Министерство образования и науки
Российской Федерации
Национальный исследовательский
ядерный университет «МИФИ»

А. П. ГОРЯЧЕВ

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ГЛАВЫ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА

Числовые и функциональные ряды

Рекомендовано к изданию УМО
«Ядерные физика и технологии»

Москва 2013

УДК 517.5(075)
ББК 22.161.5я7
Г 71

Горячев А.П. Специальные главы функционального анализа. Числовые и функциональные ряды. М.: НИЯУ МИФИ, 2013. – 272 с.

Книга предназначена для студентов второго курса всех факультетов. Изложены (с подробными доказательствами) все необходимые студентам теоретические сведения, обычно рассматриваемые на лекциях при изучении тем «Числовые ряды», «Функциональные последовательности и ряды», «Ряды Фурье в евклидовых пространствах» и «Тригонометрические ряды Фурье». В приложении приведены 30 вариантов примеров, которые можно выдавать студентам в качестве домашнего задания. Все варианты приблизительно одинаковы по трудности.

Подготовлена в рамках Программы создания и развития НИЯУ МИФИ.

Рецензент: д-р физ-мат. наук, профессор А.И. Рубинштейн

ISBN 978–5–7262–1832–8

Содержание

Введение

Данное пособие написано на основе лекций, читаемых автором на протяжении ряда лет в третьем семестре на факультете «Т» НИЯУ «МИФИ». Оно состоит из трёх частей:

1. Числовые ряды.

2. Функциональные последовательности и ряды.

3. Линейные нормированные и евклидовы пространства. Ряды Фурье.

Кроме того, в приложении даны варианты домашних заданий, которые можно использовать при проведении практических занятий и зачёта по этому курсу.

Первая часть пособия посвящена *числовым* рядам. С использованием связи рядов и последовательностей изложены линейные свойства и критерий Коши сходимости числовых рядов, установлены также необходимый признак сходимости рядов и сочетательное свойство сходящихся рядов. Затем доказаны признаки сходимости *знакоположительных* рядов: признак сравнения, интегральный признак, признак Даламбера, радикальный признак Коши, специальный признак сравнения, признак Раабе, признак Куммера, признак Гаусса. Признаки сравнения, Даламбера, Коши, Раабе и Куммера выведены в допредельной и предельной формах. Также доказаны признаки сходимости *знакопеременных* рядов, связываемые с именами Лейбница, Абеля и Дирихле. Введено в рассмотрение понятие *суммирования* числовых рядов, включающее в себя обычную сходимость как один из способов постановки в соответствие ряду некоторого числа либо бесконечного символа (так называемой *обобщённой* *суммы*) и установлены регулярность и полная регулярность метода средних арифметических.

Во второй части пособия рассматриваются *функциональные* последовательности и ряды, то есть такие последовательности и ряды, элементами которых являются уже не *числа*, а *функции*, которые для простоты изложения считаются функциями одного действительного переменного, хотя все основные понятия и результаты легко распространить и на более общий случай. Главное понятие, отличающее функциональные последовательности и ряды от числовых, это, разумеется, понятие *равномерной* сходимости, рассмотрение которого является *основным* при изучении функциональных последовательностей и рядов и которое здесь изучено достаточно полно. Получены необходимое и достаточное условие равномерной сходимости функциональной последовательности, критерий Коши равномерной сходимости функциональной последовательности и функционального ряда, необходимый признак равномерной сходимости функционального ряда. Доказаны наиболее часто употребляемые при решении задач признаки равномерной сходимости функциональных рядов: признак Вейерштрасса, признак Дирихле, признак Абеля. Для равномерно сходящихся функциональных последовательностей и рядов установлены достаточные условия почленного предельного перехода, сохранения непрерывности в точке и на множестве, почленного дифференцирования и интегрирования.

В последнем разделе второй части введено понятие *степенного* ряда как частного случая функционального ряда и изучено его множество сходимости. Получены свойства степенных рядов: равномерная сходимость, непрерывность суммы, единственность коэффициентов, почленное дифференцирование и интегрирование, поведение степенного ряда на конце конечного интервала сходимости. Наконец, рассмотрено понятие *аналитической* функции и установлена аналитичность следующих функций:

$$e^x, \ \cos x, \ \sin x, \ \ln(1+x), \ (1+x)^\alpha.$$

В третьей части пособия изучаются основные фундаментальные понятия, относящиеся к *рядам Фурье*. При этом вначале рассматриваются общие ряды Фурье по ортогональным и ортонормированным системам в произвольных евклидовых пространствах, а затем и традиционные тригонометрические ряды Фурье в пространстве кусочно-непрерывных осреднённых функций с квадратичной метрикой.

Предварительно вводится понятие линейного *нормированного* пространства, то есть линейного пространства, в котором введена *норма*[1]. Рассматривается сходимость последовательностей и рядов в нормированном пространстве по его норме. Также вводятся понятия *замкнутой* системы в этом пространстве, *базиса* бесконечномерного линейного нормированного пространства. Линейные нормированные пространства в зависимости от наличия предела у любой фундаментальной последовательности разделяются на полные (банаховы) и неполные. Приводятся примеры полных и неполных пространств, главным образом функциональных (то есть состоящих из функций). В частности, устанавливается полнота пространства непрерывных на отрезке функций в равномерной метрике. Попутно производится сравнение различных видов сходимости для пространств, состоящих из одних и тех же функций, но различающихся нормировкой или видом сходимости (равномерная сходимость, поточечная сходимость, сходимость в среднем).

[1]Введение нормы иногда называют введением *метрики*.

Далее рассматриваются *евклидовы* пространства, то есть линейные пространства со скалярным произведением. Поскольку в евклидовых пространствах естественным образом вводится норма, то все свойства линейных нормированных пространств переносятся на евклидовы пространства. Затем вводятся *ортогональные* и *ортонормированные* системы и *ряды Фурье* по этим системам. Устанавливается минимальное свойство коэффициентов Фурье и неравенство Бесселя. Доказывается, что необходимыми и достаточными условиями базисности ортонормированной (ортогональной) системы является замкнутость этой системы либо равенство Парсеваля. Выводятся также обобщённое равенство Парсеваля и полнота ортонормированного (ортогонального) базиса.

В последнем разделе третьей части изучаются *тригонометрические* ряды Фурье. Вначале устанавливаются некоторые вспомогательные утверждения, в частности лемма Римана для кусочно-гладких функций. Частная сумма тригонометрического ряда Фурье выражается через ядро Дирихле, и доказывается поточечная сходимость ряда Фурье для любой кусочно-гладкой функции. Для любой непрерывной периодической функции с кусочно-непрерывной производной доказывается равномерная сходимость ряда Фурье и возможность его почленного дифференцирования. Находится порядок убывания коэффициентов Фурье в зависимости от наличия у непрерывной периодической функции непрерывных периодических производных.

Затем рассматривается применение к тригонометрическому ряду метода суммирования средних арифметических (метод Фейера). Суммы Фейера тригонометрического ряда Фурье выражаются через ядро Фейера, и доказывается равномерная сходимость сумм Фейера для любой непрерывной периодической функции. С помощью этого результата устанавливается теорема Вейерштрасса о *замкнутости* тригонометрической системы в пространстве непрерывных периодических функций с равномерной метрикой. В заключение устанавливается *базисность* общей тригонометрической системы в пространстве кусочно-непрерывных осреднённых функций с квадратичной метрикой. Этот результат переносится на неполные тригонометрические системы (система косинусов, система синусов) и на систему мнимых экспонент. Также результаты, полученные для рядов Фурье на традиционно рассматриваемом отрезке $[-\pi, \pi]$, переносятся на произвольный отрезок $[a, b]$.

В конце каждого раздела даются вопросы для повторения изложенного материала и самостоятельной работы. В отдельное приложение вынесены примеры, которые можно использовать в качестве домашних заданий.

Разумеется, данное пособие совершенно не претендует на полноту содержащихся в нём сведений. Однако автор надеется, что оно окажется полезным студентам и преподавателям второго курса, так как здесь достаточно подробно дан тот теоретический материал, который излагается на лекциях при изучении тем "Числовые ряды", "Функциональные последовательности и ряды", "Ряды Фурье в евклидовых пространствах" и "Тригонометрические ряды Фурье".

Всех же, кто заинтересуется изложением вопросов, касающихся как числовых рядов, так и функциональных последовательностей и рядов (в том числе рядов Тейлора и Фурье), но не вошедших в настоящее пособие (например, бесконечные произведения, "квазиравномерная сходимость", общие тригонометрические ряды и др.), можно отослать к вузовским учебникам и обширной специальной литературе. Приведём лишь некоторые из учебников и монографий.

1. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления.

2. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа.

3. Кудрявцев Л.Д. Математический анализ.

4. Шилов Г. Е. Математический анализ. Специальный курс.

5. Бари Н.К. Тригонометрические ряды.

6. Зигмунд А. Тригонометрические ряды.

ЧАСТЬ I

Числовые ряды

1. Общие сведения, относящиеся к числовым рядам

1.1. Понятие числового ряда. Примеры

Пусть задана некоторая числовая последовательность

$$\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots\} \equiv \{a_n\}_{n=1}^{\infty}. \tag{1.1}$$

Тогда бесконечная сумма

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \cdots \tag{1.2}$$

называется *числовым рядом*. При этом n-й член последовательности (1.1), то есть число a_n, называется n-м (*общим*) членом ряда, а сумма

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n \tag{1.3}$$

называется n-й *частичной суммой* ряда (1.2).

Отметим, что если в ряде (1.2) и, соответственно, в частичной сумме (1.3) суммирование начинается не с единицы, а с некоторого целого номера n_0, большего или меньшего единицы, тем не менее n-й общий член является функцией натурального аргумента n, а n-я частичная сумма заканчивается членом ряда a_n.

Бесконечной формальной сумме (1.2) можно придать неформальный смысл разными способами.

Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ (конечное число), то ряд (1.2) называется *сходящимся*, а число S – его суммой.

То, что числовой ряд сходится к *числу* S, записывается так:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S.$$

Если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$ $(+\infty,\ -\infty)$, то ряд (1.2) называется *расходящимся*, но можно соответственно записать

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty \ \ (+\infty,\ -\infty).$$

Если же частичная сумма S_n не имеет *никакого* предела (ни конечного, ни бесконечного), то ряд (1.2) также называется *расходящимся*, но ему не приписывают *никакой* суммы.

Заметим, что добавление, отбрасывание, изменение некоторого конечного числа членов ряда не влияют на его сходимость (расходимость), но, разумеется (в случае сходимости), влияют на величину суммы ряда. Действительно, в этом случае частичные суммы исходного и изменённого рядов, начиная с некоторого номера, отличаются друг от друга на одну и ту же величину. Поэтому в дальнейшем (если не оговорено противное) будем рассматривать суммирование в (1.2) и (1.3), начиная с единицы. Этим замечанием мы неоднократно будем пользоваться ниже.

П р и м е р. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n + \cdots , \tag{1.4}$$

то есть ряд, общий член которого

$$a_n = q^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots ;$$

при различных значениях q. Как хорошо известно, частичные суммы

$$S_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n = \begin{cases} \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}, & q \neq 1, \\ n + 1, & q = 1. \end{cases} \tag{1.5}$$

Поэтому рассмотрение ряда (1.4) естественно разделяется на несколько случаев.

1. Пусть $|q| < 1$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} q^{n+1} = 0$, и, согласно (1.5), существует $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{1}{1-q}$, то есть в этом случае ряд (1.4) сходится, причём $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$.

2. Пусть $q > 1$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} q^{n+1} = +\infty$, и, согласно (1.5), предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$, то есть в этом случае ряд (1.4) расходится, причём $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n = +\infty$.

3. Пусть $q < -1$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} q^{n+1} = \infty$, причём этот символ ($\infty$) нельзя заменить ни на $+\infty$, ни на $-\infty$, так как q^{n+1}, неограниченно возрастая по абсолютной величине, становится попеременно то положительной, то отрицательной величиной. Таким образом, в этом случае ряд (1.4) расходится, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n = \infty$, и значение суммы (символ ∞) нельзя заменить ни символом $+\infty$, ни символом $-\infty$.

4. Если $q = 1$, то так же, как и при $q > 1$, ряд (1.4) расходится, причём $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} 1 = +\infty$.

5. Если $q = -1$, то ряд (1.4) принимает следующий вид:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots . \qquad (1.6)$$

Поэтому его частичные суммы

$$S_0 = 1,\ S_1 = 0,\ S_2 = 1,\ S_3 = 0,\ S_4 = 1,\ S_5 = 0, \ldots$$

не имеют предела, так как последовательность $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ содержит в себе подпоследовательности с номерами разной чётности, сходящиеся к *различным* числам $\left(\lim\limits_{m\to\infty} S_{2m} = 1,\ \lim\limits_{m\to\infty} S_{2m+1} = 0\right)$. Это означает, что ряд (1.6) (то есть ряд (1.4) при $q = -1$) расходится, но ему нельзя приписать никакой суммы.

Итак, мы получаем, что ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n \quad \begin{array}{ll} \text{при } |q| < 1 & \text{сходится,} \\ \text{при } |q| \geqslant 1 & \text{расходится.} \end{array} \qquad (1.7)$$

1.2. Линейные свойства сходящихся рядов. Сочетательный закон

Так как сходимость (расходимость) числового ряда определена как сходимость (расходимость) последовательности его частичных сумм, то переформулировка теоремы о линейных свойствах сходящихся числовых последовательностей приводит к справедливости нижеследующей теоремы о линейных свойствах сходящихся числовых рядов.

Теорема 1.1. Для любых двух сходящихся рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, суммы которых равны A и B соответственно:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = B;$$

а) ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ сходятся, причём

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = A \pm B;$$

б) для всякого числа c ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ca_n$ – сходящийся, причём

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = cA.$$

В сходящемся числовом ряде $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ можно (не меняя порядка слагаемых) расставлять скобки. При этом сумма ряда не изменится:

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = (a_1 + a_2 + \dots + a_{k_1}) + \\ +(a_{k_1+1} + a_{k_1+2} + \dots + a_{k_2}) + \dots + \\ +(a_{k_{p-1}+1} + a_{k_{p-1}+2} + \dots + a_{k_p}) + \dots \,. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Это утверждение сформулируем и докажем в виде следующей теоремы.

Теорема 1.2. Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится к сумме S, то есть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S$. Тогда для любой строго возрастающей последовательности $\{k_p\}_{p=0}^{\infty}$ целых неотрицательных чисел

$$0 = k_0 < k_1 < k_2 < k_3 < \dots < k_p < \dots$$

числовой ряд $\sum\limits_{p=1}^{\infty} b_p$, общий член которого равен сумме

$$b_p = a_{k_{p-1}+1} + a_{k_{p-1}+2} + \dots + a_{k_p}, \quad p = 1, 2, \dots$$

является сходящимся, причём $\sum\limits_{p=1}^{\infty} b_p = S$.

Доказательство. Обозначим n-ю частичную сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ через $S_n^{(a)}$, а m-ю частичную сумму ряда $\sum\limits_{m=1}^{\infty} b_m$ – через $S_m^{(b)}$. Тогда для всех натуральных p частичная сумма

$$\begin{gathered} S_p^{(b)} = b_1 + b_2 + \dots + b_p = (a_1 + a_2 + \dots + a_{k_1}) + \\ +(a_{k_1+1} + a_{k_1+2} + \dots + a_{k_2}) + \dots + \\ +(a_{k_{p-1}+1} + a_{k_{p-1}+2} + \dots + a_{k_p}) = a_1 + a_2 + \dots + a_{k_1} + \\ +a_{k_1+1} + a_{k_1+2} + \dots + a_{k_2} + \dots + \\ +a_{k_{p-1}+1} + a_{k_{p-1}+2} + \dots + a_{k_p} = S_{k_p}^{(a)}, \end{gathered}$$

то есть последовательность $\{S_p^{(b)}\}$ является подпоследовательностью сходящейся (по условию) к числу S последовательности $\{S_n^{(a)}\}$. Поэтому $\lim\limits_{p\to\infty} S_p^{(b)} = S$. Теорема доказана.

Очевидно, что в сходящемся ряде (см. (1.8)) расставить скобки можно так, что в последнюю скобку войдут все члены этого ряда, начиная с некоторого номера:

$$\begin{gathered} a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = (a_1 + a_2 + \dots + a_{k_1}) + \\ +(a_{k_1+1} + a_{k_1+2} + \dots + a_{k_2}) + \dots + \\ +(a_{k_{p-1}+1} + a_{k_{p-1}+2} + \dots + a_{k_p}) + (a_{k_p+1} + a_{k_p+2} + \dots). \end{gathered} \tag{1.9}$$

Действительно, внутри последних скобок записан сходящийся ряд (см. замечание на с. 15), сумма которого отличается от суммы исходного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ на величину $\sum\limits_{n=1}^{k_p} a_n$.

В *расходящемся* ряде расстановка скобок вида (1.8) и (1.9) *недопустима*, так как может привести к неверным выводам. В самом деле, рассмотрим расходящийся ряд (1.6). Взяв в скобки каждую пару слагаемых, можно заключить, что сумма S ряда равна

$$S = (1-1) + (1-1) + \cdots = 0 + 0 + \cdots = 0.$$

С другой стороны,

$$S = 1 - (1-1) - (1-1) - \cdots = 1 - 0 - 0 - \cdots = 1.$$

А если расставить скобки так, что внутри скобок окажутся *все* слагаемые ряда (1.6), кроме начального (нулевого):

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = 1 - (1 - 1 + 1 - \cdots) = 1 - S,$$

то получим, что $S = \dfrac{1}{2}$. Неверный вывод о том, что ряд может иметь три различные суммы или $0 = 1 = \dfrac{1}{2}$, был сделан из-за неявного предположения, что расходящийся ряд (1.6) сходится, так как оперировали с числом S – *суммой* ряда.

1.3. Связь рядов и последовательностей. Критерий Коши. Необходимый признак

Всякий числовой ряд (1.2) порождает числовую последовательность своих частичных сумм $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ (см. (1.3)). Но связь между рядами и последовательностями на самом деле двусторонняя: по всякой числовой последовательности можно построить ряд, частичными суммами которого будут элементы данной последовательности. Действительно, пусть имеется произвольная числовая последовательность $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, у которого

$$a_1 = u_1, \quad a_n = u_n - u_{n-1}, \;\; n = 2, 3, \ldots, \tag{1.10}$$

и найдём его частичные суммы. Мы имеем, что

$$\begin{gathered} S_1 = a_1 = u_1, \quad S_2 = a_1 + a_2 = u_1 + (u_2 - u_1) = u_2, \\ S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \\ = u_1 + (u_2 - u_1) + \cdots + (u_n - u_{n-1}) = u_n, \end{gathered}$$

то есть $S_n = u_n$ при $n = 1, 2, \ldots$. Следовательно, можно не только применять свойства последовательностей при изучении рядов (что уже делается), но и, наоборот, свойства рядов применять для изучения последовательностей.

При исследовании сходимости числовых последовательностей используется *критерий Коши*. Сформулируем его для рядов, имея в виду последовательность $\{S_n\}$ частичных сумм числового ряда (1.2).

Теорема 1.3 (критерий Коши для рядов). Числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер N, что для всех номеров n и m таких, что $m > n > N$, имеет место неравенство

$$\Bigl|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\Bigr| < \varepsilon.$$

Отметим, что в специальном доказательстве эта теорема *не нуждается*, так как она ранее была доказана для *любых* числовых последовательностей в том числе и для последовательности $\{S_n\}$ частичных сумм ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Т е о р е м а 1.4 (необходимый признак сходимости). Если числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S$, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$. Но тогда и $\lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = S$, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0.$$

Теорема доказана.

Отметим, что эту теорему можно вывести из критерия Коши для рядов (из теоремы 1.3). Также отметим, что при решении примеров этот признак, являясь *необходимым*, используется для доказательства *расходимости* исследуемого ряда. Так, при исследовании сходимости рядов (1.4), мы видим, что при $|q| \geqslant 1$ (случаи 2–5) предел его общего члена $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} q^n$ либо вообще не существует, либо отличен от нуля, и поэтому ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ в этих случаях *расходится*.

С другой стороны, установив, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, мы не докажем *сходимости* ряда.

П р и м е р. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots, \tag{1.11}$$

называемый *гармоническим* рядом. Очевидно, что его общий член $a_n = \dfrac{1}{n}$ стремится к нулю, однако, как мы сейчас покажем, этот ряд расходится по теореме 1.3. Действительно, возьмём $\varepsilon = \dfrac{1}{2} > 0$ и для любого номера N рассмотрим $n = N + 1$ и $m = 2n$ (очевидно, что $m > n > N$). Но тогда $\Bigl|\sum\limits_{k=n+1}^{m} a_k\Bigr| = \underbrace{\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \dots + \dfrac{1}{2n}}_{n\ \text{слагаемых}} \geqslant n \cdot \dfrac{1}{2n} = \dfrac{1}{2} = \varepsilon$, что и доказывает расходимость ряда (1.11).

1.4. Вопросы для повторения и самостоятельной работы

1. Доказать теорему 1.1.

2. Составить числовой ряд, частичными суммами которого являются элементы последовательности

$$\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right\}.$$

   Чему равна сумма полученного ряда?

3. Вывести необходимый признак сходимости (то есть теорему 1.4) из критерия Коши (из теоремы 1.3).

2. Знакоположительные числовые ряды

Числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *знакоположительным*, если для всякого n общий член $a_n \geqslant 0$.

Разумеется, согласно замечанию на с. 15 о том, что сходимость (расходимость) ряда не зависит от изменения конечного числа начальных слагаемых, достаточно считать, что неравенство $a_n \geqslant 0$ имеет место для всех n, начиная с некоторого номера n_0.

2.1. Критерий сходимости знакоположительных рядов

Теорема 2.1. Знакоположительный числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится тогда и только тогда, когда последовательность $\{S_n\}$ его частичных сумм ограничена сверху. При этом сумма ряда $S = \sup\{S_n\}$.

Доказательство. Частичная сумма $S_{n+1} = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1} = S_n + a_{n+1} \geqslant S_n$, то есть последовательность $\{S_n\}$ является возрастающей, а для таких последовательностей, как известно, критерием сходимости будет ограниченность сверху. При этом предел последовательности равен её точной верхней грани. Теорема доказана.

Ясно, что если последовательность $\{S_n\}$ не ограничена сверху, то $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$, то есть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$. В частности, сумма расходящегося гармонического ряда (1.11)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty. \tag{2.1}$$

Поэтому для знакоположительных рядов в качестве обозначения сходимости можно писать

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty. \tag{2.2}$$

Для *знакопеременных* рядов, то есть для таких рядов, в которых как угодно далеко встречаются и положительные, и отрицательные слагаемые, обозначение (2.2) (ограниченность частичных сумм) уже не эквивалентно сходимости, что показывает пример расходящегося ряда (1.6) с ограниченными частичными суммами.

2.2. Признак сравнения. Интегральный признак

Теорема 2.2 (признак сравнения). Пусть существует такой номер n_0, что

$$0 \leqslant a_n \leqslant b_n \quad \text{для всех } n \geqslant n_0. \tag{2.3}$$

Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ также сходится.

2. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ также расходится.

Доказательство. Обозначим

$$\begin{aligned} A_n &= a_1 + a_2 + \dots + a_n, \\ B_n &= b_1 + b_2 + \dots + b_n. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Так как (см. замечание на с. 15) отбрасывание конечного числа членов ряда не влияет на его сходимость (расходимость), то будем считать, что неравенство (2.3) справедливо для всех $n \in \mathbb{N}$. Но тогда из (2.4) вытекает, что

$$A_n \leqslant B_n. \tag{2.5}$$

Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится. Согласно теореме 2.1, последовательность $\{B_n\}$ ограничена сверху. Поэтому из (2.5) следует, что последовательность $\{A_n\}$ также ограничена сверху, то есть (опять по теореме 2.1) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, что доказывает *первое* утверждение.

Пусть теперь ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то (как только что доказано) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ также сходится. Это противоречие доказывает *второе* утверждение. Теорема доказана.

Следствие (признак сравнения в предельной форме). Пусть $a_n \geqslant 0$, $b_n > 0$ и существует

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k \in (0, +\infty). \tag{2.6}$$

Тогда ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство. Согласно определению предела, для любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер n_0, такой, что для всех $n \geqslant n_0$ абсолютная величина $\left|\dfrac{a_n}{b_n} - k\right| < \varepsilon$, то есть имеет место двойное неравенство $k - \varepsilon < \dfrac{a_n}{b_n} < k + \varepsilon$. Возьмём $\varepsilon = \dfrac{k}{2} > 0$. Тогда найдётся номер n_0, такой, что

$$\frac{k}{2}\, b_n < a_n < \frac{3k}{2}\, b_n \quad \text{для всех } n \geqslant n_0, \tag{2.7}$$

или, что то же самое,

$$\frac{2}{3k}\, a_n < b_n < \frac{2}{k}\, a_n \quad \text{для всех } n \geqslant n_0. \tag{2.8}$$

Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится. Тогда согласно теореме 1.1 ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3k}{2}\, b_n$ также сходится и с использованием второго из неравенств (2.7), по теореме 2.2 ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ является сходящимся. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{k}{2}\, b_n$ также (по теореме 1.1) расходится и, согласно первому из неравенств (2.7), по теореме 2.2 ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ является расходящимся. Если же ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится (расходится), то, используя второе (первое) из неравенств (2.8), теорему 1.1 и теорему 2.2, получаем, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ также сходится (расходится). Следствие доказано.

Теорема 2.3 (интегральный признак Коши–Маклорена). Если при $x \geqslant 1$ функция $f(x) \geqslant 0$ и не возрастает, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \quad \text{и} \quad \int\limits_{1}^{+\infty} f(x)\, dx \tag{2.9}$$

сходятся или расходятся одновременно.

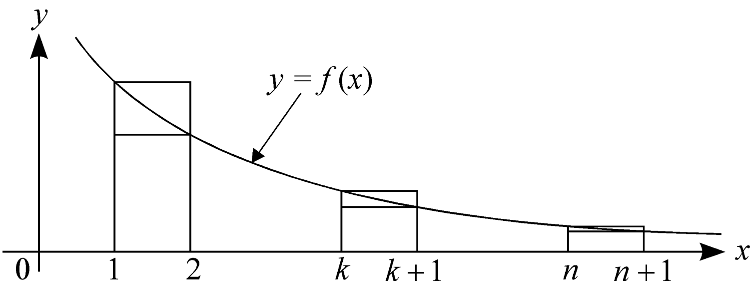
Доказательство. Обозначим через S_n частичные суммы ряда в (2.9). По условию

$$f(k) \geqslant f(x) \geqslant f(k+1), \quad x \in [k, k+1], \quad k = 1, 2, 3, \ldots .$$

Интегрируя это двойное неравенство по переменной x от k

до $k+1$ и используя очевидное равенство $\int\limits_k^{k+1} dx = 1$, имеем

$$f(k) \geqslant \int\limits_k^{k+1} f(x)\,dx \geqslant f(k+1), \quad k = 1, 2, 3, \ldots .$$



Суммируя полученное двойное неравенство по k от 1 до n, получаем

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \geqslant \sum_{k=1}^{n} \int\limits_k^{k+1} f(x)\,dx \geqslant \sum_{k=1}^{n} f(k+1),$$

то есть

$$S_n \geqslant \int\limits_1^{n+1} f(x)\,dx \geqslant S_{n+1} - f(1). \tag{2.10}$$

Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходится. Согласно теореме 2.1, последовательность $\{S_n\}$ ограничена сверху. Поэтому по первому из неравенств (2.10) следует, что числовая последовательность $\left\{\int\limits_1^{n+1} f(x)\,dx\right\}$ также ограничена сверху. Но по условию $f(x) \geqslant 0$, следовательно, *неубывающая* функция $F(T) =$

$= \int\limits_1^T f(x)\,dx$ является ограниченной сверху, и поэтому существует $\lim\limits_{T\to+\infty} F(T)$, то есть несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$ *сходится*. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ расходится, то, согласно теореме 2.1, последовательность $\{S_n\}$, а значит, и последовательности $\{S_{n+1}\}$ и $\{S_{n+1} - f(1)\}$ не ограничены сверху. Поэтому по второму из неравенств (2.10) следует, что последовательность $\left\{\int\limits_1^{n+1} f(x)\,dx\right\}$ также не ограничена сверху, то есть несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$ *расходится*. Если же интеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится (расходится), то, используя неравенство (2.10), неотрицательность и монотонность функции $f(x)$ и теорему 2.1, получаем, что и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходится (расходится). Теорема доказана.

Проиллюстрируем только что доказанный интегральный признак следующими примерами.

Пример 1. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots + \frac{1}{n^p} + \dots \tag{2.11}$$

то есть ряд с общим членом $a_n = \dfrac{1}{n^p}$ при различных значениях p. В частности, при $p = 1$ получается введённый ранее гармонический ряд (1.11). Рассмотрим два случая.

1. Пусть $p \leqslant 0$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ (этот предел равен

либо 1 при $p = 0$, либо $+\infty$ при $p < 0$), поэтому ряд (2.11) расходится по необходимому признаку (см. теорему 1.4).

2. Пусть $p > 0$. Функция $f(x) = \dfrac{1}{x^p}$ при этих p (даже при $p \geqslant 0$) удовлетворяет условиям теоремы 2.3, а интеграл $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$, как известно, сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leqslant 1$. Следовательно в этом случае ряд (2.11) сходится при $p > 1$ и расходится при $0 < p \leqslant 1$.

Объединяя эти два случая, получаем, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \qquad \begin{array}{ll} \text{при } p > 1 & \text{сходится,} \\ \text{при } p \leqslant 1 & \text{расходится.} \end{array} \tag{2.12}$$

Пример 2. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^p n} = \frac{1}{2\ln^p 2} + \frac{1}{3\ln^p 3} + \dots + \frac{1}{n\ln^p n} + \dots, \tag{2.13}$$

то есть ряд с общим членом $a_n = \dfrac{1}{n \ln^p n}$ при различных значениях p. Здесь, в отличие от предыдущего примера, для всех $p \in (-\infty, +\infty)$ общий член стремится к нулю (при $p \geqslant 0$ это совершенно очевидно, а при $p < 0$ в этом легко убедиться, вычисляя предел $\displaystyle\lim_{z \to +\infty} \frac{\ln^{-p} z}{z}$, представляющий из себя неопределённость вида $\dfrac{\infty}{\infty}$, по правилу Лопиталя). Рассмотрим те же самые два случая, что и в предыдущем примере.

1. Пусть $p \leqslant 0$. Тогда $a_n \geqslant \dfrac{1}{n}$ (при $n \geqslant 3$), а ряд $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ – расходящийся гармонический ряд (1.11) без первого слагае-

мого. Поэтому ряд (2.13) расходится по признаку сравнения (см. теорему 2.2).

2. Пусть $p > 0$. Функция $f(x) = \dfrac{1}{x\ln^p x}$ при этих p (даже при $p \geqslant 0$) удовлетворяет условиям теоремы 2.3, а интеграл $\displaystyle\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^p x}$, переходящий после замены переменного $\ln x = t$ в интеграл $\displaystyle\int\limits_{\ln 2}^{+\infty} \frac{dt}{t^p}$, сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leqslant 1$. Отсюда по интегральному признаку вытекает, что ряд (2.13) сходится при $p > 1$ и расходится при $0 < p \leqslant 1$.

Объединяя эти два случая, получаем, что ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln^p n} \quad \begin{array}{ll} \text{при } p > 1 & \text{сходится,} \\ \text{при } p \leqslant 1 & \text{расходится.} \end{array} \tag{2.14}$$

2.3. Признак Даламбера. Радикальный признак Коши

Ряды вида (1.4) (при $q > 0$), (2.11) и (2.13) дают достаточно много тестовых рядов для применения признаков сравнения (в допредельной и предельной формах) при исследовании на сходимость данного знакоположительного ряда (см. (1.7), (2.12) и (2.14)). Однако можно осуществить сравнение с такого рода рядами и в некоторой организованной форме.

Теорема 2.4 (признак Даламбера). Для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, в котором $a_n > 0$, справедливы следующие утверждения.

1. Если найдутся число $q \in (0, 1)$ и номер n_0 такие, что отношение $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant q$ для всех $n \geqslant n_0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

2. Если найдётся номер n_0 такой, что отношение $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1$ для всех $n \geqslant n_0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Доказательство. Установим первое утверждение. Имеем, что

$$a_{k+1} \leqslant q a_k, \quad k = n_0, n_0 + 1, n_0 + 2, \ldots . \tag{2.15}$$

Возьмём любое $n > n_0$ и напишем неравенство (2.15) для $k = n_0, n_0 + 1, n_0 + 2, \ldots, n - 1$:

$$\begin{aligned} a_{n_0+1} &\leqslant q a_{n_0}, \\ a_{n_0+2} &\leqslant q a_{n_0+1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n &\leqslant q a_{n-1}. \end{aligned}$$

Перемножая все эти неравенства и сокращая на отличное от нуля произведение $a_{n_0+1} \cdot a_{n_0+2} \cdot \ldots \cdot a_{n-1}$, имеем

$$a_n \leqslant \frac{a_{n_0}}{q^{n_0}} \cdot q^n, \quad n \geqslant n_0. \tag{2.16}$$

(Это неравенство, вообще говоря, выведено лишь для значений $n > n_0$, но оно также верно и для $n = n_0$.) Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_{n_0}}{q^{n_0}} \cdot q^n$ *сходится* (см. (1.7) и теорему 1.1), то по признаку сравнения (теорема 2.2) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ также сходится.

Установим теперь второе утверждение. По условию

$$a_{k+1} \geqslant a_k, \quad k = n_0, n_0 + 1, n_0 + 2, \ldots .$$

Следовательно, при $n \geqslant n_0$ имеет место цепочка неравенств

$$a_n \geqslant a_{n-1} \geqslant \dots \geqslant a_{n_0+1} \geqslant a_{n_0}.$$

Отсюда видно, что для всех членов ряда, начиная с номера n_0, имеет место неравенство

$$a_n \geqslant a_{n_0} > 0, \quad n \geqslant n_0.$$

Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ и, согласно необходимому признаку (теорема 1.4), ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится. Теорема доказана.

Следствие (признак Даламбера в предельной форме). Если $a_n > 0$ и

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q, \tag{2.17}$$

то при $q < 1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а при $q > 1$ этот ряд расходится.

Доказательство. Так как $a_n > 0$, то $q \geqslant 0$. Если q – конечное число, то, согласно определению предела, для любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер n_0, такой, что для всех $n \geqslant n_0$ абсолютная величина $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n} - q\right| < \varepsilon$, то есть имеет место двойное неравенство

$$q - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < q + \varepsilon, \quad n \geqslant n_0. \tag{2.18}$$

Пусть $q < 1$. Возьмём $\varepsilon = \dfrac{1-q}{2} > 0$. Тогда найдётся номер n_0, такой, что согласно второму из неравенств (2.18) для всех $n \geqslant n_0$ отношение

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < q + \frac{1-q}{2} = \frac{1+q}{2} = q_1 \in (0, 1).$$

Следовательно, согласно теореме 2.4, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Пусть $q > 1$. Если q – конечное число, то возьмём $\varepsilon = q - 1 > 0$. Тогда найдётся номер n_0, такой, что, согласно первому из неравенств (2.18), для всех $n \geqslant n_0$ отношение

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > q - (q-1) = 1.$$

Следовательно, согласно теореме 2.4 ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится. Если же $q = +\infty$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ также расходится. Действительно, в этом случае найдётся номер n_0 такой, что для всех $n \geqslant n_0$ отношение

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1,$$

и поэтому так же, как и в случае конечного $q > 1$, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится по необходимому признаку. Следствие доказано.

Отметим, что если $q = 1$ или предел отношения $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ не существует, то данный признак *не даёт* ответа на вопрос о том, сходится или расходится исследуемый ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. В частности, как для сходящихся, так и расходящихся рядов вида (2.11) (то есть для любого $p \in (-\infty, +\infty)$) предел отношения $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1$.

Т е о р е м а 2.5 (радикальный признак Коши). Для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, в котором $a_n \geqslant 0$, справедливы следующие утверждения.

1. Если найдутся число $q \in (0,1)$ и номер n_0 такие, что $\sqrt[n]{a_n} \leqslant q$ для всех $n \geqslant n_0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

2. Если найдётся строго возрастающая последовательность $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ натуральных чисел

$$1 \leqslant n_1 < n_2 < \cdots < n_k < n_{k+1} < \cdots$$

такая, что $\sqrt[n_k]{a_{n_k}} \geqslant 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Доказательство. Установим первое утверждение. Возводя неравенство $\sqrt[n]{a_n} \leqslant q$ в n-ю степень, получаем

$$a_n \leqslant q^n, \quad n \geqslant n_0.$$

Поскольку ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$ сходится, то по признаку сравнения (теорема 2.2) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ также сходится.

Установим теперь второе утверждение. Так как $\sqrt[n_k]{a_{n_k}} \geqslant$ $\geqslant 1$, то и $a_{n_k} \geqslant 1$. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ и, согласно необходимому признаку (теорема 1.4), ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится. Теорема доказана.

Следствие (радикальный признак Коши в предельной форме). Если $a_n \geqslant 0$ и

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q, \tag{2.19}$$

то при $q < 1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а при $q > 1$ – расходится.

Доказательство. Так как $a_n \geqslant 0$, то $q \geqslant 0$. Если $q =$ $= \varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \in [0,1)$, то по определению верхнего предела как крайней правой предельной точки последовательности, для любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер n_0 такой, что

$$\sqrt[n]{a_n} < q + \varepsilon, \quad n \geqslant n_0. \tag{2.20}$$

Возьмём $\varepsilon = \dfrac{1-q}{2} > 0$. Тогда найдётся номер n_0 такой, что согласно неравенству (2.20) для всех $n \geqslant n_0$ имеем

$$\sqrt[n]{a_n} < q + \frac{1-q}{2} = \frac{1+q}{2} = q_1 \in (0, 1).$$

Следовательно, согласно теореме 2.5, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Пусть $q > 1$ (q – конечное число или $q = +\infty$). Поскольку q – частичный предел последовательности $\left\{\sqrt[n]{a_n}\right\}$, то существует строго возрастающая последовательность $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ натуральных чисел

$$1 \leqslant n_1 < n_2 < \cdots < n_k < n_{k+1} < \cdots$$

такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n_k]{a_{n_k}} = q$. Так как $q > 1$, то найдётся номер k_0, начиная с которого $\sqrt[n_k]{a_{n_k}} \geqslant 1$, то есть для строго возрастающей последовательности $\{n_k\}_{k=k_0}^{\infty}$ натуральных чисел имеет место неравенство $\sqrt[n_k]{a_{n_k}} \geqslant 1$. Поэтому согласно теореме 2.5 ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится. Следствие доказано.

Здесь, как и в случае предельной формы признака Даламбера, при $q = 1$ предельная форма признака Коши *не даёт* ответа о сходимости или расходимости исследуемого ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. В качестве примера так же, как и ранее, можно рассмотреть ряды вида (2.11) для любого $p \in (-\infty, +\infty)$, у которых предел $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$ (а значит, и $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$).

Отметим также, что если при исследовании сходимости знакоположительного ряда по признаку Даламбера или радикальному признаку Коши (в допредельной или предельной формах) делается вывод о *расходимости* ряда, то для этого ряда $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то есть не выполняется *необходимый* признак сходимости. Это замечание, подобно замечанию на с. 15, неоднократно будет использоваться в дальнейшем.

Можно установить (мы не будем этого делать), что радикальный признак Коши *сильнее* признака Даламбера, то есть если сходимость (расходимость) какого-то знакоположительного ряда можно установить по признаку Даламбера, то этот же результат можно получить и по радикальному признаку Коши. Однако в ряде примеров применение признака Даламбера бывает проще.

2.4. Специальный признак сравнения. Признаки Раабе, Куммера и Гаусса

Т е о р е м а 2.6 (специальный признак сравнения). Пусть $a_n > 0$, $b_n > 0$ и существует такой номер n_0, что

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n} \quad \text{для всех } n \geqslant n_0. \tag{2.21}$$

Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ также сходится.

2. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ также расходится.

Доказательство. Возьмём любое $n > n_0$ и напишем неравенство (2.21) для $k = n_0, n_0 + 1, n_0 + 2, \ldots, n - 1$:

$$\frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} \leqslant \frac{b_{n_0+1}}{b_{n_0}}\,,$$

$$\frac{a_{n_0+2}}{a_{n_0+1}} \leqslant \frac{b_{n_0+2}}{b_{n_0+1}}\,,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} \leqslant \frac{b_n}{b_{n-1}}\,.$$

Перемножая эти неравенства, имеем

$$a_n \leqslant \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} \cdot b_n, \quad n \geqslant n_0. \tag{2.22}$$

Неравенство (2.22), подобно неравенству (2.16), вообще говоря, выведено лишь для значений $n > n_0$, но оно также верно и для $n = n_0$.

Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится. Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} \cdot b_n$ *сходится* (см. теорему 1.1), то по признаку сравнения (теорема 2.2) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ тоже сходится.

Пусть теперь ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится. Так же, как при доказательстве теоремы 2.2, если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то (как только что доказано) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ тоже сходится. Это противоречие доказывает *второе* утверждение. Теорема доказана.

Теорема 2.7 (признак Раабе). Для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, в котором $a_n > 0$, справедливы следующие утверждения.

1. Если найдутся такое число $r > 1$ и такой номер n_0, что

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \geqslant r \quad \text{для всех } n \geqslant n_0, \tag{2.23}$$

то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

2. Если найдётся номер n_0 такой, что

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \leqslant 1 \quad \text{для всех } n \geqslant n_0, \tag{2.24}$$

то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Доказательство. Установим первое утверждение. Из неравенства (2.23) следует

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \geqslant 1 + \frac{r}{n}, \quad n \geqslant n_0. \tag{2.25}$$

Возьмём $p \in (1, r)$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^p - 1}{\dfrac{1}{n}} = p$, то, согласно определению предела, для любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер n_1, такой, что для всех $n \geqslant n_1$ абсолютная величина разности $\left|\dfrac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^p - 1}{\dfrac{1}{n}} - p\right| < \varepsilon$, откуда вытекает, что для этих n имеет место следующее двойное неравенство

$$p - \varepsilon < \frac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^p - 1}{\dfrac{1}{n}} < p + \varepsilon, \quad n \geqslant n_1. \tag{2.26}$$

Возьмём $\varepsilon = r - p > 0$. Тогда найдётся номер n_1 такой, что, согласно второму из неравенств (2.26), для всех $n \geqslant n_1$ справедливо неравенство

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^p - 1 < \bigl[p + (r-p)\bigr] \cdot \frac{1}{n} = \frac{r}{n}\,,$$

или, что как нетрудно видеть, выражает то же самое,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^p < 1 + \frac{r}{n}\,, \quad n \geqslant n_1. \tag{2.27}$$

Из (2.25) и (2.27) следует, что для всех $n \geqslant n_2 = \max(n_0, n_1)$ отношение $\dfrac{a_n}{a_{n+1}} > \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^p$, то есть

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \left(\frac{n}{n+1}\right)^p = \frac{\left(\dfrac{1}{n+1}\right)^p}{\left(\dfrac{1}{n}\right)^p}\,, \quad n \geqslant n_2. \tag{2.28}$$

Так как $p > 1$, то ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^p$ сходится (см. (2.12)). Поэтому из (2.28) вытекает, что, согласно теореме 2.6, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Установим теперь второе утверждение. Из (2.24) следует, что при $n \geqslant n_0$ отношение $\dfrac{a_n}{a_{n+1}} \leqslant 1 + \dfrac{1}{n}$, то есть

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant \frac{n}{n+1} = \frac{\dfrac{1}{n+1}}{\dfrac{1}{n}}\,, \quad n \geqslant n_0. \tag{2.29}$$

Но ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ расходится (см. (1.11) или (2.12)). Поэтому из (2.29) вытекает, что, согласно теореме 2.6, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится. Теорема доказана.

Следствие (признак Раабе в предельной форме). Если $a_n > 0$ и

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = r, \tag{2.30}$$

то при $r > 1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а при $r < 1$ – расходится.

Доказательство. Если r – конечное число, то, согласно определению предела, для любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер n_0 такой, что для всех $n \geqslant n_0$ абсолютная величина $\left|n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) - r\right| < \varepsilon$, то есть имеет место двойное неравенство

$$r - \varepsilon < n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) < r + \varepsilon, \quad n \geqslant n_0. \tag{2.31}$$

Пусть $r > 1$. Если r – конечное число, то возьмём $\varepsilon = \dfrac{r-1}{2} > 0$. Тогда найдётся номер n_0 такой, что, согласно первому из неравенств (2.31), для всех $n \geqslant n_0$ имеет место

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) > r - \frac{r-1}{2} = \frac{r+1}{2} = r_1 > 1.$$

Следовательно, согласно теореме 2.7, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Если же $r = +\infty$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ также сходится. Действительно, в этом случае найдётся номер n_0 такой, что для всех $n \geqslant n_0$ справедливо неравенство

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) > 2,$$

и поэтому ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ также сходится по той же теореме 2.7.

Пусть $r < 1$. Если r – конечное число, то возьмём $\varepsilon = 1 - r > 0$. Тогда найдётся номер n_0 такой, что, согласно второму из неравенств (2.31), для всех $n \geqslant n_0$ имеет место неравенство

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) < r + (1 - r) = 1.$$

Следовательно, согласно теореме 2.7, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится. Если же $r = -\infty$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ также расходится. Действительно, в этом случае найдётся номер n_0 такой, что для всех $n \geqslant n_0$ справедливо неравенство

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \leqslant 1$$

и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ также расходится по теореме 2.7. Следствие доказано.

Отметим, что если $r = 1$ или предел $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$ не существует, то данный признак *не даёт* ответа на вопрос о том, сходится или расходится исследуемый ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

В частности, для *всех* рядов (2.14), как сходящихся (при $p > 1$), так и расходящихся (при $p \leqslant 1$), имеем

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = 1. \tag{2.32}$$

Сравнивая предельные формы признаков Даламбера и Раабе, мы видим, что признак Раабе гораздо *сильнее* признака Даламбера. Действительно, если $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = q \neq 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{a_{n+1}} = Q = \dfrac{1}{q} \neq 1$ (при этом если $q = 0$, то $Q = +\infty$, а если $q = +\infty$, то $Q = 0$), и поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$ равен $+\infty$ при $q < 1$ и $-\infty$ при $q > 1$. Таким образом, если предельная форма признака Даламбера даёт ответ о сходимости (расходимости) исследуемого ряда, то предельная форма признака Раабе и подавно его даёт: мы получаем, что $r = +\infty$ в случае сходимости согласно предельной форме признака Даламбера и $r = -\infty$ в случае расходимости. Для всех остальных $r \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$, признак Раабе даёт ответ о сходимости (расходимости) ряда, а признак Даламбера ответа не даёт, потому что для этих r величина $q = 1$.

Теорема 2.8 (признак Куммера). Пусть числовая последовательность $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ такова, что

$$c_n > 0, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c_n} = +\infty, \tag{2.33}$$

то есть знакоположительный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{c_n}$ расходится. Тогда для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, в котором $a_n > 0$, справедливы следующие утверждения.

1. Если найдутся число $d > 0$ и номер n_0 такие, что

$$c_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} \geqslant d \quad \text{для всех } n \geqslant n_0, \tag{2.34}$$

то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

2. Если найдётся номер n_0 такой, что

$$c_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} \leqslant 0 \quad \text{для всех } n \geqslant n_0, \tag{2.35}$$

то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Доказательство. Установим вначале первое утверждение. Согласно замечанию на с. 15, не ограничивая общности, можно считать, что неравенство (2.34) выполняется для всех $n = 1, 2, 3, \ldots$. Умножая это неравенство на $a_{n+1} > 0$, получаем

$$c_n a_n - c_{n+1} a_{n+1} \geqslant d \cdot a_{n+1}. \tag{2.36}$$

Отсюда вытекает, что $b_n \equiv c_n a_n - c_{n+1} a_{n+1} > 0$, то есть последовательность $\{c_n a_n\}_{n=1}^{\infty}$ строго убывает, а так как $c_n a_n > 0$, то эта последовательность имеет предел: $\lim\limits_{n\to\infty} c_n a_n = b \geqslant 0$. Поэтому ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, так как последовательность его частичных сумм $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеет предел, поскольку $S_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n = c_1 a_1 - c_2 a_2 + c_2 a_2 - c_3 a_3 + \cdots + c_n a_n - c_{n+1} a_{n+1} = c_1 a_1 - c_{n+1} a_{n+1}$ стремится к числу $c_1 a_1 - b$. Но тогда из неравенства (2.36) по теореме 2.2 вытекает сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} d \cdot a_{n+1}$, а отсюда и из теоремы 1.1 следует, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Установим теперь второе утверждение. Из (2.35) вытекает, что

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant \frac{c_n}{c_{n+1}} = \frac{1}{c_{n+1}} : \frac{1}{c_n}, \quad n \geqslant n_0.$$

Отсюда и из (2.33) по теореме 2.6 следует, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится. Теорема доказана.

