Е.Б. Сандаков, С.Г. Селиванова

НАЧАЛА ТЕНЗОРНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Методические рекомендации

Москва 2009

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

МОСКОВСКИЙ ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Е.Б. Сандаков, С.Г. Селиванова

НАЧАЛА ТЕНЗОРНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Методические рекомендации

Москва 2009

УДК 514.743(07)
ББК 22.151.5я7
С 18

Сандаков Е.Б., Селиванова С.Г. **Начала тензорного исчисления:** *методические рекомендации*. – М.: МИФИ, 2009. – 40 с.

Предназначены для студентов МИФИ второго курса всех специальностей, изучающих курс векторного анализа и тензорного исчисления. Даны начальные сведения о тензорах с тем, чтобы студент мог, используя эти начальные сведения, приступить в случае необходимости к изучению более углубленной литературы о тензорах. Приведено большое число примеров, которые способствуют лучшему усвоению студентами данного материала.

Рецензент канд. физ.-мат. наук, доц. *С.Г. Артышев*

Рекомендовано к изданию редсоветом МИФИ

ISBN 978-5-7262-1136-7

Оглавление

Вводная часть

В естествознании и технике приходится иметь дело с физическими величинами различной математической природы. Это различие проявляется, например, в характере их аналитического выражения и в законах преобразования их аналитического выражения при переходе от одной системы координат к другой. Простейшими с точки зрения математической природы физическими величинами являются скалярные величины, например масса тела, объем тела, длина вектора и т.д., инвариантные относительно преобразования координат. Каждая скалярная величина в любой системе координат выражается одним числом, которое не зависит от выбора системы координат.

Следующим по сложности математической природы являются векторные величины, например скорость, ускорение, сила и т.п. Векторная величина в 3-мерном пространстве в каждом базисе определяется тройкой чисел – тройкой проекций вектора на оси координат, т.е. тройкой координат вектора в данном базисе, причем эти координаты при переходе от одного базиса к другому преобразуются по определенному закону.

Следующими после векторов по сложности математической природы являются физические величины, называемые тензорами. Они играют роль линейных операторов над векторами. Такими величинами описывается, например, проводимость в анизотропном теле. В изотропном теле вектор плотности тока $\vec{j}$ и вектор напряженности электрического поля $\vec{E}$ коллинеарны, т.е.

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}\,, \tag{1}$$

где σ – скалярный множитель (σ > 0) – проводимость.

В анизотропном теле $\vec{j}$ и $\vec{E}$, вообще говоря, не коллинеарны, и множитель σ является линейным оператором, преобразующим вектор $\vec{E}$ в вектор $\vec{j}$.

Этот оператор называется тензором проводимости.

Если выбрать в пространстве какой-нибудь базис $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ и разложить по этому базису векторы $\vec{j}$ и $\vec{E}$:

$$\vec{j} = j^1\vec{e}_1 + j^2\vec{e}_2 + j^3\vec{e}_3 = j^k\vec{e}_k\,,$$

$$\vec{E} = E^1\vec{e}_1 + E^2\vec{e}_2 + E^3\vec{e}_3 = E^k\vec{e}_k\,,$$

(номера координат вектора условимся писать сверху), то равенство (1) можно заменить эквивалентной системой трех скалярных равенств

$$j^k = \sigma_i{}^k E^i, \quad k = 1,\ 2,\ 3.$$

Таким образом, тензор проводимости в каждом базисе определяется девятью числами $\sigma_i{}^k$ $(i,\ k = 1,\ 2,\ 3)$, которые называются координатами тензора в данном базисе.

<u>Замечание</u>. В тензорной алгебре вместо $j^k = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i{}^k E^i$ принято писать $j^k = \sigma_i{}^k E^i$, при этом подразумевается, что по повторяющемуся индексу происходит суммирование в соответствии с размерностью пространства. Такой индекс называют немым, он может быть обозначен любой буквой:

$$\sigma_i{}^k E^i = \sigma_m{}^l E^m.$$

Глава I. Примеры тензоров

§ 1. *Линейная функция*

<u>Пример 1.</u> Пусть $f\ \ \vec{x}$ – линейная форма в n-мерном евклидовом пространстве L. Выберем в L ортонормированный базис $\ \vec{e}\ $. Пусть $\vec{x} = x^1\vec{e}_1 + x^2\vec{e}_2 + \ldots + x^n\vec{e}_n = x^i\vec{e}_i$ – произвольный вектор из L, тогда $f\ \ \vec{x}\ = a_1x^1 + \ldots + a_nx^n = a_ix^i$, где $a_i = f\ \ \vec{e}_i\ $. Перейдем к новому ортонормированному базису $\ \vec{e}'\ $. Пусть

$$\vec{e}_i' = c_i^1\vec{e}_1 + \ldots + c_i^n\vec{e}_n = \sum_{k=1}^{n} c_i^k\vec{e}_k = c_i^k\vec{e}_k\,.$$

В матрице перехода

$$C = \begin{bmatrix} c_1^1 & c_2^1 & \cdots & c_n^1 \\ c_1^2 & c_2^2 & \cdots & c_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_1^n & c_2^n & \cdots & c_n^n \end{bmatrix}$$

(условимся верхним индексом обозначать номер строки, нижним – номер столбца).

При переходе к новой системе координат

$$\vec{e}_i' = (\vec{e}_1 \ldots \vec{e}_n) \begin{bmatrix} c_1^1 & c_2^1 & \cdots & c_n^1 \\ c_1^2 & c_2^2 & \cdots & c_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_1^n & c_2^n & \cdots & c_n^n \end{bmatrix},$$

заметим, что $\vec{e}_i' = (\vec{e}_1' \vec{e}_2' \ldots \vec{e}_n')$.

Пусть в новом базисе $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} {}'x^i \vec{e}_i' = {}'x^i \vec{e}_i'$, тогда $f(\vec{x}) = {}'a_i x^i$, где

$${}'a_i = f(\vec{e}_i') = f(c_i^k \vec{e}_k) = c_i^k a_k. \qquad (2)$$

Таким образом, линейная функция в каждом базисе определяется строчкой из n чисел $a_1, a_2, ..., a_n$, зависящих от одного (нижнего) индекса, причем при переходе к новому базису эти числа преобразуются по формулам (2), т.е. так же, как базисные векторы (ковариантно).

