МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

В.Е. Волков, Е.В. Сумин

Функция Грина самосопряженной краевой задачи второго порядка

Учебно-методическое пособие

Москва 2012

УДК 517.968(076)
ББК 22.161.6я7
Ф 94

Волков В.Е., Сумин Е.В. **Функция Грина самосопряженной краевой задачи второго порядка:** *учебно-методическое пособие*. М.: НИЯУ МИФИ, 2012. – 20 с.

Данная работа представляет собой учебно-методическое пособие к практическим занятиям по интегральным уравнениям.

В работе дано определение функции Грина и приведен метод ее построения для однородной краевой задачи второго порядка в общем случае. Введено понятие самосопряженной краевой задачи и описывается способ построения функции Грина в этом случае. Приведены примеры построения функции Грина, а также задачи для самостоятельного решения.

Предназначено для студентов НИЯУ МИФИ, изучающих курс интегральных уравнений. Будет также полезно преподавателям, ведущим практические занятия.

Рецензенты: канд. физ.-мат. наук, доц. НИЯУ МИФИ
В.Б. Шерстюков;
канд. физ.-мат. наук, доц. МПГУ
О.Н. Быкова

Рекомендовано к изданию редсоветом НИЯУ МИФИ

ISBN 978-5-7262-1706-2

Редактор М.В. Макарова

Подписано в печать 20.06.2012. Формат 60x84 1/16
Уч.-изд. л. 1,25. Печ. л. 1,25. Тираж 430 экз.
Изд. № 002-1. Заказ № 110

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ».
Типография НИЯУ МИФИ.
115409, Москва, Каширское ш., 31

§ 1. ПОСТРОЕНИЕ ФУНКЦИИ ГРИНА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ОДНОРОДНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

Пусть задано линейное однородное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами

$$L[y] \equiv p_0(x)y''(x) + p_1(x)y'(x) + p_2(x)y(x) = 0 \qquad (1)$$

где $p_0(x)$, $p_1(x)$, $p_2(x)$ – известные непрерывные на отрезке $[a, b]$ вещественнозначные функции. При этом предполагается, что $p_0(x) \neq 0$, $x \in [a, b]$.

Запишем для уравнения (1) однородные краевые условия в общем виде:

$$\begin{cases} V_1(y) \equiv \alpha_1 y(a) + \alpha_1^{(1)} y'(a) + \beta_1 y(b) + \beta_1^{(1)} y'(b) = 0; \\ V_2(y) \equiv \alpha_2 y(a) + \alpha_2^{(1)} y'(a) + \beta_2 y(b) + \beta_2^{(1)} y'(b) = 0. \end{cases} \qquad (2)$$

Здесь линейные формы $V_1(y)$, $V_2(y)$ от $y(a)$, $y(b)$, $y'(a)$, $y'(b)$ являются линейно независимыми, т.е. ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_1^{(1)} & \beta_1 & \beta_1^{(1)} \\ \alpha_2 & \alpha_2^{(1)} & \beta_2 & \beta_2^{(1)} \end{pmatrix}$$

равен 2; коэффициенты линейных форм α_1, $\alpha_1^{(1)}$, …, β_2, $\beta_2^{(1)}$ – вещественные числа.

Определение. Функцией Грина краевой задачи (1), (2) называется функция $G(x, \xi)$, построенная для любой точки ξ, $a < \xi < b$, и обладающая следующими четырьмя свойствами:

1) $G(x, \xi)$ непрерывна при $a \leq x \leq b$;

2) первая производная по x в точке $x = \xi$ имеет разрыв первого рода, причем скачок равен $\dfrac{1}{p_0(\xi)}$, т.е.

$$\left.\frac{\partial G(x, \xi)}{\partial x}\right|_{x=\xi+0} - \left.\frac{\partial G(x, \xi)}{\partial x}\right|_{x=\xi-0} = \frac{1}{p_0(\xi)};$$

3) в каждом из полуинтервалов $[a,\xi)$ и $(\xi,b]$ функция $G(x,\xi)$, как функция от x, является решением уравнения (1):

$$L[G]=0;$$

4) $G(x,\xi)$, как функция x, удовлетворяет граничным условиям (2):

$$\begin{cases} V_1(G(x,\xi))=0; \\ V_2(G(x,\xi))=0. \end{cases}$$

Утверждение 1. Функция Грина однородной краевой задачи (1), (2) существует и единственна тогда и только тогда, когда краевая задача (1), (2) имеет лишь тривиальное решение ($y(x)\equiv 0$, $x\in[a,b]$).

