

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»**

**АНАЛИЗ И ПРЕДСТАВЛЕНИЕ  
РЕЗУЛЬТАТОВ ЭКСПЕРИМЕНТА**

**Под общей редакцией Н.С. Вороновой**

*Рекомендовано к изданию УМО  
«Ядерные физика и технологии»*

**Москва 2015**

УДК 53.08(07)  
ББК 22.3я7  
А 42

**Анализ и представление результатов эксперимента:** Учебно-методическое пособие / Н.С. Воронова, С.Г. Бежанов, С.А. Воронов, Е.В. Хангулян, О.Ю. Цупко, А.И. Романов; Под общ. ред. Н.С. Вороновой. — М.: НИЯУ МИФИ, 2015. — 120 с.

Пособие является введением в проблемы анализа результатов эксперимента. Приведены основы современных методов статистической обработки экспериментальных данных на базе нормального распределения, основы графического анализа и грамотного представления результатов измерений.

Цель пособия — ознакомление студентов младших курсов с базовыми понятиями теории ошибок и методами обработки результатов измерений в объеме, достаточном для работы в лабораториях общезначимого практикума.

Изложенный в пособии материал снабжен примерами и иллюстрациями, понятен для читателей, не обладающих специальной предварительной подготовкой, и может быть полезен всем начинающим экспериментаторам.

Подготовлено в рамках Программы создания и развития НИЯУ МИФИ.

*Рецензенты:* д-р физ.-мат. наук, проф. В.В. Сурков,  
д-р физ.-мат. наук, проф. Н.Е. Капуткина.

ISBN 978-5-7262-2141-0

© Национальный исследовательский  
ядерный университет «МИФИ», 2015.

Редактор Е.Е. Шумакова

Подписано в печать 20.11.2015.      Формат 60x84 1/16.  
Печ. л. 7,5.      Уч.-изд. л. 7,5.      Тираж 2400 экз.  
Изд. № 1/6.      Заказ № 2.

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»,  
115409, Москва, Каширское ш., д.31  
ООО «Баркас»,  
115230, Москва, Каширское ш., д. 4.

## От авторов

Работа в лабораториях физического практикума, с которой сталкиваются студенты младших курсов инженерно-физических специальностей, предполагает понимание физики явлений и используемых моделей, овладение навыками проведения измерений и, кроме того, знакомство с довольно сложным математическим аппаратом (теория ошибок, элементы статистики и др.).

**Основная задача лабораторных работ** — научить *правильно измерять* различные физические величины. Вторая важная задача — обеспечить понимание явлений и, в результате анализа полученных результатов, подтвердить изучаемые законы или возбудить сомнения в них. Однако, как правило, современные учебные планы не уделяют достаточного внимания вопросам *обработки и анализа результатов измерений*, и студентам приходится осваивать эту важную часть любого эксперимента самостоятельно. Часто теорию ошибок “преподают” вручением студенту списка формул, не обсуждая специфики их применения в том или ином эксперименте. При подобном подходе становятся бессмысленными как математические действия, совершаемые с полученными при измерениях данными, так и обсуждения природы погрешностей в заключениях к лабораторным работам. Они даже зачастую оказываются неверными, поскольку студент не понимает смысла проделанного, а просто выполняет требования лабораторного практикума или преподавателя.

Цель данного пособия заключается в том, чтобы любой студент, никогда даже не слышавший о статистике и теории ошибок, имел необходимое представление об основных методах и понятиях, которые ему могут понадобиться в лабораториях общей физики, — таких как расчет приборных погрешностей и погрешностей при снятии показаний, случайных ошибок, вычисление погрешностей в случае косвенных измерений и т. д. Отдельный раздел посвящен построению графиков и графическим методам обработки результатов измерений. В заключительной части книги собраны общие рекомендации по проведению измерений и обработке их результатов, а также по грамотному написанию за-

ключения к лабораторной работе. Некоторые формулы и алгоритмы расчета приведены в настоящем пособии без строгих математических доказательств, которые, наряду с более сложными вопросами из области математической статистики, вынесены в готовящееся к изданию учебно-методическое пособие “Распределения случайных величин и основы статистических методов обработки экспериментальных данных” под редакцией А.И. Романова.

Авторы благодарны рецензентам — профессорам В.В. Суркову и Н.Е. Капуткиной, а также доцентам НИЯУ МИФИ Т.А. Семеновой и Е.Н. Аксеновой и профессору НИЯУ МИФИ В.И. Гервидсу за прочтение рукописи и высказанные полезные замечания и ценные советы.

## Введение

Как показывает опыт, ни одно измерение, как бы аккуратно оно ни проводилось, не может быть абсолютно свободно от погрешностей. Проиллюстрируем это следующим примером. Допустим, мы измеряем ширину стола. Взглянув на стол, можно грубо оценить его ширину в 100 см. Реально при этом происходит сопоставление ширины стола с эталоном, в данном случае — с представлением о длине 100 см в нашей памяти. Это грубое “измерение” определено содержит погрешность. Можно учесть эту погрешность, допустив, что ширина может быть и меньше, например, 95 см, и больше — 105 см. Произвести более точное измерение несложно — достаточно взять длинную линейку или рулетку и определить, что длина равна 103,1 см. Такое измерение более точно, чем первоначальное, которое можно назвать прикидкой, но и оно, очевидно, содержит некоторую погрешность, поскольку невозможно уверенно сказать, что ширина стола равна точно 103,1000 см, а не, например, 103,1001 см.

Существует много причин, определяющих эту остающуюся неточность. Часть из источников ошибок<sup>1</sup> можно было бы устранить, если проявить больше внимания к процессу измерения. Например, одним из таких источников могло служить плохое освещение, затрудняющее считывание с линейки. Можно улучшить освещение и устранить эту проблему. С другой стороны, **некоторые из источников погрешности присущи самому процессу измерения и никогда не могут быть полностью устранены.** Например, предположим, что линейка проградуирована миллиметровыми делениями. Край стола, по всей веро-

---

<sup>1</sup> В научных экспериментах термин “ошибка” не имеет обычного бытового значения как чего-то неправильного. Слово “ошибка” означает в науке неизбежную погрешность, сопутствующую любым измерениям. Поэтому мы будем считать два слова — “ошибка” и “погрешность” — равнозначными и использовать термин “ошибка” исключительно в значении “погрешность”.

ятности, не совпадает точно ни с одним из делений. В этом случае экспериментатор должен сам оценить положение края стола между двумя делениями. Если же край совпал с одним из делений, то следует учесть, что штрих деления имеет ширину порядка нескольких десятых миллиметра и нанесен на станке, который также мог внести погрешность. Таким образом, необходимо оценить положение края в пределах деления, и это тоже приведет к некоторой ошибке при отсчете, да и сам *край* стола также может быть определен неточно. Используя другой измерительный инструмент, с чаще расположенными и более тонкими делениями, можно уменьшить ошибку, но нельзя ее полностью устранить. Если преисполниться решимости определить ширину стола с наилучшей точностью, достижимой современными техническими средствами, можно было бы использовать лазерный интерферометр. Однако точность интерферометра также конечна и ограничена величиной порядка длины волны света 0,5 мкм. Но даже измеряя ширину стола с фантастической точностью, определить ее все же не удалось бы точно, поскольку мы столкнемся с принципиальной проблемой: окажется, что ширина в разных местах стола различна. Даже в одном и том же месте можно обнаружить, что ширина изменяется из-за наличия или отсутствия тонкого слоя пыли или если меняются температура и влажность окружающего воздуха. Иначе говоря, мы обнаружим, что нет такой величины, как ширина стола. Такая проблема называется *проблемой определения*. Она играет важную роль во многих научных измерениях.

Описанный опыт иллюстрирует известную истину: **ни одну физическую величину** (длину, время, температуру и т. д.) **нельзя измерить точно**. Ценой особых усилий мы можем свести ошибки до очень малых значений, но исключить их полностью невозможно.

Отметим, что точность полученного результата зачастую зависит не только от используемого прибора и внешних условий, но и от того, *как* поставлен эксперимент — например, от количества проводимых измерений. Если говорить о более сложных физических экспериментах, следует также понимать, что любая фи-

зическая теория описывает природу в некотором приближении. Это — *модель*, в которой мы пренебрегаем какими-то процессами и “тонкими” особенностями системы. Из-за приближенности моделей, на которых строится эксперимент, мы *в принципе* не можем определить истинного значения физической величины.

Когда речь идет о научном эксперименте, истинное значение измеряемой величины знать не требуется, а требуется *с достаточной для конкретного физического приложения достоверностью* указать, насколько точен результат измерения, отличается ли он от истинного значения максимум на 5 или на 0,5%, с какой вероятностью при повторении эксперимента будет получено такое же значение и т. п.

Таким образом, **значение физической величины, полученное в результате эксперимента, всегда содержит в себе ошибку и должно быть всегда указано с погрешностью.** Даже стараясь быть очень внимательными и аккуратными, погрешностей нельзя избежать. Единственное, на что можно рассчитывать, — это сведение погрешностей к минимуму и *надежный* расчет их величин.

# Глава I. Виды ошибок измерений

В любом эксперименте *истинное значение измеряемой величины* (обозначим его  $X$ ) неизвестно. Измеряя эту величину, получают лишь *результат измерения*  $x$ , в общем случае отличный от  $X$ .

Модуль разности

$$|X - x| = \Delta x \quad (1.1)$$

называется *абсолютной погрешностью измеряемой величины*. Она также неизвестна, и задача теории ошибок — указать, как можно по результатам измерений оценить и саму измеряемую величину, и эту погрешность.

Отношение абсолютной погрешности измеряемой величины к модулю самой измеряемой величины называют *относительной погрешностью* и обычно выражают в процентах:

$$\delta x = \frac{\Delta x}{|X|} \cdot 100\%. \quad (1.2)$$

Удобство использования относительной погрешности можно проиллюстрировать следующим примером. Допустим, мы измерили некоторую длину с абсолютной погрешностью  $\Delta x = 1$  см. Насколько это точное измерение? Ответ зависит не только от величины абсолютной погрешности, но и от измеряемой величины. Если мы измеряли длину спичечного коробка, то, вообще говоря, измерение проведено с плохой точностью:  $\delta x \sim 25\%$ . Если же измерялся радиус Земли, то точность чрезвычайно высока ( $\delta x \sim 10^{-7}\%$ ), измерения с такой точностью осуществлять очень сложно, да и в большинстве случаев это не требуется. Относительная погрешность, являясь безразмерной величиной, позволяет сравнивать между собой точности измерения различных величин.

Если измерение одной и той же физической величины производится несколько ( $N$ ) раз, то полученные результаты измерений  $x_1, x_2, \dots, x_N$  не только отличаются от  $X$ , но чаще всего различны и между собой.



Из приведенного во введении примера видно, что на результат измерения и, следовательно, на оценку погрешности измерения влияют различные факторы: и условия измерений, и характеристики измерительных приборов, и сам экспериментатор, а также флуктуации измеряемой величины.

Естественно предположить, что факторы, приводящие к разбросу результатов, случайны. В таком случае в качестве наилучшей оценки искомой величины можно взять среднее арифметическое всех полученных результатов

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i. \quad (1.3)$$

Это следует из того, что случайное воздействие может как увеличить, так и уменьшить полученный результат относительно истинного. Погрешности, приводящие к появлению случайных отличий в результатах измерений, выполненных одним и тем же прибором в одинаковых условиях, называются *случайными*. Чем больше раз проводится измерение, тем ближе будет результат, вычисленный по формуле (1.3), к неизвестному истинному значению измеряемой величины.

Возможен, однако, и другой случай — когда увеличение числа измерений **не приводит** к уменьшению погрешности. Например, мы измеряем длину с помощью линейки, которая проградуирована неверно. Каждый раз будет получаться неправильное значение: если деления линейки нанесены чаще, чем нужно, то результат измерения будет завышен. Проведение измерения несколько раз не прибавит этому измерению точности — ошибка будет просто-напросто повторяться. Погрешности, которые невозможно свести к минимуму путем многократного повторения эксперимента, называются *систематическими*. В большинстве случаев систематические ошибки приводят к постоянному отклонению результатов измерений от истинного значения физической величины. В отличие от случайных погрешностей, исключение влияния систематических ошибок требует

детального знания установки, на которой проводится эксперимент.<sup>2</sup>

Наконец, третий тип погрешностей, с которыми приходится иметь дело, — *грубые ошибки*, или *n p o m a x и*. Источниками таких ошибок могут быть недостаток внимания экспериментатора (неверная запись показаний прибора, неправильно считанный отсчет и т. п.) или неожиданные сильные внешние воздействия на измерения (например, резкий порыв ветра при измерении угла отклонения нити).

По причине возникновения погрешности можно разделить на *приборные (инструментальные)*, *методические*, *флуктуации случайной величины*, а также *субъективные ошибки (человеческий фактор)*.

По характеру проявления все погрешности делятся на *случайные* и *систематические*. Также в отдельную группу можно вынести *грубые ошибки (промахи)*.

Перейдем к рассмотрению различных типов погрешностей и методов их вычисления.

---

<sup>2</sup> Примером может быть случай 2011 года, когда сотрудники лаборатории Grand Sasso в содружестве с учеными Европейского центра ядерных исследований (CERN) якобы обнаружили нейтрино, движущиеся со скоростью, превышающей скорость света (что опровергало один из основных постулатов специальной теории относительности). Тщательная перепроверка всех частей экспериментальной базы выявила, что имели место неверная калибровка часов и плохое соединение кабелей.

# 1 Случайные погрешности

В физическом эксперименте имеется огромное количество разнообразных факторов, приводящих к случайному разбросу результатов измерений. Влияние случайных факторов на измеряемую величину неодинаково при каждом измерении, да и некоторые из таких факторов нам могут быть неизвестны в принципе. Более того, сама физическая величина по своей природе может флуктуировать (незначительно меняться около какого-то значения). Случайные ошибки присутствуют всегда. Невозможно так поставить эксперимент или обработать результаты измерений, чтобы исключить случайный разброс значений вокруг истинного значения физической величины.

Источником погрешностей могут быть, например, колебания воздуха, воздействующие на пружину при взвешивании; пылинки, осевшая на чашу весов; нагревание, трение, изменение влажности, усталость и психологический настрой наблюдателя, а также множество других причин, которые практически невозможно учесть. Можно лишь утверждать, что каждый мелкий эффект вносит некоторую ошибку, которая меняется от измерения к измерению, может быть в равной степени как положительной, так и отрицательной, — т. е. является случайной величиной.

В случае, когда производится одно измерение, по его результату определить величину случайной ошибки невозможно. Если же измерение одной и той же величины повторяется несколько раз, случайный разброс в измеренных значениях дает незаменимую информацию: специфические статистические методы обработки результатов измерений позволяют получить достаточно полные знания о случайной погрешности.

Необходимо различать **случайный разброс результатов измерений**  $\{x_i\}$ <sup>3</sup>, обусловленный флуктуациями физической величины из-за воздействия внешних факторов (в том числе и на прибор), и **погрешность каждого из полученных значений**  $x_i$ , обусловленную, во-первых, конечной точностью прибора и, во-вторых, так называемой погрешностью снятия показаний со

---

<sup>3</sup> Обозначение  $\{x_i\}$  означает совокупность всех измерений  $x_i$ .

шкалы. Погрешности в определении  $x_i$  имеются всегда, и они, очевидно, никак *не зависят* от количества проведенных измерений. Тем не менее, следует отдавать себе отчет, что несовершенство измерительных приборов и неточности снятия показаний сами по себе *являются случайными факторами*, влияющими на результат измерения (на число, записанное на бумаге), и потому, в случае правильной постановки эксперимента, при многократном повторении измерений их влияние, как и влияние любого случайного фактора, может быть сведено к минимуму.

Методы определения случайных погрешностей для серии измерений, а также приборных погрешностей и погрешностей снятия показаний рассмотрены в главе II данного пособия.

## 2 Систематические погрешности

Систематические ошибки — это погрешности, величина которых одинакова во всех измерениях, проводимых при одних и тех же условиях, одним и тем же методом с помощью одних и тех же измерительных приборов. В отличие от случайных ошибок, систематические ошибки не могут быть ни выявлены, ни устранены при помощи повторных измерений, так как при наличии систематических ошибок результаты всех измерений будут разбросаны не вокруг истинного, а вокруг “смещенного” значения.

В качестве примера можно привести измерение периода колебаний маятника при помощи отстающего секундомера. Сколько бы раз ни проводилось измерение, результат всегда будет получаться заниженным. Другой пример систематической ошибки: измеренная в воздухе масса тела отличается от истинной, в силу закона Архимеда, на массу воздуха в объеме тела. Если после измерений не внести поправку, то результат взвешивания будет содержать систематическую ошибку.

Приведенные выше примеры обладают существенным различием: во втором примере поправку на “потерю веса” можно вычислить, зная плотность воздуха и плотность тела. В первом же примере поправку на запаздывание прибора ввести нельзя, так

как о ней ничего неизвестно. Если недостоверность результатов удалось обнаружить, ошибку можно устранить, заменив секундомер на более точный.

#### Возможные источники систематических погрешностей:

- неисправность или неверная градуировка приборов;
- наличие постоянных неучтенных факторов, влияющих на исследуемое явление (например, присутствие ферромагнетика в непосредственной близости от стрелки компаса, или преломление лучей света при прохождении сквозь атмосферу Земли при измерении высоты небесных тел);
- отличие реального объекта от применяемой модели (например, содержание примесей в исследуемом материале при определении плотности вещества);
- несовершенство методики, лежащей в основе опыта;
- применение упрощенных моделей вычисления (в случае косвенных измерений).

Причины, вызывающие систематические погрешности, исследуются в тех разделах физики, которые разрабатывают методику экспериментов. После выявления причин такие ошибки можно устранить или учесть. При выполнении измерений в лабораториях физического практикума НИЯУ МИФИ систематические погрешности не рассматриваются, так как считается, что они сведены к минимуму при постановке каждой конкретной лабораторной работы.

### **3 Промахи**

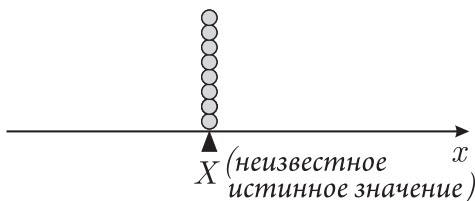
Под промахом понимается ошибка, сделанная из-за недостатка внимания экспериментатора или из-за однократного неожиданного сильного воздействия внешних факторов. Например, при измерении длины линейкой промах может появиться в результате того, что один из концов измеряемого предмета по ошибке

окажется совмещенным не с нулем шкалы, а, скажем, с отметкой 10 см, и отсчет будет сделан без учета этого обстоятельства.

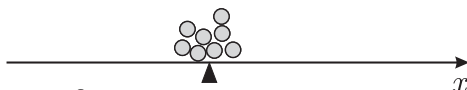
Для устранения промахов необходимо соблюдать аккуратность в работе и записях результатов. Иногда можно выявить промах, повторив измерение, перейдя на другой участок шкалы прибора, либо повторив измерения спустя некоторое время, когда наблюдатель уже забыл полученные ранее числа.

**Пример.** Распределение результатов восьми измерений относительно истинного значения физической величины в случаях, когда в эксперименте проявляются различные виды погрешностей измерений (*неизвестное истинное значение  $X$*  обозначено черным треугольником, результаты измерений  $x$  — кружками):

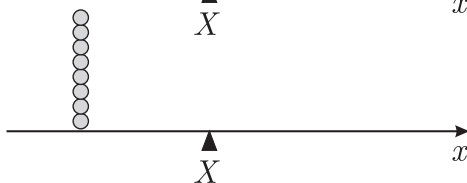
а) **ошибки отсутствуют**  
(идеальный случай, не реализуется на практике);



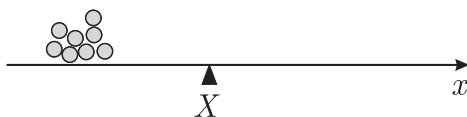
б) присутствует **случайный разброс** результатов;



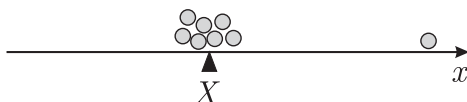
в) присутствует только **систематическая ошибка**  
(случай не реализуется);



г) присутствуют **случайный разброс и систематическая ошибка**;



д) присутствуют **случайный разброс и один промах**.



Повторение измерения другим экспериментатором, *которому неизвестны полученные ранее результаты*, почти всегда поможет выявить промах, если он имел место. Однако и этот метод не дает стопроцентной гарантии: если, например, ошибка произошла из-за нечетко написанной цифры на шкале (например, иногда путаются цифры 3 и 8), то второй наблюдатель может повторить ошибку первого.

Вопрос о математическом определении промахов и исключении соответствующих результатов из серии измерений будет рассмотрен в п. 4.2.6.

## Глава II. Вычисление погрешностей

В предыдущей главе речь шла о классификации погрешностей *п р я м ы х* измерений. При прямых измерениях искомая физическая величина измеряется непосредственно при помощи измерительного прибора.

*К о с в е н н ы м* называется измерение, при котором интересующая нас величина не измеряется непосредственно прибором, а вычисляется с использованием одного или нескольких непосредственно измеренных значений. При таких измерениях также необходимо вычислять погрешность результата, зная погрешности каждой из прямо измеренных величин в отдельности.

После выполнения измерений и необходимых вычислений корректной формой записи результата эксперимента является указание наилучшей оценки измеряемой величины и интервала, в котором (предположительно) лежит ее истинное значение:

$$X = (\bar{x} \pm \Delta x) \text{ ед. измерения.}$$

Эта запись означает, что  $(\bar{x} + \Delta x)$  есть *наибольшее* вероятное значение измеренной величины, а  $(\bar{x} - \Delta x)$  — *наименьшее*.

При этом нельзя утверждать, что истинное значение абсолютно точно лежит между  $(\bar{x} - \Delta x)$  и  $(\bar{x} + \Delta x)$ . Можно лишь сказать, что  $X$  находится в указанном интервале с некоторой вероятностью, строго зависящей от выбора  $\Delta x$ . Интервал значений  $(\bar{x} - \Delta x; \bar{x} + \Delta x)$  называется *доверительным интервалом*, а соответствующая этому интервалу вероятность того, что истинное значение лежит внутри него, — *доверительной вероятностью*  $\alpha$ :

$$P(\bar{x} - \Delta x < X < \bar{x} + \Delta x) = \alpha. \quad (2.1)$$

Выражение (2.1) также можно интерпретировать следующим образом: с вероятностью, равной  $\alpha$ , результаты *таких же* серий измерений величины  $X$  не выйдут за пределы доверительного интервала  $(\bar{x} - \Delta x; \bar{x} + \Delta x)$ . Например, если  $\alpha = 0,5$ , то доля результатов  $\bar{x}$ , попадающих в доверительный интервал при повторениях *такого же* эксперимента (т. е. при проведении такого же количества измерений на той же установке), равна 50 %.



В связи с вышесказанным, стоит подчеркнуть:

**Запись погрешности измерения без указания доверительной вероятности теряет смысл, а сравнение и учет погрешностей различных источников могут быть произведены только если все погрешности соответствуют одной и той же доверительной вероятности.**

Для удобства сравнения и приведения погрешностей к одинаковым значениям  $\alpha$  в качестве единой меры измерения доверительных интервалов принято использовать так называемое *стандартное отклонение*.<sup>4</sup> Стандартное отклонение, обозначаемое символом “ $\sigma$ ”, — это такая ширина доверительного интервала, которая отвечает доверительной вероятности  $\alpha = 0,68$ . Т. е. для разных погрешностей (например, обусловленных разными источниками)  $\sigma$  может быть разным по величине, однако если  $\Delta x = \sigma$ , то  $\alpha = 0,68$ . И наоборот: если известно, что для найденной абсолютной погрешности  $\alpha = 0,68$ , то это означает, что данная  $\Delta x = \sigma$ .

Большинство методов обработки результатов измерений позволяют *выбирать* (задавать) доверительную вероятность  $\alpha$  и, следовательно, варьировать доверительный интервал в зависимости от требуемой надежности полученного результата. Доверительный интервал  $(\bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma)$  называется *стандартным*, и считается, что если при записи погрешности значение доверительной вероятности не указано, то она равна 0,68. В таблице ниже приведены значения  $\alpha$  для нескольких других доверительных интервалов, выраженных в единицах  $\sigma$ :

Погрешность $\Delta x$	$0,5 \sigma$	$\sigma$	$1,5 \sigma$	$2 \sigma$	$2,5 \sigma$	$3 \sigma$
Доверительная вероятность $\alpha$	0,38	0,68	0,87	0,95	0,988	0,997

---

<sup>4</sup> Подробнее о стандартном отклонении см. п. 4.2.

## 4 Вычисление погрешностей прямых измерений

### 4.1 Погрешности одного измерения

Вначале зададимся целью определить абсолютную погрешность  $\Delta x_{(1)}$  *единичного* измерения физической величины. Она может быть обусловлена двумя источниками.

- **Погрешность измерительного прибора** — это внутренняя характеристика прибора, как правило, определяемая в ходе калибровки сравнением показаний прибора с более точным (эталонным) устройством. Она указывается либо на самом приборе, либо в сопроводительных документах (в паспорте прибора).

Данную погрешность принято называть *погрешностью показаний прибора* либо *п р и б о р н о й погрешностью* и обозначать  $\Delta x_{\text{приб}}$ .

- **Ошибки экспериментатора при снятии показаний шкалы прибора.** В этом случае ошибка зависит от человека, проводящего эксперимент, так что можно сказать, что данная погрешность субъективна.

Эту погрешность принято называть *погрешностью отсчета* либо *погрешностью снятия показаний* и обозначать  $\Delta x_{\text{отсч}}$ .

Для определения погрешности одного измерения в общем случае необходимо учитывать обе указанных погрешности.

#### 4.1.1 Приборные погрешности

Любое измерение производится при помощи измерительного прибора (линейка, вольтметр, осциллограф и т. д.). При этом точность показаний может быть обеспечена только в определенных пределах, связанных с конструкцией устройства и физической схемой измерений. Эта точность определяет погрешность измерения, называемую *погрешностью показаний прибора*.

**Для стрелочных приборов** неточность измерения связана с конструкцией как механических, так и электромагнитных элементов. Абсолютная приборная погрешность таких приборов не зависит от измеряемой величины и постоянна для всех ее значений. Отношение этой погрешности к пределу шкалы, выраженное в процентах, называется *классом точности*, который является характеристикой данного прибора.

1.0

Например, если на приборе указан класс точности  $\gamma = 1,0$ , это означает, что относительная погрешность показаний прибора не превышает 1,0 % от максимального значения на шкале.

Абсолютная приборная погрешность рассчитывается следующим образом:

$$\Delta x_{\text{приб}} = \frac{\gamma x_{\text{max}}}{100}, \quad (2.2)$$

где  $\Delta x_{\text{приб}}$  — абсолютная приборная погрешность,  $\gamma$  — класс точности,  $x_{\text{max}}$  — максимальное значение величины, которое может быть измерено данным прибором (предел шкалы).