§ 2. *Вектор*

Пример 2. В заданном базисе каждый вектор определяется строкой из n чисел – его координат: $(x^1, x^2, ..., x^n)$. В новом ОНБ $\vec{e}'$ тот же вектор представляется другой строкой $({}'x^1, {}'x^2, ..., {}'x^n)$, причем если C – матрица перехода от $\vec{e}$ к $\vec{e}'$, то $x^k = C_j^k \cdot {}'x^j$. Действительно, $\vec{e}_j' = C_j^k \vec{e}_k$ (как нетрудно заметить, $C_j^k = (\vec{e}_j', \vec{e}_k)$). Так как $x^k \vec{e}_k = {}'x^j \vec{e}_j'$, то, используя выражение для $\vec{e}_j'$, получим $x^k \vec{e}_k = {}'x^j C_j^k \vec{e}_k$. Из этого равенства в силу единственности разложения по базису имеем

$$x^k = 'x^j C_j^k, \qquad (3)$$

что и требовалось доказать.

Так выражаются старые координаты через новые. Теперь выразим новые координаты через старые x^i. Пусть обратная матрица $C^{-1} = \left[b_k^i \right]$. Так как $C \cdot C^{-1} = C^{-1} \cdot C = E$, то $C_k^i b_j^k = b_k^i C_j^k =$
$= \begin{Bmatrix} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{Bmatrix} = \delta_j^i$.

Таким образом, $C_k^i b_j^k = b_k^i C_j^k = \delta_j^i$.

Умножив (3) на b_k^i и просуммировав по k, получим $x^k b_k^i = 'x^j C_j^k b_k^i = \delta_j^i x^j$, откуда следует

$$'x^i = b_k^i x^k.$$

Вывод. Новые координаты $'x^i$ вектора $\vec{x}$ получаются из старых его координат x^i с помощью матрицы C^{-1}, обратной к C, коэффициенты разложения $'x^i$ по x^i образуют строки матрицы C^{-1}.

В двух рассмотренных примерах есть нечто общее, позволяющее заключить их в рамки общего определения. И линейная функция, и вектор в каждом базисе определяются n числами, соответственно, $a_1, a_2, ..., a_n$ и $x^1, x^2, ..., x^n$, причем при переходе к новому базису эти числа преобразуются линейно с помощью матрицы C, т.е. так же, как базисные векторы в случае линейной функции и с матрицей C^{-1} в случае вектора. Коэффициенты линейной функции (так же, как координаты вектора) представляют собой пример тензора, если назвать тензором заданную в каждом базисе упорядоченную систему чисел, линейно преобразующихся при переходе от одного базиса к другому по определенному закону.

Оба рассмотренных тензора называются одновалентными, так как определяются системами чисел $a_1, a_2, ..., a_n$ или $x^1, x^2, ..., x^n$, зависящих от одного индекса.

Коэффициенты линейной функции при переходе к новому базису преобразуются так же, как базисные векторы, в этом случае говорят, что они образуют ковариантный, т.е. “сопреобразующийся” тензор, преобразующийся одинаково с базисными векторами.

Координаты вектора – пример контравариантного тензора, т.е. противопреобразующегося.

§ 3. *Билинейная форма*

Пусть в n-мерном вещественном евклидовом пространстве R задана инвариантная билинейная форма $A(\vec{x},\vec{y})$. Тогда, если $\vec{x}=x^i\vec{e}_i$, $\vec{y}=y^k\vec{e}_k\in R$, то $A(\vec{x},\vec{y})=A(x^i\vec{e}_i, y^k\vec{e}_k)=x^iy^kA(\vec{e}_i, \vec{e}_k)=$ $=a_{ik}x^iy^k$, где $a_{ik}=A(\vec{e}_i, \vec{e}_k)$. В заданном базисе $\{\vec{e}\}$ билинейная функция $A(\vec{x},\vec{y})$ представляется билинейной формой $a_{ik}x^iy^k$ от координат векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ с коэффициентами a_{ik}.

Перейдем к новому базису $\{\vec{e}'\}$ с матрицей перехода C. Если $\vec{x}=x^i\vec{e}_i$, $\vec{y}=y^k\vec{e}_k$, то $A(\vec{x},\vec{y})=A('x^i\vec{e}'_i,'y^k\vec{e}'_k)='x^i\,'y^kA(\vec{e}'_i,\vec{e}'_k)=$ $=a'_{ik}\,'x^i\,'y^k$, где

$$a'_{ik}=A(\vec{e}'_i,\vec{e}'_k)=A(c_i^j\vec{e}_j,c_k^h\vec{e}_h)=c_i^jc_k^hA(\vec{e}_j,\vec{e}_h)=c_i^jc_k^ha_{jh}. \qquad (4)$$

Таким образом, билинейная форма $A(\vec{x},\vec{y})$ в каждом базисе определяется системой из n^2 чисел a_{ih}, зависящих от двух индексов, причем при переходе к новому базису эти числа преобразуются по закону (4), т.е. по каждому индексу так же, как базисные векторы. Это пример двухвалентного тензора, зависящего от двух индексов, ковариантного по обоим индексам (дважды ковариантного).

§ 4. *Линейное преобразование*

Каждое линейное преобразование A в n-мерном линейном вещественном пространстве R в заданном базисе $\{\vec{e}\}$ представляется матрицей $A=(a_k^i)$. При переходе к новому базису $\{\vec{e}'\}$ с матрицей перехода C матрица A преобразуется в $C^{-1}AC$. Как выражаются элементы $'a_k^i$ матрицы $C^{-1}AC$ через элементы a_k^i матрицы A?

В матрице AC элемент p-го столбца и k-й строки равен $a_j^pc_k^j$; в матрице $C^{-1}AC$ элемент i-й строки и k-го столбца равен $b_p^ia_j^pc_k^j$, т.е.

$$'a_k^i = b_p^i a_j^p c_k^j = c_k^j b_p^i a_j^p . \qquad (5)$$

Таким образом, линейное преобразование A в каждом базисе определяется системой из n^2 чисел a_k^i, занумерованных двумя индексами, нижним и верхним, причем при переходе к новому базису эти числа преобразуются по закону (5) – по нижнему индексу так же, как базисные векторы, а по верхнему – с обратной матрицей, контравариантно базисным векторам. Это – пример тензора валентности, равной двум (зависящего от двух индексов, один раз ковариантного и один раз контравариантного). Это – смешанный двухвалентный тензор. Рассмотрим смешанный двухвалентный тензор, координаты которого в некотором фиксированном базисе $\vec{e}$ определяются равенством

$$\delta_j^i = \begin{cases} 1, i = j; \\ 0, i \neq j. \end{cases}$$

В новом базисе $\vec{e}'$

$$'\delta_j^i = c_j^p b_q^i \delta_p^q = c_j^p b_p^i = \delta_j^i .$$

Таким образом, координаты тензора δ_j^i одинаковы во всех системах координат. Это объясняется тем, что в первоначальном базисе $\vec{e}$ элементы δ_j^i составляют единичную матрицу, следовательно, соответствующий тензор определяет тождественное преобразование, матрица которого одна и та же во всех базисах.