Предположим, что задача (1), (2) имеет только тривиальное решение. Построим функцию Грина для (1), (2) в этом случае.

Пусть функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ образуют фундаментальную систему решений уравнения (1). Тогда согласно свойству 3 функцию Грина $G(x,\xi)$ можно представить в виде:

$$G(x,\xi)=\begin{cases} a_1 y_1(x)+a_2 y_2(x), & a\le x\le \xi; \\ b_1 y_1(x)+b_2 y_2(x), & \xi\le x\le b, \end{cases}$$

где a_1, a_2, b_1, b_2 – функции от ξ.

Из свойств 1 и 2 функции Грина получим соотношения:

$$\begin{cases} [b_1 y_1(\xi)+b_2 y_2(\xi)]-[a_1 y_1(\xi)+a_2 y_2(\xi)]=0; \\ [b_1 y_1'(\xi)+b_2 y_2'(\xi)]-[a_1 y_1'(\xi)+a_2 y_2'(\xi)]=\dfrac{1}{p_0(\xi)}. \end{cases} \tag{3}$$

Введем обозначения:

$$c_1(\xi)=b_1(\xi)-a_1(\xi);$$

$$c_2(\xi)=b_2(\xi)-a_2(\xi).$$

Тогда из (3) получим систему линейных алгебраических уравнений относительно c_1 и c_2:

$$\begin{cases} c_1 y_1(\xi) + c_2 y_2(\xi) = 0; \\ c_1 y_1'(\xi) + c_2 y_2'(\xi) = \dfrac{1}{p_0(\xi)}. \end{cases} \tag{4}$$

Заметим, что определитель Δ системы (4) представляет собой определитель Вронского W функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$ при $x = \xi$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_1(\xi) & y_2(\xi) \\ y_1'(\xi) & y_2'(\xi) \end{vmatrix} = W(\xi).$$

Как известно, определитель Вронского для фундаментальной системы решений дифференциального уравнения отличен от нуля во всех точках области определения. Следовательно, определитель системы (4) Δ также отличен от нуля. Отсюда по теореме Крамера существует единственное решение $c_1(\xi)$, $c_2(\xi)$ системы (4).

Для того чтобы найти вид функций a_1, a_2, b_1, b_2, необходимо воспользоваться краевыми условиями (2). Ради сокращения объема дальнейших записей представим линейные формы V_1 и V_2 в виде:

$$\begin{cases} V_1(y) = A_1(y) + B_1(y); \\ V_2(y) = A_2(y) + B_2(y), \end{cases}$$

где

$$A_k(y) = \alpha_k y(a) + \alpha_k^{(1)} y'(a);$$

$$B_k(y) = \beta_k y(b) + \beta_k^{(1)} y'(b), \quad k = 1, 2.$$

Тогда можно записать:

$$V_k(G) = a_1 A_k(y_1) + a_2 A_k(y_2) + b_1 B_k(y_1) + b_2 B_k(y_2) = 0, \quad k = 1, 2.$$

Учитывая, что $a_k = b_k - c_k$, $k = 1, 2$, а значения c_k уже найдены, из свойства 4 функции Грина получим систему для неизвестных b_1 и b_2:

$$\begin{cases} (b_1 - c_1)A_1(y_1) + (b_2 - c_2)A_1(y_2) + b_1 B_1(y_1) + b_2 B_1(y_2) = 0; \\ (b_1 - c_1)A_2(y_1) + (b_2 - c_2)A_2(y_2) + b_1 B_2(y_1) + b_2 B_2(y_2) = 0. \end{cases}$$

Преобразуем эту систему к виду:

$$\begin{cases} b_1 V_1(y_1) + b_2 V_1(y_2) = c_1 A_1(y_1) + c_2 A_1(y_2); \\ b_1 V_2(y_1) + b_2 V_2(y_2) = c_1 A_2(y_1) + c_2 A_2(y_2). \end{cases}$$

По-прежнему система уравнений остается линейной относительно величин b_1 и b_2. Определитель этой системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} V_1(y_1) & V_1(y_2) \\ V_2(y_1) & V_2(y_2) \end{vmatrix}$$

отличен от нуля в силу предположения о линейной независимости форм V_1 и V_2. Поэтому существует единственное решение $b_1(\xi)$, $b_2(\xi)$, а по формулам $a_k(\xi) = b_k(\xi) - c_k(\xi)$, $k = 1, 2$, однозначно определяется и $a_1(\xi)$, $a_2(\xi)$. Таким образом, функция Грина построена.