В случае, если нулевая отметка находится не на краю шкалы, а внутри ее рабочей части, в качестве  $x_{\text{max}}$  следует взять арифметическую сумму частей шкалы справа и слева от нуля (без учета их знака).

Так как абсолютная погрешность таких приборов фиксирована, относительная погрешность измерения будет тем меньше, чем больше значение измеряемой величины. В связи с этим следует выбирать такой диапазон измерений прибора, чтобы стрелка при измерениях отклонялась не менее, чем на треть шкалы от нуля.

Доверительная вероятность, отвечающая приборной погрешности, должна быть также задана в паспорте прибора. Например, если рядом с классом точности стоит пометка “ $3\sigma$ ”, либо указано, что данная погрешность является предельной (максимальной) ошибкой прибора, то доверительная вероятность равна 0,997. В противном случае следует считать, что  $\Delta x_{\text{приб}}$  отвечает стандартной доверительной вероятности  $\alpha = 0,68$ .

Для приборов типа магазинов сопротивлений, емкостей, индуктивностей, для которых погрешность связана только с величиной, выставленной на них, абсолютная приборная погрешность также задается классом точности, который определяется как выраженное в процентах отношение этой погрешности к измеряемой (выставленной) величине:

$$\Delta x_{\text{приб}} = \frac{\gamma x_{\text{изм}}}{100}, \quad (2.3)$$

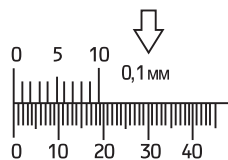
где  $x_{\text{изм}}$  — измеряемая (выставленная) прибором величина.

При работе с **осциллографами** (среднего класса точности), в конструкции которых не приняты специальные меры по уменьшению приборной погрешности, считается, что она составляет 5 % от измеряемой величины, будь то амплитуды импульсов или периоды колебаний.

Например, если измеренная по экрану осциллографа величина размаха колебаний  $U$  составила 10,0 В, то ее абсолютная погрешность  $\Delta U$  будет равна 0,5 В.

В случае применения специальных **высокоточных осциллографов** приборная погрешность может быть меньше и указывается в паспорте прибора. При этом обычно задаются внешние условия: диапазоны температур, давлений, влажности и т. п., в которых эта приборная погрешность гарантируется.

Погрешности **линеек, микрометров, штангенциркулей** и некоторых других приборов иногда наносятся на самом приборе (на шкале). Обычно таким образом указывается наибольшая абсолютная погрешность, которую мы вынуждены считать постоянной вдоль всей шкалы прибора.



При работе с **генераторами импульсов** или **ламповыми вольтметрами** приборная погрешность может быть различной для различных диапазонов частот, напряжений и т. д. Например, для применяемых в лабораториях НИЯУ МИФИ генераторов по-

грешность определяется следующим образом ( $\nu$  — используемое значение частоты генератора):

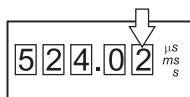
Генераторы звуковой частоты	Абсолютная погрешность, Гц
ГЗ-33, ГЗ-34	$\Delta\nu = (0,02\nu + 1)$
ГЗ-35	$\Delta\nu = (0,01\nu + 1)$
ГЗ-109	$\Delta\nu = (0,02\nu + 0,5)$

Для многопредельных стрелочных вольтметров погрешность определяется по формулам:

Ламповые вольтметры	Относительная погрешность, %
В-7-20	$\frac{\Delta I}{I} = \left( 1 + 0,1 \frac{I_{\max}}{I} \right)$
В-7-15А	$\frac{\Delta U}{U} = \left( 0,05 + 0,05 \frac{U_{\max}}{U} \right)$

Здесь  $I$  ( $U$ ) — измеряемое значение тока (напряжения),  $I_{\max}$  ( $U_{\max}$ ) — максимальное значение шкалы для установленного диапазона измерений.

При работе с **цифровыми приборами**, у которых измеряемая величина “оцифровывается”, погрешности для каждого диапазона измерений следует смотреть в паспорте прибора. В случае, если документы прибора недоступны, абсолютную приборную погрешность как правило принимают равной единице последнего (наинизшего) разряда.

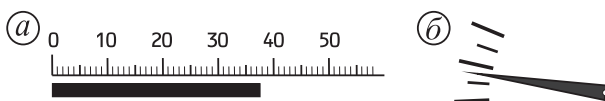


Для прибора, показанного на рисунке, погрешность времени составляет  $\Delta t = 0,01 \mu\text{s}$ ,  $0,01 \text{ мс}$  или  $0,01 \text{ с}$  в зависимости от выбранного диапазона измерений.

## 4.1.2 Погрешность снятия показаний

При снятии показаний со стрелочного прибора возникает необходимость *округления* результатов до ближайшей метки шкалы или *интерполяции* (оценки долей деления), и это так или иначе вносит влияние человеческого фактора в точность измерений. Погрешность отсчета, связанная с округлением или интерполяцией, зависит от размера делений, освещенности шкалы, а также зоркости экспериментатора.

Чтобы измерить физическую величину, мы должны определить то место на шкале прибора, куда указывает стрелка (в случае линейки — где находится измеряемая отсечка).



**Рис. 2.1.** Снятие показаний: а) со шкалы линейки; б) со шкалы стрелочного прибора

В случае, если деления нанесены часто (рис. 2.1, а), или если абсолютная приборная погрешность имеет один порядок с ценой деления шкалы, пытаться оценивать доли деления на глаз нецелесообразно, и показание необходимо округлить. Такой тип заключения — что величина лежит ближе к данной метке, чем к соседней, — зависит от каждого конкретного наблюдателя и его угла зрения. Тем не менее, стрелка находится ближе либо к одной отсечке, либо к другой, поэтому *максимально возможная* ошибка при округлении равна половине цены деления  $l_{ц.д.}$ :

$$\Delta x_{отсч} = \frac{l_{ц.д.}}{2}, \quad \alpha = 0,997. \quad (2.4)$$

Погрешность отсчета, отвечающая стандартной доверительной вероятности  $\alpha = 0,68$ , определяется по формуле:

$$\Delta x_{отсч} = \sigma_{отсч} = \frac{1}{3} \frac{l_{ц.д.}}{2}, \quad \alpha = 0,68. \quad (2.5)$$

Если метки шкалы прибора расположены редко (рис. 2.1, б), то большинство наблюдателей могут провести визуальную ин-

терполяцию: оценить, в каком месте между метками расположена стрелка прибора. Иногда есть смысл оценивать показание стрелки вплоть до половины или четверти деления.<sup>5</sup> Стандартную погрешность отсчета при интерполяции можно принять равной

$$\Delta x_{\text{отсч}} = \sigma_{\text{отсч}} = \frac{d}{3}, \quad \alpha = 0,68, \quad (2.6)$$

где  $d$  — доля деления, которая оценивается (например, половина, четверть от  $l_{\text{ц.д.}}$  и т. д.).



**Пример.** Цена деления шкалы, показанной на рисунке,  $l_{\text{ц.д.}} = 1$ . Стрелка указывает на значение, не совпадающее ни с одним из делений шкалы. Можно лишь сказать, что значение измеряемой величины лежит между отметками 3 и 4.

Проведем визуальную интерполяцию и оценим  $\sigma_{\text{отсч}}$ .

Вначале сделаем самое простое предположение: если стрелка расположена между делениями, то она находится посередине между ними, — и не будем пытаться оценивать результат точнее. Тогда оцениваемая доля деления  $d = 0,5 l_{\text{ц.д.}}$ , и, поскольку стрелка находится между 3 и 4, получаем значение величины  $x = 3,5$ . Стандартная погрешность отсчета  $\sigma_{\text{отсч}} = d/3 = l_{\text{ц.д.}}/6 \approx 0,2$ . С другой стороны, можно заметить, что стрелка расположена ближе к отметке 4, чем к 3. В этом случае для повышения точности можно визуальным образом оценить  $d$  как четверть деления —  $d = 0,25 l_{\text{ц.д.}}$ . Тогда измеряемое значение  $x = 3,75$ , и стандартная погрешность отсчета равна  $\sigma_{\text{отсч}} = d/3 = l_{\text{ц.д.}}/12 \approx 0,08$ . Таким образом, в зависимости от выбранной самим экспериментатором точности оценки долей деления, погрешность отсчета одного и того же результата может быть различной.

Если стрелка прибора, с точки зрения экспериментатора, указывает точно на отметку шкалы (т. е. округление или интерполяция показания стрелки не требуются), такое измерение также

<sup>5</sup> Однако, как правило, оценивать десятые доли деления не имеет смысла, так как разные наблюдатели делают при подобных оценках различную систематическую ошибку, доходящую до 0,2 деления.

*имеет погрешность отсчета.* Это связано с тем, что штрих деления имеет конечную ширину, а видимое положение стрелки относительно штриха зависит от угла зрения экспериментатора. В этом случае рекомендуется брать такую же по величине  $\Delta x_{\text{отсч}}$ , как для всех остальных измерений, проводимых по данной шкале, при которых проводилось округление либо интерполяция.

**При снятии показаний с цифрового прибора** погрешности отсчета чаще всего отсутствуют (за исключением промахов, обусловленных неверным прочтением показаний). Иногда встречаются ситуации, когда цифры на приборе быстро меняются около какого-то значения, и, проводя измерение, мы фиксируем и записываем какое-то одно. В таком случае в качестве погрешности снятия показаний следует взять либо  $1/2$  от диапазона изменения показаний, либо единицу разряда, который остается неизменным.

#### 4.1.3 Сравнение и учет погрешностей различных источников

Как говорилось выше, ошибка при однократном измерении физической величины в общем случае складывается из двух частей: приборной погрешности  $\Delta x_{\text{приб}}$  и погрешности  $\Delta x_{\text{отсч}}$ , обусловленной конечной точностью снятия показаний.

Для правильного определения итоговой погрешности необходимо **привести все дающие вклад погрешности к одной доверительной вероятности.**

Чтобы сравнить и учесть все источники погрешностей, надо выразить отвечающие им величины  $\Delta x$  в терминах стандартного отклонения  $\sigma$  и привести их к одинаковому количеству “сигм”, расширив или сузив соответствующие доверительные интервалы в зависимости от необходимой доверительной вероятности.



Например, если рассчитанная по классу точности приборная погрешность  $\Delta x_{\text{приб}}$  отвечает  $3\sigma_{\text{приб}}$ , а погрешность отсчета  $\Delta x_{\text{отсч}}$  определена для  $\alpha = 0,68$  (т. е. отвечает **одной**  $\sigma_{\text{отсч}}$ ), необходимо либо разделить  $\Delta x_{\text{приб}}$  на три, тем самым сведя обе погрешности к  $\alpha = 0,68$ , либо, наоборот, расширить  $\Delta x_{\text{отсч}}$  до  $3\sigma_{\text{отсч}}$  (тогда обе погрешности будут отвечать  $\alpha = 0,997$ ). Если же для записи результата требуется какая-либо другая доверительная вероятность, необходимо изменить оба доверительных интервала до нужного количества  $\sigma$ , воспользовавшись таблицей на стр. 17.

После того, как ошибки приведены к одному значению доверительной вероятности, определяется итоговая погрешность. Поскольку погрешность прибора и погрешность снятия показаний имеют различную природу, то они, естественно, являются независимыми. Ниже будет показано, что в таком случае суммарная погрешность определяется как корень из суммы их квадратов:

$$\Delta x_{(1)} = \sqrt{\Delta x_{\text{приб}}^2 + \Delta x_{\text{отсч}}^2}. \quad (2.7)$$

В случае, если одна из вносящих вклад погрешностей значительно превосходит другую (на один или несколько порядков), в качестве итоговой погрешности достаточно взять максимальную из них:

$$\Delta x_{(1)} = \max(\Delta x_{\text{приб}}, \Delta x_{\text{отсч}}). \quad (2.8)$$

## 4.2 Погрешности серии измерений

Однократное измерение физической величины не несет никакой информации о случайных погрешностях, присущих любому эксперименту. Чтобы оценить такие погрешности, необходимо провести *серию* измерений (повторить измерение несколько раз). Если результаты измерений одной и той же физической величины отличаются друг от друга, то мы имеем дело с ситуацией, когда случайная ошибка играет существенную роль. Подчеркнем, что, как говорилось выше, результат каждого отдельного

измерения имеет некоторую погрешность сам по себе (из-за конечной точности прибора и снятия показаний). Поэтому, когда мы говорим, что результаты отличаются друг от друга, речь идет о несовпадении в пределах данной погрешности.

#### 4.2.1 Среднеквадратичная и средняя арифметическая погрешности измерения

Рассмотрим способы оценки случайной погрешности. Допустим, сделано  $N$  измерений, и мы получили набор отличающихся друг от друга результатов:

$$\{x_i\} = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}.$$

Если все измерения проделаны одним и тем же методом и одинаково тщательно, такие измерения называются *равноточными*.

Как говорилось выше, при определенных условиях<sup>6</sup> наилучшей оценкой истинного значения  $X$  является *среднее арифметическое значение*  $\bar{x}$ , вычисленное из всего ряда результатов измерений. Теперь наша задача — определить его погрешность: величину, характеризующую точность, с которой  $\bar{x}$  приближено к истинному значению  $X$ .

Для оценки величины этой погрешности существует несколько способов. Наиболее распространена оценка с помощью стандартной (среднеквадратичной) ошибки. Иногда также применяется средняя арифметическая ошибка. Эти погрешности характеризуют среднюю случайную погрешность отдельных измеренных значений серии  $x_1, x_2, \dots, x_N$ .

Очевидно, что чем больше каждое отдельное значение  $x_i$  отличается от среднего  $\bar{x}$ , которое мы считаем наиболее вероятным значением физической величины, тем хуже мы знаем результат. Поэтому в величину погрешности должны входить разности  $(x_i - \bar{x})$ , называемые *отклонениями*  $x_i$  от  $\bar{x}$ . Понятно, что

---

<sup>6</sup> Подробнее о методах наилучшей оценки истинного значения величины см. в пособии “Распределения случайных величин и основы статистических методов обработки экспериментальных данных” под ред. А.И. Романова.

в качестве величины, характеризующей точность, нельзя брать усредненное отклонение  $(x_i - \bar{x})$ , потому что такое среднее равно нулю из-за случайного характера отклонения результата измерения от истинного значения (отклонения с равной вероятностью происходят и “в плюс”, и “в минус”):

$$\overline{(x_i - \bar{x})} = \frac{\sum(x_i - \bar{x})}{N} = \frac{\sum x_i}{N} - \frac{\sum \bar{x}}{N} = \bar{x} - \frac{N\bar{x}}{N} = 0.$$

Чтобы обойти эту проблему, надо сделать так, чтобы все усредняемые отклонения были положительными. Этого можно добиться двумя способами: возведя  $(x_i - \bar{x})$  в квадрат, либо взяв абсолютное значение  $|x_i - \bar{x}|$ .

Величина

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_N - \bar{x})^2}{N - 1}} = \\ &= \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N - 1}} \end{aligned} \quad (2.9)$$

называется *среднеквадратичной ошибкой*, или *стандартным отклонением*.

Среднеквадратичная ошибка  $\sigma_x$  — это случайная ошибка каждого *единичного* результата<sup>7</sup> при проведении  $N$  измерений. Она характеризует случайный разброс результатов измерения  $\{x_i\}$  вокруг наиболее вероятного значения  $\bar{x}$ . Если увеличивать число измерений, то величина  $\sigma_x$  будет “уточняться” (так как в нее будет входить все больше отклонений отдельных  $x_i$ ), стремясь к некоторому постоянному значению  $\sigma$ :

$$\sigma = \lim_{N \rightarrow \infty} \sigma_x.$$

Именно этот статистический предел на самом деле и является истинным стандартным отклонением случайной величины  $x_i$  от

---

<sup>7</sup> Однако, в отличие от описанных выше приборных погрешностей и погрешностей отсчета, ее невозможно определить по одному измерению: необходимо обрабатывать все  $N$  результатов серии.

$\bar{x}$  в случае нормального распределения, о котором речь пойдет ниже. Квадрат этой величины  $\sigma^2$  называется *дисперсией* измерений. В действительности, однако, мы всегда вычисляем не величину  $\sigma$ , а ее приближенное значение  $\sigma_x$ , которое тем ближе к  $\sigma$ , чем больше количество измерений  $N$ .

Посмотрим на формулу (2.9) внимательно. Если все измеренные значения совпадают, то каждое отклонение  $(x_i - \bar{x})$  равно нулю, и  $\sigma_x = 0$ , т. е. результат является абсолютно точным (напоминаем, что рассматривается случай отсутствия систематических ошибок). В реальности такая ситуация означает, что случайный разброс результатов измерений много меньше погрешности единичного измерения (приборной ошибки или погрешности отсчета).

Погрешность, вычисленная по формуле

$$\rho_x = \frac{|x_1 - \bar{x}| + |x_2 - \bar{x}| + \dots + |x_N - \bar{x}|}{\sqrt{N(N-1)}} = \frac{\sum_{i=1}^N |x_i - \bar{x}|}{\sqrt{N(N-1)}}, \quad (2.10)$$

называется *средней арифметической ошибкой* измерений.

Аналогично среднеквадратичной ошибке величина  $\rho_x$  уточняется с ростом числа измерений  $N$  и стремится к некоторому истинному значению средней арифметической ошибки  $\rho$ :

$$\rho = \lim_{N \rightarrow \infty} \rho_x.$$

Определенным преимуществом использования средней арифметической ошибки  $\rho_x$  является сравнительная простота вычисления. Однако в большинстве случаев целесообразнее пользоваться величиной  $\sigma_x$ . В первую очередь, потому, что, пользуясь стандартным отклонением  $\sigma_x$ , легче определять доверительные вероятности: как упоминалось выше, для любой величины доверительного интервала, выраженного в единицах  $\sigma$ , доверительная вероятность может быть рассчитана (взята из таблицы).

При достаточно большом числе измерений ( $N > 30$ ) между  $\rho_x$  и  $\sigma_x$  существуют простые соотношения:

$$\sigma_x \simeq 1,25 \rho_x, \quad \text{или} \quad \rho_x \simeq 0,80 \sigma_x, \quad (2.11)$$

поэтому для больших  $N$  безразлично, какой из ошибок пользоваться. В случае  $N < 30$  по причине, указанной выше, предпочтительнее использование среднеквадратичной погрешности.

## 4.2.2 Нормальное распределение

Зададимся вопросом: как именно распределены величины  $x_i$  относительно среднего значения  $\bar{x}$ ?

Мы предполагаем, что  $x_i$  могут принимать непрерывный ряд значений от  $-\infty$  до  $+\infty$ , причем результат измерения тем вероятнее, чем меньше его отклонение от среднего значения  $\bar{x}$ . Другими словами, большие ошибки встречаются реже, чем маленькие. Далее будем полагать, что если характер отклонения результата измерения от истинного значения случаен, то для большого количества измерений физической величины ( $N \rightarrow \infty$ ) результаты индивидуальных измерений распределены **нормально**<sup>8</sup>, т. е. подчиняются **распределению Гаусса**:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}. \quad (2.12)$$

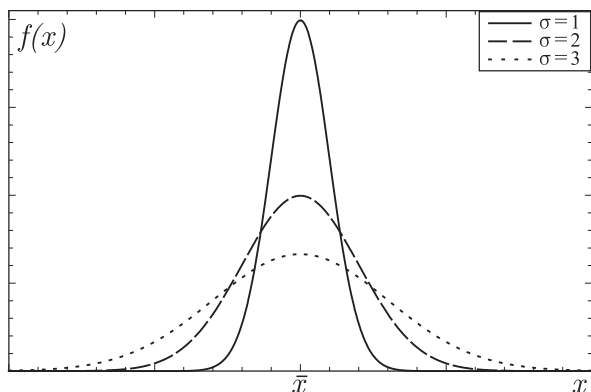
Параметрами в функции (2.12) являются те самые значения среднего  $\bar{x}$  и стандартного отклонения  $\sigma$ , которые были введены выше. То, что в качестве наилучшей оценки истинного значения  $X$  выбрана величина  $\bar{x}$ , а разброс  $x_i$  относительно  $\bar{x}$  при большом количестве измерений определяется величиной среднеквадратичной ошибки  $\sigma$ , есть следствие именно того, что нормальное распределение случайных величин имеет вид (2.12).

Вид кривых Гаусса представлен на рис. 2.2 для трех значений стандартного отклонения  $\sigma$ . Если измерения проводятся с высокой точностью (т. е. среднеквадратичная ошибка мала), то все результаты серии будут близки к истинному значению измеряемой величины и график функции  $f(x)$  будет иметь вид

---

<sup>8</sup> Здесь фразу “распределены нормально” следует понимать как термин. Строго говоря, *не все* распределения случайных величин при  $N \rightarrow \infty$  переходят в нормальное распределение. Однако рассмотрение распределений, далеких от нормального, выходит за рамки данного пособия.

узкого острого пика. Если же точность измерений низкая ( $\sigma$  велико), то результаты будут сильно отличаться друг от друга, и их распределение будет описываться широкой пологой кривой. Данный график позволяет установить, как часто должны появляться ошибки той или иной величины: каждая точка кривой  $f(x)$  соответствует той доле измерений, результат которых попал в интервал значений  $(x, x + dx)$ . Наиболее вероятное для нормального распределения значение  $\bar{x}$ , очевидно, встречается при измерениях чаще всего, и потому в точке  $x = \bar{x}$  функция имеет максимум.



**Рис. 2.2.** Распределение Гаусса для различных величин  $\sigma$

Функция  $f(x)$  называется *плотностью вероятности* распределения величины. Смысл функции  $f(x)$  состоит в том, что она определяет вероятность<sup>9</sup> обнаружить случайную величину  $x$  в каком-либо интервале значений. Например, вероятность того, что значение величины лежит в промежутке между  $x = a$  и  $x = b$ , равна

$$P(a < x < b) = \int_a^b f(x) dx.$$

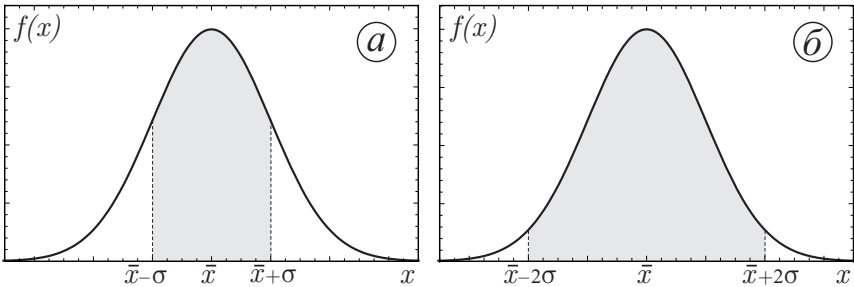
<sup>9</sup> Вероятностью, согласно определению, называют величину, равную отношению количества измерений, в которых событие произошло, к полному числу экспериментов, при числе измерений, стремящемся к бесконечности.

По смыслу интеграла данная вероятность отвечает площади под кривой  $f(x)$ , взятой между точками  $x = a$  и  $x = b$ .

Очевидно, что функция распределения удовлетворяет условию нормировки, т. е.  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$ . Это условие фиксирует тот простой факт, что вероятность наступления события “ $x$  принимает значения от  $-\infty$  до  $+\infty$ ” (т. е. хоть какое-то значение) равна единице.

Таким образом, если случайная величина подчиняется распределению Гаусса, можно вычислить вероятность ее нахождения в доверительном интервале  $(\bar{x} - \sigma; \bar{x} + \sigma)$ , и тогда, согласно определению, получим доверительную вероятность, отвечающую погрешности  $\Delta x = \sigma$ :

$$P(\bar{x} - \sigma < X < \bar{x} + \sigma) \equiv \alpha = \int_{\bar{x} - \sigma}^{\bar{x} + \sigma} f(x) dx \simeq 0.68. \quad (2.13)$$



**Рис. 2.3.** Доверительные интервалы шириной в  $\pm\sigma$  (а) и  $\pm 2\sigma$  (б) и соответствующие им доверительные вероятности, отвечающие 68 и 95 % площади под кривой Гаусса

Т. е., если мы сделаем очень много (формально — бесконечно много) измерений, вычислим среднее значение и среднеквадратичную погрешность, то в интервал  $(\bar{x} - \sigma; \bar{x} + \sigma)$  попадет примерно 68 % результатов измерений  $x_i$  (рис. 2.3, а). Именно вероятность попадания результата измерения в этот интервал значений и характеризует величина стандартного отклонения  $\sigma$ , введенная ранее. Точно так же можно вычислить и доверительные

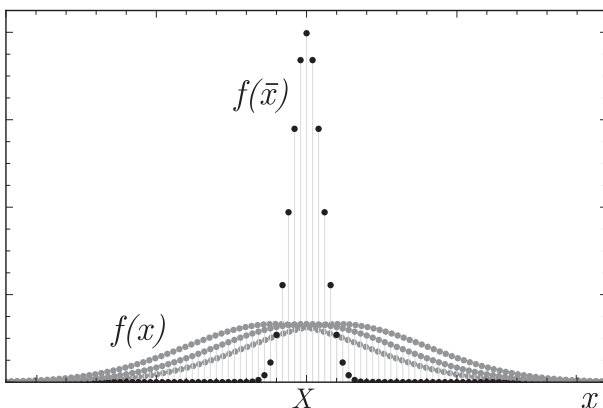
вероятности, отвечающие интервалам другой ширины. Напомним, что доверительная вероятность при обработке результатов измерений выбирается экспериментатором самостоятельно, и часто принимается равной 0,95 или 0,997. Такие вероятности соответствуют доверительным интервалам, ширина которых составляет, соответственно,  $\pm 2\sigma$  (рис. 2.3, б) и  $\pm 3\sigma$ . На основе этого факта формулируется так называемое “правило  $3\sigma$ ”: практически все значения нормально распределенной случайной величины лежат в интервале  $(\bar{x} - 3\sigma, \bar{x} + 3\sigma)$ .

### 4.2.3 Стандартное отклонение среднего

Итак, при нормальном распределении среднее значение  $\bar{x}$  является наилучшей оценкой значения величины  $X$ , а типичное отклонение результата каждого отдельного измерения  $x_i$  от этого наилучшего значения характеризуется величиной стандартного отклонения  $\sigma_x$ . Однако основным результатом всей серии измерений является среднее значение  $\bar{x}$ : в нем усреднено множество индивидуальных величин  $x_i$ , и оно является более надежной оценкой измеряемой физической величины, чем каждое отдельное измерение. Поэтому при записи финального результата нам важнее знать не то, насколько каждое отдельное  $x_i$  отклоняется от среднего  $\bar{x}$ , а то, насколько  $\bar{x}$  может отклоняться от истинного значения  $X$ .

Очевидно, что при проведении нескольких одинаковых серий измерений, в силу случайности, мы будем получать всегда немного разные наборы результатов  $\{x_i\}^{(1)}$ ,  $\{x_i\}^{(2)}$ , ... и, следовательно, немного отличные друг от друга средние значения  $\bar{x}^{(1)}$ ,  $\bar{x}^{(2)}$ , ... Характер разброса средних от каждой серии случаен, так же как и характер разброса значений  $x_i$  в пределах каждой серии. Поэтому распределение средних значений  $\{\bar{x}^{(i)}\}$  также будет подчиняться нормальному закону, т. е. описываться функцией  $f(\bar{x})$ . На рис. 2.4 для примера показаны графики плотности распределения результатов измерений в трех выборочных сериях и плотность распределения средних арифметических значений, полученных во всех (многократных) сериях измерений.