Глава II. Определение и простейшие свойства тензора

Пусть в каждом базисе в n-мерном линейном вещественном пространстве L задана система из n^{p+q} чисел $a_{k_1 \ldots k_p}^{i_1 \ldots i_q}$ (индексы $i_1, \ldots, i_q$, $k_1, \ldots, k_p$ независимо друг от друга пробегают значения 1, 2, …, n). Если при переходе к новому базису с матрицей перехода C эти числа преобразуются по закону

$$'a_{k_1 \ldots k_p}^{i_1 \ldots i_q} = c_{k_1}^{j_1} c_{k_2}^{j_2} \cdot \ldots \cdot c_{k_p}^{j_p} b_{h_1}^{i_1} \cdot \ldots \cdot b_{h_q}^{i_q} a_{j_1 \ldots j_p}^{h_1 \ldots h_q}, \qquad (6)$$

то говорят, что задан аффинный p + q-валентный тензор, p раз ковариантный и q раз контравариантный. Числа $a^{i_1 \ldots i_q}_{k_1 \ldots k_p}$ называются координатами тензора. Число $r = p + q$ называется рангом тензора.

Скаляр, т.е. величину, имеющую во всех системах координат одно и то же значение (одну координату), считают тензором нулевого ранга, вектор – тензор первого ранга (контравариантный).

Если координаты двух тензоров одинакового строения совпадают в одном базисе, то они совпадают и во всех остальных базисах (значит, эти тензоры равны), так как при переходе к новому базису координаты обоих тензоров преобразуются одинаково. Поэтому для того, чтобы задать тензор данного строения, достаточно задать его координаты в какой-нибудь одной системе координат.

§ 5. *Аффинный ортогональный тензор*

Рассмотрим евклидово пространство E^n. В нем определено скалярное произведение $\vec{x}, \vec{y}$. Это – симметричная билинейная форма. Рассмотрим ортонормированный базис (ОНБ), в нем $\vec{e}_i, \vec{e}_k = \delta_{ik}$. Если $\vec{x} = x^i \vec{e}_i$, то

$$\vec{x}, \vec{e}_k = x^i \vec{e}_i, \vec{e}_k = x^i \ \vec{e}_i, \vec{e}_k = x^i \delta_{ik} = x^k .$$

Если $C = c^i_k$ – матрица перехода от одного ОНБ $\vec{e}$ к другому ОНБ $\vec{e}\,'$, то $\vec{e}_i^{\,\prime} = c_i^j \vec{e}_j$. Умножая это равенство скалярно на $\vec{e}_j$, получим:

$$\vec{e}_i', \vec{e}_j = c_i^j .$$

С другой стороны, если $\vec{e}_j = b_j^i \vec{e}_i'$, то аналогично получаем $\vec{e}_i', \vec{e}_j = b_j^i$, где $B = C^{-1}$. Следовательно, $b_j^i = c_i^j$, т.е. элемент обратной матрицы получается из элемента прямой транспонированием матрицы. Такие матрицы называются ортогональными. Транспонированная матрица здесь совпадает с обратной, т.е. $C^T = C^{-1}$. При переходе к новому базису в случае ОНБ теряется различие между верхними и нижними индексами:

$$'t^{j_1 j_2 \dots j_q}_{i_1 i_2 \dots i_p} = c^{e_1 e_2 \dots e_p}_{i_1 i_2 \dots i_p} b^{j_1 j_2 \dots j_q}_{m_1 \dots m_q} t^{m_1 \dots m_q}_{e_1 e_2 \dots e_p} = c^{e_1 e_2 \dots e_p}_{i_1 i_2 \dots i_p} c^{m_1 \dots m_q}_{j_1 j_2 \dots j_q} t^{m_1 \dots m_q}_{e_1 e_2 \dots e_p}.$$

Определение тензора в евклидовом пространстве. Говорят, что в евклидовом пространстве E^n задан аффинный ортогональный тензор (евклидов тензор), если при любом выборе ОНБ $\vec{e}$ имеем n^r чисел $t_{i_1 i_2 \dots i_r}$, которые при переходе к любому другому ОНБ $\vec{e}'$ с матрицей перехода $C = \| c^i_k \|$ преобразуются по закону

$$t'_{i_1 i_2 \dots i_r} = c^{l_1 l_2 \dots l_r}_{i_1 i_2 \dots i_r} t_{l_1 l_2 \dots l_r},$$

где l_i – индексы суммирования.

§ 6. *Тензор как линейный оператор*

Аффинный ортогональный тензор второго ранга можно рассматривать как линейный оператор над векторами евклидова пространства. Пусть задан аффинный ортогональный тензор второго ранга $t_{ik} = \| t^i_k \|$. Матрицу тензора удобно трактовать как матрицу некоторого оператора $A \sim \| t^i_k \|$. Пусть, кроме того, $B \sim \| s^i_k \|$. Тогда $\| s^i_k + t^i_k \| \sim B + A, \quad \| \lambda t^i_k \| \sim \lambda A,$ т.е. так определенный оператор является линейным.

§ 7. *Действия над тензорами*

I. *Сложение и вычитание тензоров.* Тензоры одинакового ранга можно суммировать и вычитать. Например, имеем два тензора одинакового ранга:

$$S : s_{i_1 i_2 \dots i_r} \quad \text{и} \quad T : t_{i_1 i_2 \dots i_r}.$$

По определению тензор $S + T$ имеет координаты $s_{i_1 i_2 \dots i_r} + t_{i_1 i_2 \dots i_r}$.

В новом базисе $\vec{e}'$

$$s'_{i_1 i_2 \dots i_r} + t'_{i_1 i_2 \dots i_r} = c^{e_1}_{i_1} \dots c^{e_r}_{i_r} s_{e_1 \dots e_r} + c^{e_1}_{i_1} \dots c^{e_r}_{i_r} t_{e_1 \dots e_r} = c^{e_1}_{i_1} \dots c^{e_r}_{i_r} \left(s_{e_1 \dots e_r} + t_{e_1 \dots e_r} \right).$$

Таким образом, координаты тензора $S + T$ преобразуются по тензорному закону.

II. *Умножение тензора на число.* Имеем тензор T: $t_{i_1 i_2 \dots i_r}$ произвольного ранга r. По определению тензор λT имеет координаты $\lambda t_{i_1 i_2 \dots i_r}$.

