ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

МОСКОВСКИЙ ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Е.Б. Сандаков, С.Г. Селиванова

Сборник домашних заданий по теории функций комплексного переменного

Москва 2009

УДК 517.53/55(076)
ББК 22.161.1я7
С18

Сандаков Е.Б., Селиванова С.Г. **Сборник домашних заданий по теории функций комплексного переменного.** Учебно-методическое пособие. – М.: МИФИ, 2009. – 40 с.

В сборнике собраны задания по 18 темам, предлагаемым студентам второго курса всех факультетов в качестве домашнего задания по теории функций комплексного переменного. Каждый параграф содержит 25 вариантов примерно одинаковых по сложности.

Предназначено для преподавателей второго курса всех факультетов.

Рецензент д-р физ.-мат. наук, проф. Н.В. Мирошин

Рекомендовано к изданию редсоветом МИФИ

ISBN 978-5-7262-1133-6

Редактор М.В. Макарова

Подписано в печать 10.06.2009. Формат 60x84 1/16.
Печ.л. 2,5. Уч.-изд.л. 2,5. Тираж 350 экз.
Изд. № 059-1. Заказ №

*Московский инженерно-физический институт
(государственный университет).
Типография МИФИ.
115409, Москва, Каширское ш., 31*

СОДЕРЖАНИЕ

§ 1. Комплексные числа и действия над ними

Найти $|Z|$, $\mathrm{Re}(Z)$ и $\mathrm{Im}(Z)$, где:

1) $Z=\left(\frac{1-i}{3+i\sqrt{3}}\right)^{101}$; $Z=\sqrt[4]{i(3+i\sqrt{3})}$; $Z=\cos(\sqrt{3}+i)$;

$Z=\ln\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2+2i}\right)$; $Z=(5+5i)^{1+i}$;

2) $Z=\left(\frac{\sqrt{3}+3i}{1+i}\right)^{99}$; $Z=\sqrt[4]{i(\sqrt{3}-i)}$; $Z=\sin(5+i)$;

$Z=\ln\left(\frac{\sqrt{3}-3i}{-1-i}\right)$; $Z=(1+i)^{6+5i}$;

3) $Z=\left(\frac{-3+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{98}$; $Z=\sqrt[4]{16i}$; $Z=\mathrm{ch}(1-i)$; $Z=\ln\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2i}\right)$;

$Z=(1-i\sqrt{3})^{1+i}$;

4) $Z=\left(\frac{1+i}{3-i\sqrt{3}}\right)^{97}$; $Z=\sqrt[4]{16i(i-\sqrt{3})}$; $Z=\mathrm{sh}(2-i)$;

$Z=\ln\left(\frac{2i}{1+i\sqrt{3}}\right)$; $Z=(\sqrt{3}+i\sqrt{3})^{1-i}$;

5) $Z=\left(\frac{5+5i}{\sqrt{3}-3i}\right)^{95}$; $Z=\sqrt[3]{-1-i}$; $Z=\cos(1+i\sqrt{3})$;

$Z=\ln\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{1-i}\right)$; $Z=(-\sqrt{3}+i)^{2+i}$;

6) $Z=\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{3-i\sqrt{3}}\right)^{97}$; $Z=\sqrt[3]{-1+i}$; $Z=\sin(\sqrt{3}-i)$;

$Z=\ln\left(\dfrac{1+i}{3+i\sqrt{3}}\right)$; $Z=(3+i\sqrt{3})^{1-i}$;

7) $Z=\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{1-i}\right)^{103}$; $Z=\sqrt[3]{1+i}$; $Z=\operatorname{ch}(\sqrt{3}+i)$; $Z=\ln\left(\dfrac{\sqrt{3}-i}{-2+2i}\right)$;

$Z=\sqrt[i]{i}$;

8) $Z=\left(\dfrac{-1-i}{1-i\sqrt{3}}\right)^{99}$; $Z=\sqrt[3]{1-i}$; $Z=\operatorname{sh}(1-i\sqrt{3})$; $Z=\ln\left(\dfrac{\sqrt{3}+3i}{1+i}\right)$;

$Z=(1+i)^{i}$;

9) $Z=\left(\dfrac{2+2i}{3+i\sqrt{3}}\right)^{97}$; $Z=\sqrt[3]{i(1-i)}$; $Z=\cos(1+i)$; $Z=\ln\left(\dfrac{\sqrt{3}-i}{2+2i}\right)$;

$Z=(1-i)^{1+i}$;

10) $Z=\left(\dfrac{\sqrt{3}-3i}{1+i}\right)^{101}$; $Z=\sqrt[3]{-i(1+i)}$; $Z=\sin(3+2i)$;

$Z=\ln\left(\dfrac{-3+i\sqrt{3}}{1-i}\right)$; $Z=(\sqrt{3}+i)^{i}$;

11) $Z=\left(\dfrac{1-i}{i\sqrt{2}}\right)^{95}$; $Z=\sqrt[4]{-i(\sqrt{3}-i)}$; $Z=\operatorname{ch}(2-3i)$;

$Z=\ln\left(\dfrac{3-i\sqrt{3}}{1+i}\right)$; $Z=(\sqrt{3}-i)^{1+i}$;

12) $Z=\left(\dfrac{1-i}{1+i\sqrt{3}}\right)^{99}$; $Z=\sqrt[4]{i^{3}(i+\sqrt{3})}$; $Z=\operatorname{sh}(2+3i)$;

$Z=\ln\left(\dfrac{1-i}{1-i\sqrt{3}}\right)$; $Z=(-3-i\sqrt{3})^{-1+i}$;

13) $Z=\left(\dfrac{1+i}{1-i\sqrt{3}}\right)^{101}$; $Z=\sqrt[3]{\dfrac{1-i}{1+i}}$; $Z=\cos(3-i)$;

$Z=\ln\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}\right)$; $Z=(-\sqrt{3}+i)^{1+2i}$;

14) $Z=\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^{93}$; $Z=\sqrt[3]{8+8i}$; $Z=\sin(5+2i)$; $Z=\ln\left(\dfrac{\sqrt{3}-3i}{-2i}\right)$;

$Z=(1-i\sqrt{3})^{1-i}$;

15) $Z=\left(\dfrac{-3-i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{96}$; $Z=\sqrt[3]{8-8i}$; $Z=\mathrm{tg}(2+i)$; $Z=\ln\left(\dfrac{1+i}{1-i\sqrt{3}}\right)$;

$Z=(1+i\sqrt{3})^{1-2i}$;

16) $Z=\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}+i}\right)^{91}$; $Z=\sqrt[4]{i}$; $Z=\mathrm{ctg}(1+3i)$; $Z=\ln\left(\dfrac{2+2i}{-\sqrt{3}+i}\right)$;

$Z=(-1-i)^{1+i\sqrt{3}}$;

17) $Z=\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{1+i}\right)^{90}$; $Z=\sqrt[6]{i}$; $Z=\sin(-1+i\sqrt{3})$; $Z=\ln\left(\dfrac{2i}{-1+i\sqrt{3}}\right)$;

$Z=(1-i\sqrt{3})^{1-2i}$;

18) $Z=\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2i}\right)^{101}$; $Z=\sqrt[8]{-1}$; $Z=\cos(1-i\sqrt{3})$; $Z=\ln\left(\dfrac{1-i\sqrt{3}}{1+i}\right)$;

$Z=(\sqrt{3}-i)^{1+i\sqrt{3}}$;