С л е д с т в и е (признак Куммера в предельной форме). Если $a_n > 0$ и

$$\lim_{n\to\infty}\left(c_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1}\right) = d, \tag{2.37}$$

где $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет (2.33), то при $d > 0$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а при $d < 0$ этот ряд расходится.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если d – конечное число, то, согласно определению предела, для любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер n_0, такой, что для всех $n \geqslant n_0$ абсолютная величина $\left|\left(c_n \cdot \dfrac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1}\right) - d\right| < \varepsilon$, то есть имеет место двойное неравенство

$$d - \varepsilon < c_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} < d + \varepsilon, \quad n \geqslant n_0. \tag{2.38}$$

Пусть $d > 0$ и конечное число. Возьмём $\varepsilon = \dfrac{d}{2} > 0$. Тогда найдётся номер n_0 такой, что, согласно первому из неравенств (2.38), для всех $n \geqslant n_0$ имеет место

$$c_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} > d - \frac{d}{2} = \frac{d}{2} = d_1 > 0.$$

Следовательно, согласно теореме 2.8 ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Если же $d = +\infty$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ также сходится. Действительно, в этом случае найдётся номер n_0 такой, что для всех $n \geqslant n_0$ справедливо неравенство

$$c_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} > 1,$$

и поэтому ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ также сходится по теореме 2.8.

Пусть $d < 0$ и конечное число. Возьмём $\varepsilon = -d > 0$. Тогда найдётся номер n_0 такой, что, согласно второму из неравенств (2.38), для всех $n \geqslant n_0$ имеет место

$$c_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} < d - (-d) = 0.$$

Следовательно, согласно теореме 2.8 ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится. Если же $d = -\infty$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ также расходится. Действительно, в этом случае найдётся номер n_0 такой, что для всех $n \geqslant n_0$ справедливо неравенство

$$c_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} \leqslant 0,$$

и поэтому ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ также сходится по теореме 2.8. Следствие доказано.

Отметим, что если предел в (2.37) не существует или его величина $d = 0$, то данный признак *не даёт* ответа на вопрос о том, сходится или расходится исследуемый ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$

(возможно, что для исследования надо взять какую-либо *другую* последовательность $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$, разумеется, удовлетворяющую (2.33)).

Установим, что в признаке Куммера при надлежащем подборе последовательности $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ содержатся признаки Даламбера и Раабе. Ограничимся для простоты лишь *предельными* формами.

Возьмём $c_n = 1$. Ясно, что условие (2.33) выполняется, а равенство (2.37) переходит в равенство (2.17) на с. 33. При этом $d = \dfrac{1}{q} - 1$ (если $q = 0$, то $d = +\infty$, а если $q = +\infty$, то $d = -1$). Таким образом, из признака Куммера получился признак Даламбера, поскольку из сходимости (расходимости) ряда по признаку Даламбера вытекает аналогичное поведение этого же ряда по признаку Куммера.

Возьмём $c_n = n$. Ясно, что условие (2.33) выполняется, а равенство (2.37) переходит в равенство (2.30). При этом $d = r - 1$. Таким образом, из признака Куммера получился признак Раабе, ибо из сходимости (расходимости) ряда по признаку Раабе вытекает аналогичное поведение этого же ряда по признаку Куммера.

Т е о р е м а 2.9 (признак Гаусса). Если для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, в котором $a_n > 0$, найдутся номер n_0 и числа λ, μ, $\alpha > 0$ и $C > 0$ такие, что отношение $\dfrac{a_n}{a_{n+1}}$ можно представить в виде

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^{1+\alpha}}\,, \quad |\theta_n| \leqslant C \quad \text{для всех } n \geqslant n_0, \quad (2.39)$$

то

1) при $\lambda > 1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится;

2) при $\lambda < 1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится;

3) при $\lambda = 1$ и $\mu > 1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится;

4) при $\lambda = 1$ и $\mu \leqslant 1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Доказательство. Из (2.39) вытекает, что предел отношения $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda$, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = q = \dfrac{1}{\lambda}$ (если $\lambda = 0$, то $q = +\infty$). Поэтому согласно признаку Даламбера в предельной форме (см. следствие из теоремы 2.4) первое и второе утверждения настоящей теоремы установлены.

Пусть $\lambda = 1$. В этом случае из (2.39) вытекает, что предел $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\mu + \dfrac{\theta_n}{n^\alpha}\right) = \mu$. Поэтому согласно признаку Раабе в предельной форме (см. следствие из теоремы 2.7) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится при $\mu > 1$ и расходится при $\mu < 1$. Следовательно третье утверждение настоящей теоремы и её четвёртое утверждение при $\mu < 1$ установлены.

Пусть теперь $\lambda = \mu = 1$. Рассмотрим ряд (2.14) при $p = 1$, то есть *расходящийся* ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{c_n}$, в котором $c_n = n \ln n$. Согласно (2.39) предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(c_n \cdot \dfrac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1}\right) =$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[n \ln n \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{\theta_n}{n^{1+\alpha}}\right) - (n+1)\ln(n+1)\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[(n+1)\ln n + \frac{\theta_n \ln n}{n^\alpha} - (n+1)\ln(n+1) \right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[(n+1)\ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \theta_n \cdot \frac{\ln n}{n^\alpha} \right] = -1$$

(в том, что $\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)\ln\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right) = -1$, а $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{n^\alpha} = 0$, легко убедиться, вычислив пределы $\lim\limits_{u\to 0+0}\dfrac{\ln(1-u)}{u} = -1$ и $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\ln t}{t^\alpha} = 0$, например, по правилу Лопиталя). Поэтому согласно признаку Куммера в предельной форме (см. следствие из теоремы 2.8) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится. Следовательно, четвёртое утверждение настоящей теоремы окончательно установлено. Теорема доказана.

2.5. О порядке роста частичных сумм гармонического ряда

Заканчивая этот раздел, рассмотрим более подробно поведение частных сумм гармонического ряда (1.11). Обозначим

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \tag{2.40}$$

и введём следующую числовую последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$:

$$x_n = H_n - \ln n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n. \tag{2.41}$$

Из первого из неравенств двойного неравенства (2.10), полученного при доказательстве теоремы 2.3 (см. также график на с. 28), для функции $f(x) = \dfrac{1}{x}$, очевидно, удовлетворяющей условиям этой теоремы, имеем, что $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dots+\dfrac{1}{n} \geqslant \geqslant \displaystyle\int\limits_1^{n+1} \dfrac{dx}{x} = \ln(n+1)$, то есть $x_n \geqslant \ln(n+1)-\ln n > 0$ для всех номеров n. Это означает, что последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *ограничена снизу*. Далее, согласно (2.41), разность двух соседних членов последовательности $x_{n+1}-x_n = \left[1+\dfrac{1}{2}+\dots+ +\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n+1}-\ln(n+1)\right]-\left[1+\dfrac{1}{2}+\dots+\dfrac{1}{n}-\ln n\right]=\dfrac{1}{n+1}+ +\ln\dfrac{n}{n+1} = \dfrac{1}{n+1}+\ln\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)$. Эта сумма *отрицательна* вследствие того, что у функции $f(x) = \ln(1+x)$ вторая производная $f''(x) = -\dfrac{1}{(1+x)^2} < 0$, и поэтому кривая $y = \ln(1+x)$ *строго выпукла вверх*, то есть лежит *ниже* любой своей касательной, в том числе касательной, проходящей через точку $(0;0)$. Итак, $x_{n+1}-x_n < 0$, то есть последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ строго *убывает*, следовательно, существует

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}(H_n - \ln n) = C.^{1} \qquad (2.42)$$

Из (2.42), в частности, вытекает, что

$$H_n \sim \ln n,$$

то есть частные суммы H_n гармонического ряда (1.11) с ростом n возрастают как $\ln n$.

[1] Величина C носит название *постоянной Эйлера*.

2.6. Вопросы для повторения и самостоятельной работы

1. а) Доказать утверждение:

   Пусть $a_n \geqslant 0$, $b_n > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 0$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ также сходится.

   б) Если же при этих условиях ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится, то про сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ничего сказать нельзя. Привести соответствующие примеры.

2. а) Доказать утверждение:

   Пусть $a_n \geqslant 0$, $b_n > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = +\infty$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ также расходится.

   б) Если же при этих условиях ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то про сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ ничего сказать нельзя. Привести соответствующие примеры.

3. Привести пример расходящегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, у которого $a_n > 0$ и отношение $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1$.

4. Привести пример сходящегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, у которого $a_n > 0$, а предел $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ не существует.

5. Привести пример расходящегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, у которого $a_n > 0$, а предел $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ не существует.

6. а) Доказать утверждение:

   Пусть $a_n > 0$ и $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1$. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

   б) Привести пример сходящегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, у которого $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = q > 1$.

7. Привести пример расходящегося знакоположительного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, у которого $\sqrt[n]{a_n} < 1$.

8. Доказать, что для всякого сходящегося знакоположительного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и для всякого $p > 1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^p$ также сходится.

9. Привести пример сходящегося знакоположительного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, что для всякого $p < 1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^p$ расходится.

10. Установить, что для рядов $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^p n}$, то есть для рядов (2.14), при любом p справедливо равенство (2.32):

$$\lim_{n\to\infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = 1.$$

3. Знакопеременные числовые ряды

В этом разделе мы рассмотрим *знакопеременные* числовые ряды – ряды, в которых как угодно далеко встречаются как положительные, так и отрицательные слагаемые, то есть для всякого N найдутся номера $n_1 > N$ и $n_2 > N$ такие, что $a_{n_1} > 0$, $a_{n_2} < 0$.

Дело в том, если положительные и отрицательные слагаемые встречаются лишь до определённого номера, а затем знак членов ряда стабилизируется, то после отбрасывания нескольких первых членов ряда (что, как уже отмечалось на с. 15, не влияет на сходимость ряда, а влияет лишь на сумму ряда в случае его сходимости) мы получаем либо *знакоположительный* ряд, либо ряд *знакоотрицательный*, который становится знакоположительным после вынесения общего знака “минус” за знак суммы. Знакопеременные ряды уже упоминались на с. 25, когда шла речь о том, что для знакоположительного ряда сходимость эквивалентна ограниченности его частичных сумм.

3.1. Абсолютная и условная сходимость

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *абсолютно сходящимся*, если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сходится.

Это понятие, разумеется, можно рассматривать для *любого* ряда, но интерес оно представляет лишь для ряда знакопеременного, так как для знакоположительного ряда абсолютная сходимость тождественна сходимости.

Т е о р е м а 3.1. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ также сходится.

Доказательство. Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ сходится, то для него выполняется критерий Коши (см. теорему 1.3), то есть для любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер N, что для всех номеров n и m таких, что $m > n > N$, имеет место неравенство $\sum\limits_{k=n+1}^{m}|a_k| < \varepsilon$. Но тогда для этих же номеров n и m абсолютная величина суммы $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{m}a_k\right| \leqslant \sum\limits_{k=n+1}^{m}|a_k| < \varepsilon$. Отсюда по той же теореме 1.3 вытекает, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится. Теорема доказана.

Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ расходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ называется *условно сходящимся.*

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ – знакоположительный, поэтому для исследования его на абсолютную сходимость можно применять признаки сходимости, установленные для знакоположительных рядов. Как мы видели, доказывая утверждения предыдущего раздела, очень часто бывает так: выполнение некоторого условия даёт сходимость ряда, а невыполнение – расходимость. Для знакопеременных рядов, как мы увидим ниже, чаще всего ситуация иная: если выполняется условие какого-то признака, то ряд сходится, а если не выполняется, то вопрос о сходимости остаётся открытым. Далее, признаки сходимости знакопеременных рядов, давая положительный ответ на вопрос о сходимости ряда, оставляют открытым ответ на вопрос о *характере* этой сходимости, то есть *как* сходится ряд: абсолютно или условно. Разумеется, если при исследовании ряда на абсолютную сходимость мы получили, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ расходится по необходимому ($\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| \neq 0$, теорема 1.4) признаку (а это имеет место, в частности, в признаке Даламбера и радикальном признаке Коши, но не в признаках Раабе, Куммера или Гаусса!), то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ также расходится по необходимому признаку ($\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$). Действительно, если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то по теореме 1.4 предел $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$; но тогда и предел $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$.

3.2. Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница. Оценка остатка

Рассмотрим вначале достаточные условия сходимости так называемых *знакочередующихся* рядов, то есть таких, члены которых поочерёдно то неотрицательны, то неположительны.

Теорема 3.2 (признак Лейбница). Если числовая последовательность $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ монотонно не возрастает и стремится к нулю:

$$u_1 \geqslant u_2 \geqslant \ldots \geqslant u_n \geqslant u_{n+1} \geqslant \ldots, \qquad \lim_{n\to\infty} u_n = 0, \tag{3.1}$$

то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$, то есть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, общий член которого $a_n = (-1)^{n-1} u_n$, сходится.

Доказательство. Из (3.1) следует, что $u_n \geqslant 0$. Рассмотрим частичную сумму чётного порядка $S_{2m} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{2m-1} + a_{2m} = u_1 - u_2 + \cdots + u_{2m-1} - u_{2m}$. Мы видим, что $S_{2m+2} = S_{2m} + u_{2m+1} - u_{2m+2} \geqslant S_{2m}$. С другой стороны, $S_{2m} = u_1 - (u_2 - u_3) - \cdots - (u_{2m-2} - u_{2m-1}) - u_{2m} \leqslant u_1$. Таким образом, последовательность $\{S_{2m}\}_{m=1}^{\infty}$ монотонно не убывает и ограничена сверху, следовательно, существует предел $\lim\limits_{m\to\infty} S_{2m} = S$. Но частичная сумма нечётного порядка $S_{2m+1} = S_{2m} + u_{2m+1}$, следовательно, согласно (3.1) существует и $\lim\limits_{m\to\infty} S_{2m+1} = S$. Отсюда вытекает, что исходный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\, u_n$ сходится к сумме S. Теорема доказана.

Следствие (оценка остатка знакочередующихся рядов). Пусть выполняются условия теоремы 3.2 и сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\, u_n = S$. Тогда

$$|S - S_n| \leqslant u_{n+1}. \tag{3.2}$$

Доказательство. При доказательстве теоремы 3.2 получено, что частичные суммы чётного порядка S_{2m}, монотонно не убывая, стремятся к сумме ряда S. С другой стороны, $S_{2m+1} = S_{2m-1} - (u_{2m} - u_{2m+1}) \leqslant S_{2m-1}$, то есть частичные суммы нечётного порядка стремятся к тому же числу S, монотонно не возрастая. Поэтому для всякого m справедливы следующие неравенства:

$$S_{2m} \leqslant S \leqslant S_{2m-1}, \tag{3.3}$$

$$S_{2m} \leqslant S \leqslant S_{2m+1}. \tag{3.4}$$

Из двойного неравенства (3.3), как нетрудно видеть, следует, что

$$0 \leqslant S_{2m-1} - S \leqslant S_{2m-1} - S_{2m} = u_{2m}, \tag{3.5}$$

а из (3.4), в свою очередь, вытекает

$$0 \leqslant S - S_{2m} \leqslant S_{2m+1} - S_{2m} = u_{2m+1}. \tag{3.6}$$

Из неравенства (3.5) при нечётных n и из неравенства (3.6) при чётных n вытекает неравенство (3.2). Следствие доказано.

Неравенство (3.2) используется при приближённых вычислениях с помощью рядов, так как даёт возможность оценить количество слагаемых в знакочередующемся ряде с монотонно (по абсолютной величине) невозрастающими членами, чтобы получить сумму ряда с заданной точностью $\varepsilon > 0$: нужно взять столько слагаемых, чтобы абсолютная величина *первого отброшенного* слагаемого была меньше ε.

П р и м е р. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \dots\,, \qquad (3.7)$$

называемый *рядом Лейбница*. Общий член этого ряда $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$, при этом $u_n = |a_n| = \frac{1}{n}$. Ряд (3.7) удовлетворяет всем условиям теоремы 3.2, следовательно, он *сходится*, его сходимость – *условная*, так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ – *расходящийся* гармонический ряд (1.11). Найдём сумму этого ряда. Согласно (2.40) и (2.41) имеем, что частичные суммы ряда (3.7) с чётными номерами $S_{2m} = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2m-1}-\frac{1}{2m} = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2m-1} + \frac{1}{2m}\right) - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2m}\right) = H_{2m} - H_m = x_{2m} + \ln(2m) - x_m - \ln m = x_{2m} - x_m + \ln 2$. Следовательно, из (2.42) вытекает, что $\lim\limits_{m\to\infty} S_{2m} = \lim\limits_{m\to\infty} (x_{2m} - x_m + \ln 2) = C - C + \ln 2 = \ln 2$. Поскольку, как уже отмечалось, ряд (3.7) сходится, то *вся* последовательность его частичных сумм, а не только подпоследовательность частичных сумм с чётными номерами, сходится к $\ln 2$, то есть

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2. \tag{3.8}$$

Отметим, что в формулировке признака Лейбница условие $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ является не только одним из достаточных, но и *необходимым*, так как его невыполнение приводит к расходимости ряда по теореме 1.4. Условие *монотонности*, вообще говоря, необходимым *не является*. Но отбросить это условие всё же нельзя.

Пример. Рассмотрим ряд

$$\begin{array}{cccccc} \dfrac{1}{\sqrt{2}-1} - & \dfrac{1}{\sqrt{2}+1} + & \cdots + & \dfrac{1}{\sqrt{n}-1} - & \dfrac{1}{\sqrt{n}+1} + & \cdots \\ 3 & 4 & \ldots & 2n-1 & 2n & \ldots \end{array} \tag{3.9}$$

(под каждым слагаемым для наглядности записан его номер). У этого знакочередующегося ряда $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, но последовательность $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ не является монотонной. Нетрудно видеть, что ряд (3.9) – *расходящийся*, так как согласно (2.1) предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=2}^{n} \left(\dfrac{1}{\sqrt{k}-1} - \dfrac{1}{\sqrt{k}+1} \right) =$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n} \frac{2}{k-1} = 2 \cdot \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} \right) = +\infty.$$

3.3. Преобразование Абеля. Признаки Дирихле и Абеля

Для получения других признаков, которые можно применять не только к знакочередующимся, но и к другим знакопеременным рядам, рассмотрим *преобразование Абеля.*

Пусть имеются две числовые последовательности: $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$. Обозначим через $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ последовательность частичных сумм ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$:

$$B_1 = b_1,\ \ B_2 = b_1 + b_2,\ \dots,\ B_k = b_1 + b_2 + \dots + b_k, \dots.$$

Следовательно,

$$b_1 = B_1,\ \ b_2 = B_2 - B_1,\ \dots,\ b_k = B_k - B_{k-1}. \tag{3.10}$$

Пусть m и n – любые номера, такие, что $m > n \geqslant 1$. Тогда, используя (3.10), имеем

$$\begin{gathered}\sum_{k=n+1}^{m} a_k b_k = a_{n+1}b_{n+1} + a_{n+2}b_{n+2} + \dots + \\ + a_{m-1}b_{m-1} + a_m b_m = a_{n+1}(B_{n+1} - B_n) + \\ + a_{n+2}(B_{n+2} - B_{n+1}) + \dots + a_m(B_m - B_{m-1}).\end{gathered} \tag{3.11}$$

Раскрывая в (3.11) скобки и перегруппировывая слагаемые, получаем $\sum\limits_{k=n+1}^{m} a_k b_k = -a_{n+1}B_n + (a_{n+1} - a_{n+2})B_{n+1} + \dots + (a_{m-1} - a_m)B_{m-1} + a_m B_m = -a_{n+1}B_n + \sum\limits_{k=n+1}^{m-1} (a_k - a_{k+1})B_k + a_m B_m$, то есть

$$\sum_{k=n+1}^{m} a_k b_k = a_m B_m - a_{n+1}B_n + \sum_{k=n+1}^{m-1} (a_k - a_{k+1})B_k. \tag{3.12}$$

Эта формула и называется *преобразованием Абеля*. Она является аналогом формулы интегрирования по частям в определённых интегралах: производная заменена разностью, а первообразная – суммой.

Формуле (3.12) можно придать и несколько более общий вид. Пусть D – произвольное число, тогда, заменяя в (3.11) величины B_k при $k = n, n+1, \dots, m$ разностями $B_k - D$, находим, что сумма произведений $\sum\limits_{k=n+1}^{m} a_k b_k$ равна

$$\begin{gathered}\sum_{k=n+1}^{m} a_k b_k = a_{n+1}\big[(B_{n+1} - D) - (B_n - D)\big] + \\ + a_{n+2}\big[(B_{n+2} - D) - (B_{n+1} - D)\big] + \dots + \\ + a_m\big[(B_m - D) - (B_{m-1} - D)\big].\end{gathered} \tag{3.13}$$

Делая в правой части (3.13) те же преобразования, что и в (3.11), получаем равенство

$$\begin{gathered}\sum_{k=n+1}^{m} a_k b_k = a_m(B_m - D) - a_{n+1}(B_n - D) + \\ + \sum_{k=n+1}^{m-1} (a_k - a_{k+1})(B_k - D).\end{gathered} \tag{3.14}$$

В том, что правые части формул (3.14) и (3.12) совпадают, можно убедиться и непосредственно. Действительно, они отличаются одна от другой на величину

$$D\Big[-a_m + a_{n+1} - \sum_{k=n+1}^{m-1} (a_k - a_{k+1})\Big] =$$
$$= D(a_{n+1} - a_{n+1} + a_{n+2} - \dots - a_{m-1} + a_m - a_m) = 0.$$

При рассмотрении вместо формулы (3.12) формулы (3.14) аналогия с формулой интегрирования по частям сохраняется: первообразная заменена другой, отличающейся на константу.

Т е о р е м а 3.3 (признак Дирихле). Если числовая последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ монотонна и стремится к нулю, а частичные суммы ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ ограничены в совокупности, то есть найдётся $M > 0$, что для всех k абсолютная величина $\left|\sum\limits_{n=1}^{k} b_n\right| \leqslant M$, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \tag{3.15}$$

сходится.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Не ограничивая общности, можно считать, что $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ монотонно не возрастает, то есть

$$a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n \geqslant a_{n+1} \geqslant \ldots, \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0. \tag{3.16}$$

Поэтому $a_n \geqslant 0$ и, согласно определению предела, для любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер N такой, что

$$0 \leqslant a_n < \frac{\varepsilon}{3M}, \quad n > N. \tag{3.17}$$

Пусть n и m таковы, что $m > n > N$. Тогда из преобразования Абеля (3.12), формулы (3.16) и неравенства (3.17) вытекает, что

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k b_k\right| \leqslant |a_m B_m| + |a_{n+1} B_n| + \left|\sum_{k=n+1}^{m-1} (a_k - a_{k+1}) B_k\right| <$$
$$< \frac{\varepsilon}{3M}\cdot M + \frac{\varepsilon}{3M}\cdot M + \sum_{k=n+1}^{m-1} (a_k - a_{k+1}) M = \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} +$$
$$+ M(a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+2} - a_{n+3} + \cdots + a_{m-1} - a_m) =$$
$$= \frac{2\varepsilon}{3} + M(a_{n+1} - a_m) \leqslant \frac{2\varepsilon}{3} + M a_{n+1} < \frac{2\varepsilon}{3} + M\cdot\frac{\varepsilon}{3M} = \varepsilon.$$

Это означает, что для ряда (3.15) выполняется критерий Коши, следовательно, по теореме 1.3 ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится. Теорема доказана.

Т е о р е м а 3.4 (признак Абеля). Пусть числовая последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ монотонна и ограничена, то есть найдётся $K > 0$, что для всех n абсолютная величина $|a_n| \leqslant K$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится. Тогда ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$$

сходится.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так же, как и при доказательстве предыдущей теоремы, не ограничивая общности, можно считать, что $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ монотонно не возрастает, то есть

$$a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n \geqslant a_{n+1} \geqslant \ldots, \qquad |a_n| \leqslant K. \tag{3.18}$$

Обозначим сумму сходящегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ через B, то есть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = B$. Так как $B = \lim\limits_{n\to\infty} B_n$, где $B_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$, то по определению предела для любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер N такой, что

$$|B_n - B| < \frac{\varepsilon}{4K}, \quad n > N. \tag{3.19}$$

Пусть n и m таковы, что $m > n > N$. Тогда из преобразования Абеля (3.14) при $D = B$, формулы (3.18) и неравенства (3.19) вытекает, что

$$\Bigl|\sum_{k=n+1}^{m} a_k b_k\Bigr| \leqslant |a_m(B_m - B)| + |a_{n+1}(B_n - B)| +$$
$$+ \Bigl|\sum_{k=n+1}^{m-1} (a_k - a_{k+1})(B_k - B)\Bigr| < K \cdot \frac{\varepsilon}{4K} + K \cdot \frac{\varepsilon}{4K} +$$

$$+\sum_{k=n+1}^{m-1}(a_k - a_{k+1})\cdot\frac{\varepsilon}{4K} = \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} +$$
$$+\frac{\varepsilon}{4K}\left(a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+2} - a_{n+3} + \cdots + a_{m-1} - a_m\right) =$$
$$= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4K}\left(a_{n+1} - a_m\right) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4K}(|a_{n+1}| + |a_m|) <$$
$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4K}\cdot 2K = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Это означает, что для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ выполняется критерий Коши, следовательно, по теореме 1.3 ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится. Теорема доказана.

Отметим, что из признака Дирихле можно вывести признак Абеля и признак Лейбница.

Выведем признак Абеля. Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то его частичные суммы ограничены в совокупности, а поскольку последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ монотонна и ограничена, она имеет предел. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a + a)b_n = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a)b_n + \sum_{n=1}^{\infty} a b_n.$$

Первый ряд сходится по признаку Дирихле (по теореме 3.3), а второй – по теореме 1.1.

Выведем признак Лейбница. Обозначим $a_n = u_n$, $b_n = (-1)^{n-1}$. Тогда последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ монотонно стремится к нулю, а частичные суммы ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, попеременно равные 1 или 0, ограничены в совокупности. Следовательно, знакочередующийся ряд, удовлетворяющий условиям признака Лейбница (теоремы 3.2), сходится по признаку Дирихле.

П р и м е р. Рассмотрим ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \tag{3.20}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx \tag{3.21}$$

при различных значениях x и некоторых условиях на ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Пусть этот ряд сходится абсолютно, то есть ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty. \tag{3.22}$$

Так как $|a_n \cos nx| \leqslant |a_n|$, $|a_n \sin nx| \leqslant |a_n|$, $x \in (-\infty, +\infty)$, то при выполнении условия (3.22) ряды (3.20) и (3.21) сходятся абсолютно для любого $x \in (-\infty, +\infty)$.

Пусть теперь последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, монотонно не возрастая, стремится к нулю, причём знакоположительный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, то есть

$$\begin{gathered} a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n \geqslant a_{n+1} \geqslant \ldots, \\ \lim_{n\to\infty} a_n = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty. \end{gathered} \tag{3.23}$$

Рассмотрим вначале ряд (3.20). Так как при $x = 2k\pi$, где $k \in \mathbb{Z}$, значения $\cos nx = 1$, то из (3.23) следует, что для этих x ряд (3.20) расходится. Пусть $x \neq 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). Тогда $\sin \dfrac{x}{2} \neq 0$, и поэтому $\cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx =$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left(2\sin\frac{x}{2}\cos x + 2\sin\frac{x}{2}\cos 2x + \ldots + 2\sin\frac{x}{2}\cos nx\right) =$$
$$= \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left[\sin\frac{3x}{2} - \sin\frac{x}{2} + \sin\frac{5x}{2} - \sin\frac{3x}{2} + \ldots + \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x - \right.$$
$$\left. - \sin\left(n-\frac{1}{2}\right)x\right] = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left[\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x - \sin\frac{x}{2}\right],$$ то есть

$$\cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x - \sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}. \quad (3.24)$$

Отсюда следует, что для суммы $\sum\limits_{k=1}^{n}\cos kx$ справедлива оценка

$$|\cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx| \leqslant \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}. \quad (3.25)$$

Из (3.23) и (3.25) вытекает, что для исследуемого ряда выполняются все условия теоремы 3.3, поэтому ряд (3.20) при $x \neq 2k\pi$, где $k \in \mathbb{Z}$, сходится по признаку Дирихле.

Выясним *характер* сходимости этого ряда. Если $x = \pi + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n\cos nx| = \sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n|(-1)^n| = \sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n = +\infty$, то есть при $x = \pi + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ ряд (3.20) сходится условно. Для остальных значений x $(x \neq m\pi,\ m \in \mathbb{Z})$ заметим, что поскольку $|\cos\alpha| \leqslant 1$, то $|\cos\alpha| \geqslant \cos^2\alpha$, и поэтому

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n\cos nx| \geqslant \sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos^2 nx = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}a_n(1+\cos 2nx). \quad (3.26)$$

Последний ряд состоит из двух рядов, первый из которых $\Big(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\Big)$ расходится, а второй $\Big(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos 2nx\Big)$ сходится по признаку Дирихле, так как при $x \neq m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$ можно, аналогично оценке (3.25), получить оценку

$$|\cos 2x + \cos 4x + \dots + \cos 2nx| \leqslant \frac{1}{|\sin x|}\,.$$

Сумма двух рядов, один из которых сходится, а второй – расходится, есть ряд *расходящийся* (если бы это был сходящийся ряд, то по теореме 1.1 ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ тоже был бы сходящимся). Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos^2 nx$ расходится. Поэтому из (3.26) вытекает, что согласно признаку сравнения (по теореме 2.2) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n \cos nx|$ расходится, то есть ряд (3.20) сходится условно. Итак, мы получили, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \quad \begin{array}{lll} \text{при } x = 2k\pi & (k \in \mathbb{Z}) & \text{расходится,} \\ \text{при } x \neq 2k\pi & (k \in \mathbb{Z}) & \text{сходится условно.} \end{array} \tag{3.27}$$

Теперь рассмотрим ряд (3.21) при условии (3.23). При $x = m\pi$, где $m \in \mathbb{Z}$, этот ряд состоит из нулей, и поэтому для этих значений x сходится абсолютно. При остальных x, аналогично рассмотрению ряда (3.20), можно вывести формулу

$$\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx = \frac{\cos\dfrac{x}{2} - \cos\left(n + \dfrac{1}{2}\right)x}{2\sin\dfrac{x}{2}}\,, \tag{3.28}$$

получить оценку

$$|\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx| \leqslant \frac{1}{\left|\sin\dfrac{x}{2}\right|}\,,$$

и убедиться, что при $x \neq m\pi$ ($m \in \mathbb{Z}$) ряд (3.21) сходится по признаку Дирихле. Для исследования характера сходимости установим (аналогично (3.26)), что

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n \sin nx| \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin^2 nx = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n (1 - \cos 2nx).$$

Отсюда следует отсутствие абсолютной сходимости, то есть *условная* сходимость. Таким образом, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx \quad \begin{array}{l} \text{при } x = m\pi \ (m \in \mathbb{Z}) \text{ сходится абсолютно,} \\ \text{при } x \neq m\pi \ (m \in \mathbb{Z}) \text{ сходится условно.} \end{array} \tag{3.29}$$

3.4. Признак сравнения и сочетательный закон для знакопеременных рядов

Вначале отметим, что признак сравнения (теорема 2.2 и следствие из неё), установленный для знакоположительных рядов, не имеет места для рядов знакопеременных.

Пример. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \right], \tag{3.30}$$

то есть такой числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, общий член a_n которого имеет вид

$$a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}\,.$$

Обозначим $b_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$, $c_n = \dfrac{1}{n}$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится по признаку Лейбница, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ – расходящийся гармонический ряд. Поэтому ряд (3.30) расходится как сумма двух рядов ($a_n = b_n + c_n$), один из которых сходится, а другой – расходится. Однако предел отношения

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}+\dfrac{1}{n}}{\dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}\right] = 1.$$

Легко проверить, что ряд (3.30), подобно ряду (3.9), является примером того, что требование монотонности в признаке Лейбница *существенно.*

В первом разделе мы видели, что сочетательный закон, справедливый для сходящихся рядов, не всегда верен для расходящихся (см. теорему 1.2, доказанную для сходящихся рядов, и следующую после неё иллюстрацию неприменимости этой теоремы для расходящихся рядов). Сейчас будет показано, что переместительный закон не всегда справедлив даже для сходящихся рядов. Рассмотрим сходящийся ряд Лейбница (3.7), сумма которого $S = \ln 2$ (см. (3.8)), и переставим его слагаемые так: два положительных слагаемых, одно отрицательное, два положительных, одно отрицательное и так далее, то есть рассмотрим ряд

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{4m-3}+\frac{1}{4m-1}-\frac{1}{2m}+\cdots, \quad (3.31)$$

члены которого разбиты на группы по три слагаемых в каждой; в m-й группе два положительных слагаемых $\left(\dfrac{1}{4m-3}\right.$ и $\left.\dfrac{1}{4m-1}\right)$ и одно отрицательное $\left(-\dfrac{1}{2m}\right)$. Найдём сумму ряда (3.31) тем же путём, каким была найдена сумма ряда (3.7). Согласно (2.40) и (2.41) имеем, что частичные суммы S_{3m} ряда (3.31) равны $S_{3m} = 1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\cdots+$ $+\frac{1}{4m-3}+\frac{1}{4m-1}-\frac{1}{2m} = \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{4m-3}+\right.$ $\left.+\frac{1}{4m-2}+\frac{1}{4m-1}+\frac{1}{4m}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{4m-2}+\frac{1}{4m}\right)-$ $-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2m}\right) = H_{4m}-\frac{1}{2}\,H_{2m}-\frac{1}{2}\,H_m = x_{4m}+\ln(4m)-$ $-\frac{1}{2}[x_{2m}+\ln(2m)+x_m+\ln m] = x_{4m}+\ln 4-\frac{x_{2m}+\ln 2+x_m}{2}$.

Отсюда и из (2.42) вытекает, что $\lim\limits_{m\to\infty} S_{3m} = \lim\limits_{m\to\infty}\Big\{ x_{4m}+$ $+\ln(4m)-\frac{1}{2}\,[x_{2m}+\ln(2m)+x_m+\ln m]\Big\} = \lim\limits_{m\to\infty}\Big[x_{4m}+$ $+\ln 4-\frac{x_{2m}+\ln 2+x_m}{2}\Big] = C+\ln 4-\frac{C+\ln 2+C}{2} = \frac{3}{2}\ln 2.$

Ясно, что предел $\lim\limits_{m\to\infty} S_{3m+1} = \lim\limits_{m\to\infty}\left(S_{3m}+\frac{1}{4m+1}\right) = \frac{3}{2}\ln 2$ и предел $\lim\limits_{m\to\infty} S_{3m+2} = \lim\limits_{m\to\infty}\left(S_{3m+1}+\frac{1}{4m+3}\right) = \frac{3}{2}\ln 2$. Это означает, что ряд (3.31) сходится к $\frac{3}{2}\ln 2$, то есть

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{4m-3}+\frac{1}{4m-1}-\frac{1}{2m}+\cdots = \frac{3}{2}\ln 2.$$

Как видим, от такой перестановки сумма ряда (3.7) увеличилась в полтора раза.

Сообщим без доказательства, что если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится *абсолютно*, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, полученный из ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ какой-либо перестановкой его слагаемых, также сходится, причём к *той же* сумме. Если же ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится *условно*, то его слагаемые можно так переставить, что полученный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ будет сходиться к любому наперёд заданному числу S. А можно будет так переставить слагаемые, что полученный в результате перестановки ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ будет расходиться к $+\infty$, или расходиться к $-\infty$, или даже *ограниченно* расходиться, то есть частичные суммы расходящегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ будут ограничены.

3.5. Вопросы для повторения и самостоятельной работы

1. Вывести формулу (3.28).

2. Исследовать сходимость рядов:

$$
\begin{aligned}
&\text{а)} \quad 1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}-\frac{1}{9}+\ldots,\\
&\text{б)} \quad 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\ldots,\\
&\text{в)} \; -1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\ldots,\\
&\text{г)} \quad 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}-\frac{1}{9}+\ldots,\\
&\text{д)} \quad 1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\ldots.
\end{aligned}
$$

3. Привести пример такого сходящегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ расходится.

4. Привести пример такого сходящегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^3$ расходится.

5. Проверить, что ряд (3.30)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \right] \quad -$$
знакочередующийся, причём абсолютная величина его общего члена стремится к нулю, но немонотонно.

4. Суммирование числовых рядов

В этом разделе мы кратко ознакомимся с тем, что существуют и иные, помимо сходимости последовательности частичных сумм, способы, позволяющие поставить в соответствие числовому ряду какое-либо число, то есть придать неформальный смысл бесконечной сумме (1.2) каким-то другим путём, не обязательно совпадающим с изучаемым до сих пор (предел последовательности частичных сумм).

4.1. Понятие методов суммирования числовых рядов

Если указан какой-либо способ T, позволяющий некоторым числовым рядам поставить в соответствие S – число или какой-либо из бесконечных символов, то T называется *методом суммирования*, а S – *обобщённой суммой*.

Применение метода T к ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и результат этого применения будем обозначать так: $T\Big(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\Big)$.

Рассмотрим некоторые п р и м е р ы.

1. *Сходимость*. Для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ вводятся частичные суммы $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ и результатом применения метода T называется предел $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ (число или какой-либо из бесконечных символов), если этот предел имеет смысл. Таким образом, в этом примере $T\Big(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\Big) = S$ и метод суммирования T, естественно, совпадает с обычной сходимостью. Однако надо иметь в виду, что есть и другие методы суммирования, а сходимость – всего лишь один из них.

2. Любому ряду поставим в соответствие число 0, то есть в этом примере $T\Big(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\Big) = 0$ и метод суммирования применим к любому ряду.

3. Любому ряду поставим в соответствие число 1, то есть в этом примере $T\Big(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\Big) = 1$ и метод суммирования также примени́м к любому ряду.

4. *Метод средних арифметических*. Для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ вводятся частичные суммы $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, их средние арифметические $\sigma_n = \dfrac{S_1 + S_2 + \cdots + S_n}{n}$ и результатом примене-

ния метода T называется предел $\sigma = \lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n$ (число или какой-либо из бесконечных символов), если этот предел имеет смысл. Таким образом, в этом примере $T\Big(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\Big) = \sigma$.

Определение метода средних арифметических, называемого также методом $(H, 1)$, даёт возможность получить на его основе другие методы суммирования. Например, можно найти средние арифметические средних арифметических $\tau_n = \dfrac{\sigma_1 + \sigma_2 + \cdots + \sigma_n}{n}$ и найти предел $\tau = \lim\limits_{n\to\infty} \tau_n$ (это уже будет метод $(H, 2)$), получить метод $(H, 3)$ и так далее. Обычную сходимость тогда можно назвать методом $(H, 0)$[1]. Можно вводить в рассмотрение и какие-то иные методы суммирования[2]. При изучении свойств равномерно сходящихся функциональных последовательностей и рядов будет сделано отступление (см. с. 106), показывающее, каким образом можно приписать числовой последовательности (числовому ряду) обобщённую величину предела (обобщённую сумму ряда).

Метод суммирования T называется *линейным*, если из применимости его к двум рядам $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, обобщённые суммы которых $T\Big(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\Big) = A$ и $T\Big(\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n\Big) = B$ – конечные числа, следует применимость этого метода к рядам $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)$ для любых α и β, причём $T\Big(\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)\Big) = \alpha A + \beta B$.

---

[1] Можно обобщить понятие методов (H, α) на случай не обязательно *натуральных* значений α.

[2] В частности, один из методов суммирования будет предложен для рассмотрения среди вопросов для повторения и самостоятельной работы.

Метод суммирования T называется *регулярным*, если он приме́ни́м к любому сходящемуся (к конечной сумме) ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, причём обобщённая сумма ряда совпадает с обычной, то есть если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S$, то $T\Big(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\Big) = S$.

Регулярный метод суммирования T называется *вполне регулярным*, если он приме́ни́м к любому расходящемуся к $+\infty$ или к $-\infty$ ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, причём обобщённая сумма ряда совпадает с обычной, то есть если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty\ (-\infty)$, то $T\Big(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\Big) = +\infty\ (-\infty)$.

4.2. Регулярность и полная регулярность метода средних арифметических

Применим эти понятия (линейность, регулярность, полная регулярность) к методам суммирования, которые введены в рассмотренных выше примерах. Ввиду очевидности или тавтологии некоторые свойства этих методов не доказываются, а лишь формулируются.

1. Сходимость, конечно, линейный и вполне регулярный метод.

2. Данный метод линейный, но нерегулярный.

3. А этот метод не является ни линейным, ни регулярным.

4. Метод средних арифметических, разумеется, линеен. Он также является регулярным и даже вполне регулярным. Чтобы в этом убедиться, докажем две теоремы.

Теорема 4.1. Метод средних арифметических регулярен.

Доказательство. Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится к числу S: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S$. Следовательно, предел частичных сумм $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, то есть для любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер N_1, такой, что для всех $n > N_1$ абсолютная величина $|S_n - S| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Обозначим $M = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant N_1} |S_k - S|$ и выберем номер N_2 так, что $\dfrac{MN_1}{N_2} < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Но тогда для всех номеров $n > N = \max(N_1, N_2)$ имеем

$$|\sigma_n - S| = \left|\frac{S_1 + \cdots + S_{N_1} + S_{N_1+1} + \cdots + S_n}{n} - S\right| =$$

$$= \left|\frac{S_1 - S + \cdots + S_{N_1} - S + S_{N_1+1} - S + \cdots + S_n - S}{n}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{|S_1 - S| + \cdots + |S_{N_1} - S|}{n} + \frac{|S_{N_1+1} - S| + \cdots + |S_n - S|}{n} <$$

$$< \frac{MN_1}{n} + \frac{\frac{\varepsilon}{2}(n - N_1)}{n}.$$

В последней сумме первое слагаемое меньше $\dfrac{\varepsilon}{2}$, так как номер $n > N_2$, а второе слагаемое не превосходит $\dfrac{\varepsilon}{2}$, поскольку $\dfrac{n - N_1}{n} \leqslant 1$. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер N такой, что для всех $n > N$ абсолютная величина $|\sigma_n - S| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = S$. Теорема доказана.

Т е о р е м а 4.2. Метод средних арифметических вполне регулярен.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как уже отмечалось ранее, метод средних арифметических линеен, поэтому достаточно установить, что если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится к $+\infty$, то он и суммируется к $+\infty$. Итак, пусть предел частичных сумм $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$, то есть для любого $M > 0$ найдётся номер N_1 такой, что для всех $n > N_1$ частичная сумма $S_n > 2M$. Обозначим $m = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant N_1} |S_k|$ и выберем номер N_2 так, что отношение $\dfrac{N_1(m + 2M)}{N_2} < M$. Но тогда для всех номеров $n > N = \max(N_1, N_2)$ имеем

$$\sigma_n = \frac{S_1 + \cdots + S_{N_1} + S_{N_1+1} + \cdots + S_n}{n} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{S_{N_1+1} + \cdots + S_n}{n} - \frac{mN_1}{m} > \frac{2M(n - N_1)}{n} - \frac{mN_1}{n} =$$

$$= 2M - \frac{(M + 2m)N_1}{n} > 2M - \frac{(M + 2m)N_1}{n} = 2M - M = M,$$

то есть для любого $M > 0$ найдётся номер N такой, что для всех $n > N$ величина $\sigma_n > M$, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = +\infty$. Теорема доказана.

Таким образом, метод средних арифметических суммирует любой ряд, сумма S которого либо конечное число, либо $+\infty$ или $-\infty$, к той же самой сумме. Но некоторые *расходящиеся* ряды этот метод также суммирует. Рассмотрим расходящийся ряд (это переобозначенный ряд (1.6)):

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots . \qquad (4.1)$$

Так как его частичные суммы $S_n = \begin{cases} 1, & n = 2m-1,\, m \in \mathbb{N}, \\ 0, & n = 2m, \qquad m \in \mathbb{N}, \end{cases}$

то $\sigma_n = \dfrac{S_1 + S_2 + \cdots + S_n}{n} = \begin{cases} \dfrac{m}{2m-1}\,, & n = 2m-1,\, m \in \mathbb{N}, \\ \dfrac{1}{2}\,, & n = 2m, \qquad m \in \mathbb{N}, \end{cases}$

а так как $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \dfrac{1}{2}$, то ряд (4.1) суммируется методом средних арифметических к обобщённой сумме $\sigma = \dfrac{1}{2}$.

Разумеется, имеются и ряды, *не суммируемые* методом средних арифметических. Рассмотрим, например, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\, n = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \cdots . \tag{4.2}$$

Его частичные суммы $S_n = \begin{cases} m, & n = 2m-1,\, m \in \mathbb{N}, \\ -m, & n = 2m, \qquad m \in \mathbb{N}. \end{cases}$ Таким образом, ряд (4.2) расходится к ∞, причём эту бесконечность без знака нельзя отождествить ни с $+\infty$, ни с $-\infty$. Здесь $\sigma_n = \begin{cases} \dfrac{m}{2m-1}\,, & n = 2m-1,\, m \in \mathbb{N}, \\ 0, & n = 2m, \qquad m \in \mathbb{N}, \end{cases}$ поэтому последовательность $\{\sigma_n\}$ не имеет предела ($\lim\limits_{m\to\infty} \sigma_{2m-1} = \dfrac{1}{2}$, $\lim\limits_{m\to\infty} \sigma_{2m} = 0$), то есть ряд (4.2) не суммируется методом средних арифметических (методом $(H, 1)$). Можно показать, что этот ряд суммируется методом $(H, 2)$ к $\dfrac{1}{4}$, но мы не будем на этом останавливаться. Отметим лишь, что ряд (4.2) является примером того, что не всякий линейный вполне регулярный метод суммирует к ∞ ряды, расходящиеся к ∞ (методом $(H, 1)$ он вообще не суммируется, а методом $(H, 2)$ суммируется к конечному числу).

Не все свойства сходящихся рядов переносятся на методы суммирования (даже если ограничиться, естественно, линейными вполне регулярными методами). Так, если в сходящийся ряд добавить нули, то ряд останется сходящимся, притом к той же сумме. Иначе может обстоять дело для расходящихся, пусть и суммируемых рядов. Действительно, добавим в ряд (4.1) нули, поставив их после каждой пары слагаемых $+1-1$:

$$1-1+0+1-1+0+1-1+0+1-1+0+\cdots. \tag{4.3}$$

Нетрудно проверить, что для этого ряда средние арифметические $\sigma_n = \begin{cases} \dfrac{m}{3m-2}, n = 3m-2, m \in \mathbb{N}, \\ \dfrac{m}{3m-1}, n = 3m-1, m \in \mathbb{N}, \\ \dfrac{1}{3}, \quad n = 3m, \quad m \in \mathbb{N}, \end{cases}$ то есть $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \dfrac{1}{3}$, следовательно, ряд (4.3) суммируется методом $(H, 1)$ к обобщённой сумме $\sigma = \dfrac{1}{3} \neq \dfrac{1}{2}$.

Также отметим, что в ряд (4.1) можно так добавить нули, что полученный ряд вообще перестанет суммироваться методом средних арифметических.

4.3. Обобщённая сходимость несобственных интегралов

Заканчивая этот раздел, отметим, что по аналогии с суммированием числовых рядов можно ввести обобщённую сходимость несобственных интегралов и для неё определить линейность, регулярность, полную регулярность. Мы не будем давать их точных определений, а лишь выпишем формулы, соответствующие методу средних арифметических для интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$, у которого $+\infty$ – единственная особая точка. Итак, пусть имеется несобственный интеграл

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx. \tag{4.4}$$

Рассмотрим функцию $F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$. Величину предела $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x-a}\int\limits_a^x F(t)\,dt$, если это или конечное число, или $+\infty$, или $-\infty$, назовём обобщённым значением несобственного интеграла (4.4). Можно доказать, что в случае сходимости несобственного интеграла (4.4) или в случае его расходимости к $+\infty$ (к $-\infty$) его обобщённое значение совпадает с пределом $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$, то есть обычным значением этого несобственного интеграла. Однако обобщённое значение может существовать и в том случае, когда интеграл (4.4) *расходится*. Например, для расходящегося интеграла $\int\limits_0^{+\infty} \sin x\,dx$ имеем, что $F(x) = \int\limits_0^x \sin t\,dt = 1-\cos x$, и поэтому величина предела $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}\int\limits_0^x F(t)\,dt = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}\int\limits_0^x (1-\cos t)\,dt = $ $= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-\sin x}{x} = 1$. Итак, мы получили, что обобщённое значение расходящегося интеграла $\int\limits_0^{+\infty} \sin x\,dx$ равно 1.

Совершенно аналогично можно установить, что обобщённое значение расходящегося интеграла $\int\limits_0^{+\infty} \cos x\, dx$ равно 0.

4.4. Вопросы для повторения и самостоятельной работы

1. Просуммировать ряд (4.2) методом $(H, 2)$.
2. Добавить в ряд (4.1) нули так, что полученный ряд перестал бы суммироваться методом средних арифметических.
3. Рассмотрим метод суммирования T: для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ вводятся частичные суммы $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, средние арифметические $v_n = \dfrac{S_{n+1} + S_{n+2} + \dots + S_{2n}}{n}$, а результатом применения метода T назовём предел $v = \lim\limits_{n\to\infty} v_n$ (число или какой-либо из бесконечных символов), если этот предел имеет смысл. Таким образом, $T\Bigl(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\Bigr) = v$. Доказать, что:
   а) метод T является линейным;
   б) метод T является регулярным;
   в) метод T является вполне регулярным;
   г) если какой-либо ряд суммируется методом средних арифметических к числу σ, то он суммируется также рассматриваемым методом T к тому же числу.

4. Найти обобщённые значения следующих интегралов:

а) $\int\limits_0^{+\infty} \operatorname{arctg} x\, dx$;

б) $\int\limits_0^{+\infty} \operatorname{arctg} x^2\, dx$;

в) $\int\limits_1^{+\infty} \sin x\, dx$;

г) $\int\limits_1^{+\infty} \cos x\, dx$;

д) $\int\limits_0^{+\infty} x \cos x^2\, dx$;

е) $\int\limits_0^{+\infty} x \sin x^2\, dx$;

ж) $\int\limits_0^{+\infty} e^x \cos e^x\, dx$;

з) $\int\limits_0^{+\infty} e^x \sin e^x\, dx$.