III. *Умножение тензоров.* Перемножать можно тензоры любых рангов. Имеем тензор $S: s_{i_1 i_2 \dots i_{r_1}}$ ранга r_1 и тензор $T: t_{j_1 j_2 \dots j_{r_2}}$ ранга r_2. По определению $S \cdot T$ – это тензор ранга $r_1 + r_2$ с координатами $s_{i_1 i_2} \dots i_{r_1} t_{j_1 j_2 \dots j_{r_2}}$. Число таких произведений $n^{r_1 + r_2}$. Проверим, что так определенная величина $S \cdot T$ является тензором. Для этого достаточно показать, что при переходе к новому базису координаты $S \cdot T$ преобразуются по базисному закону:

$$s'_{i_1 i_2 \dots i_{r_1}} t'_{j_1 j_2 \dots j_{r_2}} = c_{i_1 i_2 \dots i_{r_1}}^{e_1 \dots e_{r_1}} c_{j_1 j_2 \dots j_{r_2}}^{m_1 m_2 \dots m_{r_2}} s_{e_1 \dots e_{r_1}} t_{m_1 \dots m_{r_2}}.$$

Это тензор ранга $r_1 + r_2$.

IV. *Свертка (свертывание индексов)*. Операцией, специфической для тензоров, является свертка по какой-либо паре индексов. Например, берем тензор T ранга $r \geq 2$. Пусть в заданном базисе его координаты $t_{i_1 i_2 \dots i_r}$. Фиксируем любые два индекса, например i_m и i_s: $t_{i_1 i_2 \dots i_m \dots i_s \dots i_r}$ $1 \leq m < s \leq r$. Сверткой тензора T по паре индексов i_m и i_s называется тензор ранга $r-2$, имеющий координаты $t_{i_1 i_2 \dots j_{(m)} \dots j_{(s)} \dots i_r}$. По индексу j происходит суммирование.

Докажем, что в результате получается тензор $r-2$-го ранга. Пусть для определенности $r = 4$: имеем тензор $t_{i_1 i_2 i_3 i_4}$. Произведем свертку по индексам i_2, i_4, получим тензор $t_{i_1 j i_3 j}$, второй и четвертый индексы – свободные. Свернутый тензор в новом базисе

$$t'_{i_1 j i_3 j} = C_{i_1}^{l_1} C_j^{l_2} C_{i_3}^{l_3} C_j^{l_4} t_{l_1 l_2 l_3 l_4} = \underbrace{C_j^{l_2} C_j^{l_4}}_{\delta l_2 l_4} C_{i_1}^{l_1} C_{i_3}^{l_3} t_{l_1 l_2 l_3 l_4} = C_{i_1}^{l_1} C_{i_3}^{l_3} t_{l_1 l l_3 l}, \quad l_2 = l_4 = l, \ –$$

тензор второго ранга.

Например, если произведение двух тензоров первого ранга $a_i b_j$ подвергнуть свертке, получится скалярное произведение векторов

$$\vec{a}, \vec{b} \ = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i = a_i b_i$$ – скаляр-тензор нулевого ранга.

V. *Скалярное умножение тензора на вектор.* Рассмотрим тензор $T : t^i_k$ и вектор $\vec{u} = u^j$. Скалярным произведением тензора T на вектор $\vec{u}$ (справа) является вектор: $T \cdot \vec{u} = t^i_k \cdot u^j$. $T \cdot \vec{u} = \vec{v} : v^i = t^i_k \cdot u^k$ (свертка по индексам k и j):

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} t^1_1 & t^1_2 & t^1_3 \\ t^2_1 & t^2_2 & t^2_3 \\ t^3_1 & t^3_2 & t^3_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^1_1 u^1 + t^1_2 u^2 + t^1_3 u^3 \\ t^2_1 u^1 + t^2_2 u^2 + t^2_3 u^3 \\ t^3_1 u^1 + t^3_2 u^2 + t^3_3 u^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^1_k u^k \\ t^2_k u^k \\ t^3_k u^k \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $v^i = t^i_k u^k$.

VI. *Скалярное умножение тензоров.* Имеем два тензора в заданном базисе: S: s^i_j и T: t^l_k. Скалярным произведением тензоров называется свертка этих тензоров по двум индексам:

$$S \cdot T = s^i_j t^j_k .$$

Так как тензоры S и T определяют линейные операторы A и B соответственно, то свертка их по индексам j и l – смешанный тензор второго ранга $d^i_k = s^i_j t^j_k$, который определяет линейное преобразование AB. Свертка $s^i_j t^j_k$ по i и k $c^l_j = s^i_j t^l_i$ соответствует произведению BA.

Все примеры рассматриваем в E^3.

<u>Пример 3.</u> Имеем векторное поле $\vec{r} = x^1, x^2, x^3$ и функцию $\vec{u}\ \vec{r}\ = u^1, u^2, u^3 \in C^1$. Производные $\dfrac{\partial u^i}{\partial x^k}$ составляют матрицу

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u^1}{\partial x^1} & \dfrac{\partial u^1}{\partial x^2} & \dfrac{\partial u^1}{\partial x^3} \\ \dfrac{\partial u^2}{\partial x^1} & \dfrac{\partial u^2}{\partial x^2} & \dfrac{\partial u^2}{\partial x^3} \\ \dfrac{\partial u^3}{\partial x^1} & \dfrac{\partial u^3}{\partial x^2} & \dfrac{\partial u^3}{\partial x^3} \end{pmatrix}.$$

Убедимся в том, что это – тензор, обозначим его $\dfrac{d\vec{u}}{d\vec{r}}$. Переходим к новому базису $\vec{e}'$. В новом базисе $\vec{e}'$ $\vec{r} = \{'x^1, 'x^2, 'x^3\}$, $\vec{u} = \{'u^1, 'u^2, 'u^3\}$. Докажем, что производные $\dfrac{\partial' u^i}{\partial' x^k}$ выражаются через старые производные по тензорному закону. Точка, где рассматриваем производные, фиксирована:

$$'u^i = b^i_j u^j, \quad x^k = c^k_l\, 'x^l;$$

$$\frac{\partial' u^i}{\partial' x^k} = b^i_j \frac{\partial u^j}{\partial' x^k} = b^i_j \frac{\partial u^j}{\partial x^l} \cdot \frac{\partial x^l}{\partial' x^k} = b^i_j \frac{\partial u^j}{\partial x^l} \cdot \frac{c^l_p \partial' x^p}{\partial' x^k} \underset{p=k}{=} b^i_j c^l_k \frac{\partial u^j}{\partial x^l} = c^j_i c^l_k \frac{\partial u^j}{\partial x^l},$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, показали, что производная $\dfrac{d\vec{u}}{d\vec{r}}$ образует тензор, так как при переходе к новому базису координаты $\dfrac{d\vec{u}}{d\vec{r}}$ преобразуются по тензорному закону

$$\frac{\partial' u^i}{\partial' x^k} = b^i_j c^l_k \frac{\partial u^j}{\partial x^l} = b^i_j b^k_l \frac{\partial u^j}{\partial x^l};$$

$$d\vec{r} = \{dx^1, dx^2, dx^3\}. \quad \left(\frac{d\vec{u}}{d\vec{r}}\right) d\vec{r} = \frac{\partial u^i}{\partial x^k} dx^k = du^i,$$

$d\vec{u}$ – дифференциал вектор-функции $d\vec{u} = \left(\dfrac{d\vec{u}}{d\vec{r}}\right) d\vec{r}$.

