19}$ Дж 4,1868 Дж
Мощность	1 лошадиная сила	1 л.с.	735,499 Вт
Давление	1 миллиметр ртутного столба 1 техническая атмосфера 1 физическая атмосфера 1 бар	1 мм рт. ст. 1 ат 1 атм 1 бар	133,3224 Па. 98,0665 кПа 760 Торр = = 101,35 кПа 10^{5} Па = = 101,325 кПа 10^{5} Па
Удельное сопротивление		1 Ом · мм^2/м	10^{-6} Ом · м
Магнитная индукция	1 гаусс	1 Гс	10^{-4} Тл

Окончание табл. П. 13

Измеряемая величина	**Название единицы**	**Символ**	**Значение в СИ**
Напряженность H магнитного поля	1 эрстед	1 Э	79,5775 А/м
Магнитный поток	1 максвелл	1 Мкс	10^{-8} Вб
Экспозиционная доза	1 рентген	1 Р	$2{,}58 \cdot 10^{4}$ Кл/кг
Поглощенная доза	1 рад	1 рад	10^{-2} Гр (Дж/кг)
Активность	1 кюри	1 Ки	$3{,}7\ 10^{10}$ Бк

Таблица П. 14

Основные физические постоянные

Физическая	**Сим**	**Значение**
Гравитационная постоянная	G	$6{,}67259 \cdot 10^{-11}$ м$^3 \cdot$ кг$^{-1} \cdot$ с$^{-2}$
Скорость света	c	$2{,}997\,924\,58 \cdot 10^{8}$ м $\cdot$ с$^{-1}$
Элементарный заряд	e	$1{,}602177\,33 \cdot 10^{-19}$ Кл
Постоянная Планка	h	$6{,}626\,075\,5 \cdot 10^{-34}$ Дж $\cdot$ с
Постоянная Планка $h / 2\pi$	$\hbar$	$1{,}054\,572\,66 \cdot 10^{-34}$ Дж $\cdot$ с = $= 6.582122\,0 \cdot 10^{-16}$ эВ $\cdot$ с
Электрическая постоянная	ε_0	$8{,}854187817 \cdot 10^{-12}$ Кл$^2 \cdot$ Н$^{-1} \cdot$ м$^{-2}$
Магнитная постоянная	μ_0	$12{,}566\,370\,614$ Ф $\cdot 10^{-7}$ Н $\cdot$ А$^{-2}$
Масса электрона	m_e	$9{,}109\,389\,7 \cdot 10^{-31}$ кг = 0,510 999 06 МэВ/с^2
Масса протона	m_p	$1{,}672\,6231 \cdot 10^{-27}$ кг = 938,272 31 МэВ/с^2 = = 1,007276470 а.е.м. = 1836,152 701m_e
Масса нейтрона	m_n	$1{,}674\,928\,6 \cdot 10^{-27}$ кг = 939,565 63 МэВ/с^2 = = 1,008 664 904 а.е.м.
Атомная единица массы	а.е.м.	$1{,}660\,540\,2 \cdot 10^{-27}$ кг = 931,494 32 МэВ/с^2
Постоянная Больцмана	$k_Б$	$1{,}380\,658 \cdot 10^{-23}$ Дж $\cdot$ К$^{-1}$ = $= 8{,}617385 \cdot 10^{-5}$ эВ $\cdot$ К$^{-1}$
Число Авогадро	N_A	$6{,}022136\,7 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$

Таблица П. 15

Часто встречающиеся комбинации физических постоянных

Физическая величина	**Символ**	**Значение**
Коэффициент в соотношении между энергией и массой	c^2	$8.988 \cdot 10^{16}$ Дж · кг$^{-1}$ = = 931,49 МэВ а.е.м.$^{-1}$
Коэффициент $\hbar c$ в соотношении между расстоянием и энергией	$\hbar c$	$3{,}16153 \cdot 10^{-26}$ Дж · м = = 197,327 МэВ · фм
Постоянная $1/(4\pi\varepsilon_0)$	k	$8{,}988 \cdot 10^{9}$ Н · м^2 · Кл$^{-2}$
Произведение $\mu_0\varepsilon_0$	$1/c^2$	$1{,}113 \cdot 10^{-17}$ м$^{-2}$ · с^2
Удельный заряд электрона $e/m_e = \omega_e/B$		$1{,}759 \cdot 10^{11}$ с$^{-1}$ · Тл$^{-1}$
Удельный заряд протона $e/m_p = \omega_p/B$		$9{,}579 \cdot 10^{7}$ с$^{-1}$ · Тл$^{-1}$
Постоянная тонкой структуры $e^2/4\pi\varepsilon_0\hbar c$	α	1/137,035
Электромагнитный радиус электрона $e^2/4\pi\varepsilon_0 m_e c^2$	r_e	$2{,}818 \cdot 10^{-15}$ м
Радиус Бора $4\pi\varepsilon_0\hbar^2/m_e e^2$	$\alpha_Б$	$0{,}529 \cdot 10^{-10}$ м
Постоянная Ридберга $m_e e^4/8c\varepsilon_0^2 h^3$	R	$1{,}097 \cdot 10^{7}$ м"^{1}
Энергия Ридберга $hcR = m_e e^4/8\varepsilon_0^2 h^2 = m_e c^2\alpha^2/2$	Ry	13,605 эВ