ЧАСТЬ II

Функциональные последовательности и ряды

Здесь будут изучаться *функциональные* последовательности и ряды, то есть такие последовательности и ряды, элементами которых являются уже не числа, а *функции*. Мы ограничимся случаем функций, зависящих от одной действительной переменной x, хотя результаты, которые будут получены, как правило, справедливы в более общем случае. Так же, как в случае числовых последовательностей и рядов, номер начального элемента функциональной последовательности или начальное значение индекса суммирования функционального ряда может быть как больше, так и меньше единицы.

5. Сходимость и равномерная сходимость

Итак, мы будем изучать последовательности

$$\big\{f_n(x)\big\}_{n=1}^{\infty} \tag{5.1}$$

и ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \tag{5.2}$$

элементы которых $f_n(x)$ (и, соответственно, $u_n(x)$) – некоторые *функции* одной переменной x.

5.1. Множество сходимости

Множество X называется *множеством сходимости* функциональной последовательности (5.1) (функционального ряда (5.2)), если, во-первых, на множестве X для всех n определены функции $f_n(x)$ $\big($определены функции $u_n(x)\big)$ и, во-вторых, для каждого $x_0 \in X$ сходится числовая последовательность $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ $\Big($сходится числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)\Big)$.

Аналогично для ряда (5.2) можно определить множества абсолютной и условной сходимости.

Пусть X – множество сходимости функциональной последовательности $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, то есть для всякого $x \in X$ существует $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. Этот предел, естественно, зависит от точки $x \in X$, поэтому обозначим его

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

Функцию $f(x)$ называют *предельной* функцией функциональной последовательности $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$. Аналогично, если X – множество сходимости функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ (не важно какой, абсолютной или условной), то на множестве X можно ввести понятие *суммы* ряда $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.

Разумеется, если изучать лишь сходимость и величину предела (суммы) у последовательности (5.1) и у ряда (5.2) в фиксированной точке $x \in X$, то при этом не будет ничего нового по сравнению с изучением этих вопросов для *числовых* последовательностей и рядов с параметром x. Новизна появляется, например, при изучении условий (достаточных, необходимых) сохранения или появления тех или иных *функциональных свойств* у предельной функции функциональной последовательности либо суммы функционального ряда, таких как непрерывность, дифференцируемость и тому подобное.

Примеры. Во всех рассматриваемых примерах множество $X=[0,1]$, а $f(x)$ – предельная функция функциональной последовательности $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$.

1. $f_n(x)=x^n,$ $\qquad f(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x<1,\\ 1, & x=1.\end{cases}$
2. $f_n(x)=\dfrac{1}{1+nx},$ $\qquad f(x)=\begin{cases}1, & x=0,\\ 0, & 0<x\leqslant 1.\end{cases}$
3. $f_n(x)=\dfrac{x}{1+n^2x^2},$ $\qquad f(x)\equiv 0.$
4. $f_n(x)=\dfrac{nx}{1+n^2x^2},$ $\qquad f(x)\equiv 0.$
5. $f_n(x)=n^2xe^{-n^2x^2},$ $\qquad f(x)\equiv 0.$

Установим, что предельная функция $f(x)$ имеет указанный вид.

1. Если $x\in[0,1)$, то $\lim\limits_{n\to\infty}x^n=0$. Если же $x=1$, то $\lim\limits_{n\to\infty}x^n=\lim\limits_{n\to\infty}1^n=\lim\limits_{n\to\infty}1=1$.

2. Если $x=0$, то $f(0)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(0)=\lim\limits_{n\to\infty}1=1$. Если же $x\in(0,1]$, то при $n\to\infty$ знаменатель $1+nx$ неограниченно возрастает, и поэтому для этих x значение $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=0$.

3. Если $x=0$, то $f(0)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(0)=\lim\limits_{n\to\infty}0=0$. Если же $x\in(0,1]$, то при $n\to\infty$ числитель x не зависит от n, а знаменатель $1+n^2x^2$ неограниченно возрастает, и поэтому для этих x значение $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=0$.

4. Если $x=0$, то $f(0)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(0)=\lim\limits_{n\to\infty}0=0$. Если же $x\in(0,1]$, то преобразуем формулу для $f_n(x)$ к виду

$f_n(x) = \dfrac{1}{\dfrac{1}{nx} + nx}$. Мы видим, что при $n \to \infty$ знаменатель $\dfrac{1}{nx} + nx$ неограниченно возрастает, и поэтому для $x \in (0, 1]$ значение $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$.

5. Если $x = 0$, то $f(0) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(0) = \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0$. Если же $x \in (0, 1]$, то преобразуем формулу для $f_n(x)$ к виду $f_n(x) = \dfrac{n^2 x}{e^{n^2x^2}}$. Отсюда следует, что при $x \in (0, 1]$ значение $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ (в том, что $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2x}{e^{n^2x^2}} = 0$ можно убедиться, находя предел $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{t^2x}{e^{t^2x^2}}$ при *фиксированном* $x \in (0, 1]$ по правилу Лопиталя).

Таким образом, в последних трёх примерах при предельном переходе непрерывность сохранилась, а в первых двух примерах – нет.

5.2. Равномерная сходимость

Прежде чем говорить об этом новом понятии (равномерная сходимость), уточним понятие сходимости функциональной последовательности $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ к предельной функции $f(x)$ в каждой точке множества X.

Функциональная последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к функции $f(x)$ в каждой точке множества X (или, как будем говорить, *поточечно* сходится), если для всякого $x \in X$ для любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер N, что для всех номеров $n > N$ абсолютная величина $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Поточечная сходимость функциональной последовательности обозначается так:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \quad x \in X, \tag{5.3}$$

или, без знака предела,

$$f_n(x) \to f(x), \quad x \in X. \tag{5.4}$$

Нетрудно видеть, что номер N, который найдётся для любого $\varepsilon > 0$, и зависящий, естественно, от этого ε, зависит также и от точки x множества X.

Теперь введём понятие равномерной сходимости.

Функциональная последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ называется *равномерно сходящейся* на множестве X к функции $f(x)$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер N, что для всех номеров $n > N$ и для всех $x \in X$ абсолютная величина $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Равномерная сходимость функциональной последовательности обозначается так:

$$f_n(x) \rightrightarrows f(x) \text{ на } X \tag{5.5}$$

или так:

$$f_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} f(x). \tag{5.6}$$

Здесь мы видим, что номер N, по-прежнему зависящий от $\varepsilon > 0$, уже от $x \in X$ *не зависит* и, следовательно, годится для всех точек x множества X *сразу*. Поэтому если последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ равномерно сходится на множестве X к функции $f(x)$, то она сходится и поточечно, причём *к той же самой* функции $f(x)$. Это замечание нам понадобится в дальнейшем.

Если понятие равномерной сходимости функциональной последовательности применить к функциональной последовательности $\{S_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ частичных сумм функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, то есть

$$S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x),$$

то получится понятие равномерной сходимости функционального ряда.

Функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называется *равномерно сходящимся* на множестве X к функции $S(x)$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер N, что для всех номеров $n > N$ и для всех $x \in X$ абсолютная величина $|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$.

Равномерная сходимость функционального ряда (подобно (5.5) и (5.6)) обозначается так:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \rightrightarrows S(x) \text{ на } X \tag{5.7}$$

или так:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} S(x). \tag{5.8}$$

Ясно, что если $f_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} f(x)$, то для любого подмножества $Y \subset X$ последовательность $f_n(x) \overset{Y}{\rightrightarrows} f(x)$, так как неравенство $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, верное для всех номеров $n > N$ и для всех $x \in X$, очевидно, выполняется для тех же номеров n и для всех $x \in Y$. Это замечание, справедливое, разумеется, и для функциональных рядов, будет использоваться нами ниже.

Рассмотрим примеры, приведённые в конце предыдущего параграфа, с точки зрения понятия равномерной сходимости.

1. Возьмём $\varepsilon = \dfrac{1}{2} > 0$ и для любого номера N укажем номер $n = N+1 > N$ и $x = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}} \in (0,1) \subset [0,1]$. Но тогда $|f_n(x) - f(x)| = f_n(x) = x^n = \dfrac{1}{2} = \varepsilon$. Это означает, что $f_n(x) \overset{X}{\not\rightrightarrows} f(x)$.

2. Опять возьмём $\varepsilon = \dfrac{1}{2} > 0$ и для любого номера N укажем номер $n = N+1 > N$ и $x = \dfrac{1}{n} \in (0,1] \subset [0,1]$. Тогда $|f_n(x) - f(x)| = f_n(x) = \dfrac{1}{1+nx} = \dfrac{1}{2} = \varepsilon$. Это означает, что и здесь $f_n(x) \overset{X}{\not\rightrightarrows} f(x)$.

3. Для любого $\varepsilon > 0$ укажем номер $N = \left[\dfrac{1}{2\varepsilon}\right]$, где квадратные скобки означают целую часть, в силу определения которой номер $N > \dfrac{1}{2\varepsilon} - 1$. Но тогда для всех номеров $n > N$, то есть для $n > \dfrac{1}{2\varepsilon}$ и для любого $x \in X = [0,1]$ имеем, что $|f_n(x) - f(x)| = \dfrac{1}{n} \cdot \dfrac{nx}{1+n^2x^2} = \dfrac{1}{n} \cdot \dfrac{1}{nx + \dfrac{1}{nx}} \leqslant \dfrac{1}{2n}$ (вообще говоря, это неравенство установлено лишь для $x \in (0,1]$, но очевидно, что оно верно и для $x = 0$). Таким образом, для всех $n > N$ и для всех $x \in [0,1]$ абсолютная величина $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \dfrac{1}{2n} < \varepsilon$, то есть $f_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} f(x)$.

4. И здесь, подобно первым двум примерам, возьмём $\varepsilon = \frac{1}{2} > 0$ и для любого номера N укажем номер $n = N+1 > N$ и $x = \frac{1}{n} \in [0,1]$. Тогда $|f_n(x) - f(x)| = f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2} = \frac{1}{2} = \varepsilon$. Таким образом, $f_n(x) \overset{X}{\not\rightrightarrows} f(x)$.

5. Здесь возьмём $\varepsilon = \frac{1}{e} > 0$ и для любого номера N укажем номер $n = N+1 > N$ и $x = \frac{1}{n} \in [0,1]$. Но тогда $|f_n(x) - f(x)| = f_n(x) = n^2xe^{-n^2x^2} = \frac{n}{e} \geqslant \frac{1}{e} = \varepsilon$, то есть $f_n(x) \overset{X}{\not\rightrightarrows} f(x)$.

Итак, в четырёх из пяти примеров мы видим, что последовательность $f_n(x) \overset{X}{\not\rightrightarrows} f(x)$. При этом согласно сделанному выше (на с. 88) замечанию, отсутствие равномерной сходимости к поточечному пределу означает отсутствие равномерной сходимости *вообще*, так как если бы оказалось, что $f_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} g(x) \not\equiv f(x)$, то и $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = g(x)$ для всех $x \in X$.

5.3. Необходимые и достаточные условия (*критерии*) равномерной сходимости функциональных последовательностей и функциональных рядов

Теорема 5.1 (критерий равномерной сходимости функциональной последовательности). Для того чтобы

$$f_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} f(x), \tag{5.9}$$

необходимо и достаточно, чтобы предел точной верхней грани

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| = 0. \tag{5.10}$$

Доказательство. Обозначим

$$\alpha_n = \sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| \geqslant 0. \tag{5.11}$$

Необходимость. Пусть имеет место (5.9). Тогда, согласно определению равномерной сходимости, для любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер N, что для всех номеров $n > N$ и для всех $x \in X$ абсолютная величина $|f_n(x) - f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Но тогда из (5.11) вытекает, что для этих же номеров

$$0 \leqslant \alpha_n = \sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Следовательно, предел $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, то есть равенство (5.10) справедливо.

Достаточность. Пусть теперь имеет место (5.10), то есть $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$. Тогда, согласно определению предела числовой последовательности, для любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер N, что для всех номеров $n > N$ справедливо неравенство $0 \leqslant \alpha_n < \varepsilon$. Поэтому для этих же номеров и для всех $x \in X$ абсолютная величина $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \alpha_n < \varepsilon$, то есть функциональная последовательность $\big\{f_n(x)\big\}_{n=1}^{\infty}$ на множестве X равномерно сходится к функции $f(x)$. Теорема доказана.

Применим эту теорему к решению примеров, рассмотренных в конце первого параграфа, и увидим, что с её помощью вопрос о наличии или отсутствии равномерной сходимости у функциональной последовательности $\big\{f_n(x)\big\}_{n=1}^{\infty}$

решается гораздо быстрее. Для этого будем вычислять величину α_n (см. (5.11)).

1. Здесь $\alpha_n \geqslant \lim\limits_{x\to 1-0} |f_n(x) - f(x)| = 1$ (на самом деле $\alpha_n = 1$, так как $0 \leqslant f_n(x) \leqslant 1$, $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$; но неравенства $\alpha_n \geqslant 1$ вполне достаточно), и поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n \neq 0$, следовательно, $f_n(x) \overset{X}{\not\rightrightarrows} f(x)$.

2. Здесь $\alpha_n \geqslant \lim\limits_{x\to 0+0} |f_n(x) - f(x)| = 1$ (на самом деле $\alpha_n = 1$, соображения – те же, что и в предыдущем примере), и поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n \neq 0$, то есть $f_n(x) \overset{X}{\not\rightrightarrows} f(x)$.

3. Пусть $\varphi_n(x) = |f_n(x) - f(x)| = \dfrac{x}{1+n^2x^2}$. Производная $\varphi_n'(x) = \dfrac{1-n^2x^2}{\left(1+n^2x^2\right)^2} = 0$ при $x = x_n = \dfrac{1}{n}$, нетрудно видеть (хотя бы по смене знака производной), что x_n – точка *максимума*, следовательно, $\alpha_n = \varphi_n(x_n) = f_n\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{2n}$, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, и поэтому $f_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} f(x)$.

4. Здесь функция $\varphi_n(x) = |f_n(x) - f(x)| = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$ лишь множителем n отличается от функции $\varphi_n(x)$ предыдущего примера, следовательно, $\alpha_n = \varphi_n(x_n) = \varphi_n\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{2}$, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n \neq 0$, и поэтому $f_n(x) \overset{X}{\not\rightrightarrows} f(x)$.

5. В этом примере $\varphi_n(x) = |f_n(x) - f(x)| = n^2xe^{-n^2x^2}$, с помощью дифференциального исчисления находим, что $\alpha_n = \varphi_n(x_n) = \varphi_n\left(\dfrac{1}{n\sqrt{2}}\right) = \dfrac{n}{\sqrt{2e}}$, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = +\infty \neq 0$, и, следовательно, $f_n(x) \overset{X}{\not\rightrightarrows} f(x)$.

Теорема 5.2 (критерий Коши равномерной сходимости функциональной последовательности). Для равномерной сходимости функциональной последовательности $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ на множестве X необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ можно было найти номер N, что для всех номеров $n > N$, $m > N$ и для всех $x \in X$ абсолютная величина $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$.

Доказательство. Необходимость. Пусть функциональная последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ равномерно сходится на множестве X. Обозначим предельную функцию через $f(x)$. Согласно определению равномерной сходимости, для любого $\varepsilon > 0$ можно найти номер N, что для всех $n > N$ и для всех $x \in X$ абсолютная величина $|f_n(x) - f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Но тогда для всех $n > N$, $m > N$ и для всех $x \in X$ абсолютная величина $|f_n(x) - f_m(x)| = |f_n(x) - f(x) + f(x) - f_m(x)| \leqslant \leqslant |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, то есть необходимость установлена.

Достаточность. Пусть теперь для любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер N, что для всех номеров $n > N$, $m > N$ и для всех $x \in X$ имеет место неравенство

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2}\,. \tag{5.12}$$

Это, в частности, означает, что для любого *фиксированного $x \in X$ числовая* последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ – фундаментальна, и по критерию Коши сходимости числовых последовательностей для любого $x \in X$ существует предел

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{m\to\infty} f_m(x) = f(x), \quad x \in X.$$

Тогда для любого номера $n > N$ и для любого $x \in X$, переходя к пределу при $m \to \infty$ в неравенстве (5.12), получим

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

то есть $f_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} f(x)$. Теорема доказана.

Данная теорема легко перефразируется для функциональных рядов.

Теорема 5.3 (критерий Коши равномерной сходимости функциональных рядов). Для равномерной сходимости функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ на множестве X необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ можно было найти номер N, что для всех номеров n и m таких, что $m > n > N$ и для всех $x \in X$ имеет место неравенство

$$\Big| \sum_{k=n+1}^{m} u_k(x) \Big| < \varepsilon.$$

В специальном доказательстве эта теорема (как и соответствующая теорема для числовых рядов) *не нуждается*, так как она только что была доказана для *любых* функциональных последовательностей в том числе и для последовательности $\{S_n(x)\}$ частичных сумм ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.

5.4. Признаки равномерной сходимости функциональных рядов

Теорема 5.4 (необходимый признак равномерной сходимости функциональных рядов). Если функциональный ряд равномерно сходится на множестве X:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \rightrightarrows \text{ на } X, \tag{5.13}$$

то его общий член $u_n(x)$ на этом же множестве равномерно сходится к функции, всюду на этом множестве равной нулю:

$$u_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} u(x) \equiv 0. \tag{5.14}$$

Доказательство. Обозначим частичную сумму ряда (5.13) через $S_n(x)$, а всю сумму этого ряда – через $S(x)$. По условию $S_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} S(x)$, но тогда и $S_{n-1}(x) \overset{X}{\rightrightarrows} S(x)$, а это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер N, что для всех номеров $n > N$ и для всех $x \in X$ справедливы неравенства

$$|S_n(x) - S(x)| < \frac{\varepsilon}{2}\,, \quad |S_{n-1}(x) - S(x)| < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Следовательно, $|u_n(x)-u(x)| = |u_n(x)| = |S_n(x)-S_{n-1}(x)| = = |S_n(x) - S(x) + S(x) - S_{n-1}(x)| \leqslant |S_n(x) - S(x)| + +|S(x)-S_{n-1}(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, то есть имеет место (5.14). Теорема доказана.

Отметим, что этот признак можно вывести в качестве следствия из теоремы 5.3 (критерия Коши равномерной сходимости функциональных рядов).

Теорема 5.5 (признак Вейерштрасса равномерной сходимости функциональных рядов). Если

$$|u_n(x)| \leqslant c_n \text{ для всех } x \in X, \tag{5.15}$$

а числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится, то функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно на множестве X.

Доказательство. Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится, то для него справедлив критерий Коши сходимости числовых рядов, то есть для любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер N, что для всех номеров n и m таких, что $m > n > N$, справедливо неравенство

$$\sum_{k=n+1}^{m} c_k < \varepsilon \tag{5.16}$$

(знак абсолютной величины опущен, так как $c_n \geqslant 0$). Но тогда из (5.15) и (5.16) вытекает, что для тех же n и m и для всех $x \in X$ абсолютная величина

$$\Bigl|\sum_{k=n+1}^{m} u_k(x)\Bigr| \leqslant \sum_{k=n+1}^{m} |u_k(x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{m} c_k < \varepsilon.$$

Следовательно, для функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ выполняется критерий Коши равномерной сходимости (см. теорему 5.3), то есть этот ряд сходится равномерно на множестве X. Теорема доказана.

Признак Вейерштрасса достаточно прост в применении. Однако он даёт не только равномерную сходимость функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ на множестве X, но и его *абсолютную* сходимость в каждой точке множества X. Если же ряд сходится равномерно, но не абсолютно, то признак Вейерштрасса к таким рядам неприменим. Для получения таких признаков, которые традиционно связываются с именами Дирихле и Абеля, напомним формулы преобразования Абеля (3.12) и (3.14), заменив фигурирующие там постоянные функциями, зависящими от переменной x.

Итак, пусть имеются две последовательности функций: $\bigl\{a_n(x)\bigr\}_{n=1}^{\infty}$ и $\bigl\{b_n(x)\bigr\}_{n=1}^{\infty}$, определённых на некотором множестве X. Обозначим через $\{B_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ последовательность частичных сумм ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x)$:

$$\begin{gathered} B_1(x) = b_1(x), \;\; B_2(x) = b_1(x) + b_2(x), \ldots, \\ B_k(x) = b_1(x) + b_2(x) + \cdots + b_k(x), \ldots, \end{gathered} \tag{5.17}$$

а $D(x)$ – произвольная функция, определённая на множестве X. Тогда для любых номеров m и n таких, что $m > n$, и всех $x \in X$ справедливы формулы

$$\begin{gathered} \sum_{k=n+1}^{m} a_k(x) b_k(x) = a_m(x) B_m(x) - \\ - a_{n+1}(x) B_n(x) + \sum_{k=n+1}^{m-1} \big(a_k(x) - a_{k+1}(x)\big) B_k(x); \end{gathered} \tag{5.18}$$

$$\begin{gathered} \sum_{k=n+1}^{m} a_k(x) b_k(x) = a_m(x) \big(B_m(x) - D(x)\big) - \\ - a_{n+1}(x) \big(B_n(x) - D(x)\big) + \\ + \sum_{k=n+1}^{m-1} \big(a_k(x) - a_{k+1}(x)\big) \big(B_k(x) - D(x)\big). \end{gathered} \tag{5.19}$$

Теорема 5.6 (признак Дирихле равномерной сходимости функциональных рядов). Если для любого фиксированного $x \in X$ числовая последовательность $\{a_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ монотонна, причём $a_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} a(x) \equiv 0$, а частичные суммы ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ равномерно на множестве X ограничены в совокупности, то есть найдётся $M > 0$, что для всех $x \in X$ и всех k абсолютная величина $\Big|\sum\limits_{n=1}^{k} b_n(x)\Big| \leqslant M$, то функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)\, b_n(x) \rightrightarrows \text{ на } X. \tag{5.20}$$

Доказательство. Обозначим частичные суммы ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ через $B_k(x)$ (см. (5.17)). По условию $|B_k(x)| \leqslant M$ для всех $x \in X$ и для всех k. Так как $a_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} a(x) \equiv 0$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер N такой, что

$$|a_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3M}\,, \quad n > N, \quad x \in X, \tag{5.21}$$

причём для всякого фиксированного $x \in X$, ввиду монотонности последовательности $\{a_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, справедливо либо неравенство

$$a_1(x) \geqslant a_2(x) \geqslant \dots \geqslant a_n(x) \geqslant a_{n+1}(x) \geqslant \dots \geqslant 0, \tag{5.22}$$

либо неравенство

$$a_1(x) \leqslant a_2(x) \leqslant \dots \leqslant a_n(x) \leqslant a_{n+1}(x) \leqslant \dots \leqslant 0. \tag{5.23}$$

Пусть n и m таковы, что $m > n > N$. Тогда для любого $x \in X$ из преобразования Абеля (5.18), неравенства (5.21) и одного из неравенств монотонности (неравенства (5.22) или неравенства (5.23)) вытекает, что

$$\Big|\sum_{k=n+1}^{m} a_k(x)b_k(x)\Big| \leqslant |a_m(x)B_m(x)| + |a_{n+1}(x)B_n(x)| +$$
$$+\Big|\sum_{k=n+1}^{m-1} \big(a_k(x) - a_{k+1}(x)\big)B_k(x)\Big| < \frac{\varepsilon}{3M}\cdot M + \frac{\varepsilon}{3M}\cdot M +$$
$$+M\Big|\sum_{k=n+1}^{m-1} \big(a_k(x) - a_{k+1}(x)\big)\Big| = \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} +$$
$$+M\big|a_{n+1}(x) - a_{n+2}(x) + \dots + a_{m-1}(x) - a_m(x)\big| =$$
$$= \frac{2\varepsilon}{3} + M|a_{n+1}(x) - a_m(x)| < \frac{2\varepsilon}{3} + M\cdot\frac{\varepsilon}{3M} = \varepsilon.$$

Это означает, что для ряда (5.20) выполняется критерий Коши равномерной сходимости, следовательно, по теореме 5.3 ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ равномерно сходится на множестве X. Теорема доказана.

Как видим, доказательство признака Дирихле равномерной сходимости функциональных рядов лишь с небольшими естественными изменениями повторяет доказательство признака Дирихле сходимости числовых рядов. Поэтому для *признака Абеля* ограничимся лишь формулировкой.

Т е о р е м а 5.7 (признак Абеля равномерной сходимости функциональных рядов). Если для любого фиксированного $x \in X$ числовая последовательность $\{a_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ монотонна, причём функциональная последовательность $\{a_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ равномерно на множестве X ограничена в совокупности, то есть найдётся $K > 0$, что для всех $x \in X$ и всех n абсолютная величина $|a_n(x)| \leqslant K$, а функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ равномерно сходится на множестве X. Тогда ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)\, b_n(x) \rightrightarrows \text{ на } X.$$

Отметим, что в признаках Дирихле и Абеля неважен *характер* монотонности последовательности $\{a_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ (этот характер может быть *различным* в *разных* точках множества X).

Также следует иметь в виду, что признак Вейерштрасса (теорема 5.5), признак Дирихле (теорема 5.6), признак Абеля (теорема 5.7), в отличие от *критериев* (теоремы 5.1, 5.2 и 5.3), дают лишь *достаточные* условия равномерной сходимости, и если эти условия не выполняются, то ещё нельзя делать выводы об отсутствии равномерной сходимости. Аналогично можно сделать замечание относительно односторонности применения теоремы 5.4. Если будет установлено, что $u_n(x) \overset{X}{\not\rightrightarrows} u(x) \equiv 0$, то отсюда вытекает, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ не является равномерно сходящимся на множестве X. Если же мы установим, что $u_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} u(x) \equiv 0$, то вопрос о наличии или отсутствии равномерной сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ остаётся открытым.

5.5. Свойства равномерно сходящихся последовательностей и рядов

В этом пункте будут рассмотрены некоторые достаточные условия сохранения при предельном переходе тех или иных *функциональных* свойств (таких, как непрерывность, дифференцируемость и т. д.) у последовательностей и рядов функций, и мы увидим, что введённое в п. 5.2 понятие *равномерной* сходимости будет играть при этом решающую роль.

Теорема 5.8 (о предельном переходе в равномерно сходящихся функциональных последовательностях). Пусть функциональная последовательность

$$f_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} f(x), \tag{5.24}$$

причём для всех номеров $n \in \mathbb{N}$ существует (конечный) предел

$$\lim_{x \to a} f_n(x) = A_n, \tag{5.25}$$

где a – предельная точка множества X. Тогда существует (конечный) предел числовой последовательности $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$:

$$\lim_{n\to\infty} A_n, \tag{5.26}$$

а также предел предельной функции $f(x)$ при $x \to a$, причём

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{n\to\infty} A_n. \tag{5.27}$$

Прежде чем приступать к доказательству, отметим два момента. Во-первых, a (предельная точка множества X) может быть одним из трёх бесконечных символов (∞, $+\infty$ или $-\infty$), а также символом, указывающим на *одностороннее* стремление x к a ($a+0$ или $a-0$). Во-вторых, стремление x к a в (5.25) и (5.27) осуществляется *по множеству* X, то есть точки в окрестности a берутся исключительно из точек множества X.

Доказательство. Пусть a – конечное число, и x стремится к a двусторонним образом. Согласно (5.24), по теореме 5.2, для любого $\varepsilon > 0$ можно найти номер N, что для всех номеров $n > N$, $m > N$ и всех $x \in X$ имеет место неравенство

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{5.28}$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $x \to a$, получаем, согласно (5.25), что для тех же номеров n и m справедливо неравенство

$$|A_n - A_m| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}, \tag{5.29}$$

то есть, в частности, числовая последовательность $\{A_n\}$ – *фундаментальна*, и, стало быть, по критерию Коши сходимости числовых последовательностей, существует конечный предел (5.26). Обозначим

$$\lim_{n\to\infty} A_n = A. \tag{5.30}$$

Переходя в неравенстве (5.28) (для любого фиксированного $x \in X$) к пределу при $m \to \infty$, получаем, что для всех номеров $n > N$ и для всех $x \in X$ имеет место неравенство

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}\,. \tag{5.31}$$

Если же перейти к пределу при $m \to \infty$ в неравенстве (5.29), то согласно (5.30) получим, что для всех номеров $n > N$ справедливо неравенство

$$|A_n - A| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}\,. \tag{5.32}$$

Возьмём какой-нибудь номер $n > N$. Согласно (5.25), для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$, что для всех $x \in X$ и таких, что

$$0 < |x - a| < \delta, \tag{5.33}$$

имеет место неравенство

$$|f_n(x) - A_n| < \frac{\varepsilon}{3}\,. \tag{5.34}$$

Поэтому для всех $x \in X$, удовлетворяющих (5.33), из (5.31), (5.32) и (5.34) вытекает, что $|f(x) - A| \leqslant |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - A_n| + |A_n - A| < \dfrac{\varepsilon}{3} + \dfrac{\varepsilon}{3} + \dfrac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$. А это означает, что $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$. Таким образом, в случае предельного перехода $x \to a$ теорема доказана.

Если предельный переход $x \to a$ заменяется на один из пяти других возможных предельных переходов ($x \to a + 0$, $x \to a - 0$, $x \to \infty$, $x \to +\infty$ или $x \to -\infty$), то при доказательстве теоремы заменяется лишь неравенство (5.33) на соответствующее неравенство из приведённой здесь таблицы (в неё для общности и полноты картины включено и неравенство (5.33) для случая двустороннего стремления переменной $x \in X$ к конечному числу a):

Предельный переход	Неравенство (5.33)
$x \to a$	$0 < \lvert x - a \rvert < \delta$
$x \to a + 0$	$0 < x - a < \delta$
$x \to a - 0$	$0 < a - x < \delta$
$x \to \infty$	$\lvert x \rvert > \delta$
$x \to +\infty$	$x > \delta$
$x \to -\infty$	$x < -\delta$

Проводя доказательство слово в слово и заменяя неравенство (5.33) одним из приведённых выше, получаем, что для всех возможных предельных переходов утверждение теоремы также справедливо. Теорема полностью доказана.

Итак, мы видим, что при выполнении условий теоремы 5.8 имеет место равенство

$$\lim_{x\to a}\Big(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\Big) = \lim_{n\to\infty}\Big(\lim_{x\to a} f_n(x)\Big), \tag{5.35}$$

то есть можно менять местами переход к пределу по x и переход к пределу по n.

Применим теперь теорему 5.8 к функциональной последовательности $\{S_n(x)\}$ частичных сумм функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ и тем самым убедимся, что справедлива следующая теорема.

Т е о р е м а 5.9 (о почленном переходе к пределу в равномерно сходящихся функциональных рядах). Пусть функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} S(x),$$

причём для всех номеров $n \in \mathbb{N}$ существует (конечный) предел

$$\lim_{x\to a} u_n(x) = a_n,$$

где a – предельная точка множества X. Тогда числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

сходится, причём предел суммы ряда

$$\lim_{x\to a} S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Так как теорема 5.9 – только перефразировка предшествующей теоремы 5.8, то в специальном *доказательстве* она *не нуждается*.

Последнему соотношению теоремы 5.9 можно придать вид, подобный (5.35): при выполнении условий этой теоремы имеет место равенство

$$\lim_{x\to a} \Big(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \big(\lim_{x\to a} u_n(x) \big), \tag{5.36}$$

то есть можно менять местами переход к пределу по x и (*бесконечное*) суммирование по n.

Сделаем небольшое отступление, о котором было упомянуто на с. 73 при рассмотрении методов суммирования числовых рядов. Пусть имеется функциональная последовательность $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, которая определена на множестве X и такова, что для всех номеров $n \in \mathbb{N}$ существуют пределы $\lim\limits_{x\to a} \varphi_n(x) = 1$, где a – предельная точка множества X.

Пусть нам дана числовая последовательность $\left\{A_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ $\Big($числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\Big)$. Введём в рассмотрение функциональную последовательность $\left\{f_n(x)\right\}_{n=1}^{\infty}$ с n-м элементом $f_n(x) = A_n\varphi_n(x)$ $\big($функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ с общим членом $u_n(x) = a_n\varphi_n(x)\big)$ и пусть существует предельная функция $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ $\Big($функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится, то есть существует сумма ряда $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)\Big)$ в каждой точке $x \in X$. Тогда предел $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ $\big($предел $\lim\limits_{x\to a} S(x)\big)$, если он либо конечное число, либо $+\infty$ или $-\infty$, можно поставить в соответствие рассматримаемой числовой последовательности $\left\{A_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ $\Big($числовому ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\Big)$ в качестве обобщённого значения предела (обобщённого значения суммы). Линейность этого метода очевидна, а условиями его регулярности и полной регулярности мы заниматься не будем.

Применяя теоремы 5.8 и 5.9 к функциональной последовательности или к функциональному ряду, которые состоят из непрерывных функций (в некоторой точке или на отрезке), можно убедиться в справедливости следующих двух теорем.

Т е о р е м а 5.10 (о непрерывности в точке предельной функции равномерно сходящейся функциональной последовательности). Пусть функциональная последовательность

$$f_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f(x),$$

причём для всех номеров $n \in \mathbb{N}$ функции $f_n(x)$ непрерывны при $x = x_0 \in [a, b]$. Тогда предельная функция $f(x)$ непрерывна при $x = x_0$.

Теорема 5.11 (о непрерывности в точке суммы равномерно сходящегося функционального ряда). Пусть функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} S(x),$$

причём для всех номеров $n \in \mathbb{N}$ функции $u_n(x)$ непрерывны при $x = x_0 \in [a, b]$. Тогда сумма ряда $S(x)$ непрерывна при $x = x_0$.

Из этих теорем сразу вытекают ещё две теоремы.

Теорема 5.12 (о непрерывности на отрезке предельной функции равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций). Пусть функциональная последовательность

$$f_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f(x),$$

причём для всех номеров $n \in \mathbb{N}$ функции $f_n(x) \in \mathbb{C}[a, b]$. Тогда предельная функция $f(x) \in \mathbb{C}[a, b]$.

Теорема 5.13 (о непрерывности на отрезке суммы равномерно сходящегося ряда непрерывных функций). Пусть функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} S(x),$$

причём для всех номеров $n \in \mathbb{N}$ функции $u_n(x) \in \mathbb{C}[a, b]$. Тогда сумма ряда $S(x) \in \mathbb{C}[a, b]$.

Отметим, что теоремы 5.12 и 5.13 иногда можно использовать для доказательства отсутствия равномерной сходимости функциональной последовательности или функционального ряда. Действительно, если для всех номеров $n \in \mathbb{N}$

функции $f_n(x)$ непрерывны на отрезке $[a,b]$ (функции $u_n(x)$ непрерывны на отрезке $[a,b]$) и

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \quad \Big(S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\Big), \quad x \in [a,b],$$

причём $f(x) \notin \mathbb{C}[a,b]$ ($S(x) \notin \mathbb{C}[a,b]$), то

$$f_n(x) \overset{[a,b]}{\not\rightrightarrows} f(x) \quad \Big(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \overset{[a,b]}{\not\rightrightarrows} S(x)\Big).$$

Отсюда, в частности, сразу вытекает, что в первых двух из пяти примеров, рассмотренных в конце первого параграфа, *нет* равномерной сходимости, так как предельная функция в этих примерах разрывна. Таким образом, требование равномерной сходимости в теоремах 5.12 и 5.13 *существенно*. Однако *необходимым* оно не является, как показывают два последних примера из этих же пяти, в которых последовательность непрерывных функций поточечно, но неравномерно сходится к непрерывной функции. Тем не менее в некоторых случаях требование равномерной сходимости будет и *необходимым*.

Теорема 5.14 (теорема Ди́ни для функциональной последовательности). Пусть функциональная последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ такова, что:

а) для всех номеров $n \in \mathbb{N}$ функции $f_n(x) \in \mathbb{C}[a,b]$;

б) для всех $x \in [a,b]$ числовая последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ монотонна;

в) предельная функция $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \in \mathbb{C}[a,b]$.

Тогда $f_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f(x)$.

Доказательство. Не ограничивая общности, будем считать, что в условии б) для всякого $x \in [a,b]$ последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *не убывает* (в противном случае вместо функциональной последовательности $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ будем рассматривать последовательность $\{-f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$). Обозначим $\varphi_n(x) = f(x) - f_n(x)$. Ясно, что $\varphi_n(x) \in \mathbb{C}[a, b]$ и для любого $x \in [a, b]$ числовая последовательность $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ – *неотрицательна* и, монотонно не возрастая, стремится к нулю, то есть

$$\begin{gathered}\varphi_1(x) \geqslant \varphi_2(x) \geqslant \cdots \geqslant \varphi_n(x) \geqslant \varphi_{n+1}(x) \geqslant \cdots \geqslant 0, \\ \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = 0, \quad x \in [a, b].\end{gathered} \tag{5.37}$$

Для доказательства равномерной сходимости последовательности $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ к предельной функции $f(x)$ достаточно для всякого $\varepsilon > 0$ найти хотя бы один номер n, что для всех $x \in [a, b]$ имеет место неравенство

$$0 \leqslant \varphi_n(x) < \varepsilon. \tag{5.38}$$

(Согласно (5.37), для всех бо́льших n неравенство (5.38) также выполняется.) Докажем это от противного. Пусть найдётся $\varepsilon > 0$, что для любого номера n можно указать значение $x_n \in [a, b]$, что

$$\varphi_n(x_n) \geqslant \varepsilon. \tag{5.39}$$

Числовая последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – *ограничена*, следовательно по теореме Больцано–Вейерштрасса, существует *сходящаяся* подпоследовательность $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ этой последовательности:

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0 \in [a, b]. \tag{5.40}$$

Но для всякого m найдётся номер k, что $n_k \geqslant m$. Поэтому из (5.37) и (5.39) следует, что $\varphi_m(x_{n_k}) \geqslant \varphi_{n_k}(x_{n_k}) \geqslant \varepsilon$. Это означает, что

$$\varphi_m(x_{n_k}) \geqslant \varepsilon. \tag{5.41}$$

Функция $\varphi_m(x)$ непрерывна в каждой точке отрезка $[a,b]$, следовательно из (5.40) и (5.41) вытекает, что $\varphi_m(x_0) = \lim\limits_{k\to\infty} \varphi_m(x_{n_k}) \geqslant \varepsilon$, то есть

$$\varphi_m(x_0) \geqslant \varepsilon, \quad m = 1, 2, 3, \ldots .$$

А это противоречит тому, что $\lim\limits_{m\to\infty} \varphi_m(x_0) = 0$ (см. (5.37)). Теорема доказана.

Ясно, что аналог этой теоремы для функциональных рядов имеет нижеследующий вид.

Т е о р е м а 5.15 (теорема Дини для функциональных рядов). Пусть функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ таков, что:

а) для всех номеров $n \in \mathbb{N}$ функции $u_n(x) \in \mathbb{C}[a,b]$;

б) для всех $x \in [a,b]$ и для всех номеров $n \in \mathbb{N}$ значения $u_n(x) \geqslant 0$ (значения $u_n(x) \leqslant 0$);

в) сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) = S(x) \in \mathbb{C}[a,b]$.

Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} S(x)$.

Т е о р е м а 5.16 (об интегрировании предельной функции равномерно сходящейся функциональной последовательности). Пусть функциональная последовательность

$$f_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f(x), \tag{5.42}$$

причём для всех $n \in \mathbb{N}$ функции $f_n(x) \in \mathbb{C}[a,b]$. Тогда

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(x)\,dx. \tag{5.43}$$

Доказательство. Отметим, что из (5.42) по теореме 5.12 вытекает, что $f(x) \in \mathbb{C}[a,b]$, а непрерывные функции интегрируемы. Не ограничивая общности, будем считать, что $a < b$, так как при $a = b$ равенство (5.43) очевидно (оно переходит в равенство $0 = 0$), а при $a > b$ предварительно переставим пределы интегрирования в обеих частях равенства (5.43).

Из (5.42) следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер N, что для всех номеров $n > N$ и для всех $x \in X$ абсолютная величина $|f_n(x) - f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$. Но тогда для этих же номеров n имеем, что $\left|\int\limits_a^b f_n(x)\,dx - \int\limits_a^b f(x)\,dx\right| = $ $= \left|\int\limits_a^b \big[f_n(x) - f(x)\big]\,dx\right| \leqslant \int\limits_a^b \big|f_n(x) - f(x)\big|dx \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a) = $ $= \dfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. А это означает, что числовая последовательность $\left\{\int\limits_a^b f_n(x)\,dx\right\}$ сходится к числу $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, следовательно, равенство (5.43) справедливо. Теорема доказана.

Таким образом, мы видим, что при выполнении условий теоремы 5.16 имеет место равенство

$$\int\limits_a^b \big(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\big)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(x)\,dx, \tag{5.44}$$

то есть можно менять местами интегрирование по x и переход к пределу по n.

Запишем аналог этой теоремы для функциональных рядов.

Теорема 5.17 (об интегрировании суммы равномерно сходящегося функционального ряда). Пусть функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} S(x),$$

причём для всех $n \in \mathbb{N}$ функции $u_n(x) \in \mathbb{C}[a,b]$. Тогда

$$\int_a^b S(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)\,dx.$$

И здесь мы видим, что при выполнении условий теоремы 5.17 имеет место равенство

$$\int_a^b \Big(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \Big)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)\,dx, \qquad (5.45)$$

то есть можно менять местами интегрирование по x и (*бесконечное*) суммирование по n.

Теоремы 5.16 и 5.17 справедливы и при более слабых предположениях относительно свойств функций $f_n(x)$ или $u_n(x)$: непрерывность можно заменить интегрируемостью. Однако мы не будем доказывать эти теоремы при таких условиях.

Отметим, что требование равномерной сходимости в теоремах 5.16 и 5.17, будучи существенным, не является в то же время необходимым: если его отбросить, то утверждения этих теорем могут как остаться верными, так и стать несправедливыми. Рассмотрим с этой точки зрения два последних примера (четвёртый и пятый), которые приведены на с. 86. В обоих примерах $X = [0,1]$, $f(x) \equiv 0$, а *равномерная сходимость*, как уже было выяснено, *отсутствует*.

4. Здесь $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$, и поэтому $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_a^b f_n(x)\,dx =$

$$= \lim_{n\to\infty}\int\limits_0^1 \frac{nx\,dx}{1+n^2x^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\,\ln\bigl(1+n^2x^2\bigr)\Big|_0^1 = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln\bigl(1+n^2\bigr)}{2n} =$$

$= 0 = \int\limits_a^b f(x)\,dx$, то есть равенство (5.43) выполняется. (В том, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln\bigl(1+n^2\bigr)}{2n} = 0$, легко убедиться, вычислив предел $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\ln\bigl(1+t^2\bigr)}{2t}$, например по правилу Лопиталя.)

5. В этом примере $f_n(x) = n^2xe^{-n^2x^2}$, и, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_a^b f_n(x)\,dx = \lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^1 n^2xe^{-n^2x^2}dx = \lim\limits_{n\to\infty}\left(-\dfrac{e^{-n^2x^2}}{2}\right)\Bigg|_0^1 =$ $= \dfrac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\bigl(1-e^{-n^2}\bigr) = \dfrac{1}{2} \neq 0 = \int\limits_a^b f(x)\,dx$. Таким образом, здесь равенство (5.43) уже *не* выполняется.

Т е о р е м а 5.18 (о дифференцировании предельной функции функциональной последовательности). Пусть функциональная последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к предельной функции $f(x)$ в каждой точке отрезка $[a,b]$:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \quad x\in[a,b], \tag{5.46}$$

причём для всех $n\in\mathbb{N}$ функции $f_n(x)$ непрерывно дифференцируемы, то есть $f_n'(x)\in\mathbb{C}[a,b]$, и последовательность

$$f_n'(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} \varphi(x). \tag{5.47}$$

Тогда в каждой точке отрезка $[a,b]$ функция $f(x)$ дифференцируема, причём

$$f'(x) = \varphi(x), \quad x \in [a,b]. \tag{5.48}$$

Доказательство. Из теоремы 5.12 вытекает, что функция $\varphi(x) \in \mathbb{C}[a,b]$. Возьмём любое число $x \in [a,b]$. В силу замечания на с. 89, из (5.47) следует, что

$$f_n'(t) \overset{[a,x]}{\rightrightarrows} \varphi(t).$$

Теперь мы видим, что для функциональной последовательности $\{f_n'(t)\}_{n=1}^{\infty}$ выполнены все условия теоремы 5.16, и поэтому из (5.43) и (5.46) вытекает $\int\limits_a^x \varphi(t)\,dt = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^x f_n'(t)\,dt =$ $= \lim\limits_{n\to\infty} \big(f_n(x) - f_n(a)\big) = f(x) - f(a)$, то есть

$$f(x) = f(a) + \int\limits_a^x \varphi(t)\,dt, \quad x \in [a,b]. \tag{5.49}$$

Так как функция $\varphi(x) \in \mathbb{C}[a,b]$, то по теореме о дифференцируемости интеграла с переменным верхним пределом из (5.49) вытекает (5.48). Теорема доказана.

Итак, при выполнении условий теоремы 5.18 имеет место равенство

$$\Big(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\Big)' = \lim_{n\to\infty} f_n'(x), \quad x \in [a,b]. \tag{5.50}$$

то есть можно менять местами дифференцирование по x и переход к пределу по n.

Перефразируем эту теорему для функциональных рядов.

Теорема 5.19 (о дифференцировании суммы функционального ряда). Пусть функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится к сумме $S(x)$ в каждой точке отрезка $[a, b]$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = S(x), \quad x \in [a, b],$$

причём для всех $n \in \mathbb{N}$ функции $u_n(x)$ непрерывно дифференцируемы, то есть $u_n'(x) \in \mathbb{C}[a, b]$, и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} \varphi(x).$$

Тогда в каждой точке отрезка $[a, b]$ функция $S(x)$ дифференцируема, причём

$$S'(x) = \varphi(x), \quad x \in [a, b].$$

И здесь, подобно (5.50), при выполнении условий теоремы 5.19 справедливо равенство

$$\Big(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \Big)' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x), \quad x \in [a, b]. \tag{5.51}$$

то есть можно менять местами дифференцирование по x и (*бесконечное*) суммирование по n.

Теоремы 5.18 и 5.19 справедливы и при менее жёстких предположениях относительно свойств функций $f_n(x)$ или $u_n(x)$. Однако мы не будем уточнять условия этих теорем.

В заключение рассмотрим следующий пример.

Введём функцию

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}\,. \tag{5.52}$$

Эта функция называется дзета-функцией Римана. Поскольку ряд в (5.52), как хорошо известно, сходится при $x > 1$ и расходится при $x \leqslant 1$, то отсюда следует, что функция $\zeta(x)$ определена при $x \in (1, +\infty)$.

Установим, что ряд в (5.52) не является равномерно сходящимся на множестве $X = (1, +\infty)$. Действительно, если бы он равномерно сходился на X, то по теореме 5.9, переходя к пределу при $x \to 1+0$, мы получили бы, что расходящийся гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ оказался сходящимся.

Исследуем функцию $\zeta(x)$ на непрерывность в своей области определения, используя при этом наличие равномерной сходимости ряда в (5.52) (разумеется, не на всём множестве X, а на какой-то его части). Возьмём произвольное число $x_0 \in (1, +\infty)$ и укажем два числа x_1 и x_2 такие, что $x_1 \in (1, x_0)$, $x_2 \in (x_0, +\infty)$ (например, можно взять $x_1 = \dfrac{1 + x_0}{2}$, $x_2 = x_0 + 1$). Очевидно, что для всех $x \in [x_1, x_2]$ имеет место неравенство

$$0 < \frac{1}{n^x} \leqslant \frac{1}{n^{x_1}}\,,$$

а так как *числовой* ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{x_1}}$ *сходится* ($x_1 > 1$), то по признаку Вейерштрасса (теорема 5.5) *функциональный* ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^x}$, определяющий функцию $\zeta(x)$, *сходится равномерно* на множестве $[x_1, x_2]$. Поэтому, согласно теореме 5.13, функция $\zeta(x) \in \mathbb{C}[x_1, x_2]$, то есть непрерывна в *каждой* точке отрезка $[x_1, x_2]$, в том числе и в точке x_0. Точка x_0 – *любая* точка множества X, следовательно, функция $\zeta(x)$ непрерывна в каждой точке бесконечного интервала $(1, +\infty)$.

Исследуем теперь функцию $\zeta(x)$ на дифференцируемость в своей области определения, точнее, убедимся, что справедлива формула

$$\zeta'(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^x}, \quad x \in (1, +\infty). \tag{5.53}$$

Ряд в (5.53) получен формальным дифференцированием ряда в (5.52). Проверим выполнение условий теоремы 5.19. В проверке нуждается лишь выполнение условия о равномерной сходимости формально продифференцированного ряда, то есть ряда в (5.53), ибо остальные условия (сходимость исходного ряда и непрерывность производных), очевидно, выполняются. Применим тот же приём, что и при исследовании функции $\zeta(x)$ на непрерывность, то есть для произвольного числа $x_0 \in (1, +\infty)$ укажем числа $x_1 \in (1, x_0)$ и $x_2 \in (x_0, +\infty)$. Ясно, что для всех $x \in [x_1, x_2]$ справедливо неравенство

$$0 \leqslant \frac{\ln n}{n^x} \leqslant \frac{\ln n}{n^{x_1}},$$

а числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^{x_1}} \tag{5.54}$$

сходится. Установим это. Так как $x_1 > 1$, а предел отношения $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{\ln t}{t^{\frac{x_1-1}{2}}} = 0$ (в этом можно убедиться по правилу Лопиталя), то для достаточно больших t числитель этой дроби $\ln t < t^{\frac{x_1-1}{2}}$. Поэтому для достаточно больших n общий член $\dfrac{\ln n}{n^{x_1}} < \dfrac{n^{\frac{x_1-1}{2}}}{n^{x_1}} = \dfrac{1}{n^{\frac{x_1+1}{2}}}$. Но ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{\frac{x_1+1}{2}}}$ сходится (поскольку $x_1 > 1$, то $\dfrac{x_1+1}{2} > 1$), следовательно, и ряд (5.54) сходится. Итак, по признаку Вейерштрасса (теорема 5.5) ряд в (5.53) сходится равномерно на $[x_1, x_2]$. Поэтому, согласно теореме 5.19, равенство (5.53) выполняется в каждой точке отрезка $[x_1, x_2]$, в том числе и в точке x_0. А точка x_0 – *произвольная* точка множества X, следовательно, равенство (5.53) выполняется в каждой точке бесконечного интервала $(1, +\infty)$.