19) $Z=\left(\dfrac{-1+i}{\sqrt{3}-i}\right)^{92}$; $Z=\sqrt[6]{-i}$; $Z=\sin(\sqrt{3}+2i)$; $Z=\ln\left(\dfrac{-\sqrt{3}+i}{1-i\sqrt{3}}\right)$;

$Z=(\sqrt{3}+i)^{1+2i}$;

20) $Z=\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{-\sqrt{3}+i}\right)^{99}$; $Z=\sqrt[4]{1+i\sqrt{3}}$; $Z=\mathrm{ch}(2+3i)$; $Z=\ln\left(\dfrac{1+i}{2i}\right)$;

$Z=(-1+i)^{1+i\sqrt{3}}$;

21) $Z=\left(\dfrac{-1+i}{\sqrt{3}-i}\right)^{101}$; $Z=\sqrt[3]{-1+i}$; $Z=\operatorname{ch}(-1+i)$; $Z=\ln\left(\dfrac{\sqrt{3}-i}{1+i}\right)$;

$Z=(-\sqrt{3}-i)^{2i-1}$;

22) $Z=\left(\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{91}$; $Z=\sqrt[4]{-1+i\sqrt{3}}$; $Z=\operatorname{sh}(2+5i)$;

$Z=\ln\left(\dfrac{-\sqrt{3}+i}{1-i\sqrt{3}}\right)$; $Z=(\sqrt{3}+i)^{2-3i}$;

23) $Z=\left(\dfrac{-1-i}{\sqrt{3}+i}\right)^{93}$; $Z=\sqrt[4]{-1-i\sqrt{3}}$; $Z=\operatorname{th}(1+i)$; $Z=\ln\left(\dfrac{-2}{1+i\sqrt{3}}\right)$;

$Z=(1+i)^{1-i}$;

24) $Z=\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{-1+i}\right)^{100}$; $Z=\sqrt[4]{1-i\sqrt{3}}$; $Z=\operatorname{cth}(3+2i)$;

$Z=\ln\left(\dfrac{-2i}{\sqrt{3}-i}\right)$; $Z=\sqrt[1+i]{1+i\sqrt{3}}$;

25) $Z=\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{3}-i}\right)^{91}$; $Z=\sqrt[3]{-1-i}$; $Z=\sin(3i-2)$; $Z=\ln\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)$;

$Z=\sqrt[i-1]{-\sqrt{3}+i}$.

§ 2. Области на комплексной плоскости

На комплексной плоскости изобразить области, удовлетворяющие условиям:

1) $|z-1|<1$; $|z+2|>3$;
2) $|z-i|>1$; $|z|<2$;
3) $|z+i|<1$; $|z-1|<1$;
4) $|z+1|>1$; $|z-i|<1$;
5) $|z+i|<2$; $\operatorname{Re} z>1$;
6) $|z-1-i|>1$; $\operatorname{Im} z>0$; $\operatorname{Re} z>0$;
7) $|z-i|<3$; $|\operatorname{Im} z|>1$;
8) $|z-i|<|z+i|$;
9) $\left|\dfrac{z+i}{z-i}\right|<1$;
10) $|z|<2$; $\dfrac{\pi}{6}<\arg z<\dfrac{2\pi}{3}$;
11) $\operatorname{Re} z>|z|-1$;
12) $\dfrac{\pi}{6}<\arg(z-1-i)<\dfrac{2\pi}{3}$;
13) $\operatorname{Im} z>|z|-2$;
14) $|z+1-i|<|z-1|$;
15) $|iz-1+2i|<1$;
16) $|z-i|+|z+i|<5$;
17) $|z|<1$; $|z-i|<1$;
18) $|z|>1$; $|z-i|<1$;
19) $|z|>2$; $|z-\sqrt{2}|<\sqrt{2}$;
20) $|z|>2$; $0<\arg z<\dfrac{\pi}{4}$;
21) $2\operatorname{Re} z>|z|-1$;
22) $|z-1-i|<1$; $|z+i|>2$;
23) $|z+1+i|<1$; $|z+i|<2$;
24) $|z+1-i|>|z-1+i|$;
25) $|iz+1-i|>2$; $|z+1+i|<2$.

§ 3. Кривые на комплексной плоскости

Определить линии, заданные указанными уравнениями и изобразить их на комплексной плоскости:

1) $Z = \mathrm{tg}\, t + \dfrac{i}{\cos t}$;

2) $Z = 2\cos t + 3i \sin t$;

3) $Z = \cos 2t - i \sin^2 t$;

4) $Z = 3\mathrm{ch}\, t - i\, \mathrm{sh}\, t$;

5) $Z = \sin t + 4i \cos^2 t$;

6) $Z = 2\mathrm{ctg}\, t + \dfrac{4i}{\sin t}$;

7) $Z = e^{it} + \dfrac{1}{2e^{it}}$;

8) $Z = 2\mathrm{th}\, t - \dfrac{3i}{\mathrm{ch}\, t}$;

9) $Z = \sin t - i \cos 2t$;

10) $Z = 3\mathrm{sh}\, t + \dfrac{2i}{\mathrm{cth}\, t}$;

11) $Z = 4\mathrm{sh}\, t + i\, \mathrm{ch}\, 2t$;

12) $Z = 3\cos t + \dfrac{2i}{\mathrm{tg}\, t}$;

13) $Z = 2\mathrm{ch}\, t - \dfrac{i}{2\,\mathrm{th}\, t}$;

14) $Z = \cos^2 t - i \cos 2t$;

15) $Z = 2\cos 2t + i \sin t$;

16) $Z = \mathrm{ch}\, 2t + 2i\, \mathrm{sh}\, t$;

17) $Z = -\sin^2 t + 2i \cos t$;

18) $Z = 3\cos t + 4i \sin^2 t$;

19) $Z = (1 + \cos t) + i\dfrac{\cos 2t}{2}$;

20) $Z = 2\cos 2t + i(1 - \cos t)$;

21) $Z = 1 - \sin t + 3i \cos 2t$;

22) $Z = (1 + \mathrm{sh}\, t) + i\, \mathrm{ch}\, 2t$;

23) $Z = (2 + \mathrm{ch}\, 2t) - i(1 + \mathrm{ch}\, t)$;

24) $Z = 2e^{it} + \dfrac{3}{e^{it}}$;

25) $Z = (\mathrm{tg}\, t - 2) + \dfrac{2i}{\cos t}$.