Заметим, что указанный метод построения функции Грина можно рассматривать как доказательство теоремы о существовании и единственности функции Грина.

Пример 1. Построить функцию Грина для дифференциального уравнения

$$y'' + k^2 y = 0 \quad (k > 0, \quad k \neq 2\pi n, \quad n \in \mathbb{N}) \tag{5}$$

с периодическими граничными условиями

$$\begin{cases} y(0) = y(1); \\ y'(0) = y'(1). \end{cases} \tag{6}$$

Решение. Прежде всего, необходимо убедиться в том, что краевая задача (5), (6) имеет лишь тривиальное решение. Действительно, так как фундаментальной системой решений для уравнения (5) являются функции:

$$y_1(x) = \sin kx, \quad y_2(x) = \cos kx,$$

то общее решение (5) есть функция вида

$$y(x) = A \sin kx + B \cos kx,$$

где A и B – произвольные постоянные.

Краевые условия (6) дают следующие соотношения для определения A и B:

$$\begin{cases} A\sin k + B(\cos k - 1) = 0; \\ Ak(1-\cos k) + Bk\sin k = 0. \end{cases} \qquad (7)$$

Система (7) обладает единственным решением $A = B = 0$, так как ее определитель $\Delta = 2k(1-\cos k) \neq 0$ при $k > 0$, $k \neq 2\pi n$, $n \in \mathbb{N}$.

Итак, задача (5), (6) имеет только тривиальное решение $y(x) \equiv 0$, а значит, для нее можно построить единственную функцию Грина $G(x, \xi)$. Проведем это построение. Для этого представим искомую функцию $G(x, \xi)$ в виде:

$$G(x, \xi) = \begin{cases} a_1 \sin kx + a_2 \cos kx & \text{при} \quad 0 \le x \le \xi; \\ b_1 \sin kx + b_2 \cos kx & \text{при} \quad \xi \le x \le 1, \end{cases} \qquad (8)$$

где a_1, a_2, b_1, b_2 – неизвестные функции от ξ, подлежащие определению. Положим

$$\begin{aligned} c_1(\xi) &= b_1(\xi) - a_1(\xi); \\ c_2(\xi) &= b_2(\xi) - a_2(\xi) \end{aligned} \qquad (9)$$

и выпишем систему линейных уравнений для нахождения $c_1(\xi)$ и $c_2(\xi)$ (см. систему (4)):

$$\begin{cases} c_1 \sin k\xi + c_2 \cos k\xi = 0; \\ c_1 k \cos k\xi - c_2 k \sin k\xi = 1. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим

$$c_1 = \frac{\cos k\xi}{k}, \quad c_2 = -\frac{\sin k\xi}{k}. \qquad (10)$$

Далее воспользуемся свойством 4 функции Грина, согласно которому она должна удовлетворять краевым условиям задачи, т.е.

$$\begin{cases} G(0, \xi) = G(1, \xi); \\ G'_x(0, \xi) = G'_x(1, \xi). \end{cases}$$

В нашем случае эти соотношения принимают вид:

$$\begin{cases} a_2 = b_1 \sin k + b_2 \cos k; \\ ka_1 = kb_1 \cos k - kb_2 \sin k. \end{cases}$$

С помощью (9), (10) из последних равенств найдем все неизвестные коэффициенты в (8):

$$a_1 = \frac{\sin k\xi \sin k}{2k(1-\cos k)} - \frac{\cos k\xi}{2k},$$

$$a_2 = \frac{\cos k\xi \sin k}{2k(1-\cos k)} + \frac{\sin k\xi}{2k},$$

$$b_1 = \frac{\sin k\xi \sin k}{2k(1-\cos k)} + \frac{\cos k\xi}{2k},$$

$$b_2 = \frac{\cos k\xi \sin k}{2k(1-\cos k)} - \frac{\sin k\xi}{2k}.$$

Подставляя найденные значения a_1, a_2, b_1, b_2 в (8) и производя простейшие тригонометрические преобразования, найдем

$$G(x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{\cos k\left(x - \xi + \dfrac{1}{2}\right)}{2k \sin \dfrac{k}{2}}, & 0 \le x \le \xi; \\[2ex] \dfrac{\cos k\left(\xi - x + \dfrac{1}{2}\right)}{2k \sin \dfrac{k}{2}}, & \xi \le x \le 1. \end{cases}$$