Аналогичные рассмотрения (с многократным применением теоремы 5.19 на отрезке $[x_1, x_2] \subset (1, +\infty)$) дают возможность установить, что функция $\zeta(x)$ *бесконечно дифференцируема* в своей области определения, причём

$$\zeta^{(k)}(x) = (-1)^k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^k}{n^x}; \qquad \begin{array}{l} k = 0, 1, 2, \ldots; \\ x \in (1, +\infty). \end{array} \tag{5.55}$$

5.6. Вопросы для повторения и самостоятельной работы

1. Привести пример функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, равномерно сходящегося на некотором множестве X, но не являющегося абсолютно сходящимся ни в одной точке множества X.

2. Привести пример функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, равномерно сходящегося на некотором множестве X, являющегося абсолютно сходящимся в любой точке множества X, но который нельзя ограничить сверху (мажорировать) сходящимся знакоположительным рядом.

3. Доказать теорему 5.7.

4. Привести пример функциональной последовательности $\left\{f_n(x)\right\}_{n=1}^{\infty}$, которая на отрезке $[a, b]$ равномерно сходится к разрывной функции.

5. Привести пример функциональной последовательности разрывных функций $\left\{f_n(x)\right\}_{n=1}^{\infty}$, которая на отрезке $[a, b]$ равномерно сходится к непрерывной функции.

6. Доказать формулу (5.55).

6. Степенные ряды. Разложение функций в степенные ряды

6.1. Степенные ряды. Множество сходимости

Функциональный ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0)+ \\ +a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots \tag{6.1}$$

называется *степенным* рядом.

Если в ряде (6.1) обозначить $x - x_0 = t$, то он перейдёт в ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n + \cdots .$$

Поэтому в дальнейшем, если не оговорено противное, будем называть степенным рядом функциональный ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots , \tag{6.2}$$

получающийся из ряда (6.1) при $x_0 = 0$.

Любой степенной ряд (6.2) сходится (и при том абсолютно) при $x = 0$. Имеются степенные ряды, сходящиеся *только* при $x = 0$. Рассмотрим два примера.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^n x^n$. Применяя при $x \neq 0$ к абсолютной величине общего члена $u_n(x) = n^n x^n$ радикальный признак Коши в предельной форме (следствие из теоремы 2.5), находим: $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n(x)|} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|n^n x^n|} = \lim\limits_{n\to\infty} n|x| = +\infty$. В этом случае, как известно (см. замечание на с. 37), общий член $u_n(x)$ не стремится к нулю, и исходный ряд расходится.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n!\, x^n$. В этом случае применим при $x \neq 0$ к абсолютной величине общего члена $u_n(x) = n!\, x^n$ признак Даламбера в предельной форме (следствие из теоремы 2.4). Тогда предел отношения $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|(n+1)!\, x^{n+1}|}{|n!\, x^n|} =$ $= \lim\limits_{n\to\infty} (n+1)|x| = +\infty$, то есть и здесь общий член $u_n(x)$ не стремится к нулю, и исходный ряд расходится.

Теорема 6.1 (первая теорема Абеля). Если ряд (6.2) сходится при $x = \tilde{x} \neq 0$, то он абсолютно сходится для всех x таких, что $|x| < |\tilde{x}|$.

Доказательство. По условию, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \tilde{x}^n$ сходится, следовательно, по необходимому признаку (см. теорему 1.4) предел $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \tilde{x}^n = 0$. Так как сходящаяся последовательность ограничена, то найдётся $M > 0$, что для всех номеров n абсолютная величина $|a_n \tilde{x}^n| \leqslant M$. Поскольку для общего члена ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| \tag{6.3}$$

имеет место оценка $|a_n x^n| = |a_n \tilde{x}^n| \cdot \left|\frac{x}{\tilde{x}}\right|^n \leqslant M \left|\frac{x}{\tilde{x}}\right|^n$, а геометрическая прогрессия $\sum\limits_{n=0}^{\infty} M \left|\frac{x}{\tilde{x}}\right|^n$ – сходится (её знаменатель $q = \left|\frac{x}{\tilde{x}}\right| < 1$), то по признаку сравнения для числовых рядов ряд (6.3) сходится, то есть ряд (6.2) сходится абсолютно. Теорема доказана.

Выясним, как устроено множество сходимости X степенного ряда (6.2). Оно всегда непусто ($X \neq \emptyset$), поскольку у любого ряда $0 \in X$. Как показывают рассмотренные выше примеры, бывают ряды, у которых $X = \{0\}$. Такие ряды называются *всюду расходящимися* степенными рядами. Если ряд (6.2) не является всюду расходящимся степенным рядом, то имеются точки $\tilde{x} \neq 0$, в которых он сходится. Рассмотрим множество $\{|\tilde{x}|\}$.

Если это множество не ограничено сверху, то по первой теореме Абеля ряд (6.2) сходится, причём абсолютно, для всех $x \in (-\infty, +\infty)$. Такие степенные ряды называются *всюду сходящимися*.

Пусть теперь множество $\{|\tilde{x}|\}$ ограничено сверху. Обозначим $R = \sup\{|\tilde{x}|\}$ $(0 < R < +\infty)$. Из определения точной верхней грани и теоремы 6.1 следует, что для всех x таких, что $|x| > R$, ряд (6.2) расходится, а если $x \in (-R, R)$, то ряд (6.2) абсолютно сходится. В пограничных точках (при $x = \pm R$) первая теорема Абеля ответа не даёт. Как мы увидим ниже, в этих точках общего вывода о сходимости (расходимости) сделать нельзя: есть примеры рядов, сходящихся при $x = \pm R$, есть примеры рядов, расходящихся при $x = \pm R$, а есть примеры рядов, которые сходятся на одном конце интервала $(-R, R)$ и расходятся на другом; если есть сходимость на каком-то из концов, то она может в одних примерах быть абсолютной, а в других – условной.

Отсюда можно сделать очень важный вывод:
всякий степенной ряд (6.2) характеризуется величиной R, называемой *радиусом сходимости* (R – либо неотрицательное число, либо символ $+\infty$). Если $R = 0$, то ряд (6.2) сходится (причём абсолютно) только при $x = 0$. Если $R \neq 0$, то для всех $x \in (-R, R)$ (этот интервал называется *интервалом сходимости*) степенной ряд абсолютно сходится, а если $R \in (0, +\infty)$, то при $|x| > R$ степенной ряд расходится, в граничных точках интервала сходимости может быть либо расходимость, либо абсолютная сходимость, либо условная сходимость.

Отметим попутно, что для степенных рядов (6.1) интервалом сходимости будет множество $(x_0 - R, x_0 + R)$, а всюду расходящийся степенной ряд (6.1) сходится лишь при $x = x_0$.

Теорема 6.2 (теорема Коши–Адамара). Радиус сходимости R степенного ряда (6.2) можно найти по формуле

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}} \tag{6.4}$$

(если неотрицательный верхний предел, стоящий в знаменателе, равен нулю, то $R = +\infty$, а если $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty$, то $R = 0$).

Доказательство. Обозначим

$$\rho_n = \sqrt[n]{|a_n|}, \quad \rho = \overline{\lim_{n\to\infty}} \rho_n. \tag{6.5}$$

Пусть $\rho = 0$. Так как верхний предел последовательности – её крайняя правая предельная точка, а отрицательных частичных пределов у последовательности $\{\rho_n\}$ быть не может ($\rho_n \geqslant 0$), то эта предельная точка – единственная. Это означает, что последовательность $\{\rho_n\}$ сходится к пределу $\rho = 0$, то есть существует $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_n = 0$. Но тогда для всякого $x \in (-\infty, +\infty)$ предел $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \rho_n|x| = 0 < 1$, следовательно, согласно радикальному признаку Коши в предельной форме (следствие из теоремы 2.5), ряд (6.2) абсолютно сходится для всех $x \in (-\infty, +\infty)$. Поэтому здесь радиус сходимости $R = +\infty$.

Пусть $\rho = +\infty$. Возьмём произвольное значение $x \neq 0$. Так как верхний предел последовательности – её (крайний правый) частичный предел, то существует строго монотонная последовательность $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ натуральных чисел

$$1 \leqslant n_1 < n_2 < \cdots < n_k < n_{k+1} < \cdots$$

такая, что $\lim\limits_{k\to\infty} \rho_{n_k} = +\infty$. Это значит, что найдётся такой номер k_0, что для всех $k \geqslant k_0$ имеет место неравенство $\rho_{n_k} > \dfrac{1}{|x|}$. Отсюда согласно (6.5) имеем, что $\rho_{n_k} = \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} > \dfrac{1}{|x|}$, то есть $|a_{n_k} x^{n_k}| > 1$. Последнее неравенство означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n x^n \neq 0$, другими словами, для всякого $x \neq 0$ степенной ряд (6.2) расходится, следовательно, его радиус сходимости $R = 0$.

Пусть $0 < \rho < +\infty$. Применим радикальный признак Коши к ряду, составленному из абсолютных величин слагаемых ряда (6.2). Используя (6.5), находим, что $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \rho_n|x| = \rho|x|$. Согласно радикальному признаку Коши в предельной форме, если $\rho\,|x| < 1$, то есть при $|x| < \dfrac{1}{\rho}$, ряд (6.2) сходится абсолютно, а если $\rho|x| > 1$, то есть при

$|x| > \dfrac{1}{\rho}$, ряд (6.2) расходится по необходимому признаку. Поэтому здесь $R = \dfrac{1}{\rho}$.

Итак, во всех случаях формула (6.4) справедлива. Теорема доказана.

Разумеется, пользоваться формулой Коши–Адамара не всегда удобно. Однако если нужно найти множество сходимости степенного ряда, то его можно рассматривать как ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n(x)$, в котором $u_n(x) = a_n(x - x_0)^n$, и искать множество сходимости такого функционального ряда.

Проиллюстрируем сказанное примерами.

1. Рассмотрим ряд

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\,. \tag{6.6}$$

Здесь $u_n(x) = \dfrac{x^n}{n!}$, $a_n = \dfrac{1}{n!}$. Пользоваться формулой Коши–Адамара неудобно, так как неясно поведение последовательности $\sqrt[n]{n!}$. Примéним к этому ряду (при $x \neq 0$) признак Даламбера в предельной форме:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right|}{\left|\dfrac{x^n}{n!}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0 < 1.$$

Это означает, что исследуемый ряд сходится абсолютно для всех $x \in (-\infty, +\infty)$, то есть его радиус сходимости $R = +\infty$.

2. Рассмотрим ряд

$$x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n-1}\,\frac{x^n}{n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\,\frac{x^n}{n}\,. \tag{6.7}$$

Здесь $a_0 = 0$, $a_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. По формуле Коши–Адамара имеем $R = \dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}} = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{1}{n}}} = \dfrac{1}{1} = 1.$

Это значит, что при $|x| < 1$ исследуемый ряд сходится абсолютно, а при $|x| > 1$ – расходится. При $x = 1$ ряд (6.7) переходит в условно сходящийся ряд Лейбница, а при $x = -1$ – в ряд, лишь множителем (-1) отличающийся от гармонического ряда, и поэтому расходящийся.

3. Рассмотрим ряд

$$\begin{gathered} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1\cdot 2}\,x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\,x^3 + \\ + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n}\,x^n + \cdots = \\ = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n}\,x^n, \end{gathered} \tag{6.8}$$

называемый *биномиальным* рядом. Этот ряд является степенным рядом с параметром α. Здесь

$$\begin{aligned} u_0(x) &\equiv 1, & a_0 &= 1; \\ u_n(x) &= \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n}\,x^n, & &(n = 1, 2, 3, \ldots); \\ a_n &= \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n}, & &(n = 1, 2, 3, \ldots). \end{aligned} \tag{6.9}$$

Пусть $\alpha \in \mathbb{N}_0 \equiv \{0, 1, 2, \ldots\}$. Тогда все члены ряда (6.8), начиная с некоторого номера (с номера $n = \alpha + 1$), становятся равными нулю. У такого ряда, вырождающегося в конечную сумму, радиус сходимости $R = +\infty$.

Пусть $\alpha \notin \mathbb{N}_0$. Тогда ни один из коэффициентов ряда (6.8) не будет нулём. Для нахождения множества сходимости этого ряда, так же как в первом примере, воспользуемся (при $x \neq 0$) признаком Даламбера. Поскольку $u_{n+1}(x) = \dfrac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)(\alpha-n)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n\cdot(n+1)}\, x^{n+1} = u_n(x)\,\dfrac{\alpha-n}{n+1}\, x$, то

$$\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \left|\frac{(\alpha-n)x}{n+1}\right|. \tag{6.10}$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $n \to \infty$, получаем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(\alpha-n)x}{n+1}\right| = |x|.$$

Это значит, что при $|x| < 1$ исследуемый ряд сходится абсолютно, а при $|x| > 1$ – расходится, то есть для всякого $\alpha \notin \mathbb{N}_0$ у биномиального ряда (6.8) радиус сходимости $R = 1$. Исследуем поведение ряда на концах интервала сходимости (при $x = \pm 1$).

Пусть $\alpha \leqslant -1$. Из (6.10) находим

$$\frac{|u_{n+1}(\pm 1)|}{|u_n(\pm 1)|} = \frac{n-\alpha}{n+1} \geqslant 1,$$

и поэтому, согласно признаку Даламбера в допредельной форме (теорема 2.4) при $\alpha \leqslant -1$ ряд (6.8) расходится на обоих концах интервала сходимости.

При остальных нерассмотренных α, то есть при нецелых $\alpha > -1$, признак Даламбера ни в предельной, ни в допредельной формах не работает. Воспользуемся признаком Раабе в предельной форме (следствие из теоремы 2.7). Так как $n \to \infty$, то будем рассматривать $n > \alpha$. Согласно (6.10) имеем

$$\lim_{n\to\infty} n\left[\frac{|u_n(\pm 1)|}{|u_{n+1}(\pm 1)|} - 1\right] = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{n+1}{n-\alpha} - 1\right) = \\ = \lim_{n\to\infty} \frac{n(\alpha+1)}{n-\alpha} = \alpha + 1. \tag{6.11}$$

Пусть $\alpha \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{N}$, то есть α – любое положительное ненатуральное число. Тогда $\alpha + 1 > 1$, и поэтому из (6.11) вытекает, что при этих α ряд (6.8) абсолютно сходится на обоих концах интервала сходимости.

Пусть $\alpha \in (-1, 0)$. В этом случае $\alpha + 1 < 1$, и поэтому из (6.11) вытекает, что при этих α у ряда (6.8) нет абсолютной сходимости ни на одном из концов интервала сходимости. Если обозначить

$$c_n = \frac{(-\alpha)(1-\alpha)\ldots(n-1-\alpha)}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n} > 0, \quad (n = 1, 2, 3, \ldots), \tag{6.12}$$

то отсюда согласно (6.8) и (6.9) имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(-1) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n, \tag{6.13}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(1) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n c_n. \tag{6.14}$$

Из (6.12) следует, что ряд (6.13) – *знакоположительный*, а так как у него нет абсолютной сходимости, то он *расходится*; ряд же (6.14) – *знакочередующийся*. Поскольку

$$c_{n+1} = \frac{(-\alpha)(1-\alpha)\ldots(n-1-\alpha)(n-\alpha)}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n\cdot (n+1)} = c_n \cdot \frac{n-\alpha}{n+1} < c_n,$$

то положительная числовая последовательность $\{c_n\}$ является строго *убывающей*, поэтому для доказательства сходимости (естественно, *условной*) по признаку Лейбница ряда (6.14) достаточно установить, что

$$\lim_{n\to\infty} c_n = 0. \tag{6.15}$$

Согласно обозначению (6.12), имеем

$$-\ln c_n = -\ln(-\alpha) - \ln\left(\frac{1-\alpha}{2}\right) - \dots - \ln\left(1 - \frac{1+\alpha}{n}\right),$$

то есть последовательность $\{-\ln c_n\}$ – последовательность частичных сумм ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, общий член которого $b_n = -\ln\left(1 - \dfrac{1+\alpha}{n}\right) \sim \dfrac{1+\alpha}{n}$. Но ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1+\alpha}{n}$ расходится, так как лишь множителем $(1+\alpha)$ отличается от расходящегося гармонического ряда. Поэтому, по признаку сравнения в предельной форме, знакоположительный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ также расходится, то есть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty}(-\ln c_n) = +\infty$. Это означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} \ln c_n = -\infty$, следовательно, (6.15) имеет место, чем, как уже отмечалось, доказана условная сходимость ряда (6.14).

Итак, для биномиального ряда (6.8) получаем:

- если $\alpha \in \mathbb{N}_0$, то $R = +\infty$ (при этих α ряд имеет конечное число ненулевых членов);

- если $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}_0$, то $R = 1$, причём:

– при $\alpha \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{N}$ ряд сходится для всех $x \in [-1, 1]$ и сходимость ряда – абсолютная на обоих концах;

– при $\alpha \in (-1, 0)$ ряд сходится для всех $x \in (-1, 1]$, в точке $x = -1$ ряд расходится, в точке $x = 1$ ряд сходится условно;

– при $\alpha \in (-\infty, -1]$ ряд сходится для всех $x \in (-1, 1)$, в обеих граничных точках $x = \pm 1$ ряд расходится.

6.2. Свойства степенных рядов

Теорема 6.3 (равномерная сходимость степенного ряда). Пусть у степенного ряда (6.2) радиус сходимости $R > 0$. Тогда для всякого $r \in (0, R)$ этот ряд сходится равномерно на отрезке $[-r, r]$.

Доказательство. Пусть $r \in (0, R) \subset (-R, R)$, а на интервале $(-R, R)$ ряд (6.2) сходится абсолютно. Это означает, что числовой ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n r^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n < +\infty. \tag{6.16}$$

Далее, для любого $x \in [-r, r]$ справедлива оценка

$$|a_n x^n| \leqslant |a_n| r^n. \tag{6.17}$$

Из (6.16) и (6.17) по признаку Вейерштрасса (теорема 5.5) получаем, что $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n \rightrightarrows$ на $[-r, r]$. Теорема доказана.

Теорема 6.4 (непрерывность суммы степенного ряда). Пусть у степенного ряда (6.2) радиус сходимости $R > 0$. Тогда сумма $S(x)$ этого ряда непрерывна на $(-R, R)$.

Доказательство. Пусть x_0 – произвольное число из интервала $(-R, R)$. Возьмём какое-нибудь $r \in (|x_0|, R)$. Тогда по теореме 6.3 ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n \overset{[-r,r]}{\rightrightarrows} S(x)$ и, следовательно, согласно теореме 5.13, его сумма $S(x) \in \mathbb{C}[-r, r]$, то есть $S(x)$ непрерывна в *любой* точке $[-r, r]$, в том числе и в точке x_0. Итак, для всякого $x_0 \in (-R, R)$ функция $S(x)$ непрерывна при $x = x_0$. Теорема доказана.

Теорема 6.5 (единственность коэффициентов степенного ряда). Пусть степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = S_a(x) \tag{6.18}$$

имеет радиус сходимости $R_1 > 0$, а другой степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = S_b(x) \tag{6.19}$$

имеет радиус сходимости $R_2 > 0$. Пусть найдётся $\delta > 0$, что для всех x из δ-окрестности нуля одного из видов:

$$\begin{array}{llll} (1) & (-\delta, \delta), & (2) & (-\delta, 0) \cup (0, \delta), \\ (3) & [0, \delta), & (4) & (0, \delta), \\ (5) & (-\delta, 0], & (6) & (-\delta, 0), \end{array} \tag{6.20}$$

справедливо равенство

$$S_a(x) = S_b(x). \tag{6.21}$$

Тогда

$$a_n = b_n \tag{6.22}$$

для всех $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Доказательство. Если равенство (6.21), или, в развёрнутом виде,

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots, \tag{6.23}$$

имеет место для всех x из δ-окрестности нуля вида (6.20) (1), (6.20) (3) или (6.20) (5) (то есть из окрестности, содержащей точку 0), то, подставив в это равенство значение $x = 0$, получим

$$a_0 = b_0. \tag{6.24}$$

Если же (6.23) имеет место для всех значений x из окрестности вида (6.20) (2), (6.20) (4) или (6.20) (6) (то есть из окрестности, не содержащей точку 0), то, устремляя x к нулю в этом равенстве с соответствующей стороны ($x \to 0$ в окрестности вида (6.20) (2), $x \to 0+0$ в окрестности вида (6.20) (4), $x \to 0 - 0$ в окрестности вида (6.20) (6)) в этом равенстве, также получим (6.24). Взаимно уничтожая a_0 и b_0 в обеих частях (6.23) и сокращая их на x (естественно, при $x \neq 0$), получаем

$$a_1 + a_2x + a_3x^2 + \cdots = b_1 + b_2x + b_3x^2 + \cdots. \tag{6.25}$$

Устремляя x к нулю в этом равенстве с соответствующей стороны ($x \to 0$ в окрестности вида (6.20) (1) или (2), $x \to 0 + 0$ в окрестности вида (6.20) (3) или (4), $x \to 0 - 0$ в окрестности вида (6.20) (5) или (6)), убеждаемся, что

$$a_1 = b_1.$$

Взаимно уничтожая a_1 и b_1 в обеих частях (6.25), сокращая их на x и устремляя x к нулю в получаемом равенстве с соответствующей стороны, видим, что

$$a_2 = b_2.$$

Продолжая этот процесс, заключаем, что (6.22) справедливо для всех $n = 0, 1, 2, \ldots$. Теорема доказана.

Теорема 6.6. Пусть у степенного ряда (6.2) радиус сходимости $R \in (0, +\infty)$ и этот ряд расходится при $x = R$ (при $x = -R$). Тогда этот ряд не является равномерно сходящимся на $[0, R)$ (на $(-R, 0]$).

Доказательство. Пусть ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \rightrightarrows \text{ на } [0, R).$$

Осуществляя в этом ряде почленный переход к пределу при $x \to R-0$, получаем, согласно теореме 5.9, что числовой ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$$

сходится, а это противоречит условию расходимости степенного ряда (6.2) при $x = R$ и тем самым устанавливает справедливость доказываемой теоремы для *правой* половины интервала сходимости. Рассмотрение *левой* половины интервала сходимости проводится аналогично. Теорема доказана.

Теорема 6.7. Пусть у степенного ряда (6.2) радиус сходимости $R \in (0, +\infty)$ и этот ряд сходится при $x = R$ (при $x = -R$). Тогда этот ряд равномерно сходится на $[0, R]$ (на $[-R, 0]$).

Доказательство. Как и при доказательстве предыдущей теоремы, ограничимся рассмотрением правой половины области сходимости степенного ряда (6.2). Представим (при $x \in [0, R]$) этот ряд в виде

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n \cdot \left(\frac{x}{R}\right)^n. \qquad (6.26)$$

По условию *числовой* ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ сходится (возможно, не абсолютно, а лишь условно), следовательно, рассматриваемый как ряд *функциональный* (состоящий из функций-констант), он сходится *равномерно* на любом множестве (в том числе на множестве $[0, R]$). На этом же множестве

$$0 \leqslant \left(\frac{x}{R}\right)^n \leqslant 1$$

для всех $n = 0, 1, 2, \ldots$ и при любом $x \in [0, R]$ числовая последовательность $\left\{\left(\frac{x}{R}\right)^n\right\}_{n=0}^{\infty}$ не возрастает:

$$1 \geqslant \frac{x}{R} \geqslant \left(\frac{x}{R}\right)^2 \geqslant \cdots \geqslant \left(\frac{x}{R}\right)^n \geqslant \left(\frac{x}{R}\right)^{n+1} \geqslant \cdots .$$

Поэтому согласно признаку Абеля равномерной сходимости функциональных рядов (теорема 5.7), ряд (6.26), то есть степенной ряд (6.2), сходится равномерно на $[0, R]$. Теорема доказана.

Теорема 6.8 (вторая теорема Абеля). Пусть у степенного ряда (6.2) радиус сходимости $R \in (0, +\infty)$ и этот ряд сходится при $x = R$ (при $x = -R$). Тогда существует $\lim\limits_{x \to R-0} \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ $\Big($существует $\lim\limits_{x \to -R+0} \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (-R)^n\Big)$.

Доказательство. Так же, как при доказательстве теорем 6.6 и 6.7, ограничимся рассмотрением правой половины области сходимости степенного ряда (6.2). Согласно предыдущей теореме, ряд (6.2) сходится равномерно на $[0,R]$. Но тогда по теореме 5.9 в этом ряде можно переходить к пределу при $x \to R-0$, а $\lim\limits_{x \to R-0} a_n x^n = a_n R^n$. Теорема доказана.

Теорема 6.9 (о почленном интегрировании степенного ряда). Пусть у степенного ряда (6.2) радиус сходимости $R > 0$ и

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = S(x). \tag{6.27}$$

Тогда для всякого $x \in (-R, R)$ интеграл

$$\begin{aligned} \int_0^x S(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^{n+1}}{n+1} = \\ = a_0 x + \frac{a_1 x^2}{2} + \frac{a_2 x^3}{3} + \dots = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_{m-1} x^m}{m}\,. \end{aligned} \tag{6.28}$$

Если, кроме того, радиус $R < +\infty$ и исходный ряд (6.27) сходится также при $x = R$ (при $x = -R$), то равенство (6.28) справедливо и для $x = R$ (для $x = -R$).

Доказательство. Рассмотрим ряд (6.28) как степенной ряд, расположенный по степеням x^m. Его радиус сходимости R_1 найдём по формуле Коши–Адамара (6.4) (см. теорему 6.2):

$$\frac{1}{R_1} = \varlimsup_{m\to\infty} \sqrt[m]{\left|\frac{a_{m-1}}{m}\right|} = \varlimsup_{m\to\infty} \left(\sqrt[m-1]{|a_{m-1}|}\right)^{\frac{m-1}{m}} =$$
$$= \left(\varlimsup_{m\to\infty} \sqrt[m-1]{|a_{m-1}|}\right)^{\frac{m-1}{m}} = \frac{1}{R}\,.$$

(При выводе этой формулы также было использовано, что пределы $\lim\limits_{m\to\infty} \dfrac{m-1}{m} = \lim\limits_{m\to\infty} \sqrt[m]{m} = 1$, а верхний предел $\varlimsup\limits_{m\to\infty} \sqrt[m-1]{|a_{m-1}|} = \varlimsup\limits_{m\to\infty} \sqrt[m]{|a_m|} = \dfrac{1}{R}$). Итак, $R_1 = R$. Возьмём произвольно $x_0 \in (-R, R)$ и какое-нибудь $r \in (|x_0|, R)$.

Тогда по теореме 6.3 ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n \overset{[-r,r]}{\rightrightarrows} S(x)$ и, следовательно, согласно теореме 5.17, его можно почленно интегрировать, то есть равенство (6.28) справедливо для всех $x \in (-R, R)$. Если же $R \in (0, +\infty)$ и ряд (6.27) сходится также при $x = R$ (при $x = -R$), то возможность почленного интегрирования вытекает из теоремы 6.7 (равномерная сходимость) и теоремы 5.17. Теорема доказана.

Теорема 6.10 (о почленном дифференцировании степенного ряда). Пусть у степенного ряда (6.2) радиус сходимости $R > 0$ и

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = S(x).$$

Тогда для всякого $x \in (-R, R)$ существует производная

$$\begin{aligned} S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \\ = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots = \sum_{m=0}^{\infty} (m+1) a_{m+1} x^m. \end{aligned} \tag{6.29}$$

Если, кроме того, радиус $R < +\infty$ и ряд (6.29) сходится также при $x = R$ (при $x = -R$), то равенство (6.29) справедливо и для $x = R$ (для $x = -R$).

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству предыдущей теоремы (надо лишь вместо теоремы 5.17 о почленном интегрировании функциональных рядов использовать теорему 5.19 о почленном дифференцировании таких рядов) и поэтому *не приводится*.

6.3. Ряд Тейлора (Маклорена). Аналитические и неаналитические функции

Пусть функция $f(x)$ раскладывается в степенной ряд вида (6.2), радиус сходимости которого $R > 0$ (то есть функция $f(x)$ является суммой этого ряда по крайней мере на интервале $(-R, R)$). Согласно теореме 6.10, у функции $f(x)$ при $x \in (-R, R)$ существует производная $f'(x)$, которую можно получить с помощью почленного дифференцирования степенного ряда. Так как радиус сходимости продифференцированного ряда тот же самый, то операцию дифференцирования можно проделать сколько угодно раз:

$$\begin{array}{rcl}
f(x) & = & a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots\,, \\
f'(x) & = & 1 \cdot a_1 x + 2 \cdot a_2 x + \cdots + n a_n x^{n-1} + \cdots\,, \\
f''(x) & = & 2 \cdot 1 \cdot a_2 + \cdots + n(n-1) a_n x^{n-2} + \cdots\,, \\
\multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\
f^{(n)}(x) & = & n(n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 \cdot a_n + \cdots\,, \\
\multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots}
\end{array}$$

Подставляя сюда $x = 0$, имеем, что

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{6.30}$$

и, следовательно, разложение в ряд функции $f(x)$ имеет вид

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, x^n. \tag{6.31}$$

Ряд, стоящий в правой части этой формулы, называется *рядом Тейлора* функции $f(x)$. Точнее, ряд в (6.31) называется *рядом Маклорена*, а рядом Тейлора называется ряд вида (6.1) с центром в точке x_0, представляющий функцию $f(x)$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\,(x - x_0)^n. \qquad (6.32)$$

Ясно, что при $x_0 = 0$ формула (6.32) переходит в формулу (6.31), поэтому в дальнейшем будем иметь дело с разложением (6.31).

Согласно теореме единственности коэффициентов степенных рядов (теорема 6.5), если какая-то функция $f(x)$ является суммой степенного ряда (6.2) с радиусом сходимости $R > 0$, то этот ряд обязательно есть её ряд Тейлора (6.31). Функция, для которой равенство (6.31) справедливо на всём множестве сходимости её ряда Тейлора, называется *аналитической*. Очевидно, что всякая аналитическая функция имеет производные любого порядка. Но не всякая бесконечно дифференцируемая функция является аналитической. К таким функциям относится, например, функция

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0, \\ \quad 0, & x = 0. \end{cases} \qquad (6.33)$$

Установим это. Вычисляя при $x \neq 0$ первую и вторую производные, имеем

$$f'(x) = \frac{2}{x^3}\,e^{-\frac{1}{x^2}}, \quad f''(x) = \left(-\frac{6}{x^4} + \frac{4}{x^6}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}. \qquad (6.34)$$

Эти формулы дают возможность предположить, что

$$f^{(n)}(x) = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^{(n)}}{x^{n+2k}}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}, \quad x \neq 0, \quad n = 1, 2, \ldots, \qquad (6.35)$$

где $\{a_k^{(n)}\}_{k=1}^n$ – некоторые вещественные числа ($n = 1, 2, \ldots$). Докажем формулу (6.35) методом математической индукции. При $n = 1$ (и $n = 2$), согласно (6.34), эта формула справедлива. Пусть она верна для некоторого $n \geqslant 1$. Тогда

$$f^{(n+1)}(x) = \left(\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^{(n)}}{x^{n+2k}}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}\right)' =$$

$$= \left(-\sum_{k=1}^{n} \frac{(n+2k)a_k^{(n)}}{x^{n+2k+1}}\right) e^{-\frac{1}{x^2}} + \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^{(n)}}{x^{n+2k}}\right) \frac{2}{x^3}\, e^{-\frac{1}{x^2}} =$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{a_k^{(n+1)}}{x^{n+1+2k}}\right) e^{-\frac{1}{x^2}},$$

где

$$\begin{aligned} a_1^{(n+1)} &= -(n+2)a_1^{(n)}, \\ a_k^{(n+1)} &= -(n+2k)a_k^{(n)} + 2a_{k-1}^{(n)}, \quad k = 2, 3, \ldots, n, \\ a_{n+1}^{(n+1)} &= \qquad\qquad\qquad 2a_n^{(n)}, \end{aligned}$$

то есть формула (6.35) верна и для $n+1$. Тем самым доказана справедливость этой формулы для всех натуральных n.

Теперь покажем, что

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^m} = 0, \quad m = 1, 2, \ldots. \tag{6.36}$$

Действительно, обозначив $\dfrac{1}{x^2} = t$, получим

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^m} = \lim_{t \to +\infty} \frac{e^{-t}}{t^{-m/2}} = \lim_{t \to +\infty} \frac{t^{m/2}}{e^t} = 0.$$

(Величина последнего предела находится путём применения правила Лопиталя $\left[\dfrac{m+1}{2}\right]$ раз.)

Формулы (6.35) показывают, что функция (6.33) имеет все производные при $x \neq 0$. Установим, что эта функция имеет все производные и при $x = 0$. Из (6.33) и (6.36) следует, что

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{-\frac{1}{(\Delta x)^2}}}{\Delta x} = 0.$$

Предположим, что для некоторого натурального n величина производной $f^{(n)}(0) = 0$. Но тогда согласно (6.35) и (6.36) имеем

$$f^{(n+1)}(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f^{(n)}(0+\Delta x) - f^{(n)}(0)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^{(n)}}{(\Delta x)^{n+2k+1}} \right) e^{-\frac{1}{(\Delta x)^2}} = 0,$$

то есть у функции (6.33) имеются производные любого порядка при $x = 0$. Итак, установлено, что эта функция бесконечно дифференцируема, однако для неё

$$0 = f(0) = f'(0) = f''(0) = \cdots = f^{(n)}(0) = \cdots$$

и поэтому ряд Тейлора функции (6.33) состоит из одних нулей, то есть сходится везде, но к $f(x)$ лишь при $x = 0$.

6.4. Разложение функций e^x, $\cos x$, $\sin x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^\alpha$ в ряд Тейлора (Маклорена)

Существование неаналитических функций показывает, что для исследования возможности представления функции $f(x)$ (естественно, бесконечно дифференцируемой) её рядом Тейлора (6.31) становится необходимым изучать поведение остаточного члена $r_n(x,f)$ *формулы Тейлора*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k + r_n(x,f). \tag{6.37}$$

Ясно, что если $r_n(x,f) \to 0$ для некоторого x, то ряд Тейлора для этого x сходится к значению $f(x)$, если же остаточный член $r_n(x,f) \rightrightarrows r(x) \equiv 0$ на каком-то множестве X, то и ряд Тейлора $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, x^n \overset{X}{\rightrightarrows} f(x)$. Нам понадобятся следующие формы остаточного члена формулы (6.37):

- форма Лагранжа

$$r_n(x,f) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}\, x^{n+1}, \quad \theta = \theta_L \in (0,1); \tag{6.38}$$

- форма Коши

$$r_n(x,f) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{n!}(1-\theta)^n x^{n+1}, \quad \theta = \theta_C \in (0,1). \tag{6.39}$$

Теорема 6.11. Для всех $x \in (-\infty,+\infty)$ справедливо равенство

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\,, \tag{6.40}$$

причём для любого $A \in (0,+\infty)$ степенной ряд в (6.40) сходится равномерно к e^x на отрезке $[-A,A]$.

Доказательство. Так как для функции $f(x) = e^x$ и для любого $k = 0,1,2,\ldots$ производная $f^{(k)}(x) = e^x$ и, следовательно, $f^{(k)}(0) = 1$, то ряд (6.40) является рядом Тейлора (6.31) этой функции.

Для любого $A > 0$ остаточный член в форме Лагранжа (6.38) допускает оценку

$$|r_n(x, f)| \leqslant \frac{e^A A^{n+1}}{(n+1)!}, \quad x \in [-A, A].$$

Но предел $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{e^A A^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ как предел общего члена *сходящегося*, как нетрудно видеть, по признаку Даламбера знакоположительного числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{e^A A^{n+1}}{(n+1)!}$. Действительно, обозначая общий член этого ряда через $b_n = \dfrac{e^A A^{n+1}}{(n+1)!}$, имеем, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{b_{n+1}}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{e^A A^{n+2}(n+1)!}{(n+2)! e^A A^{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{A}{n+2} =$ $= 0 < 1$. Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, поэтому предел его общего члена $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$. Это означает, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \overset{[-A,A]}{\rightrightarrows} e^x. \tag{6.41}$$

Для всякого $x_0 \in (-\infty, +\infty)$ возьмём $A > |x_0|$ и получим, согласно (6.41), что $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x_0^n}{n!} = e^{x_0}$. Теорема доказана.

Т е о р е м а 6.12. Для всех $x \in (-\infty, +\infty)$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} \sin x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \\ \cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \end{aligned} \tag{6.42}$$

причём для любого $A \in (0, +\infty)$ степенные ряды в (6.42) сходятся равномерно к соответствующим функциям на отрезке $[-A, A]$.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству предыдущей теоремы и поэтому *не приводится.*

Теорема 6.13. Во всех точках сходимости ряда (6.7) (то есть при $x \in (-1, 1]$) справедливо равенство

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, \quad -1 < x \leqslant 1. \tag{6.43}$$

Доказательство. Последовательно вычисляя производные для $f(x) = \ln(1+x)$, имеем

$$\begin{gathered} f^{(0)}(x) = \ln(1+x), \; f'(x) = \frac{1}{1+x}, \; f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}, \quad f^{(n+1)}(x) = \frac{(-1)^n \, n!}{(1+x)^{n+1}}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{gathered} \tag{6.44}$$

Отсюда, в частности, видно, что ряд (6.7) (или, другими словами, ряд в (6.43)) является рядом Тейлора (6.31) функции $f(x) = \ln(1+x)$.

Пусть $x \in (-1, 1)$. Тогда из (6.39) и (6.44) следует, что остаточный член в форме Коши

$$r_n(x, f) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{n!}(1-\theta)^n x^{n+1} = \frac{(-1)^n \, n!}{(1+\theta x)^{n+1}}(1-\theta)^n x^{n+1}$$

допускает оценку

$$|r_n(x, f)| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{1-|x|} \cdot \left| \frac{1-\theta}{1+\theta x} \right|^n \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{1-|x|},$$

и, следовательно, стремится к нулю при $n \to \infty$. Таким образом,

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, \quad -1 < x < 1. \tag{6.45}$$

то есть равенство (6.43) справедливо при $x \in (-1, 1)$. Но ряд в (6.45) сходится и при $x = 1$. Согласно второй теореме Абеля (теореме 6.8), устремляя в (6.45) переменную x к $1-0$, получаем, что равенство (6.43) справедливо и при $x = 1$. Теорема доказана.

Поскольку равенство (6.43) при $x = 1$ принимает вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \ln 2,$$

то тем самым с помощью разложения в ряд Тейлора (6.31) функции $f(x) = \ln(1+x)$ можно найти сумму знакочередующегося числового *ряда Лейбница*. (Величина этой суммы получена ранее: см. (3.8).)

Теорема 6.14. Во всех точках сходимости ряда (6.8) справедливо равенство

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha - n + 1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n} x^n. \tag{6.46}$$

Доказательство. Последовательно вычисляя производные для $f(x) = (1+x)^{\alpha}$, имеем

$$\begin{gathered} f^{(0)}(x) = (1+x)^{\alpha}, \quad f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}, \\ f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f^{(n)}(x) = \alpha \cdot (\alpha-1) \cdot \ldots \cdot (\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}, \\ f^{(n+1)}(x) = \alpha \cdot (\alpha-1) \cdot \ldots \cdot (\alpha-n)(1+x)^{\alpha-n-1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{gathered} \tag{6.47}$$

Отсюда, в частности, видно, что ряд (6.8) (или, другими словами, ряд в (6.46)) является рядом Тейлора (6.31) функции $f(x) = (1+x)^\alpha$.

Пусть $\alpha \in \mathbb{N}_0$. Тогда, как отмечалось на с. 125 и 128, ряд (6.8) становится *конечной* суммой. Нетрудно видеть, что эта сумма является представлением функции $f(x) = (1+x)^\alpha$ по формуле бинома Ньютона.

Пусть $\alpha \notin \mathbb{N}_0$ и $x \in (-1, 1)$. Тогда из (6.39) и (6.47) следует, что остаточный член в форме Коши

$$r_n(x, f) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{n!}(1-\theta)^n x^{n+1} =$$
$$= \frac{\alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha - n)(1+\theta x)^{\alpha-n-1}}{n!}(1-\theta)^n x^{n+1}$$

можно записать в виде

$$\begin{gathered} r_n(x, f) = \frac{(\alpha-1)\cdot(\alpha-2)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n)}{n!}\, x^n \times \\ \times \alpha x (1+\theta x)^{\alpha-1} \times \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n. \end{gathered} \tag{6.48}$$

Рассмотрим поочерёдно все три сомножителя (отделённые друг от друга знаком "$\times$") в представлении (6.48) остаточного члена $r_n(x, f)$.

Первый сомножитель в представлении остаточного члена, то есть

$$\frac{(\alpha-1)\cdot(\alpha-1-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-1-n+1)}{n!}\, x^n,$$

является общим членом ряда (6.8), построенного для значения параметра $\alpha - 1$. Так как этот ряд сходится для любого $x \in (-1, 1)$, то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\alpha-1)\cdot(\alpha-2)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n)}{n!}\, x^n = 0. \tag{6.49}$$

Второй сомножитель, то есть $\alpha x(1+\theta x)^{\alpha-1}$, как нетрудно видеть, при любом $x \in (-1, 1)$ допускает оценку

$$
\begin{aligned}
&|\alpha x(1+\theta x)^{\alpha-1}| \leqslant \alpha \cdot 2^{\alpha}, && \alpha > 0, \\
&|\alpha x(1+\theta x)^{\alpha-1}| \leqslant \frac{|\alpha|}{(1-|x|)^{|\alpha|+1}}, && \alpha < 0.
\end{aligned} \tag{6.50}
$$

Эта оценка не зависит от n (хотя число θ *зависит* от n).

Третий сомножитель, то есть $\left(\dfrac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n$, так же, как при доказательстве предыдущей теоремы, при всех $x \in (-1, 1)$ допускает оценку

$$
\left|\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right|^n \leqslant 1, \tag{6.51}
$$

тоже не зависящую от n.

Из (6.49), (6.50) и (6.51) следует, что

$$
\lim_{n\to\infty} r_n(x, f) = 0, \quad -1 < x < 1,
$$

то есть

$$
(1+x)^{\alpha} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha \cdot (\alpha-1) \cdot \ldots \cdot (\alpha-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n} x^n, \ |x| < 1. \tag{6.52}
$$

Это означает, что равенство (6.46) справедливо для всех значений $x \in (-1, 1)$. Если ряд (6.8) сходится при $x = -1$ или $x = 1$ (условия сходимости ряда (6.8) при $x = \pm 1$ приведены на с. 129), то, переходя в равенстве (6.52) к пределу при $x \to -1 + 0$ или $x \to 1 - 0$ (нетрудно видеть, что функция $(1 + x)^{\alpha}$ допускает такой предельный переход) и применяя вторую теорему Абеля, получаем, что равенство (6.46) справедливо и при предельном значении x, входящем в множество сходимости ряда (6.8). Теорема доказана.

6.5. Вопросы для повторения и самостоятельной работы

1. Установить, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$.

2. Рассмотреть в теоремах 6.6, 6.7 и 6.8 *левую* половину интервала сходимости.

3. Доказать теорему 6.10.

4. Доказать теорему 6.12.

5. Установить сходимость и найти сумму числового ряда

$$1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \ldots .$$

ЧАСТЬ III

Линейные нормированные и евклидовы пространства. Ряды Фурье

7. Линейные нормированные пространства

7.1. Определение и примеры линейных пространств

Напомним, что множество $\mathbb{L}$ элементов любой природы, в котором определены операции сложения и умножения на числа[1], называется *линейным пространством*, если эти операции удовлетворяют следующим свойствам.

1. Для любых $x \in \mathbb{L}$, $y \in \mathbb{L}$ справедливо равенство
$$x + y = y + x.$$

2. Для любых $x \in \mathbb{L}$, $y \in \mathbb{L}$, $z \in \mathbb{L}$ справедливо равенство
$$(x + y) + z = x + (y + z).$$

3. Существует элемент $\Theta \in \mathbb{L}$ такой, что для всякого элемента $x \in \mathbb{L}$ справедливо равенство
$$x + \Theta = x.$$

   Этот элемент называется *нулевым* или *нейтральным*.

[1] Точнее, определены сумма любых двух элементов $x, y \in \mathbb{L}$ (результат $x + y \in \mathbb{L}$) и произведение любого элемента α из некоторого поля $\mathcal{P}$ и любого элемента $x \in \mathbb{L}$ (результат $\alpha x = \alpha \cdot x \in \mathbb{L}$). Мы всегда будем в качестве поля $\mathcal{P}$ рассматривать поле *действительных* либо *комплексных* чисел и называть линейное пространство с умножением на вещественные числа *вещественным линейным пространством*, а пространство с умножением на комплексные числа – *комплексным линейным пространством*,

4. Для любого $x \in \mathbb{L}$ существует элемент $x' \in \mathbb{L}$ такой, что
$$x + x' = \Theta.$$
Этот элемент называется *противоположным* и обозначается $-x$. После его введения становится возможным определить операцию *вычитания* $x - y$ как операцию сложения элемента x с элементом $-y$, противоположным элементу y.

5. Для любых $x \in \mathbb{L}$, $y \in \mathbb{L}$ и любого числа α справедливо равенство
$$\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y.$$

6. Для любого $x \in \mathbb{L}$ и любых чисел α и β справедливо равенство
$$(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x.$$

7. Для любого $x \in \mathbb{L}$ и любых чисел α и β справедливо равенство
$$(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x).$$

8. Для любого $x \in \mathbb{L}$ справедливо равенство
$$1 \cdot x = x.$$

Рассмотрим некоторые п р и м е р ы линейных пространств. Из таких линейных пространств впоследствии будем строить примеры линейных нормированных и евклидовых пространств.

1. Рассмотрим множество Σ всех числовых рядов
$$a \equiv \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots . \tag{7.1}$$

Результатом умножения ряда (7.1) на число α назовём ряд

$$\alpha a = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n) = \alpha a_1 + \alpha a_2 + \cdots + \alpha a_n + \cdots , \quad (7.2)$$

а результатом сложения ряда (7.1) с рядом

$$b \equiv \sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n + \cdots \quad (7.3)$$

назовём ряд

$$c \equiv \sum_{n=1}^{\infty} c_n = c_1 + c_2 + \cdots + c_n + \cdots , \quad (7.4)$$

в котором

$$c_n = a_n + b_n, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Нетрудно видеть, что все свойства линейного пространства выполняются. В частности, нулевым элементом (нулевым рядом) в этом пространстве является ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0 + 0 + \cdots + 0 + \cdots . \quad (7.5)$$

Отметим кстати, что вопрос о *сходимости* рядов, принадлежащих пространству Σ, при этом вообще *не ставится*.

2. Рассмотрим множество $\mathcal{F}(\mathcal{X})$ всех функций одной переменной $f(x)$, определённых на некотором числовом множестве $\mathcal{X}$. Результатом сложения двух функций $f(x)$ и $g(x)$ из $\mathcal{F}(\mathcal{X})$ назовём функцию $h(x)$ такую, что $h(x) = f(x)+g(x)$

для всех $x \in \mathcal{X}$; а результатом умножения функции $f(x)$ на число α назовём функцию $\alpha f(x)$. И здесь легко проверить, что все свойства линейного пространства выполняются. В частности, нулевым элементом (нулевой функцией) в этом пространстве является функция $\Theta(x) \equiv 0$.

В дальнейшем, говоря о числовых рядах или функциях, определённых на множестве $\mathcal{X}$, будем понимать линейные пространства Σ или $\mathcal{F}(\mathcal{X})$ соответственно. В частности, будем рассматривать множество сходящихся (абсолютно сходящихся) числовых рядов или множество непрерывных (или кусочно-непрерывных) на каком-либо множестве (чаще всего на отрезке $[a, b]$) функций. Рассмотрим некоторые из этих функциональных линейных пространств, являющихся *частными случаями*, точнее, *подпространствами* линейного пространства $\mathcal{F}(\mathcal{X})$.

3. Линейное пространство $C[a, b]$, состоящее из функций $f(x)$, непрерывных на отрезке $[a, b]$, то есть непрерывных в каждой точке интервала (a, b), непрерывных справа при $x = a$ и непрерывных слева при $x = b$. Это действительно подпространство линейного пространства $\mathcal{F}(\mathcal{X})$, так как сумма двух непрерывных функций и произведение непрерывной функции на число являются непрерывными функциями, то есть результаты этих операций также принадлежат пространству $C[a, b]$.

4. Линейное пространство $C^*[a, b]$, состоящее из функций $f(x)$, непрерывных на отрезке $[a, b]$, и таких, что $f(b) = f(a)$. Оно также подпространство линейного пространства $\mathcal{F}(\mathcal{X})$, ибо, помимо уже упоминавшегося в предыдущем примере сохранения непрерывности, равенство $f(b) = f(a)$ также сохраняется и при линейных операциях. Нетрудно видеть, что пространство $C^*[a, b]$ является ещё и подпространством линейного пространства $C[a, b]$.