Если свернуть $\dfrac{\partial u^i}{\partial x^k}$, получим $\operatorname{div}(\vec{u}) = \dfrac{\partial u^i}{\partial x^i}$.

Таким образом, дивергенция векторного поля – это свертка тензора $\dfrac{d\vec{u}}{d\vec{r}} = \left(\dfrac{\partial u^i}{\partial x^k}\right)$.

<u>Пример 4 (тензор деформаций).</u> Рассмотрим некоторое деформируемое тело, любую точку которого в системе координат $Ox^1x^2x^3$ будем определять ее радиусом-вектором $\vec{r} = x^i \vec{e}_i : \vec{r} = \overrightarrow{OM}$ (рис. 1).

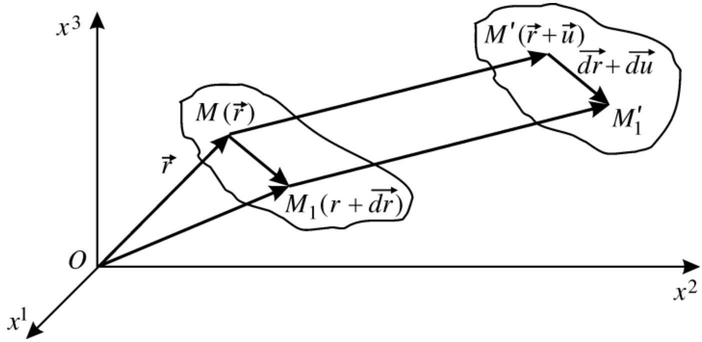

Рис. 1

Пусть тело подверглось деформации. Точка $M \;\; \vec{r}$ переместилась на вектор $\vec{u}$, заняла положение $M' \;\; \vec{r}+\vec{u}$. Эта деформация описывается полем смещений $\vec{u}=u^1\vec{e}_1+u^2\vec{e}_2+u^3\vec{e}_3=u^i\vec{e}_i$. Дадим точке M приращение и рассмотрим точку $M_1 \;\; \vec{r}+d\vec{r}$. При деформировании она перейдет в точку $M_1' \;\; \vec{r}+d\vec{r}+\vec{u}+d\vec{u}$. Деформацию тела в окрестности данной точки $M \;\; \vec{r}$ можно охарактеризовать изменением длин всевозможных отрезков $\overrightarrow{MM_1}$, $\overrightarrow{MM_2}, \ldots$, выходящих из точки $M \;\; \vec{r}$ в достаточно малой ее окрестности. Рассмотрим изменение длины отрезка $\overrightarrow{MM_1}$ при деформации тела. Длина $\overrightarrow{MM_1}$ равна $|d\vec{r}|$. Отрезок $\overrightarrow{MM_1}$ переходит в $\overrightarrow{M'M_1'}$, его длина равна $|d\vec{r}+d\vec{u}|$. За меру изменения длины отрезка принимается величина

$$A=\frac{1}{2}\;\; \overrightarrow{M'M_1'}^2-\overrightarrow{MM_1}^2 \;\; =\frac{1}{2}\;\; \overrightarrow{dr}+\overrightarrow{du}\;\;^2-\overrightarrow{dr}^2 \;\; =\frac{1}{2}\;\; 2\overrightarrow{du}\,\overrightarrow{dr}+\overrightarrow{du}^2 \;\; ;$$

$$\overrightarrow{dr}=dx^i\vec{e}_i\,,$$

$$\overrightarrow{du}=\overrightarrow{du}^i\vec{e}_i= \;\; du^1,du^2,du^3 \;\; =\left\{\frac{\partial u^1}{\partial x^k}dx^k,\frac{\partial u^2}{\partial x^k}dx^k,\frac{\partial u^3}{\partial x^k}dx^k\right\}=\frac{\partial u^i}{\partial x^k}dx^k\vec{e}_i\,.$$

Таким образом, $A=\frac{1}{2}\left\{2\frac{\partial u^i}{\partial x^k}dx^k\cdot dx^i+\frac{\partial u^i}{\partial x^k}dx^k\,\frac{\partial u^i}{\partial x^m}dx^m\right\}.$

Так как рассматриваем малые деформации, то членами $\frac{\partial u^i}{\partial x^k}\frac{\partial u^i}{\partial x^m}$ можно пренебречь и тогда получаем квадратичную форму относительно переменных dx^1, dx^2, dx^3, коэффициенты которой образуют тензор второго ранга, называемый тензором деформаций:

$$A=\frac{1}{2}\left\{2\left(\frac{\partial u^1}{\partial x^1}dx^1dx^1+\frac{\partial u^1}{\partial x^2}dx^2dx^1+\frac{\partial u^1}{\partial x^3}dx^3dx^1\right)+\right.$$

$$+2\left(\frac{\partial u^2}{\partial x^1}dx^1dx^2+\frac{\partial u^2}{\partial x^2}dx^2dx^2+\frac{\partial u^2}{\partial x^3}dx^3dx^2\right)+$$

$$\left.+2\left(\frac{\partial u^3}{\partial x^1}dx^1dx^3+\frac{\partial u^3}{\partial x^2}dx^2dx^3+\frac{\partial u^3}{\partial x^3}dx^3dx^3\right)\right\}=$$

$$=Y_1^1dx^{12}+Y_2^2dx^{22}+Y_3^3dx^{32}+2Y_2^1dx^1dx^2+$$

$$+2Y_3^1dx^1dx^3+2Y_3^2dx^2dx^3,$$

где $Y_i^i=\frac{\partial u^i}{\partial x^i}$; $Y_k^i=Y_i^k=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u^i}{\partial x^k}+\frac{\partial u^k}{\partial x^i}\right)$.

Матрица тензора деформаций имеет вид

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial x^1} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u^1}{\partial x^2}+\frac{\partial u^2}{\partial x^1}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u^1}{\partial x^3}+\frac{\partial u^3}{\partial x^1}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u^1}{\partial x^2}+\frac{\partial u^2}{\partial x^1}\right) & \frac{\partial u^2}{\partial x^2} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u^2}{\partial x^3}+\frac{\partial u^3}{\partial x^2}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u^1}{\partial x^3}+\frac{\partial u^3}{\partial x^1}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u^3}{\partial x^2}+\frac{\partial u^2}{\partial x^3}\right) & \frac{\partial u^3}{\partial x^3} \end{pmatrix}.$$

§ 8. *Разложение тензора 2-го ранга на симметричный и антисимметричный*

Все рассмотрения проводим в пространстве E^3. Имеем тензор с координатами t_{ik} (или t_k^i) в заданном базисе. Сопряженным ему называется тензор $t_{ik}^*=t_{ki}$.