§ 2. ПОНЯТИЕ САМОСОПРЯЖЕННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

В примере 1 получилась симметричная функция Грина, т.е.

$$G(x, \xi) = G(\xi, x)$$

(при замене x на ξ, а ξ на x выражение для функции Грина не меняется). Если бы мы заранее знали, что функция Грина будет симметричной, мы могли бы несколько сократить объем вычислений. В частности, не понадобилось бы находить величины b_1 и b_2, а также проводить преобразования для $G(x, \xi)$ на промежутке $\xi \le x \le 1$.

Оказывается, еще до решения задачи можно узнать, будет ли построенная функция Грина симметрична или нет. Сформулируем соответствующее утверждение.

Утверждение 2. Функция Грина краевой задачи (1), (2) симметрична тогда и только тогда, когда краевая задача (1), (2) является самосопряженной, т.е. являются самосопряженными уравнение (1) и отвечающие ему краевые условия (2).

Уравнение (1) является самосопряженным тогда и только тогда, когда $p_0'(x) \equiv p_1(x)$ для $x \in [a, b]$, т.е. оператор $L[y]$ можно записать в виде $L[y] = (p_0 y'(x))' + p_2 y(x)$.

Краевые условия (2), отвечающие уравнению (1), являются самосопряженными тогда и только тогда, когда

$$p_0(b)\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_1^{(1)} \\ \alpha_2 & \alpha_2^{(1)} \end{vmatrix} = p_0(a)\begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_1^{(1)} \\ \beta_2 & \beta_2^{(1)} \end{vmatrix}.$$

Возвращаясь к примеру 1, убедимся в том, что поставленная задача является самосопряженной. В самом деле, так как в уравнении (5) $p_0(x) = 1$, $p_1(x) = 0$, то получим $p_0'(x) \equiv p_1(x)$, $x \in [0, 1]$, т.е. уравнение (5) является самосопряженным.

Для краевых условий (6) имеем:

$$\begin{cases} y(0) - y(1) = 0; \\ y'(0) - y'(1) = 0, \end{cases}$$

откуда с учетом (1), (2), и (5) (здесь $p_0(0)=p_0(1)=1$, $\alpha_1=1$, $\beta_1=-1$, $\alpha_1^{(1)}=\beta_1^{(1)}=0$, $\alpha_2^{(1)}=1$, $\beta_2^{(1)}=-1$, $\alpha_2=\beta_2=0$) получаем, что

$$1\cdot\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{vmatrix}=1\,.$$

Таким образом, периодические граничные условия (6) для самосопряженного уравнения (5) являются самосопряженными, а следовательно, задача (5), (6) также самосопряженная.

Рассмотрим важный частный случай – распадающиеся краевые условия (2).

Пусть в уравнении (1) $p_0(x)\neq 0$, $x\in[a,b]$. Вообще говоря, последнее требование можно ослабить:

$$p_0(a)=0\,;\quad p_0(x)\neq 0\,,\quad x\in(a,b]\,.$$

Предположим, что краевые условия (2) являются распадающимися: одно задается на левом конце (в точке *a*), другое – на правом (в точке *b*) (в случае $p_0(a)=0$ обычное краевое условие в точке $x=a$ заменяется на естественное условие ограниченности: $|y(a)|<\infty$):

$$\begin{cases}\alpha_1 y(a)+\alpha_1^{(1)}y'(a)=0; & (11)\\ \beta_2 y(b)+\beta_2^{(1)}y'(b)=0. & (12)\end{cases}$$

Заметим, что краевые условия вида (11), (12) для любого уравнения (1) и для любых значений α_1, $\alpha_1^{(1)}$, β_2, $\beta_2^{(1)}$ являются самосопряженными, так как

$$\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_1^{(1)}\\ 0 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 0\\ \beta_2 & \beta_2^{(1)}\end{vmatrix}=0\,,$$

а условие ограниченности $|y(a)|<\infty$ относится к самосопряженным.

Построим функцию Грина для краевой задачи (1), (11), (12).