§ 4. Восстановление аналитической функции по ее действительной или мнимой части

Найти аналитическую функцию $f(z) = u(x, y) + i\text{v}(x, y)$, если задана ее действительная часть $u(x, y)$ или мнимая часть $\text{v}(x, y)$:

1) $u(x, y) = x^3 - 3xy^2 + 2y$;

2) $u(x, y) = e^{2x}(x\cos 2y - y\sin 2y)$;

3) $\text{v}(x, y) = e^{2x}(y\cos 2y + x\sin 2y)$;

4) $u(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$;

5) $\text{v}(x, y) = \dfrac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$;

6) $u(x, y) = \dfrac{e^x(x\cos y + y\sin y)}{x^2 + y^2}$;

7) $\text{v}(x, y) = \dfrac{e^x(x\sin y - y\cos y)}{x^2 + y^2}$;

8) $u(x, y) = x\cos x \operatorname{ch} y + y\sin x \operatorname{sh} y$;

9) $\text{v}(x, y) = y\cos x \operatorname{ch} y - x\sin x \operatorname{sh} y$;

10) $u(x, y) = \dfrac{x\cos x \operatorname{ch} y - y\sin x \operatorname{sh} y}{x^2 + y^2}$;

11) $\text{v}(x, y) = e^x(\sin x \sin y \operatorname{ch} y + \cos x \cos y \operatorname{sh} y)$;

12) $\text{v}(x, y) = \dfrac{y\cos x \operatorname{ch} y + x\sin x \operatorname{sh} y}{x^2 + y^2}$;

13) $u(x, y) = e^x(\cos y \sin x \operatorname{ch} y - \sin y \cos x \operatorname{sh} y)$;

14) $u(x, y) = e^x(\cos x \cos y \operatorname{ch} y + \sin x \sin y \operatorname{sh} y)$;

15) $\mathrm{v}(x, y) = \dfrac{e^x[(x+1)\sin y - y\cos y]}{(x+1)^2 + y^2}$;

16) $\mathrm{v}(x, y) = e^x(\cos x \sin y \operatorname{ch} y - \sin x \cos y \operatorname{sh} y)$;

17) $u(x, y) = \dfrac{e^x[(x+1)\cos y + y\sin y]}{(x+1)^2 + y^2}$;

18) $u(x, y) = e^x[(x+1)\cos y - y\sin y]$;

19) $\mathrm{v}(x, y) = e^x[(y+1)\cos y + x\sin y]$;

20) $u(x, y) = x\cos(x+1)\operatorname{ch} y + y\sin(x+1)\operatorname{sh} y$;

21) $\mathrm{v}(x, y) = y\sin x \operatorname{ch}(y+1) + x\cos x \operatorname{sh}(y+1)$;

22) $u(x, y) = e^x[x\cos y - (y+1)\sin y]$;

23) $\mathrm{v}(x, y) = e^x[(x+1)\sin y + y\cos y]$;

24) $u(x, y) = x\sin x \operatorname{ch}(y+1) - y\cos x \operatorname{sh}(y+1)$;

25) $\mathrm{v}(x, y) = y\cos(x+1)\operatorname{ch} y - x\sin(x+1)\operatorname{sh} y$.

§ 5. Интеграл от функции комплексной переменной

Вычислить интеграл от функции комплексного переменного по заданной кривой:

1) $\int_C z\,\mathrm{Re}\,z dz$, где C – отрезок прямой от точки $z_1 = -1 + 2i$ до точки $z_2 = 2 + i$;

2) $\int_C z\,\mathrm{Im}\,z^2 dz$, где C: $|z| = 2$, $0 \le \arg z \le \pi$ и обход по кривой C совершается по часовой стрелке;

3) $\int_C \frac{dz}{(z - z_0)^2}$, где C: $|z - z_0| = r$; $-\pi \le \arg z \le 0$ и контур C обходится против часовой стрелки;

4) $\int_C z\,\mathrm{Re}\,z^2 dz$, где C: $|z| = 2$, $\pi \le \arg z \le 2\pi$ и контур C обходится против часовой стрелки;

5) $\int_C |\overline{z}| z^2 dz$, где C: $|z| = 3$, $\mathrm{Re}\,z \ge 0$ и контур C обходится по часовой стрелке;

6) $\int_C z\,\mathrm{Re}\,z^3 dz$, где C: $|z| = 2$, $\mathrm{Im}\,z \le 0$ и контур C обходится против часовой стрелки;

7) $\int_c \overline{z} z^3 dz$, где C: $|z| = 2$, $\mathrm{Re}\,z \ge 0$ и контур C обходится против часовой стрелки;

8) $\int_C (z+1)|z| dz$, где C – ломаная ABC, $z_A = 0$, $z_B = -1 + i$, $z_C = 1 + 2i$;

9) $\int_C z^2 e^{z^3} dz$, где C – ломаная ABC, $z_A = 1 + 2i$, $z_B = 0$, $z_C = -2 - i$;

10) $\int_C \frac{z^2}{\overline{z}} dz$, где C – граница области $\{1 < |z| < 2,\ \mathrm{Re}\,z > 0\}$ и C обходится в положительном направлении;

11) $\int_C \cos z dz$, где C – ломаная ABC, $z_A = 0$, $z_B = 1$, $z_C = 2i$;

12) $\int_C \frac{\overline{z}}{z}\,dz$, где C – граница области $\{1<|z|<2,\ \operatorname{Im} z>0\}$ и контур C обходится в положительном направлении;

13) $\int_C z^2\overline{z}dz$, где C – граница области $\{|z|<2,\ \operatorname{Re} z<0\}$ и контур C обходится в положительном направлении;

14) $\int_C e^z \operatorname{Re} z dz$, где C – отрезок прямой AB, $z_A=1-i$, $z_B=-2+i$;

15) $\int_C \operatorname{Re}\left(\frac{\overline{z}}{z}\right)dz$, где C – граница области $\{1<|z|<2,\ \operatorname{Re} z>0,$ $\operatorname{Im} z>0\}$ и контур C обходится в положительном направлении;

16) $\int_C z \operatorname{Re} z^2 dz$, где C – граница области $\{|z|<2,\ \operatorname{Im} z<0\}$ и контур C обходится в положительном направлении;

17) $\int_C \operatorname{ch} 2z dz$, где C – ломаная ABC: $z_A=1+i$, $z_B=-1+2i$, $z_C=2+3i$;

18) $\int_C \sin 2z dz$, где C – ломаная ABC: $z_A=1$, $z_B=2+i$, $z_C=3-i$;

19) $\int_C \cos(iz)dz$, где C – ломаная ABC: $z_A=1-i$, $z_B=2+i$, $z_C=0$;

20) $\int_C \frac{\overline{z}}{z}\,dz$, где C – граница области $\left\{1<|z|<2,\ \frac{\pi}{4}<\arg z<\frac{3\pi}{4}\right\}$ и контур C обходится в положительном направлении;

21) $\int_C z^2 \operatorname{Re} z^2 dz$, где C – ломаная ABC: $z_A=1-i$, $z_B=-1$, $z_C=2+i$;

22) $\int_C \sin(iz)dz$, где C – ломаная ABC: $z_A=1+i$, $z_B=2-i$, $z_C=-1+i$;

23) $\int_C z^2 \operatorname{Im} z^2 dz$, где C – ломаная ABC: $z_A=i$, $z_B=2-i$, $z_C=1+2i$;

24) $\int_C z \operatorname{Im} z^3 dz$, где C – ломаная ABC: $z_A=-1+i$, $z_B=-i$, $z_C=1+2i$;

25) $\int_C \cos 2z dz$, где C – ломаная ABC: $z_A=-1$, $z_B=1+2i$, $z_C=2-i$.

§ 6. Конформные отображения

1. Во что преобразуется кольцо $2 < |z| < 4$ при отображении $W = \dfrac{z-1}{z+2}$?

2. Найти конформное отображение области $\{|z-i| < 2,\ \operatorname{Im} z < 1\}$ на верхнюю полуплоскость.

3. Во что преобразуется область $D = \{z:\ \operatorname{Im} z > 0,\ \operatorname{Re} z < 0\}$ при отображении $W = \dfrac{z-i}{z+i}$?

4. Отобразить множество Im z > 0 с выброшенным полукругом $|z| \le 1$ конформно на полуплоскость Im $W > 0$.

5. Найти образ полукруга $|z| < 1$, $\operatorname{Im} z > 0$ при отображении $W = \dfrac{2z-i}{2+iz}$.