**Рис. 2.4.** Распределение результатов отдельных измерений  $x_i$  в сериях для трех серий (серым) и распределение средних арифметических значений  $\bar{x}^{(i)}$  различных серий измерений одной и той же физической величины (черным)

Понятно, что чем больше измерений делается в каждой отдельной серии, тем ближе каждое среднее  $\bar{x}^{(i)}$  к истинному значению. Значит, чем больше  $N$ , тем ближе средние значения, полученные в разных сериях, друг к другу (так как все они при  $N \rightarrow \infty$  стремятся к  $X$ ). Поэтому стандартное отклонение  $\sigma_{\bar{x}}$  для кривой, описывающей распределение средних, и, соответственно, ширина гауссовского “колокола”  $f(\bar{x})$  будет тем меньше, чем больше количество измерений  $N$  в отдельной серии.

Можно доказать, что **точность среднего арифметического значения** при нормальном распределении определяется величиной

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}, \quad (2.14)$$

которая называется *среднеквадратичной погрешностью среднего* или *стандартным отклонением среднего*. Эта величина характеризует случайный разброс средних значений, полученных при повторениях серии из  $N$  измерений, таким образом определяя погрешность  $\bar{x}$  как наилучшей оценки  $X$ .

Подчеркнем, что стандартное отклонение  $\sigma_x$  и стандартное отклонение среднего  $\sigma_{\bar{x}}$  вычисляются по формулам (2.9) и (2.14),

проделав лишь *одну* серию из  $N$  измерений. Однако эти величины являются по смыслу совершенно разными. В то время как среднеквадратичная ошибка  $\sigma_x$  описывает разброс отдельных значений  $x_i$  вокруг  $\bar{x}$  и с ростом числа измерений  $N$  практически не меняется (а лишь уточняется), стандартное отклонение среднего  $\sigma_{\bar{x}}$ , характеризующее разброс  $\bar{x}$  в случае проведения нескольких одинаковых серий, уменьшается с ростом числа измерений как  $1/\sqrt{N}$ . Это обстоятельство позволяет увеличить точность результата эксперимента (т. е. уменьшить погрешность  $\bar{x}$ ), повышая количество измерений в серии. Зависимость  $1/\sqrt{N}$  является довольно медленной и с точки зрения эксперимента — очень “дорогой”, потому что для увеличения точности в  $k$  раз необходимо провести в  $k^2$  раз больше замеров.

Очевидно, что при  $N \rightarrow \infty$  максимумы всех колоколов на рис. 2.4 должны стремиться к одной точке — истинному значению измеряемой величины  $X$ . Поэтому, если говорить о среднем арифметическом значении  $\bar{x}$  как о результате эксперимента, следует отдавать себе отчет в следующем. С одной стороны,  $\bar{x}$  в случае нормального распределения есть **наиболее вероятное значение из всевозможных результатов измерения** величины внутри одной серии, т. е. результат  $x = \bar{x}$  должен встречаться при измерениях наиболее часто (на рис. 2.4 точки  $x = \bar{x}^{(i)}$  отвечают вершинам серых кривых). Поэтому запись

$$(\bar{x} \pm \sigma_x) \text{ ед. измерения, } \alpha = 0,68$$

будет характеризовать разброс отдельных  $x_i$ , и доверительная вероятность 68 % будет вероятностью того, что последующее *отдельное* измерение попадет в указанный доверительный интервал. С другой стороны,  $\bar{x}$  — это **наилучшая оценка истинного значения величины  $X$**  (на рис. 2.4 точка  $x = X$  отвечает вершине черной кривой), и тогда запись

$$(\bar{x} \pm \sigma_{\bar{x}}) \text{ ед. измерения, } \alpha = 0,68$$

будет характеризовать разброс средних  $\bar{x}^{(i)}$ , и доверительная вероятность 68 % будет вероятностью того, что при повторении *серии* измерений мы получим среднее арифметическое в данном

интервале. Это обстоятельство следует иметь в виду при записи результата, так как в физическом эксперименте требуется максимально точно определить истинное значение  $X$  и записать результат с погрешностью, характеризующей именно разброс средних значений, а не отдельных  $x_i$ .

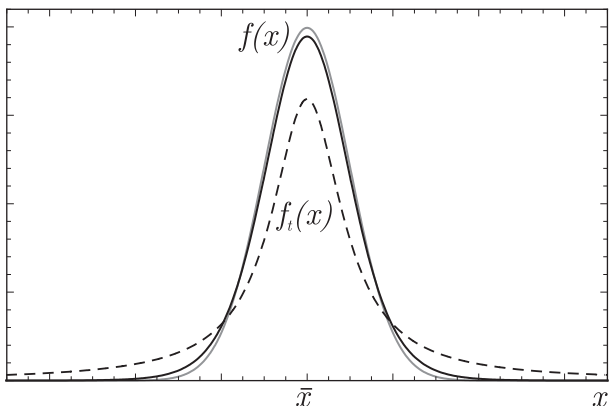
Случайная погрешность отдельного измерения в серии характеризуется стандартным отклонением  $\sigma_x$ , в то время как для оценки погрешности того числа, которое получено в результате *всех* произведенных измерений, следует вычислять стандартное отклонение среднего  $\sigma_{\bar{x}} = \sigma_x / \sqrt{N}$ . Доверительная вероятность, отвечающая доверительному интервалу  $(\bar{x} \pm \sigma_{\bar{x}})$ , составляет  $\alpha = 0,68$ .

#### 4.2.4 Распределение Стьюдента

Строго говоря, использование распределения Гаусса предполагает, что проделано очень большое число измерений. В этом случае мы знаем стандартное отклонение  $\sigma$  и можем определить доверительную вероятность для любого доверительного интервала. Однако, как правило, мы можем определить лишь величину  $\sigma_{\bar{x}}$ , соответствующую тому или иному количеству измерений  $N$ , чаще всего сравнительно небольшому (в лабораторных работах редко встречаются ситуации, когда величина измеряется более 20 раз). Если считать, что получаемые нами значения  $\sigma_{\bar{x}}$  совпадают с величиной  $\sigma$ , и пользоваться табличными данными для нахождения доверительной вероятности, то полученные значения  $\alpha$  окажутся неверными (завышенными).

Это результат того, что, определяя среднеквадратичную погрешность среднего из малого числа наблюдений, мы определяем ее с малой точностью. Так что, когда мы заменяем  $\sigma$  на  $\sigma_{\bar{x}}$ , погрешность оказывается определена неверно, и мы уменьшаем надежность нашей оценки, причем тем сильнее, чем меньше проводилось измерений.

В случае небольших  $N$  распределение результатов измерений выглядит иначе, и называется **распределением Стьюдента**.



**Рис. 2.5.** Распределения Гаусса  $f(x)$  с  $\sigma = 1$  (серым) и Стьюдента  $f_t(x)$  для  $N = 10$  (черная сплошная линия) и  $N = 1$  (пунктир)

График этого распределения шире кривой распределения Гаусса (рис. 2.5), так как при недостаточно большом числе измерений мы имеем меньшую информацию о величине, и потому ее разброс относительно среднего значения больше. На практике это означает, что доверительный интервал, соответствующий какой-либо доверительной вероятности, будет в случае распределения Стьюдента шире, чем в случае нормального распределения, и тем самым будет учтено отличие  $\sigma_{\bar{x}}$  от  $\sigma$ .

Чтобы получить доверительный интервал в этом случае, необходимо домножить величину стандартного отклонения среднего на так называемый *коэффициент Стьюдента*, который отражает отличие в распределениях для конечного и бесконечного числа опытов. Этот коэффициент зависит от  $\alpha$  и от  $N$ , и при больших  $N$  стремится к величине, которая будет соответствовать гауссовскому распределению (так, для  $\alpha = 0,68$  при  $N > 60$  коэффициент Стьюдента  $t_{\alpha,N}$  стремится к 1, а  $\Delta x$  — стандартному отклонению нормального распределения  $\sigma$ ).

Используя коэффициенты Стьюдента, можно записать определение (2.1) в виде

$$P(\bar{x} - t_{\alpha,N} \cdot \sigma_{\bar{x}} < X < \bar{x} + t_{\alpha,N} \cdot \sigma_{\bar{x}}) = \alpha. \quad (2.15)$$

Таблица коэффициентов Стьюдента  $t_{\alpha,N}$

N	$\alpha$									
	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	0,98	0,99	0,999
2	0,73	1,00	1,38	2,0	3,1	6,3	12,7	31,8	63,7	636,6
3	0,62	0,82	1,06	1,3	1,9	2,9	4,3	7,0	9,9	31,6
4	0,58	0,77	0,98	1,3	1,6	2,4	3,2	4,5	5,8	12,9
5	0,57	0,74	0,94	1,2	1,5	2,1	2,8	3,7	4,6	8,6
6	0,56	0,73	0,92	1,2	1,5	2,0	2,6	3,4	4,0	6,9
7	0,55	0,72	0,90	1,1	1,4	1,9	2,4	3,1	3,7	6,0
8	0,55	0,71	0,90	1,1	1,4	1,9	2,4	3,0	3,5	5,4
9	0,54	0,71	0,90	1,1	1,4	1,9	2,3	2,9	3,4	5,0
10	0,54	0,70	0,88	1,1	1,4	1,8	2,3	2,8	3,3	4,8
11	0,54	0,70	0,88	1,1	1,4	1,8	2,2	2,8	3,2	4,6
12	0,54	0,70	0,87	1,1	1,4	1,8	2,2	2,7	3,1	4,5
13	0,54	0,70	0,87	1,1	1,4	1,8	2,2	2,7	3,1	4,3
14	0,54	0,69	0,87	1,1	1,4	1,8	2,2	2,7	3,0	4,2
15	0,54	0,69	0,87	1,1	1,3	1,8	2,1	2,6	3,0	4,1
20	0,53	0,69	0,86	1,1	1,3	1,7	2,1	2,5	2,9	3,9
25	0,53	0,69	0,86	1,1	1,3	1,7	2,1	2,5	2,8	3,7
30	0,53	0,68	0,85	1,1	1,3	1,7	2,0	2,5	2,8	3,7
40	0,53	0,68	0,85	1,1	1,3	1,7	2,0	2,4	2,7	3,6
60	0,53	0,68	0,85	1,0	1,3	1,7	2,0	2,4	2,7	3,5
$\infty$	0,52	0,67	0,84	1,0	1,3	1,6	2,0	2,3	2,6	3,3

Таким образом, при малом количестве измерений алгоритм вычисления случайной погрешности становится следующим:

1. Вычисляется стандартное отклонение среднего  $\sigma_{\bar{x}}$ .
2. Выбирается желаемая доверительная вероятность  $\alpha$ .
3. Из таблицы коэффициентов Стьюдента берется  $t_{\alpha,N}$ , соответствующий выбранной доверительной вероятности  $\alpha$  и количеству проведенных измерений  $N$ .

4.  $\sigma_{\bar{x}}$  умножается на найденный коэффициент Стьюдента:

$$\Delta x = t_{\alpha,N} \cdot \sigma_{\bar{x}}.$$

5. Результат записывается в виде  $x = \bar{x} \pm \Delta x$ .

6. Указывается доверительная вероятность  $\alpha$  и относительная погрешность  $\delta x = \Delta x / \bar{x}$ .

#### 4.2.5 Оценка погрешности методом Корнфельда

Иногда при проведении эксперимента описанная выше статистическая методика вычисления погрешности оказывается довольно трудоемкой, но при этом не обеспечивает высокого качества обработки результатов. В таких случаях для грубой оценки погрешности допустимо использовать так называемый **метод Корнфельда**.

Согласно этому методу, доверительный интервал выбирается так, чтобы в него попали все результаты измерений, а наилучшей оценкой истинного значения физической величины считается среднее арифметическое между максимальным и минимальным результатами:

$$x_{\text{наил}} = \frac{x_{\text{max}} + x_{\text{min}}}{2}, \quad \Delta x = \frac{x_{\text{max}} - x_{\text{min}}}{2}. \quad (2.16)$$

Такому доверительному интервалу соответствует доверительная вероятность

$$\alpha = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{N-1}. \quad (2.17)$$

В этом заключается *существенный недостаток данного метода*: доверительная вероятность не выбирается экспериментатором, а зависит от количества проведенных измерений. Это обстоятельство значительно усложняет использование погрешностей, оцененных методом Корнфельда, в дальнейших вычислениях (например, при косвенных измерениях).

Метод Корнфельда для вычисления  $\Delta x$  желательно использовать только тогда, когда необходимо лишь грубо оценить погрешность результата, например, для проверки совпадения результата измерений с табличным или иным известным значением физической величины. Отметим, что в реальных экспериментах, где с целью повышения точности стремятся увеличить число измерений, метод Корнфельда не применяется.

## 4.2.6 Определение и исключение промахов

Пусть при проведении серии измерений одной величины получилось так, что какое-то значение существенно отличается от остальных. Рассмотрим вопрос о том, как можно оценить, является ли данный результат закономерным и его отклонение — следствием наличия случайных ошибок, или же данное значение является ошибочным и его необходимо отбросить.

Мы знаем, что распределение Гаусса, которому подчиняются случайные погрешности, симметрично и имеет бесконечные пределы. Т. е., теоретически, отличие результатов друг от друга может быть сколь угодно большим. С другой стороны, понятно, что чем больше такое отклонение, тем менее вероятно данное событие. Поэтому скорее всего речь идет о том, что произошла грубая ошибка в измерении, в записи или в условиях проведения эксперимента.

Чтобы отличить, является ли такой промах ошибкой экспериментатора или некоторым физическим эффектом, имеющим место в лабораторной работе, можно было бы повторить измерение много раз. Если аномалия не воспроизводится, то скорее всего была совершена ошибка и ее вклад из-за большого числа измерений несущественен. Но в условиях ограниченного времени и ресурсов при проведении работы значительное увеличение числа измерений зачастую невозможно. При  $N \leq 10$  просто отбрасывать один из результатов, даже отличающийся от среднего арифметического более, чем на  $3\sigma$ , нельзя, поскольку точное значение  $\sigma$  неизвестно, да и непонятно, как вычислить  $\bar{x}$  — с учетом отбрасываемого результата или без. Поэтому сформулируем критерий, который позволит нам относительно строго сказать, является ли “подозрительное” значение верным или нет. Самый простой такой критерий, следующий из распределения Гаусса, носит название **критерия Шовене**.

Пусть имеется  $\{x_i\}$  — серия из  $N$  измерений величины  $X$ , и одно из этих значений (обозначим его для определенности  $x_k$ ) сильно отличается от остальных.

Предполагая, что справедливо распределение Гаусса, вычислим среднее значение  $\bar{x}$  и среднеквадратичную погрешность  $\sigma_x$  с

учетом *всех* результатов, включая подозрительный. Затем определим число стандартных отклонений, содержащихся в индивидуальном  $k$ -м отклонении  $(x_k - \bar{x})$ :

$$\frac{|x_k - \bar{x}|}{\sigma_x} = n_k.$$

С помощью распределения Гаусса теперь можно узнать, какова вероятность повторения этого события, т. е. какая доля площади под кривой (2.12) лежит вне интервала  $(\bar{x} \pm n_k \sigma_x)$ . Пусть эта вероятность равна  $P$ :

$$P = 1 - \alpha(\bar{x} \pm n_k \sigma_x).$$

Значение доверительной вероятности  $\alpha$ , отвечающее доверительному интервалу шириной  $\pm n_k \sigma$ , берется из таблицы (либо вычисляется интегрированием функции распределения Гаусса в соответствующих пределах). Вычитая его из единицы, мы находим вероятность  $P$  того, что результат измерения *не попадет* в данный интервал.

Найденная вероятность  $P$  — это статистическая доля всех измерений, в которых можно ожидать получение значения  $x_i$ , отличающегося от среднего так же или больше, чем от него отличается результат  $x_k$ . Если теперь вычислить произведение  $N \cdot P$ , определим, какое количество измерений из нашей серии  $\{x_i\}$  может ожидаемо иметь такое отличие. Тогда критерием для отбрасывания результата  $x_k$  будет следующий:

- если  $N \cdot P < 0,5$ , т. е. количество измерений в нашей серии, результат которых может ожидаемо настолько отклоняться от среднего, меньше, чем пол-измерения, то можно сказать, что имеет место грубая ошибка (промах), и величину  $x_k$  надо исключить из расчетов.

Разумеется, выбор 0,5 в качестве границы, отделяющей “вероятные” события от “невероятных”, произволен, и его следует рассматривать как проявление здравого смысла, а не строгих вычислений.



После отбрасывания результата, не удовлетворяющего критерию Шовене, необходимо *пересчитать* значения  $\bar{x}$  и  $\sigma_x$  по оставшимся данным.

Стоит отметить, что поскольку данный критерий основан на распределении Гаусса, то он хорошо подходит для серий с большим количеством измерений  $N$ , а для экспериментов, в которых  $N$  мало, его надо применять с осторожностью. Например, если проводилось всего три измерения физической величины, два из которых дали одинаковые результаты, очевидно, что отбросив третий результат, мы потеряем какие-либо данные о случайной ошибке в принципе. В связи с этим **исключение промахов рекомендуется проводить только для серий измерений с количеством повторений  $N \geq 6$ .**

#### 4.2.7 Учет погрешностей неравноточных измерений

До этого мы предполагали, что проводится серия измерений одной физической величины  $X$ , причем все измерения производятся на одной и той же аппаратуре одним и тем же человеком. Интересно было бы рассмотреть вопрос о том, как следует комбинировать погрешности и измеренные величины в случае, если они измерены с разной точностью, т. е. в случае *неравноточных* измерений.

Пусть, например, в результате проведения эксперимента ученый  $A$  получил значение некоторой величины  $\bar{x}_A \pm \sigma_A$ , а ученый  $B$ , проводя эксперимент на другой установке (или проделав другое количество измерений), для той же величины получил значение  $\bar{x}_B \pm \sigma_B$ .<sup>10</sup> Доверительные вероятности этих результатов одинаковы и равны 0,68. Спрашивается, как следует усреднить результаты этих двух измерений? С первого взгляда может показаться, что надо просто усреднить величины  $\bar{x}_A$  и  $\bar{x}_B$ . Но при таком способе теряется значительная часть информации о проведенных экспериментах. Действительно, пусть точность экспе-

---

<sup>10</sup> При этом естественно, что разность между  $\bar{x}_A$  и  $\bar{x}_B$  не должна превышать величины соответствующих погрешностей, потому что такое превышение будет означать противоречие между результатами.

римента  $A$  была выше, чем у  $B$ , и соответствующие стандартные отклонения средних  $\sigma_A < \sigma_B$ . Следовательно, результат  $A$  является лучшим приближением к истине, чем  $B$ , и естественно предположить, что  $X$  лежит ближе к  $\bar{x}_A$ , чем к  $\bar{x}_B$ , в то время как среднее арифметическое  $(\bar{x}_A + \bar{x}_B)/2$  “уравнивает их в правах”.

Для ответа на этот вопрос обратимся к понятию функции распределения. Предполагая, что в каждом из опытов распределение результатов измерений нормально, получим, что в первом опыте вероятность нахождения истинного значения величины  $X$  в интервале  $(x, x + dx)$  пропорциональна  $e^{-(x-\bar{x}_A)^2/2\sigma_A^2}$ , а во втором опыте —  $e^{-(x-\bar{x}_B)^2/2\sigma_B^2}$ . Если имеют место два независимых события (т. е. эксперименты не влияли друг на друга), то вероятность наступления события “в эксперименте  $A$  получено значение  $\bar{x}_A$ , а в эксперименте  $B$  получено значение  $\bar{x}_B$ ” будет просто произведением этих вероятностей:

$$P(\bar{x}_A, \bar{x}_B) \sim e^{-\frac{(x-\bar{x}_A)^2}{2\sigma_A^2}} \cdot e^{-\frac{(x-\bar{x}_B)^2}{2\sigma_B^2}} = e^{-\frac{(x-\bar{x}_A)^2\sigma_B^2 + (x-\bar{x}_B)^2\sigma_A^2}{2\sigma_A^2\sigma_B^2}}.$$

Это ни что иное как функция распределения Гаусса для случайной величины  $x$ . Если выделить в числителе показателя экспоненты полный квадрат, то получим, что максимум этой функции распределения приходится на точку

$$x_{\text{наил}} = \frac{\frac{1}{\sigma_A^2} \bar{x}_A + \frac{1}{\sigma_B^2} \bar{x}_B}{\frac{1}{\sigma_A^2} + \frac{1}{\sigma_B^2}}. \quad (2.18)$$

Именно это значение, согласно определению, соответствует наилучшей оценке величины  $X$ .

Видно, что чем менее точен результат (т. е. чем больше его стандартное отклонение среднего), тем меньший вклад вносит он в усредненное значение, что вполне соответствует здравому смыслу. Если оба результата имеют одинаковую точность, то в этом случае  $x = (\bar{x}_A + \bar{x}_B)/2$ . В общем же случае имеет место формула (2.18), называемая *взвешенным средним*, где *в е с а м и*  $w_{A,B}$  называют обратные квадраты погрешностей соответствующи-

щих величин:

$$x_{\text{наил}} = \frac{w_A \bar{x}_A + w_B \bar{x}_B}{w_A + w_B}, \quad w_{A,B} = \frac{1}{\sigma_{A,B}^2}. \quad (2.19)$$

Эта формула аналогична определению центра масс системы, в котором вместо  $w_{A,B}$  стоят массы каждого из тел, а вместо  $x_{A,B}$  — их координаты.

Формула для стандартной погрешности взвешенного среднего имеет вид

$$\sigma_{\bar{x}} = \left( \frac{1}{\sigma_A^2} + \frac{1}{\sigma_B^2} \right)^{-1/2}. \quad (2.20)$$

Видно, что погрешность взвешенного среднего меньше, чем каждая из усредняемых погрешностей, что соответствует уменьшению неопределенности при увеличении количества измерений.

Описанный выше результат обобщается на любое количество измерений. Из него, помимо прочего, видно, почему стандартное отклонение среднего равно среднеквадратичной ошибке, деленной на корень из числа измерений. Пусть имеется  $N$  результатов измерений некоторой величины:  $x_1, \dots, x_i, \dots, x_N$ . Среднеквадратичная ошибка, т. е. точность каждого отдельного измерения, равна  $\sigma_x$ . Среднее значение  $\bar{x}$  есть взвешенное среднее результатов  $\{x_i\}$  и равно (в силу равенства всех среднеквадратичных ошибок) просто среднему арифметическому. Стандартное отклонение среднего представляет собой обратную сумму обратных квадратов среднеквадратичных ошибок:

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \left( \frac{1}{\sigma_x^2} + \dots + \frac{1}{\sigma_x^2} \right)^{-1} = \left( \frac{N}{\sigma_x^2} \right)^{-1},$$

откуда имеем результат  $\sigma_{\bar{x}} = \sigma_x / \sqrt{N}$ .

### 4.3 О количестве измерений

При проведении различного рода экспериментов может возникнуть естественный вопрос: сколько измерений необходимо про-

вести в том или ином случае, чтобы получить достоверный результат и правильно оценить погрешность? Когда достаточно измерить величину однократно, а когда следует повторять измерение несколько (как можно больше) раз?

Рассмотрим две часто встречающиеся ситуации.

**Пример 1.** Допустим, нам требуется разместить стол в нише, ширина которой очень близка к длине стола. Если мы измеряем длину стола линейкой с миллиметровыми делениями, то, проведя одно измерение, мы получаем ответ с абсолютной погрешностью порядка 1 мм. Но у реального стола углы не равны точно  $90^\circ$ , а грани — не строго плоские. Поэтому измерение его длины в одном месте не гарантирует того, что он встанет в нишу заданной ширины. Если же мы измерим длину несколько раз в разных точках стола, то вполне вероятно, что обнаружим разброс значений, и, определив  $\sigma_{\bar{x}}$ , получим погрешность величиной порядка 1 см. На первый взгляд может показаться, что одно измерение “лучше” нескольких, ведь оно дает результат с большей точностью. Однако очевидно, это не так: в случае одного измерения мы лишены какой-либо информации о случайной ошибке, и потому получаем просто-напросто *неверный* ответ на вопрос об “истинной” длине стола, что может привести к несовместимости стола с отведенной для него нишей.

Таким образом, можно сделать вывод: в этом опыте одного измерения недостаточно, необходимо проводить серию измерений.

**Пример 2.** При измерении вольт-амперной характеристики проводится одно измерение силы тока для каждой величины приложенного напряжения. Задавшись целью повысить точность, экспериментатор решает измерить эти значения по несколько раз, но обнаруживает, что стрелка амперметра каждый раз останавливается в одном и том же месте (в пределах одного деления). Таким образом, случайный разброс результатов определить не удастся и приходится пользоваться приборной погрешностью и погрешностью отсчета, а значит, не было смысла увеличивать количество измерений.

В данном случае вывод другой: в этом эксперименте бессмысленно увеличивать количество измерений (по крайней мере, прибором данной точности).

Чтобы понять различие этих двух примеров, следует проанализировать понятие “приборная погрешность” в каждом из описанных случаев.

В первом примере приборная погрешность линейки 1 мм означает, что было произведено, например, сто линеек одинаковой длины, сравнение которых с некоторым эталоном выявило случайный разброс длин всех ста линеек величиной 1 мм. Одна из этих линеек затем попала в лабораторию. Данная приборная погрешность учитывает случайные сбои станка при производстве линейки и случайное воздействие внешних факторов (например, колебаний комнатной температуры) на саму линейку, но не несет никакой информации ни о неодинаковости длины стола в разных его точках, ни о воздействии тех же колебаний температуры на стол. Другими словами, случайные факторы, оказывающие влияние на *объект измерения*, данной погрешностью никак не учитываются. Именно поэтому в подобных случаях следует проводить несколько измерений.

В случае же с амперметром, независимо от того, где и что мы измеряем, происходит подключение амперметра в электрическую цепь (т. е. подача напряжения на клеммы). Иными словами, объект измерения находится “внутри” прибора. Случайные факторы, которые могут повлиять на показания амперметра (такие как колебания температуры, атмосферного давления, влажности и т. п.), влияли на них и при его заводском тестировании, когда проводились многократные контрольные измерения на эталонном приборе. Т. е. заданный в паспорте прибора класс точности *уже содержит* в себе учет случайных флуктуаций силы тока за счет влияния внешних факторов — естественно, в некоторых пределах (эти пределы указываются в паспорте прибора вместе с классом точности). Поэтому получаемый в данном случае случайный разброс значений оказывается меньше приборной ошибки, т. е. полученные в повторных измерениях значения в пределах их погрешности *совпадают*. Именно эту погрешность одно-

кратного измерения и следует считать итоговой погрешностью результата. Безусловно, возможно воздействие каких-то случайных факторов, которые *не учтены* в заводской погрешности. В этом случае у результатов повторных измерений появится разброс, превышающий погрешность единичного измерения.