Подберем такие функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$, что $y_1(x)$ удовлетворяет уравнению (1) и краевому условию (11), а $y_2(x)$ – уравнению (1) и краевому условию (12). Тогда

$$G(x,\xi)=\begin{cases} c_1 y_1(x), & a\le x\le \xi; \\ c_2 y_2(x), & \xi\le x\le b. \end{cases} \tag{13}$$

Из свойств 1 и 2 функции Грина имеем:

$$\begin{cases} -c_1 y_1(\xi)+c_2 y_2(\xi)=0; \\ -c_1 y_1'(\xi)+c_2 y_2'(\xi)=\dfrac{1}{p_0(\xi)}. \end{cases}$$

Определитель этой системы

$$\Delta=\begin{vmatrix} -y_1(\xi) & y_2(\xi) \\ -y_1'(\xi) & y_2'(\xi) \end{vmatrix}=-W(\xi)\neq 0\ .$$

По формулам Крамера имеем:

$$\begin{aligned} c_1&=\frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2(\xi) \\ \dfrac{1}{p_0(\xi)} & y_2'(\xi) \end{vmatrix}}{-W(\xi)}=\frac{y_2(\xi)}{p_0(\xi)W(\xi)}, \\ c_2&=\frac{\begin{vmatrix} -y_1(\xi) & 0 \\ -y_1'(\xi) & \dfrac{1}{p_0(\xi)} \end{vmatrix}}{-W(\xi)}=\frac{y_1(\xi)}{p_0(\xi)W(\xi)}, \end{aligned} \tag{14}$$

Подставляя (14) в (13), получим, что функция Грина имеет вид:

$$G(x,\xi)=\begin{cases} \dfrac{y_1(x)y_2(\xi)}{p_0(\xi)W(\xi)}, & a\le x\le \xi; \\ \dfrac{y_1(\xi)y_2(x)}{p_0(\xi)W(\xi)}, & \xi\le x\le b. \end{cases} \tag{15}$$

Так как краевые условия (11), (12) всегда самосопряженные, то симметричность функции Грина (15) зависит от самосопряженности уравнения (1): для самосопряженного уравнения произведение $p_0(\xi)W(\xi)$ не зависит от ξ и является константой, а числитель дроби, составляющей функцию Грина (15), симметричен относительно x и ξ. Для несамосопряженного уравнения (1) произведение $p_0(\xi)W(\xi)$ зависит от ξ, и функция Грина не будет симметричной.

§ 3. ПРИМЕРЫ ПОСТРОЕНИЯ ФУНКЦИИ ГРИНА ДЛЯ САМОСОПРЯЖЕННЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Пример 2. Построить функцию Грина для дифференциального уравнения

$$xy'' + y' = 0 \tag{16}$$

при следующих условиях:

$$\begin{cases} y(x) \quad \text{ограничена} \quad \text{при} \quad x \to 0; & (17) \\ y(1) = \alpha y'(1). & (18) \end{cases}$$

Решение. Сначала проверим, что единственным решением задачи (16) – (18) является функция $y(x) \equiv 0$, $x \in [0,1]$. Действительно, обозначая $y'(x) = z(x)$, получим $xz' + z = 0$, откуда $\ln|z| = \ln|c_1| - \ln|x|$, $z = c_1 / x$, а значит,

$$y(x) = c_1 \ln x + c_2 .$$

Ясно, что $y(x)$ в этом случае удовлетворяет (17), (18) только при $c_1 = c_2 = 0$, значит, функцию Грина для нашей задачи можно построить и притом единственную.

Очевидно, что данная задача является самосопряженной, так как $p_0(x) = x$, $p_1(x) = 1$, т.е. $p_0'(x) \equiv p_1(x)$, а краевые условия – распадающиеся. Поэтому функция Грина краевой задачи (16) – (18) будет симметричной.

Функция, удовлетворяющая (16), (17), есть $y_1(x)=1$, а функция, удовлетворяющая (16), (18), будет $y_2(x)=\alpha+\ln x$. Тогда согласно (13) функция Грина имеет представление:

$$G(x,\xi)=\begin{cases} c_1, & 0<x\le\xi; \\ c_2(\alpha+\ln x), & \xi\le x\le 1. \end{cases}$$

Из свойств 1 и 2 функции Грина получим

$$\begin{cases} -c_1+c_2(\alpha+\ln\xi)=0; \\ c_2\dfrac{1}{\xi}=\dfrac{1}{\xi}. \end{cases}$$

Следовательно, $c_2=1$, $c_1=\alpha+\ln\xi$, а функция Грина

$$G(x,\xi)=\begin{cases} \alpha+\ln\xi, & 0<x\le\xi; \\ \alpha+\ln x, & \xi\le x\le 1. \end{cases}$$

Пример 3. Найти функцию Грина краевой задачи

$$\begin{cases} y''=0; \\ y'(0)=hy(0), \quad h>0; \\ y'(1)=-Hy(1), \quad H>0. \end{cases}$$

Решение. Общее решение уравнения $y''=0$ – произвольная линейная функция $y(x)=c_1x+c_2$, причем данным краевым условиям удовлетворяет лишь функция $y(x)\equiv 0$, $x\in[0,1]$.