6. Отобразить конформно на верхнюю полуплоскость область $\{|z| < 1 \cap |z-i| > 1\}$.

7. В какую область функция $W = \dfrac{2}{z-1}$ отображает область $\{1 < |z| < 2\}$?

8. Отобразить конформно на верхнюю полуплоскость область $\{|z-2| < 2 \cap \operatorname{Im} z > 0\}$.

9. Отобразить конформно на верхнюю полуплоскость полосу $0 < \operatorname{Im} z < 2$.

10. Найти конформное отображение области $\{|z| < 1 \cap |z-i| < 1\}$ на правую полуплоскость $\operatorname{Re} W > 0$.

11. Отобразить конформно полосу, заключенную между прямыми $y = -x$ и $y = -x + b$ на верхнюю полуплоскость.

12. Найти конформное отображение области

$$\{|z-1|<2 \cap |z+1|<2\}$$

на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} W > 0$.

13. В какую область функция $W = \dfrac{z+1}{z-1}$ отображает область

$$\{|z-1|<2 \cap |z+1|<2\}\ ?$$

14. Найти конформное отображение области

$$\{|z|<1 \cap |z-1-i|>1\}$$

на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} W > 0$.

15. В какую область функция $W = \dfrac{1-z}{1+z}$ отображает область $\{|z|>1,\ \operatorname{Im} z > 0\}$?

16. Найти конформное отображение области

$$D = \left\{|z|<1 \cap 0 < \arg z < \frac{3\pi}{4}\right\}$$

на верхнюю полуплоскость.

17. В какую область функция $W = \dfrac{z+2+i}{z+1-i}$ отображает область $\operatorname{Re} z > 2$?

18. Найти конформное отображение области

$$D = \{|z|<1 \cap |z-1-i|<1\}$$

на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} W > 0$.

19. Найти конформное отображение первого квадранта с разрезом по отрезку $[0; 1+i]$ на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} W > 0$.

20. Найти конформное отображение круга $|z|<1$ с разрезом по действительному положительному радиусу на верхнюю полуплоскость.

21. Найти конформное отображение верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ с разрезом по части окружности $|z|=1$, лежащей в первом квадранте на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} W > 0$.

22. В какую область функция $W = \dfrac{z-1}{z-2}$ отображает область $1 < \operatorname{Re} z < 2$?

23. Найти конформное отображение полосы $-\pi < \operatorname{Re} z < \pi$ с разрезом по положительной части мнимой оси на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} W > 0$.

24. В какую область функция $W = \dfrac{2z-i}{2+iz}$ отображает область $\operatorname{Re} z > 0$, $\operatorname{Im} z > 0$?

25. Найти конформное отображение полосы $-\dfrac{\pi}{2} < \operatorname{Im} z < \dfrac{\pi}{2}$ с разрезом по отрицательной части вещественной оси на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} W > 0$.

§ 7. Разложение в ряд Тейлора

Заданную функцию $f(z)$ разложить в ряд Тейлора в точке z_0:

1) $f(z) = \dfrac{1}{(1+z)(1+z^2)^2}$ в точке $z_0 = 0$;

2) $f(z) = \dfrac{z}{(z^2+1)(z^2+4)}$ в точке $z_0 = 0$;

3) $f(z) = \dfrac{z}{(z+1)(z^2+4z+5)}$ в точке $z_0 = -2$;

4) $f(z) = \dfrac{z+5}{(z+1)(z^2-2z+5)}$ в точке $z_0 = 1$;

5) $f(z) = \dfrac{2-z}{z^3+2z^2+5z}$ в точке $z_0 = -1$;

6) $f(z) = \ln\dfrac{1+z}{1-z}$ в точке $z_0 = 0$;

7) $f(z) = \dfrac{z}{(z+1)(2-z)}$ в точке $z_0 = 1$;

8) $f(z) = \dfrac{z}{\sqrt{1-z^2}}$ в точке $z_0 = 0$;

9) $f(z) = \dfrac{z^2+1}{z^2-4z+5}$ в точке $z_0 = 2$;

10) $f(z) = \dfrac{z}{(1-z^2)^2}$ в точке $z_0 = 0$;

11) $f(z) = \dfrac{z}{(1-z^6)^2}$ в точке $z_0 = 0$;

12) $f(z) = \dfrac{z}{(1+z)^3}$ в точке $z_0 = 0$;

13) $f(z) = \arcsin z$ в точке $z_0 = 0$;

14) $f(z) = \dfrac{z+3}{(z+2)(z^2-2z+5)}$ в точке $z_0 = 1$;

15) $f(z) = \dfrac{2z}{\sqrt{4-z^2}}$ в точке $z_0 = 0$;

16) $f(z) = \ln\left(\dfrac{2+z}{z}\right)$ в точке $z_0 = 1$;

17) $f(z) = \operatorname{arctg}\left(1+\dfrac{1}{z}\right)$ в точке $z_0 = -\dfrac{1}{2}$;

18) $f(z) = \dfrac{z}{\sqrt{z^2+2z+5}}$ в точке $z_0 = -1$;

19) $f(z) = \dfrac{2z+1}{(z^2+2z+2)(z^2+2z+5)}$ в точке $z_0 = -1$;

20) $f(z) = \dfrac{z^2}{(1+z^2)^2}$ в точке $z_0 = 0$;

21) $f(z) = \dfrac{z^2+5}{z^2+7z+12}$ в точке $z_0 = 1$;

22) $f(z) = \dfrac{z}{(z^2-4z+3)^2}$ в точке $z_0 = -1$;

23) $f(z) = \dfrac{z+2}{z^4+2z^2-3}$ в точке $z_0 = 0$;

24) $f(z) = \dfrac{z^2+z+1}{(z^2-5z+6)^2}$ в точке $z_0 = 1$;

25) $f(z) = \dfrac{z+1}{\sqrt{8-z^3}}$ в точке $z_0 = 0$.

§ 8. Разложение в ряд Лорана

Заданную функцию $f(z)$ разложить в ряд Лорана в кольце $a<\left|z-z_0\right|<b$ и в окрестности точки $z=\infty$:

1) $f(z) = \dfrac{2z+1}{(z+3)(z^2+4z+3)}$ в кольце $2<\left|z-1\right|<4$ и в окрестности точки $z=\infty$;

2) $f(z) = \dfrac{1}{z^2(z-3)}$ в кольце $0<\left|z\right|<3$ и в окрестности $z=\infty$;

3) $f(z) = \dfrac{2z}{z^2-1}$ в кольце $0<\left|z+1\right|<2$ и в окрестности $z=\infty$;

4) $f(z) = \dfrac{1}{z^3(z+2)}$ в кольце $0<\left|z\right|<2$ и в окрестности $z=\infty$;

5) $f(z) = \dfrac{3z}{(z+1)(z-3)}$ в кольце $0<\left|z+1\right|<4$ и в окрестности $z=\infty$;

6) $f(z) = \dfrac{z+1}{z^2(z-1)}$ в кольце $0<\left|z\right|<1$ и в окрестности точки $z=\infty$;

7) $f(z) = \dfrac{3z+2}{z^3(z+2)}$ в кольце $0<\left|z\right|<2$ и в окрестности $z=\infty$;

8) $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)^2(z+2)^2}$ в кольце $0<\left|z+2\right|<3$ и в окрестности $z=\infty$;