Тензор $T: t_{ik}$ называется симметричным, если $T^* = T$, т.е. $t_{ik} = t_{ki}$.

Тензор T называется антисимметричным, если $T^* = -T$, т.е. $t_{ik} = -t_{ki}$.

Из определения следует, что по главной диагонали антисимметричного тензора стоят нули:

$$\begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & 0 & a_{23} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, симметричный тензор второго ранга определяется шестью своими координатами, а антисимметричный – тремя недиагональными координатами. Примером симметричного тензора является тензор деформаций. Простейшим примером антисимметричного тензора второго ранга является векторное произведение двух векторов. Действительно, пусть в базисе $\vec{e}$ даны два вектора:

$$\vec{a} = a^i \vec{e}_i, \quad \vec{b} = b^i \vec{e}_i.$$

$$\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \end{vmatrix} = (a^2 b^3 - a^3 b^2)\,\vec{e}_1 + (a^3 b^1 - a^1 b^3)\,\vec{e}_2 + (a^1 b^2 - a^2 b^1)\,\vec{e}_3.$$

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ являются тензорами первого ранга, система девяти величин $L^{ij} = a^i b^j - a^j b^i$ образует тензор второго ранга. Этот тензор – антисимметричный, так как $L^{ij} = -L^{ji}$ и определяется, следовательно, тремя своими координатами.

Пусть T – произвольный тензор, тогда

$$T = \frac{1}{2}(T + T^*) + \frac{1}{2}(T - T^*),$$

это равносильно для координат тензора равенству

$$t_{ik} = \frac{1}{2}(t_{ik} + t_{ki}) + \frac{1}{2}(t_{ik} - t_{ki}).$$

Первые слагаемые в правой части образуют симметричный тензор, вторые – антисимметричный.

Таким образом, любой тензор второго ранга представляется в виде суммы симметричного и антисимметричного тензоров.

Пример 5. Является ли симметричным тензор $\dfrac{\overrightarrow{du}}{\overrightarrow{\overrightarrow{dr}}}$? Иначе: в каком поле $\vec{u}$ тензор $\dfrac{\overrightarrow{du}}{\overrightarrow{\overrightarrow{dr}}}$ симметричен?

Его матрица

$$\frac{\overrightarrow{du}}{\overrightarrow{\overrightarrow{dr}}} \sim \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u^1}{\partial x^1} & \dfrac{\partial u^1}{\partial x^2} & \dfrac{\partial u^1}{\partial x^3} \\ \dfrac{\partial u^2}{\partial x^1} & \dfrac{\partial u^2}{\partial x^2} & \dfrac{\partial u^2}{\partial x^3} \\ \dfrac{\partial u^3}{\partial x^1} & \dfrac{\partial u^3}{\partial x^2} & \dfrac{\partial u^3}{\partial x^3} \end{pmatrix}.$$

Сопряженный тензор $\left(\dfrac{\overrightarrow{du}}{\overrightarrow{\overrightarrow{dr}}}\right)^*$ имеет матрицу

$$\left(\frac{\overrightarrow{du}}{\overrightarrow{\overrightarrow{dr}}}\right)^* \sim \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u^1}{\partial x^1} & \dfrac{\partial u^2}{\partial x^1} & \dfrac{\partial u^3}{\partial x^1} \\ \dfrac{\partial u^1}{\partial x^2} & \dfrac{\partial u^2}{\partial x^2} & \dfrac{\partial u^3}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial u^1}{\partial x^3} & \dfrac{\partial u^2}{\partial x^3} & \dfrac{\partial u^3}{\partial x^3} \end{pmatrix}.$$

Когда $\left(\dfrac{\overrightarrow{du}}{\overrightarrow{\overrightarrow{dr}}}\right) = \left(\dfrac{\overrightarrow{du}}{\overrightarrow{\overrightarrow{dr}}}\right)^*$?

Так как $\dfrac{\partial u^i}{\partial x^k} = \dfrac{\partial u^k}{\partial x^i}$, то это означает, что $\operatorname{rot} \vec{u} = \vec{0}$. Действительно,

$$\operatorname{rot} \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x^1} & \dfrac{\partial}{\partial x^2} & \dfrac{\partial}{\partial x^3} \\ u^1 & u^2 & u^3 \end{vmatrix} = \vec{0}$$

Так как $\operatorname{rot} \vec{u} = \vec{0}$, то поле $\vec{u}$ потенциально, значит $\exists U \in C^2 : \vec{u} = \operatorname{grad} U$, т.е.

$$u^i = \frac{\partial U}{\partial x^i}, \quad \frac{\partial u^i}{\partial x^k} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^i \partial x^k}; \quad \frac{\partial u^k}{\partial x^i} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^k \partial x^i};$$

так как $U \in C^2$, то $\frac{\partial^2 U}{\partial x^i \partial x^k} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^k \partial x^i}$, т.е. $\frac{\partial u^i}{\partial x^k} = \frac{\partial u^k}{\partial x^i}$, следовательно, матрица тензора $\frac{\overrightarrow{du}}{\overrightarrow{dr}}$ симметрична. Отсюда следует, что тензор $\frac{\overrightarrow{du}}{\overrightarrow{dr}}$ симметричен в потенциальном поле.

Пример 6. Диаду $\vec{a}\vec{b}$ разложить на симметричный и антисимметричный тензоры.

$$\vec{a}\vec{b} = \begin{pmatrix} a^1b^1 & a^1b^2 & a^1b^3 \\ a^2b^1 & a^2b^2 & a^2b^3 \\ a^3b^1 & a^3b^2 & a^3b^3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left(\vec{a}\vec{b} + \vec{b}\vec{a}\right) + \frac{1}{2}\left(\vec{a}\vec{b} - \vec{b}\vec{a}\right);$$

$$\vec{b}\vec{a} = \begin{pmatrix} a^1b^1 & a^2b^1 & a^3b^1 \\ a^1b^2 & a^2b^2 & a^3b^2 \\ a^1b^3 & a^2b^3 & a^3b^3 \end{pmatrix};$$

$$\frac{1}{2}\left(\vec{a}\vec{b} + \vec{b}\vec{a}\right) = \begin{pmatrix} a^1b^1 & \frac{1}{2}\left(a^1b^2 + a^2b^1\right) & \frac{1}{2}\left(a^1b^3 + a^3b^1\right) \\ \frac{1}{2}\left(a^1b^2 + a^2b^1\right) & a^2b^2 & \frac{1}{2}\left(a^2b^3 + a^3b^2\right) \\ \frac{1}{2}\left(a^1b^3 + a^3b^1\right) & \frac{1}{2}\left(a^2b^3 + a^3b^2\right) & a^3b^3 \end{pmatrix};$$