Легко убедиться в том, что решение $y_1(x)=hx+1$ удовлетворяет краевому условию $y'(0)=hy(0)$, а решение $y_2(x)=H(x-1)-1$ – условию $y(1)=-Hy(1)$, причем они являются линейно независимыми.

Найдем определитель Вронского для $y_1(x)$ и $y_2(x)$ в точке $x=\xi$:

$$W(\xi)=\begin{vmatrix} h\xi+1 & H(\xi-1)-1 \\ h & H \end{vmatrix}=H+hH+h\,.$$

Так как в нашем примере $p_0(x)=1$, то согласно (15) получим

$$G(x,\xi)=\begin{cases}\dfrac{(hx+1)(H(\xi-1)-1)}{H+hH+h}, & 0\le x\le\xi;\\ \dfrac{(h\xi+1)(H(x-1)-1)}{H+hH+h}, & \xi\le x\le 1.\end{cases}$$

Пример 4. Определить функцию Грина краевой задачи

$$\begin{cases}y''(x)+k^2y(x)=0, \quad k\ne\pi n, \quad n\in\mathbb{Z};\\ y(0)=y(1)=0.\end{cases}$$

Решение. Сформулированная задача является самосопряженной, так как $p_0(x)=1$, $p_1(x)=0$. Следовательно, выполнено условие самосопряженности уравнения $p_0'(x)\equiv p_1(x)$, $x\in[0,1]$, а граничные условия являются распадающимися, т.е. самосопряженными. Заметим, что линейно независимые решения данного уравнения $y_1(x)=\sin kx$ и $y_2(x)=\sin k(x-1)$ удовлетворяют, соответственно, условиям: $y_1(0)=0$ и $y_2(1)=0$.

Определитель Вронского в точке $x=\xi$

$$W(\xi)=\begin{vmatrix}\sin k\xi & \sin k(\xi-1)\\ k\cos k\xi & k\cos k(\xi-1)\end{vmatrix}=$$

$$=k[\sin k\xi\cos k(\xi-1)-\sin k(\xi-1)\cos k\xi]=k\sin k\ .$$

Из формулы (15) получаем выражение для функции Грина:

$$G(x,\xi)=\begin{cases}\dfrac{\sin kx\sin k(\xi-1)}{k\sin k}, & 0\le x\le\xi;\\ \dfrac{\sin k\xi\sin k(x-1)}{k\sin k}, & \xi\le x\le 1.\end{cases}$$

Пример 5. Установить, существует ли функция Грина для данной краевой задачи, и если существует, то построить ее

$$\begin{cases} y'' - y = 0; & (19) \\ y(0) = y'(0); & (20) \\ y(1) + 6y'(1) = 0. & (21) \end{cases}$$

Решение. Найдем сначала общее решение уравнения (19) и убедимся, что краевые условия (20), (21) выполняются лишь тогда, когда $y(x) \equiv 0$. В самом деле, фундаментальная система решений уравнения (19) состоит из функций e^x и e^{-x}, а значит, общее решение уравнения (19) имеет вид

$$y(x) = Ae^x + Be^{-x}.$$

Ясно, что $y(x)$ будет удовлетворять (20) и (21), если

$$\begin{cases} A + B = A - B; \\ Ae + Be^{-1} + 6(Ae - Be^{-1}) = 0. \end{cases}$$

Отсюда $A = B = 0$ и, следовательно, функцию Грина для данной задачи построить можно.

Решение $y_1(x) = e^x$ удовлетворяет граничному условию (20), а решение $y_2(x) = \mathrm{sh}(x-1) - 6\mathrm{ch}(x-1)$ удовлетворяет (21). Определитель Вронского функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$ имеет вид

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^x & \mathrm{sh}(x-1) - 6\mathrm{ch}(x-1) \\ e^x & \mathrm{ch}(x-1) - 6\mathrm{sh}(x-1) \end{vmatrix} =$$

$$= 7e^x(\mathrm{ch}(x-1) - \mathrm{sh}(x-1)) = 7e^x e^{-(x-1)} = 7e.$$

Таким образом, функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – линейно независимые, а определитель Вронского для них является константой для всех значений $x \in [0, 1]$.