Таким образом, универсального ответа на вопрос о том, достаточно ли измерить величину один раз или требуется серия измерений, не существует. Все зависит от конкретного эксперимента — установки, на которой проводятся измерения, и самого объекта измерения.

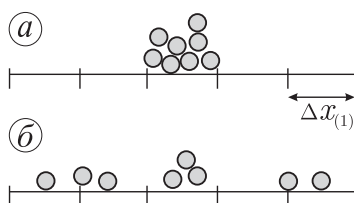


Рис. 2.6

Проиллюстрируем вышесказанное на серии из восьми измерений некоторой физической величины. На рис. 2.6 показан случайный разброс результатов измерений в сравнении с ошибкой отдельного измерения  $\Delta x_{(1)}$ . Результаты отдельных измерений обозначены кружочками:

**а) разброс результатов измерений меньше, чем погрешность одного измерения.** В этом случае в качестве погрешности следует использовать  $\Delta x_{(1)}$ ;

**б) разброс результатов измерений больше, чем погрешность одного измерения.** В этом случае следует вычислять случайную погрешность  $\sigma_{\bar{x}}$ , используя все значения величины, полученные в серии, а погрешность одного измерения можно не учитывать.

Сформулируем количественный критерий, позволяющий обобщить рассмотренные выше примеры:

- если случайный разброс результатов  $(x_{\max} - x_{\min})/2$  оказывается меньше, чем погрешность индивидуального измере-

ния  $\Delta x_{(1)}$ , то можно далее ограничиваться одним измерением, а в качестве погрешности взять приборную погрешность (или погрешность отсчета). Увеличение числа измерений в этом случае не приведет к уточнению результата. В противном случае, т. е. если  $(x_{\max} - x_{\min})/2 > \Delta x_{(1)}$ , необходимо проводить серию измерений и определять погрешность среднего значения  $\sigma_{\bar{x}}$  по формуле (2.14). Погрешность единичного измерения при этом в расчетах более никак не участвует. Погрешность среднего  $\sigma_{\bar{x}}$  будет уменьшаться с увеличением числа измерений  $N$  и может даже оказаться меньше приборной погрешности.<sup>11</sup>

## 5 Вычисление погрешностей косвенных измерений

В большинстве экспериментов интересующая нас величина непосредственно не измеряется. Вместо этого измеряются непосредственно другие величины,  $x$ ,  $y$  и др., а затем вычисляется искомая величина  $z$ , которая является известной функцией указанных первичных величин:

$$z = z(x, y, \dots). \quad (2.21)$$

Такие измерения называют *косвенными*.

Предположим, что мы провели измерения величин  $x$ ,  $y$ , ..., вычислили средние  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$ , ... и нашли погрешности:

$$x = \bar{x} \pm \Delta x,$$

$$y = \bar{y} \pm \Delta y,$$

и теперь хотим найти величину  $z$  с погрешностью  $\Delta z$ .

Расчет самой величины выполняется непосредственно, т. е. в качестве наилучшего приближения для  $z$  берется значение, получающееся при подстановке в формулу (2.21) средних  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$ , ...:

$$z_{\text{наил}} = z(\bar{x}, \bar{y}, \dots).$$

---

<sup>11</sup> В такой ситуации не будет противоречия, так как ошибки прибора и неточности при съеме показаний сами по себе являются случайными факторами и с ростом числа измерений в среднем должны стремиться к нулю.

Применение этой формулы оправданно, если функция  $z(x, y, \dots)$  может быть линеаризована относительно своих аргументов, т. е. погрешности измерения аргументов функции  $(\Delta x, \Delta y, \dots)$  должны быть достаточно малыми.

Основной вопрос заключается в том, как найти  $\Delta z$ .

Далее везде будем считать, что измеренные величины — положительные.

## 5.1 Сумма измеренных величин. Способы сложения погрешностей

Рассмотрим сначала самый простой случай. Пусть величина  $z$  равна сумме двух измеренных величин:

$$z = x + y.$$

Величина  $x$  принимает значения в интервале  $(\bar{x} - \Delta x, \bar{x} + \Delta x)$ , а величина  $y$  — в интервале  $(\bar{y} - \Delta y, \bar{y} + \Delta y)$ . Тогда наибольшее вероятное значение величины  $z$  есть

$$z_{\max} = x_{\max} + y_{\max} = (\bar{x} + \Delta x) + (\bar{y} + \Delta y) = (\bar{x} + \bar{y}) + (\Delta x + \Delta y).$$

Наименьшее вероятное значение величины  $z$  есть

$$z_{\min} = x_{\min} + y_{\min} = (\bar{x} - \Delta x) + (\bar{y} - \Delta y) = (\bar{x} + \bar{y}) - (\Delta x + \Delta y).$$

Таким образом, наилучшая оценка для величины  $z$  — это

$$z_{\text{наил}} = \bar{x} + \bar{y}, \quad (2.22)$$

а погрешность

$$\Delta z = \Delta x + \Delta y. \quad (2.23)$$

Очевидно, что в случае разности  $z = x - y$  формула будет такой же. Ясно также, что подобные рассуждения можно провести и для нескольких складываемых или вычитаемых величин:

$$\Delta z = \Delta x + \Delta y + \dots$$



Таким образом, получаем, что при сложении или при вычитании нескольких величин их абсолютные погрешности складываются. Однако часто подобная оценка погрешности является завышенной.

Если погрешности  $x$ ,  $y$  и др. величин случайны по природе и *независимы*,<sup>12</sup> в половине случаев недооценка  $x$  будет сопровождаться переоценкой  $y$ , и наоборот. Ясно, что вероятность недооценки всех складываемых или вычитаемых величин на полные значения погрешностей  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ , ... довольно мала. Следовательно, значение  $\Delta z = \Delta x + \Delta y + \dots$  переоценивает нашу возможную ошибку.

Можно доказать, что если измерения всех величин выполняются независимо и если результаты измерений подчиняются нормальному распределению, то погрешность линейной комбинации  $z = x + y + \dots$  дается выражением

$$\Delta z = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + \dots} \quad (2.24)$$

В этом случае говорят, что погрешности *складываются квадратично*.

Поскольку для любых двух положительных чисел  $a$  и  $b$  выполняется

$$a^2 + b^2 < a^2 + b^2 + 2ab = (a + b)^2,$$

то погрешность, определенная по квадратичному сложению, всегда меньше погрешности, определенной обычным сложением.

Можно доказать, что независимо от того, являются ли ошибки независимыми и случайными, погрешность  $z = x + y$  не больше их простой суммы. Т. е. в любом случае

$$\Delta z \leq \Delta x + \Delta y + \dots \quad (2.25)$$

Иногда выбор способа сложения погрешностей (обычно или квадратично) не сказывается на конечном результате.

Например, если складываемые абсолютные погрешности величин  $x$  и  $y$  равны 4 и 0,4 соответственно, то обычное сложение

---

<sup>12</sup> Два случайных события называются *независимыми*, если наступление одного из них не изменяет вероятность наступления другого.

дает  $\Delta z \simeq \Delta x + \Delta y = 4,4$ , что округляется до 4, а квадратичное —  $\Delta z = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = 4,02$ , что также округляется до 4. Кроме того, можно заметить, что в данном примере, когда конечная погрешность находится с точностью до одной цифры<sup>13</sup>, погрешность величины  $y$  можно было вообще не учитывать.

Необходимо помнить, что при любом методе сложения погрешностей они прежде всего должны быть приведены к одинаковым значениям доверительной вероятности. В случае, если все погрешности отвечают стандартной доверительной вероятности  $\alpha = 0,68$ , формулу (2.24) можно записать в виде

$$\sigma_{\bar{z}} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \dots},$$

где  $\sigma$  — стандартное отклонение среднего (см. п. 4.2.3).

## 5.2 Погрешность для произвольной функции одной переменной

Рассмотрим следующий простой случай. Пусть величина  $z$  является произвольной функцией только одной величины  $x$ :

$$z = z(x). \quad (2.26)$$

Величина  $x$  принимает значения в интервале  $(\bar{x} - \Delta x, \bar{x} + \Delta x)$ . Предполагая, что погрешность  $\Delta x$  мала, можно считать, что поведение функции (2.26) не меняется резко в указанном интервале. Предположим также, что на этом интервале функция возрастает. Тогда наибольшее вероятное значение величины  $z$  есть

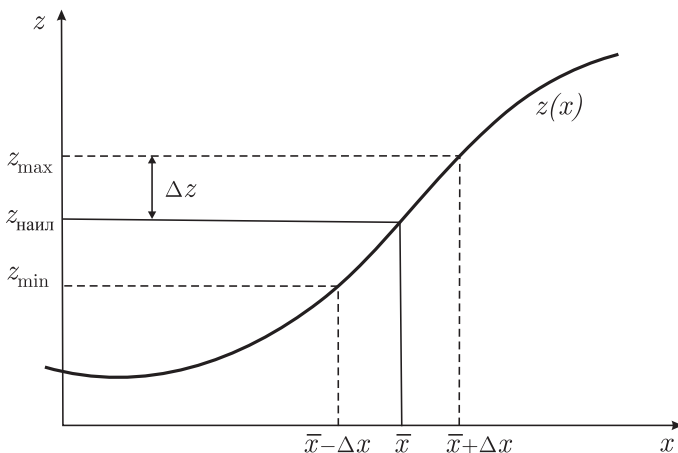
$$z_{\max} = z(x_{\max}) = z(\bar{x} + \Delta x),$$

а наименьшее вероятное значение —

$$z_{\min} = z(x_{\min}) = z(\bar{x} - \Delta x).$$

---

<sup>13</sup> Подробнее про точность задания погрешностей см. п. 6.



**Рис. 2.7**

Поскольку погрешность  $\Delta x$  мала, то часть графика функции  $z(x)$ , используемая в данном рассуждении, приближенно представляет прямую линию. Тогда ясно, что  $z_{\text{max}}$  и  $z_{\text{min}}$  находятся на одном расстоянии от  $z_{\text{наил}}$ . По рис. 2.7 видно:

$$\Delta z = z_{\text{max}} - z_{\text{наил}} = z(\bar{x} + \Delta x) - z(\bar{x}).$$

При малых  $\Delta x$  можно написать

$$z(\bar{x} + \Delta x) - z(\bar{x}) \simeq \frac{dz}{dx} \Delta x,$$

где производная  $dz/dx$  берется в точке  $x = \bar{x}$ . Таким образом,

$$\Delta z = \frac{dz}{dx} \Delta x.$$

Если функция на заданном участке убывает, то производная будет отрицательной, и мы получим

$$\Delta z = -\frac{dz}{dx} \Delta x.$$

Случаи возрастания и убывания функции можно объединить, если записать

$$\Delta z = \left| \frac{dz}{dx} \right| \Delta x. \quad (2.27)$$

Это и есть окончательная формула для расчета погрешности.<sup>14</sup>

**Пример.** Допустим, необходимо вычислить периметр  $P$  квадрата. Одна из сторон квадрата измерена непосредственно и равна  $a$  с погрешностью  $\Delta a$ . Рассмотрим два способа найти периметр и его погрешность.

Способ 1. Вычислим периметр как  $P = 4a$ . Тогда погрешность, в соответствии с формулой (2.27), будет равна  $\Delta P = 4\Delta a$ .

Способ 2. Вычислим периметр как  $P = a + a + a + a$ . В этом случае погрешность, в соответствии с формулой (2.24), будет равна  $\Delta P = \sqrt{(\Delta a)^2 + (\Delta a)^2 + (\Delta a)^2 + (\Delta a)^2} = 2\Delta a$ .

Второй способ вычисления погрешности является ошибочным, так как четыре складываемых величины идентичны и поэтому не являются независимыми. Отметим, что оценка погрешности во втором случае по формуле (2.25) для зависимых величин дала бы верный ответ  $4\Delta a$ .

Если мы хотим найти относительную погрешность величины  $z$ , то из (2.27) легко получаем:

$$\delta z = \frac{\Delta z}{z_{\text{наил}}} = \frac{z'(x)|_{x=\bar{x}}}{z(\bar{x})} \Delta x, \quad (2.28)$$

где и значение функции  $z(x)$ , и её производная  $z'(x)$  берутся в точке  $x = \bar{x}$ .

Рассмотрим примеры.

### Умножение измеренного значения на точное число

Пусть измерена величина  $x$ , а величина  $z(x) = Ax$ , где число  $A$  не содержит погрешности (либо погрешность числа  $A$  пренебрежимо мала по сравнению с погрешностью величины  $x$ ). Тогда

---

<sup>14</sup> Понятно, что данная формула является некорректной вблизи экстремума функции  $z(x)$ , так как в точке экстремума  $z'(x)$  обращается в нуль. В этом случае при выводе погрешности  $\Delta z$  недостаточно линейного разложения по малому  $\Delta x$ , и необходимо учитывать квадратичные члены ряда Тейлора, содержащие  $z''(x)$ .

погрешность

$$\Delta z = A \Delta x.$$

Таким образом, если рассчитываемая величина получается из измеренной умножением на точное число, то абсолютная погрешность рассчитываемой величины равна просто погрешности измеренной величины, умноженной на это число.

### Степенная функция

Пусть измерена величина  $x$ , а величина  $z(x) = x^n$ , где  $n$  — любое число. Тогда погрешность

$$\Delta z = |nx^{n-1}| \Delta x.$$

Если разделить обе части этого равенства на  $z = x^n$ , то получим

$$\frac{\Delta z}{z} = |n| \frac{\Delta x}{x} \quad \text{или} \quad \delta z = |n| \delta x.$$

Таким образом, мы получили простое правило: относительная погрешность для степенной функции  $z = x^n$  в  $|n|$  раз больше, чем относительная погрешность  $x$ .

### Логарифмическая функция

Пусть измерена положительная величина  $x$ , а  $z(x) = \ln x$ . Тогда погрешность

$$\Delta z = \frac{1}{x} \Delta x.$$

Таким образом, формально получается, что абсолютная погрешность  $\ln x$  равна относительной погрешности величины  $x$ , что часто вызывает путаницу. Обратите внимание, что абсолютная погрешность величины  $\ln x$  — безразмерна, так же как безразмерен и сам логарифм.

## Тригонометрические функции

Предположим, что мы измерили угол  $\theta = \bar{\theta} \pm \Delta\theta$  и хотим найти  $\cos \theta$  с погрешностью.

Наилучшей оценкой для  $\cos \theta$  является  $\cos \bar{\theta}$ . А погрешность мы вычисляем следующим образом:

$$\Delta(\cos \theta) = \left| \frac{d \cos \theta}{d\theta} \right| \Delta\theta = |\sin \theta| \Delta\theta.$$

При вычислениях здесь нужно градусы перевести в радианы.

### 5.3 Погрешность функции нескольких переменных

Пусть  $z(x, y, \dots)$  — произвольная функция переменных  $x, y$  и др. Формулу для расчета погрешности в этом случае легко получить обобщением формул (2.24), (2.25) и (2.27).

Если погрешности измерений  $x, y$  и др. величин независимы и случайны и отвечают одному значению доверительной вероятности, то погрешность функции  $z$  равна

$$\Delta z = \sqrt{\left( \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y \right)^2 + \dots} \quad (2.29)$$

Если погрешности не являются независимыми и случайными, то вместо квадратичного сложения мы используем обычное. Причем такое сложение дает верхнюю границу (максимальное значение) для погрешности величины  $z$ . Таким образом, в любом случае погрешность может быть оценена как

$$\Delta z \simeq \left| \frac{\partial z}{\partial x} \right| \Delta x + \left| \frac{\partial z}{\partial y} \right| \Delta y + \dots \quad (2.30)$$

В случае, если известны стандартные отклонения  $\sigma$  для всех измеряемых величин, формула (2.29) позволяет найти стандартное отклонение искомой величины  $z$ :

$$\sigma_z = \sqrt{\left( \frac{\partial z}{\partial x} \sigma_x \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial y} \sigma_y \right)^2 + \dots} \quad (2.31)$$

## Произведение и частное

Пусть функция  $z(x, y)$  есть произведение двух положительных величин  $x$  и  $y$ :

$$z = xy.$$

Тогда

$$\Delta z = \sqrt{\left(\frac{\partial(xy)}{\partial x} \Delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial(xy)}{\partial y} \Delta y\right)^2} = \sqrt{y^2 \Delta x^2 + x^2 \Delta y^2}.$$

Разделим полученное равенство на  $z = xy$ , получаем:

$$\frac{\Delta z}{z} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{y}\right)^2}.$$

Таким образом, при перемножении измеренных величин складываются (квадратично) их относительные погрешности:

$$\delta z = \sqrt{(\delta x)^2 + (\delta y)^2}.$$

Если величины не являются независимыми и случайными, то относительные погрешности складываются обычно:

$$\delta z = \delta x + \delta y.$$

Можно легко проделать вывод для деления,  $z = x/y$ , в этом случае формулы получатся такие же. Ясно также, что полученный результат можно обобщить на произвольное число перемножаемых величин. Если  $x$  и  $y$  могут принимать и отрицательные значения, в нужных местах просто добавляются модули.

Таким образом, можно сформулировать правило: если рассчитываемая величина выражается через измеренные величины как

$$z = \frac{xy \dots}{uv \dots}, \quad (2.32)$$

то относительная погрешность рассчитываемой величины есть просто сумма относительных погрешностей измеренных величин:

$$\delta z = \sqrt{\delta x^2 + \delta y^2 + \delta u^2 + \delta v^2 + \dots} \quad (2.33)$$

(квадратичная сумма, если измеренные величины независимы и случайны), или

$$\delta z = \delta x + \delta y + \delta u + \delta v + \dots \quad (2.34)$$

(как верхняя оценка для погрешности).

### Произведение и частное степеней

Пусть рассчитываемая величина выражается через измеренные как

$$z = \frac{x^k y^l \dots}{u^m v^n \dots}, \quad (2.35)$$

где все измеренные величины и степени положительные.

Тогда из общей формулы легко получить, что

$$\delta z = \sqrt{k^2 \delta x^2 + l^2 \delta y^2 + m^2 \delta u^2 + n^2 \delta v^2 + \dots} \quad (2.36)$$

(квадратичная сумма, если измеренные величины независимы и случайны), или

$$\delta z = k \cdot \delta x + l \cdot \delta y + m \cdot \delta u + n \cdot \delta v + \dots \quad (2.37)$$

(как верхняя оценка для погрешности).

**Замечание.** В общем случае погрешность косвенных измерений вычисляется по формуле (2.29), содержащей погрешности нескольких величин, или, иначе говоря, *ч а с т н ы е* погрешности величины  $z$ :

$$\Delta z_x = \left| \frac{\partial z}{\partial x} \right| \Delta x, \quad \Delta z_y = \left| \frac{\partial z}{\partial y} \right| \Delta y, \quad \dots$$

Стоит иметь в виду, что *прежде чем вычислять погрешность косвенных измерений, нужно сравнить вклады всех входящих в нее частных погрешностей*. Если одна из частных погрешностей на порядок меньше других, то ее можно отбросить без потери точности вычисления конечной погрешности.



**Пример.** Допустим, необходимо вычислить погрешность произведения  $z = ab$ , зная погрешности величин  $a$  и  $b$ . Пусть величины измеряются независимо, тогда

$$\delta z = \sqrt{\delta a^2 + \delta b^2}.$$

Если относительная погрешность  $\delta b$  в десять раз меньше, чем относительная погрешность  $\delta a$ , то второе слагаемое под корнем будет в сто раз меньше первого. Поскольку погрешность сама по себе вычисляется с некоторой точностью (до одной-двух значащих цифр), то учет или не учет этого слагаемого не скажется на величине погрешности  $\delta z$  — ведь это слагаемое на первые две цифры  $\delta z$ , скорее всего, никак не повлияет.

Если одна из частных погрешностей косвенно измеряемой величины на порядок меньше остальных, то ее можно не учитывать в вычислениях.

## 5.4 Таблица погрешностей косвенных измерений

Для функций одной переменной:

Вид функции	Погрешность
$z = A a \quad (A = \text{const})$	$\Delta z = A \Delta a$
$z = a^n$	$\delta z =  n  \delta a$
$z = \ln a$	$\Delta z = \frac{\Delta a}{a}$
$z = z(a)$	$\Delta z = \left  \frac{dz}{da} \right  \Delta a$

Для функций многих переменных:

Вид функции	Если погрешности независимы и случайны	Верхняя оценка для погрешности
$z = a + b$ $z = a - b$	$\Delta z = \sqrt{\Delta a^2 + \Delta b^2}$	$\Delta z \simeq \Delta a + \Delta b$
$z = a \cdot b$ $z = \frac{a}{b}$	$\delta z = \sqrt{\delta a^2 + \delta b^2}$	$\delta z \simeq \delta a + \delta b$
$z = a^n \cdot b^m$ $z = \frac{a^n}{b^m}$	$\delta z = \sqrt{n^2 \delta a^2 + m^2 \delta b^2}$	$\delta z \simeq n \delta a + m \delta b$
$z = z(a, b)$	$\Delta z = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial a} \Delta a\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial b} \Delta b\right)^2}$	$\Delta z \simeq \left \frac{\partial z}{\partial a}\right  \Delta a + \left \frac{\partial z}{\partial b}\right  \Delta b$

Здесь  $\Delta z$  — абсолютная погрешность величины  $z$ ,  
 $\delta z = \Delta z / z_{\text{наил}}$  — относительная погрешность величины  $z$ .

## 6 Точность задания погрешностей

Если бы в эксперименте среднеквадратичная ошибка  $\sigma_x$  определялась из бесконечно большого числа измерений, то она бы равнялась своему предельному значению  $\sigma$ . Когда  $N$  невелико,  $\sigma_x$  отличается от  $\sigma$  тем больше, чем меньше  $N$ . Таким образом, **погрешность сама по себе известна с некоторой погрешностью**. Например, можно показать, что при  $N = 50$  погрешность определения  $\sigma$  составляет около 10%, а при  $N = 25$  — более 15%. При меньшем же количестве измерений можно говорить лишь об **оценке погрешности** с той или иной точностью.

Точность задания любого числа определяется количеством содержащихся в нем значащих цифр.

*З н а ч а щ е й* называется любая цифра числа, начиная с первой слева *ненулевой* цифры. Это означает, что значащей называется любая цифра, отличная от нуля, а также нуль, если он не стоит *до первой отличной от нуля цифры*.

Например, в числе

0,042030

значащими являются последние пять цифр. Первые два нуля не являются значащими: сами по себе они не представляют количественную величину, а служат для определения разряда. Так, при записи этого же числа в виде  $4,2030 \cdot 10^{-2}$  они отсутствуют. Другие два нуля являются значащими: они показывают, что в этих разрядах числа содержится именно 0, а не 1, не 2 и т. д. В случае, если бы в данном числе последний ноль не являлся значащим, оно должно было быть записано в виде 0,04203.

При написании больших целых чисел, например числа 125000, нули справа могут служить как значащими цифрами, так и для определения разрядов остальных цифр. Чтобы избежать этой неопределенности, указанное число следует записать, например, в виде  $1,25 \cdot 10^5$ , если оно имеет три значащих цифры, или же  $1,2500 \cdot 10^5$ , если оно имеет пять значащих цифр.

Если число (например, погрешность) задано приближенно, то не следует оставлять большого количества значащих цифр. Невероятно, например, чтобы погрешность измерения могла быть известна с точностью до пяти значащих цифр. Т. е. запись вида

$$x = (5,03 \pm 0,21072) \text{ ед. измерения}$$

является **абсурдной** сама по себе. Если в результате какого-либо расчета погрешность оказалась равна 0,21072, то это значение должно быть округлено.

В учебных лабораторных работах количество проделываемых измерений мало и не обеспечивает высокой точности в определении ошибок, а лишь позволяет провести их оценку. По этой причине все погрешности обычно округляют до одной значащей цифры. Из этого правила есть лишь одно важное исключение: если первая цифра в погрешности  $\Delta x$  равна 1, то лучше при округлении сохранить две значащие цифры. Например, если мы получили погрешность 0,14, то отбрасывание четверки изменит ошибку на 40 %. Поэтому в таких случаях сохранение двух знаков оправдано.

### Правило округления погрешностей

Экспериментальные погрешности округляются *до одной значащей цифры*. В случае, если первая значащая цифра — единица, принято оставлять *две значащие цифры*.

После расчета и округления погрешности необходимо проанализировать значащие цифры в результате измерения. Так, в нашем примере после округления  $0,21072 \approx 0,2$ , и мы получаем

$$x = (5,03 \pm 0,2) \text{ ед. измерения.}$$

Эта запись также **лишена смысла**, ведь погрешность 0,2 означает, что в сотых долях результата могла бы стоять не 3, а 0 или 7. Ясно, что значащая цифра 3 является в такой записи лишней и должна быть округлена. Верная запись данного результата:

$$x = (5,0 \pm 0,2) \text{ ед. измерения.}$$

### Правило округления результата измерений

Последняя значащая цифра результата должна стоять в *той же десятичной позиции*, в которой находится последняя значащая цифра указанной погрешности.

**Замечание.** Точность обработки любых чисел, полученных в эксперименте или взятых из таблиц, должна быть согласована с точностью определения погрешности. Слишком грубое округление чисел на промежуточных этапах расчетов может искусственно ухудшить точность финального результата. С другой стороны, вычисления с большим количеством значащих цифр, чем это обосновано, повышают трудозатраты и при этом создают ложное впечатление повышения точности. Поэтому, как только во время расчетов становится понятным предположительный порядок величины погрешности, все числа можно промежуточно округлить, оставив на один знак больше, чем количество предполагаемых цифр в результате. Округление же погрешности до одной значащей цифры и соответствующее округление результата эксперимента проводится *после* выполнения всех вычислений.

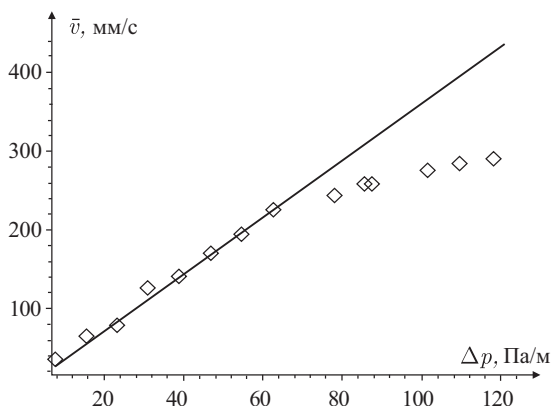
## Глава III. Построение и обработка графиков

Одним из важных способов представления результатов эксперимента является построение графиков. Основное преимущество графического метода — это его наглядность. Графики позволяют легко обнаружить наличие максимумов, минимумов, точек перегиба, наибольшей и наименьшей скорости изменения величин, периодичности или других важных свойств полученных в эксперименте данных. При отсутствии графика такие свойства могут остаться незамеченными или же их выявление потребует весьма тщательного, гораздо более трудоемкого изучения результатов.