Продолжение табл. П. 15

Физическая величина	**Сим-вол**	**Значение**
Комптоновская длина волны электрона $\hbar / m_e c$	λ_e	$3{,}862 \cdot 10^{-13}$ м
Магнетон Бора $e\hbar / 2m_e c$	$\mu_Б$	$9{,}274 \cdot 10^{-24}$ Дж · Тл$^{-1}$ = $= 5{,}788 \cdot 10^{-11}$ МэВ · Тл$^{-1}$
Ядерный магнетон $e\hbar / 2m_p c$	$\mu_{яд}$	$5{,}051 \cdot 10^{-27}$ Дж · Тл$^{-1}$ = $= 3{,}152 \cdot 10^{-14}$ МэВ · Тл$^{-1}$
Универсальная газовая постоянная $k_Б N_A$	R	8,314 Дж · моль$^{-1}$ · К$^{-1}$
Число Фарадея eN_A	F	96 484,56 Кл · моль$^{-1}$
Молярный объем	V_m	$22{,}414 \cdot 10^{-3}$ м^3 · моль$^{-1}$
Постоянная Стефана–Больцмана $\sigma = \pi^2 k_Б^4 / 60\hbar^3 c^2$	σ	$5{,}6705 \cdot 10^{-8}$ Вт · м$^{-2}$ · К$^{-4}$
Постоянная закона смещения Вина $b = \lambda_{max} T$	b	$2{,}898 \cdot 10^{-3}$ м · К

Список рекомендуемой литературы

1. Калашников Н.П., Смондырев М.А. Основы физики. Т. 1 – 2. М.: Дрофа, 2007.
2. Калашников Н.П., Смондырев М.А. Основы физики. Упражнения и задачи. М.: Дрофа, 2007.
3. Калашников Н.П., Кожевников Н.М. Физика. Интернет-тестирование базовых знаний. СПб.: Лань, 2009.
4. Калашников Н.П., Красин В.П. Графические методы решения задач по молекулярно-кинетической теории и термодинамике идеальных газов. СПб.: Лань, 2011.
5. Сивухин Д.В. Курс общей физики. Т. 2. Термодинамика и молекулярная физика. М.: Наука, 1990.
6. Савельев И.В. Курс общей физики. Т. 1. Механика. Молекулярная физика. СПб.: Лань, 2011.
7. Матвеев А.Н. Молекулярная физика. М.: Высшая школа, 1981.
8. Джанколли Д.С. Физика. Т. 1. М.: Мир, 1989.
9. Орир Дж. Физика. М.: Изд-во КДУ, 2011.
10. Савельев И.В. Сборник вопросов и задач по общей физике. СПб.: Лань, 2007.
11. Иродов И.Е. Задачи по общей физике. СПб.: Лань, 2006.
12. Бабаджан Е.И., Гервидс В.И., Дубовик В.М., Нерсесов Э.А. Сборник качественных вопросов и задач по общей физике. М.:Наука. ГЛ.ФМЛ, 2005.
13. Чертов А.Г., Воробьев А.А. Задачник по физике. М.: Высшая школа, 1988.
14. Калашников Н.П., Леготин С.Д., Максименко В.В. Физика: практикум. М.: МГИУ, 2009.
15. Заикин Д.А., Овчинкин В.А., Прут Э.В. Сборник задач по общему курсу физики. Ч.1. Механика. Термодинамика и молекулярная физика. М.: МФТИ, 2002.
16. Пригожин И., Кондепуди Д. Современная термодинамика. От тепловых двигателей до диссипативных структур. М.: Мир, 2002.
17. Трофимова Т.И. Руководство к решению задач по физике. М.: Юрайт, 2011.
18. Волькенштейн В.С. Сборник задач по общему курсу физики. М.: Наука, 1976.

Николай Павлович Калашников

Андрей Станиславович Ольчак

Руководство по решению задач по общей физике
«Колебательное движение.
Молекулярная физика и термодинамика.
Элементы статистической физики»

Учебное пособие

Редактор *Е.Г. Станкевич*

Подписано в печать 20.11.2015. Формат 60x84 1/16.
Уч.-изд.л. 11,75. Печ.л. 11,75. Тираж 1700 экз.
Изд. № 1/9. Заказ № 3.

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ».
115409, Москва, Каширское ш., 31.
ООО «Баркас».
115230, Москва, Каширское ш., 4.

ДЛЯ ЗАМЕТОК