5. Линейное пространство $Q_0[a,b]$, состоящее из осреднённых кусочно-непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций $f(x)$, имеющих не более чем конечное число точек разрыва *первого рода*. Рассмотрим подробнее функцию $f(x) \in Q_0[a,b]$. Занумеруем точки разрыва функции $f(x)$ (вместе с концами a и b отрезка $[a,b]$) в порядке их возрастания:

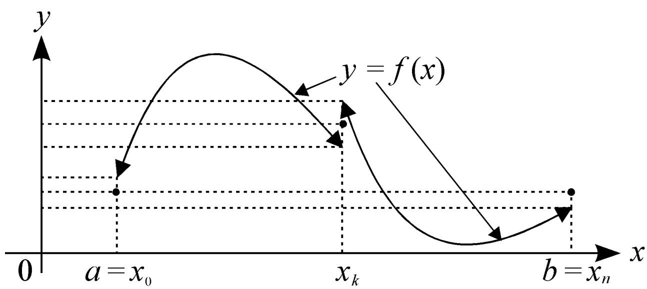
$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{7.6}$$

Функция $f(x)$ непрерывна на интервалах (x_{k-1}, x_k) при $k = 1, 2, \dots, n$; существуют (конечные) пределы

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = f(a+0), \qquad \lim_{x\to b-0} f(x) = f(b-0),$$
$$\lim_{x\to x_k\pm 0} f(x) = f(x_k \pm 0), \qquad k = 1, 2, \dots, n-1;$$

причём в точках разрыва и в концах отрезка значения функции осреднены:

$$\begin{gathered} f(a) = f(b) = \frac{f(a+0)+f(b-0)}{2}, \\ f(x_k) = \frac{f(x_k+0)+f(x_k-0)}{2}, \quad k = 1, 2, \dots, n-1. \end{gathered} \tag{7.7}$$



На представленном рисунке изображён эскиз графика функции $f(x) \in Q_0[a,b]$. Для простоты картины мы ограничились случаем *одной внутренней* точки разрыва x_k функции $f(x)$. Это пространство, как и рассмотренные ранее пространства $C[a,b]$ и $C^*[a,b]$, также является подпространством линейного пространства $\mathcal{F}(\mathcal{X})$. Действительно, умножение функции $f(x) \in Q_0[a,b]$ на $\alpha = 0$ приводит к непрерывной функции $\Theta(x) \equiv 0$, а умножение на $\alpha \neq 0$ приводит к функции $\alpha f(x)$, имеющей те же точки разрыва, что и функция $f(x)$ и осреднённой в точках разрыва. Сложение двух функций $f(x)$ и $g(x)$, принадлежащих $Q_0[a,b]$, тоже приводит к функции $h(x) = f(x) + g(x) \in Q_0[a,b]$. В самом деле, множество *внутренних* точек разрыва функции $h(x)$ является подмножеством объединения точек разрыва функций $f(x)$ и $g(x)$. Осреднение в точках разрыва сохраняется, так как

$$\varphi(\tilde{x}) = \frac{\varphi(\tilde{x}+0) + \varphi(\tilde{x}-0)}{2},$$

если точка $\tilde{x}$ – точка непрерывности функции $\varphi(x)$. Количество точек разрыва у функции $h(x)$ может быть меньше, чем в объединении точек разрыва функций $f(x)$ и $g(x)$, например, если $g(x) = -f(x)$, то $h(x) = \Theta(x)$. Отметим в заключение, что пространство $Q_0[a,b]$ содержит в себе в качестве подпространства рассмотренное в предыдущем примере пространство $C^*[a,b]$.

При изучении линейных пространств в курсе линейной алгебры важную роль играют понятия размерности, базиса, линейной зависимости и независимости. Здесь, как видно из примеров, мы будем заниматься изучением *бесконечномерных* пространств, то есть таких линейных пространств, в которых для *любого* натурального n можно найти n линейно независимых элементов. Понятие базиса бесконечномерного пространства будет введено ниже (см. с. 168), после введения понятий нормы и сходимости, а вот понятие линейной независимости можно дать уже сейчас, причём в более общем виде, чем обычно рассматривается в курсе линейной алгебры. Там оно рассматривается лишь для систем, состоящих из *конечного* числа элементов. Мы же будем рассматривать системы, состоящие из *бесконечного* числа элементов, причём не обязательно даже из *счётного* числа элементов; количество элементов системы может быть множеством любой мощности, например, их может быть столько, сколько точек на интервале, отрезке (*континуум*), более мощное, чем континуум, и так далее.

Система $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\mathrm{A}}$, состоящая из элементов $x_\alpha \in \mathbb{L}$ (A – множество любой мощности), называется *линейно независимой системой* в линейном пространстве $\mathbb{L}$, если для любого натурального n для любой подсистемы n элементов $\{x_{\alpha_k}\}_{k=1}^{n} \subset \{x_\alpha\}_{\alpha\in\mathrm{A}}$ и любого набора n чисел $\{\lambda_k\}_{k=1}^{n}$ таких, что $\sum\limits_{k=1}^{n} |\lambda_k| > 0$ линейная комбинация $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k x_{\alpha_k} \neq \Theta$.

Введённое сейчас обобщение понятия линейной независимой системы, состоящей из *любого* числа элементов, как нетрудно видеть, состоит в следующем. Выбираем из системы $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\mathrm{A}}$ любую *конечную* подсистему $\{x_{\alpha_k}\}_{k=1}^{n}$. Исходная система называется линейно независимой, если её *любая* конечная подсистема линейно независима в том смысле, в каком ранее вводилось понятие линейно независимой системы, состоящей из конечного числа элементов.

7.2. Определение и примеры линейных нормированных пространств

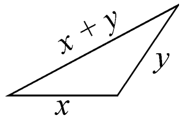
Линейное пространство $\mathbb{X}$ называется *линейным нормированным пространством*, если для всякого элемента $x\in\mathbb{X}$ определено число $\|x\|$, называемое *нормой* x и удовлетворяющее следующим свойствам.

1. Для всякого $x \in \mathbb{X}$ норма $\|x\| \geqslant 0$, причём $\|x\| = 0$ тогда и только тогда, когда $x = \Theta$.

   Напомним, что Θ – нулевой элемент пространства $\mathbb{X}$.

2. Для любого $x \in \mathbb{X}$ и любого числа α справедливо равенство
$$\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|.$$

3. Для любых $x \in \mathbb{X}$, $y \in \mathbb{X}$ справедливо неравенство
$$\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|.$$



Последнее неравенство называется "неравенством треугольника". Если считать элементы пространства $\mathbb{X}$ векторами, а под $\|x\|$ понимать длину этого вектора, то неравенство треугольника означает, что длина любой стороны треугольника не превосходит суммы длин двух других сторон.

Рассмотрим некоторые п р и м е р ы линейных нормированных пространств.

1. Множество l_1 всех абсолютно сходящихся числовых рядов, то есть рядов вида (7.1) и таких, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сходится. Установим вначале, что это линейное пространство, другими словами, линейное подпространство линейного пространства Σ. Для этого достаточно установить, что произведение абсолютно сходящегося ряда на число и сумма двух абсолютно сходящихся рядов являются абсолютно сходящимися рядами. Действительно, из абсолютной сходимости ряда (7.1) вытекает абсолютная сходимость ряда (7.2), так как постоянный множитель $|\alpha|$ можно выносить за знак суммы сходящегося ряда (см. теорему 1.1). Далее, из абсолютной сходимости рядов (7.1), (7.3) и того, что $|c_n| =$

$= |a_n + b_n| \leqslant |a_n| + |b_n|$ вытекает абсолютная сходимость ряда (7.4) по признаку сравнения знакоположительных рядов (см. теорему 2.2). Итак, l_1 – линейное пространство. Введём в нём норму по формуле

$$\|a\|_1 \equiv \Big\|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\Big\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|. \tag{7.8}$$

Проверим, что формула (7.8) задаёт норму. В самом деле, для всякого $a \equiv \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \in l_1$ это число определено, неотрицательно и обращается в нуль лишь для нулевого ряда (7.5). Далее, для любого ряда $a \in l_1$ и любого числа α имеем

$$\|\alpha a\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha a_n| = |\alpha| \cdot \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |\alpha| \cdot \|a\|_1.$$

Наконец, для любых двух рядов $a \in l_1$, $b \in l_1$ справедливо неравенство

$$\|a+b\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n + b_n| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| + \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| = \|a\|_1 + \|b\|_1.$$

Таким образом, линейное пространство l_1 абсолютно сходящихся числовых рядов с нормой, задаваемой формулой (7.8), является линейным нормированным пространством.

2. Линейное нормированное пространство

$$\mathbb{C}[a,b] \equiv \{f(x) \in C[a,b]\}, \quad \|f\|_C = \max_{x \in [a,b]} |f(x)|. \tag{7.9}$$

Убедимся, что последнее равенство удовлетворяет всем трём свойствам нормы и превращает тем самым линейное пространство $C[a,b]$ в линейное нормированное пространство

$\mathbb{C}[a,b]$. Действительно, $|f(x)|$ – неотрицательная непрерывная функция, следовательно, на отрезке $[a,b]$ она ограничена сверху и достигает своей точной верхней грани (неотрицательной). Если же $\|f\|_C = \max\limits_{x\in[a,b]} |f(x)| = 0$, то для каждого $x \in [a,b]$ значение $|f(x)| = 0$, поэтому $f(x) = \Theta(x)$. Далее, для любой функции $f(x) \in \mathbb{C}[a,b]$ и любого числа α имеем

$$\|\alpha f\|_C = \max_{x\in[a,b]} |\alpha f(x)| = |\alpha| \cdot \max_{x\in[a,b]} |f(x)| = |\alpha| \cdot \|f\|_C.$$

И наконец, для любых двух функций $f(x)$ и $g(x)$ из $\mathbb{C}[a,b]$ справедливо неравенство

$$\|f+g\|_C = \max_{x\in[a,b]} |f(x)+g(x)| \leqslant \max_{x\in[a,b]} \big(|f(x)| + |g(x)|\big) \leqslant \\ \leqslant \max_{x\in[a,b]} |f(x)| + \max_{x\in[a,b]} |g(x)| = \|f\|_C + \|g\|_C.$$

Итак, $\mathbb{C}[a,b]$ – линейное нормированное пространство.

3. Линейное нормированное пространство

$$\mathbb{C}^*[a,b] \equiv \{f(x) \in C^*[a,b]\}, \quad \|f\|_C = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|. \qquad (7.10)$$

Убедиться в выполнении всех свойств нормы можно точно так же, как и в предыдущем примере. Однако если заметить, что поскольку, как уже отмечалось ранее, линейное пространство $C^*[a,b]$ является подпространством линейного пространства $C[a,b]$ и норма задаётся *той же формулой*, то тем самым $\mathbb{C}^*[a,b]$ является подпространством линейного *нормированного* пространства $\mathbb{C}[a,b]$, то есть $\mathbb{C}^*[a,b]$ – линейное нормированное пространство.

4. Линейное нормированное пространство

$$\mathbb{Q}_0[a,b] \equiv \{f(x) \in Q_0[a,b]\}, \quad \|f\|_Q = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|. \qquad (7.11)$$

Убедимся, что и здесь выполняются все свойства нормы. Действительно, $|f(x)|$ – неотрицательная кусочно-непрерывная функция с точками разрыва только первого рода, следовательно, на отрезке $[a, b]$ она ограничена сверху, то есть её точная верхняя грань неотрицательна. Если же $\|f\|_Q = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x)| = 0$, то для каждого $x \in [a, b]$ значение $|f(x)| = 0$, поэтому $f(x) = \Theta(x)$. Два других свойства нормы проверяются так же, как и во втором примере (пространство $\mathbb{C}[a, b]$) с естественной заменой символа max на символ sup. Следовательно, $\mathbb{Q}_0[a, b]$ – линейное нормированное пространство.

5. Линейное нормированное пространство

$$\mathbb{CL}_1[a, b] \equiv \{f(x) \in C[a, b]\}, \quad \|f\|_1 = \int\limits_a^b |f(x)|\,dx.$$

Проверим выполнение всех свойствам нормы. Действительно, $|f(x)|$ – неотрицательная непрерывная функция, следовательно, на отрезке $[a, b]$ она интегрируема и величина $\|f\|_1 \geqslant 0$. Если же $\|f\|_1 = \int\limits_a^b |f(x)|\,dx = 0$, то по хорошо известному свойству интегралов от неотрицательных *непрерывных* функций из равенства нулю интеграла от такой функции вытекает равенство нулю значения этой функции в каждой точке отрезка интегрирования, то есть $f(x) = \Theta(x)$. Далее, для любой функции $f(x) \in \mathbb{CL}_1[a, b]$ и любого числа α имеем

$$\|\alpha f\|_1 = \int\limits_a^b |\alpha f(x)|\,dx = |\alpha| \cdot \int\limits_a^b |f(x)|\,dx = |\alpha| \cdot \|f\|_1.$$

Наконец, для любых двух функций $f(x)$ и $g(x)$ из $\mathbb{C}\mathbb{L}_1[a,b]$ справедливо неравенство

$$\|f+g\|_1 = \int\limits_a^b |f(x)+g(x)|\,dx \leqslant \int\limits_a^b \bigl(|f(x)|+|g(x)|\bigr)dx =$$
$$= \int\limits_a^b |f(x)|\,dx + \int\limits_a^b |g(x)|\,dx = \|f\|_1 + \|g\|_1.$$

Итак, $\mathbb{C}\mathbb{L}_1[a,b]$ – линейное нормированное пространство.

6. Линейное нормированное пространство

$$\mathbb{C}^*\mathbb{L}_1[a,b] \equiv \{f(x) \in C^*[a,b]\}, \quad \|f\|_1 = \int\limits_a^b |f(x)|\,dx.$$

В этом примере в выполнении свойств нормы проще всего убедиться (так же, как и в третьем примере), сославшись на то, что линейное пространство $C^*[a,b]$ является подпространством линейного пространства $C[a,b]$ и норма задаётся *той же формулой*, что и в предыдущем примере.

7. Линейное нормированное пространство

$$\mathbb{Q}_0\mathbb{L}_1[a,b] \equiv \{f(x) \in Q_0[a,b]\}, \quad \|f\|_1 = \int\limits_a^b |f(x)|\,dx.$$

Здесь $|f(x)|$ – неотрицательная кусочно-непрерывная функция с точками разрыва только первого рода, следовательно, на отрезке $[a,b]$ она интегрируема и величина $\|f\|_1 \geqslant 0$. Пусть $\|f\|_1 = \int\limits_a^b |f(x)|\,dx = 0$. По аддитивному свойству интегралов $0 = \int\limits_a^b |f(x)|\,dx = \sum\limits_{k=1}^{n} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} |f(x)|\,dx$, где $a = x_0 < < x_1 < \dots < x_n = b$ – точки разрыва функции $f(x)$, включая концы отрезка $[a,b]$ (см. (7.6)). Но тогда

$$\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} |f(x)|\,dx = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

После изменения в точках x_{k-1} и x_k функцию $|f(x)|$ можно сделать *неотрицательной непрерывной* функцией, для которой, как известно, из равенства нулю интеграла по отрезку $[x_{k-1}, x_k]$ вытекает равенство нулю в каждой точке этого отрезка. Следовательно, для *неизменённой* функции имеем

$$f(x) = 0, \quad x \in (x_{k-1}, x_k), \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{7.12}$$

Так как функция $f(x)$ *осреднена* в точках $\{x_k\}_{k=0}^{n}$, то из (7.7) и (7.12) вытекает, что

$$f(x_k) = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, n. \tag{7.13}$$

Поэтому из (7.12) и (7.13) находим, что из равенства $\|f\|_1 = 0$ следует равенство $f(x) = \Theta(x) \equiv 0$. Тем самым первое свойство нормы установлено. Второе и третье свойства нормы проверяются так же, как и в пятом примере (пространство $\mathbb{C}\mathbb{L}_1[a, b]$). Итак, $\mathbb{Q}_0\mathbb{L}_1[a, b]$ – линейное нормированное пространство.

Сравнение примеров 2 и 5, а также 3 и 6, 4 и 7 показывает, что из *одного и того же* линейного пространства ($C[a, b]$, $C^*[a, b]$, $Q_0[a, b]$), вводя разные нормы, можно получить *разные* линейные *нормированные* пространства.

Наряду с линейным нормированным пространством l_1 абсолютно сходящихся числовых рядов (пример 1), изучаются и другие пространства рядов. Так, для всякого $p > 0$ можно рассмотреть множество l_p рядов вида (7.1) и таких, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|^p$ сходится. Это – *линейное пространство*[1].

[1]Точнее, l_p – *линейное подпространство* введённого на с. 149–150 линейного пространства Σ. Этот факт вовсе не самоочевиден. Наиболее сложным при его установлении является доказательство *замкну-*

Если ввести в этом линейном пространстве норму по формуле

$$\|a\|_p \equiv \Big\|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\Big\|_p = \Big(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p\Big)^{\frac{1}{p}}, \qquad (7.14)$$

то можно установить, что при $p \geqslant 1$ все свойства нормы выполняются и тем самым все l_p при этих p являются линейными нормированными пространствами; а при $0 < p < 1$ не выполняется неравенство треугольника и, стало быть, l_p при таких p уже не являются линейными нормированными пространствами. Кстати сказать, установление неравенства треугольника для нормы, задаваемой формулой (7.14) при $p > 1$ – наиболее трудоёмкая операция, и поэтому здесь мы не будем этого делать.

Также можно попытаться в линейных пространствах $C[a, b]$, $C^*[a, b]$ и $Q_0[a, b]$ ввести норму по формуле

$$\|f\|_p = \Big(\int_a^b |f(x)|^p\, dx\Big)^{\frac{1}{p}}, \quad p > 0 \qquad (7.15)$$

и получить соответственно пока ещё *только линейные* пространства $\mathbb{CL}_p[a, b]$, $\mathbb{C}^*\mathbb{L}_p[a, b]$ и $\mathbb{Q}_0\mathbb{L}_p[a, b]$. И здесь лишь при $p \geqslant 1$ формула (7.15) удовлетворяет всем свойствам нормы, и, следовательно, пространства $\mathbb{CL}_p[a,b]$, $\mathbb{C}^*\mathbb{L}_p[a,b]$ и $\mathbb{Q}_0\mathbb{L}_p[a,b]$ при этих p являются линейными *нормированными* пространствами; а при $0 < p < 1$ не выполняется неравенство треугольника, которое, опять же, при $p > 1$ труднее всего установить. В следующем разделе, который посвящён евклидовым пространствам, будет рассмотрен случай $p = 2$ (см. про-

---

тости операции сложения: из сходимости рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|^p$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n|^p$ для некоторого $p > 0$ вывести сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n + b_n|^p$ для того же p.

странства (8.14) с нормой (8.17)), а все оставшиеся $p \in (1, 2)$ и $p \in (2, +\infty)$ мы рассматривать не будем.

7.3. Последовательности и ряды в линейных нормированных пространствах

Здесь мы начнём рассматривать последовательности

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \quad x_n \in \mathbb{X} \tag{7.16}$$

и ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \quad u_n \in \mathbb{X}, \tag{7.17}$$

состоящие из элементов x_n, u_n, принадлежащих некоторому линейному нормированному пространству $\mathbb{X}$.

Последовательности (7.16) и ряды (7.17) будем называть *последовательностями и рядами в* $\mathbb{X}$.

Разумеется, так же, как в случае числовых или функциональных последовательностей и рядов, номер начального элемента последовательности в $\mathbb{X}$ или начальное значение индекса суммирования ряда в $\mathbb{X}$ может быть как больше, так и меньше единицы.

Также мы рассмотрим некоторые другие понятия и вопросы, связанные с последовательностями и рядами в $\mathbb{X}$.

Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ в $\mathbb{X}$ называется *сходящейся*, если существует элемент $x \in \mathbb{X}$, что для всякого $\varepsilon > 0$ найдётся номер N, что для любого номера $n > N$ имеет место неравенство $\|x_n - x\| < \varepsilon$. Элемент x называется *пределом* последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ в $\mathbb{X}$.

Тот факт, что последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ в $\mathbb{X}$ сходится к своему пределу x обозначается так:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \quad \text{или} \quad \lim_{n\to\infty} x_n \overset{\mathbb{X}}{=} x. \tag{7.18}$$

Второе обозначение в (7.18) применяется в тех случаях, когда надо подчеркнуть, что сходимость последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ рассматривается именно по норме линейного нормированного пространства $\mathbb{X}$ (в одном и том же линейном пространстве можно вводить, как мы видели, разные нормы).

Для ряда (7.17) введём последовательность $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ *частичных сумм*:

$$S_1 = u_1, \quad S_2 = u_1 + u_2, \ \ldots, \ S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k, \ \ldots.$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ в $\mathbb{X}$ называется *сходящимся*, если последовательность $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ его частичных сумм сходится. При этом $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ называется *суммой* ряда.

То, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ в $\mathbb{X}$ сходится к своей сумме S обозначается так:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S \quad \text{или} \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n \overset{\mathbb{X}}{=} S. \tag{7.19}$$

Сходимость ряда в $\mathbb{X}$ определена, как и для числового ряда, через последовательность его частичных сумм. Ясно, что и в линейном нормированном пространстве $\mathbb{X}$ связь между рядами и последовательностями на самом деле двусторонняя: по всякой последовательности в $\mathbb{X}$ можно построить ряд, частичными суммами которого будут элементы данной последовательности. Для этого можно воспользоваться формулами (1.10) на с. 21. Поэтому в дальнейшем, если нами будут установлены некоторые свойства для последовательностей (рядов) в $\mathbb{X}$, то это свойство можно будет перенести и на ряды (последовательности).

Нам понадобится понятие *ограниченного множества* в линейном нормированном пространстве $\mathbb{X}$.

Множество $A \subset \mathbb{X}$ называется *ограниченным*, если найдётся такое число $M > 0$, что для всякого $x \in A$ норма $\|x\| \leqslant M$.

Дальнейшие свойства последовательностей (а значит, и рядов) в $\mathbb{X}$ мы установим в виде теорем. Как мы увидим, некоторые из этих теорем как по формулировке, так и способу доказательства будут очень похожи на теоремы о свойствах *числовых* последовательностей.

Теорема 7.1. Сходящаяся последовательность в $\mathbb{X}$ имеет *единственный* предел.

Доказательство. Предположим, что условие теоремы *не выполняется*. Пусть у последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ в $\mathbb{X}$ имеется более одного предела. Рассмотрим два из них: $x \in \mathbb{X}$, $y \in \mathbb{X}$, причём $x \neq y$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, то для всякого $\varepsilon > 0$ найдётся номер N_1, что для любого номера $n > N_1$ имеет место неравенство $\|x_n - x\| < \varepsilon$. Но так как $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = y$, то для всякого $\varepsilon > 0$ найдётся номер N_2, что для любого номера $n > N_2$ имеет место неравенство $\|x_n - y\| < \varepsilon$. Поскольку $x \neq y$, то $\|x - y\| > 0$. Поэтому для $\varepsilon = \dfrac{\|x-y\|}{2} > 0$ найдётся номер $N = \max\{N_1, N_2\}$, что

$$\|x_n - x\| < \frac{\|x-y\|}{2}, \quad \|x_n - y\| < \frac{\|x-y\|}{2} \tag{7.20}$$

для всех $n > N$. Возьмём какое-нибудь $n > N$. Используя свойства нормы и неравенства (7.20), имеем

$$\begin{gathered}\|x-y\| = \|x-x_n+x_n-y\| \leqslant \|x-x_n\| + \|x_n-y\| = \\ = \|x_n-x\| + \|x_n-y\| < \frac{\|x-y\|}{2} + \frac{\|x-y\|}{2} = \|x-y\|.\end{gathered}$$

Получили противоречие ($\|x-y\| < \|x-y\|$). Теорема доказана.

Т е о р е м а 7.2. Сходящаяся последовательность в $\mathbb{X}$ *ограничена.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть сходящаяся последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ в $\mathbb{X}$ имеет своим пределом элемент $x \in \mathbb{X}$, то есть для всякого $\varepsilon > 0$ найдётся номер N, что для любого номера $n > N$ имеет место неравенство $\|x_n - x\| < \varepsilon$. Найдём номер N для $\varepsilon = 1$ и рассмотрим число

$$M = \max\{\|x_1\|, \|x_2\|, \ldots, \|x_N\|, \|x\| + 1\}.$$

Установим, что M – верхняя грань норм $\|x_n\|$ *всех* членов последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$:

$$\|x_n\| \leqslant M, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{7.21}$$

Если $n = 1, 2, \ldots, N$, то неравенство (7.21) выполняется, так как $\|x_n\|$ находится среди чисел, максимум из которых определяет число M. Если же $n > N$, то в силу получения числа N для $\varepsilon = 1$ и неравенства треугольника следует, что

$$\|x_n\| = \|x + (x_n - x)\| \leqslant \|x\| + \|x_n - x\| < \|x\| + 1,$$

а число $\|x\| + 1$ также находится среди чисел, максимум из которых определяет число M. Итак, неравенство (7.21) верно для всех n. Теорема доказана.

Т е о р е м а 7.3. Пусть имеются две сходящиеся последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ в $\mathbb{X}$ и сходящаяся числовая последовательность $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$, причём

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = y, \quad \lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha. \tag{7.22}$$

Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Последовательности $\{x_n \pm y_n\}_{n=1}^{\infty}$ в $\mathbb{X}$ являются сходящимися, причём

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = x \pm y. \tag{7.23}$$

2. Последовательность $\{\alpha_n x_n\}_{n=1}^{\infty}$ в $\mathbb{X}$ является сходящейся, причём

$$\lim_{n\to\infty}(\alpha_n x_n) = \alpha x. \tag{7.24}$$

3. Числовая последовательность $\{\|x_n\|\}_{n=1}^{\infty}$ является сходящейся, причём

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n\| = \|x\|. \tag{7.25}$$

Доказательство. Докажем первое утверждение. Из первых двух равенств в (7.22) в силу определения предела вытекает, что для всякого $\varepsilon > 0$ найдутся такие номера N_1 и N_2, что

$$\|x_n - x\| < \frac{\varepsilon}{2} \ \text{ для всех } \ n > N_1,$$
$$\|y_n - y\| < \frac{\varepsilon}{2} \ \text{ для всех } \ n > N_2.$$

Но тогда отсюда следует, что для всякого $\varepsilon > 0$ найдётся такой номер $N = \max\{N_1, N_2\}$, что для всех $n > N$ нормы $\|(x_n \pm y_n) - (x \pm y)\| = \|(x_n - x) \pm (y_n - y)\| \leqslant \|x_n - x\| + \|y_n - y\| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, то есть равенства (7.23) справедливы, что и доказывает первое утверждение.

Докажем второе утверждение. Так как последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ в $\mathbb{X}$ является сходящейся, то по теореме 7.2 она ограничена, то есть найдётся $M > 0$, что

$$\|x_n\| \leqslant M \quad \text{для всех } n = 1, 2, \ldots .$$

Из первого и третьего равенств в (7.22) в силу определения предела вытекает, что для всякого $\varepsilon > 0$ найдутся такие номера N_1 и N_2, что

$$\|x_n - x\| < \frac{\varepsilon}{2(|\alpha|+1)} \quad \text{для всех} \;\; n > N_1,$$
$$|\alpha_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2M} \qquad\qquad \text{для всех} \;\; n > N_2.$$

Но тогда отсюда следует, что для всякого $\varepsilon > 0$ найдётся такой номер $N = \max\{N_1, N_2\}$, что для всех $n > N$ норма разности $\|\alpha_n x_n - \alpha x\| = \|\alpha_n x_n - \alpha x_n + \alpha x_n - \alpha x\| \leqslant \|\alpha_n x_n - -\alpha x_n\| + \|\alpha x_n - \alpha x\| = |\alpha_n - \alpha| \cdot \|x_n\| + |\alpha| \cdot \|x_n - x\| < < \frac{\varepsilon}{2M} \cdot M + |\alpha| \cdot \frac{\varepsilon}{2(|\alpha|+1)} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, то есть равенство (7.24) справедливо, что и доказывает второе утверждение.

Докажем третье утверждение. Согласно первому из равенств в (7.22) в силу определения предела вытекает, что для всякого $\varepsilon > 0$ найдётся такой номер N, что

$$\|x_n - x\| < \varepsilon \;\; \text{для всех} \;\; n > N. \tag{7.26}$$

Поскольку $\|x_n\| = \|x + (x_n - x)\| \leqslant \|x\| + \|x_n - x\|$, то

$$\|x_n\| - \|x\| \leqslant \|x_n - x\|, \tag{7.27}$$

а поскольку $\|x\| = \|x_n + (x - x_n)\| \leqslant \|x_n\| + \|x - x_n\|$, то

$$\|x\| - \|x_n\| \leqslant \|x_n - x\|. \tag{7.28}$$

Из (7.27) и (7.28) вытекает, что

$$\Big|\|x_n\| - \|x\|\Big| \leqslant \|x_n - x\|, \tag{7.29}$$

а из (7.26) и (7.29) получаем, что для всякого $\varepsilon > 0$ найдётся такой номер N, что $\Big|\|x_n\| - \|x\|\Big| \leqslant \|x_n - x\| < \varepsilon$ для всех

$n > N$. Это означает, что равенство (7.25) справедливо, что и доказывает третье утверждение. Теорема доказана.

Третье утверждение этой теоремы называется *непрерывностью нормы* в линейных нормированных пространствах.

Система $\{x_\alpha\}_{\alpha\in \mathrm{A}}$, состоящая из элементов $x_\alpha \in \mathbb{X}$, называется *замкнутой* системой в линейном нормированном пространстве $\mathbb{X}$, если для любого $x \in \mathbb{X}$ и любого $\varepsilon > 0$ найдутся натуральное n, подсистема n элементов $\{x_{\alpha_k}\}_{k=1}^{n} \subset$ $\subset \{x_\alpha\}_{\alpha\in \mathrm{A}}$ и набор n чисел $\{\lambda_k\}_{k=1}^{n}$ таких, что норма разности $\left\|x - \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k x_{\alpha_k}\right\| < \varepsilon$.

Таким образом, мы видим, что система называется замкнутой в $\mathbb{X}$, если любой $x \in \mathbb{X}$ с любой точностью $\varepsilon > 0$ можно приблизить линейной комбинацией элементов этой системы.

Замкнутая система в линейном нормированном пространстве, подобно линейно независимой системе в линейном пространстве, может содержать *любое* количество элементов (A – множество любой мощности).

Счётная система элементов $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$, состоящая из элементов $e_n \in \mathbb{X}$, называется *базисом* бесконечномерного линейного нормированного пространства $\mathbb{X}$, если для любого $x \in \mathbb{X}$ существуют и единственны числа $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ такие, что

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n.$$

Как мы видим, в отличие от замкнутой системы, *базис* линейного нормированного пространства состоит лишь из *счётного* числа элементов.

Теорема 7.4. Базис $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ линейного нормированного пространства $\mathbb{X}$ является линейно независимой системой этого пространства.

Доказательство. Предположим, что утверждение теоремы не выполняется, то есть в некотором бесконечномерном линейном нормированном пространстве $\mathbb{X}$ существует базис $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$, не являющийся линейно независимой системой. Это означает (пишем отрицание понятия линейно независимой системы, данное на с. 154, с некоторой естественной заменой символов), что найдутся натуральное N, подсистема N элементов $\{e_{\alpha_k}\}_{k=1}^{N} \subset \{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ и набор N чисел $\{\lambda_k\}_{k=1}^{N}$ (таких, что $\sum\limits_{k=1}^{N} |\lambda_k| > 0$), что линейная комбинация $\sum\limits_{k=1}^{N} \lambda_k e_{\alpha_k}$ элементов подсистемы $\{e_{\alpha_k}\}_{k=1}^{N}$ равна нулевому элементу Θ пространства $\mathbb{X}$:

$$\lambda_1 e_{\alpha_1} + \cdots + \lambda_k e_{\alpha_k} + \cdots + \lambda_N e_{\alpha_N} = \Theta. \tag{7.30}$$

Так как $\sum\limits_{k=1}^{N} |\lambda_k| > 0$, то найдётся хотя бы один номер k, где $1 \leqslant k \leqslant N$, что $\lambda_k \neq 0$. Но тогда из (7.30) вытекает

$$e_{\alpha_k} = -\frac{\lambda_1}{\lambda_k} e_{\alpha_1} - \ldots - \frac{\lambda_{k-1}}{\lambda_k} e_{\alpha_{k-1}} - \frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k} e_{\alpha_{k+1}} - \ldots - \frac{\lambda_N}{\lambda_k} e_{\alpha_N}. \tag{7.31}$$

С другой стороны,

$$e_{\alpha_k} = 0 \cdot e_1 + \cdots + 0 \cdot e_{\alpha_k - 1} + 1 \cdot e_{\alpha_k} + 0 \cdot e_{\alpha_k + 1} + \ldots. \tag{7.32}$$

Равенство (7.32) представляет из себя разложение элемента $e_{\alpha_k} \in \mathbb{X}$ в ряд по базису $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$. Этот ряд, очевидно, сходится к e_{α_k}, так как его частичные суммы, начиная с номера α_k, совпадают с e_{α_k}. Однако равенству (7.31) тоже можно придать вид ряда, представляющего из себя разложение элемента $e_{\alpha_k} \in \mathbb{X}$ в ряд по базису $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$. Для этого слагаемые в (7.31) надо записать в порядке возрастания индексов, а отсутствующие базисные элементы записать с нулевыми коэффициентами. Этот ряд также сходится к e_{α_k}, так как его частичные суммы, начиная с некоторого номера, а именно: с номера, равного

$$\max\{\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_N\},$$

совпадают с e_{α_k}. Но разложения (7.31) и (7.32) – *разные*, так как в (7.31) коэффициент при e_{α_k} равен нулю, а в (7.32) – единице. Получили противоречие (неединственность разложения). Теорема доказана.

7.4. Полные линейные нормированные (банаховы) пространства

Прежде чем говорить о полноте линейного нормированного пространства, введём хорошо известное для числовых последовательностей понятие фундаментальной последовательности.

Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ в $\mathbb{X}$ называется *фундаментальной*, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдётся номер N, что для любых номеров $n > N$, $m > N$ имеет место неравенство

$$\|x_n - x_m\| < \varepsilon. \tag{7.33}$$

Теорема 7.5. Сходящаяся последовательность в $\mathbb{X}$ фундаментальна.

Доказательство. Пусть сходящаяся последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ в $\mathbb{X}$ имеет своим пределом элемент $x \in \mathbb{X}$, то есть для всякого $\varepsilon > 0$ найдётся номер N, что для любого номера $n > N$ имеет место неравенство $\|x_n - x\| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Но тогда для любых номеров $n > N$, $m > N$ норма разности

$$\|x_n - x_m\| = \|x_n - x + x - x_m\| \leqslant \|x_n - x\| + \|x - x_m\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

то есть неравенство (7.33) выполняется. Теорема доказана.

Для *числовых* последовательностей, как мы знаем, фундаментальность *необходима и достаточна* для сходимости (критерий Коши). Для произвольного линейного нормированного пространства $\mathbb{X}$ по только что доказанной теореме 7.5 из сходимости последовательности вытекает её фундаментальность. Обратное, как мы увидим, верно не для всякого пространства. Поэтому введём новое понятие *полноты* пространства.

Линейное нормированное пространство $\mathbb{X}$ называется *полным*, если в нём *любая* фундаментальная последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится, то есть существует такой элемент $x \in \mathbb{X}$, что

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x, \quad \text{то есть} \quad \lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0.$$

Полные линейные нормированные пространства называются также *банаховыми* пространствами.

Теорема 7.6. Пространство абсолютно сходящихся рядов l_1 – полное пространство.

Доказательство. Рассмотрим произвольную фундаментальную последовательность $\{a^{(i)}\}_{i=1}^{\infty}$ в l_1 (номер члена последовательности, то есть i, пишется наверху в скобках, тогда как нижний индекс n без скобок – номер слагаемого в ряде). Фундаментальность означает, что для всякого $\varepsilon > 0$ найдётся номер N, что для любых номеров $i > N$, $j > N$ имеет место неравенство

$$\|a^{(i)} - a^{(j)}\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n^{(i)} - a_n^{(j)}| < \frac{\varepsilon}{2}\,. \qquad (7.34)$$

Отсюда, в частности, следует, что для любого натурального n для всякого $\varepsilon > 0$ найдётся номер N, что для любых номеров $i > N$, $j > N$ имеет место неравенство

$$|a_n^{(i)} - a_n^{(j)}| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

то есть для любого натурального n *числовая* последовательность $\left\{a_n^{(i)}\right\}_{i=1}^{\infty}$ фундаментальна, следовательно, существует предел

$$\lim_{i\to\infty} a_n^{(i)} = \tilde{a}_n, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Рассмотрим ряд

$$\tilde{a} \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_n.$$

Докажем, что $\tilde{a} \in l_1$ и $\tilde{a} = \lim\limits_{i\to\infty} a^{(i)}$. Переходя к пределу при $j \to \infty$ в неравенстве (7.34) получаем, что для всякого $\varepsilon > 0$ найдётся номер N, что для любого номера $i > N$ имеет место неравенство

$$\|a^{(i)} - \tilde{a}\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n^{(i)} - \tilde{a}_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда получаем, что ряд $a^{(i)} - \tilde{a} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left[a_n^{(i)} - \tilde{a}_n\right]$ сходится абсолютно, то есть $a^{(i)} - \tilde{a} \in l_1$, следовательно, $\tilde{a} = a^{(i)} - \left(a^{(i)} - \tilde{a}\right) \in l_1$ и для всякого $\varepsilon > 0$ найдётся номер N, что для любого номера $i > N$ имеет место неравенство $\|a^{(i)} - \tilde{a}\|_1 \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$, то есть существует предел $\lim\limits_{i\to\infty} a^{(i)} = \tilde{a}$. Итак, фундаментальная последовательность $\left\{a^{(i)}\right\}_{i=1}^{\infty}$ в l_1 сходится к пределу $\tilde{a} \in l_1$. Теорема доказана.

Если установить, что множества l_p $(p > 1)$, о которых упоминается на с. 161, – линейные нормированные пространства, то можно доказать, что эти пространства также являются полными.

Т е о р е м а 7.7. Пространство $\mathbb{C}[a, b]$ непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций – полное пространство.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим произвольную фундаментальную последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ в $\mathbb{C}[a, b]$, то есть такую функциональную последовательность непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, что для всякого $\varepsilon > 0$ найдётся номер N, что для любых номеров $n > N$, $m > N$ имеет место неравенство

$$\|f_n - f_m\|_C = \max_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2}\,. \tag{7.35}$$

Отсюда, в частности, следует, что для всякого $\varepsilon > 0$ найдётся номер N, что для любых номеров $n > N$, $m > N$ и любого $x \in [a, b]$ имеет место неравенство

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2}\,,$$

то есть функциональная последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет условиям теоремы 5.2 (критерий Коши равномерной сходимости функциональной последовательности). Поэтому она равномерно сходится на отрезке $[a, b]$ к функции $f(x)$, которая в силу теоремы 5.12 *непрерывна* на отрезке $[a, b]$. Итак,

$$f_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f(x) \in \mathbb{C}[a, b].$$

Переходя в (7.35) к пределу при $m \to \infty$ и пользуясь непрерывностью нормы (третье утверждение теоремы 7.3), получаем: для всякого $\varepsilon > 0$ найдётся номер N такой, что для любого номера $n > N$ имеет место неравенство

$$\|f_n - f\|_C \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

то есть последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ в $\mathbb{C}[a,b]$ сходится к пределу $f \in \mathbb{C}[a,b]$. Теорема доказана.

Следствие. Пространство $\mathbb{C}^*[a,b]$ – полное пространство.

Доказательство. Линейное нормированное пространство $\mathbb{C}^*[a,b]$ является подпространством *банахова* пространства $\mathbb{C}[a,b]$, следовательно, по только что доказанной теореме 7.7 любая фундаментальная последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ в $\mathbb{C}^*[a,b]$ сходится (причём равномерно) к некоторой функции $f(x) \in \mathbb{C}[a,b]$. Равенство $f(b) = f(a)$ сохраняется при предельном переходе. Поэтому $f(x) \in \mathbb{C}^*[a,b]$. Следствие доказано.

7.5. Сравнение различных видов сходимости

Остальные рассмотренные нами примеры линейных нормированных пространств, как мы увидим ниже (см. п. 7.6), являются примерами *неполных* пространств. Но прежде чем начать их рассматривать, то есть указывать фундаментальные последовательности, не сходящиеся в этих пространствах, сравним между собой различные виды сходимости функциональных последовательностей на отрезке $[a,b]$.

Итак, пусть имеется сходящаяся на $[a,b]$ функциональная последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$. В настоящем пособии мы рассматривали следующие виды её сходимости.

1. Равномерная сходимость, введённая на с. 88 (см. (5.6)):

$$f_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f(x). \tag{7.36}$$

Эта сходимость есть не что иное, как сходимость по норме пространств $\mathbb{C}[a,b]$, $\mathbb{C}^*[a,b]$ или $\mathbb{Q}_0[a,b]$. Действительно, пусть $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ – сходящаяся последовательность или в $\mathbb{C}[a,b]$, или в $\mathbb{C}^*[a,b]$, или в $\mathbb{Q}_0[a,b]$ к функции $f(x)$ из соответствующего пространства, то есть

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n - f\|_C = 0 \quad \text{или} \quad \lim_{n\to\infty}\|f_n - f\|_Q = 0.$$

Тогда из определения нормы в этих пространствах (7.9), (7.10), (7.11) и понятия сходимости вытекает, что если для всякого $\varepsilon > 0$ найдётся номер N, что для любого номера $n > N$ имеет место одно из неравенств

$$\max_{x\in[a,b]}|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \text{или} \quad \sup_{x\in[a,b]}|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Таким образом, для всякого $\varepsilon > 0$ найдётся номер N, что для любого номера $n > N$ и для всех $x \in [a,b]$ абсолютная величина $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. А это как раз и означает, что последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ равномерно на $[a,b]$ сходится к функции $f(x)$.

2. Поточечная сходимость, о которой упоминается на с. 87 (см. (5.3) и (5.4)):

$$f_n(x) \to f(x) \quad \text{для всех } x \in [a,b]. \tag{7.37}$$

Отметим, что в отличие от равномерной сходимости (7.36), которую, как мы сейчас видели, можно трактовать как сходимость по норме некоторых линейных нормированных пространств, поточечная сходимость (7.37) *не является* сходимостью по норме какого бы то ни было линейного нормированного пространства. Поскольку этот факт мы использовать не будем, то и не станем его обосновывать.

3. Сходимость в смысле $\mathbb{L}_p$ $(p > 0)$. Функция $f(x)$ называется *пределом в смысле* $\mathbb{L}_p$ функциональной последовательности $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ на отрезке $[a, b]$, если

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0, \tag{7.38}$$

или, согласно (7.15),

$$\lim_{n\to\infty} \Bigl(\int\limits_a^b |f_n(x) - f(x)|^p \, dx \Bigr)^{\frac{1}{p}} = 0.$$

Такая сходимость, естественно, является сходимостью по норме пространств $\mathbb{CL}_p[a, b]$, $\mathbb{C}^*\mathbb{L}_p[a, b]$ или $\mathbb{Q}_0\mathbb{L}_p[a, b]$. Эти пространства упомянуты на с. 161, где также сказано, что в следующем разделе будут введены пространства $\mathbb{CL}_2[a, b]$, $\mathbb{C}^*\mathbb{L}_2[a,b]$ и $\mathbb{Q}_0\mathbb{L}_2[a,b]$ (см. пространства (8.14) с нормой (8.17)). Таким образом, можно по крайней мере считать, что число p равняется 1 или 2. Если же всё-таки установить (хотя это и не очень просто), что формула (7.15) задаёт норму в этих пространствах при всех $p \geqslant 1$, а не только при $p = 1$ или $p = 2$, то последующие выкладки этого пункта справедливы и для указанных p.

Выясним, как связаны между собой эти виды сходимости. Мы уже знаем, что из равномерной сходимости вытекает поточечная (п. 5.2, с. 88). Установим, что из равномерной сходимости вытекает сходимость в смысле $\mathbb{L}_p$. Действительно, пусть функциональная последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ равномерно сходится к функции $f(x)$ на $[a, b]$, то есть для любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер N, что для всех номеров $n > N$ и для всех $x \in [a, b]$ абсолютная величина $|f_n(x) - f(x)| <$ $< \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)^{\frac{1}{p}}}$. Это означает, что для тех же самых номеров

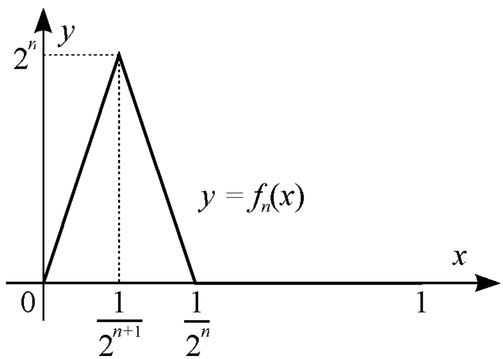
$$\|f_n - f\|_p^p = \int\limits_a^b |f_n(x) - f(x)|^p\,dx \leqslant \frac{\varepsilon^p}{2^p(b-a)}(b-a) < \varepsilon^p,$$

то есть $\|f_n - f\|_p < \varepsilon$. Следовательно, имеет место равенство (7.38), из которого следует, что функциональная последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится в смысле $\mathbb{L}_p$ к функции $f(x)$ на $[a, b]$.

Иных связей между равномерной сходимостью (7.36), поточечной сходимостью (7.37) и сходимостью (7.38) в смысле $\mathbb{L}_p$ *не имеется*, в чём мы сейчас убедимся, рассмотрев примеры функциональных последовательностей, сходящихся поточечно, но не являющихся сходящимися равномерно и в смысле $\mathbb{L}_p$; а также функциональных последовательностей, сходящихся в смысле $\mathbb{L}_p$, но не являющихся сходящимися ни равномерно, ни поточечно.

Рассмотрим на отрезке $[a, b] \equiv [0, 1]$ функциональную последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$:

$$f_n(x) = \begin{cases} 2^{2n+1}x, & 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{2^{n+1}}, \\ 2^{2n+1}(1-2^n)x, & \dfrac{1}{2^{n+1}} \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{2^n}, \\ 0, & \dfrac{1}{2^n} \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$



Установим, что поточечным пределом функциональной последовательности $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ на отрезке $[0,1]$ является функция $f(x) \equiv 0$. Для этого убедимся, что при всяком $x \in [0,1]$ предел
$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0. \tag{7.39}$$
В самом деле, при любом n значение $f_n(0) = 0$, а если $0 < < x \leqslant 1$, то, начиная с некоторого n (когда $\dfrac{1}{2^n}$ станет меньше, чем x), значение $f_n(x) = 0$, поэтому (7.39) справедливо. Итак, функциональная последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ на $[0,1]$ поточечно сходится к функции $f(x) \equiv 0$. Так как $\sup\limits_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = 2^n$, а 2^n при $n \to \infty$ стремится к $+\infty$, а не к 0, то, согласно теореме 5.1 (критерий равномерной сходимости функциональной последовательности), $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *не является* равномерно сходящейся на $[0,1]$.

Эта же функциональная последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *не является* сходящейся в смысле $\mathbb{L}_p$ на $[0,1]$ ни для какого $p \geqslant 1$. Действительно, если бы она сходилась в смысле $\mathbb{L}_p$ на $[0,1]$ для некоторого $p \geqslant 1$ в каком-нибудь из пространств: $\mathbb{CL}_p[a,b]$, $\mathbb{C}^*\mathbb{L}_p[a,b]$ или $\mathbb{Q}_0\mathbb{L}_p[a,b]$ (в каком – неважно, так как любой член последовательности $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ принадлежит всем трём пространствам). Но тогда по теореме 7.5 она была бы фундаментальной. Убедимся, что это не так. Возьмём $\varepsilon = \dfrac{1}{2(p+1)} > 0$ и для любого номера N укажем номера $n = N+1$ и $m = n+1$ (ясно, что $n > N$ и $m > N$). Имеем $\|f_n - f_m\|_p^p = \int\limits_0^1 |f_n(x) - f_m(x)|^p\,dx \geqslant \int\limits_{\frac{1}{2^{n+1}}}^{\frac{1}{2^n}} |f_n(x)|^p\,dx =$
$= \int\limits_{\frac{1}{2^{n+1}}}^{\frac{1}{2^n}} \left|2^{2n+1}(1-2^n)x\right|^p dx = \Big($делаем замену переменной $x =$

$= \dfrac{1}{2^n} - t\Big) = \int\limits_0^{\frac{1}{2^{n+1}}} \left|2^{2n+1}t\right|^p dt = \dfrac{2^{n(p-1)-1}}{p+1} \geqslant \dfrac{1}{2(p+1)} = \varepsilon$, откуда вытекает отсутствие фундаментальности, а значит, и сходимости в смысле $\mathbb{L}_p$ функциональной последовательности $\big\{f_n(x)\big\}_{n=1}^{\infty}$.

Чтобы убедиться в том, что из сходимости в смысле $\mathbb{L}_p$ не вытекает, вообще говоря, ни равномерной, ни даже поточечной сходимости, рассмотрим на отрезке $[a,b] \equiv [-1,1]$ функциональную последовательность $\big\{f_n(x)\big\}_{n=1}^{\infty}$:

$$f_n(x) = n^{\frac{1}{2p}} \cdot e^{-\frac{n^2x^2}{p}}, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(0) = \lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{1}{2p}} = +\infty$, то это означает, что у рассматриваемой последовательности на $[-1,1]$ нет ни поточечной, ни тем более равномерной сходимости. Однако эта последовательность сходится в смысле $\mathbb{L}_p$ к функции $f(x) \equiv 0$. В самом деле, $\|f_n - f\|_p^p = \int\limits_{-1}^{1} |f_n(x) - f(x)|^p\,dx =$
$= \int\limits_{-1}^{1} |f_n(x)|^p\,dx = \int\limits_{-1}^{1} \sqrt{n}\,e^{-n^2x^2}dx =$ (делаем замену переменной $nx = t$) $= \dfrac{1}{\sqrt{n}} \int\limits_{-n}^{n} e^{-t^2}dt \to 0$ при $n \to \infty$, так как несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt$ сходится.