Проиллюстрируем наглядность графического метода на примере исследования зависимости скорости течения воды  $v$  по трубе от перепада давлений на единицу длины трубы  $\Delta p$ . В зависимости от разности давлений на концах трубы течение может быть ламинарным или турбулентным. Известно, что пока поток остается ламинарным, скорость течения прямо пропорциональна перепаду давления. Поэтому, исследуя данную зависимость, мы можем определить, при каком давлении течение жидкости перестает быть ламинарным и становится турбулентным. В таблице справа представлены результаты исследования, но, глядя на цифры, приведенные в таблице, сложно определить, где прямая пропорциональность начинает нарушаться.

При нанесении этих данных на график (рис. 3.1) точка, в которой нарушается прямая пропорциональность, т. е. течение жидкости перестает быть ламинарным, сразу же легко определяется. Точность полученного значения разности давлений при этом зависит от разных факторов: как от погрешностей отдельных точек, так и от общей “плотности” точек на графике.

$\Delta p$ , Па/м	$\bar{v}$ , мм/с
7,8	35
15,6	65
23,4	78
31,3	126
39,0	142
46,9	171
54,7	194
62,6	226
78,3	245
86,0	258
87,6	258
93,9	271
101,6	277
109,6	284
118,0	290



**Рис. 3.1.** Зависимость средней скорости течения воды от перепада давления между концами трубы

Таким образом, графическое представление результатов измерений позволило нам оценить границы, вблизи которых меняется характер зависимости между исследуемыми величинами, и на основании этого сделать вывод о характере физических процессов (в данном случае, о ламинарности течения жидкости).

Графики позволяют проводить наглядное сравнение экспериментальных и теоретических данных или устанавливать вид функциональной зависимости между изучаемыми величинами, т. е. находить вид функции  $f(x)$  и определять ее параметры. Чаще всего это либо *наклон прямой*, изображающей зависимость между двумя величинами, либо *длины отрезков, отсекаемых прямой на координатных осях*. Также при помощи графика могут определяться точки максимума и минимума функции, точки перегиба, период функции и ее асимптотическое значение.

Строго говоря, если речь идет о нахождении параметров прямой, используется не график, а экспериментальные данные (см. метод парных точек и метод наименьших квадратов, описанные ниже). Т. е. в этом случае в определении углового коэффициента роль графика сравнительно невелика, его можно использовать только для определения угла наклона при непосредственном построении наилучшей прямой через точки “на глаз”. Но этот ме-

год достаточно груб и пригоден только при проведении оценочных расчетов. Однако в случае, когда теория предсказывает более сложную зависимость, нежели прямолинейная, определение параметров кривой по экспериментальным данным становится слишком сложной для учебных лабораторий задачей. Поэтому для определения особых точек и параметров функции в лабораториях НИЯУ МИФИ используется непосредственно график. Стоит отметить, что точность величин, определяемых из *криволинейных* графиков, существенно зависит от навыков исследователя, и, как следствие, графическое представление данных становится действительно эффективным лишь при их грамотном построении. Поэтому в первую очередь в данной главе рассматриваются *основные правила построения графиков*. После этого описаны методы построения прямой, наилучшим образом согласующейся с экспериментальными данными, работа с различными видами графиков и способы оценки параметров кривых, построенных по экспериментальным точкам.

## 7 Основные правила построения графиков

Графики строятся **только на миллиметровой бумаге**, причем размер бумаги выбирается таким образом, чтобы размеры самого графика, т. е. размеры области, в которой расположены точки, были больше, чем половина листа формата А4.

В первую очередь на лист наносятся координатные оси. По оси абсцисс принято откладывать независимую переменную, т. е. величину, значения которой задает сам экспериментатор, а по оси ординат — ту величину, которую он при этом измеряет. **Координатные оси проводятся карандашом по линейке.**

Затем на координатные оси наносятся масштабные деления. Масштаб откладывается в виде равноотстоящих “круглых” чисел, например: 1; 2; 3; . . . , 2; 4; 6; . . . или 2,20; 2,25; 2,30; 2,35; . . . . Не следует расставлять масштабные метки на ось слишком часто — в большинстве случаев достаточно нанести от четырех до

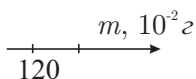
десяти меток. При выборе масштаба следует руководствоваться следующими правилами:

1. Экспериментальные точки не должны сливаться друг с другом.
2. Масштаб должен быть *простым*, т. е. лучше всего выбирать масштаб, при котором единица измеряемой величины (без учета порядка) соответствует 1, 2 или 5 см.<sup>15</sup>

При нанесении масштабных меток следует обратить внимание на то, что *точка пересечения осей необязательно должна соответствовать нулю* по одной или обеим осям. На рис. 3.2 показаны примеры правильно (*в*) и неправильно (*а*, *б*) выбранного масштаба для одного и того же набора экспериментальных точек: на рис. 3.2*а* большая часть листа оказывается незадействованной, и извлечь из этого графика информацию достаточно сложно. В случае же рис. 3.2*б* неверно выбран масштаб оси ординат: разброс точек по оси *y* мал, в результате чего проведенная прямая практически горизонтальна. Такой график не может дать наглядной информации о поведении функции  $f(x)$ .

**Около концов осей указываются обозначения откладываемых величин и единицы их измерения**, а также для удобства в конец оси обычно выносится **порядок масштаба**, т. е.  $10^{\pm n}$  (он должен быть указан перед единицей измерения физической величины). Если порядок имеет общепринятое обозначение (например,  $10^3$  – кило,  $10^{-9}$  – нано и т. д.), то его вносят в размерность: кг, нм и т. д.

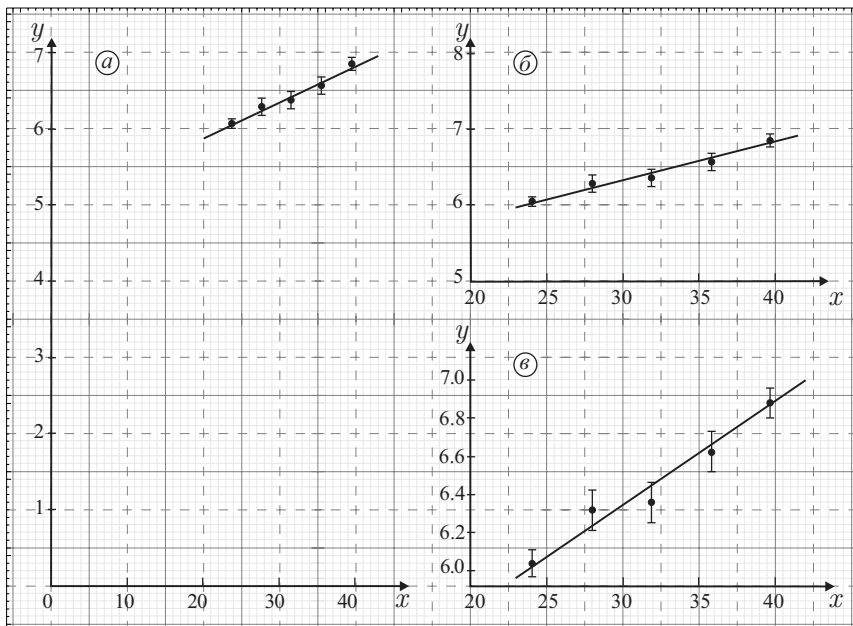
После оформления осей на график наносятся экспериментальные точки. Обычно их обозначают маленькими кружочками, треугольниками, квадратами и т. п. Если в одних координатных осях строится несколько



<sup>15</sup> Иногда для улучшения наглядности используются масштабы, при которых единица измеряемой величины соответствует 2,5 или 4 см. Масштабы, при которых единица измерения соответствует 3, 6, 7 или 9 см миллиметровой бумаги **категорически запрещены** (ГОСТ 2.302-68).



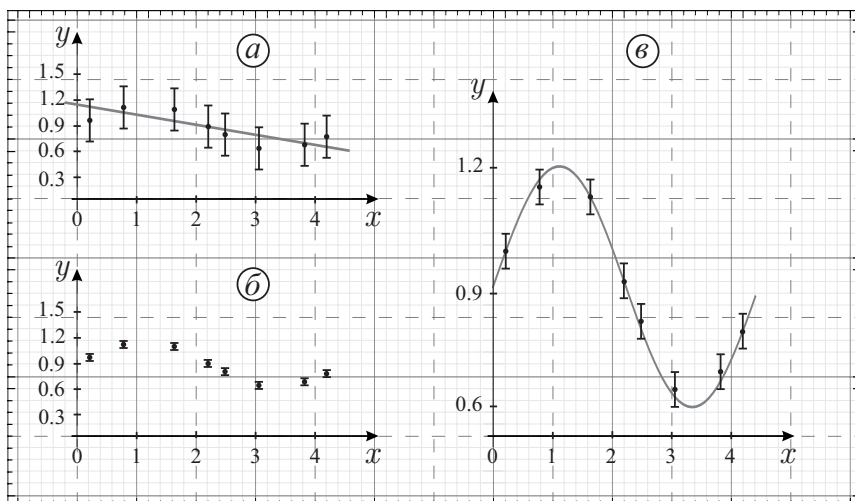
графиков, то для обозначения экспериментальных точек, относящихся к разным кривым, обычно используются различные цвета или различные значки. Затем для каждой точки откладывают погрешности обеих физических величин в виде вертикальных и горизонтальных отрезков, пересекающихся в экспериментальной точке. Длины этих отрезков должны соответствовать доверительному интервалу в масштабе графика. Если одна из величин не имеет погрешности, либо эта погрешность настолько мала, что укладывается в пределах точки, соответствующие отрезки не откладываются. Если погрешность величин, откладываемых по *обеим* осям, на графике не видна, это, скорее всего, означает, что масштаб выбран неверно<sup>16</sup> и для графического анализа данных такой график не подходит.



**Рис. 3.2.** На графиках (а, б, в) изображены одинаковые экспериментальные точки и их погрешности. Выбор масштаба в случаях (а) и (б) неправильный, в случае (в) — правильный

<sup>16</sup> Исключением являются градуировочные графики.

На рис. 3.3 показаны три графика, на которых для иллюстрации выбора масштаба в зависимости от погрешностей измерений нанесен один и тот же набор экспериментальных точек с разными по величине погрешностями (на рис. 3.3, *а* погрешности в разы больше, чем на рис. 3.3, *б, в*). В случае (*а*) разброс точек по вертикали небольшой, однако с учетом величины погрешностей масштаб выбран верно. В случае же (*б*) масштаб оси  $y$  выбран неправильно: и разброс точек, и погрешности малы, и такой график является неинформативным. Правильный выбор масштаба для этого случая показан на рис. 3.3, *в*: обеспечен достаточный разброс точек для проведения наилучшей кривой с учетом коридора погрешностей.



**Рис. 3.3.** Выбор масштаба и построение наилучшей кривой в зависимости от погрешностей результатов измерения. На всех трех графиках нанесены одни и те же экспериментальные точки. На паре графиков (*а, б*) масштаб оси  $y$  выбран одинаково; погрешности точек различны по величине. На паре (*б, в*) погрешности точек одинаковы, но по-разному выбран масштаб оси  $y$ . В случае (*а*) с учетом погрешностей масштаб выбран правильно; зависимость  $y(x)$  можно интерпретировать как прямую линию; (*б*) масштаб по оси  $y$  выбран неверно; (*в*) масштаб выбран правильно; зависимость  $y(x)$  можно интерпретировать как гармоническую функцию

Когда все экспериментальные точки и их погрешности нанесены на бумагу, в случае необходимости<sup>17</sup> карандашом строится график — **проводится плавная кривая, проходящая через области погрешностей всех точек**, по возможности как можно ближе к самим точкам. Большинство физических зависимостей отвечают гладким функциям, поэтому *не следует соединять точки ломаной линией*. Если теория предсказывает, что исследуемая зависимость линейна, то через области погрешностей экспериментальных точек *по линейке* проводится прямая линия, визуально наилучшим образом аппроксимирующая экспериментальные результаты.

Если вид функциональной зависимости  $y = f(x)$  заранее неизвестен, погрешности нанесенных точек играют важную роль при *интерпретации экспериментальных данных*. Так, на рис. 3.3, а и 3.3, в нанесены одни и те же точки, но с различными погрешностями. Данные графика (а) с учетом погрешностей можно интерпретировать как линейную зависимость, а отклонения точек от прямой объяснить случайными ошибками измерений. В случае (в) такая интерпретация невозможна: коридор погрешностей узок, и необходимо проводить кривую линию, учитывающую разброс точек.

Стоит отметить, что в случае (а), не имея теоретического предсказания, по полученным экспериментальным точкам сложно достоверно определить вид функциональной зависимости. Это может говорить о некорректном выборе измерительного прибора или предела измерений используемого прибора. Чтобы избежать такой ситуации, для многопредельных измерительных приборов необходимо выбирать минимальное значение предела измерения.

Например, если значение измеряемого напряжения составляет 2,8 В, то использование предела выше, чем 3,0 В становится нецелесообразным.

---

<sup>17</sup> Экспериментальную кривую можно не проводить в случае, если в тех же осях строится теоретическая кривая, или если количество экспериментальных точек велико, и вид полученной зависимости очевиден. Однако, если предполагается определение по графику каких-либо величин, проведение экспериментальной кривой обязательно.

Обратите внимание, что при измерении физической величины в достаточно большом диапазоне предел шкалы следует изменять в процессе проведения измерений. В этом случае в таблице результатов необходимо подготовить дополнительную колонку для записи установленного предела измерений.

После построения графика в верхней или нижней части листа пишется заголовок, содержащий краткое описание изображенной зависимости, а сам график вклеивается в лабораторный журнал на правой стороне разворота (т. е. как чистовой лист оформленной работы).

### **Краткий алгоритм построения графика:**

1. На миллиметровую бумагу наносятся координатные оси.
2. Выбирается и наносится масштаб осей, обозначения и порядок откладываемых физических величин.
3. Наносятся экспериментальные точки с погрешностями.
4. Проводится плавная кривая с учетом погрешностей точек.
5. График снабжается заголовком.

## **8 Аппроксимация линейной функцией**

Графики линейных функций являются наиболее удобными для выявления соответствия между найденной экспериментальной зависимостью и теоретическими предсказаниями. Причина такого выбора очевидна: из-за особенностей нашего восприятия различить две близкие по форме кривые линии может быть довольно сложно, а прямую линию всегда легко отличить от других зависимостей. Поэтому для сравнения экспериментальных результатов с теорией чаще всего по осям графика откладывают те величины, которые связаны между собой линейно.

Например, при исследовании свободного падения тел в поле тяжести Земли время падения  $t$  и высота  $h$  связаны соотношением  $t = \sqrt{2h/g}$ . Таким образом, чтобы получить прямую линию,

следует строить график, по осям которого откладываются величины  $t^2$  и  $h$  (либо  $t$  и  $\sqrt{h}$ ). В этом случае будет легко установить соответствие между найденной в эксперименте и теоретической зависимостями, и, кроме того, угол наклона прямой позволит определить ускорение свободного падения  $g$ .

Итак, довольно часто при обработке результатов эксперимента возникает задача построения прямолинейной зависимости

$$y = kx + b,$$

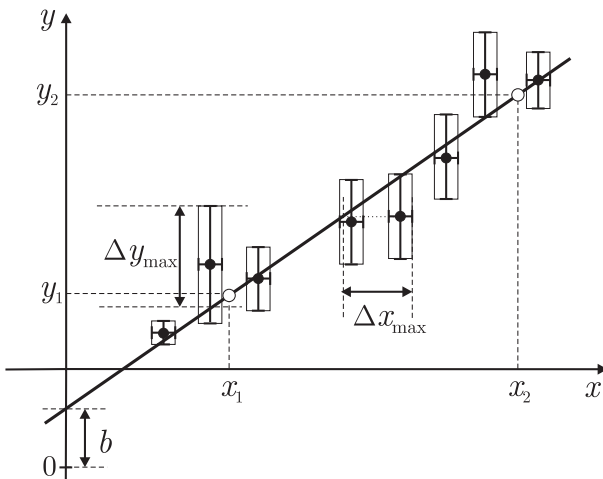
наилучшим образом согласующейся с экспериментальными данными, а также определения параметров  $k$  и  $b$  этой наилучшей прямой. Параметр  $k$  называется *угловым коэффициентом* или *коэффициентом наклона* и определяет наклон прямой. Параметр  $b$  равен длине отрезка, образуемого началом координат и точкой пересечения прямой и вертикальной оси.

Наиболее простым, хоть и неточным методом определения параметров является, как уже упоминалось выше, проведение наилучшей прямой “на глаз”. В этом случае необходимо провести прямую по линейке так, чтобы по обе стороны от нее оказалось примерно одинаковое количество экспериментальных точек, и отклонения точек от проведенной линии были по возможности минимальны. Желательно, чтобы линия проходила через все области погрешностей, указанные на графике (рис. 3.4).

Коэффициент  $b$  может быть определен непосредственно из графика продлением прямой до пересечения с осью  $y$ . Тогда  $b$  равняется длине отрезка между точкой пересечения и нулевой отметкой (см. рис. 3.4). Следует иметь в виду, определенная таким образом величина  $b$  является алгебраической: если пересечение прямой с осью лежит ниже нуля, то величина  $b$  будет отрицательной.

Для определения коэффициента наклона  $k$  на проведенной прямой выбирают произвольно две точки, далеко отстоящие друг от друга (см. рис. 3.4), находят проецированием на оси их координаты —  $(x_1, y_1)$  и  $(x_2, y_2)$  — и вычисляют  $k$  по формуле

$$k \simeq \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \quad (3.1)$$



**Рис. 3.4.** Проведение наилучшей прямой и приближенное определение коэффициентов  $k$  и  $b$  по графику. Областью погрешности считается прямоугольник со сторонами, равными погрешностям в масштабе графика, с центром в экспериментальной точке. В случае, если погрешности отложены только по одной оси, областью погрешности считается сам отрезок, обозначающий погрешность;  $\Delta x_{\max}$  и  $\Delta y_{\max}$  — максимально возможные отклонения результатов измерений от наилучшей прямой в горизонтальном и вертикальном направлениях с учетом доверительных интервалов точек

Погрешность углового коэффициента оценивается как

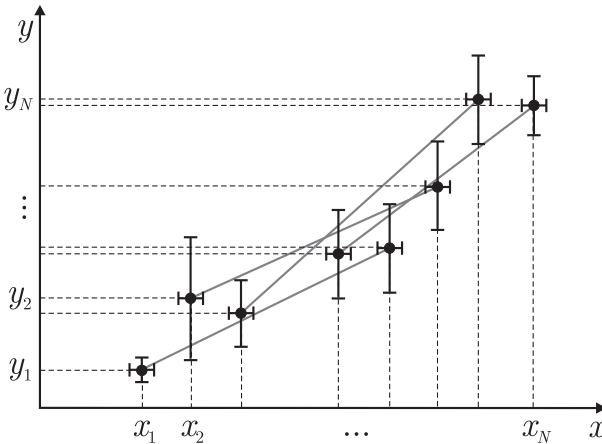
$$\Delta k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \sqrt{\left(\frac{\Delta x_{\max}}{x_2 - x_1}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y_{\max}}{y_2 - y_1}\right)^2}, \quad (3.2)$$

где  $\Delta x_{\max}$  и  $\Delta y_{\max}$  — наибольшие из отклонений точек от проведенной прямой в горизонтальном и вертикальном направлениях с учетом их погрешностей (см. рис. 3.4).

Описанный метод определения параметров по графику, очевидно, отягчен значительной субъективной ошибкой и потому может применяться только для грубых оценок. Для более точного определения параметров наилучшей прямой по координатам экспериментальных точек обычно используют два метода: *метод парных точек* и *метод наименьших квадратов*.

## 8.1 Метод парных точек

В методе парных точек **угловой коэффициент наилучшей прямой** вычисляется как среднее значение коэффициентов наклона вспомогательных прямых, проведенных через произвольно выбранные пары точек. При выборе пар точек рекомендуется следить за тем, чтобы расстояние между точками в паре было бóльшим, чем половина расстояния между крайними экспериментальными точками (рис. 3.5).



**Рис. 3.5.** Иллюстрация к методу парных точек. Пары выбираются из следующих соображений: 1) должны быть задействованы все  $N$  точек; 2) горизонтальное расстояние между точками в паре должно быть одинаковым и бóльшим, чем  $(x_N - x_1)/2$ . Вспомогательные прямые, показанные на рисунке, не изображаются на графике: строится только сама наилучшая прямая

Предположим, что результаты эксперимента содержат восемь точек. В этом случае для получения углового коэффициента методом парных точек следует вычислить угловые коэффициенты  $k_i$  прямых, проходящих через первую и пятую, вторую и шестую точки и т. д.:

$$k_i = \frac{y_{i+4} - y_i}{x_{i+4} - x_i} \quad \text{для } i = 1, 2, 3, 4.$$

После этого угловой коэффициент наилучшей прямой определяется как среднее арифметическое значение полученных коэффициентов  $k_1, k_2, \dots, k_n$ :

$$\bar{k} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n k_i, \quad (3.3)$$

где  $n$  — число пар точек. Для рассмотренного примера  $n = 4$ .

**Погрешность углового коэффициента  $k$**  в общем случае определяется отклонениями экспериментальных точек графика от наилучшей прямой, которые приводят к разбросу угловых коэффициентов вспомогательных прямых  $k_i$ . Эта погрешность определяется так же, как и случайная погрешность среднего значения серии измерений.

В случае небольшого числа пар точек ( $n < 6$ ) она может быть оценена методом Корнфельда:

$$\Delta k = \frac{k_{\max} - k_{\min}}{2}. \quad (3.4)$$

Доверительная вероятность  $\alpha$ , отвечающая этой погрешности, определяется по формуле (2.17).

Если количество пар точек  $n \geq 6$ , погрешность может быть более точно определена как стандартное отклонение среднего:

$$\sigma_{\bar{k}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (k_i - \bar{k})^2}. \quad (3.5)$$

В этом случае  $\alpha = 0,68$ .

Если отклонения точек от прямолинейной зависимости незначительны (т. е. все точки лежат на прямой) и  $\sigma_{\bar{k}} \approx 0$ , то погрешность коэффициента наклона  $\Delta k$  определяется погрешностями самих точек. В этом случае следует найти *наибольшие (с учетом доверительных интервалов) отклонения точек от построенного графика в горизонтальном и вертикальном направлениях*  $\Delta x_{\max}$  и  $\Delta y_{\max}$  (см. рис. 3.4) и затем оценить относительную погрешность коэффициента  $k$  по формуле

$$\delta k = \sqrt{\left(\frac{\Delta x_{\max}}{x_N - x_1}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y_{\max}}{y_N - y_1}\right)^2}, \quad (3.6)$$



где  $(x_N - x_1)$  и  $(y_N - y_1)$  — интервалы экспериментально исследованных значений  $x$  и  $y$  соответственно.

Абсолютная погрешность углового коэффициента вычисляется по формуле

$$\Delta k = k \cdot \delta k.$$

Следует иметь в виду, что если измерения для каждой точки графика проводились по одному разу, то соответствующие им погрешности  $\Delta y$  и  $\Delta x$  — это погрешности однократного измерения, обусловленные ошибкой прибора и ошибкой при снятии показаний. Доверительные вероятности, отвечающие этим погрешностям, определяются по правилам, описанным в предыдущей части пособия (см. п. 4.1).

**Для определения параметра  $b$**  можно воспользоваться тем обстоятельством, что при проведении прямых с найденным коэффициентом наклона  $\bar{k}$  через все экспериментальные точки получится ряд значений  $\{b_i\}$ :

$$y_i = \bar{k}x_i + b_i.$$

Тогда наилучшей оценкой значения  $b$  является среднее арифметическое значение

$$\bar{b} = \frac{\sum b_i}{N} = \frac{\sum y_i - \bar{k} \sum x_i}{N}, \quad (3.7)$$

где  $N$  — число точек.

Обозначив

$$x_c = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i; \quad y_c = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i, \quad (3.8)$$

равенство (3.7) можно переписать следующим образом:

$$\bar{b} = y_c - \bar{k}x_c. \quad (3.9)$$

Таким образом, помимо определения параметра  $b$ , мы доказали, что наилучшая прямая  $y = \bar{k}x + \bar{b}$  должна проходить через центр тяжести всех экспериментальных точек  $(x_c, y_c)$ . Точка с

координатами (3.8) считается наиболее достоверной точкой полученной прямолинейной зависимости.

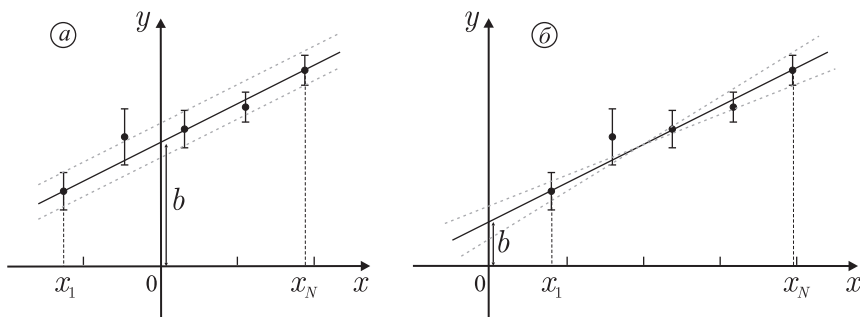
**Абсолютная погрешность параметра  $b$**  определяется, с одной стороны, погрешностью коэффициента наклона прямой  $\Delta k$  и, с другой стороны, погрешностью  $\Delta y$  нанесенных точек по оси ординат.

В случае, если наилучшая прямая пересекает ось  $y$  в пределах экспериментально исследованной области, т. е. между  $x_1$  и  $x_N$  (рис. 3.6, а), погрешность  $b$  можно приближенно считать равной

$$\Delta b \approx \Delta y_{\max}.$$

Если же прямая пересекает ось  $y$  за пределами исследованной области (рис. 3.6, б), то основной вклад в  $\Delta b$  вносит погрешность углового коэффициента, и тогда  $\Delta b$  оценивается по формуле

$$\Delta b = \frac{b_{\max} - b_{\min}}{2} = \frac{y_c - (\bar{k} - \Delta k)x_c - y_c + (\bar{k} + \Delta k)x_c}{2} = x_c \Delta k. \quad (3.10)$$



**Рис. 3.6.** Экспериментальная прямая пересекает ось ординат: а) *внутри* исследованной области. В этом случае погрешность углового коэффициента не вносит большого вклада в погрешность параметра  $b$ : поворот прямой практически не скажется на отрезке, отсекаемом ей на оси  $y$ . Погрешность  $\Delta b$  определяется вертикальной погрешностью точек  $\Delta y$ ; б) *вне* экспериментально исследованной области (ситуация обратная): основной вклад в  $\Delta b$  вносит погрешность коэффициента наклона прямой  $\Delta k$

После определения параметров  $k$  и  $b$  на графике строится наилучшая прямая, отвечающая полученным параметрам —

$$y = \bar{k}x + \bar{b}.$$

Для этого проще всего нанести на график две точки с координатами  $(0, \bar{b})$  и  $(x_0, \bar{k}x_0 + \bar{b})$ , где  $x_0$  — произвольное значение переменной  $x$ , и провести через них по линейке прямую.