9) $f(z) = \dfrac{4z}{(z-1)^2(z+2)}$ в кольце $0<\left|z-1\right|<3$ и в окрестности точки $z=\infty$;

10) $f(z) = \dfrac{2z}{(z-1)(z+2)}$ в кольце $1<|z|<2$ и в окрестности $z=\infty$;

11) $f(z) = \dfrac{z^2+1}{(z+1)^2(z-2)}$ в кольце $0<|z+1|<3$ и в окрестности точки $z=\infty$;

12) $f(z) = \dfrac{z^2+z}{(z+2)^2(z-1)}$ в кольце $0<|z+2|<3$ и в окрестности точки $z=\infty$;

13) $f(z) = \dfrac{1}{(z-2)^2 z}$ в кольце $0<|z-2|<2$ и в окрестности точки $z=\infty$;

14) $f(z) = \dfrac{z+1}{(z^2+4)z^2}$ в кольце $0<|z|<2$ и в окрестности точки $z=\infty$;

15) $f(z) = \dfrac{2z}{(z-1)(z^2+9)}$ в кольце $1<|z|<3$ и в окрестности точки $z=\infty$;

16) $f(z) = \dfrac{z+2}{(z^2-1)(z^2+4)}$ в кольце $1<|z|<2$ и в окрестности точки $z=\infty$;

17) $f(z) = \dfrac{z}{(z+2)(z^2+2z+5)}$ в кольце $1<|z+1|<2$ и в окрестности точки $z=\infty$;

18) $f(z) = \dfrac{z+1}{(z^2-2z)(z^2-2z+5)}$ в кольце $1<|z-1|<2$ и в окрестности точки $z=\infty$;

19) $f(z) = \dfrac{z}{(z^2-4)(z^2+9)}$ в кольце $2<|z|<3$ и в окрестности точки $z=\infty$;

20) $f(z) = \dfrac{z^2 - 1}{(z^2 + 4z + 5)(z^2 + 4z + 8)}$ в кольце $1 < |z + 2| < 2$ и в окрестности точки $z = \infty$;

21) $f(z) = \dfrac{z}{(z^2 - 2z + 2)(z^2 - 2z + 10)}$ в кольце $1 < |z - 1| < 3$ и в окрестности точки $z = \infty$;

22) $f(z) = \dfrac{z}{(z + 2)(z^2 + 2z + 5)}$ в кольце $1 < |z + 1| < 2$ и в окрестности точки $z = \infty$;

23) $f(z) = \dfrac{z^2 - 4z}{(z - 3)(z^2 - 4z + 13)}$ в кольце $1 < |z - 2| < 3$ и в окрестности точки $z = \infty$;

24) $f(z) = \dfrac{z + 1}{(z^2 - 2z)(z + 2)}$ в кольце $1 < |z - 1| < 3$ и в окрестности точки $z = \infty$;

25) $f(z) = \dfrac{z^2 + z}{(z^2 + 4z + 3)(z + 4)}$ в кольце $1 < |z + 2| < 2$ и в окрестности точки $z = \infty$.

§ 9. Классификация особых точек аналитических функций

Найти все особые точки аналитической функции, выяснить их характер и исследовать поведение функции на бесконечности:

1) $f(z)=\dfrac{\sin 2z}{e^{iz}-1}+\cos\dfrac{1}{z}+z$;

2) $f(z)=\dfrac{z}{\sin z}+\sin\dfrac{1}{z}$;

3) $f(z)=\dfrac{z-1}{e^{i\pi z}+1}+\dfrac{1}{z^5(z+4)}$;

4) $f(z)=\dfrac{1}{\sin(z+2)}+z^2\sin\dfrac{1}{z}$;

5) $f(z)=\dfrac{1}{\cos z-1}+\dfrac{e^{\frac{1}{z}}}{z^2+1}$;

6) $f(z)=\dfrac{e^{iz}+1}{\sin 2z}+\dfrac{e^z}{z^2+4}$;

7) $f(z)=\dfrac{1}{(z^2+1)^2}+\sin\dfrac{1}{z}+6z^5$;

8) $f(z)=\dfrac{z}{\sin z}+\dfrac{e^{\frac{1}{z-1}}}{(z^2+1)^2}$;

9) $f(z)=\dfrac{\sin z}{e^{iz}+1}+\dfrac{e^z}{(z^2-4)^2}$;

10) $f(z)=\dfrac{\cos z-1}{\sin z}+e^{\frac{1}{z}}$;

11) $f(z)=\dfrac{1}{e^z+e}+z^2\sin\dfrac{1}{z}$;

12) $f(z)=z\sin\dfrac{1}{z}+\dfrac{e^{iz}+1}{\sin z}$;

13) $f(z)=\dfrac{1}{1+\cos z}+\dfrac{\sin\frac{1}{z}}{(z-1)^2}$;

14) $f(z)=\dfrac{z}{\sin z-2}+e^{\frac{1}{z+1}}$;

15) $f(z)=\dfrac{1}{z-1+e^{-z}}+\cos\left(\dfrac{1}{z-1}\right)$;

16) $f(z)=\dfrac{1-\cos z}{e^{iz}-1}+z^2\sin\left(\dfrac{1}{z+1}\right)$;

17) $f(z)=4z^8-3z^2-\sin\dfrac{1}{z-1}+\dfrac{1}{z^8}$;

18) $f(z)=\dfrac{1}{\cos\frac{1}{z}+1}-3z^5$;

19) $f(z)=3z^5+\cos\dfrac{1}{(z-1)^3}-e^{\frac{1}{z^2}}$;

20) $f(z)=\dfrac{\cos z+1}{\sin z}+(z-1)\cos\left(\dfrac{1}{z-1}\right)$;

21) $f(z)=\sin z+\dfrac{1}{e^z+2}$;

22) $f(z)=\dfrac{e^{4iz}-1}{\sin z}+\dfrac{\sin z}{\cos z-1}$;

23) $f(z)=\dfrac{z^2+1}{\sin(iz)}+\sin\dfrac{1}{(z-\pi)}$;

24) $f(z)=\dfrac{e^z}{(z^2+1)^3}+\dfrac{z}{1-\cos z}$;

25) $f(z)=z^2\sin\dfrac{1}{z}+\dfrac{e^{z-1}-1}{(z^2-1)^2}$.

§ 10. Вычисление вычетов

Найти вычеты относительно всех изолированных особых точек (включая $z=\infty$) функции:

1) $f(z)=\sin\left(\dfrac{z}{z+1}\right)$;

2) $f(z)=\dfrac{\sin z^2}{z(z^3+1)}e^{\frac{1}{z}}$;

3) $f(z)=\dfrac{\sin 2z}{z(1-\cos z)}$;

4) $f(z)=\dfrac{\sin \pi z}{z^4-1}e^{\frac{1}{z}}$;

5) $f(z)=\dfrac{z^2}{(z^2-4)\cos\left(\dfrac{1}{z-2}\right)}$;

6) $f(z)=\dfrac{\sin z}{e^{iz}+1}+e^{\frac{1}{z}}$;

7) $f(z)=2z^4\sin\dfrac{1}{z}+\dfrac{e^{iz}+1}{\sin z}$;

8) $f(z)=z^3\sin\dfrac{\pi z}{z-1}$;

9) $f(z)=\dfrac{1}{\cos z-1}+\dfrac{e^z}{z^2+1}$;

10) $f(z)=\dfrac{\sin 2z}{e^{iz}-1}+z^3\cos\dfrac{1}{z}$;