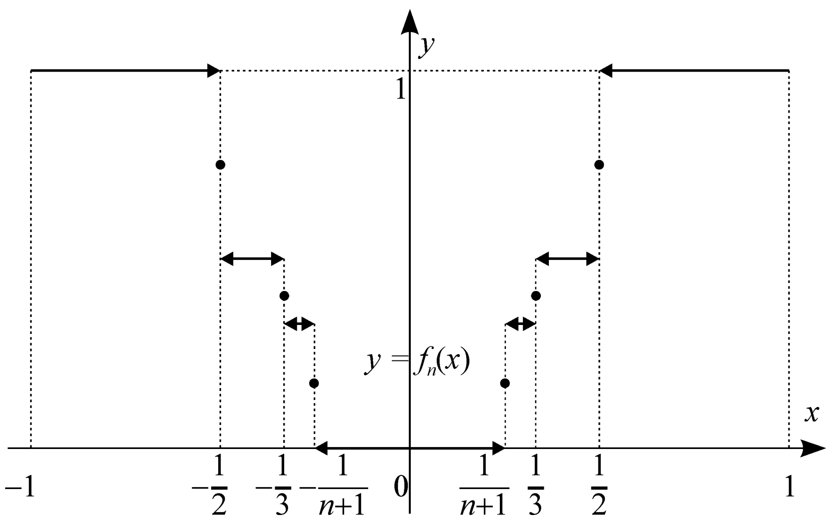
7.6. Примеры неполных линейных нормированных пространств

Помимо введённых на с. 157–160 линейных нормированных пространств $\mathbb{Q}_0[a,b]$, $\mathbb{CL}_1[a,b]$, $\mathbb{C}^*\mathbb{L}_1[a,b]$ и $\mathbb{Q}_0\mathbb{L}_1[a,b]$ также рассмотрим (и установим неполноту) линейных нормированных пространств $\mathbb{C}\mathbb{L}_p[a,b]$, $\mathbb{C}^*\mathbb{L}_p[a,b]$ и $\mathbb{Q}_0\mathbb{L}_p[a,b]$ (для всех $p > 1$ или хотя бы при $p = 2$).

Мы укажем фундаментальные последовательности, не являющиеся сходящимися в этих пространствах.

Пространство $\mathbb{Q}_0[a,b]$ и пространства $\mathbb{Q}_0\mathbb{L}_p[a,b]$. Рассмотрим на отрезке $[a,b] \equiv [-1,1]$ функциональную последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$:

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & \dfrac{1}{2} < |x| \leqslant 1; \\ \dfrac{1}{k}\,, & \dfrac{1}{k+1} < |x| < \dfrac{1}{k}\,, \quad k = 2, 3, \ldots, n; \\ 0, & |x| < \dfrac{1}{n+1}\,; \\ \text{осреднена при } x = \pm\dfrac{1}{2}\,, \pm\dfrac{1}{3}\,, \ldots, \pm\dfrac{1}{n+1}\,. & \end{cases}$$



Проверим равномерную сходимость функциональной последовательности $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, а именно, установим, что

$$f_n(x) \overset{[-1,1]}{\rightrightarrows} f(x), \tag{7.40}$$

где

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \dfrac{1}{2} < |x| \leqslant 1; \\ \dfrac{1}{k}\,, & \dfrac{1}{k+1} < |x| < \dfrac{1}{k}\,, \quad k = 2, 3, \ldots; \\ 0, & x = 0; \\ \text{осреднена при } x = \pm\dfrac{1}{2}\,, \pm\dfrac{1}{3}\,, \pm\dfrac{1}{4}\,, \ldots. \end{cases}$$

Так как функции $f_n(x)$ и $f(x)$ являются чётными, возрастающими при $0 \leqslant x \leqslant 1$ и несовпадающими друг с другом лишь при $x \in \left[-\dfrac{1}{n+1}\,, \dfrac{1}{n+1}\right] \setminus \{0\}$, то

$$\alpha_n = \sup_{x \in [-1,1]} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{x \to \frac{1}{n+1} - 0} f(x) = \frac{1}{n+1}\,.$$

Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, то согласно критерию равномерной сходимости функциональной последовательности (теорема 5.1) имеет место (7.40), откуда, в свою очередь, вытекает сходимость на $[-1, 1]$ функциональной последовательности $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ к той же самой функции $f(x)$ в смысле $\mathbb{L}_p$. Также из (7.40) согласно теореме 5.2) (критерий Коши равномерной сходимости функциональной последовательности) вытекает *равномерная фундаментальность* функциональной последовательности $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ на отрезке $[-1, 1]$, означающая, естественно, что для любого $\varepsilon > 0$ можно найти номер N, что для всех номеров $n > N$, $m > N$ и всех $x \in [-1, 1]$

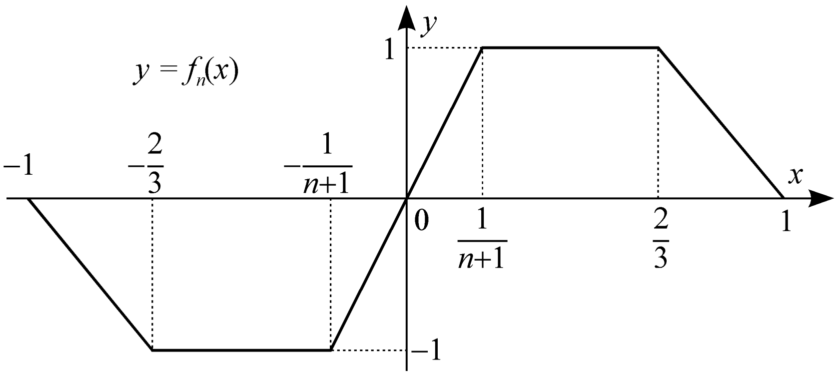
абсолютная величина $|f_n(x) - f_m(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Отсюда следует, что

$$\|f_n - f_m\|_Q = \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f_m(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

то есть последовательность $\big\{f_n(x)\big\}_{n=1}^{\infty}$ *фундаментальна* в пространстве $\mathbb{Q}_0[-1,1]$. Эта последовательность *не является сходящейся* в этом пространстве, так как её предел *не принадлежит* $\mathbb{Q}_0[-1,1]$ (у функции $f(x)$ *бесконечно много* точек разрыва). Итак, пространство $\mathbb{Q}_0[-1,1]$ (то есть и пространство $\mathbb{Q}_0[a,b]$) не является полным. Аналогично устанавливается и неполнота пространств $\mathbb{Q}_0\mathbb{L}_p[a,b]$, если заметить, что подобно тому, как в предыдущем пункте из равномерной сходимости была выведена сходимость в смысле $\mathbb{L}_p$, так и из равномерной фундаментальности можно вывести фундаментальность в смысле $\mathbb{L}_p$, то есть в нашем примере фундаментальность последовательности $\big\{f_n(x)\big\}_{n=1}^{\infty}$ в пространстве $\mathbb{Q}_0\mathbb{L}_p[-1,1]$. Поэтому пространство $\mathbb{Q}_0\mathbb{L}_p[-1,1]$ (а значит, и пространство $\mathbb{Q}_0\mathbb{L}_p[a,b]$) также не является полным.

Пространства $\mathbb{C}\mathbb{L}_p[a,b]$ и пространства $\mathbb{C}^*\mathbb{L}_p[a,b]$. Так же, как и в предыдущем примере, положим $[a,b] \equiv \equiv [-1,1]$ и рассмотрим на этом отрезке функциональную последовательность $\big\{f_n(x)\big\}_{n=1}^{\infty}$:

$$f_n(x) = \begin{cases} (n+1)x, & |x| \leqslant \dfrac{1}{n+1}\,; \\ \operatorname{sgn} x, & \dfrac{1}{n+1} \leqslant |x| \leqslant \dfrac{2}{3}\,; \\ -3-3x, & -1 \leqslant x \leqslant -\dfrac{2}{3}\,; \\ 3-3x, & \dfrac{2}{3} \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$



Легко видеть, что последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится в каждой точке отрезка $[-1,1]$, точнее,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad \text{для всех } x \in [-1,1],$$

где

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn} x, & |x| \leqslant \dfrac{2}{3}\,; \\ -3-3x, & -1 \leqslant x \leqslant -\dfrac{2}{3}\,; \\ 3-3x, & \dfrac{2}{3} \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

В отличие от предыдущего примера, сходимость последовательности $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ здесь не равномерная, а лишь *поточечная*, поэтому из неё, вообще говоря, *не вытекает* сходимость в смысле $\mathbb{L}_p$. Отметим попутно, что равномерной сходимости здесь и не может быть, так как предельная функция $f(x)$ разрывна. Установим непосредственно фундаментальность последовательности $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ в пространствах $\mathbb{CL}_p[-1,1]$ и $\mathbb{C}^*\mathbb{L}_p[-1,1]$ (легко видеть, что для любого n функция $f_n(x)$ принадлежит обоим этим пространствам) и её сходимость в смысле $\mathbb{L}_p$ к функции $f(x)$. Действительно, пусть для определённости $m > n$. Тогда пара функций $f_n(x)$

и $f_m(x)$, как и пара функций $f_n(x)$ и $f(x)$, отличаются друг от друга лишь на множестве $\left(-\dfrac{1}{n+1}, \dfrac{1}{n+1}\right) \setminus \{0\}$, причём абсолютная величина разности функций внутри каждой пары всегда меньше единицы. Поэтому как величина $\|f_n - f_m\|_p^p = \int\limits_{-1}^{1} |f_n(x) - f_m(x)|^p\,dx$, так и величина $\|f_n - f\|_p^p = \int\limits_{-1}^{1} |f_n(x) - f(x)|^p\,dx$ оцениваются сверху значением интеграла $\int\limits_{-\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n+1}} |1|^p\,dx = \dfrac{2}{n+1}$, то есть

$$\|f_n - f_m\|_p \leqslant \left(\frac{2}{n+1}\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad \|f_n - f\|_p \leqslant \left(\frac{2}{n+1}\right)^{\frac{1}{p}}. \qquad (7.41)$$

Первое из неравенств в (7.41) говорит о том, что последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ является фундаментальной в пространствах $\mathbb{C}\mathbb{L}_p[-1,1]$ и $\mathbb{C}^*\mathbb{L}_p[-1,1]$, а второе из неравенств в (7.41) – о том, что последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится в смысле $\mathbb{L}_p$ к функции $f(x)$, которая, как уже отмечалось, *разрывна* и поэтому не принадлежит ни пространству $\mathbb{C}\mathbb{L}_p[-1,1]$, ни пространству $\mathbb{C}^*\mathbb{L}_p[-1,1]$. Следовательно, пространства $\mathbb{C}\mathbb{L}_p[-1,1]$ и $\mathbb{C}^*\mathbb{L}_p[-1,1]$ (а вместе с ними и пространства $\mathbb{C}\mathbb{L}_p[a,b]$ и $\mathbb{C}^*\mathbb{L}_p[a,b]$) не являются полными.

7.7. Вопросы для повторения и самостоятельной работы

1. Установить *единственность* нулевого элемента линейного пространства.

2. Установить, что для всякого элемента x из линейного пространства $\mathbb{L}$ противоположный элемент *единствен*.

3. Доказать, что для всякого элемента x линейного пространства $\mathbb{L}$ справедливо равенство

$$0 \cdot x = \Theta.$$

4. Установить, что для всякого элемента x из линейного пространства $\mathbb{L}$ противоположным элементом является $(-1) \cdot x$.

5. Рассмотрим систему функций $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ при $x \in [a, b]$, где $-\infty < a < b < +\infty$:

$$f_n(x) = x^n, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

то есть

$$f_0(x) \equiv 1, \quad f_1(x) = x, \ \ldots, \ f_n(x) = x^n, \ \ldots.$$

Установить, что $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ – линейно независимая система в линейном пространстве $C[a, b]$.

6. Пусть $\mathrm{A} = (0, 1)$. Рассмотрим систему функций $\{f_\alpha(x)\}_{\alpha \in \mathrm{A}}$ при $x \in [-1, 1]$:

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} 0, & |x| \leqslant \alpha, \\ |x| - \alpha, & \alpha \leqslant |x| \leqslant 1\,. \end{cases}$$

Установить, что $\{f_\alpha(x)\}_{\alpha \in \mathrm{A}}$ – линейно независимая система в линейных пространствах: $C[-1, 1]$, $C^*[-1, 1]$, $Q_0[-1, 1]$.

7. Доказать, что множество l_2 рядов вида (7.1) и таких, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|^2$ сходится, является *линейным пространством*. Установить также, что если ввести в этом

линейном пространстве норму по формуле (см. формулу (7.14) на с. 161 при $p = 2$):

$$\|a\|_2 \equiv \left\|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right\|_2 = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2}, \tag{7.42}$$

то l_2 становится *линейным нормированным пространством*[1].

8. Доказать, что линейное нормированное пространство l_2 является *банаховым*.

9. Установить, что из сходимости в смысле $\mathbb{L}_2$ вытекает сходимость в смысле $\mathbb{L}_1$.

8. Евклидовы пространства

8.1. Определение и примеры евклидовых пространств

В этом пункте мы вначале введём понятие *евклидова* пространства как линейного пространства со *скалярным произведением*. При этом будут отдельно введены понятия *вещественного* и *комплексного* евклидовых пространств. Их независимое введение связано с тем, что аксиомы скалярного произведения, как мы увидим ниже, несколько отличаются друг от друга.

Вещественное линейное пространство $\mathbb{E}$ называется *вещественным евклидовым пространством*, если для любых

[1] Как мы увидим ниже (с. 215, задача 9), в этом пространстве можно ввести *скалярное произведение*, и оно тем самым станет *евклидовым* пространством.

двух элементов $x \in \mathbb{E}$ и $y \in \mathbb{E}$ определено *вещественное* число (x, y), называемое *скалярным произведением* элемента x на элемент y и удовлетворяющее следующим свойствам.

1. Для любых $x \in \mathbb{E}$, $y \in \mathbb{E}$ справедливо равенство
$$(y, x) = (x, y). \tag{8.1}$$

2. Для любых $x \in \mathbb{E}$, $y \in \mathbb{E}$ и любого вещественного числа α справедливо равенство
$$(\alpha x, y) = \alpha(x, y). \tag{8.2}$$

3. Для любых $x \in \mathbb{E}$, $y \in \mathbb{E}$, $z \in \mathbb{E}$ справедливо равенство
$$(x + y, z) = (x, z) + (y, z). \tag{8.3}$$

4. Для всякого $x \in \mathbb{E}$ скалярное произведение $(x, x) \geqslant 0$, причём $(x, x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = \Theta$.

   Напомним, что Θ – нулевой элемент пространства $\mathbb{E}$.

Эти четыре свойства называются *основными свойствами* или, как иногда говорят, *аксиомами* вещественного евклидова пространства. Из них сразу вытекает, например, следующее свойство. Пусть x и y – произвольные элементы пространства $\mathbb{E}$, а α – любое вещественное число. Тогда $(x, \alpha y) =$ (по первому свойству) $= (\alpha y, x) =$ (по второму свойству) $= \alpha(y, x) =$ (по первому свойству) $= \alpha(x, y)$, то есть для любых $x \in \mathbb{E}$, $y \in \mathbb{E}$ и любого вещественного числа α справедливо равенство
$$(x, \alpha y) = \alpha(x, y). \tag{8.4}$$

Аналогично можно получить, что для любых $x \in \mathbb{E}$, $y \in \mathbb{E}$, $z \in \mathbb{E}$ справедливо равенство

$$(x, y + z) = (x, y) + (x, z). \tag{8.5}$$

Наряду с понятием *вещественного* евклидова пространства введём понятие *комплексного* евклидова пространства.

Комплексное линейное пространство $\mathbb{E}$ называется *комплексным евклидовым пространством*, если для любой пары элементов $x \in \mathbb{E}$ и $y \in \mathbb{E}$ определено *комплексное* число (x, y), называемое *скалярным произведением* элемента x на элемент y и удовлетворяющее следующим свойствам.

1. Для любых $x \in \mathbb{E}$, $y \in \mathbb{E}$ справедливо равенство

$$\overline{(y, x)} = (x, y). \tag{8.6}$$

   Черта сверху над комплексным числом (а скалярные произведения (x, y) и (y, x) – комплексные числа) означает, как обычно, комплексно сопряжённое к нему число (то есть $\overline{a + ib} = a - ib$).

2. Для любых $x \in \mathbb{E}$, $y \in \mathbb{E}$ и любого комплексного числа α справедливо равенство (8.2).

3. Для любых $x \in \mathbb{E}$, $y \in \mathbb{E}$, $z \in \mathbb{E}$ справедливо равенство (8.3).

4. Для всякого $x \in \mathbb{E}$ скалярное произведение $(x, x) \geqslant 0$, причём $(x, x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = \Theta$.

Сравнивая вещественное и комплексное евклидовы пространства, мы видим, что скалярные произведения в них различаются лишь первым свойством.

В дальнейшем будем, если специально не оговорено, рассматривать *комплексное* евклидово пространство, а аналогичные результаты для *вещественного* евклидова пространства будем давать в виде задач для самостоятельной работы. При этом будем стараться употреблять формулировки, которые годились бы как для вещественного, так и комплексного случая.

Теорема 8.1 (неравенство Коши–Буняковского). Для любых элементов x, y произвольного евклидова пространства $\mathbb{E}$ справедливо неравенство[1]

$$|(x,y)|^2 \leqslant (x,x)(y,y). \tag{8.7}$$

Доказательство. Если скалярное произведение $(x,y)=0$, то неравенство (8.7) очевидно. Пусть теперь

$$(x,y) \neq 0. \tag{8.8}$$

В этом случае оба элемента $x \neq \Theta$, $y \neq \Theta$, и, следовательно,

$$(x,x) > 0, \quad (y,y) > 0. \tag{8.9}$$

По свойствам скалярного произведения для любого (комплексного) числа λ имеем

$$\begin{gathered} 0 \leqslant (x+\lambda y, x+\lambda y) = \\ = (x,x) + \lambda(y,x) + \overline{\lambda}(x,y) + \lambda\overline{\lambda}(y,y). \end{gathered} \tag{8.10}$$

[1]Разумеется, для *вещественного* евклидова пространства неравенство (8.7) можно записать в виде

$$(x,y)^2 \leqslant (x,x)(y,y).$$

Однако оно записано со знаком модуля, чтобы формулировка неравенства Коши–Буняковского была верной как для *вещественного* так и *комплексного* случая.

Из (8.8) также вытекает, что комплексное число (x, y) можно представить в виде

$$(x, y) = |(x, y)| \cdot e^{i\alpha} \quad (\alpha = \arg(x, y)). \tag{8.11}$$

Подставим в соотношение (8.10)

$$\lambda = t \cdot e^{i\alpha}, \quad t \in (-\infty, +\infty)$$

и рассмотрим скалярное произведение $(x + \lambda y, x + \lambda y)$ как функцию *вещественного* переменного t:

$$\varphi(t) = (x + t \cdot e^{i\alpha} \cdot y, x + t \cdot e^{i\alpha} \cdot y), \quad t \in (-\infty, +\infty).$$

Из (8.8)–(8.11) вытекает, что квадратный трёхчлен

$$\varphi(t) = \underbrace{(y, y)}_{A>0} t^2 + 2 \underbrace{|(x, y)|}_{B>0} t + \underbrace{(x, x)}_{C>0} \geqslant 0 \ \text{ для всех } t \in (-\infty, +\infty).$$

Это означает, что его дискриминант $\Delta \equiv (2B)^2 - 4AC$ *неотрицателен*, следовательно,

$$\frac{\Delta}{4} = B^2 - AC = |(x, y)|^2 - (x, x)(y, y) \geqslant 0.$$

Поэтому неравенство (8.7) и в этом случае выполняется. Теорема доказана.

Евклидово пространство $\mathbb{E}$ становится линейным нормированным пространством, если ввести в нём норму по формуле

$$\|x\| \equiv \sqrt{(x, x)}\,. \tag{8.12}$$

Проверим, что формула (8.12) задаёт норму. Действительно, из четвёртой аксиомы скалярного произведения вытекает, что норма $\|x\|$ определена для всех $x \in \mathbb{E}$, она неотрицательна и обращается в нуль тогда и только тогда, когда

$x = \Theta$. Далее, из второй аксиомы скалярного произведения и равенства (8.66) (см. задачу 3 на с. 214) вытекает, что норма $\|\alpha x\| = \sqrt{(\alpha x, \alpha x)} = \sqrt{\alpha\overline{\alpha}(x,x)} = \sqrt{|\alpha|^2(x,x)} = |\alpha|\cdot\|x\|$. Наконец, используя аксиомы скалярного произведения и неравенство Коши–Буняковского, имеем $\|x+y\|^2 = (x+y, x+y) = (x,x) + (x,y) + (y,x) + (y,y) = (x,x) + 2\operatorname{Re}(x,y) + (y,y) \leqslant (x,x) + 2|(x,y)| + (y,y) \leqslant (x,x) + 2\sqrt{(x,x)(y,y)} + (y,y) = \Big(\sqrt{(x,x)} + \sqrt{(y,y)}\Big)^2 = \big(\|x\| + \|y\|\big)^2$, то есть $\|x+y\|^2 \leqslant \big(\|x\| + \|y\|\big)^2$, что означает выполнение неравенства треугольника

$$\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|.$$

Норма евклидова пространства, которая задаётся формулой (8.12), называется нормой, *согласованной* со скалярным произведением. В дальнейшем, за исключением специально оговоренных случаев, говоря о норме в евклидовом пространстве, мы будем иметь в виду норму, согласованную со скалярным произведением. В терминах этой нормы неравенство Коши–Буняковского (8.7) принимает вид

$$|(x,y)| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|. \qquad (8.13)$$

Рассмотрим теперь некоторые п р и м е р ы евклидовых пространств, а именно: функциональные пространства

$$\begin{array}{ll} 1) & \mathbb{CL}_2[a,b] \equiv \{f(x) \in C[a,b]\}, \\ 2) & \mathbb{C}^*\mathbb{L}_2[a,b] \equiv \{f(x) \in C^*[a,b]\}, \\ 3) & \mathbb{Q}_0\mathbb{L}_2[a,b] \equiv \{f(x) \in Q_0[a,b]\}, \end{array} \qquad (8.14)$$

состоящие из *комплекснозначных* функций вещественного переменного $x \in [a,b]$. Поскольку функции, из которых состоит любое из этих трёх пространств являются комплекснозначными, то естественно предполагать, что их можно умножать не только на вещественные, но и на комплексные числа. Во всех пространствах (8.14) введём скалярное произведение по формуле

$$(f,g) = \int\limits_a^b f(x)\overline{g(x)}\,dx. \tag{8.15}$$

Проверим, что формула (8.15) удовлетворяет всем четырём аксиомам скалярного произведения. Действительно, $(g,f) = \int\limits_a^b g(x)\overline{f(x)}\,dx = \int\limits_a^b \overline{f(x)\overline{g(x)}}\,dx = \overline{\int\limits_a^b f(x)\overline{g(x)}\,dx} = \overline{(f,g)}$, то есть равенство (8.6) справедливо. Вторая и третья аксиомы вытекают из линейных свойств определённого интеграла. Четвёртая аксиома, говорящая о том, что для всякой функции из какого-либо пространства (8.14) скалярное произведение $(f,f) = \int\limits_a^b f(x)\overline{f(x)}\,dx = \int\limits_a^b |f(x)|^2\,dx$ неотрицательно и обращается в нуль лишь тогда, когда $f(x) \equiv 0$, устанавливается точно так же, как и первая аксиома линейного нормированного пространства для случая пространств $\mathbb{C}\mathbb{L}_1[a,b]$, $\mathbb{C}^*\mathbb{L}_1[a,b]$ или $\mathbb{Q}_0\mathbb{L}_1[a,b]$ (см. пятый, шестой и седьмой примеры в п. 7.2).

Итак, пространства (8.14) со скалярным произведением (8.15) являются комплексными евклидовыми пространствами. Разумеется, если считать, что пространства (8.14) состоят из функций, которые принимают лишь *вещественные* значения и, естественно, умножать в этих пространствах можно лишь на вещественные числа, то формула для скалярного произведения приобретает вид

$$(f,g) = \int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx. \tag{8.16}$$

Норма в пространствах $\mathbb{CL}_2[a,b]$, $\mathbb{C}^*\mathbb{L}_2[a,b]$ и $\mathbb{Q}_0\mathbb{L}_2[a,b]$, согласованная со скалярным произведением (8.15) или (8.16), вычисляется по формуле

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int\limits_a^b |f(x)|^2\,dx}\,. \tag{8.17}$$

Отметим, что норма (8.17) – частный случай нормы (7.15) при $p = 2$.

8.2. Сходимость в евклидовых пространствах. Полнота

Так как всякое евклидово пространство $\mathbb{E}$ является линейным нормированным пространством с нормой (8.12), то все понятия и результаты, полученные при рассмотрении линейных нормированных пространств и даже линейных пространств, переносятся и на евклидовы пространства. В частности, в евклидовом пространстве можно рассмотреть понятие линейно независимой системы, последовательности и ряда, их сходимости, установить единственность предела (теорема 7.1) и ограниченность (теорема 7.2) сходящейся последовательности, арифметические свойства сходящихся последовательностей (теорема 7.3), включая непрерывность нормы. Эту теорему в евклидовом пространстве дополним следующими результатами.

Т е о р е м а 8.2 (непрерывность скалярного произведения). Пусть имеются две сходящиеся последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ в $\mathbb{E}$, причём

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = y. \tag{8.18}$$

Тогда числовая последовательность $\big\{(x_n, y_n)\big\}_{n=1}^{\infty}$ – сходящаяся, причём

$$\lim_{n\to\infty}(x_n, y_n) = (x, y). \tag{8.19}$$

Доказательство. Ввиду того, что последовательность $\big\{x_n\big\}_{n=1}^{\infty}$ в $\mathbb{E}$ является сходящейся, то по теореме 7.2 она ограничена, то есть найдётся такое $M > 0$, что нормы

$$\|x_n\| \leqslant M \quad \text{для всех } n = 1, 2, \ldots.$$

Из (8.18) в силу определения предела вытекает, что для всякого $\varepsilon > 0$ найдутся такие номера N_1 и N_2, что

$$\|x_n - x\| < \frac{\varepsilon}{2(\|y\| + 1)} \quad \text{для всех} \;\; n > N_1,$$
$$\|y_n - y\| < \frac{\varepsilon}{2M} \qquad\qquad \text{для всех} \;\; n > N_2.$$

Используя свойства скалярного произведения и неравенство Коши–Буняковского (8.13), получаем: для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такой номер $N = \max\{N_1, N_2\}$, что для всех номеров $n > N$ модуль разности $|(x_n, y_n) - (x, y)| = |(x_n, y_n) - (x_n, y) + (x_n, y) - (x, y)| \leqslant |(x_n, y_n) - (x_n, y)| + |(x_n, y) - (x, y)| = |(x_n, y_n - y)| + |(x_n - x, y)| \leqslant \|x_n\| \cdot \|y_n - y\| + \|x_n - x\| \cdot \|y\| < M \cdot \dfrac{\varepsilon}{2M} + \dfrac{\varepsilon}{2(\|y\|+1)} \cdot \|y\| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, то есть равенство (8.19) справедливо. Теорема доказана.

Следствие (счётная дистрибутивность скалярного произведения). Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ в $\mathbb{E}$ является сходящимся. Тогда для всякого $x \in \mathbb{E}$ справедливо равенство

$$\Big(x, \sum_{n=1}^{\infty} y_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty}(x, y_n). \tag{8.20}$$

Доказательство. Введём в евклидовом пространстве $\mathbb{E}$ две последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$:

$$x_n = x, \quad Y_n = \sum_{k=1}^{n} y_k, \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{8.21}$$

Ясно, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, а последовательность $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ – сходящаяся. Пусть $Y \in \mathbb{E}$ – её предел:

$$Y = \lim_{n\to\infty} Y_n = \sum_{k=1}^{\infty} y_k. \tag{8.22}$$

Согласно дистрибутивности скалярного произведения (которую, естественно, можно распространить с двух на любое *конечное* число слагаемых) и теореме 8.2 имеем $\left(x, \sum\limits_{k=1}^{\infty} y_k\right) = (x, Y) = \lim\limits_{n\to\infty}(x_n, Y_n) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(x, \sum\limits_{k=1}^{n} y_k\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n}(x, y_k) = \sum\limits_{k=1}^{\infty}(x, y_k)$, то есть равенство (8.20) справедливо. Следствие доказано.

Ясно, что счётная дистрибутивность скалярного произведения имеет место и для первого сомножителя.

Разумеется, понятия замкнутой системы и базиса, введённые для линейных нормированных пространств, сохраняют свой смысл и для евклидовых пространств. Справедлива в них, конечно, теорема 7.4 о линейной независимости элементов базиса.

В евклидовых пространствах, как в любых линейных нормированных пространствах, можно ввести понятие фундаментальной последовательности. Естественно, верна теорема 7.5 о фундаментальности любой сходящейся последовательности. Как линейные нормированные пространства евклидовы пространства могут быть *полными* (в которых всякая фундаментальная последовательность сходится) и *неполными*. Полное евклидово пространство называется *гильбертовым* пространством. Рассмотренные выше функциональные евклидовы пространства $\mathbb{CL}_2[a,b]$, $\mathbb{C}^*\mathbb{L}_2[a,b]$ и $\mathbb{Q}_0\mathbb{L}_2[a,b]$ со скалярным произведением (8.15) или (8.16) и нормой (8.17), согласно результатам п. 7.5, являются примерами неполных евклидовых пространств.

8.3. Определение и примеры ортогональных и ортонормированных систем

Элементы x и y евклидова пространства $\mathbb{E}$ называются *ортогональными*, если $(x, y) = 0$.

Тот факт, что элементы x и y ортогональны, иногда обозначают так:

$$x \perp y.$$

Действительно, если считать элементы евклидова пространства $\mathbb{E}$ векторами, то ортогональность ненулевых элементов x и y (нулевой элемент Θ, как нетрудно видеть, ортогонален любому элементу евклидова пространства $\mathbb{E}$) означает, что угол между этими векторами равен $\dfrac{\pi}{2}$, то есть векторы x и y взаимно перпендикулярны.

Система $\{x_\alpha\}_{\alpha \in \mathrm{A}}$, состоящая из элементов $x_\alpha \in \mathbb{E}$, называется *ортогональной* системой в евклидовом пространстве $\mathbb{E}$, если для любых $\alpha_1 \in \mathrm{A}$ и $\alpha_2 \in \mathrm{A}$, таких, что $\alpha_1 \neq \alpha_2$, следует, что $x_{\alpha_1} \perp x_{\alpha_2}$, то есть $(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}) = 0$.

Система $\{x_\alpha\}_{\alpha \in \mathrm{A}}$, состоящая из элементов $x_\alpha \in \mathbb{E}$, называется *ортонормированной* системой в евклидовом пространстве $\mathbb{E}$, если для любых $\alpha_1 \in \mathrm{A}$ и $\alpha_2 \in \mathrm{A}$, следует, что $(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}) = \delta_{\alpha_1\alpha_2}$, то есть

$$(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}) = \begin{cases} 1, & \alpha_1 = \alpha_2, \\ 0, & \alpha_1 \neq \alpha_2. \end{cases} \tag{8.23}$$

Ясно, что ортонормированная система не содержит нулевых элементов, так как из (8.23) следует, что для всякого элемента x_α ортонормированной системы $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\mathrm{A}}$ его норма $\|x_\alpha\| = 1$.

Т е о р е м а 8.3. Всякая ортогональная система $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\mathrm{A}}$, не содержащая нулевых элементов (в частности, ортонормированная система) является *линейно независимой* системой.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для любого натурального n возьмём любую конечную подсистему из n элементов $\{x_{\alpha_k}\}_{k=1}^{n}$ системы $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\mathrm{A}}$ и любые n чисел $\{\lambda_k\}_{k=1}^{n}$. Пусть линейная комбинация этих элементов равна нулевому элементу:

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_{\alpha_k} = \lambda_1 x_{\alpha_1} + \cdots + \lambda_k x_{\alpha_k} + \cdots + \lambda_n x_{\alpha_n} = \Theta. \tag{8.24}$$

Умножим равенство (8.24) скалярно на x_{α_k}, где $k=1, 2, \ldots, n$. Имеем $0 = (\Theta, x_{\alpha_k}) = (\lambda_1 x_{\alpha_1} + \cdots + \lambda_k x_{\alpha_k} + \cdots + \lambda_n x_{\alpha_n}, x_{\alpha_k}) = \lambda_1(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_k}) + \cdots + \lambda_k(x_{\alpha_k}, x_{\alpha_k}) + \cdots + \lambda_n(x_{\alpha_n}, x_{\alpha_k}) = \lambda_k(x_{\alpha_k}, x_{\alpha_k})$. Так как система $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\mathrm{A}}$, а стало быть, и подсистема $\{x_{\alpha_k}\}_{k=1}^{n}$ *не содержит* нулевых элементов, то $(x_{\alpha_k}, x_{\alpha_k}) \neq 0$. Следовательно, $\lambda_k = 0$ для всех $k=1, 2, \ldots, n$. Теорема доказана.

Разумеется, произвольная линейно независимая система $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\mathrm{A}}$ не является ортогональной системой. Однако если линейно независимая система $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – *счётная*, то из неё можно получить ортонормированную систему $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$, причём такую, что её n-й элемент e_n является линейной комбинацией первых n элементов x_1, x_2, ..., x_n исходной системы $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Приведём эти хорошо известные формулы, которые задают так называемый *процесс ортогонализации по Шмидту*:

$$\begin{gathered} e_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|}\,, \quad e_2 = \frac{x_2 - (x_2, e_1)e_1}{\|x_2 - (x_2, e_1)e_1\|}\,, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ e_n = \frac{x_n - (x_n, e_1)e_1 - \dots - (x_n, e_{n-1})e_{n-1}}{\|x_n - (x_n, e_1)e_1 - \dots - (x_n, e_{n-1})e_{n-1}\|}\,, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{gathered} \tag{8.25}$$

Приведём п р и м е р ы ортогональных и ортонормированных систем в некоторых евклидовых пространствах.

1. Рассмотрим в евклидовом пространстве $\mathbb{CL}_2[-1,1]$ линейно независимую систему функций $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$:

$$f_n(x) = x^n, \quad n = 0, 1, \dots,$$

то есть (см. с. 185)

$$f_0(x) \equiv 1, \quad f_1(x) = x, \ \dots, \ f_n(x) = x^n, \ \dots.$$

Ортогонализация этой системы по формулам Шмидта (8.25) даёт ортонормированную на отрезке $[-1,1]$ систему многочленов $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ (степень многочлена $\deg P_n(x) = n$), которые называются *многочленами Лежандра*.

2. Рассмотрим в евклидовых пространствах $\mathbb{C}\mathbb{L}_2[-\pi,\pi]$, $\mathbb{C}^*\mathbb{L}_2[-\pi,\pi]$ и $\mathbb{Q}_0\mathbb{L}_2[-\pi,\pi]$ тригонометрическую систему

$$\left\{1, \cos x, \sin x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots\right\},$$

то есть систему

$$\left\{1, \cos nx, \sin nx\right\}_{n=1}^{\infty}. \tag{8.26}$$

Поскольку, как легко проверить,

$$\begin{aligned} 0 = \underset{n \geqslant 1}{\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx\, dx} = \\ = \underset{n \geqslant 1}{\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx\, dx} = \underset{1 \leqslant n \neq m \geqslant 1}{\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cdot \cos mx\, dx} = \\ = \underset{1 \leqslant n \neq m \geqslant 1}{\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cdot \sin mx\, dx} = \underset{n \geqslant 1, \quad m \geqslant 1}{\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cdot \sin mx\, dx} \end{aligned} \tag{8.27}$$

(под каждым из интегралов написано, при каких n и m соответствующий интеграл обращается в нуль), то тригонометрическая система (8.26) является *ортогональной* системой в этих пространствах. А так как

$$\int_{-\pi}^{\pi} |1|^2\, dx = 2\pi, \quad \int_{-\pi}^{\pi} |\cos nx|^2\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} |\sin nx|^2\, dx = \pi, \tag{8.28}$$

то нормированная тригонометрическая система

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}\right\}_{n=1}^{\infty} \tag{8.29}$$

является *ортонормированной* системой в евклидовых пространствах $\mathbb{C}\mathbb{L}_2[-\pi,\pi]$, $\mathbb{C}^*\mathbb{L}_2[-\pi,\pi]$ и $\mathbb{Q}_0\mathbb{L}_2[-\pi,\pi]$.

3. Рассмотрим в евклидовых пространствах $\mathbb{CL}_2[0,\pi]$, $\mathbb{C}^*\mathbb{L}_2[0,\pi]$ и $\mathbb{Q}_0\mathbb{L}_2[0,\pi]$ систему

$$\left\{1, \cos x, \ldots, \cos nx, \ldots\right\} \equiv \left\{\cos nx\right\}_{n=0}^{\infty}. \tag{8.30}$$

Эта система – *ортогональна*, так как

$$\int\limits_0^\pi \cos nx \cdot \cos mx \, dx = 0 \tag{8.31}$$

для всех $n \in \mathbb{N}_0$, $m \in \mathbb{N}_0$ и таких, что $n \neq m$. А поскольку

$$\int\limits_0^\pi |1|^2 \, dx = \pi, \quad \int\limits_0^\pi |\cos nx|^2 \, dx = \frac{\pi}{2}\,, \tag{8.32}$$

то система

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\,, \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos nx\right\}_{n=1}^{\infty} \tag{8.33}$$

является *ортонормированной* системой в евклидовых пространствах $\mathbb{CL}_2[0,\pi]$, $\mathbb{C}^*\mathbb{L}_2[0,\pi]$ и $\mathbb{Q}_0\mathbb{L}_2[0,\pi]$.

4. Рассмотрим в этих же самых евклидовых пространствах $\mathbb{CL}_2[0,\pi]$, $\mathbb{C}^*\mathbb{L}_2[0,\pi]$ и $\mathbb{Q}_0\mathbb{L}_2[0,\pi]$ систему

$$\left\{\sin x, \ldots, \sin nx, \ldots\right\} \equiv \left\{\sin nx\right\}_{n=1}^{\infty}. \tag{8.34}$$

Эта система, как и только что рассмотренная система (8.30), *ортогональна*, поскольку

$$\int\limits_0^\pi \sin nx \cdot \sin mx \, dx = 0 \tag{8.35}$$

для всех $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$ и таких, что $n \neq m$. А так как

$$\int\limits_0^\pi |\sin nx|^2 \, dx = \frac{\pi}{2}\,, \tag{8.36}$$

то нормированная на отрезке $[0,\pi]$ система тригонометрических функций

$$\left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin nx\right\}_{n=1}^{\infty} \tag{8.37}$$

является *ортонормированной* системой в евклидовых пространствах $\mathbb{C}\mathbb{L}_2[0,\pi]$, $\mathbb{C}^*\mathbb{L}_2[0,\pi]$ и $\mathbb{Q}_0\mathbb{L}_2[0,\pi]$.

5. Рассмотрим в евклидовых пространствах $\mathbb{C}\mathbb{L}_2[-\pi,\pi]$, $\mathbb{C}^*\mathbb{L}_2[-\pi,\pi]$ и $\mathbb{Q}_0\mathbb{L}_2[-\pi,\pi]$ систему

$$\left\{e^{inx}\right\}_{n=-\infty}^{+\infty}. \tag{8.38}$$

В отличие от предыдущих примеров, которые мы можем рассматривать как в вещественных, так и в комплексных пространствах, эту комплекснозначную систему (она состоит из функций *вещественного* аргумента x, но принимает *комплексные* значения, ибо $e^{inx} = \cos nx + i\sin nx$) нужно рассматривать лишь в комплексных евклидовых пространствах. Система (8.38) ортогональна, поскольку скалярные произведения

$$(e^{inx}, e^{imx}) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{inx}\cdot\overline{e^{imx}}\,dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{inx}\cdot e^{-imx}\,dx = 0 \tag{8.39}$$

для всех $n\in\mathbb{Z}$ и $m\in\mathbb{Z}$, таких, что $m\neq n$. Так как

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}|e^{inx}|^2\,dx = 2\pi \quad \text{для всех } n\in\mathbb{Z}, \tag{8.40}$$

то нормированная на отрезке $[-\pi,\pi]$ система функций

$$\left\{\frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}\right\}_{n=-\infty}^{+\infty} \tag{8.41}$$

является *ортонормированной* системой в рассматриваемых сейчас *комплексных* евклидовых пространствах $\mathbb{C}\mathbb{L}_2[-\pi,\pi]$, $\mathbb{C}^*\mathbb{L}_2[-\pi,\pi]$ и $\mathbb{Q}_0\mathbb{L}_2[-\pi,\pi]$.

8.4. Ряды Фурье в евклидовом пространстве

В этом пункте будет рассмотрено понятие ряда Фурье в евклидовом пространстве и связанные с этим понятия. Изложение будет вестись для рядов по *ортонормированным* системам в *комплексном* пространстве. Варианты соответствующих утверждений для *ортогональных* систем (естественно, не содержащих нулевого элемента Θ)[1] или для *вещественного* пространства вынесены в виде задач в вопросах для повторения и самостоятельной работы.

Теорема 8.4. Пусть $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ – ортонормированная система в евклидовом пространстве $\mathbb{E}$, и ряд по этой системе сходится к элементу $x \in \mathbb{E}$:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n. \tag{8.42}$$

Тогда

$$\alpha_n = (x, e_n), \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{8.43}$$

Доказательство. Используя счётную дистрибутивность скалярного произведения, из (8.42) получаем $(x, e_n) = \big(\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k, e_n\big) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k (e_k, e_n) = \alpha_n$, так как $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ – ортонормированная система. Следовательно, соотношения (8.43) выполняются. Теорема доказана.

После доказательства теоремы 8.4 можно ввести следующее понятие. Если $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ – некоторая ортонормированная система в евклидовом пространстве $\mathbb{E}$, то любому элементу

[1] В дальнейшем, если специально не оговорено, будем считать, что ортогональная система не содержит нулевых элементов и поэтому, согласно теореме 8.3, является линейно независимой.

$x \in \mathbb{E}$ можно поставить в соответствие ряд по этой системе:

$$x \sim \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n, \quad \text{где } \alpha_n = (x, e_n). \tag{8.44}$$

Ряд в (8.44) называется *рядом Фурье* элемента x, а последовательность чисел $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ – его *коэффициентами Фурье.*

Ряд Фурье элемента x по *ортогональной* системе $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеет вид:

$$x \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n g_n, \quad \text{где } c_n = \frac{(x, g_n)}{\|g_n\|^2}\,. \tag{8.45}$$

Нетрудно видеть, что если $\|g_n\| = 1$ для всех $n = 1, 2, \ldots$, то (8.45) переходит в (8.44).

Разумеется, ряд Фурье элемента x вовсе не обязательно сходится к элементу x. Теорема 8.4 говорит лишь о том, что если ряд по ортонормированной системе сходится к x, то это обязательно ряд Фурье элемента x по этой системе. Поэтому возникает естественный вопрос: когда для любого $x \in \mathbb{E}$ в (8.44) или в (8.45) можно вместо знака соответствия поставить знак равенства? Другими словами, какие условия надо наложить на ортонормированную (ортогональную) систему, чтобы ряд Фурье любого элемента был сходящимся к этому самому элементу? Или, короче, когда ортонормированная (ортогональная) система будет ортонормированным (ортогональным) базисом евклидова пространства? Для ответа на этот вопрос предварительно получим следующее свойство коэффициентов Фурье.

Т е о р е м а 8.5 (минимальное свойство коэффициентов Фурье). Пусть $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ – ортонормированная система в евклидовом пространстве $\mathbb{E}$, элемент $x \in \mathbb{E}$, а $\alpha_k = (x, e_k)$, где

$k = 1, 2, \ldots$ – его коэффициенты Фурье. Тогда для любого натурального n и любого набора n чисел $\{\beta_k\}_{k=1}^n$ имеет место неравенство

$$\Big\|x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k\Big\| \leqslant \Big\|x - \sum_{k=1}^{n} \beta_k e_k\Big\|, \tag{8.46}$$

причём это неравенство переходит в равенство тогда и только тогда, когда

$$\beta_k = \alpha_k, \quad \text{для всех } k = 1, 2, \ldots, n. \tag{8.47}$$

Доказательство. Используя свойства скалярного произведения и тот факт, что система $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ – ортонормированная, имеем $\Big\|x - \sum\limits_{k=1}^{n} \beta_k e_k\Big\|^2 = \Big(x - \sum\limits_{k=1}^{n} \beta_k e_k, x - \sum\limits_{j=1}^{n} \beta_j e_j\Big) =$

$$= (x, x) - \sum_{k=1}^{n} \beta_k (e_k, x) - \sum_{j=1}^{n} \overline{\beta_j}\,(x, e_j) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \beta_k \overline{\beta_j}\, \underbrace{(e_k, e_j)}_{\delta_{kj}} =$$

$$= (x, x) - \sum_{k=1}^{n} \beta_k \overline{\alpha_k} - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \overline{\beta_k} + \sum_{k=1}^{n} |\beta_k|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2 +$$

$$+ \underbrace{\sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2 - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \overline{\beta_k} - \sum_{k=1}^{n} \overline{\alpha_k}\,\beta_k + \sum_{k=1}^{n} |\beta_k|^2,}_{\sum\limits_{k=1}^{n} |\alpha_k - \beta_k|^2} \quad \text{то есть}$$

$$\Big\|x - \sum_{k=1}^{n} \beta_k e_k\Big\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2 + \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k - \beta_k|^2. \tag{8.48}$$

Так как система $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ и элемент $x \in \mathbb{E}$ заданы, то $\|x\|^2$ и сумма квадратов модулей коэффициентов Фурье $\sum\limits_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2$ *не зависят* от набора n чисел $\{\beta_k\}_{k=1}^n$. От этих чисел зависит лишь последнее слагаемое в равенстве (8.48), а оно принимает своё минимальное значение, равное нулю, тогда и только тогда, когда выполняются *все* n равенств (8.47). Теорема доказана.

Доказательство теоремы 8.5 проведено для случая *комплексного* евклидова пространства. Однако если не обращать внимания на черту комплексного сопряжения, то получится доказательство для вещественного случая.

Если в выведенном при доказательстве теоремы 8.5 равенстве (8.48) положить

$$\beta_k = \alpha_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

то получится формула

$$\Big\|x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k\Big\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2, \tag{8.49}$$

называемая *формулой уклонения*. Она показывает, величину погрешности (точнее, квадрат этой величины), с какой n-я частная сумма ряда Фурье элемента x по ортонормированной системе $\big\{e_n\big\}_{n=1}^{\infty}$ приближает раскладываемый элемент.

Так как левая часть формулы уклонения (8.49) неотрицательна, то отсюда, в частности, вытекает, что

$$\sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2 \leqslant \|x\|^2 \quad \text{для всех } n = 1, 2, \ldots. \tag{8.50}$$

Последнее неравенство означает (см. теорему 2.1), что знакоположительный числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2$ *сходится*, причём

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 \leqslant \|x\|^2. \tag{8.51}$$

Неравенства (8.50) и (8.51) называются *неравенствами Бесселя*. В тех случаях, когда нам не важен верхний предел суммирования (конечное число n или символ ∞), эти неравенства будем записывать в виде неравенства

$$\sum_k |\alpha_k|^2 \leqslant \|x\|^2, \tag{8.52}$$

которое также будем называть неравенством Бесселя, но при этом иметь в виду, что индекс суммирования k может меняться как в конечных пределах, так и до бесконечности. Общее неравенство Бесселя (8.52) для произвольной ортогональной (не обязательно нормированной) системы $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ и для любого $x \in \mathbb{E}$, как нетрудно проверить, имеет вид

$$\sum_k |c_k|^2 \cdot \|g_k\|^2 = \sum_k \frac{|(x, g_k)|^2}{\|g_k\|^2} \leqslant \|x\|^2, \tag{8.53}$$

где $c_k = \dfrac{(x, g_k)}{\|g_k\|^2}$ – коэффициенты Фурье разложения элемента x по системе $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ (см. (8.45)).

Запишем теперь общий вид рядов Фурье и неравенства Бесселя для произвольной ортогональной и ортонормированной системы в рассмотренных ранее функциональных евклидовых пространствах $\mathbb{C}\mathbb{L}_2[a,b]$, $\mathbb{C}^*\mathbb{L}_2[a,b]$ и $\mathbb{Q}_0\mathbb{L}_2[a,b]$.

Пусть $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ – какая-то ортонормированная система в одном из этих пространств, а $f(x)$ – функция того же пространства. Следуя (8.44) имеем, что функции $f(x)$ ставится в соответствие ряд Фурье по системе $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \varphi_n(x), \quad \text{где } \alpha_n = (f, \varphi_n) = \int_a^b f(x)\, \overline{\varphi_n(x)}\, dx,$$

а общее неравенство Бесселя, как видно из (8.52), записывается в виде

$$\sum_k |\alpha_k|^2 = \sum_k \left| \int\limits_a^b f(x)\, \overline{\varphi_k(x)}\, dx \right|^2 \leqslant \|f\|_2^2 = \int\limits_a^b |f(x)|^2\, dx.$$

Если же рассмотреть произвольную ортогональную систему $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, то для неё из (8.45) и (8.53) получаем, что ряд Фурье имеет вид

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n(x), \quad \text{где } c_n = \frac{(f, \psi_n)}{\|\psi_n\|_2^2} = \frac{\int_a^b f(x)\, \overline{\psi_n(x)}\, dx}{\int_a^b |\psi_n(x)|^2\, dx},$$

а неравенство Бесселя, соответственно,

$$\sum_k \frac{\left| \int_a^b f(x)\, \overline{\psi_k(x)}\, dx \right|^2}{\int_a^b |\psi_k(x)|^2\, dx} \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|^2\, dx.$$

Т е о р е м а 8.6 (критерии ортонормированного базиса). Пусть $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ – ортонормированная система в евклидовом пространстве $\mathbb{E}$. Тогда эквивалентны следующие три утверждения.