$$\frac{1}{2}\left(\vec{a}\vec{b} - \vec{b}\vec{a}\right) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(a^1b^2 - a^2b^1\right) & \frac{1}{2}\left(a^1b^3 - a^3b^1\right) \\ \frac{1}{2}\left(a^2b^1 - a^1b^2\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(a^2b^3 - a^3b^2\right) \\ \frac{1}{2}\left(a^3b^1 - a^1b^3\right) & \frac{1}{2}\left(a^3b^2 - a^2b^3\right) & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\vec{\omega}=\frac{1}{2}\left[\vec{b},\vec{a}\right]=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_1 & \vec{e}_1\\ b^1 & b^2 & b^3\\ a^1 & a^2 & a^3\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\left\{\underbrace{b^2a^3-a^2b^3}_{\omega_1};\underbrace{a^1b^3-a^3b^1}_{\omega_2};\underbrace{a^2b^1-a^1b^2}_{\omega_3}\right\}.$$

Таким образом, $\vec{a}\vec{b}=\frac{1}{2}\ \vec{a}\vec{b}+\vec{b}\vec{a}\ +\frac{1}{2}\left[\vec{b},\ \vec{a}\right]$.

<u>Пример 7 (тензор относительных смещений).</u> Рассмотрим деформированное состояние тела. Пусть $\bar{a}$ – вектор смещения точки $\vec{r}:\vec{a}=\vec{a}\ \vec{r}$. Приращение вектора $\bar{a}$: $\overrightarrow{da}=\frac{\overrightarrow{da}}{\overrightarrow{\overline{dr}}}\overrightarrow{dr}$ – тензор относительных смещений – скалярное произведение тензора $\frac{\overrightarrow{da}}{\overrightarrow{\overline{dr}}}$ на вектор $\overrightarrow{dr}$, $\frac{\overrightarrow{da}}{\overrightarrow{\overline{dr}}}=\left(\frac{\partial a^i}{\partial x^j}\right)$, его матрица:

$$\frac{\overrightarrow{da}}{\overrightarrow{\overline{dr}}}:\begin{pmatrix}\frac{\partial a^1}{\partial x^1} & \frac{\partial a^1}{\partial x^2} & \frac{\partial a^1}{\partial x^3}\\ \frac{\partial a^2}{\partial x^1} & \frac{\partial a^2}{\partial x^2} & \frac{\partial a^2}{\partial x^3}\\ \frac{\partial a^3}{\partial x^1} & \frac{\partial a^3}{\partial x^2} & \frac{\partial a^3}{\partial x^3}\end{pmatrix}.$$

Тензор, сопряженный с $\frac{\overrightarrow{da}}{\overrightarrow{\overline{dr}}}$

$$\left(\frac{\overrightarrow{da}}{\overrightarrow{\overline{dr}}}\right)^*:\begin{pmatrix}\frac{\partial a^1}{\partial x^1} & \frac{\partial a^2}{\partial x^1} & \frac{\partial a^3}{\partial x^1}\\ \frac{\partial a^1}{\partial x^2} & \frac{\partial a^2}{\partial x^2} & \frac{\partial a^3}{\partial x^2}\\ \frac{\partial a^1}{\partial x^3} & \frac{\partial a^2}{\partial x^3} & \frac{\partial a^3}{\partial x^3}\end{pmatrix}=\operatorname{grad}\vec{a}=\nabla\vec{a}\ .$$

Таким образом, $\operatorname{grad}\vec{a}$ – это тензор.

Разложим тензор $\frac{\overrightarrow{da}}{\overrightarrow{\overline{dr}}}$ на симметричный и антисимметричный. Симметричный тензор

$$\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\overline{\overline{\frac{da}{dr}}}}+\nabla\vec{a}\right)=\begin{pmatrix} \frac{\partial a^1}{\partial x^1} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a^1}{\partial x^2}+\frac{\partial a^2}{\partial x^1}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a^1}{\partial x^3}+\frac{\partial a^3}{\partial x^1}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a^1}{\partial x^2}+\frac{\partial a^2}{\partial x^1}\right) & \frac{\partial a^2}{\partial x^2} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a^2}{\partial x^3}+\frac{\partial a^3}{\partial x^2}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a^1}{\partial x^3}+\frac{\partial a^3}{\partial x^1}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a^3}{\partial x^2}+\frac{\partial a^2}{\partial x^3}\right) & \frac{\partial a^3}{\partial x^3} \end{pmatrix} -$$

тензор деформации.

Антисимметричный тензор

$$\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\overline{\overline{\frac{da}{dr}}}}-\nabla\vec{a}\right)=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a^1}{\partial x^2}-\frac{\partial a^2}{\partial x^1}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a^1}{\partial x^3}-\frac{\partial a^3}{\partial x^1}\right) \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial a^1}{\partial x^2}-\frac{\partial a^2}{\partial x^1}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a^2}{\partial x^3}-\frac{\partial a^3}{\partial x^2}\right) \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial a^1}{\partial x^3}-\frac{\partial a^3}{\partial x^1}\right) & -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial a^2}{\partial x^3}-\frac{\partial a^3}{\partial x^2}\right) & 0 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}=\Omega\,,$$

где $\vec{\omega}=\frac{1}{2}\operatorname{rot}\vec{a}$, т.е.

$$\vec{\omega}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x^1} & \frac{\partial}{\partial x^2} & \frac{\partial}{\partial x^3} \\ a^1 & a^2 & a^3 \end{vmatrix}=$$

$$=\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial a^3}{\partial x^2}-\frac{\partial a^2}{\partial x^3}\right);\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a^1}{\partial x^3}-\frac{\partial a^3}{\partial x^1}\right);\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a^2}{\partial x^1}-\frac{\partial a^1}{\partial x^2}\right)\right\}.$$

Если вектор $\vec{a}$ есть вектор смещения частиц упругого тела, то тензор $\overrightarrow{\overline{\overline{\frac{da}{dr}}}}=D+\Omega$, где D – тензор деформации; Ω – тензор относительного поворота.

В потенциальном поле $\operatorname{rot}\vec{a}=\vec{0}$, следовательно, относительные смещения происходят за счет чистой деформации. Если тело не деформируемо, то относительные смещения происходят за счет чистого поворота.