## 8.2 Метод наименьших квадратов

Метод наименьших квадратов применяется для аппроксимации экспериментальных данных линейной функцией или многочленами более высоких степеней. Суть метода заключается в том, что если вид функциональной зависимости  $y = f(x)$  известен с точностью до значений некоторых параметров, то эти параметры подбираются таким образом, чтобы среднее квадратичное отклонение экспериментальных точек от расчетной кривой (графика используемой для аппроксимации функции) было минимальным.

Таким образом, для аппроксимации набора экспериментальных точек  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_N, y_N)$  линейной функцией

$$y(x) = kx + b$$

необходимо найти такие значения параметров  $k$  и  $b$ , при которых сумма квадратов отклонений каждого  $y_i$  от отвечающего ему выражения  $kx_i + b$  была бы минимальной<sup>18</sup>:

$$S = \sum_{i=1}^N (y_i - y(x_i))^2 = \sum_{i=1}^N (y_i - (kx_i + b))^2 = \min. \quad (3.11)$$

---

<sup>18</sup> В данном случае предполагается, что измерения для всех точек являются равноточными. Если погрешности значений  $y_i$  существенно различаются, необходимо минимизировать *взвешенное* среднее квадратичное отклонение точек от расчетной кривой. Подробнее о взвешенных средних см. п. 4.2.7.

Это условие будет выполняться, если параметры  $k$  и  $b$  удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial k} = \sum_{i=1}^N [-2x_i(y_i - kx_i - b)] = 0, \\ \frac{\partial S}{\partial b} = \sum_{i=1}^N [-2(y_i - kx_i - b)] = 0. \end{cases}$$

Найденные из данной системы параметры

$$k_{\text{наил}} = \frac{\sum_{i=1}^N y_i \sum_{i=1}^N x_i - N \sum_{i=1}^N x_i y_i}{\left(\sum_{i=1}^N x_i\right)^2 - N \sum_{i=1}^N x_i^2} \quad (3.12)$$

и

$$b_{\text{наил}} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i y_i \sum_{i=1}^N x_i - \sum_{i=1}^N y_i \sum_{i=1}^N x_i^2}{\left(\sum_{i=1}^N x_i\right)^2 - N \sum_{i=1}^N x_i^2} \quad (3.13)$$

позволяют построить прямую, наилучшим образом согласующуюся с экспериментальными данными, причем эта прямая будет проходить через центр тяжести всех точек  $(x_c, y_c)$ , т. е. параметры  $k_{\text{наил}}$  и  $b_{\text{наил}}$  будут удовлетворять равенству

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i = k_{\text{наил}} \cdot \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i - b_{\text{наил}}.$$

Законы математической статистики позволяют найти и *среднеквадратичные погрешности параметров  $k$  и  $b$* :

$$\sigma_k = \sqrt{\frac{N \sum_{i=1}^N (y_i - kx_i - b)^2}{(N-2) \left( N \sum_{i=1}^N x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^N x_i \right)^2 \right)}}, \quad (3.14)$$

$$\sigma_b = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N x_i^2 \sum_{i=1}^N (y_i - kx_i - b)^2}{(N-2) \left( N \sum_{i=1}^N x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^N x_i \right)^2 \right)}}. \quad (3.15)$$

Если же согласно теоретической модели ожидаемая прямая проходит через начало координат ( $y = kx$ ), то значение углового коэффициента наилучшей прямой и его среднеквадратичная погрешность определяются соотношениями

$$k_{\text{наил}} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i y_i}{\sum_{i=1}^N x_i^2}, \quad \sigma_k = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (y_i - kx_i)^2}{(N-1) \sum_{i=1}^N x_i^2}}. \quad (3.16)$$

В этом случае при построении графика масштаб следует выбирать таким образом, чтобы начало координат было отображено на графике.

После определения параметров  $k$  и  $b$  методом наименьших квадратов на графике строится наилучшая прямая, отвечающая полученным параметрам. Для этого проще всего нанести на график две точки с координатами  $(0, b_{\text{наил}})$  и  $(x_0, k_{\text{наил}}x_0 + b_{\text{наил}})$ , где  $x_0$  — произвольное значение переменной  $x$ , и провести через них по линейке прямую.

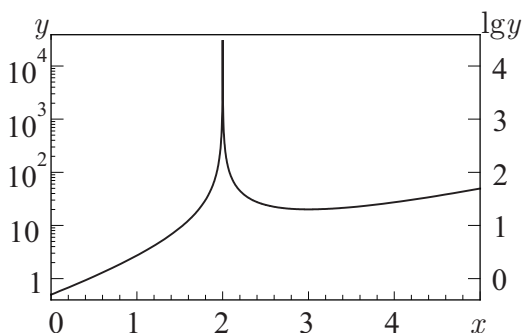
Отметим, что при помощи условия (3.11) метод наименьших квадратов позволяет подбирать наилучшие значения параметров для любой функциональной зависимости  $f(x)$ . Для заданного набора экспериментальных точек мы определили параметры наилучшей прямой, предположив, что  $f(x) = kx + b$ , однако можно так же “успешно” подобрать параметры наилучшей параболы, задав  $f(x)$  в виде квадратного трехчлена, и т. д. Поэтому для правильной интерпретации результатов эксперимента крайне важно, чтобы вид функции для аппроксимации данных

выбирался аккуратно. При правильно выбранном виде зависимости метод наименьших квадратов является очень точным методом определения параметров функции.

## 9 Графики в логарифмическом и полулогарифмическом масштабах

При исследовании функциональных зависимостей, отличных от линейных, а также в случае, когда откладываемые по осям величины меняются в очень широком диапазоне, охватывающем несколько порядков (например, рис. 3.7), часто используют логарифмические масштабные шкалы.

Логарифмическая шкала — это неравномерная разметка, при которой на оси отложены отрезки, пропорциональные десятичному логарифму откладываемой величины. При этом числа, представляемые у масштабных делений, соответствуют значению самой величины (а не ее логарифма). Преимуществом такой разметки оси является то, что на ней оказываются равномерно расставлены порядки: 1, 10, 100 и т. д. Очевидно, если проставить вдоль той же оси деления, соответствующие логарифму величины, то они расположатся равномерно.



**Рис. 3.7.** График зависимости  $y(x) = e^x / |x - 2|$  в полулогарифмическом масштабе. Величина  $y$  меняется в диапазоне, охватывающем несколько порядков. Слева (на оси ординат) показана неравномерная шкала значений  $y$ , справа — равномерная шкала значений  $\lg y$

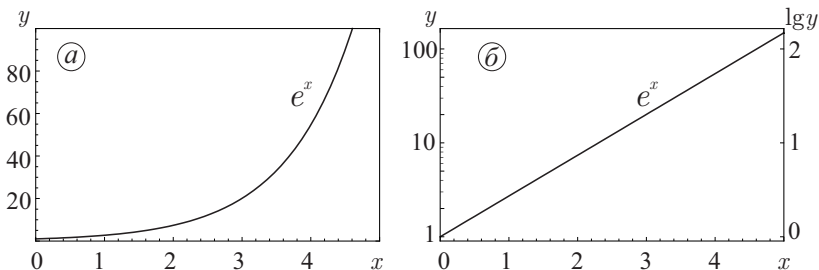
Поэтому, если вместо использования неравномерной шкалы для величины откладывать значения ее логарифма по обычной равномерной шкале, на графике получится тот же результат. Для иллюстрации этого факта на рис. 3.7 слева показана ось значений  $y$  с логарифмической шкалой, а справа для сравнения показана отвечающая ей шкала  $\lg y$  с равномерными делениями:

$$y = 1 \text{ отвечает } \lg y = 0, y = 10 \rightarrow \lg y = 1, y = 100 \rightarrow \lg y = 2, \dots$$

В случае, когда логарифмическая шкала нанесена на одной из координатных осей (как на рис. 3.7), масштаб графика называется *полулогарифмическим*. Если обе оси имеют логарифмическую разметку, то говорят, что график имеет *логарифмический* (или *дважды логарифмический*) масштаб.

## 9.1 Полулогарифмический масштаб

Как уже было сказано выше, наибольшей наглядностью обладают графики прямолинейной зависимости. Поэтому полулогарифмический масштаб чаще всего используют для того, чтобы получить на графике прямую в тех случаях, когда теория предсказывает экспоненциальную или другую показательную зависимость.



**Рис. 3.8.** График зависимости  $y = e^x$ : *a* — в обычном масштабе, *b* — в полулогарифмическом масштабе. В полулогарифмическом масштабе расстояния между делениями на оси ординат пропорциональны  $\lg y$ , а числа, стоящие у делений, отвечают непосредственно величине  $y$

Для примера рассмотрим зависимость  $y(x) = e^x$ , изображенную в обычном масштабе на рис. 3.8, *a*. Если откладывать величину  $y$  по оси ординат не равномерно, а по делениям, пропорциональным  $\lg y$  (или, что аналогично, откладывать равномерно по оси ординат величину  $\lg y$ ), то на графике будет получаться прямая линия (см. рис. 3.8, *б*):

$$\lg y = \lg(e^x) = \frac{\ln(e^x)}{\ln 10} \simeq 0,4343 x.$$

Коэффициент наклона этой прямой к оси равен коэффициенту перед  $x$ . В данном примере он равен  $1/\ln 10 \simeq 0,4343$ . Для удобства допускается откладывать по оси ординат не десятичный, а натуральный логарифм величины  $y$ , в этом случае мы бы получили коэффициент наклона, равный 1.

В общем случае, если функциональная зависимость имеет вид

$$y(x) = ae^{kx},$$

откладывая по оси ординат натуральный логарифм  $y$ , мы получим следующую прямую:

$$\ln y = \ln a + kx. \quad (3.17)$$

Как видно, коэффициенты  $a$  и  $k$  исследуемой функции легко определяются по графику как параметры прямой.

## 9.2 Логарифмический масштаб

Логарифмический (дважды логарифмический) масштаб используется для сведения криволинейного графика к прямолинейному, если теория предсказывает, что исследуемая зависимость имеет степенной вид

$$y(x) = \alpha x^n.$$

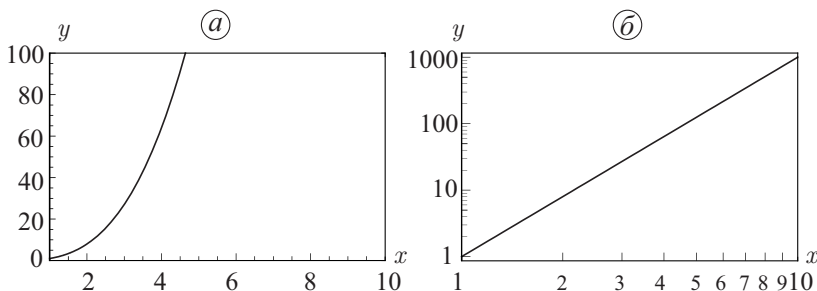
В этом случае по оси откладывается десятичный (или натуральный) логарифм измеряемой величины, например  $\lg y$ , а по



оси абсцисс — соответствующий логарифм аргумента, т. е.  $\lg x$ . Вычислив логарифм исследуемой зависимости

$$\lg y = \lg(\alpha x^n) = \lg \alpha + \lg x^n = \lg \alpha + n \lg x, \quad (3.18)$$

легко увидеть, что полученный график должен быть прямолинейным (рис. 3.9), угловой коэффициент полученной прямой будет равен показателю степени  $n$ , а отрезок, отсекаемый прямой от оси ординат, будет определять коэффициент  $\alpha$ .



**Рис. 3.9.** График зависимости  $y = x^3$ : *a* — в обычном масштабе, *b* — в логарифмическом масштабе. При логарифмическом масштабе расстояния между делениями на *обеих* осях пропорциональны логарифмам величин ( $\lg x$  и  $\lg y$ ), а числа, стоящие у делений, отвечают непосредственно значениям  $x$  и  $y$

**Замечание.** Строго говоря, большинство физических величин обладают размерностью, а логарифмы можно вычислять только от безразмерных чисел. Поэтому при построении графика в полулогарифмическом или логарифмическом масштабах предполагается, что вычисляются логарифмы не самих измеренных величин, а их отношения к единице измерения, *общей для всех экспериментальных точек*.<sup>19</sup> Полученное значение логарифма будет зависеть от выбранной единицы измерения. Например, если измеренное значение вязкости воздуха составляет  $\eta = 16,9 \cdot 10^{-6}$  Па·с, то при вычислении натурального логарифма получим  $\ln \eta = \ln(16,9 \cdot 10^{-6}) = -10,988$ . Если же в

<sup>19</sup> То же замечание относится и к построению обычных графиков, если строятся функциональные зависимости типа  $\log x$ ,  $\exp x$ ,  $\sin x$  и т. д. Все эти функции предполагают “обезразмеривание” аргумента.

качестве единицы измерения использовать мкПа·с, то вычисление логарифма вязкости приводит к следующему результату:  $\ln \eta = \ln(16,9) = 2,827$ . Учет порядка измеряемой величины в данном случае приведет к тому, что весь график целиком сместится на константу, равную логарифму этого порядка, т. е. в рассмотренном выше примере — на значение  $\ln(10^{-6}) = -13,815$ . Смещение графика как целого не изменит ни вида зависимости, ни коэффициента наклона графика. Поскольку в большинстве экспериментов величина, приводимая в качестве окончательного результата, вычисляется именно при помощи углового коэффициента, использование разных единиц измерения, несколько меняя график, не влияет на конечный результат эксперимента.

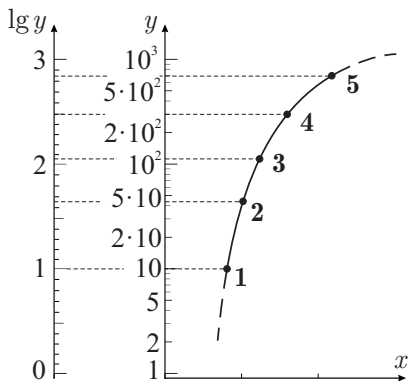
Для удобства построения графика в логарифмическом масштабе иногда вычисляется отношение измеренной величины не к единице измерения, а к некому размерному параметру, который выбирается таким образом, чтобы числа, получаемые при расчете логарифма, были наиболее удобны для восприятия. В этом случае важно проследить, чтобы каждое из значений (для всех экспериментальных и теоретических точек) было “отнормировано” на *одну и ту же* величину, иначе сравнение результатов опыта с теорией будет затруднено.

### 9.3 Работа с логарифмической шкалой

Иногда при обработке результатов измерения возникает необходимость считывания данных с кривых, построенных в логарифмическом или полулогарифмическом масштабе. В случае, если вид функциональной зависимости аналитически не задан, приходится определять значения величин по координатам точек на оси.

На рис. 3.10 показан пример кривой, построенной в полулогарифмическом масштабе. На кривой отмечено пять точек, координаты которых (т. е. отвечающие им значения  $y$ ) мы хотим определить.

Рассмотрим поближе логарифмическую шкалу. Деления, отвечающие порядкам величины, т. е. 1, 10,  $10^2$ , ...,  $10^n$  разделены равными промежутками. Остальные деления нанесены неравномерно, так что в случае, если координата точки не совпадает с “круглым” числом, приходится проводить интерполяцию (оценивать координату на глаз). Полезно запомнить:



**Рис. 3.10**

$$\lg 1 = 0; \quad \lg 2 \approx 0,3; \quad \lg 3 \approx 0,5; \quad \lg 5 \approx 0,7; \quad \lg 10 = 1.$$

Поэтому на логарифмической шкале цифра 3 (в каждом порядке) приходится примерно на середину отрезка, разделяющего 1 и 10, а интервалы от 1 до 2, от 2 до 5 и от 5 до 10 составляют приблизительно 0,3, 0,4 и 0,3 от длины этого отрезка соответственно. Мелкие риски, проставленные на оси  $y$  между 1 и 10 в каждом порядке, обозначают доли десятки: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (см. ось  $y$  на рис. 3.10).

Пользуясь этими соображениями, мы можем приближенно определить координаты выбранных точек:

$$\begin{aligned} y_1 &= 10, \\ y_2 &\approx 4,5 \cdot 10 = 45, \\ y_3 &\approx 1,1 \cdot 10^2 = 110, \\ y_4 &\approx 3 \cdot 10^2 = 300, \\ y_5 &\approx 7 \cdot 10^2 = 700. \end{aligned}$$

Понятно, что погрешность этих чисел из-за неточности интерполяции, т. е. погрешность отсчета по шкале, тем больше, чем выше порядок величины, в котором расположены деления. Так, считая, что погрешность отсчета равна половине деления, получим, что для  $y_2$  доверительный интервал составляет  $\pm 5$ , тогда как для  $y_3$ ,  $y_4$  и  $y_5$  —  $\pm 50$ .

Для упрощения интерполяции можно воспользоваться тем, что неравномерная шкала величины  $y$  отвечает равномерной шкале ее логарифма. Для этого необходимо рядом с осью ординат нарисовать вторую ось, показывающую изменение  $\lg y$ , и разметить ее соответственно делениям, отвечающим порядкам на оси  $y$  (см. рис. 3.10, слева). Тогда, имея привычную нашим глазам равномерную разметку, мы сможем интерполировать значения логарифма с большей точностью, после чего вычислить значения  $y_i$  как  $10^{\lg y}$  для каждой точки. Понятно, что этот метод требует больших трудозатрат по сравнению с оценками, описанными выше. Сравним полученные значения:

$$\begin{aligned}(\lg y)_1 = 1 &\Rightarrow y_1 = 10^1 = 10, \\(\lg y)_2 = 1,65 &\Rightarrow y_2 = 10^{1,65} \approx 45, \\(\lg y)_3 = 2,05 &\Rightarrow y_3 = 10^{2,05} \approx 112, \\(\lg y)_4 = 2,5 &\Rightarrow y_4 = 10^{2,5} \approx 320, \\(\lg y)_5 = 2,85 &\Rightarrow y_5 = 10^{2,85} \approx 710.\end{aligned}$$

Взяв погрешность отсчета в этом случае как половину размера деления на шкале  $\lg y$ , получим абсолютную погрешность полученных  $y_i$  как погрешность косвенного измерения:

$$\Delta y = \left( \frac{\partial}{\partial(\lg y)} 10^{\lg y} \right) \Delta(\lg y) = y \ln 10 \Delta(\lg y),$$

которая будет также разной для различных  $y_i$  (при этом относительная погрешность  $\Delta y/y$  одинакова для всех точек). Для  $y_2$  имеем  $\Delta y \approx 5$ , для  $y_3$  —  $\Delta y \approx 13$ , для  $y_4$  —  $\Delta y \approx 40$ , для  $y_5$  —  $\Delta y \approx 80$ .

Как видно, полученные разными методами значения хорошо согласуются друг с другом в пределах погрешностей, причем точность второго метода выше для большинства точек.

Стоит отметить, что описанные методы определения координат точек по логарифмической шкале применимы не только для считывания данных с графиков, но и для обратной процедуры — нанесения точек на график.

## 10 Построение градуировочных графиков

*Г р а д у и р о в о ч н ы м* называется график, определяющий измеряемую величину как функцию показаний прибора. Т. е., по такому графику устанавливается соответствие между шкалой прибора и показаниями более точного (контрольного) прибора, либо несколькими эталонными (известными заранее) значениями измеряемой величины. Например, можно проградуировать шкалу амперметра по показаниям более точного амперметра, шкалу спектрометра — по известным длинам волн спектра излучения ртутной лампы и т. п.

При построении градуировочных графиков чаще всего используется *линейная интерполяция* (не путать с интерполяцией при помощи наилучшей прямой). При линейной интерполяции после определения значений функции  $y_i$  для каждого из выбранных значений аргумента  $x_i$  полагают, что на промежутках между соседними точками зависимость  $y(x)$  линейна. Т. е. полученные экспериментальные точки соединяются отрезками прямых. График, полученный линейной интерполяцией, имеет вид ломаной линии, проходящей через экспериментальные точки.

Этот принцип построения градуировочного графика связан с тем, что при градуировке прибора требуют, чтобы контрольный прибор обладал очень большой точностью. Обычно используется контрольный прибор с классом точности в три раза меньшим, чем класс точности градуируемого прибора. В этом случае погрешность значений  $y_i$  настолько мала, что попадает в пределы точек, а измеренное значение считается равным истинному значению измеряемой величины.

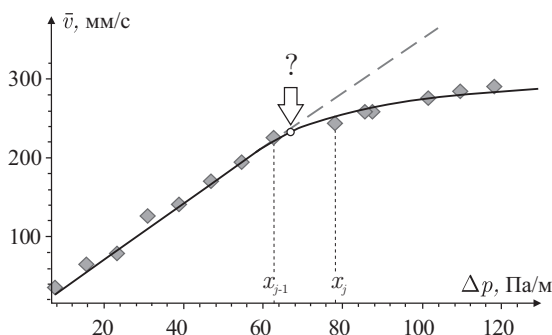
В случае, если техническое оснащение лаборатории не позволяет использовать контрольные приборы высокой точности, и погрешности определенных значений  $y_i$  с учетом оптимального масштаба становятся вполне заметными на графике отрезками, строить градуировочный график в виде ломаной линии некорректно. В этой ситуации следует отметить на градуировочном графике погрешности всех измеренных значений и провести гладкую кривую (или наилучшую прямую) через области погрешностей экспериментальных точек.

## 11 Определение величин по графику

Как уже было сказано, с помощью графика можно проводить обработку экспериментальных данных. Графическая обработка не так точна, как численная, использующая строгие методы, но имеет свои преимущества. Она проста, наглядна, в большинстве случаев не требует длительных вычислений и в то же время дает неплохие результаты. В этом параграфе будут рассмотрены несколько примеров определения физических величин и их погрешностей с помощью графической обработки результатов.

### 11.1 Графическая интерполяция

Кривую, построенную по экспериментально полученным точкам  $(x_i, y_i)$  в некоторой области изменения аргумента, можно использовать для нахождения значений  $y$  в любой промежуточной точке  $x$  этой области. Эта операция называется *графической интерполяцией*. Потребность в графической интерполяции возникает в случаях, когда целью эксперимента является поиск особой точки функциональной зависимости между физическими величинами (точки максимума, минимума, перегиба, точки выхода на насыщение и т. п.).



**Рис. 3.11.** Зависимость средней скорости течения воды от перепада давления между концами трубы. Экспериментальные точки обозначены ромбами. Точка, в которой нарушается прямая пропорциональность между  $v$  и  $\Delta p$ , находится методом графической интерполяции

Этот раздел пособия мы начали с примера о зависимости скорости течения жидкости от перепада давления на концах трубы. Та точка кривой, в которой нарушается прямая пропорциональность между  $v$  и  $\Delta p$ , соответствует тем значениям величин, при которых течение жидкости перестает быть ламинарным и становится турбулентным. Эта точка, однако, не совпадает ни с одним из значений, полученных экспериментально и нанесенных на график (рис. 3.11), и потому определение ее координат требует графической интерполяции.

Обозначим координаты искомой точки  $(x_0, y_0)$ . Поскольку эта точка определяется экспериментатором самостоятельно по виду проведенной им же кривой, т. е. является результатом субъективных оценок, единственным *объективным* критерием является нахождение точки  $(x_0, y_0)$  между двумя ближайшими к ней экспериментальными точками (рис. 3.11). Другими словами, мы достоверно знаем лишь то, что значение  $x_0$  лежит в интервале  $(x_{j-1}, x_j)$ . Поэтому **погрешность определения координаты**  $x_0$  можно приближенно оценить как

$$\Delta x \approx \frac{x_j - x_{j-1}}{2}.$$

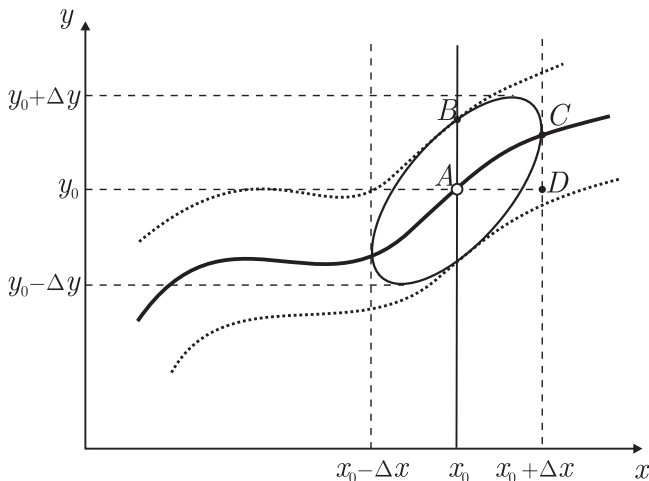
После выбора  $x_0$  искомое значение  $y_0$  определяется по графику проецированием найденной точки на ось ординат.

**Погрешность функции при графической интерполяции** определяется двумя субъективными ошибками: погрешностью проведения кривой и погрешностью задания аргумента (координаты  $x_0$  искомой точки). Метод оценки результирующей погрешности  $\Delta y$  показан для произвольной кривой на рис. 3.12. По обе стороны от основной кривой проводятся две дополнительные кривые, максимально отстоящие от основной кривой в пределах погрешностей экспериментальных точек. Эти кривые ограничивают так называемый *коридор погрешностей*. Затем проводятся прямые  $x = x_0$  и  $x = x_0 \pm \Delta x$ , где  $x_0$  — абсцисса, для которой требуется определить значение функции, а  $\Delta x$  — её погрешность. Погрешность значения функции, связанная с неточностью построения кривой, будет соответствовать длине отрезка  $AB$ , а погрешность, возникающая за счет неточности задания аргумен-

та, — длине проекции отрезка  $AC$  на ось  $y$ , т. е. длине отрезка  $CD$ . Согласно правилу сложения погрешностей, суммарная погрешность будет равна квадратному корню суммы их квадратов:

$$\Delta y = \sqrt{(AB)^2 + (CD)^2}.$$

Если построить эллипс, вписанный в параллелограмм, образованный дополнительными кривыми и прямыми  $x = x_0 \pm \Delta x$ , таким образом, чтобы эллипс касался сторон параллелограмма в точках пересечения основной кривой с прямыми  $x = x_0 \pm \Delta x$  и прямой  $x = x_0$  с границами коридора погрешностей (см. рис. 3.12), то вертикальная “протяженность” этого эллипса будет равна удвоенной погрешности  $2\Delta y$ .