1. Система $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ – ортонормированный базис в $\mathbb{E}$.

2. Для всякого $x \in \mathbb{E}$ справедливо равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(x, e_n)|^2 = \|x\|^2, \tag{8.54}$$

называемое *равенством Парсеваля.*

3. Система $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ – замкнутая система в $\mathbb{E}$.

Доказательство. Оно будет проведено по схеме:

$$1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 1.$$

Докажем $1 \Rightarrow 2$. Так как $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ – ортонормированный базис, то любой $x \in \mathbb{E}$ единственным образом раскладывается по базису $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n. \tag{8.55}$$

Согласно теореме 8.4 коэффициенты $\alpha_n = (x, e_n)$ для всех натуральных n, и поэтому

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n) e_n. \tag{8.56}$$

Используя счётную дистрибутивность скалярного произведения, из (8.56) получаем $\|x\|^2 = (x, x) = \Big(\sum\limits_{n=1}^{\infty} (x, e_n) e_n, x \Big) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (x, e_n)(e_n, x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |(x, e_n)|^2$, то есть равенство Парсеваля (8.54).

Докажем $2 \Rightarrow 3$. Согласно формуле уклонения (8.49), в которой коэффициенты Фурье $\alpha_k = (x, e_k)$, и используя равенство Парсеваля (8.54), имеем

$$\lim_{n\to\infty} \Big\| x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \Big\|^2 = \lim_{n\to\infty} \Big(\|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2 \Big) = 0.$$

Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер N, что для всех номеров $n > N$ справедливо неравенство $\big\| x - \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \big\|^2 < \varepsilon^2$, то есть $\left\|x - \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k e_k\right\| < \varepsilon$. Это означает, что частные суммы ряда Фурье по системе $\left\{e_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ (а не просто какие-то линейные комбинации элементов этой системы) приближают раскладываемый элемент x с любой степенью точности. Следовательно, система $\left\{e_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ замкнута в $\mathbb{E}$.

Докажем 3 $\Rightarrow$ 1. Так как система $\left\{e_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ замкнута в $\mathbb{E}$, то это значит, что для всякого $x \in \mathbb{E}$ для любого $\varepsilon > 0$ найдётся натуральное p, подсистема $\left\{e_{n_j}\right\}_{j=1}^{p} \subset \left\{e_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ и набор p чисел $\left\{\beta_{n_j}\right\}_{j=1}^{p}$, что

$$\left\|x - \sum_{j=1}^{p} \beta_{n_j} e_{n_j}\right\| < \varepsilon. \tag{8.57}$$

Обозначив $N = \max\limits_{j}\{n_j\}$, расширим подсистему $\left\{e_{n_j}\right\}_{j=1}^{p}$ до подсистемы $\left\{e_k\right\}_{k=1}^{N}$, а набор p чисел $\left\{\beta_{n_j}\right\}_{j=1}^{p}$ – до набора N чисел $\left\{\beta_k\right\}_{k=1}^{N}$, добавив туда нули. Тогда получим, что для всякого $x \in \mathbb{E}$ для любого $\varepsilon > 0$ найдётся натуральное N, подсистема $\left\{e_k\right\}_{k=1}^{N} \subset \left\{e_n\right\}_{n=1}^{\infty}$, состоящая из первых N элементов исходной системы $\left\{e_n\right\}_{n=1}^{\infty}$, и набор N чисел $\left\{\beta_k\right\}_{k=1}^{N}$, что

$$\left\|x - \sum_{k=1}^{N} \beta_k e_k\right\| < \varepsilon. \tag{8.58}$$

Но тогда согласно теореме 8.5 о минимальном свойстве коэффициентов Фурье из (8.46) и (8.58) следует, что

$$\left\|x - \sum_{k=1}^{N} \alpha_k e_k\right\| \leqslant \left\|x - \sum_{k=1}^{N} \beta_k e_k\right\| < \varepsilon. \tag{8.59}$$

По формуле уклонения (8.49) числовая последовательность $\left\{\left\|x - \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k e_k\right\|\right\}_{n=1}^{\infty}$ является убывающей. Итак, мы получили, что для всякого $x \in \mathbb{E}$ для любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер N такой, что для произвольного $n > N$ норма разности $\left\|x - \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k e_k\right\| < \varepsilon$, то есть $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$. Единственность коэффициентов $\left\{\alpha_k\right\}_{k=1}^{\infty}$ вытекает из теоремы 8.4. Следовательно, ортонормированная система $\left\{e_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ является ортонормированным базисом в $\mathbb{E}$. Теорема доказана.

С л е д с т в и е (обобщённое равенство Парсеваля). Пусть $\left\{e_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ – ортонормированный базис евклидова пространства $\mathbb{E}$. Тогда для любых $x \in \mathbb{E}$ и $y \in \mathbb{E}$ справедливо равенство

$$(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n)(e_n, y). \tag{8.60}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $\left\{e_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ – ортонормированный базис $\mathbb{E}$, то для любого $x \in \mathbb{E}$ справедливо разложение (8.56). Используя счётную дистрибутивность скалярного произведения, из (8.56) получаем

$$(x, y) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n) e_n, y\right) = \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n)(e_n, y),$$

то есть обобщённое равенство Парсеваля (8.60). Следствие доказано.

Ясно, что для ортогонального базиса $\left\{g_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ евклидова пространства $\mathbb{E}$ также имеют место равенство Парсеваля и обобщённое равенство Парсеваля, принимающие вид: для любых $x \in \mathbb{E}$ и $y \in \mathbb{E}$, представленных в базисе $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ своими разложениями

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n g_n, \quad y = \sum_{n=1}^{\infty} d_n g_n,$$

справедливы следующие равенства:

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \, \|g_n\|^2 \tag{8.61}$$

(равенство Парсеваля) и

$$(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \, \overline{d_n} \, \|g_n\|^2 \tag{8.62}$$

(обобщённое равенство Парсеваля).

Теорема 8.7 (полнота ортонормированного базиса). Пусть $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ – ортонормированный базис в евклидовом пространстве $\mathbb{E}$. Если элемент $x \in \mathbb{E}$ ортогонален *всем* базисным элементам:

$$x \perp e_n, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{8.63}$$

то $x = \Theta$.

Доказательство. Пусть $x \in \mathbb{E}$ удовлетворяет (8.63). Согласно равенству Парсеваля (8.54) квадрат нормы $\|x\|^2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |(x, e_n)|^2 = 0$, так как $(x, e_n) = 0$ для всех n. Но тогда из последнего свойства скалярного произведения вытекает, что $x = \Theta$. Теорема доказана.

Разумеется, свойством полноты обладают не только ортонормированные, но и любые ортогональные базисы.

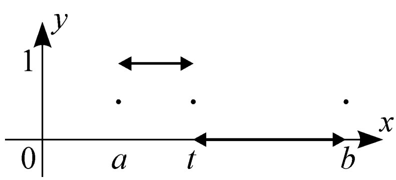
В заключение отметим одно важное свойство рядов Фурье по ортонормированным базисам $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ функциональных евклидовых пространств $\mathbb{C}\mathbb{L}_2[a,b]$, $\mathbb{C}^*\mathbb{L}_2[a,b]$ и $\mathbb{Q}_0\mathbb{L}_2[a,b]$. Оно с первого взгляда может показаться несколько преждевременным, так как мы пока ещё не располагаем ни одним примером ортонормированного базиса этих пространств. Однако, забегая вперёд, сообщим, что в следующем разделе, посвящённом тригонометрическим рядам Фурье, будет установлено, что все ортонормированные тригонометрические системы, приведённые здесь в примерах, на самом деле являются *ортонормированными базисами* (а ортогональные системы, соответственно, ортогональными базисами).

Итак, пусть $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ – ортонормированный базис какого-либо пространства: $\mathbb{C}\mathbb{L}_2[a,b]$, $\mathbb{C}^*\mathbb{L}_2[a,b]$ или $\mathbb{Q}_0\mathbb{L}_2[a,b]$. Это означает, что всякая функция $f(x)$ из этого пространства является суммой ряда Фурье

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(f,\varphi_n)\varphi_n(x), \tag{8.64}$$

сходящегося к $f(x)$ в смысле $\mathbb{L}_2$. Для любого $t \in (a,b)$ рассмотрим функцию

$$g_t(x) = \begin{cases} 1, & a < x < t; \\ \dfrac{1}{2}, & x = a,\ x = b,\ x = t; \\ 0, & t < x < b. \end{cases}$$



Согласно обобщённому равенству Парсеваля (8.60), скалярное произведение

$$(f, g_t) = \sum_{n=1}^{\infty} (f, \varphi_n)(\varphi_n, g_t),$$

или, записывая скалярное произведение функций в виде интеграла,

$$\int_a^b f(x)\overline{g_t(x)}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} (f, \varphi_n) \int_a^b \varphi_n(x)\overline{g_t(x)}\,dx.$$

Но $\int\limits_a^b f(x)\overline{g_t(x)}\,dx = \int\limits_a^b f(x)g_t(x)\,dx = \int\limits_a^t f(x)\,dx$, аналогично $\int\limits_a^b \varphi_n(x)\overline{g_t(x)}\,dx = \int\limits_a^t \varphi_n(x)\,dx$. Поэтому

$$\int_a^t f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} (f, \varphi_n) \int_a^t \varphi_n(x)\,dx, \quad t \in (a, b). \tag{8.65}$$

Сравнивая (8.64) и (8.65), мы видим, что ряд Фурье по ортонормированному базису, сходящийся лишь в смысле $\mathbb{L}_2$, можно *почленно интегрировать*. При этом получается по крайней мере *поточечно* сходящийся ряд.

Очевидно, что ряд Фурье по ортогональному базису также можно почленно интегрировать.

8.5. Вопросы для повторения и самостоятельной работы

1. Установить, что если в комплексном евклидовом пространстве первую аксиому оставить такой же, как и в

вещественном евклидовом пространстве, то полученная система аксиом станет противоречивой.

2. Из первой аксиомы комплексного евклидова пространства вывести, что для всякого $x \in \mathbb{E}$ скалярное произведение (x, x) – *вещественное* число.

3. Из аксиом комплексного евклидова пространства вывести, что для любых $x \in \mathbb{E}$, $y \in \mathbb{E}$ и любого комплексного числа α справедливо равенство
$$(x, \alpha y) = \overline{\alpha}(x, y). \tag{8.66}$$

4. Из аксиом евклидова пространства (как вещественного, так и комплексного) вывести, что для любых трёх элементов $x \in \mathbb{E}$, $y \in \mathbb{E}$, $z \in \mathbb{E}$ справедливо равенство (8.5).

5. Из аксиом евклидова пространства вывести, что для любого элемента $x \in \mathbb{E}$ скалярные произведения
$$(x, \Theta) = (\Theta, x) = 0,$$
то есть нулевой элемент ортогонален любому элементу евклидова пространства.

6. Доказать теорему 8.1 (неравенство Коши–Буняковского) для вещественного евклидова пространства.

7. Установить, что если в неравенстве Коши–Буняковского (8.7) для пары элементов $x \in \mathbb{E}$ и $y \in \mathbb{E}$ реализуется *равенство*, то элементы x и y – линейно *зависимы* в пространстве $\mathbb{E}$.

8. Установить, что формула (8.12) задаёт норму и в вещественном евклидовом пространстве.

9. Доказать, что линейное пространство l_2 числовых рядов $a \equiv \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ с комплексными слагаемыми и таких, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|^2$ сходится (см. с. 185–186, задачи 7 и 8 предыдущего раздела), становится *евклидовым* пространством, если ввести в нём скалярное произведение по формуле
$$(a, b) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} a_n \overline{b_n}.$$
При этом норма, введённая формулой (7.42), согласована с этим скалярным произведением.

10. Установить, что евклидово пространство l_2 является полным (то есть гильбертовым).

11. Установить, что счётная дистрибутивность скалярного произведения (следствие из теоремы 8.2) имеет место и по первому сомножителю, точнее, доказать, что если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ сходится в евклидовом пространстве $\mathbb{E}$, то для всякого элемента $y \in \mathbb{E}$ справедливо равенство
$$\Bigl(\sum_{n=1}^{\infty} x_n, y\Bigr) = \sum_{n=1}^{\infty} (x_n, y).$$

12. Доказать, что если $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – линейно независимая система в евклидовом пространстве $\mathbb{E}$, то формулы Шмидта (8.25) дают возможность получить ортонормированную систему $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ (а именно: в процессе вычислений в знаменателе *никогда* не будет нуля и система $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$, в которой e_n выражается только через x_1, x_2, ..., x_n, будет ортогональной и нормированной).

13. Получить многочлены Лежандра (см. с. 198) до многочленов пятой степени включительно.

14. Вычислить интегралы (8.27) и (8.28) и тем самым убедиться, что тригонометрические системы (8.26) и (8.29) являются соответственно *ортогональной* и *ортонормированной* системами в евклидовых пространствах $\mathbb{CL}_2[-\pi,\pi]$, $\mathbb{C}^*\mathbb{L}_2[-\pi,\pi]$ и $\mathbb{Q}_0\mathbb{L}_2[-\pi,\pi]$.

15. Вычислить интегралы (8.31) и (8.32) и тем самым убедиться, что системы косинусов (8.30) и (8.33) являются соответственно *ортогональной* и *ортонормированной* системами в евклидовых пространствах $\mathbb{CL}_2[0,\pi]$, $\mathbb{C}^*\mathbb{L}_2[0,\pi]$ и $\mathbb{Q}_0\mathbb{L}_2[0,\pi]$.

16. Вычислить интегралы (8.35) и (8.36) и тем самым убедиться, что системы синусов (8.34) и (8.37) являются соответственно *ортогональной* и *ортонормированной* системами в евклидовых пространствах $\mathbb{CL}_2[0,\pi]$, $\mathbb{C}^*\mathbb{L}_2[0,\pi]$ и $\mathbb{Q}_0\mathbb{L}_2[0,\pi]$.

17. Вычислить интегралы (8.39) и (8.40) и тем самым убедиться, что системы мнимых экспонент (8.38) и (8.41) являются соответственно *ортогональной* и *ортонормированной* системами в *комплексных* евклидовых пространствах $\mathbb{CL}_2[-\pi,\pi]$, $\mathbb{C}^*\mathbb{L}_2[-\pi,\pi]$ и $\mathbb{Q}_0\mathbb{L}_2[-\pi,\pi]$.

18. Установить, что тригонометрическая система

$$\left\{1, \cos\frac{\pi n x}{l}, \sin\frac{\pi n x}{l}\right\}_{n=1}^{\infty}, \quad l=\frac{b-a}{2} \tag{8.67}$$

является *ортогональной* системой, а нормированная система

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2l}}, \frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{\pi n x}{l}, \frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{\pi n x}{l}\right\}_{n=1}^{\infty} \tag{8.68}$$

– *ортонормированной* системой в евклидовых пространствах $\mathbb{CL}_2[a,b]$, $\mathbb{C}^*\mathbb{L}_2[a,b]$ и $\mathbb{Q}_0\mathbb{L}_2[a,b]$.

19. Установить, что система косинусов

$$\left\{\cos\frac{\pi n x}{l}\right\}_{n=0}^{\infty} \tag{8.69}$$

является *ортогональной* системой, а система

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{l}}, \sqrt{\frac{2}{l}}\cos\frac{\pi n x}{l}\right\}_{n=1}^{\infty} \tag{8.70}$$

– *ортонормированной* системой в евклидовых пространствах $\mathbb{CL}_2[0,l]$, $\mathbb{C}^*\mathbb{L}_2[0,l]$ и $\mathbb{Q}_0\mathbb{L}_2[0,l]$.

20. Установить, что система синусов

$$\left\{\sin\frac{\pi n x}{l}\right\}_{n=1}^{\infty} \tag{8.71}$$

является *ортогональной* системой, а нормированная система синусов

$$\left\{\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{\pi n x}{l}\right\}_{n=1}^{\infty} \tag{8.72}$$

– *ортонормированной* системой в евклидовых пространствах $\mathbb{CL}_2[0,l]$, $\mathbb{C}^*\mathbb{L}_2[0,l]$ и $\mathbb{Q}_0\mathbb{L}_2[0,l]$.

21. Установить, что система экспонент с мнимыми показателями

$$\left\{e^{\frac{\pi i n x}{l}}\right\}_{n=-\infty}^{+\infty}, \quad l=\frac{b-a}{2} \tag{8.73}$$

является *ортогональной* системой, а система

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2l}}\, e^{\frac{\pi i n x}{l}}\right\}_{n=-\infty}^{+\infty} \tag{8.74}$$

– *ортонормированной* системой в комплексных евклидовых пространствах $\mathbb{C}\mathbb{L}_2[a,b]$, $\mathbb{C}^*\mathbb{L}_2[a,b]$ и $\mathbb{Q}_0\mathbb{L}_2[a,b]$.

22. Установить, что для ортогональной системы $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеет место аналог теоремы 8.4: если $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n g_n$, то $c_n = \dfrac{(x, g_n)}{\|g_n\|^2}$. Это даёт возможность ввести ряды Фурье по ортогональной системе, используя формулу (8.45).

23. Установить, что общее неравенство Бесселя для ортогональной системы $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеет вид (8.53).

24. Записать общее неравенство Бесселя для тригонометрических систем в соответствующих евклидовых пространствах.

25. Установить, что для ортогонального базиса $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ равенство Парсеваля и обобщённое равенство Парсеваля имеют вид (8.61) и (8.62) соответственно.

26. Доказать аналог теоремы 8.7 для произвольного ортогонального базиса $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$, то есть установить, что если элемент $x \perp g_n$ для всех n, то это может быть только нулевой элемент Θ.

27. Установить, что ряд Фурье по любому ортогональному базису $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ пространства $\mathbb{C}\mathbb{L}_2[a,b]$, $\mathbb{C}^*\mathbb{L}_2[a,b]$ или $\mathbb{Q}_0\mathbb{L}_2[a,b]$ можно почленно интегрировать.

9. Тригонометрические ряды Фурье

Здесь мы будем в основном рассматривать евклидово пространство $\mathbb{Q}_0\mathbb{L}_2[-\pi,\pi]$ и ортогональную систему (8.26):

$$\{1, \cos x, \sin x, \ldots, \cos nx, \sin nx, \ldots\} \equiv \{1, \cos nx, \sin nx\}_{n=1}^{\infty}$$

в этом пространстве.

9.1. Понятие тригонометрического ряда и ряда Фурье

Функциональный ряд вида

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{9.1}$$

называется *тригонометрическим*.

Строго говоря, ряд (9.1) надо называть тригонометрическим на отрезке $[-\pi,\pi]$ или хотя бы на отрезке $[a,b]$ длины 2π (то есть $b-a=2\pi$). Однако с помощью линейной замены

$$t = \frac{(a+b)\pi + (b-a)x}{2\pi} \iff x = \frac{(2t-a-b)\pi}{b-a} \tag{9.2}$$

отрезок $x \in [-\pi,\pi]$ взаимно-однозначно переходит в отрезок $t \in [a,b]$. При этом рассматриваемая ортогональная тригонометрическая система (8.26) заменяется системой (8.67):

$$\left\{1, \cos\frac{\pi n t}{l}, \sin\frac{\pi n t}{l}\right\}_{n=1}^{\infty}, \quad l = \frac{b-a}{2}\,.$$

Это даёт нам возможность ограничиться рассмотрением рядов (9.1) по системе (8.26). Впрочем, ряды по системе (8.67) будут рассматриваться в конце этого раздела, в п. 9.6.

Предположим, что ряд (9.1) равномерно на $[-\pi, \pi]$ сходится к некоторой функции $f(x)$:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \overset{[-\pi,\pi]}{\rightrightarrows} f(x). \tag{9.3}$$

Но тогда согласно теореме 5.17 его можно почленно интегрировать. Вычисляя $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$ и учитывая (8.27), имеем

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = a_0\pi, \quad \text{то есть} \quad a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx. \tag{9.4}$$

Переобозначая в (9.3) индекс суммирования буквой k и умножая это соотношение на $\cos nx$ для любого натурального n (умножение на *ограниченную* функцию не нарушает равномерной сходимости), получаем

$$\frac{a_0}{2} \cdot \cos nx + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \cos nx \overset{[-\pi,\pi]}{\rightrightarrows} f(x) \cos nx.$$

Интегрируя почленно по переменной x от $-\pi$ до π с учётом (8.27) и (8.28) находим, что $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\,dx = a_n\pi$, то есть

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{9.5}$$

Совершенно аналогично (вместо умножения на $\cos nx$ умножим на $\sin nx$) можно получить

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{9.6}$$

Итак, мы видим, что из равномерной сходимости тригонометрического ряда к функции $f(x)$ (см. (9.3)) вытекает, что коэффициенты этого ряда вычисляются по формулам (9.4), (9.5) и (9.6).

Пусть функция $f(x) \in \mathbb{Q}_0\mathbb{L}_2[-\pi, \pi]$. Поставим ей в соответствие тригонометрический ряд

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right), \tag{9.7}$$

коэффициенты которого $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ вычислены по формулам

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \quad n = 0, 1, \ldots; \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx, \quad n = 1, 2, \ldots. \end{aligned} \tag{9.8}$$

Ряд в (9.7) называется *тригонометрическим рядом Фурье* функции $f(x)$, а коэффициенты $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, вычисленные по формулам (9.8), – её *коэффициентами Фурье*.

Иногда коэффициенты Фурье функции $f(x)$ мы будем обозначать через $\{a_n(f)\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{b_n(f)\}_{n=1}^{\infty}$.

После введения понятия тригонометрического ряда Фурье, естественно, возникают следующие вопросы.

1. Можно ли в (9.7) вместо знака эквивалентности поставить знак равенства хотя бы в смысле $\mathbb{L}_2$? Другими словами: будет ли система (8.26) ортогональным (а система (8.29) – ортонормированным) базисом в пространстве $\mathbb{Q}_0\mathbb{L}_2[-\pi, \pi]$?

2. Какие условия достаточно наложить на функцию $f(x)$, чтобы её ряд Фурье (9.7) сходился бы к ней поточечно либо равномерно?

9.2. Вспомогательные утверждения. Ядро Дирихле

Л е м м а 1. Пусть функция $\Phi(x)$, определённая на всей числовой оси $(-\infty,+\infty)$ и интегрируемая на любом отрезке $[a,b]\subset(-\infty,+\infty)$, является периодической с периодом $T>0$, то есть

$$\Phi(x+T)=\Phi(x)\quad \text{для всех } x\in(-\infty,+\infty).$$

Тогда для произвольного $c\in(-\infty,+\infty)$ справедливо равенство

$$\int\limits_{c}^{c+T}\Phi(x)\,dx=\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\Phi(x)\,dx.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. По аддитивному свойству интеграла имеем $\int\limits_{c}^{c+T}\Phi(x)\,dx=\int\limits_{c}^{-\frac{T}{2}}\Phi(x)\,dx+\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\Phi(x)\,dx+\int\limits_{\frac{T}{2}}^{c+T}\Phi(x)\,dx=$ $=$ (в последнем интеграле делаем замену $x=t+T$) $=$ $=\int\limits_{c}^{-\frac{T}{2}}\Phi(x)\,dx+\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\Phi(x)\,dx+\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{c}\Phi(t)\,dt=\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\Phi(x)\,dx$. Лемма доказана.

Итак, мы видим, что интеграл от периодической интегрируемой функции по отрезку длины периода не зависит от того, где мы возьмём этот отрезок. Поэтому в дальнейшем функции, заданные на отрезке $[a,b]$, будем считать периодически (с периодом $T=b-a$) продолженными на всю числовую ось и осреднёнными в точках разрыва первого рода. Ясно, что функция $f(x)$, непрерывная на $[a,b]$ и такая, что $f(b)=f(a)$, после указанного периодического продолжения сохраняет непрерывность на $(-\infty,+\infty)$.

Лемма 2. Пусть для некоторого $l > 0$ функция $\varphi(x)$, интегрируемая на отрезке $[-l, l]$, является там чётной, то есть $\varphi(-x) = \varphi(x)$ для всех $x \in [-l, l]$. Тогда

$$\int_{-l}^{l} \varphi(x)\,dx = 2\int_{0}^{l} \varphi(x)\,dx.$$

Доказательство. Используя свойства определённого интеграла, получаем $\int_{-l}^{l} \varphi(x)\,dx = \int_{-l}^{0} \varphi(x)\,dx + \int_{0}^{l} \varphi(x)\,dx =$ =(в первом интеграле делаем замену $x = -t$)$= -\int_{l}^{0} \varphi(t)\,dt + {}$ $+ \int_{0}^{l} \varphi(x)\,dx = 2\int_{0}^{l} \varphi(x)\,dx$. Лемма доказана.

Лемма 3. Пусть для некоторого $l > 0$ функция $\varphi(x)$, интегрируемая на отрезке $[-l, l]$, является там нечётной, то есть $\varphi(-x) = -\varphi(x)$ для всех $x \in [-l, l]$. Тогда

$$\int_{-l}^{l} \varphi(x)\,dx = 0.$$

Доказательство этой леммы совершенно аналогично доказательству леммы 2 и поэтому *не приводится*.

Введём теперь понятие осреднённых кусочно-гладких функций.

Множество $Q_0^1[a, b]$ функций, определённых на отрезке $[a, b]$, называется множеством *кусочно-гладких осреднённых функций*, если всякая функция $f(x)$ из этого множества в любой точке отрезка $[a, b]$ (за исключением, быть может, конечного числа точек) непрерывна и имеет непрерывную производную. На исключительном множестве функции $f(x)$ и

$f'(x)$ могут иметь лишь разрывы первого рода. При этом значения самой функции $f(x)$ в точках разрыва (в том числе и в концах отрезка $[a,b]$) осреднены по формулам (7.7).

Множество $Q_0^1[a,b]$ – линейное пространство (нетрудно видеть, что оно является подпространством линейного пространства $Q_0[a,b]$), но мы не будем в нём вводить норму или скалярное произведение. Тем не менее функции этого множества мы будем считать периодически продолженными с периодом, равным длине отрезка $[a,b]$ (то есть $b-a$) на всю числовую ось. Ввиду осреднения значений функции $f(x)$ в точках разрыва и в концах отрезка $[a,b]$ для всякого x из отрезка $[a,b]$ (а с учётом периодического продолжения – для всякого вещественного x) справедливо равенство

$$f(x) = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}\,. \tag{9.9}$$

Лемма 4 (лемма Римана). Для всякой кусочно-гладкой функции $f(x) \in Q_0^1[a,b]$ имеют место равенства

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int\limits_a^b f(x)\cos\lambda x\,dx = 0; \tag{9.10}$$

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int\limits_a^b f(x)\sin\lambda x\,dx = 0. \tag{9.11}$$

Доказательство. Установим равенство нулю предела (9.10) (равенство нулю предела (9.11) устанавливается аналогично). Для произвольной функции $f(x) \in Q_0^1[a,b]$ занумеруем точки разрыва функций $f(x)$ и $f'(x)$ в порядке их возрастания (присоединим к этим точкам, как обычно, и концы отрезка $[a, b]$):

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b.$$

Используя аддитивное свойство определённого интеграла и формулу интегрирования по частям, получаем

$$\int\limits_a^b f(x) \cos \lambda x \, dx = \sum_{k=1}^{m} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) \cos \lambda x \, dx =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \left[f(x) \cdot \frac{\sin \lambda x}{\lambda} \Big|_{x=x_{k-1}+0}^{x=x_k-0} - \frac{1}{\lambda} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f'(x) \sin \lambda x \, dx \right]. \quad (9.12)$$

Так как функции $f(x)$ и $f'(x)$ кусочно непрерывны и имеют лишь точки разрыва первого рода, то они *ограничены* на отрезке $[a, b]$; функция $\sin \lambda x$ также ограничена. Поэтому при $\lambda \to \infty$ каждое из слагаемых в последней сумме равенства (9.12) стремится к нулю. Лемма доказана.

Найдём выражение n-й частичной суммы $S_n(x, f)$ тригонометрического ряда Фурье (9.7) функции $f(x) \in \mathbb{Q}_0\mathbb{L}_2[-\pi, \pi]$. Для этого в ряде (9.7) обозначим индекс суммирования буквой k, а переменную интегрирования в формулах (9.8) коэффициентов Фурье – буквой t:

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)\,; \\ a_k &= \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt \, dt, \quad k = 0, 1, \ldots; \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt \, dt, \quad k = 1, 2, \ldots . \end{aligned} \qquad (9.13)$$

Из (9.13) получаем $S_n(x,f)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)=$
$=\dfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(t)\,dt+\dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sum\limits_{k=1}^{n}(f(t)\cos kt\cos kx+f(t)\sin kt\sin kx)\,dt=$
$=\dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(t)\left[\dfrac{1}{2}+\sum\limits_{k=1}^{n}\cos k(t-x)\right]dt=$ (сделаем замену $t=$ $=x+y$, при этом $dt=dy$, а пределы интегрирования останутся *те же*, так как функция $f(t)$ периодически продолжена на всю числовую ось с периодом 2π) $=\dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x+y)\Bigl(\dfrac{1}{2}+$ $+\sum\limits_{k=1}^{n}\cos ky\Bigr)dy.$ Если же ввести в рассмотрение функцию

$$D_n(y)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos ky\right), \tag{9.14}$$

называемую *ядром Дирихле*, то получим выражение частной суммы ряда Фурье через ядро Дирихле:

$$S_n(x,f)=\int_{-\pi}^{\pi}f(x+y)D_n(y)\,dy. \tag{9.15}$$

Отметим следующие очевидные свойства ядра Дирихле (9.14):

$$\begin{aligned}&1.\ D_n(y+2\pi)=D_n(y);\\&2.\ D_n(-y)=D_n(y);\\&3.\ \int_{-\pi}^{\pi}D_n(y)\,dy=2\int_{0}^{\pi}D_n(y)\,dy=1.\end{aligned} \tag{9.16}$$

Используя чётность ядра Дирихле (см. (9.16), второе свойство), запишем равенство (9.15) в несколько ином виде: $S_n(x,f)=\int\limits_{-\pi}^{0}f(x+y)D_n(y)\,dy+\int\limits_{0}^{\pi}f(x+y)D_n(y)\,dy=$

= (сделаем в первом интеграле замену $y = -z$, при этом $dy = -dz$) $= \int\limits_0^\pi f(x-z)D_n(z)\,dz + \int\limits_0^\pi f(x+y)D_n(y)\,dy$. Итак, мы получили несколько отличающееся от (9.15) выражение частной суммы ряда Фурье через ядро Дирихле:

$$S_n(x,f) = \int\limits_0^\pi \big[f(x+y) + f(x-y)\big]\,D_n(y)\,dy. \tag{9.17}$$

Умножив (9.14) при $y \neq 2\pi m$ $(m \in \mathbb{Z})$ на $2\pi\sin\dfrac{y}{2}$ и преобразуя получившиеся произведения по известным тригонометрическим формулам, имеем $\pi \cdot D_n(y) \cdot 2\sin\dfrac{y}{2} = \sin\dfrac{y}{2} +$ $+2\sin\dfrac{y}{2}\cos y + \dots + 2\sin\dfrac{y}{2}\cos ny = \sin\dfrac{y}{2} + \sin\dfrac{3}{2}y - \sin\dfrac{y}{2} +$ $+\dots+\sin\left(n+\dfrac{1}{2}\right)y - \sin\left(n-\dfrac{1}{2}\right)y = \sin\left(n+\dfrac{1}{2}\right)y$, то есть

$$D_n(y) = \frac{\sin\left(n+\dfrac{1}{2}\right)y}{2\pi\sin\dfrac{y}{2}}\,. \tag{9.18}$$

Формула (9.18) была выведена из (9.14) при $y \neq 2\pi m$, где $m \in \mathbb{Z}$. Однако можно придать ей смысл и при $y = 2\pi m$, если в этом случае найти предел правой части равенства (9.18) при $y \to 2\pi m$. Действительно, раскрывая неопределённости $\dfrac{0}{0}$, например по правилу Лопиталя, нетрудно убедиться, что пределы

$$\lim_{y\to 2\pi m} \frac{\sin\left(n+\dfrac{1}{2}\right)y}{2\pi\sin\dfrac{y}{2}} = \frac{2n+1}{2\pi}\,, \quad m = 0, \pm1, \pm2, \dots. \tag{9.19}$$

9.3. Некоторые свойства тригонометрических рядов Фурье

Теорема 9.1 (о поточечной сходимости тригонометрического ряда Фурье). Для всякой функции $f(x) \in Q_0^1[-\pi, \pi]$ для любого $x \in [-\pi, \pi]$ имеет место равенство

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right). \tag{9.20}$$

Доказательство. Пусть $f(x)$ – произвольная функция из $Q_0^1[-\pi, \pi]$. Используя выражение частной суммы ряда Фурье через ядро Дирихле (9.17), свойства (9.16) этого ядра и равенство (9.9), видим, что для любого $x \in [-\pi, \pi]$ разность $f(x) - S_n(x, f) = \dfrac{f(x+0) + f(x-0)}{2} - S_n(x, f) =$ $= \int\limits_0^\pi \big[f(x+0) + f(x-0)\big] D_n(y)\, dy - \int\limits_0^\pi \big[f(x+y) + f(x-y)\big] D_n(y)\, dy =$ $=$ (запишем разность интегралов одним интегралом, который затем разобьём на сумму двух интегралов) $= \int\limits_0^\pi \big[f(x+0) - f(x+y)\big] D_n(y)\, dy + \int\limits_0^\pi \big[f(x-0) - f(x-y)\big] D_n(y)\, dy$, то есть

$$f(x) - S_n(x, f) = I_1 + I_2, \tag{9.21}$$

где

$$I_1 = \int\limits_0^\pi \big[f(x+0) - f(x+y)\big] D_n(y)\, dy, \tag{9.22}$$

$$I_2 = \int\limits_0^\pi \big[f(x-0) - f(x-y)\big] D_n(y)\, dy. \tag{9.23}$$

Используя формулу (9.18) для ядра Дирихле, приведём равенство (9.22) для интеграла I_1 к виду (рассмотрение равенства (9.23) для интеграла I_2 совершенно аналогично):

$$I_1 = \int\limits_0^\pi G_x(y)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)dy, \tag{9.24}$$

в котором $G_x(y)$ означает функцию

$$G_x(y) = \frac{f(x+0)-f(x+y)}{2\pi\sin\dfrac{y}{2}}\,. \tag{9.25}$$

Так как функция $f(x)$ является кусочно-гладкой, то существует предел $\lim\limits_{y\to 0+0} G_x(y) =$

$$= \frac{1}{\pi}\lim_{y\to 0+0}\frac{f(x+0)-f(x+y)}{y}\cdot\frac{y}{2\sin\dfrac{y}{2}} = -\frac{1}{\pi}f'_{\text{пр}}(x+0).$$

Поэтому можно доопределить функцию $G_x(y)$, не определённую при $y=0$, её предельным значением при $y\to 0+0$, равным $-\dfrac{1}{\pi}f'_{\text{пр}}(x+0)$. Из существования предела $\lim\limits_{y\to 0+0} G_x(y)$ и последующего доопределения функции $G_x(y)$ вытекает её локальная ограниченность в правой окрестности точки $y = 0$, а именно: найдутся $\sigma\in(0,\pi)$ и $M_1(x)>0$, что $|G_x(y)|\leqslant M_1(x)$ для всех $y\in[0,\sigma)$. На отрезке $[\sigma,\pi]$ функция $G_x(y)$, согласно (9.25), является кусочно-гладкой, поэтому она тоже ограничена, то есть существует $M_2(x)>0$, что $|G_x(y)|\leqslant M_2(x)$ для всех $y\in[\sigma,\pi]$. Поэтому функция $G_x(y)$ ограничена на всём отрезке $[0,\pi]$, так как можно указать такое $M(x)=\max\{M_1(x),M_2(x)\}>0$, что $|G_x(y)|\leqslant M(x)$ для всех $y\in[0,\pi]$.

Возьмём произвольное $\varepsilon > 0$ и рассмотрим для него число $\delta = \min\left\{1, \dfrac{\varepsilon}{4M(x)}\right\} > 0$. Разобьём интеграл I_1, определяемый формулой (9.24), точкой $\delta \in (0,1]$ на сумму двух интегралов I_{11} и I_{12}:

$$I_1 = \underbrace{\int\limits_0^{\delta} G_x(y)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)dy}_{I_{11}} + \underbrace{\int\limits_{\delta}^{\pi} G_x(y)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)dy}_{I_{12}}.$$

Модуль функции $|G_x(y)|$ на отрезке $[0,\pi]$, а значит и на отрезке $[0,\delta]$, ограничен величиной $M(x)$, следовательно, в силу определения числа δ, модуль первого слагаемого $|I_{11}| \leqslant \leqslant M(x)\cdot\delta \leqslant \dfrac{\varepsilon}{4}$. На отрезке $[\delta,\pi]$ функция $G_x(y)$ является кусочно-гладкой, поэтому, согласно лемме Римана, предел второго слагаемого $\lim\limits_{n\to\infty} I_{12} = 0$, то есть для всякого $\varepsilon > 0$ найдётся номер N_1, что для всех номеров $n > N_1$ модуль $|I_{12}| < \dfrac{\varepsilon}{4}$. Таким образом, для всякого $\varepsilon > 0$ найдётся номер N_1, что для всех номеров $n > N_1$ модуль $|I_1| \leqslant |I_{11}| + |I_{12}| < < \dfrac{\varepsilon}{4} + \dfrac{\varepsilon}{4} = \dfrac{\varepsilon}{2}$. Аналогичные рассмотрения интеграла I_2, задаваемого равенством (9.23), приводят к тому, что для всякого $\varepsilon > 0$ найдётся номер N_2, что для всех номеров $n > N_2$ модуль $|I_2| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Итак, мы имеем, что для всякой функции $f(x) \in Q_0^1[-\pi,\pi]$ для любого $x \in [-\pi,\pi]$ и для произвольного $\varepsilon > 0$ найдётся номер $N = \max\{N_1, N_2\}$, что для всех номеров $n > N$ модуль разности $|f(x) - S_n(x,f)| \leqslant |I_1| + |I_2| < < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. А это как раз и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x,f) = = f(x)$. Теорема доказана.

Теорема 9.2 (о равномерной сходимости ряда Фурье). Для всякой функции $f(x) \in C^*[-\pi,\pi] \cap Q_0^1[-\pi,\pi]$ её тригонометрический ряд Фурье

$$\frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n(f)\cos nx + b_n(f)\sin nx\Big) \overset{[-\pi,\pi]}{\rightrightarrows} f(x). \quad (9.26)$$

Доказательство. Рассмотрим произвольную функцию $f(x) \in C^*[-\pi,\pi] \cap Q_0^1[-\pi,\pi]$. Согласно только что доказанной теореме 9.1 о поточечной сходимости, ряд, стоящий в левой части (9.26), то есть тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$, для любого $x \in [-\pi,\pi]$ сходится к $f(x)$. Поэтому достаточно установить *равномерную* сходимость этого ряда. Пусть $n \geqslant 1$. Применяя формулу интегрирования по частям, имеем $a_n(f) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx =$

$= \dfrac{1}{\pi}\cdot f(x)\cdot\dfrac{\sin nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} - \dfrac{1}{\pi n}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin nx\,dx = -\dfrac{b_n(f')}{n}$, то есть

$$a_n(f) = -\frac{b_n(f')}{n}, \quad n = 1, 2, \ldots. \quad (9.27)$$

Совершенно аналогично можно найти связь между коэффициентами $b_n(f)$ и $a_n(f')$:

$$b_n(f) = \frac{a_n(f')}{n}, \quad n = 1, 2, \ldots. \quad (9.28)$$

Поэтому, используя ограниченность косинуса и синуса для вещественных значений аргумента, равенства (9.27) и (9.28) и неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим, получаем, что n-й член ряда (9.26) для всех $x \in [-\pi, \pi]$ допускает оценку $|a_n(f)\cos nx + b_n(f)\sin nx| \leqslant$ $\leqslant |a_n(f)| + |b_n(f)| = \dfrac{1}{n} \cdot |a_n(f')| + \dfrac{1}{n} \cdot |b_n(f')| \leqslant \dfrac{1}{2}\left[|a_n(f')|^2 + \dfrac{1}{n^2}\right] +$ $+ \dfrac{1}{2}\left[|b_n(f')|^2 + \dfrac{1}{n^2}\right]$, которую можно записать в виде

$$|a_n(f)\cos nx + b_n(f)\sin nx| \leqslant \frac{1}{2}\left[|a_n(f')|^2 + |b_n(f')|^2\right] + \frac{1}{n^2}\,, \quad (9.29)$$

справедливого для всех $x \in [-\pi, \pi]$ и для любой функции $f(x) \in C^*[-\pi, \pi] \cap Q_0^1[-\pi, \pi]$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ сходится согласно (2.12), а сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[|a_n(f')|^2 + |b_n(f')|^2\right]$ вытекает из неравенства Бесселя для коэффициентов Фурье функции $f'(x) \in \mathbb{Q}_0\mathbb{L}_2[-\pi, \pi]$ по ортогональной системе (8.26)[1]. Поэтому тригонометрический ряд (9.26) на отрезке $[-\pi, \pi]$ мажорируется *сходящимся* числовым рядом и, следовательно, по признаку Вейерштрасса (см. теорему 5.5) сходится на этом отрезке равномерно. Теорема доказана.

Теорема 9.3 (почленное дифференцирование ряда Фурье). Пусть функция $f(x) \in C^*[-\pi, \pi] \cap Q_0^1[-\pi, \pi]$, а её тригонометрический ряд Фурье имеет вид

$$f(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n(f)\cos nx + b_n(f)\sin nx\Big). \quad (9.30)$$

[1] Если решить задачу 24 из 8-го раздела (см. с. 218), то получим, что интересующее нас неравенство Бесселя принимает вид

$$\frac{|a_0(f')|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[|a_n(f')|^2 + |b_n(f')|^2\right] \leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2 dx.$$

Тогда ряд Фурье для производной $f'(x)$ можно получить из ряда (9.30) почленным дифференцированием:

$$f'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \Big(nb_n(f) \cos nx - na_n(f) \sin nx \Big). \tag{9.31}$$

Доказательство. Как уже отмечалось при доказательстве предыдущей теоремы, функция $f'(x) \in \mathbb{Q}_0\mathbb{L}_2[-\pi, \pi]$ (разумеется, после осреднения функции $f'(x)$ в точках её разрыва, к которым, естественно, причисляются и концы отрезка $[-\pi, \pi]$). Рассмотрим ряд Фурье функции $f'(x)$:

$$f'(x) \sim \frac{a_0(f')}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(a_n(f') \cos nx + b_n(f') \sin nx \Big).$$

Нулевой коэффициент Фурье в этом соотношении $a_0(f') = = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\, dx = \dfrac{1}{\pi} f(x) \Big|_{-\pi}^{\pi} = \dfrac{f(\pi) - f(-\pi)}{\pi} = 0$, так как функция $f(x) \in C^*[-\pi, \pi]$, а из равенств (9.27) и (9.28), полученных при доказательстве теоремы 9.2, вытекает, что

$$a_n(f') = nb_n(f), \quad b_n(f') = -na_n(f); \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Поэтому соответствие тригонометрического ряда в (9.31) производной $f'(x)$ справедливо. Теорема доказана.

Отметим, что в этой теореме речь идёт лишь о *способе получения* ряда Фурье для функции $f'(x)$, если известен ряд Фурье функции $f(x) \in C^*[-\pi, \pi] \cap Q_0^1[-\pi, \pi]$. Вопрос о *сходимости* полученного ряда (9.31) в каком бы то ни было смысле здесь *не рассматривается*.

Теорема 9.4 (порядок убывания коэффициентов Фурье). Пусть функция $f(x)$ такова, что для некоторого целого $m \geqslant 0$ функции

$$f^{(k)}(x) \in C^*[-\pi, \pi], \quad k = 0, 1, \ldots, m; \quad f^{(m)}(x) \in Q_0^1[-\pi, \pi].$$

Тогда коэффициенты Фурье $\{a_n(f)\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{b_n(f)\}_{n=1}^{\infty}$ функции $f(x)$ с ростом n убывают быстрее, чем $\dfrac{1}{n^{m+1}}$:

$$a_n(f) = o\left(\frac{1}{n^{m+1}}\right),\ \ b_n(f) = o\left(\frac{1}{n^{m+1}}\right);\quad n\to\infty. \tag{9.32}$$

Доказательство. Интегрирование по частям формул для коэффициентов Фурье

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx,\quad n=0,1,\ldots;$$

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx,\quad n=1,2,\ldots;$$

проведённое при доказательстве теоремы 9.2, даёт (см. равенства (9.27) и (9.28)), что

$$na_n(f) = -b_n(f'),\ \ nb_n(f) = -a_n(f'),\quad n=1,2,\ldots. \tag{9.33}$$

Проинтегрируем по частям эти формулы $m+1$ раз. Если обозначить остаток от деления числа $m+1$ на 4 за k (ясно, что k может принимать лишь значения 0, 1, 2 или 3), то в результате интегрирования по частям получим

$$\begin{gathered}
n^{m+1}a_n(f) = \begin{cases} a_n\big(f^{(m+1)}\big), & k=0,\\ -b_n\big(f^{(m+1)}\big), & k=1,\\ -a_n\big(f^{(m+1)}\big), & k=2,\\ b_n\big(f^{(m+1)}\big), & k=3;\end{cases}\\
n^{m+1}b_n(f) = \begin{cases} b_n\big(f^{(m+1)}\big), & k=0,\\ a_n\big(f^{(m+1)}\big), & k=1,\\ -b_n\big(f^{(m+1)}\big), & k=2,\\ -a_n\big(f^{(m+1)}\big), & k=3.\end{cases}
\end{gathered} \tag{9.34}$$

Но так как функция $f^{(m+1)}(x) \in \mathbb{Q}_0\mathbb{L}_2[-\pi,\pi]$, то из неравенства Бесселя для этой функции по тригонометрической системе (8.26) и необходимого признака сходимости числовых рядов имеем, что

$$\lim_{n\to\infty} a_n\big(f^{(m+1)}\big) = \lim_{n\to\infty} a_n\big(f^{(m+1)}\big) = 0. \qquad (9.35)$$

Из (9.34) и (9.35) вытекает (9.32). Теорема доказана.

9.4. Метод Фейера суммирования тригонометрических рядов Фурье

Теорема 9.2, доказанная в предыдущем пункте, говорит о том, что достаточными условиями равномерной сходимости тригонометрического ряда Фурье к раскладываемой функции $f(x)$ является одновременное выполнение двух условий: во-первых, $f(x) \in C^*[-\pi,\pi]$ (функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[-\pi,\pi]$ и после периодического продолжения на всю числовую ось $(-\infty,+\infty)$ также остаётся непрерывной), а во-вторых, $f(x) \in Q_0^1[-\pi,\pi]$ (функция $f(x)$ – кусочно-гладкая, то есть обладает кусочно-непрерывной производной $f'(x)$, имеющей не более чем конечное число точек разрыва, причём все эти точки разрыва – первого рода). Первое условие не только достаточно, но и необходимо: действительно, если тригонометрический ряд (9.1) сходится равномерно на $[-\pi,\pi]$, то и сумма этого ряда $f(x) \in C^*[-\pi,\pi]$ (так как все его слагаемые принадлежат $C^*[-\pi,\pi]$). Второе же условие необходимым *не является* и может быть ослаблено. Однако целиком отбросить его нельзя. Дело в том, что ещё в 1876 г. дю Буа-Реймон[1] построил пример функции

[1] P. Du Bois-Reymond. Untersuchungen über die Convergenz und Divergenz der Fourierschen Darstellungsfirmen // Abhadl. Akad. Wissensch. München, 1876, T. 12, S. 1–103.

$f(x) \in C^*[-\pi, \pi]$, ряд Фурье которой *расходится* в некоторых точках.