11) $f(z)=\dfrac{1}{\cos z+1}+\dfrac{1}{z-1}$;

12) $f(z)=\dfrac{\cos z+1}{\sin z}+(z-2)\cos\dfrac{1}{z-2}$;

13) $f(z)=\dfrac{e^{iz}-1}{\sin z}+z^2\sin\dfrac{1}{z}$;

14) $f(z)=\dfrac{\sin 2z}{z^2+1}+(z-1)^3\cos\dfrac{1}{z-1}$;

15) $f(z)=\dfrac{\sin 2z}{e^{iz}-1}+z^2e^{\frac{1}{z}}$;

16) $f(z)=\dfrac{z}{\sin z}+e^{\frac{1}{z-1}}$;

17) $f(z)=\dfrac{1}{\sin z-2}+\dfrac{e^z}{z^2+1}$;

18) $f(z)=\dfrac{1}{e^z-1}-\dfrac{1}{z}$;

19) $f(z)=\dfrac{\cos z-1}{\sin z}+e^{\frac{1}{z}}$;

20) $f(z)=\dfrac{\sin\frac{1}{z}}{z^2+1}+\dfrac{z}{\cos z-1}$;

21) $f(z)=\dfrac{z^2}{\sin z}+\cos\dfrac{1}{z}$;

22) $f(z)=\dfrac{1}{1+\cos z}+\dfrac{\sin\frac{1}{z}}{(z-1)^2}$;

23) $f(z)=\dfrac{z}{\sin z}+\dfrac{e^{\frac{1}{z-1}}}{(z^2+1)^2}$;

24) $f(z)=\dfrac{1}{\sin(z+1)}+z^2\sin\dfrac{1}{z}$;

25) $f(z)=(z-1)^2e^{\frac{1}{1-z}}+\dfrac{z}{\sin z}$.

§ 11. Вычисление интегралов с помощью вычетов

Вычислить интегралы:

1) $\int_{|z|=\frac{\pi}{2}} \dfrac{e^z dz}{z(z+1)^2}$;

2) $\int_{|z|=4} \dfrac{dz}{z\sin z}$;

3) $\int_{|z|=\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin 2z dz}{z(z-1)^2}$;

4) $\int_{|z|=\frac{\pi}{2}} z^2 e^{\frac{1}{z-1}} dz$;

5) $\int_{|z|=2} \dfrac{\sin\left(\dfrac{2}{z}\right) dz}{1+z}$;

6) $\int_{|z|=2} \dfrac{zdz}{\sin 2z}$;

7) $\int_{|z+1|=2} \dfrac{1}{(z+2)}\cos\left(\dfrac{1}{z+1}\right) dz$;

8) $\int_{|z|=1} \left(\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{\sin z}\right) dz$;

9) $\int_{|z|=2} \dfrac{z^2}{\sin 2z} dz$;

10) $\int_{|z|=2} z\,\mathrm{ctg}^2 z dz$;

11) $\int_{|z|=1} z^4 \sin\left(\dfrac{1}{z}\right) dz$;

12) $\int_{|z|=2} z^3 \cos\left(\dfrac{1}{z+1}\right) dz$;

13) $\int_{|z|=1} \dfrac{zdz}{1-\cos z}$;

14) $\int_{|z|=1} z^4 \sin\dfrac{1}{z} dz$;

15) $\int_{|z|=4} \dfrac{dz}{\sin z}$;

16) $\int_{|z|=2} z^3 e^{\frac{1}{z-1}} dz$;

17) $\int_{|z|=2} z^4 \sin\dfrac{1}{z+1} dz$;

18) $\int_{|z-1|=1} z^3 \cos\dfrac{1}{z-1} dz$;

19) $\int_{|z|=3} \left(z^2 \sin\left(\dfrac{1}{z-1}\right)+\dfrac{e^z}{z}\right) dz$;

20) $\int_{|z-1|=3} \dfrac{ze^z dz}{\sin z}$;

21) $\int_{|z|=2} \dfrac{dz}{z\sin 2z}$;

22) $\int_{|z|=\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin z dz}{z^2(z^2+1)}$;

23) $\int_{|z|=2} z^3 \sin\dfrac{1}{(z-1)^2}\, dz$;

24) $\int_{|z|=2} \dfrac{(e^z-1)dz}{z^2(z-1)^3}$;

25) $\int_{|z|=\pi} z^2\left(e^{\frac{1}{z-1}}+e^{\frac{1}{z-2}}\right)dz$.

§ 12. Вычисление несобственных интегралов с помощью вычетов

Вычислить следующие интегралы:

1) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xdx}{(x-1)(x^2+1)^2}$;

2) $\int_{0}^{+\infty} \frac{x^2dx}{(x^4+1)(x^2+4)}$;

3) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xdx}{(x+1)(x^2+4)^2}$;

4) $\int_{0}^{+\infty} \frac{x^2dx}{(x^2+1)^2(x^2+4)^2}$;

5) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+1)dx}{(x^2+2x+5)^3}$;

6) $\int_{0}^{+\infty} \frac{x^2dx}{(1+x^4)^2}$;

7) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xdx}{(x^2-2x+2)^2}$;

8) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xdx}{(x+1)(x^2+4)^2}$;

9) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+1)dx}{(x^2+2x+10)^2}$;

10) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+4)^3}$;

11) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xdx}{(x^2-x+1)^2}$;

12) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+1)dx}{(x^2+10x+26)^2}$;

13) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x-1)(x^4+1)}$;

14) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xdx}{(x^2+8x+20)^2}$;

15) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(2x+1)(x^2+x+1)^2}$;

16) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xdx}{(x+1)(x^2+4x+13)^2}$;

17) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(2x+3)dx}{(x^2-1)(x^2+2x+5)^2}$;

18) $\int_{0}^{+\infty} \frac{(x^2+1)dx}{(x^4+7x^2+12)^2}$;

19) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xdx}{(x^2-x-2)(x^2+9)^2}$;

20) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-1)dx}{(x^2-9)(x^2+2)^3}$;

21) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(3x+1)dx}{(x^2+2x+2)^2(x^2-x+1)^2}$;

22) $\int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{(x+2)dx}{(x-2)(x^2+1)^3}$;

23) $\int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{(2x-1)dx}{(x^2+x-6)(x^2-x+1)^2}$;

24) $\int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{(2x+1)dx}{(x^2+x-2)(x^2+4x+8)^2}$;

25) $\int_{0}^{+\infty} \dfrac{x^2dx}{(x^2-4)(x^4+2x^2+5)^2}$.