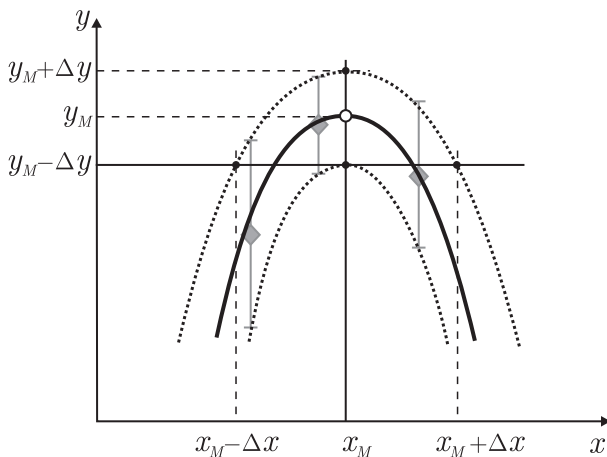


**Рис. 3.12.** Определение погрешности при графической интерполяции: для определения значения функции в точке с координатой  $x_0$ , не совпадающей ни с одной из экспериментальных точек, проводится прямая  $x = x_0$  до пересечения с основной кривой (т.  $A$ ) и определяется  $y$ -координата точки пересечения:  $f(x_0) = y_0$ . Пунктирные прямые  $x = x_0 \pm \Delta x$  показывают доверительный интервал задания координаты  $x_0$ . Отрезок  $AB$ , отсекаемый кривыми  $f(x)$  и границей коридора погрешностей от прямой  $x = x_0$ , отвечает погрешности определения  $y_0$  за счет неточности построения кривой. Погрешность, связанная с неточностью задания  $x_0$ , есть отрезок  $CD$  — проекция участка кривой  $AC$ , отсекаемого доверительным интервалом точки  $x_0$ , на ось  $y$



Тот же принцип лежит в основе определения **погрешности аргумента, при котором функция принимает экстремальное значение**. Предположим, что необходимо определить  $x$ -координату максимума функции (т. е. наилучшей кривой, проведенной по экспериментальным точкам). Точность определения этой координаты по графику определяется погрешностью проведения кривой и погрешностью выбора точки на кривой.

На рис. 3.13 показана основная кривая и дополнительные кривые, определяющие коридор погрешностей. В пределах коридора функцию можно построить неоднозначно, и максимум функции  $(x_M, y_M)$  может соответствовать любой точке интервала, определяемого пересечением горизонтальной прямой, проведенной через нижнюю границу коридора погрешностей, с верхней границей коридора. Поэтому *погрешность  $\Delta x$  координаты максимума  $x_M$*  можно считать равной половине этого интервала. *Погрешность  $\Delta y$  координаты  $y_M$*  при этом определяется как половина проекции коридора погрешностей на ось ординат (см. рис. 3.13).



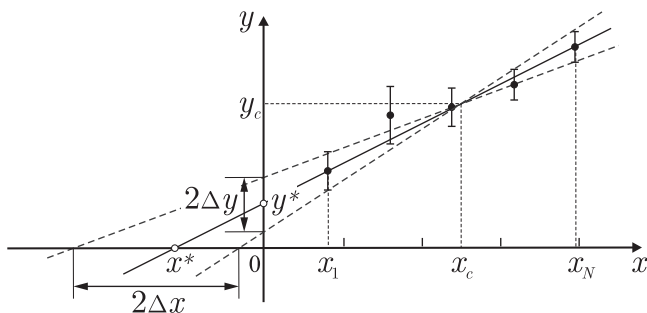
**Рис. 3.13.** Определение погрешности координат максимума функции: после проведения основной кривой и коридора погрешностей (пунктирные кривые) через нижнюю границу коридора в точке максимума проводится горизонтальная прямая. Точки её пересечения с верхней границей коридора погрешностей определяют доверительный интервал координаты максимума  $x_M$ , т. е. удвоенную погрешность  $\Delta x$

Пользуясь аналогичными принципами, можно построить алгоритм определения погрешностей графической интерполяции для других кривых и их характерных точек. Однако следует помнить, что графическая обработка результатов измерения является лишь *приближенной оценкой*, и для получения более точных результатов необходимо использовать более сложные аналитические методы, например метод наименьших квадратов (см. п. 8.2). Так, для аппроксимации функции в окрестности максимума с помощью метода наименьших квадратов используется параболическая зависимость  $y(x) = ax^2 + bx + c$ , т. е. определяются три параметра кривой, что приводит к существенному увеличению объема вычислений.

## 11.2 Графическая экстраполяция

Если требуется определение значений  $y(x)$  за пределами экспериментально исследованной области, т. е. приходится “продлевать” график функции в область значений  $x$ , где нет экспериментальных точек, такая процедура называется *графической экстраполяцией*.

Экстраполяцию следует применять только в случае, если результаты эксперимента ясно указывают на то, что зависимость  $y(x)$  — линейная, и, кроме того, если имеется теоретическое обоснование (ведущая гипотеза, позволяющая предположить линейную зависимость). Тогда по экспериментальным точкам строят наилучшую прямую (например, определив параметры прямой методом парных точек) и затем продлевают ее в нужную область. Чаще всего таким образом определяются точки пересечения наилучшей прямой с осями или с другими прямыми (рис. 3.14). Основной вклад в погрешности  $\Delta x$  и  $\Delta y$  определяемых координат точек в этом случае вносит погрешность углового коэффициента  $\Delta k$ . Чем дальше располагается искомая точка от экспериментально изученной области, тем бóльшая погрешность накапливается за счет неточности определения параметра  $k$ .



**Рис. 3.14.** Нахождение точек пересечения с осями *вне* экспериментально исследованной области методом экстраполяции наилучшей прямой: для определения погрешностей точек  $x^*$  и  $y^*$  кроме наилучшей прямой (сплошная линия) через центр тяжести экспериментальных точек  $(x_c, y_c)$  проводятся вспомогательные прямые (пунктир), показывающие погрешность углового коэффициента  $k$ . Пересечения вспомогательных прямых с осями абсцисс и ординат определяют двойные погрешности  $\Delta x$  и  $\Delta y$  соответственно

Погрешности точек пересечения с осями  $x^*$  и  $y^*$  можно определить по графику следующим образом. Помимо наилучшей прямой  $y = kx + b$  через точку с координатами  $(x_c, y_c)$  проводятся две вспомогательные прямые<sup>20</sup> с коэффициентами наклона  $(k + \Delta k)$  и  $(k - \Delta k)$ . Их пересечения с осями отсекают двойную погрешность искомой координаты (рис. 3.14).

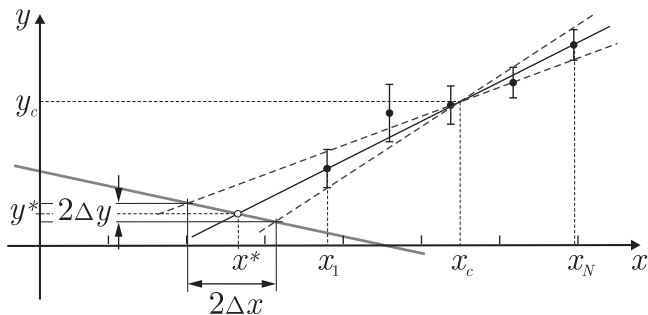
Отметим, что в данном случае координата  $y^*$  совпадает с параметром  $b$  наилучшей прямой, поэтому погрешность  $\Delta y$  может быть также определена аналитически как погрешность  $\Delta b$  (см. формулу (3.10) в п. 8.1):

$$\Delta y \simeq x_c \Delta k.$$

В случае, если искомой является точка пересечения наилучшей прямой с какой-либо другой прямой, построенной в тех же осях (см. рис. 3.15), погрешности  $\Delta x$  и  $\Delta y$  можно приближенно

<sup>20</sup> Иногда для упрощения расчетов без заметной потери точности вспомогательные прямые проводят через края погрешностей первой и последней экспериментальных точек (см. рис. 3.14).

считать равными половине длины проекций отрезка, отсекаемого вспомогательными прямыми от этой прямой, на осях абсцисс и ординат соответственно.



**Рис. 3.15.** Определение погрешностей координат  $(x^*, y^*)$  точки пересечения наилучшей прямой (черным) с некоторой другой прямой (серым). Вспомогательные прямые (пунктир), показывающие погрешность углового коэффициента  $k$ , отсекают отрезок на “серой” прямой. Проекция этого отрезка на оси  $x$  и  $y$  показывают удвоенные погрешности  $\Delta x$  и  $\Delta y$  искомым координат

# Заключение

## 12 Общие рекомендации по проведению и обработке результатов эксперимента

Здесь будет кратко описан алгоритм обработки результатов измерений, начиная от самого процесса измерений и заканчивая написанием заключения — грамотного представления основных выводов и конечных результатов всего эксперимента.

Представленные ниже рекомендации основаны, в первую очередь, на здравом смысле. Их целью является упрощение работы с полученными в эксперименте данными и сокращение количества ошибок. Некоторые термины употребляются без расшифровки, так как предполагается, что читатель ознакомился с содержанием предыдущих глав данной книги. Для более полного описания того или иного этапа работы следует обращаться непосредственно к соответствующим частям пособия.

### Проведение измерений

Организация процесса измерений зачастую влияет на точность, с которой будет получен конечный результат. В связи с этим, прежде чем что-либо измерять и записывать показания, следует продумать, как провести конкретное измерение и какой дальнейшей обработке будут подвергаться полученные числа.

**При работе с многопредельными стрелочными приборами** необходимо выбирать тот предел измерений, при котором стрелка будет отклоняться на большое число делений (не выходя при этом за пределы шкалы). Если диапазон изменения величины таков, что стрелка пробегает всю шкалу, для повышения точности рекомендуется в процессе измерений *менять предел шкалы*.

**При работе с осциллографами** необходимо выбирать множители  $X$ - и  $Y$ -каналов так, чтобы измеряемые отрезки были растянуты на большую часть экрана, но не выходили при этом за его границы.

*Факт изменения предела измерений прибора или множителя канала осциллографа должен быть обязательно **записан** в рабочей тетради.*

### В случае численной обработки результатов

- измерения всех неизвестных величин должны проводиться не менее 3-5 раз, за исключением случаев, когда повторение измерения невозможно (например, идет непрерывный нагрев образца, либо объект измерения портится от процедуры измерения). В случае, если разброс получаемых результатов измерения одной и той же физической величины велик по сравнению с погрешностью отдельного измерения, количество измерений необходимо увеличить до 10-20 раз.

### В случае графической обработки результатов

- желательно увеличить количество экспериментальных точек, наносимых на график, при этом можно проводить по одному измерению для каждой точки. Если предполагаемая зависимость — прямолинейная или имеет вид гладкой кривой, для измерений лучше выбирать равноотстоящие значения аргумента. В окрестности скачков, изломов и экстремумов функции точки следует располагать чаще, чем в областях монотонной зависимости. Если график строится по результатам косвенных измерений (т. е. по осям откладываются не непосредственно измеренные, а вычисленные по результатам измерений величины), то количество измерений должно быть увеличено в соответствии со сказанным выше.

*Все результаты измерений записываются в заранее подготовленные таблицы **без округления**. При исправлении ошибочных данных не следует стирать, замазывать или закрашивать неверные записи: любое зачеркнутое число должно быть читабельным.*

**При проведении серии измерений** некоторой физической величины  $X$  таблица результатов составляется подобно следующей:

№	$x_i$	$\bar{x}$	$\Delta x$	$z = f(x)$	$\Delta z$	...
1						
2						
...						

При этом *по результатам измерений* заполняются только колонки “№” и “ $x_i$ ” — номер и результат каждого измерения. Все остальные столбцы заполняются *по результатам вычислений*: среднее значение измеряемой величины, ее абсолютная погрешность, некоторая другая величина  $z$ , вычисляемая по измеренной, и т. д.

**При экспериментальном исследовании зависимости одной физической величины от другой  $y(x)$** , предполагающем построение графика, типовая таблица для записи результатов измерений имеет вид:

№	$x$	$y$	$\Delta x$	$\Delta y$	Примечание
1					
2					
...					

В этом случае измерения каждого значения  $y$  проводятся *однократно* для каждого значения  $x$ , а абсолютные погрешности величин определяются приборной ошибкой и ошибкой снятия показаний. В колонке “Примечание” указывают информацию об изменении предела измерений приборов, цене деления и т. п.

Приведенные выше таблицы являются примерами. Для каждого конкретного эксперимента вид таблиц может варьироваться в зависимости от количества измеряемых и вычисляемых величин. Если результат записывается в таблицу в *делениях шкалы*, следует добавить колонки для перевода делений в стандартные единицы измерения. Таблицы для записи результатов должны быть продуманы и составлены *до начала измерений*.

## Обработка результатов измерений

### 1). Промежуточные вычисления

#### Результат серии измерений

После проведения серии измерений вычисляется среднее арифметическое значение всех результатов  $\{x_i\}$ :

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N},$$

где  $N$  — количество проведенных измерений. Полученная величина является *результатом всей серии* — наилучшей оценкой истинного значения величины  $X$ . Если проводилось одно измерение, очевидно, наилучшей оценкой истинного значения является его результат:  $\bar{x} = x_1$ . Таким образом определяются наилучшие оценки для всех величин, которые **измерялись прямо** в процессе эксперимента.

В случае, если усредняются результаты измерений одной и той же величины, выполненных с разной точностью (например, разными приборами), для получения наилучшей оценки необходимо вычислять *взвешенное среднее* значение (см. п. 4.2.7).

Для определения **косвенно измеряемых величин** в функциональную зависимость вида  $z = f(x, y, \dots)$  подставляются наилучшие оценки всех переменных, т. е.

$$z_{\text{наил}} = f(\bar{x}, \bar{y}, \dots).$$

Если при вычислениях в формулы входят физические константы, необходимо брать их значения из справочников с тем же количеством знаков, какое имеют другие числа, участвующие в промежуточных расчетах, или на одну значащую цифру больше (см. пример ниже).

Полученные значения записываются в соответствующие графы таблиц *без окончательного округления*.



## Погрешности прямых измерений

Вначале определяются погрешности прямо измеренных величин. Если конкретный способ вычисления не указан в руководстве к работе, то следует выбрать его самостоятельно. Ориентиром можно считать следующую таблицу:

Способ оценки погрешности результата $\bar{x}$	Количество измерений $N$		
	1	3 ÷ 10	> 10
Приборная погрешность $\Delta x_{\text{приб}}$ и/или погрешность отсчета $\Delta x_{\text{отсч}}$	✓	—	—
Вычисление при помощи распределения Стьюдента $\Delta x = t_{\alpha, N} \sigma_{\bar{x}}$	—	✓	—
Стандартное отклонение среднего $\sigma_{\bar{x}} = \sigma_x / \sqrt{N}$	—	Редко	✓

Если непосредственно измеряемые величины измерялись **однократно**, либо **случайный разброс результатов** измерений в серии  $(x_{\max} - x_{\min})/2$  оказался **меньше стандартной приборной погрешности** или погрешности отсчета, то в качестве погрешности результата берется *погрешность одного измерения* (см. п. 4.1).

В случае, если **разброс значений в серии превышает погрешность отдельного измерения**, необходимо вычислять случайную погрешность одним из доступных методов (см. п. 4.2).

## Доверительная вероятность

После определения погрешностей прямо измеренных величин  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ , ... следует определить соответствующие им доверительные вероятности. В большинстве случаев величину доверительной вероятности можно выбирать (меняя тем самым ширину доверительного интервала). Краткая сводка дана ниже:

Способ оценки погрешности	Доверительная вероятность $\alpha$
Приборная погрешность $\Delta x_{\text{приб}}$	В паспорте прибора
Погрешность отсчета $\Delta x_{\text{отсч}}$ ( $d$ — оцениваемая доля деления)	$\alpha = 0,997$ для $\Delta x_{\text{отсч}} = d$ $\alpha = 0,68$ для $\Delta x_{\text{отсч}} = d/3$ $0,2 l_{\text{ц.д.}} \leq d \leq l_{\text{ц.д.}}$
Вычисление $\Delta x$ при помощи распределения Стьюдента	Задается экспериментатором при вычислении
Стандартное отклонение среднего $\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum (x_i - \bar{x})^2}$	$\alpha = 0,997$ для $\Delta x = 3\sigma_{\bar{x}}$ $\alpha = 0,68$ для $\Delta x = \sigma_{\bar{x}}$
Оценка методом Корнфельда $\Delta x = \frac{x_{\text{max}} - x_{\text{min}}}{2}$	$\alpha = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{N-1}$

Если требуется сравнение погрешностей между собой или планируется учет нескольких погрешностей одновременно, то *необходимо убедиться, что они отвечают одному и тому же значению  $\alpha$* . Если это не так, то доверительные интервалы следует расширить или сузить соответствующим образом.

**Пример.** Представим, что требуется привести к одному значению  $\alpha$  приборную погрешность  $\Delta x_{\text{приб}}$  и погрешность  $\Delta y$ , вычисляемую по результатам пяти измерений при помощи таблицы коэффициентов Стьюдента.

Погрешность прибора, вычисленная по классу точности, отвечает его предельной (максимально возможной) ошибке. Согласно “правилу  $3\sigma$ ”, это означает, что данная погрешность равна трем стандартным отклонениям:

$$\Delta x_{\text{приб}} = 3\sigma_{\text{приб}},$$

т. е. ей отвечает доверительная вероятность  $\alpha = 0,997$ . Такого значения доверительной вероятности в таблице коэффициентов Стьюдента нет (см. п. 4.2.4). Поэтому можно свести обе погрешности к другому значению  $\alpha$ , например 0,95. Для этого необходимо умножить  $\Delta x_{\text{приб}}$  на  $2/3$  (сузив доверительный интервал до  $\pm 2\sigma_{\text{приб}}$ ), а при вычислении  $\Delta y$  выбрать коэффициент Стьюдента  $t_{\alpha=0,95, N=5}$ .

## Погрешности косвенных измерений

После определения погрешностей прямых измерений для нахождения погрешности косвенно измеряемой величины  $z(x, y, \dots)$  следует:

1. Привести погрешности  $\Delta x, \Delta y, \dots$  к одному значению доверительной вероятности  $\alpha$ .
2. Вычислить частные погрешности величины  $z$ , обусловленные погрешностями входящих в нее прямо измеренных значений:

$$\Delta z_x = \left| \frac{\partial z}{\partial x} \right| \Delta x; \quad \Delta z_y = \left| \frac{\partial z}{\partial y} \right| \Delta y; \quad \dots$$

3. Сравнить вычисленные частные погрешности между собой. Если какие-то из них на порядок или несколько порядков меньше остальных, то их следует отбросить.
4. Вычислить финальную погрешность величины  $z$ . Формулы для различных функций одной и нескольких переменных представлены в п. 5.4.

Если при вычислениях в формулы входят физические константы, необходимо учитывать, что они тоже заданы с некоторой конечной точностью. Погрешность константы, указанной в справочнике (или в описании к работе), определяется последней значащей цифрой числа. Так, если на гире указана масса  $m_{\text{гири}} = 5$  г, то погрешность этого числа  $\Delta m = \pm 1$  г. Если же  $m_{\text{гири}} = 5,0$  г, то  $\Delta m = \pm 0,1$  г и т. д.

## Точность вычислений

При промежуточных вычислениях все числа и константы можно округлять, однако их следует брать с такой точностью, чтобы она заведомо не оказывала влияние на те цифры результата и погрешности, которые останутся после *окончательного* округления. Для этого достаточно во всех числах брать по крайней

мере столько же значащих цифр, сколько значащих цифр будет в конечном результате, или на одну больше.

Естественно, что до получения конечного результата мы не знаем, какая получится погрешность и сколько значащих цифр мы оставим. Однако можно иметь в виду, что в лабораторных работах погрешность обычно составляет проценты и десятки процентов. Т. е. результат обычно известен с точностью до одной, двух или трех значащих цифр. Поэтому можно дать общую рекомендацию: **при промежуточных вычислениях во всех числах следует оставлять не меньше трех-четырёх значащих цифр.**

Существуют ситуации, когда этого оказывается недостаточно. Например, если речь идет о вычитании двух близких чисел. Допустим, вычисляется разность чисел 0,123456 и 0,123444. В результате вычитания мы получаем число 0,000012, в котором всего две значащих цифры, хотя в каждом из заданных чисел были известны шесть значащих цифр. Таким образом, результат известен с гораздо худшей точностью, чем заданные числа. В этом случае, чтобы получить разность с большей точностью, можно порекомендовать увеличить точность задания каждого из первоначальных чисел.

Разберем на примере, как работать с промежуточными вычислениями.

### **П р и м е р**

Допустим, необходимо определить высоту  $h$  по результату измерения времени падения тела с этой высоты:  $t = (0,72 \pm 0,01)$  с. То есть, мы имеем дело с косвенным измерением:

$$h(t) = \frac{gt^2}{2}.$$

Посмотрев в справочник, видим, что  $g = 9,80655$  м/с<sup>2</sup>. Возникает вопрос: сколько цифр из этого числа нам использовать при вычислениях? Разное количество значащих цифр отвечает разной точности, с которой мы “знаем” эту константу. Как говорилось выше, погрешность константы определяется ее последней значащей цифрой. Так для числа 9,80655 погрешность приближенно равна 0,00001, для числа 9,8066 — 0,0001 и т. д.

Так как погрешности величин  $t$  и  $g$ , очевидно, независимы, итоговая погрешность высоты  $h$  вычисляется по формуле (2.36):

$$\delta h = \sqrt{4 \delta t^2 + \delta g^2}.$$

Вычислим относительную погрешность  $t$ :

$$\delta t = \frac{0,01}{0,72} \approx 0,0139.$$

Если использовать значение константы  $g = 9,80655 \text{ м/с}^2$  и, соответственно,

$$\delta g = \frac{0,00001}{9,80655} \approx 1,0198 \cdot 10^{-6},$$

то мы получим результат  $\Delta h \approx 0,070607 \text{ м}$ , который следует округлить до  $\Delta h = 0,07 \text{ м}$ . Если бы мы изначально отбросили слагаемое  $\delta g^2$  под корнем, то ответ для  $\delta h$  изменился бы только в 10-й значащей цифре. В данном случае очевидно, что погрешность  $\delta g$  можно не учитывать, так как она на несколько порядков меньше  $\delta t$ .

Таким образом, погрешность высоты можно считать равной

$$\delta h = 2 \delta t.$$

Покажем, что необязательно брать и само значение константы  $g$  с такой высокой точностью. При  $g = 9,80655 \text{ м/с}^2$  получаем

$$h \simeq 2,541858 \text{ м}, \quad \Delta h \approx 0,070607 \text{ м},$$

что после округления дает  $h = (2,54 \pm 0,07) \text{ м}$ .

Если взять  $g = 9,81 \text{ м/с}^2$ , то погрешность  $\Delta g = 0,01 \text{ м/с}^2$ , т. е.

$$\delta g = \frac{0,01}{9,81} \approx 0,001 \ll \delta t,$$

и, вновь пренебрегая погрешностью величины  $g$ , получаем

$$h \approx 2,542752 \text{ м}, \quad \Delta h \approx 0,070632 \text{ м},$$

что после округления снова дает  $h = (2,54 \pm 0,07) \text{ м}$ , т. е. такой же результат, что и прежде.

При использовании значения  $g = 9,8 \text{ м/с}^2$  имеем  $\Delta g = 0,1 \text{ м/с}^2$ , т. е. относительная погрешность

$$\delta g = \frac{0,1}{9,8} \approx 0,0102 \sim \delta t.$$

В этом случае необходимо вычислять погрешность высоты по точной формуле  $\delta h = \sqrt{4\delta t^2 + \delta g^2}$ . В итоге мы получаем:

$$h \approx 2,540160 \text{ м}, \quad \Delta h \approx 0,075170 \text{ м},$$

что после округления дает  $h = (2,54 \pm 0,08) \text{ м}$ .

Таким образом, **округление константы до двух значащих цифр привело к увеличению погрешности результата**, хоть и не сказалось на самом значении  $h$ .

Если же округлить  $g$  до  $10 \text{ м/с}^2$ , то  $\Delta g = 1$  и относительная погрешность  $\delta g = 0,1$  начинает давать больший вклад в погрешность величины  $h$ , нежели  $\delta t$ . Результат в этом случае —

$$h \approx 2,592000 \text{ м}, \quad \Delta h \approx 0,269014 \text{ м},$$

что дает после округления  $h = (2,6 \pm 0,3) \text{ м}$ .

Таким образом, в данном случае, **взяв константу с недостаточной точностью, мы получаем неверный результат!**

Как видим, константу  $g$  в данном примере было необходимо (и достаточно) брать с точностью до трех значащих цифр. Обратите внимание, что именно столько значащих цифр содержится и в финальном результате вычислений:  $h = 2,54$ .

В реальных лабораторных работах приходится проделывать зачастую гораздо более сложные вычисления, нежели приведенные в данном примере, поэтому в промежуточных вычислениях рекомендуется у всех чисел сохранять на одну значащую цифру больше.

## 2). Округление результата и его погрешности

После завершения всех вычислений, прежде чем записывать финальный результат измерений и его погрешность, полученные числа следует *правильно* окончательно округлить. **Сначала**

**округляется погрешность, а затем — результат.** Ниже приведены правила и примеры округления.

### Правило округления погрешностей

Экспериментальные погрешности округляются до одной значащей цифры. В случае, если первая значащая цифра — единица, принято оставлять две значащие цифры.

Т. е. после округления погрешность должна иметь вид

...  $A \cdot 10^2$ ,  $A0$ ,  $A$ ,  $0,A$ ,  $0,0A$  ..., где  $A = 2, 3, \dots, 9$ ,

или

...  $1B0$ ,  $1B$ ,  $1,B$ ,  $0,1B$ ,  $0,01B$  ..., где  $B = 0, 1, 2, \dots, 9$ .

### Примеры

Без первой единицы:

0,0311 → 0,03,    0,0351 → 0,04,    0,0399 → 0,04;  
5,2748 → 5,    5,4748 → 5,    5,5748 → 6;  
4256 → 4000,    4556 → 5000,    4998 → 5000.

С первой единицей:

0,0101 → 0,010,    0,0109 → 0,011,    0,0166 → 0,017;  
1,0101 → 1,0,    1,0901 → 1,1,    1,7777 → 1,8;  
1010 → 1000,    1091 → 1100,    1777 → 1800.

Когда единица пропадает или возникает:

0,0998 → 0,10,    1,9898 → 2,    95 →  $1,0 \cdot 10^2$ .

## Правило округления результата измерений

Последняя значащая цифра результата должна стоять в *той же десятичной позиции*, в которой находится последняя значащая цифра указанной погрешности.

Таким образом, *округление результата зависит от того, какая у этого результата погрешность*. При разных погрешностях результат должен округляться по-разному.

### Примеры

Для примера будем считать, что результат равен  $x = 529,456$ , и рассмотрим разные погрешности  $\Delta x$ :

$$\begin{aligned}\Delta x = 0,02, & \quad 529,456 \rightarrow 529,46; \\ \Delta x = 0,12, & \quad 529,456 \rightarrow 529,46; \\ \Delta x = 5, & \quad 529,456 \rightarrow 529; \\ \Delta x = 50 = 5 \cdot 10^1, & \quad 529,456 \rightarrow 530 = 53 \cdot 10^1; \\ \Delta x = 1,0 \cdot 10^2, & \quad 529,456 \rightarrow 530 = 5,3 \cdot 10^2; \\ \Delta x = 2 \cdot 10^2, & \quad 529,456 \rightarrow 500 = 5 \cdot 10^2.\end{aligned}$$

### Запись результата с погрешностью

Результат измерений записывается вместе с погрешностью в следующем виде:

обозначение физической величины =  $(x \pm \Delta x)$  ед. измерения.

Кроме того, часто при записи результата *выносят степень десяти* и записывают результат в следующем виде:

обозначение физической величины =  $(x \pm \Delta x) \cdot 10^n$  ед. измерения.

При этом степень обычно выносится так, чтобы  $x$  был порядка единицы, например 0,5 или 5.