Для того чтобы по ряду Фурье функции $f(x) \in C^*[-\pi, \pi]$ восстановить породившую его функцию $f(x)$, Фейер предложил применить к ряду Фурье метод суммирования *средних арифметических*, рассмотренный нами ранее (см. раздел 4). Этот метод получил название *метода Фейера*. Он состоит в следующем. Рассмотрим n-ю частичную сумму $S_n(x, f)$ тригонометрического ряда Фурье функции $f(x)$ и представим её через ядро Дирихле (см. (9.14) и (9.15)):

$$\begin{aligned} S_n(x, f) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x+y) D_n(y)\, dy. \end{aligned} \tag{9.36}$$

Введём n-ю *сумму Фейера* как среднее арифметическое частичных сумм ряда Фурье:

$$\sigma_n(x, f) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} S_k(x, f).$$

Из (9.36) следует, что $\sigma_n(x, f)$ можно записать в виде

$$\begin{aligned} \sigma_n(x, f) &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+y) D_k(y)\, dy = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x+y)\, \Phi_n(y)\, dy, \end{aligned} \tag{9.37}$$

где

$$\Phi_n(y) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} D_k(y) \tag{9.38}$$

– *ядро Фейера*. Преобразуем ядро Фейера подобно ядру Дирихле (см. преобразования на с. 227). Используя (9.18), из (9.38) имеем $\Phi_n(y) = \dfrac{1}{n+1}\cdot\dfrac{1}{2\pi\sin\frac{y}{2}}\Bigg(\sin\dfrac{y}{2}+\sin\dfrac{3y}{2}+$ $+\dots+\sin\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\Bigg)=$ (умножим и разделим на $2\sin\dfrac{y}{2}$ при $y\neq 2\pi m$, где $m\in\mathbb{Z}$) $=\dfrac{1}{4\pi(n+1)\sin^2\frac{y}{2}}\Bigg(2\sin\dfrac{y}{2}\,\sin\dfrac{y}{2}+$ $+2\sin\dfrac{y}{2}\sin\dfrac{3y}{2}+\dots+2\sin\dfrac{y}{2}\sin\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\Bigg)=\dfrac{1}{4\pi(n+1)\sin^2\frac{y}{2}}\times$ $\times\big(1-\cos y+\cos y-\cos 2y+\dots+\cos ny-\cos(n+1)y\big)=$ $=\dfrac{1-\cos(n+1)y}{4\pi(n+1)\sin^2\frac{y}{2}}$, а так как $1-\cos(n+1)y = 2\sin^2\dfrac{n+1}{2}\,y$, то окончательно получаем

$$\Phi_n(y)=\frac{1}{2\pi(n+1)}\left(\frac{\sin\frac{n+1}{2}\,y}{\sin\frac{y}{2}}\right)^2. \tag{9.39}$$

Подобно формуле (9.18) для ядра Дирихле, только что полученной формуле (9.39) для ядра Фейера, выведенной при $y\neq 2\pi m$ ($m\in\mathbb{Z}$), можно придать смысл и при $y=2\pi m$, если и здесь найти предел правой части равенства (9.39) при $y\to 2\pi m$. В самом деле, раскрывая неопределённости $\dfrac{0}{0}$ по правилу Лопиталя, нетрудно убедиться, что в этом случае пределы

$$\lim_{y\to 2\pi m} \frac{1}{2\pi(n+1)} \left(\frac{\sin \dfrac{n+1}{2} y}{\sin \dfrac{y}{2}} \right)^2 = \frac{n+1}{2\pi}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots .$$

Отметим, подобно свойствам ядра Дирихле (9.14), следующие свойства ядра Фейера (9.38):

$$\begin{array}{ll} 1. & \Phi_n(y) \geqslant 0; \\ 2. & \Phi_n(y+2\pi) = \Phi_n(y); \\ 3. & \Phi_n(-y) = \Phi_n(y); \\ 4. & \int\limits_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(y)\, dy = 1; \\ 5. & \text{Для всякого } \delta \in (0,\pi) \text{ последовательность} \\ & \Phi_n(y) \overset{Y_\delta}{\rightrightarrows} \varphi(y) \equiv 0, \text{ где } Y_\delta \equiv \{y : \delta \leqslant |y| \leqslant \pi\}. \end{array} \tag{9.40}$$

Нетрудно проверить, что первые четыре свойства вытекают из свойств (9.16) ядра Дирихле, а также из (9.38) и (9.39), а последнее свойство – из теоремы 5.1 о необходимых и достаточных условиях равномерной сходимости функциональной последовательности, так как

$$0 \leqslant \Phi_n(y) \leqslant \frac{1}{4\pi(n+1)\sin^2 \dfrac{\delta}{2}} \quad \text{для всех } y \in Y_\delta.$$

Теорема 9.5 (теорема Фейера). Для всякой функции $f(x) \in C^*[-\pi,\pi]$ последовательность $\big\{\sigma_n(x,f)\big\}_{n=0}^{\infty}$ её сумм Фейера равномерно на $[-\pi,\pi]$ сходится к $f(x)$.

Доказательство. Рассмотрим произвольную функцию $f(x) \in C^*[-\pi,\pi]$. Так как она непрерывна на отрезке

$[-\pi, \pi]$, то она, естественно, ограничена на этом отрезке, то есть найдётся такое число $M > 0$, что

$$|f(x)| \leqslant M \quad \text{для всех } x \in [-\pi, \pi]. \tag{9.41}$$

Впрочем, считая функцию $f(x)$ периодически продолженной с периодом $T = 2\pi$ на всю числовую ось, можно заключить, что неравенство (9.41) выполняется не только для всех $x \in [-\pi, \pi]$, но и для всех $x \in (-\infty, +\infty)$. При этом, так как $f(x) \in C^*[-\pi, \pi]$ и, следовательно, $f(-\pi) = f(\pi)$, то, согласно замечанию на с. 222, периодически продолженная функция непрерывна на $(-\infty, +\infty)$. Стало быть, она является непрерывной на *отрезке* $[-2\pi, 2\pi]$, и поэтому *равномерно непрерывна* на этом отрезке. Это означает, что для всякого $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta \in (0, \pi)$, что для любых $x' \in [-2\pi, 2\pi]$ и $x'' \in [-2\pi, 2\pi]$ таких, что $|x' - x''| < \delta$ справедливо неравенство

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2}\,. \tag{9.42}$$

Согласно пятому свойству ядра Фейера (9.40) последовательность $\Phi_n(y) \overset{Y_\delta}{\rightrightarrows} \varphi(y) \equiv 0$, то есть для любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер N, что для всех номеров $n > N$ имеет место неравенство (см. также первое свойство ядра Фейера):

$$0 \leqslant \Phi_n(y) < \frac{\varepsilon}{9\pi M} \quad \text{для любого } y \in Y_\delta. \tag{9.43}$$

Итак, для произвольного $\varepsilon > 0$ можно указать номер N, что для всех номеров $n > N$ и для любых $x \in [-\pi, \pi]$ модуль разности (см. (9.37) и (9.40), первое и четвёртое свойство) допускает оценку $|f(x) - \sigma_n(x, f)| = \left| \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\Phi_n(y)\,dy - \right.$

$$-\int_{-\pi}^{\pi} f(x+y)\Phi_n(y)\,dy\Bigg| \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)-f(x+y)|\Phi_n(y)\,dy,$$ то есть

$$|f(x)-\sigma_n(x,f)| \leqslant I_1+I_2+I_3, \tag{9.44}$$

где

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-\pi}^{-\delta} |f(x)-f(x+y)|\Phi_n(y)\,dy,\\ I_2 &= \int_{-\delta}^{\delta} |f(x)-f(x+y)|\Phi_n(y)\,dy,\\ I_3 &= \int_{\delta}^{\pi} |f(x)-f(x+y)|\Phi_n(y)\,dy. \end{aligned}$$

Но согласно первому и четвёртому свойствам ядра Фейера (9.40), а также неравенству (9.42), имеем, что

$$I_2 \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\int_{-\delta}^{\delta} \Phi_n(y)\,dy \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(y)\,dy = \frac{\varepsilon}{2}\,, \tag{9.45}$$

а из (9.41) и (9.43), кроме того, вытекает, что сумма двух оставшихся интегралов (I_1+I_3) допускает оценку

$$\begin{gathered} I_1+I_3 = \int_{Y_\delta} |f(x)-f(x+y)|\Phi_n(y)\,dy \leqslant \\ \leqslant 2M\int_{Y_\delta} \Phi_n(y)\,dy \leqslant 2M\cdot\frac{\varepsilon}{9\pi M}\cdot 2\pi < \frac{\varepsilon}{2}\,. \end{gathered} \tag{9.46}$$

Поэтому из (9.44), (9.45) и (9.46) следует, что для произвольного $\varepsilon > 0$ можно указать номер N, что для всех номеров $n > N$ и для любых $x \in [-\pi,\pi]$ модуль разности

$|f(x) - \sigma_n(x, f)| \leqslant I_1 + I_2 + I_3 < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. А это и означает, что $\sigma_n(x, f) \overset{[-\pi,\pi]}{\rightrightarrows} f(x)$. Теорема доказана.

Теорема 9.6 (теорема Вейерштрасса). Система функций $\{1, \cos nx, \sin nx\}_{n=1}^{\infty}$ *замкнута* в линейном нормированном пространстве $\mathbb{C}^*[-\pi, \pi]$.

Доказательство. Согласно определению замкнутости системы функций и нормы в пространстве $\mathbb{C}^*[-\pi, \pi]$, нам нужно доказать, что для всякой функции $f(x)$ из пространства $\mathbb{C}^*[-\pi, \pi]$ для любого $\varepsilon > 0$ найдутся натуральное n и тригонометрический многочлен

$$T_n(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \bigl(\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx\bigr),$$

определяемый своими коэффициентами $\{\alpha_k\}_{k=0}^{n}$ и $\{\beta_k\}_{k=1}^{n}$, что норма разности $\|f - T_n\|_C < \varepsilon$, то есть для произвольного $x \in [-\pi, \pi]$ модуль разности $|f(x) - T_n(x)| < \varepsilon$.

После этого разъяснения утверждение теоремы 9.6 сразу вытекает из теоремы 9.5. Действительно, в качестве тригонометрического многочлена $T_n(x)$ можно выбрать сумму Фейера $\sigma_n(x, f)$ (а она является тригонометрическим многочленом как среднее арифметическое тригонометрических многочленов – частичных сумм тригонометрического ряда) с таким номером n, что для произвольного $x \in [-\pi, \pi]$ модуль разности $|f(x) - \sigma_n(x, f)| < \varepsilon$. Теорема доказана.

Следствие. Система функций $\{1, \cos nx, \sin nx\}_{n=1}^{\infty}$ *замкнута* в пространстве $\mathbb{C}^*\mathbb{L}_2[-\pi, \pi]$.

Доказательство. Возьмём произвольную функцию $f(x)$ из пространства $\mathbb{C}^*\mathbb{L}_2[-\pi, \pi]$. Так как $f(x) \in \mathbb{C}^*[-\pi, \pi]$[1],

---

[1]Напомним, что линейные нормированные пространства $\mathbb{C}^*[-\pi, \pi]$

а система функций $\{1, \cos nx, \sin nx\}_{n=1}^{\infty}$ замкнута в пространстве $\mathbb{C}^*[-\pi, \pi]$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдётся тригонометрический многочлен $T_n(x)$, что для всех $x \in [-\pi, \pi]$ модуль разности $|f(x) - T_n(x)| < \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi + 1}}$. Но тогда квадрат нормы разности $\|f - T_n\|_2^2 = \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x) - T_n(x)|^2 dx \leqslant \dfrac{\varepsilon^2}{2\pi + 1} \cdot 2\pi < \varepsilon^2$, то есть $\|f - T_n\|_2 < \varepsilon$. Следствие доказано.

Теорема Вейерштрасса 9.6 говорит о том, что любую непрерывную *периодическую* функцию можно с любой степенью точности приблизить тригонометрическими многочленами. Имеется и другая теорема Вейерштрасса, говорящая о том, что любую непрерывную на отрезке функцию (не обязательно имеющую равные значения на концах, то есть, возможно, становящуюся разрывной после периодического продолжения) можно с любой степенью точности приблизить *алгебраическими* многочленами. Однако эта теорема в данном курсе не используется, и поэтому мы её устанавливать не будем.

9.5. Базисность тригонометрических систем

Теорема 9.7. Ортонормированная тригонометрическая система (8.29):

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}} \right\}_{n=1}^{\infty}$$

и $\mathbb{C}^*\mathbb{L}_2[-\pi, \pi]$ совпадают как *множества* (они состоят из *одних и тех же* функций), совпадают как *линейные пространства* (сложение и умножение на числа в них *одни и те же*, но различаются как *линейные нормированные пространства* (норма функции в них определена *по-разному*).

является *ортонормированным базисом* в евклидовом пространстве $\mathbb{Q}_0\mathbb{L}_2[-\pi, \pi]$.

Доказательство. Пусть функция $f(x) \in \mathbb{Q}_0\mathbb{L}_2[-\pi, \pi]$. Следовательно, она ограничена, то есть существует $M \geqslant 0$, что

$$|f(x)| \leqslant M \quad \text{для всех } x \in [-\pi, \pi]. \tag{9.47}$$

Запишем точки разрыва функции $f(x)$ (включая концы отрезка $[-\pi, \pi]$) в порядке возрастания:

$$-\pi = x_0 < x_1 < \dots < x_{m-1} < x_m = \pi.$$

Обозначим

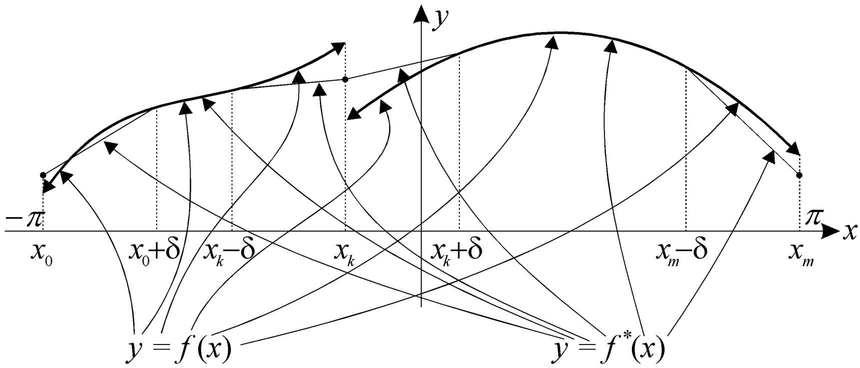
$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1},\ k = 1, 2, \dots, m; \quad \Delta = \min_k \Delta x_k.$$

Определим для произвольного $\varepsilon > 0$ следующее число

$$\delta = \min\left\{\frac{\Delta}{2}, \frac{\varepsilon^2}{32m(M^2+1)}\right\} > 0. \tag{9.48}$$

Теперь установим *замкнутость* ортонормированной системы (8.29) в евклидовом пространстве $\mathbb{Q}_0\mathbb{L}_2[-\pi, \pi]$. Для этого рассмотрим функцию

$$f^*(x) = \begin{cases} \dfrac{(x - x_k)f(x_k + \delta) + (x_k + \delta - x)f(x_k)}{\delta}, \\ x \in (x_k, x_k + \delta), \quad k = 0, 1, \dots, m-1; \\ \dfrac{(x - x_k + \delta)f(x_k) + (x_k - x)f(x_k - \delta)}{\delta}, \\ x \in (x_k - \delta, x_k), \quad k = 1, 2, \dots, m; \\ f(x) \text{ в остальных точках } [-\pi, \pi]. \end{cases} \tag{9.49}$$



Так как в тех точках, где $f^*(x) \neq f(x)$, функция $f^*(x)$ является *линейной* функцией, а линейная функция достигает своего экстремума на концах промежутка, то из (9.47) следует, что

$$|f^*(x)| \leqslant M \quad \text{для всех } x \in [-\pi, \pi]. \tag{9.50}$$

Функция $f^*(x)$, согласно её определению, непрерывна на $[-\pi, \pi]$, и $f^*(-\pi) = f^*(\pi)$, следовательно,

$$f^*(x) \in \mathbb{C}^*\mathbb{L}_2[-\pi, \pi] \subset \mathbb{Q}_0\mathbb{L}_2[-\pi, \pi].$$

Оценим, насколько отличаются друг от друга функции $f(x)$ и $f^*(x)$ по норме пространства $\mathbb{Q}_0\mathbb{L}_2[-\pi, \pi]$. Учитывая ограниченность обеих функций и определение числа δ, имеем

$$\|f - f^*\|_2^2 = \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x) - f^*(x)|^2 dx = \sum_{k=0}^{m-1} \int\limits_{x_k}^{x_k+\delta} |f(x) - f^*(x)|^2 dx +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m} \int\limits_{x_k-\delta}^{x_k} |f(x) - f^*(x)|^2 dx \leqslant 4M^2 \cdot \delta \cdot m \cdot 2 \leqslant \frac{8M^2 m\varepsilon^2}{32m(M^2+1)} <$$

$< \dfrac{\varepsilon^2}{4}$, то есть

$$\|f - f^*\|_2 < \frac{\varepsilon}{2}\,. \tag{9.51}$$

Как уже отмечалось, функция $f^*(x) \in \mathbb{C}^*\mathbb{L}_2[-\pi, \pi]$. Поэтому согласно следствию из теоремы 9.6 для произвольного $\varepsilon > 0$ найдётся тригонометрический многочлен $T_n(x)$ такой, что

$$\|f^* - T_n\|_2 < \frac{\varepsilon}{2}\,. \tag{9.52}$$

Используя неравенство треугольника и неравенства (9.51) и (9.52), заключаем: для любой функции $f(x)$ из евклидова пространства $\mathbb{Q}_0\mathbb{L}_2[-\pi, \pi]$ и произвольного $\varepsilon > 0$ найдётся тригонометрический многочлен $T_n(x)$, то есть линейная комбинация элементов ортонормированной тригонометрической системы (8.29), что норма разности

$$\|f - T_n\|_2 \leqslant \|f - f^*\|_2 + \|f^* - T_n\|_2 < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Итак, ортонормированная система (8.29) является *замкнутой* в евклидовом пространстве $\mathbb{Q}_0\mathbb{L}_2[-\pi, \pi]$. Поэтому согласно теореме 8.6, система (8.29) – ортонормированный базис пространства $\mathbb{Q}_0\mathbb{L}_2[-\pi, \pi]$. Теорема доказана.

Следствие. Ортогональная тригонометрическая система (8.26):

$$\{1, \cos nx, \sin nx\}_{n=1}^{\infty}$$

является *ортогональным базисом* евклидова пространства $\mathbb{Q}_0\mathbb{L}_2[-\pi, \pi]$, то есть для любой$f(x) \in \mathbb{Q}_0\mathbb{L}_2[-\pi, \pi]$ справедливо равенство

$$f(x) \overset{\mathbb{L}_2}{=} \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\bigl(a_n \cos nx + b_n \sin nx\bigr). \tag{9.53}$$

При этом коэффициенты Фурье $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ вычисляются по формулам (9.8).

Доказательство. При нормировании тригонометрической ортогональной системы (8.26) получается ортонормированная тригонометрическая система (8.29), а эта система, согласно теореме 9.7, является ортонормированным базисом пространства $\mathbb{Q}_0\mathbb{L}_2[-\pi,\pi]$. Поэтому система (8.26) – ортогональный базис пространства $\mathbb{Q}_0\mathbb{L}_2[-\pi,\pi]$. Тот факт, что коэффициенты Фурье $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ вычисляются именно по формулам (9.8) вытекает из единственности коэффициентов Фурье (см. теорему 8.4). Следствие доказано.

Используя соображения, высказанные на с. 212–213 по отношению к ортогональным и ортонормированным базисам в функциональных евклидовых пространствах, можно получить следствие из теоремы 9.7, относящееся к почленной интегрируемости тригонометрических рядов Фурье.

Следствие. Тригонометрический ряд Фурье функции $f(x) \in \mathbb{Q}_0\mathbb{L}_2[-\pi,\pi]$ можно *почленно интегрировать*. При этом получается по крайней мере *поточечно* сходящийся ряд.

В теореме 8.6 о критериях ортонормированного базиса речь идёт об эквивалентности трёх утверждений. Поэтому, зная неравенство Бесселя для тригонометрических систем (см. задачу 24 из 8-го раздела на с. 218) можно вывести ещё одно следствие.

Следствие. Для всякой функции $f(x) \in \mathbb{Q}_0\mathbb{L}_2[-\pi,\pi]$, коэффициенты Фурье $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ которой вычисляются по формулам (9.8), справедливо *равенство Парсеваля*:

$$\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(|a_n|^2 + |b_n|^2\right) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx. \tag{9.54}$$

Теорема 9.8. Ортогональные тригонометрические системы (8.30) и (8.34), а именно:

$$\{\cos nx\}_{n=0}^{\infty} \text{ и } \{\sin nx\}_{n=1}^{\infty},$$

являются *ортогональными базисами* евклидова пространства $\mathbb{Q}_0\mathbb{L}_2[0,\pi]$, то есть для любой $f(x) \in \mathbb{Q}_0\mathbb{L}_2[0,\pi]$ имеют место равенства

$$f(x) \overset{\mathbb{L}_2}{=} \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx;$$
$$f(x) \overset{\mathbb{L}_2}{=} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx.$$

При этом коэффициенты Фурье $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ этих рядов вычисляются по формулам

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \quad n = 0, 1, \ldots;$$
$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Доказательство. Вначале установим эту теорему для системы $\{\cos nx\}_{n=0}^{\infty}$. Пусть $f(x) \in \mathbb{Q}_0\mathbb{L}_2[0,\pi]$. Рассмотрим функцию

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & 0 < x < \pi; \\ f(-x), & -\pi < x < 0; \\ f(0+0), & x = 0; \\ f(\pi - 0), & x = \pm\pi. \end{cases} \tag{9.55}$$

Легко видеть, что введённая функция $F(x) \in \mathbb{Q}_0\mathbb{L}_2[-\pi,\pi]$, является чётной на $[-\pi,\pi]$ и, согласно формулам (9.55), на отрезке $[0,\pi]$ отличается от функции $f(x)$ не более, чем в двух точках. Так как система $\{1, \cos nx, \sin nx\}_{n=1}^{\infty}$ является ортогональным базисом в $\mathbb{Q}_0\mathbb{L}_2[-\pi,\pi]$, то

$$F(x) \overset{\mathbb{L}_2}{=} \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\bigl(a_n \cos nx + b_n \sin nx\bigr),$$

или, другими словами,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left| F(x) - \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \bigl(a_k \cos kx + b_k \sin kx\bigr) \right] \right|^2 dx = 0. \qquad (9.56)$$

Найдём коэффициенты Фурье $\{a_k\}$ и $\{b_k\}$ *чётной* функции $F(x)$. Согласно леммам 2 и 3 из (9.55) имеем, что коэффициенты $a_k = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\cos kx\,dx = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{0}^{\pi} F(x)\cos kx\,dx = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{0}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx$ для всех $k=0,1,2,\ldots$, а коэффициенты $b_k = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\sin kx\,dx = 0$ для всех $k = 1,2,\ldots$, то есть

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx, & k &= 0,1,2,\ldots; \\ b_k &= 0, & k &= 1,2,\ldots . \end{aligned} \qquad (9.57)$$

Из (9.55), (9.56) и (9.57) следует, что

$$0 = \lim_{n\to\infty} \int_{0}^{\pi} \left| F(x) - \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx \right) \right|^2 dx =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_{0}^{\pi} \left| f(x) - \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx \right) \right|^2 dx.$$

Последнее соотношение означает, что ортогональная система $\left\{\cos nx\right\}_{n=0}^{\infty}$ *замкнута* в пространстве $\mathbb{Q}_0\mathbb{L}_2[0,\pi]$ и, стало быть, является ортогональным базисом этого пространства.

Для системы синусов $\left\{\sin nx\right\}_{n=1}^{\infty}$ доказательство совершенно аналогичное. Надо лишь для произвольной функции $f(x) \in \mathbb{Q}_0\mathbb{L}_2[0,\pi]$ рассмотреть не функцию (9.55), являющуюся её *чётным* продолжением, а *нечётное* продолжение функции $f(x)$:

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & 0 < x < \pi; \\ -f(-x), & -\pi < x < 0; \\ 0, & x = 0, \pm\pi. \end{cases}$$

Теорема доказана.

Т е о р е м а 9.9. Ортогональная система экспонент с мнимыми показателями (8.38):

$$\left\{e^{inx}\right\}_{n=-\infty}^{+\infty}$$

является *ортогональным базисом* евклидова пространства $\mathbb{Q}_0\mathbb{L}_2[-\pi,\pi]$, то есть для любой$f(x) \in \mathbb{Q}_0\mathbb{L}_2[-\pi,\pi]$ справедливо равенство

$$f(x) \overset{\mathbb{L}_2}{=} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}. \tag{9.58}$$

При этом коэффициенты Фурье $\left\{c_n\right\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ вычисляются по формулам

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx. \tag{9.59}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вначале сообщим, как вычисляются последовательные частичные суммы ряда $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n$. Начальной суммой является слагаемое c_0, следующей суммой

$c_0 + c_1$, затем $c_0 + c_1 + c_{-1}$, $c_0 + c_1 + c_{-1} + c_2$, $c_0 + c_1 + c_{-1} + c_2 + c_{-2}$ и так далее. Однако для ряда по экспонентам с мнимыми показателями (9.58) поступают несколько по-другому: начальной суммой является слагаемое c_0, следующей суммой сразу $c_0 + c_1 e^{ix} + c_{-1}e^{-ix}$, затем $c_0 + c_1 e^{ix} + c_{-1}e^{-ix} + c_2 e^{2ix} + c_{-2}e^{-2ix}$ и так до бесконечности.

Приступим теперь непосредственно к доказательству теоремы 9.9. Согласно равенству (9.53), полученному при доказательстве следствия о базисности ортогональной тригонометрической системы $\{1, \cos nx, \sin nx\}_{n=1}^{\infty}$, имеем

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(x) - \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\big(a_k\cos kx + b_k\sin kx\big)\right]\right|^2 dx = 0.$$

Подставляя в это равенство формулы Эйлера

$$\cos kx = \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2}, \quad \sin kx = \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i} \tag{9.60}$$

и преобразуя результат, легко видеть, что $0 = \lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Big|f(x) -$

$$-\left\{\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{a_k\big(e^{ikx} + e^{-ikx}\big)}{2} + \frac{b_k\big(e^{ikx} - e^{-ikx}\big)}{2i}\right]\right\}\Bigg|^2 dx = 0,$$

или, после некоторой перегруппировки слагаемых,

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(x) - \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}\right|^2 dx = 0, \tag{9.61}$$

где

$$c_0 = \frac{a_0}{2},\ c_{\pm k} = \frac{a_k \mp ib_k}{2},\ k = 1, 2, \ldots, n. \tag{9.62}$$

Из (9.61) следует, что ортогональная система $\left\{e^{inx}\right\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ *замкнута* в пространстве $\mathbb{Q}_0\mathbb{L}_2[-\pi,\pi]$ и, стало быть, является ортогональным базисом этого пространства. Далее, из формул для коэффициентов (9.8), формул Эйлера (9.60), прочитанных как

$$e^{\pm ikx} = \cos kx \pm i \sin kx,$$

и (9.62) вытекают формулы (9.59). Действительно, $c_0 = \dfrac{a_0}{2} = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$, для k положительных $c_k = \dfrac{a_k - ib_k}{2} =$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos kx - i\sin kx)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx,$$

для k отрицательных – аналогично. Теорема доказана.

9.6. Ряды Фурье на произвольном отрезке

В этом разделе мы рассмотрим ряды Фурье по ортогональным тригонометрическим системам и системам экспонент с мнимыми показателями на произвольном отрезке $[a,b]$, а также ряды Фурье только по систамам косинусов или только по системам синусов на прилегающем к нулю отрезке $[0,l]$. Так как с помощью линейной замены (9.2) отрезок $[a,b]$ переходит в отрезок $[-\pi,\pi]$ (и наоборот), и так же линейно связаны между собой отрезки $[0,\pi]$ и $[0,l]$, то, очевидно, *все* доказанные в предыдущих параграфах теоремы справедливы для произвольных отрезков. Мы ограничимся лишь формулировками теорем о базисности соответствующих систем, хотя, разумеется, и такие, например, теоремы, как теорема о поточечной или о равномерной сходимости, также справедливы. *Доказательства* теорем приводиться не будут. Они предоставляются читателю.

Теорема 9.10. В евклидовом пространстве $\mathbb{Q}_0\mathbb{L}_2[a,b]$ ортогональная система (8.67):

$$\left\{1, \cos\frac{\pi n x}{l}, \sin\frac{\pi n x}{l}\right\}_{n=1}^{\infty}, \quad l = \frac{b-a}{2}$$

является *ортогональным базисом*, то есть для любой функции $f(x) \in \mathbb{Q}_0\mathbb{L}_2[a,b]$ имеет место равенство

$$f(x) \overset{\mathbb{L}_2}{=} \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{\pi n x}{l} + b_n \sin\frac{\pi n x}{l}\right).$$

При этом коэффициенты Фурье $\left\{a_n\right\}_{n=0}^{\infty}$ и $\left\{b_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ вычисляются по формулам

$$a_n = \frac{1}{l}\int_a^b f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}\,dx, \quad n = 0, 1, \ldots;$$
$$b_n = \frac{1}{l}\int_a^b f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}\,dx, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Теорема 9.11. В евклидовом пространстве $\mathbb{Q}_0\mathbb{L}_2[0,l]$ ортогональные системы (8.69) и (8.71):

$$\left\{\cos\frac{\pi n x}{l}\right\}_{n=0}^{\infty} \text{ и } \left\{\sin\frac{\pi n x}{l}\right\}_{n=1}^{\infty}$$

являются *ортогональными базисами*, то есть для любой функции $f(x) \in \mathbb{Q}_0\mathbb{L}_2[0, l]$ имеют место равенства

$$f(x) \overset{\mathbb{L}_2}{=} \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{\pi n x}{l} \,;$$

$$f(x) \overset{\mathbb{L}_2}{=} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{\pi n x}{l} \,.$$

При этом коэффициенты Фурье $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ вычисляются по формулам

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{\pi n x}{l}\, dx, \quad n = 0, 1, \ldots;$$

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{\pi n x}{l}\, dx, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Т е о р е м а 9.12. В евклидовом пространстве $\mathbb{Q}_0\mathbb{L}_2[a, b]$ ортогональная система (8.73):

$$\left\{ e^{\frac{\pi i n x}{l}} \right\}_{n=-\infty}^{+\infty}, \quad l = \frac{b-a}{2}$$

является *ортогональным базисом*, то есть для любой функции $f(x) \in \mathbb{Q}_0\mathbb{L}_2[a, b]$ имеет место равенство

$$f(x) \overset{\mathbb{L}_2}{=} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{\frac{\pi i n x}{l}}.$$

При этом коэффициенты Фурье $\{c_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ вычисляются по формулам

$$c_n = \frac{1}{2l} \int_a^b f(x) e^{-\frac{\pi i n x}{l}}\, dx.$$

9.7. Вопросы для повторения и самостоятельной работы

1. Получить из (9.3) формулы (9.6).
2. Доказать лемму 3 на с. 223.
3. Установить равенство нулю предела (9.11).
4. Получить свойства (9.16) ядра Дирихле.
5. Убедиться в справедливости формулы (9.19).
6. Установить равенство (9.28).
7. Убедиться в справедливости формул (9.34).
8. Получить все свойства (9.40) ядра Фейера.
9. Пусть для функции $f(x) \in C^*[-\pi, \pi]$ в некоторой точке $x_0 \in [-\pi, \pi]$ её ряд Фурье *сходится* к числу A. Доказать, что $A = f(x_0)$.
10. Вывести равенство Парсеваля (9.54).
11. Доказать базисность системы синусов $\{\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$(теорема 9.8).
12. Вывести равенство Парсеваля для систем $\{\cos nx\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$.
13. Вывести равенство Парсеваля для системы$\{e^{inx}\}_{n=-\infty}^{+\infty}$.
14. Доказать теоремы 9.10, 9.11, 9.12 и вывести для каждого ортогонального базиса в них равенство Парсеваля.

Приложение

Варианты домашних заданий

1. **Исследовать знакоположительный ряд на сходимость.**

1. $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(\ln\ln n)^{\ln n}}$.

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{2^{n-1}+1}$.

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1}$.

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\frac{\pi}{n}$.

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n-n}$.

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n-1}{5^n+1}$.

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos\frac{\pi}{n}$.

8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{\pi}{n}\right)$.

9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \ln\left(1+\frac{3}{n}\right)$.

10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{4n-1}\right)^{n-1}$.

11. $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln\ln n}}$.

12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$.

13. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi}{n}$.

14. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n+1)}$.

15. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\frac{\pi}{3^n}$.

16. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 3^n \sin\frac{\pi}{2^n}$.

17. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln n \cdot \ln\left(1+\frac{2}{n}\right)$.

18. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$.

19. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n} \ln\left(1+\frac{e}{n}\right).$

20. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{e}-1}{n}\,.$

21. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n\, n!}{n^n}\,.$

22. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{\sqrt{n}}+1}{5^{\sqrt{n}}+1}\,.$

23. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{\pi}-1}{\ln^2 n}\,.$

24. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}{\ln\left(n^2+1\right)}\,.$

25. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{2}-1\right).$

26. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{\ln n} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$

27. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n}-1}{\sqrt[n]{n}+1}\,.$

28. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{2n-1}\,.$

29. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n}-1}{\ln^2 n}\,.$

30. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{3}-1}{\ln n}\,.$

***2.* Исследовать знакопеременный ряд на абсолютную и условную сходимость.**

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(n+1)}{n^2+n+1}\,.$

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}.$

4. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}\,.$

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}.$

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[1+\frac{(-1)^n}{n}\right]^n.$

7. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left[1+\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^2}}\right].$

8. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n\, n}{\ln n}\,.$

9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\,\frac{n^2}{3^{\sqrt{n}}}\,.$

10. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \ln^n\left[1+\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}\right].$

11. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln\left(1+\frac{2}{n}\right).$

12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\pi n+\frac{1}{2n^2}\right).$

13. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left[1+\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}\right].$

14. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left[-\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)\right]^n.$

15. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1-2n}{2+3n}\right)^n.$

16. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\pi n+\frac{2}{n\sqrt{n}}\right).$

17. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\,\frac{\ln n}{n^2}\,.$

18. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\left[1+\frac{(-1)^n}{n}\right]^{n^2}.$

19. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \ln^n\left[1+\frac{(-1)^n}{n}\right].$

20. $\displaystyle\sum_{n=4}^{\infty} \ln^n\left(1-\frac{3}{n}\right).$

21. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^n}{(2n-1)^{n-1}}.$

22. $\displaystyle\sum_{n=4}^{\infty} (-1)^n \ln\left(1-\frac{3}{n}\right).$

23. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\, n}{5n-2}\,.$

24. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n\, n}{\ln^2 n}\,.$

25. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left[1+\frac{(-1)^n}{n}\right].$

26. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n\, n}{\sqrt{n^3-1}}\,.$

27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \dfrac{\ln n}{n}$.

28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(-\dfrac{n}{n+1}\right)^n$.

29. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n$.

30. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\ln^n \left[1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^2}}\right]$.

***3.* Найти множества абсолютной и условной сходимости функционального ряда, точнее, всю числовую ось $(-\infty,+\infty)$ разбить на четыре непересекающихся множества: множество, где ряд *не определён*; множество, где ряд *расходится*; множество, где ряд *сходится абсолютно*; и, наконец, множество, где ряд *сходится условно*. При этом надо учесть, что некоторые из этих множеств могут быть *пустыми*.**

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}}{x^n}$.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n^2-1)\,x^n}{\sqrt[3]{n^2+1}\,(1+x^n)}$.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \dfrac{ne^{nx}}{\sqrt{n^3+3}}$.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{nx^n \operatorname{arcctg} n}{1+x^{2n}}$.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}\operatorname{arctg}^n x$.

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \dfrac{\operatorname{ch}^n x}{2^{n\sqrt{n}}}$.

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+2}}{(n^2+1)\,x^n}$.

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n!)^2}{e^{n^2}}\operatorname{sh}^n x$.

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n-1)^3}{(3^n-2^n)x^{3n}}$.

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(1-n)^2 x^{\frac{n}{2}}}{3^{\sqrt{n}}}$.

11. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\, x^{\sqrt{n}}}{x^n - 1}\,.$

12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n!}}{x^{n^2}}\,.$

13. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}-1} \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^n.$

14. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{nx^{3n}}\,.$

15. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\, x^{\frac{n}{2}}}{1 - x^n}\,.$

16. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\, e^{-x\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}\,.$

17. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\, \frac{x^{\sqrt{n}}}{2^n}\,.$

18. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \operatorname{th}^n x}{3^{\sqrt{n}}}\,.$

19. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-3)^n \sin\frac{x}{\pi^n}\,.$

20. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \left(\cos\frac{x}{n}\right)^{n^3}.$

21. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\, \frac{x^{\sqrt{n}}}{n + \ln n}\,.$

22. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}} \arccos\left(1-\frac{1}{n}\right).$

23. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{n}{e}\right)^n x^n (2x-1)^n.$

24. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{x\left(\sqrt{n} - x\right)}{\sqrt{n}}\right]^n.$

25. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + \ln n} \left(\frac{x}{2x-1}\right)^n.$

26. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2} e^{nx}.$

27. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n + x^2) \ln(n + x^4)}\,.$

28. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{\sqrt{n}}}{(x+1)^{n^2} \ln(n+1)}\,.$

29. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^{2n}} \operatorname{tg}\frac{\pi}{2^n(n+1)}\,.$

30. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin nx}{(n+2) \ln(n+1)}\,.$

4. **Исследовать на равномерную сходимость функциональную последовательность и функциональный ряд в указанных множествах.**

1. а) $f_n(x) = \dfrac{\sqrt{nx+1} + \cos nx}{\sqrt{n}}$, $x \in (-\infty, +\infty)$;

   б) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{x^3 + n^2}$, $x \in [0, +\infty)$.

2. а) $f_n(x) = \dfrac{n^2 x^2}{1 + n^2 x}$, $x \in [0, +\infty)$;

   б) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x}{x^2 + n\sqrt{n}}$, $x \in (0, +\infty)$.

3. а) $f_n(x) = n\left[\ln\left(x + \dfrac{1}{n}\right) - \ln x\right]$, $x \in (1, +\infty)$;

   б) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{x^3 + n^2}$, $x \in (0, +\infty)$.

4. а) $f_n(x) = n(\operatorname{th} nx - 1)$, $x \in (0, +\infty)$;

   б) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{x^n + n}$, $x \in [0, 1)$.

5. а) $f_n(x) = \dfrac{nx}{n + x}$, $x \in [1, +\infty)$;

   б) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{x^2 + n\sqrt{n}}$, $x \in (-\infty, +\infty)$.

6. а) $f_n(x) = n\left[\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}\left(x - \dfrac{1}{n}\right)\right]$, $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$;

б) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sqrt{x}\,e^{-nx}$, $\quad x\in(0,+\infty)$.

7. а) $f_n(x)=n\left[\operatorname{arcctg}\left(x+\dfrac{1}{n}\right)-\operatorname{arcctg}x\right]$, $\quad x\in(0,+\infty)$;

б) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}x^2\,e^{-nx^2}$, $\quad x\in[0,+\infty)$.

8. а) $f_n(x)=\sqrt[n]{n+x}$, $\quad x\in(0,+\infty)$;

б) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\,x^2}{x^3+n^2}$, $\quad x\in[0,+\infty)$.

9. а) $f_n(x)=\sqrt{x+\dfrac{(-1)^n}{n}}$, $\quad x\in[1,+\infty)$;

б) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\,x^n}{x^n+n}$, $\quad x\in[0,1]$.

10. а) $f_n(x)=n\left[\ln\left(x+\dfrac{1}{n^2}\right)-\ln x\right]$, $\quad x\in(0,1)$;

б) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}x^3\,e^{-nx^2}$, $\quad x\in[0,+\infty)$.

11. а) $f_n(x)=\left[x+\dfrac{(-1)^n}{n}\right]^n$, $\quad x\in(-1,1)$;

б) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{x}\,e^{-nx}$, $\quad x\in(0,+\infty)$.

12. а) $f_n(x)=\operatorname{tg}\left(x-\dfrac{1}{n}\right)$, $\quad x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$;

б) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{2x}{x^2+n^3}$, $\quad x \in (-\infty, +\infty)$.

13. а) $f_n(x) = \operatorname{ctg}\left(x + \dfrac{1}{n}\right)$, $\quad x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$;

б) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^2 e^{-nx^2}$, $\quad x \in [0, +\infty)$.

14. а) $f_n(x) = \sin\left[x + \dfrac{(-1)^n}{n}\right]$, $\quad x \in (-\infty, +\infty)$;

б) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{\sqrt[n]{3^n + x^n}}$, $\quad x \in (-1, 1)$.

15. а) $f_n(x) = \cos\left[x + \dfrac{(-1)^n}{n}\right]$, $\quad x \in (-\infty, +\infty)$;

б) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$, $\quad x \in [-\pi, \pi]$.

16. а) $f_n(x) = e^{-(x+n)^2}$, $\quad x \in (-\infty, +\infty)$;

б) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt[n]{2^n + x^n}}$, $\quad x \in (-1, 1)$.

17. а) $f_n(x) = n\left[\ln^2\left(x + \dfrac{1}{n}\right) - \ln^2 x\right]$, $\quad x \in [1, +\infty)$;

б) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{x^n + (-1)^n}$, $\quad x \in (-1, 0)$.

18. а) $f_n(x) = \left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^n$, $\quad x \in (-\infty, +\infty)$;

б) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \operatorname{tg}\frac{2x}{x^2+n^3}$, $x \in (-\infty, +\infty)$.

19. а) $f_n(x) = \sqrt[n]{nx}$, $x \in (0, +\infty)$;

б) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x\, e^{-nx^2}$, $x \in [0, +\infty)$.

20. а) $f_n(x) = n\left[\arcsin x - \arcsin\left(x - \dfrac{1}{n}\right)\right]$, $x \in (0, 1)$;

б) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^2 x \left(1 - x^2\right)^n$, $x \in [0, 1]$.

21. а) $f_n(x) = n\left(\sqrt[n]{\ln x} - 1\right)$, $x \in (2, +\infty)$;

б) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^n (x^n + 1)$, $x \in (-1, 1)$.

22. а) $f_n(x) = \sqrt[n]{x^n + \dfrac{1}{n}}$, $x \in [0, +\infty)$;

б) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left[x + \frac{(-1)^n}{n}\right]^n$, $x \in (-1, 1)$.

23. а) $f_n(x) = n\left|\sqrt{x + \dfrac{(-1)^n}{n}} - \sqrt{x}\right|$, $x \in (1, +\infty)$;

б) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \sin\frac{x}{n}$, $x \in (-\infty, +\infty)$.

24. а) $f_n(x) = n\left[\operatorname{ctg}\left(x + \dfrac{1}{n}\right) - \operatorname{ctg} x\right]$, $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$;

б) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[x+\frac{(-1)^n}{n}\right]^n,$ $\quad x\in(-1,1).$

25. а) $\displaystyle f_n(x)=\cos\frac{nx+1}{n^2},$ $\quad x\in(-\infty,+\infty);$

б) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,e^{-|x-n|},$ $\quad x\in(-\infty,+\infty).$

26. а) $\displaystyle f_n(x)=\sin\frac{nx^2+1}{n^2},$ $\quad x\in(-\infty,+\infty);$

б) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\sqrt[n]{x^n+\frac{1}{n}}\right),$ $\quad x\in(0,1).$

27. а) $\displaystyle f_n(x)=n\left(\sqrt{x+\frac{1}{n^2}}-\sqrt{x}\right),$ $\quad x\in[0,+\infty);$

б) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,e^{-(x-n)^2},$ $\quad x\in(-\infty,+\infty).$

28. а) $\displaystyle f_n(x)=n\left[\ln\left(x+\frac{1}{n^2}\right)-\ln x\right],$ $\quad x\in(1,+\infty);$

б) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}\left(x-\frac{1}{n}\right)\right],$ $\quad x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right).$

29. а) $\displaystyle f_n(x)=n\left[\operatorname{arctg}\left(x+\frac{1}{n}\right)-\operatorname{arctg}x\right],$ $\quad x\in(0,+\infty);$

б) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,\frac{x^{n^2}}{n},$ $\quad x\in(-1,1).$

30. а) $\displaystyle f_n(x)=n\left|e^{x+\frac{(-1)^n}{n}}-e^x\right|,$ $\quad x\in(-1,1);$

б) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\, x}{(1+x^2)^n}\,,$ $\qquad x \in (-\infty, +\infty).$

***5.* Найти радиус и интервал сходимости степенного ряда. Исследовать поведение степенного ряда на концах интервала сходимости.**

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}\,(x+3)^{3n+1}.$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n\, n}{4n^2-1}\,(x-2)^{3n-1}.$

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}\,(x+1)^{2n-1}.$

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^{2n+1}}{2^{n+1}e^{\sqrt{n}}}\,.$

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(2n-1)!!}{2^n(2n)!!}\right]^2 (x+2)^{2n}.$

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n+(-3)^n}{\sqrt{n}}\,(x-3)^{3n}.$

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2} (x-2)^{2n}.$

8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2^n(2n)!!}{(2n+1)!!}}\,(x+3)^{2n}.$

9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3^n}{n^2}-\frac{2^n}{n}\right)(x-1)^{3n}.$

10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^{2n^2+1}}{3^n \ln(n+1)}\,.$

11. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{\frac{2^n(n!)^2}{(2n+1)!}}\,(x+1)^{2n}.$

12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n(x+2)^{3n-2}}{n^{\ln n}}\,.$

13. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}\frac{\pi}{3^n}\cdot(x-1)^{3n+1}.$

14. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2} (x-1)^{3n}.$

15. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^3} (x-3)^{2n-1}.$

16. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3^n}{n}-\frac{2^n}{n^2}\right)(x+1)^{5n-2}.$

17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln(n!)}{2^n\, n\sqrt{n}}\,(x+2)^{5n-1}.$

18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x+1)^{4n+1}}{2^n\,\sqrt{2n+1}}\,.$

19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-3)^{2n-1}}{3^n(2n-1)}\,.$

20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x+1)^{2n^n-1}}{e^n\, n\ln(n+2)}\,.$

21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x+3)^{3n-1}}{3^n\, n\ln^3(n+1)}\,.$

22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n-1}{4n+1}\right)^{n}(x-1)^{4n}.$

23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-2)^{3n-1}}{2^n\ln^2\sin\dfrac{1}{n}}\,.$

24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left[\dfrac{(2n-1)!!}{3^n(2n)!!}\right]^3(x+3)^{3n}.$

25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1-\dfrac{1}{2n}\right)^{n^2}(x+1)^{5n+2}.$

26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{sh}\dfrac{1}{e^n}\cdot(x+1)^{5n-1}.$

27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\cos\dfrac{2}{n}\right)^{n^3}(x-2)^{3n}.$

28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 3^{n-\ln n}(x+1)^{4n}.$

29. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{[2+(-1)^n]^n}{n\ln(n+1)}\,(x-3)^{3n}.$

30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-2)^{n!}}{n^n+\ln n}\,.$

***6.* Разложить функцию $f(x)$ в окрестности точки x_0 в ряд Тейлора и указать множество, где полученный ряд сходится к функции $f(x)$.**

1. $f(x) = \dfrac{1}{x^2-5x+6}\,,$ $\qquad x_0 = 0.$

2. $f(x) = \displaystyle\int\limits_0^{\sqrt{x}} \sin t^3 dt,$ $\qquad x_0 = 0.$

3. $f(x) = \cos^4 x,$ $\quad x_0 = 0.$

4. $f(x) = \operatorname{ch}^2 \sqrt{x},$ $\quad x_0 = 0.$

5. $f(x) = \operatorname{arcctg} 2x,$ $\quad x_0 = 0.$

6. $f(x) = \ln\big(x + \sqrt{x^2+2}\,\big),$ $\quad x_0 = 0.$

7. $f(x) = \cos^2 \sqrt{x},$ $\quad x_0 = 0.$

8. $f(x) = \operatorname{ch}^3 x,$ $\quad x_0 = 0.$

9. $f(x) = 6^{-2x^4},$ $\quad x_0 = 0.$

10. $f(x) = \ln(x+2),$ $\quad x_0 = 2.$

11. $f(x) = \arccos \dfrac{x}{2},$ $\quad x_0 = 0.$

12. $f(x) = \sin^4 x,$ $\quad x_0 = 0.$

13. $f(x) = \ln\big(1 - x + \sqrt{x^2 - 2x + 2}\,\big),$ $\quad x_0 = 1.$

14. $f(x) = \ln(3-x),$ $\quad x_0 = 1.$

15. $f(x) = \dfrac{1}{x},$ $\quad x_0 = -2.$

16. $f(x) = 5^{x^3},$ $\quad x_0 = 0.$

17. $f(x) = \ln\big(\sqrt{x^2+5} - x\big),$ $\quad x_0 = 0.$

18. $f(x) = \ln \sqrt{\dfrac{1-\pi x}{1+\pi x}},$ $\quad x_0 = 0.$

19. $f(x) = \operatorname{sh}^3 x,$ $\quad x_0 = 0.$

20. $f(x) = \ln\big(\sqrt{x^2+4} - x\big),$ $\quad x_0 = 0.$

21. $f(x) = \ln\bigl(1 + x + \sqrt{x^2 + 2x + 2}\,\bigr)$, $x_0 = -1$.

22. $f(x) = \int\limits_0^{\sqrt{x}} \operatorname{sh} t^3 dt$, $x_0 = 0$.

23. $f(x) = \operatorname{sh}^2 \sqrt{x}$, $x_0 = 0$.

24. $f(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2}$, $x_0 = 0$.

25. $f(x) = (1 - x)\ln(1 - x)$, $x_0 = 0$.

26. $f(x) = \sin^2 \sqrt{x}$, $x_0 = 0$.

27. $f(x) = \ln\bigl(x + \sqrt{x^2 + 3}\,\bigr)$, $x_0 = 0$.

28. $f(x) = \int\limits_0^{x^2} \dfrac{\ln(1-t)}{t}\, dt$, $x_0 = 0$.

29. $f(x) = \ln x$, $x_0 = 3$.

30. $f(x) = \dfrac{1+x}{(1-x)^3}$, $x_0 = 0$.

Александр Петрович Горячев

Специальные главы функционального анализа

Числовые и функциональные ряды

Редактор *Е.Г. Станкевич*

Подписано в печать 15.11.2013. Формат $60\times84\ ^{1}/_{16}$.
Уч.-изд.л. 17,0. Печ.л. 17,0. Тираж 575 экз.
Изд. № 1/4. Заказ № 18.

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ».
115409, Москва, Каширское ш., 31.

ООО «Полиграфический комплекс «Курчатовский».
144000, Московская область, г. Электросталь, ул. Красная, 42.

ДЛЯ ЗАМЕТОК

Д Л Я   З А М Е Т О К