§ 13. Вычисление несобственных интегралов вида $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\cos\lambda x dx$ и $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\sin\lambda x dx$

Вычислить следующие интегралы:

1) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x dx}{(1+x)(x^2+4)}$;

2) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 2x dx}{(x+4)(x^2+9)}$;

3) $\int_{0}^{+\infty} \frac{x\sin x dx}{(x^2-4)(x^2+9)}$;

4) $\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin 2x dx}{x(x^2+1)^2}$;

5) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 3x dx}{(x-1)(x^2+4)^2}$;

6) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\cos 2x dx}{(x+2)(x^2+16)}$;

7) $\int_{0}^{+\infty} \frac{x\sin 2x dx}{(x^2-1)(x^2+4)}$;

8) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x dx}{(x+1)(x^2+1)^2}$;

9) $\int_{0}^{+\infty} \frac{\cos 2x dx}{(x^2-1)(x^2+9)}$;

10) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 4x dx}{(x-1)(x^2+9)}$;

11) $\int_{0}^{+\infty} \frac{x\sin 2x dx}{(x^2-4)(x^2+9)}$;

12) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+1)\sin 2x dx}{x(x^2+4)(x^2+9)}$;

13) $\int_{0}^{+\infty} \frac{x^2\cos 2x dx}{(x^2-1)(x^2+4)}$;

14) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 2x dx}{(1+x)(x^2+1)(x^2-4)}$;

15) $\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin 3x dx}{x(x^2+1)(x^2+9)}$;

16) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 3x dx}{(x-4)(x^2+4)}$;

17) $\int_{0}^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x^4+1} dx$;

18) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+1)\sin 2x dx}{(x^2+2x+2)^2}$;

19) $\int_{0}^{+\infty} \frac{\cos x dx}{(x^2+4)^3}$;

20) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 3x dx}{(x^2-x+1)^2}$;

21) $\int_{0}^{+\infty} \frac{x\sin x dx}{(x^2+1)^3}$;

22) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\cos x dx}{(x^2-2x+10)^2}$;

23) $\int_0^{+\infty} \frac{x\sin 2x dx}{(x^2+9)^2}$;

24) $\int_0^{+\infty} \frac{x^3\sin 3x dx}{(x^4+16)^2}$;

25) $\int_0^{+\infty} \frac{x^2\cos 3x dx}{(x^2+9)^2}$.

§ 14. Вычисление интегралов, содержащих $\ln x$ и x^{α}, где $0<\alpha<1$

Вычислить следующие интегралы:

1) $\int_0^{+\infty}\frac{\ln x dx}{x^2+2x+2}$; 2) $\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2+16}dx$; 3) $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)^2}$;

4) $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^{\frac{2}{3}}(x+2)}$; 5) $\int_0^{+\infty}\frac{\ln x dx}{\sqrt{x}(x+1)}$; 6) $\int_0^{+\infty}\frac{\ln^2 x}{x^2+9}dx$;

7) $\int_0^{+\infty}\frac{\ln x dx}{x^2+4x+5}$; 8) $\int_0^{+\infty}\frac{\ln x dx}{(x+1)(x^2+1)}$; 9) $\int_0^{+\infty}\frac{x\ln x dx}{(x^2+1)^2}$;

10) $\int_0^{+\infty}\frac{\ln^2 x}{x^2+16}dx$; 11) $\int_0^{+\infty}\frac{\ln x dx}{(x^2+9)^2}$; 12) $\int_0^{+\infty}\frac{\ln x dx}{\sqrt{x}(x+2)^2}$;

13) $\int_0^{+\infty}\frac{\ln x dx}{x^2+4x+8}$; 14) $\int_0^{+\infty}\frac{\ln^2 x dx}{x^2+25}$; 15) $\int_0^{+\infty}\frac{\ln x dx}{(x^2+4)^2}$;

16) $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}(x+3)}$; 17) $\int_0^{+\infty}\frac{\ln x dx}{\sqrt[3]{x}(x+2)}$; 18) $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}(x+2)^2}$;

19) $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt[4]{x}(x+1)^2}$; 20) $\int_0^{+\infty}\frac{\ln x dx}{\sqrt[4]{x}(x+3)^2}$; 21) $\int_0^{+\infty}\frac{x\ln x dx}{(x^2+4)^2}$;

22) $\int_0^{+\infty}\frac{\ln x dx}{\sqrt[4]{x}(x+4)}$; 23) $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt[4]{x}(x+5)}$;

24) $\int_0^{+\infty}\frac{\ln^2 x dx}{(x+2)(x^2+4)}$;

25) $\int_0^{+\infty}\frac{\ln x dx}{(x^2+4x+13)^2}$.

§ 15. Изображения функций

Найти изображения следующих функций:

1) $f(t) = (t-1)^3 e^{t+1}$;

2) $f(t) = t^3 \operatorname{ch} 3t$;

3) $f(t) = e^{2t} \cos \omega t$;

4) $f(t) = \cos 2(t-1)$;

5) $f(t) = \dfrac{1-\cos t}{t}$;

6) $f(t) = \dfrac{\sin(\alpha t)}{t}$;

7) $f(t) = t^2 \sin \alpha t$;

8) $f(t) = \cos \alpha t \operatorname{ch} \beta t$;

9) $f(t) = \dfrac{e^{2t} \sin 3t}{t}$;

10) $f(t) = t \cos(2t-1)$;

11) $f(t) = te^{2t} \cos 3t$;

12) $f(t) = t \operatorname{sh} 2t \operatorname{ch} t$;

13) $f(t) = \dfrac{e^{-t} \sin^2 2t}{t}$;

14) $f(t) = \dfrac{e^t - e^{3t}}{t}$;

15) $f(t) = \dfrac{\sin t \sin 3t}{t}$;

16) $f(t) = \int_0^t \dfrac{\sin \tau}{\tau} d\tau$;

17) $f(t) = \int_0^t \operatorname{ch} 2\tau d\tau$;

18) $f(t) = \cos 2t \cos 3t$;

19) $f(t) = te^t \sin 2t$;

20) $f(t) = \int_0^t e^{\tau} \cos 2\tau d\tau$;

21) $f(t) = t^2 e^{-t} \cos 2t$;

22) $f(t) = t \operatorname{ch}(2t-1)$;

23) $f(t) = t \operatorname{sh} 3t \cos 2t$;

24) $f(t) = te^{2t} \cos 3(t-1)$;

25) $f(t) = e^{-2t} \cos^2(t+1)$.

§ 16. Нахождение оригинала по заданному изображению

Восстановить оригинал по заданному изображению:

1) $F(p)=\dfrac{p+1}{(p^2+4p+5)p^2}$; 2) $F(p)=\dfrac{p-2}{(p+1)(p+2)(p^2+4)}$;

3) $F(p)=\dfrac{p+1}{(p^2+1)^2}$; 4) $F(p)=\dfrac{p-1}{p^2(p^2+1)}$;

5) $F(p)=\dfrac{p}{(p^3-1)^2}$; 6) $F(p)=\dfrac{p^2+1}{p^3+3p^2+3p+1}$;

7) $F(p)=\dfrac{2p+1}{p^3+4p^2+5p}$; 8) $F(p)=\dfrac{p}{(p^2+4)(p^2+9)}$;

9) $F(p)=\dfrac{p-2}{p^2(p+1)^3}$; 10) $F(p)=\dfrac{p}{(p+1)^2(p^2+p+1)}$;

11) $F(p)=\dfrac{p}{(p^2+4p+8)^2}$;

12) $F(p)=\dfrac{p^2+p+1}{(p^2+2p+2)(p^2-4p+5)}$;

13) $F(p)=\dfrac{p+2}{p^2(p^2+4)^2}$; 14) $F(p)=\dfrac{p-2}{(p^3+1)p^2}$;

15) $F(p)=\dfrac{2p+1}{(p^3-1)(p^2+p+1)}$;

16) $F(p)=\dfrac{p+3}{(p-1)(p+2)(p^2+4)}$;

17) $F(p)=\dfrac{p^2-2p-1}{p^3-2p^2+2p-1}$;

18) $F(p)=\dfrac{p^2-2p+2}{(p^2+2p+5)(p^2-9)}$;

19) $F(p)=\dfrac{p^2+2p-2}{p^3+2p^2+2p+1}$;

20) $F(p)=\dfrac{2p+3}{(p^2+1)^2(p^2+4)}$; 21) $F(p)=\dfrac{p+2}{p^3+4p^2+5p}$;

22) $F(p)=\dfrac{p-1}{p^4+p^2+1}$; 23) $F(p)=\dfrac{p^2+2}{(p^2+4)^2(p^2-1)}$;

24) $F(p)=\dfrac{p^2-2p+5}{p(p-1)(p^2+9)}$;

25) $F(p)=\dfrac{p^2-2p}{(p^2+2p+10)(p^2-9)}$.