Полезность вынесения десяти обусловлена, помимо удобства, еще и следующим соображением. Если мы имеем число 500 без погрешности, то мы не знаем, являются ли два нуля после цифры 5 значащими цифрами или они просто обозначают степень. Если же вынести степень  $10^2$ , то появляется возможность указать, сколько значащих цифр известно. Если результат записан как  $5 \cdot 10^2$ , это означает, что значащая цифра одна. Если результат записан как  $5,00 \cdot 10^2$ , это означает, что значащих цифр три.

### Примеры

Правильная запись:

$$0,62 \pm 0,03, \quad 2,34 \pm 0,12, \quad (0,62 \pm 0,03) \cdot 10^5.$$

Неправильная запись:

$0,62 \pm 0,032$	— лишняя цифра в погрешности;
$2,335 \pm 0,12$	— лишняя цифра в результате;
$0,62 \cdot 10^5 \pm 0,3 \cdot 10^4$	— должна выноситься общая степень.

### 3). Построение графиков

Наиболее удобны для анализа графики прямолинейных функций, так как угол наклона прямой и точки пересечения прямой с осями зачастую содержат важную информацию. Поэтому следует **по возможности** строить графики экспериментальных зависимостей так, чтобы получалась прямая линия. Для этого по одной или обеим осям откладывают данные в *функциональном масштабе*: логарифмическом, квадратичном и т. д.

Например, для получения прямой линии при изучении зависимости высоты падения от времени  $h(t) = gt^2/2$  по осям откладывают величины  $t^2$  и  $h$ .

Следует помнить:

- Экспериментальные точки наносятся на график *с погрешностями*. График зависимости проводится через области погрешностей и должен иметь вид *плавной линии*. Исключением могут быть градуировочные графики.
- При построении графика теоретической зависимости погрешности точек не указываются, кроме тех случаев, когда в теоретические формулы подставляются значения величин с погрешностями.
- Если теоретическая и экспериментальная зависимости строятся на одном графике, то для повышения наглядности сравнения целесообразно *не проводить* экспериментальную кривую, а ограничиться нанесением экспериментальных точек с погрешностями.
- В случае, когда неизвестная величина определяется по графику, *все построения для ее нахождения должны быть нанесены на график*.

Подробные правила построения графиков изложены в п. 7.

## Написание заключения

**Заключение к лабораторной работе** является, по сути, выводом проведенного научного исследования. Оно представляет собой довольно краткий, формализованный текст, цель которого — дать читателю возможность получить логически ясное представление о проделанном эксперименте и полученных результатах, не обращаясь к таблицам и вычислениям. Написание заключения требует от автора четкого понимания, что конкретно было сделано и получено в ходе работы, умения пользоваться научной терминологией и особого стиля изложения.

Заключение должно содержать следующие основные сведения:

1. Краткое описание того, что, каким методом и какими приборами измерялось. В отличие от введения к работе, в за-

ключении должно быть указано **явно**, для каких образцов или каких параметров величин проводились измерения.

Например, если во введении говорится, что целью работы является определение плотности вещества при различных температурах, в заключении к работе должно быть написано конкретно: “*Целью данной работы являлось экспериментальное определение плотности глицерина в промежутке температур от  $t_1 = 20^\circ\text{C}$  до  $t_2 = 50^\circ\text{C}$ ”.*

2. **Краткое** описание проведенных измерений: выбранного диапазона, интервалов между измерениями и количества измерений для каждой физической величины, по возможности — с обоснованием. Не следует приводить в заключении таблицы с экспериментальными данными!
3. Описание обработки результатов измерений: методов вычислений, косвенных измерений (если они имели место) и построения графиков.
4. Обсуждение построенных графиков: анализ полученной зависимости и степени согласия с теорией (например, “*хорошее*”, “*удовлетворительное*” или “*не согласуется*”). В заключении следует дать ссылки на соответствующие графики, вклеенные в лабораторный журнал. Вклеивание иллюстраций в заключение не допускается.
5. Описание результатов, полученных посредством вычислений или анализа графиков, а также их погрешностей, с указанием способов их расчета. **Должна быть указана доверительная вероятность, отвечающая указанному доверительному интервалу, и относительная погрешность результата.** Все финальные результаты и их погрешности должны быть правильно округлены и представлены в виде

$$X = (x \pm \Delta x) \text{ ед. измерения, } \alpha = \dots; \quad \delta x = \dots \%$$

При этом необходимо указать характер и источники полученных погрешностей. Необходимо попытаться проанализировать действительную причину наличия ошибок. Недопустимо формально ссылаться на “неточность приборов” или “человеческий фактор”.

В случае косвенных измерений следует указать, какое из прямых измерений дает максимальный вклад в погрешность окончательного результата.

6. Обсуждение согласия результатов эксперимента с теоретической моделью или табличными значениями величин. Необходимо обязательно указать, совпали ли результаты в пределах погрешности или нет. В случае проверки физических законов допустимы мягкие оценки, например *“полученные данные находятся в хорошем согласии с законом сохранения механической энергии”*. Если результат — число, следует использовать более конкретные формулировки: *“результат измерений совпадает с табличным значением в пределах  $2\sigma$ ”* или *“не совпадает в пределах указанной погрешности, однако сходится по порядку величины”* и т. п. Если наблюдается расхождение по порядку величины, рекомендуется перепроверить вычисления. При сравнении полученных чисел с табличными значениями следует указать как результат эксперимента, так и табличное (или теоретическое) значение величины **в одинаковом виде**, удобном для сравнения.

Стоит иметь в виду, что теоретическое значение не имеет погрешности: например, показатель адиабаты для идеального одноатомного газа равен точно  $\gamma = 5/3$ . Если теоретическое значение рассчитывается по формулам с участием величин, определенных с погрешностью, в результате чего получается не одно точное число, а интервал, то в таких случаях говорят “диапазон теоретических значений”.

В заключениях следует использовать безличную форму предложений: *“рассчитана величина”* вместо *“мы рассчитали вели-*

чину”, “были измерены” вместо “мы измеряли”.<sup>21</sup> Необходимо соблюдать единый стиль изложения. Не следует использовать чрезмерно усложненные грамматические конструкции и сложноподчиненные предложения или пытаться все заключение написать одной фразой. Изложение должно быть логичным и последовательным, без смысловых разрывов в тексте.

### Типовые ошибки в заключениях

- Необходимо различать выражения “теоретическое значение” и “табличное значение”. В одних работах полученная величина (экспериментальное значение) сравнивается с теоретическим значением, в других — с табличным. Табличные значения зачастую являются также полученными экспериментально — в других лабораториях и с очень высокой точностью.
- Неправильно писать фразы типа “полученные результаты доказывают закон сохранения энергии”. Условия экспериментов в учебных лабораториях не позволяют доказывать, опровергать или открывать физические закономерности, а служат скорее для демонстрации физических законов и развития навыков проведения и обработки измерений. Следует использовать более мягкие формулировки, например: “полученные результаты находятся в согласии с законом сохранения энергии” или “получено то-то и то-то, что соответствует закону сохранения энергии”.
- Необходимо отдавать себе отчет в том, что при сравнении экспериментального значения с теоретическим или табличным слово “совпадают” означает “совпадают в пределах погрешности”, а “не совпадают” — “не совпадают в пределах погрешности”. Нельзя писать, что значения “почти совпали”. Возможно, стоит изменить доверительную вероятность, расширив соответственно доверительный интервал так, чтобы результат совпадал в пределах погрешности с теоретическим или табличным значением.

---

<sup>21</sup> В англоязычных аннотациях распространено использование местоимения “we (мы)”. Однако, как и в русскоязычной научной литературе, никогда не используется местоимение “I (я)”, даже когда автор в работе один (все равно следует писать “we”).

## Русский язык

*“Подъезжая к своей станции и глядя на природу в окно,  
у меня слетела шляпа. И. Ярмонкин”.*  
А.П. Чехов. “Жалобная книга”

- Обратите внимание на слова “*расчет*” и “*рассчитывать*”:

расчет, расчетный  
рассчитывать, рассчитанный, рассчитан, рассчитано

- Обратите внимание на написание кратких прилагательных:

построенный  
НО  
построен, построена, построено, построены

- Обратите внимание на написание букв “*е*” и “*и*” в словах:

теоретический  
экспериментальный

- Неправильно писать “*измерив сторону куба, был найден его объем*”. Неправильность такой формулировки заключается в том, что деепричастие “*измерив*” относится к подлежащему “*объем*”. По смыслу получается, что не экспериментатор, а “объем” измерял сторону куба. Правильный вариант: “*по результатам измерения стороны куба был найден его объем*”.

### 13 Распространенные ошибки

- **Ничего нельзя измерить точно.** Если при многократных измерениях прибор показывает одно и то же число, это не означает, что погрешность равна нулю. Погрешность равна приборной погрешности или погрешности отсчета.
- **Неправильно складывать приборную и случайную погрешности измерений.** Если в серии измерений наблюдается

разброс значений, превышающий приборную погрешность (погрешность отсчета), то необходимо вычислить среднее арифметическое значение  $\bar{x}$  и его погрешность  $\sigma_{\bar{x}}$  по формуле (2.14), *не принимая во внимание приборную погрешность*. В обратном случае следует считать, что все полученные значения совпадают, и в качестве погрешности брать погрешность одного измерения (приборную или отсчета). Подробнее см. п. 4.3.

- **Нуль в конце числа является значащей цифрой.** Запись результатов измерений в таблицу в виде  $\{5,32; 5,35; 5,4; 5,41; 5,44\}$  вместо 5,40 в третьем измерении является неверной. Нуль в данном случае является значащим числом, т. е. такой же важной информацией, как наличие цифр 2, 5, 1, 4 в других результатах.

- **Неправильно округлять погрешность только вверх.** Погрешность следует округлять по правилам округления. Например, 3,423 нужно округлить до 3, 48,97 до 50, а 238 — до 200.

- При указании на неправильность записи типа  $(4 \pm 0,03)$  простое **дописывание нулей** —  $(4,00 \pm 0,03)$  — **неверно**. Следует обратиться к промежуточным вычислениям и уточнить, какие цифры стоят после запятой в числе 4. При этом все расчеты должны быть проделаны с достаточной точностью.

- Если конечный результат указан с точностью до трех значащих цифр, это означает, что во всех промежуточных вычислениях **все величины, в том числе физические константы, должны использоваться с не меньшей точностью.**

- Допустим, найдена величина  $x$  и ее погрешность  $\Delta x$ . Ошибочным является представление, что для нахождения погрешности величины, например,  $\ln x$  нужно вычислить логарифм при “максимальном” значении  $(x + \Delta x)$  и при “минимальном”  $(x - \Delta x)$ , а потом получить погрешность логарифма, как-то оперируя этими значениями. Следует вычислять погрешность логарифма как **погрешность косвенных измерений**, см. п. 5.

## 14 Часто задаваемые вопросы

### Вопрос:

Я округлил и результат, и погрешность так, чтобы после запятой осталась одна цифра. Преподаватель говорит, что это неправильно. Почему?

### Ответ:

При округлении погрешности следует оставлять одну (иногда две) *значащие* цифры — т. е. первую слева ненулевую цифру и, в случае если она равна 1, еще один знак после нее. Значащие цифры *никак не связаны с запятой*. После округления погрешности округляется результат — так, чтобы последняя значащая цифра результата стояла в той же десятичной позиции, что и у погрешности. Подробнее см. п. 6 и п. 12.

**В:** Является ли ноль значащей цифрой?

**О:** В случае, если ноль стоит *до* (т. е. *левее*) первой ненулевой цифры, он *не является значащим*. Если ноль стоит *после* ненулевых цифр, он *является значащим*. Пример: в числе 0,014070 первые два нуля не являются значащими, а два нуля после 4 и 7 — являются. Подробнее см. п. 6.

**В:** Мне кажется, что если я округлю погрешность вниз, то я ее занижу, чего делать нельзя. А преподаватель говорит, что в разных ситуациях нужно округлять как вниз, так и вверх, по обычным правилам округления. Почему?

**О:** Погрешность сама по себе определена неточно (с некоторой погрешностью). Т. е., полученное в результате расчетов число верно в пределах некоторого доверительного интервала, плюс-минус какое-то значение. По умолчанию этот интервал считается равным плюс-минус единице в том порядке величины, который остается после округления. Поэтому округлять погрешность только вверх означало бы заведомо ее завышать (сдвигать доверительный интервал задания погрешности вверх).



**В:** Я измерил длину предмета при помощи линейки и получил результат 49,4 см. В качестве погрешности линейки я взял 1 мм. Далее я вспомнил, что если в погрешности первая значащая цифра — единица, то нужно писать следующую цифру, и записал результат в виде  $L = (49,4 \pm 1,0)$  мм. Преподаватель говорит, что это неверно. Почему?

**О:** Если в качестве погрешности прямого измерения берется приборная погрешность, равная единице, то *добавлять “руками”* ноль к этой погрешности не следует: это будет превышением точности. Запись “1,0” означает утверждение, что этот 0 в первой десятичной позиции — *известен*, а это не так. Более того, добавленная к результату цифра 0 также неизвестна (известно, что длина равна 494, но не 494,0)!

Правило записи следующей после единицы цифры в погрешности относится *только* к случаю, когда погрешность *получена в результате расчетов и округляется*. Поэтому результат следует оставить в виде  $L = (494 \pm 1)$  мм.

То же замечание относится к случаю, когда погрешность, равная единице, записывается для табличной константы, для которой погрешность явно не указана. Например, если табличное значение константы  $g$  записано как  $g = 9,81 \text{ м/с}^2$ , то его погрешность приближенно равна  $0,01 \text{ м/с}^2$  (но не  $0,010!$ ).

**В:** Чем отличается случайная погрешность от систематической? Систематическая — это не то же самое, что и приборная?

**О:** Случайная ошибка приводит к случайным отличиям результатов измерения от истинного значения, как положительным, так и отрицательным. Систематическая ошибка приводит к постоянному отклонению результатов измерений от истинного значения в какую-то одну сторону. Случайную ошибку можно уменьшить (и даже свести к нулю), увеличивая количество измерений. Систематические ошибки нельзя ни устранить, ни даже обнаружить с помощью повторных измерений тем же самым прибором.

Прибор — это один из *источников* погрешности эксперимента. Ошибки прибора могут проявляться при измерениях как случайно, так и систематически. Т. е. в общем случае приборная погрешность может включать в себя и случайную, и систематическую составляющие. Однако, как было сказано выше, при измерениях одним и тем же прибором систематическую погрешность обнаружить невозможно (если о ней заранее ничего не известно). Поэтому в лабораторных работах часто считают, что систематические ошибки, в том числе и систематические ошибки прибора, отсутствуют.

- В:** Я провел несколько измерений одной и той же величины и знаю, чему равна приборная погрешность. Откуда мне взять случайную погрешность? Какую из погрешностей — приборную или случайную — мне использовать в дальнейшем?
- О:** Следует сравнить стандартную приборную погрешность  $\sigma_{\text{приб}}$  с разбросом результатов, полученных в нескольких измерениях:  $(x_{\text{max}} - x_{\text{min}})/2$ . В случае, если разброс превышает  $\sigma_{\text{приб}}$ , случайная погрешность вычисляется одним из способов, описанных в п. 4.2. В обратном случае случайную погрешность вычислять не требуется и в качестве погрешности результата следует использовать приборную погрешность.
- В:** Что делать, если я использую несколько погрешностей, а доверительная вероятность у них разная?
- О:** В этом случае необходимо определить стандартные отклонения  $\sigma$  для каждой из используемых погрешностей, т. е., например,  $\sigma_{\bar{x}}$ ,  $\sigma_{\bar{y}}$ , ... — если речь идет о погрешностях разных величин  $x$ ,  $y$ , ..., или же  $\sigma_{\text{приб}}$  и  $\sigma_{\text{отсч}}$  — если речь о погрешностях одной и той же величины, обусловленных разными источниками. После этого доверительные интервалы, выраженные в единицах соответствующих  $\sigma$ , будут отвечать одним и тем же доверительным вероятностям, если содержат одно и то же количество “сигм”:  $\Delta x = 2\sigma_{\bar{x}}$ ,  $\Delta y = 2\sigma_{\bar{y}}$  и т. д. Подробнее см. стр. 17.

**В:** Я получил (в результате измерений или расчетов) три значения величины  $x_1, x_2, x_3$ , каждое — со своей погрешностью, причем эти погрешности различны. Теперь мне требуется рассчитать среднее значение величины  $x$ . Как мне найти погрешность для этого среднего значения?

**О:** Прежде всего, в данном случае в качестве итогового результата необходимо вычислить не среднее арифметическое из трех полученных значений, а так называемое средневзвешенное. Средневзвешенный результат учитывает то, что погрешности трех значений  $x_i$  — разные. Ясно, что значение с меньшей погрешностью (то есть более точное) должно давать больший вклад в итоговый результат.

Получив средневзвешенный результат и вычислив его погрешность (см. п. 4.2.7), следует сравнить эту погрешность с погрешностью разброса значений  $x_i$ . Погрешность разброса можно грубо оценить методом Корнфельда. Если погрешность средневзвешенного  $x$  и погрешность разброса значений  $x_i$  отличаются на порядок или более, то в качестве итоговой погрешности нужно взять наибольшую. Если они одного порядка, то эти две погрешности нужно квадратично сложить.

**В:** Погрешности слишком малы, чтобы изобразить их на графике. Что делать?

**О:** Скорее всего это означает, что масштаб одной или обеих осей выбран неверно. Следует выбирать масштаб так, чтобы разброс экспериментальных точек в обоих направлениях был растянут по возможности вдоль всей оси, а погрешности составляли несколько мелких делений. Если это невозможно, рекомендуется на вспомогательном графике построить наиболее важную часть графика в таком масштабе, где видны погрешности и отклонения точек от наилучшей кривой.

**В:** Мне нужно провести прямую линию через экспериментальные точки. Не получается провести ее так, чтобы она прошла через все точки с учетом их погрешности. Что делать?

- О:** Рекомендуется определить параметры наилучшей прямой аналитически (методом парных точек или методом наименьших квадратов) и затем построить график прямой по полученным данным:  $y = \bar{k}x + \bar{b}$ . См. п. 8.
- В:** Я нашел погрешность  $\Delta T$  по измерениям величины  $T$ , а затем определил погрешность  $T^2$ , возведя  $\Delta T$  в квадрат. Преподаватель говорит, что это неверно. Почему?
- О:** Погрешность косвенных измерений определяется как  $\Delta f(t) = |\partial f / \partial T| \Delta T$ , т. е. в данном случае  $\Delta(T^2) = 2T \Delta T$ . Для функций нескольких переменных вычисления более сложные (см. п. 5).
- В:** Саша выполнил 10 измерений периода качаний маятника. Таким образом, он провел *одну серию измерений*, после чего вычислил  $\bar{x}$ ,  $\sigma_x$  по формуле (2.9) и  $\sigma_{\bar{x}}$  по формуле (2.14). После этого к той же установке подошел Дима и тоже выполнил 10 измерений периода. Т. е. Дима провел такую же серию измерений той же самой физической величины.  
**Вопросы:** **1.** Как будут соотноситься результаты измерений этих студентов? **2.** Что можно заранее сказать о результатах измерений Димы, если нам известны результаты измерений и вычислений Саши?
- О:** 1. *Как будут соотноситься результаты измерений этих студентов?*
- а. **Измерения**  $\{x_i\}$ . Десять измерений Димы будут отличаться от десяти измерений Саши. Это будут, в общем случае, другие десять чисел.
- б. **Среднее значение**  $\bar{x}$ . Поскольку в серии Димы другие числа, то и среднее он получит немного другое, чем Саша.
- в. **Среднеквадратичное отклонение**  $\sigma_x$ . Оно характеризует разброс отдельных измерений от среднего значения в данной конкретной серии измерений. Чем больше отклонения отдельных измерений от среднего значения (в среднем), тем больше  $\sigma_x$ . *При увеличении числа измерений среднеквадратичное отклонение не уменьшается, а стремится к своему точному значению  $\sigma$ .* При вычислении среднеквадратичных отклонений Саша и Дима получают разные,

но очень близкие значения. Если они оба в своих сериях измерений проделают больше измерений, то полученные ими  $\sigma_x$  будут ближе друг к другу. В пределе бесконечного числа измерений оба значения совпадут.

г. **Среднеквадратичное отклонение среднего  $\sigma_{\bar{x}}$ .** Оно характеризует разброс средних значений, взятых из разных серий измерений. Если Саша и Дима увеличат количество измерений в своих сериях, то каждый из них получит  $\bar{x}$  более точно. Тем самым разброс средних значений, т. е. величина среднеквадратичного отклонения среднего, *уменьшается с ростом числа измерений*. Опять же, имея разные наборы чисел, Саша и Дима получают немного разные  $\sigma_{\bar{x}}$ , однако этой разницей можно пренебречь.

2. *Что можно заранее сказать о результатах измерений Димы, если нам известны результаты измерений и вычислений Саши?*

а. Если Саша записал результат в виде  $\bar{x} \pm \sigma_x$ , то можно сказать, что с 68 % вероятностью следующее измерение, сделанное на той же установке, попадет в интервал  $(\bar{x} - \sigma_x, \bar{x} + \sigma_x)$ , или же что 68 % всех последующих измерений попадет в этот интервал. Таким образом, примерно 7 из 10 измерений Димы окажутся в этом интервале.

б. Если Саша записал результат в виде  $\bar{x} \pm \sigma_{\bar{x}}$ , то можно сказать, что с вероятностью 68 % среднее значение, вычисленное Димой по его результатам, попадет в интервал  $(\bar{x} - \sigma_{\bar{x}}, \bar{x} + \sigma_{\bar{x}})$ . Или же, если мы приведем десять разных студентов, и каждый проделает свою серию измерений на той же установке, то примерно у семи из них вычисленное среднее значение попадет в указанный интервал.

Заметим, что интервал  $(\bar{x} - \sigma_{\bar{x}}, \bar{x} + \sigma_{\bar{x}})$  в случае 10 измерений в серии в  $\sqrt{10} \simeq 3$  раза уже интервала  $(\bar{x} - \sigma_x, \bar{x} + \sigma_x)$ . Т. е. при наличии десяти серий измерений, проделанных разными студентами, разброс средних в этих сериях будет втрое уже, чем разброс отдельных измерений внутри каждой серии. На рис. 2.4 это соответствует тому, что распределение  $f(\bar{x})$  уже распределений  $f(x)$ . Важно заметить, что для получения как  $\sigma_x$ , так и  $\sigma_{\bar{x}}$  мы используем только данные *одной* серии измерений. Однако можно оценить, что будет происходить в других сериях измерений.

## Список литературы

- [1] Тейлор Дж. Введение в теорию ошибок/ Пер. с англ. — М.: Мир, 1985.
- [2] Зайдель А.Н. Элементарные оценки ошибок измерений. 2-е изд. — Л.: Наука, Ленинградское отд., 1967.
- [3] Сквайрс Дж. Практическая физика/ Пер. с англ. — М.: Мир, 1971.
- [4] Светозаров В.В. Элементарная обработка результатов измерений. 2-е изд. — М.: МИФИ, 2005.
- [5] Светозаров В.В. Основы статистической обработки результатов измерений. 2-е изд. — М.: МИФИ, 2005.
- [6] Fornasini P. The Uncertainty in Physical Measurements. An Introduction to Data Analysis in the Physics Laboratory. — Springer, 2008.
- [7] Уорсинг А., Геффнер Дж. Методы обработки экспериментальных данных/ Пер. с англ. — М.: Иностранная литература, 1949.
- [8] Холявко В.Н., Ким В.Ф., Формусатик И.Б., Буриченко А.П., Суханов И.И. Лабораторный практикум по общей физике. Анализ, обработка и представление результатов измерения физических величин. — Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2004.
- [9] Соловьев В.А., Яхонтова В.Е. Элементарные методы обработки результатов измерений. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1977.
- [10] Свешников А.А. Основы теории ошибок. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1972.

# Оглавление

От авторов . . . . .	3
Введение . . . . .	5
<b>I Виды ошибок измерений . . . . .</b>	<b>8</b>
1 Случайные погрешности . . . . .	11
2 Систематические погрешности . . . . .	12
3 Промахи . . . . .	13
<b>II Вычисление погрешностей . . . . .</b>	<b>16</b>
<b>4 Вычисление погрешностей прямых измерений . . . . .</b>	<b>18</b>
4.1 Погрешности одного измерения . . . . .	18
4.1.1 Приборные погрешности . . . . .	18
4.1.2 Погрешность снятия показаний . . . . .	22
4.1.3 Сравнение и учет погрешностей различных источников . . . . .	24
4.2 Погрешности серии измерений . . . . .	25
4.2.1 Среднеквадратичная и средняя арифметическая погрешности измерения . . . . .	26
4.2.2 Нормальное распределение . . . . .	29
4.2.3 Стандартное отклонение среднего . . . . .	32
4.2.4 Распределение Стьюдента . . . . .	35
4.2.5 Оценка погрешности методом Корнфельда . . . . .	38
4.2.6 Определение и исключение промахов . . . . .	39
4.2.7 Учет погрешностей неравноточных измерений . . . . .	41
4.3 О количестве измерений . . . . .	43
<b>5 Вычисление погрешностей косвенных измерений . . . . .</b>	<b>47</b>
5.1 Сумма измеренных величин. Способы сложения погрешностей . . . . .	48

5.2	Погрешность для произвольной функции одной переменной . . . . .	50
5.3	Погрешность функции нескольких переменных . . . . .	54
5.4	Таблица погрешностей косвенных измерений . . . . .	57
<b>6</b>	<b>Точность задания погрешностей . . . . .</b>	<b>58</b>
<b>III</b>	<b>Построение и обработка графиков . . . . .</b>	<b>61</b>
<b>7</b>	<b>Основные правила построения графиков . . . . .</b>	<b>63</b>
<b>8</b>	<b>Аппроксимация линейной функцией . . . . .</b>	<b>68</b>
8.1	Метод парных точек . . . . .	71
8.2	Метод наименьших квадратов . . . . .	75
<b>9</b>	<b>Графики в логарифмическом и полулогарифмическом масштабах . . . . .</b>	<b>78</b>
9.1	Полулогарифмический масштаб . . . . .	79
9.2	Логарифмический масштаб . . . . .	80
9.3	Работа с логарифмической шкалой . . . . .	82
<b>10</b>	<b>Построение градуировочных графиков . . . . .</b>	<b>85</b>
<b>11</b>	<b>Определение величин по графику . . . . .</b>	<b>86</b>
11.1	Графическая интерполяция . . . . .	86
11.2	Графическая экстраполяция . . . . .	90
	<b>Заключение . . . . .</b>	<b>93</b>
<b>12</b>	<b>Общие рекомендации по проведению и обработке результатов эксперимента . . . . .</b>	<b>93</b>
	Проведение измерений . . . . .	93
	Обработка результатов измерений . . . . .	96
	Написание заключения . . . . .	106
<b>13</b>	<b>Распространенные ошибки . . . . .</b>	<b>110</b>
<b>14</b>	<b>Часто задаваемые вопросы . . . . .</b>	<b>112</b>
	<b>Список литературы . . . . .</b>	<b>118</b>