Согласно формуле (15) получим искомую симметричную функцию Грина:

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \dfrac{e^x(\mathrm{sh}(\xi - 1) - 6\mathrm{ch}(\xi - 1))}{7e}, & 0 \le x \le \xi; \\ \dfrac{e^\xi(\mathrm{sh}(x-1) - 6\mathrm{ch}(x-1))}{7e}, & \xi \le x \le 1. \end{cases}$$

§ 4. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

В следующих примерах установить, существует ли функция Грина для данной краевой задачи, и если существует, то построить ее.

1. $\begin{cases} y'' + y = 0; \\ y(0) = y(\pi) = 0. \end{cases}$

2. $\begin{cases} y'' = 0; \\ y(0) = y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0. \end{cases}$

3. $\begin{cases} y'' = 0; \\ y(0) = 0; \\ y'(1) = -hy(1). \end{cases}$

4. $\begin{cases} y'' = 0; \\ y(0) = y'(0); \\ y(1) + y'(1) = 0. \end{cases}$

5. $\begin{cases} y'' + \pi^2 y = 0; \\ y(0) = y(1); \\ y'(0) = y'(1). \end{cases}$

6. $\begin{cases} y'' + y = 0; \\ y(0) = y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0. \end{cases}$

7. $\begin{cases} y'' - k^2 y = 0, \quad k \neq 0; \\ y(0) = y(1) = 0. \end{cases}$

8. $\begin{cases} y'' - y = 0; \\ y'(0) = 0; \\ y'(1) = 0. \end{cases}$

9. $\begin{cases} y'' - y = 0; \\ y(0) = y'(0); \\ y(l) + y'(l) = 0. \end{cases}$

10. $\begin{cases} y'' - y = 0; \\ y'(0) = 0; \\ y'(2) + y(2) = 0. \end{cases}$

11. $\begin{cases} y'' - y = 0; \\ y(0) = y'(0); \\ y(2) + 7y'(2) = 0. \end{cases}$

12. $\begin{cases} xy'' - y' = 0; \\ y'(1) = y(2) = 0. \end{cases}$

13. $\begin{cases} xy'' + y' = 0; \\ y(1) = y(e) = 0. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x^2 y'' + 2xy' = 0; \\ y(1) = y'(3) = 0. \end{cases}$

15. $\begin{cases} xy'' + y' - \dfrac{1}{x} y = 0; \\ y(1) = y(2); \\ y'(1) = 2y'(2). \end{cases}$

16. $\begin{cases} x^2 y'' + xy' - y = 0; \\ |y(0)| < \infty; \\ y(1) = 0. \end{cases}$

17. $\begin{cases} xy'' + y' = 0; \\ |y(0)| < \infty; \\ y(l) = 0. \end{cases}$

18. $\begin{cases} x^2 y'' + 2xy' = 0; \\ |y(0)| < \infty; \\ y(1) = \alpha y'(1). \end{cases}$

19. $\begin{cases} xy'' + y' - \dfrac{n^2}{x} y = 0, \quad n \neq 0; \\ |y(0)| < \infty; \\ y(1) = 0. \end{cases}$

Ответы.

1. Функции Грина не существует.

2. $G(x,\xi) = \begin{cases} \left(\dfrac{2}{\pi}\xi - 1\right)x, & 0 \le x \le \xi; \\ \left(\dfrac{2}{\pi}x - 1\right)\xi, & \xi \le x \le \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$

3. $G(x,\xi) = \begin{cases} x\left(\dfrac{h}{1+h}\xi - 1\right), & 0 \le x \le \xi; \\ \xi\left(\dfrac{h}{1+h}x - 1\right), & \xi \le x \le 1. \end{cases}$

4. $G(x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{1}{3}(x+1)(\xi-2), & 0 \le x \le \xi; \\ \dfrac{1}{3}(\xi+1)(x-2), & \xi \le x \le 1. \end{cases}$

5. $G(x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\sin\pi(\xi - x), & 0 \le x \le \xi; \\ \dfrac{1}{2\pi}\sin\pi(x-\xi), & \xi \le x \le 1. \end{cases}$