§ 17. Решение операционным методом дифференциальных уравнений

Решить задачу Коши для дифференциальных уравнений:

1) $y'' - 4y' + 4y = xe^{2x}$, $y(0) = y'(0) = 1$;

2) $y'' + 4y' = x\sin 2x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$;

3) $y'' + 2y' + y = xe^{-x}$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$;

4) $y'' + 6y' + 9y = 2e^{-3x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$;

5) $y'' + 2y' + 2y = e^{-x}\cos x$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 1$;

6) $y'' - 9y = xe^{3x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$;

7) $y'' - 4y' + 8y = e^{2x}\cos 2x$, $y(0) = y'(0) = 2$;

8) $y'' - 2y' + y = xe^{x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$;

9) $y'' - 4y' + 3y = 2xe^{x} + e^{3x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$;

10) $y''' - 3y'' + 3y' - y = 2e^{x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = y''(0) = 0$;

11) $y'' - 2y' + y = 4xe^{x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$;

12) $y'' - 2y' + 2y = xe^{x}\cos x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$;

13) $y''' + 2y'' - y' - 2y = xe^{-2x} + \mathrm{ch}x$, $y(0) = y'(0) = 0$, $y''(0) = 1$;

14) $y'' - 10y' + 25y = xe^{5x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$;

15) $y'' - 8y' + 16y = xe^{4x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$;

16) $y'' + 25y = x\sin 5x$, $y(0) = y'(0) = 1$;

17) $y'' - 4y' + 8y = e^{2x}\cos 2x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$;

18) $y^{IV} + 4y'' + 4y = x\cos 2x$, $y(0) = y'(0) = 0$, $y''(0) = y'''(0) = 1$;

19) $y'' - 9y = xe^{3x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$;

20) $y'' + 8y' + 16y = 2xe^{-4x}$, $y(0) = y'(0) = 1$;

21) $y'' + 16y = x \sin 4x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$;

22) $y'' + 4y' + 8y = e^{-2x} \sin 2x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$;

23) $y^{IV} + 2y''' + y'' = 2xe^{-x}$, $y(0) = y'(0) = 0$, $y''(0) = y'''(0) = 1$;

24) $y^{IV} + 2y'' + y = x \sin x$, $y(0) = y'(0) = 1$, $y''(0) = y'''(0) = 0$;

25) $y''' + 6y'' + 9y' = xe^{-3x}$, $y(0) = y'(0) = 2$, $y''(0) = 0$.

§ 18. Решение операционным методом систем линейных дифференциальных уравнений

Решить задачу Коши для системы дифференциальных уравнений:

1) $\begin{cases} x' + 2x + 4y = 1 + 4t; \\ y' + x - y = \dfrac{3}{2}t^2, \end{cases}$ $x(0) = 2$, $y(0) = 3$;

2) $\begin{cases} x' + 2x - y = -e^{-2t}; \\ y' + 3x - 2y = 6e^{2t}, \end{cases}$ $x(0) = -2$, $y(0) = 3$;

3) $\begin{cases} x' - x - 2y = t^2; \\ y' - 2x - y = e^t, \end{cases}$ $x(0) = 2$, $y(0) = 4$;

4) $\begin{cases} 3x' + 2x + y' = t; \\ x' + 2y' + 3y = 1, \end{cases}$ $x(0) = 1$, $y(0) = 2$;

5) $\begin{cases} x' = 3y - 2x; \\ y' = x + y + e^t, \end{cases}$ $x(0) = y(0) = 1$;

6) $\begin{cases} x' + 2y' - y = e^t; \\ x' + y' + 2y = \sin t, \end{cases}$ $x(0) = 1$, $y(0) = 2$;

7) $\begin{cases} x' + x - 3y = 1; \\ y' - x - y = e^{2t}, \end{cases}$ $x(0) = 1$, $y(0) = 2$;

8) $\begin{cases} 3x' + 2x + y' = e^{2t}; \\ x' + 4y' + 3y = 1, \end{cases}$ $x(0) = y(0) = 1$;

9) $\begin{cases} x' - x - 2y = \sin t; \\ 2y' - 2x + y = t, \end{cases}$ $x(0) = 1$, $y(0) = 2$;

10) $\begin{cases} x' = y + t; \\ y' = 2x + 2y + \sin t, \end{cases}$ $x(0) = y(0) = 1$;

11) $\begin{cases} x' - y' - 2x + y = 2t; \\ x' + 2y' + x = \cos t, \end{cases}$ $x(0) = 1$, $y(0) = 0$;

12) $\begin{cases} x' + x - 8y = t^2; \\ y' - x - y = 2e^t, \end{cases}$ $x(0) = y(0) = 1$;

13) $\begin{cases} x' - 2x - y = 1 + t; \\ y' + x - 4y = t^2, \end{cases}$ $x(0) = 1$, $y(0) = 2$;

14) $\begin{cases} x' - x - y = e^t; \\ y' + 2x - 4y = t^2 + 1, \end{cases}$ $x(0) = 1$, $y(0) = -1$;

15) $\begin{cases} x' + 3x - 2y = e^t; \\ y' + 2x - y = 2t^2, \end{cases}$ $x(0) = y(0) = 1$;

16) $\begin{cases} x' - 3x + y = 1 - t; \\ y' + y - 4x = e^{2t}, \end{cases}$ $x(0) = -1$, $y(0) = 1$;

17) $\begin{cases} x' - 5x - 3y = 2e^t; \\ y' + 3x + y = t^2, \end{cases}$ $x(0) = y(0) = 1$;

18) $\begin{cases} x' + x + 5y = \sin t; \\ y' - x - y = e^{2t}, \end{cases}$ $x(0) = 1$, $y(0) = 2$;

19) $\begin{cases} x' - x + y = te^t; \\ y' + x - y = 1 + t^2, \end{cases}$ $x(0) = y(0) = 1$;

20) $\begin{cases} x' - x - 5y = e^{2t}; \\ y' - x + 3y = \cos t, \end{cases}$ $x(0) = 1$, $y(0) = 2$;

21) $\begin{cases} x' - 4x + 5y = e^{2t}\cos t; \\ y' - x = t^2 + 1, \end{cases}$ $x(0) = 2$, $y(0) = 1$;

22) $\begin{cases} x' - x - y = t\cos t; \\ y' + 2x + y = \sin t, \end{cases}$ $x(0) = 1$, $y(0) = -1$;

23) $\begin{cases} x' + 4x + 2y = te^{-t}; \\ y' - 6x - 3y = e^{-t}\sin t, \end{cases}$ $x(0) = y(0) = 1$;

24) $\begin{cases} x' + 2x + 4y = te^{2t}; \\ y' + x - y = e^{-3t}, \end{cases}$ $x(0) = 1$, $y(0) = 2$;

25) $\begin{cases} x' - 2x - y = te^{3t}; \\ y' + x - 4y = 2e^{3t}, \end{cases}$ $x(0) = -2$, $y(0) = 1$.