6. $G(x,\xi)=\begin{cases}-\sin x\cos\xi, & 0\le x\le\xi;\\ -\sin\xi\cos x, & \xi\le x\le\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$

7. $G(x,\xi)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{sh}kx\,\operatorname{sh}k(\xi-1)}{k\,\operatorname{sh}k}, & 0\le x\le\xi;\\ \dfrac{\operatorname{sh}k\xi\,\operatorname{sh}k(x-1)}{k\,\operatorname{sh}k}, & \xi\le x\le 1.\end{cases}$

8. $G(x,\xi)=\begin{cases}-\dfrac{\operatorname{ch}x\,\operatorname{ch}(\xi-1)}{\operatorname{sh}1}, & 0\le x\le\xi;\\ -\dfrac{\operatorname{ch}\xi\,\operatorname{ch}(x-1)}{\operatorname{sh}1}, & \xi\le x\le 1.\end{cases}$

9. $G(x,\xi)=\begin{cases}-\dfrac{1}{2}e^{x-\xi}, & 0\le x\le\xi;\\ -\dfrac{1}{2}e^{\xi-x}, & \xi\le x\le l,\end{cases}$

или $G(x,\xi)=-\dfrac{1}{2}e^{-|x-\xi|}, \quad 0\le x,\xi\le l.$

10. $G(x,\xi)=\begin{cases}-\operatorname{ch}x\,e^{-\xi}, & 0\le x\le\xi;\\ -\operatorname{ch}\xi\,e^{-x}, & \xi\le x\le 2.\end{cases}$

11. $G(x,\xi)=\begin{cases}\dfrac{e^{x}(\operatorname{sh}(\xi-2)-7\operatorname{ch}(\xi-2))}{8e^{2}}, & 0\le x\le\xi;\\ \dfrac{e^{\xi}(\operatorname{sh}(x-2)-7\operatorname{ch}(x-2))}{8e^{2}}, & \xi\le x\le 2.\end{cases}$

12. $G(x,\xi)=\begin{cases}\dfrac{\xi^{2}-4}{2\xi^{2}}, & 1\le x\le\xi;\\ \dfrac{x^{2}-4}{2\xi^{2}}, & \xi\le x\le 2.\end{cases}$

13. $G(x,\xi)=\begin{cases}\ln x(\ln\xi-1), & 1\le x\le\xi;\\ \ln\xi(\ln x-1), & \xi\le x\le e.\end{cases}$

14. $G(x,\xi)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}-1, & 1\le x\le\xi;\\ \dfrac{1}{\xi}-1, & \xi\le x\le 3.\end{cases}$

15. $G(x,\xi)=\begin{cases}-\dfrac{x}{\xi}-\dfrac{\xi}{2x}, & 1\le x\le\xi;\\ -\dfrac{\xi}{x}-\dfrac{x}{2\xi}, & \xi\le x\le 2.\end{cases}$

16. $G(x,\xi)=\begin{cases}\dfrac{x\left(\xi-\dfrac{1}{\xi}\right)}{2\xi}, & 0< x\le\xi;\\ \dfrac{\xi\left(x-\dfrac{1}{x}\right)}{2\xi}, & \xi\le x\le 1.\end{cases}$

17. $G(x,\xi)=\begin{cases}\ln\dfrac{\xi}{l}, & 0\le x\le\xi;\\ \ln\dfrac{x}{l}, & \xi\le x\le l.\end{cases}$

18. $G(x,\xi)=\begin{cases}1+\alpha-\dfrac{1}{\xi}, & 0< x\le\xi;\\ 1+\alpha-\dfrac{1}{x}, & \xi\le x\le 1.\end{cases}$

19. $G(x,\xi)=\begin{cases}\dfrac{(x\xi)^n-\left(\dfrac{x}{\xi}\right)^n}{2n}, & 0< x\le\xi;\\ \dfrac{(x\xi)^n-\left(\dfrac{\xi}{x}\right)^n}{2n}, & \xi\le x\le 1.\end{cases}$

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Интегральные уравнения. М.: Наука, 1976.
2. Сансоне Д. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Т. 1. М.: Иностр. лит., 1954.
3. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Интегральные уравнения: Задачи и примеры с подробными решениями. М.: Едиториал УРСС, 2003.
4. Васильева А.Б., Тихонов Н.А. Интегральные уравнения. М.: Наука, 2004.

СОДЕРЖАНИЕ