Таким образом, тензор относительных смещений

$$\overrightarrow{da}=\frac{\overrightarrow{da}}{\overrightarrow{dr}}\overrightarrow{dr}=D\overrightarrow{dr}+\Omega\overrightarrow{dr}=D\overrightarrow{dr}+\left[\frac{1}{2}\operatorname{rot}\vec{a},\ \overrightarrow{dr}\right],$$

так как $\left[\vec{\omega},\overrightarrow{dr}\right]=\begin{vmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3\\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3\\ dx^1 & dx^2 & dx^3\end{vmatrix}=\Omega\overrightarrow{dr}.$

§ 9. *Дифференцирование тензора по скалярному аргументу*

Рассмотрим случай, когда независимой переменной является скалярный аргумент, например время t. Задание тензора $T(t)$ осуществляется или с помощью задания его матрицы $T(t)=\begin{pmatrix}t_1^1 & t_2^1 & t_3^1\\ t_1^2 & t_2^2 & t_3^2\\ t_1^3 & t_2^3 & t_3^3\end{pmatrix}$, или в диадной форме $T(t)=\vec{T}_i\vec{e}_i$. Убедимся в том, что всякий тензор $T=\ t_k^i\ $ можно представить в виде суммы трех диад

$$\vec{T}_i\vec{e}_i:\begin{pmatrix}t_1^1\\ t_1^2\\ t_1^3\end{pmatrix}\ 1\ 0\ 0\ +\begin{pmatrix}t_2^1\\ t_2^2\\ t_2^3\end{pmatrix}\ 0\ 1\ 0\ +\begin{pmatrix}t_3^1\\ t_3^2\\ t_3^3\end{pmatrix}\ 0\ 0\ 1\ =\begin{pmatrix}t_1^1 & 0 & 0\\ t_1^2 & 0 & 0\\ t_1^3 & 0 & 0\end{pmatrix}+\ldots=\ t_k^i\ .$$

Заметим, что понятия непрерывности тензора, предела и т.п. могут быть введены так же, как непрерывность и предел функции.

<u>Определение.</u> Производной тензора $T(t)$ по аргументу t называется $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{T(t+\Delta t)-T(t)}{\Delta t}=\dfrac{dT}{dt}$, если этот предел существует. Таким образом, $\dfrac{dT}{dt}=\ \dot{t}_k^i\ $ или $\dfrac{dT}{dt}=\dot{\vec{T}}_i\vec{e}_i$. Мы всегда будем предполагать, что этот предел существует и непрерывен. Все основные свойства

производных функций сохраняются и для производных от тензора, например $\frac{d(T_1+T_2)}{dt}=\frac{dT_1}{dt}+\frac{dT_2}{dt}$, $\frac{d(mT)}{dt}=\frac{dm}{dt}T+m\frac{dT}{dt}$, если m – скалярная функция от t. Если T – тензор, $\vec{a}$ – вектор, зависящие от t, то $\frac{d(T\vec{a})}{dt}=\frac{dT}{dt}\vec{a}+T\frac{d\vec{a}}{dt}$; $\frac{d(T_1T_2)}{dt}=\frac{dT_1}{dt}T_2+T_1\frac{dT_2}{dt}$. Выведем формулу для дифференцирования обратного тензора. Если существует такой тензор A, что $AT=I$ (I – единичный тензор), то тензор A называется обратным для тензора T и обозначается T^{-1}. Не для всякого тензора существует обратный тензор. Действительно, если $D(A)$ – определитель матрицы тензора A, $D(T)$ – определитель матрицы тензора T, то $D(A)D(T)=D(I)$, а $D(I)=1$, следовательно, $D(T)$ должен быть отличным от нуля, т.е. тензор должен быть полным. Полнота тензора является необходимым и достаточным условием существования обратного тензора T^{-1}. Пусть $T(t)$ – полный переменный тензор, так что определитель этого тензора $D(T)\neq 0$. Пусть T^{-1}– обратный тензор, так что $TT^{-1}=I$. $\frac{dT}{dt}T^{-1}+T\frac{dT^{-1}}{dt}=0$, так как I – постоянный тензор, отсюда $T\frac{dT^{-1}}{dt}=-\frac{dT}{dt}T^{-1}$. Умножая обе части этого равенства слева на T^{-1}, получим $\frac{dT^{-1}}{dt}=-T^{-1}\frac{dT}{dt}T^{-1}$. Иногда приходится решать дифференциальные уравнения, где неизвестными являются тензоры.

Пример 6.

$$\frac{dX}{dt}=UX, \tag{7}$$

где $X(t)$ – искомый тензор; U – заданный постоянный тензор. Если бы мы имели обыкновенное дифференциальное уравнение $\frac{dx}{dt}=\alpha x$ (α – постоянное), то решением была бы функция $x=e^{\alpha t}=1+\alpha t+\frac{\alpha^2t^2}{2!}+\frac{\alpha^3t^3}{3!}+\ldots$ Проверим, не будет ли сумма ряда тензоров $X_1(t)=I+Ut+\frac{U^2t^2}{2!}+\frac{U^3t^3}{3!}+...$ решением тензорного уравнения (7). Обозначим $X_1(t)=e^{Ut}$, дифференцируем $X_1(t)$ по t: $\frac{dX_1}{dt}=U+\frac{U^2t}{1!}+\frac{U^3t^2}{2!}+...=U\left(I+\frac{Ut}{1!}+\frac{U^2t^2}{2!}+...\right)=UX_1(t)$, напомним, что I – тензор с матрицей $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$. Мы показали, что функция $X_1(t)=e^{Ut}$ удовлетворяет уравнению $\frac{dX}{dt}=UX$. Предполагалось, что ряд $I+\frac{Ut}{1!}+\frac{U^2t^2}{2!}+...$ сходится и его можно почленно дифференцировать. Это легко доказывается. Ищем теперь общее решение уравнения (7). Пусть $X(t)=X_1(t)Y(t)$, где $Y(t)$ – новая неизвестная функция: $\frac{dX}{dt}=\frac{dX_1}{dt}Y+X_1\frac{dY}{dt}$, но $\frac{dX_1}{dt}=UX_1$, $\frac{dX}{dt}=UX=UX_1Y\Rightarrow UX_1Y+X_1\frac{dY}{dt}=UX_1Y\Rightarrow \underline{X_1\frac{dY}{dt}=0}$, $X_1(t)=e^{Ut}$ имеет обратный тензор e^{-Ut}, т.е. является полным, тогда $\frac{dY}{dt}=0\Rightarrow Y=C$ – постоянный тензор. Таким образом, общим решением уравнения (7) является $X(t)=e^{Ut}C$, где C – постоянный тензор, e^{Ut} определяется рядом $X_1(t)=I+Ut+\frac{U^2t^2}{2!}+\frac{U^3t^3}{3!}+...$. Положим в формуле $X(t)=e^{Ut}C$ $t=0$ и так как $X_1(0)=e^{U0}=I$, получаем, что $X(0)=C$. Таким образом, C – начальное значение тензора $X(t)$.

Замечание. Обратим внимание на подчеркнутое равенство $\underline{X_1\frac{dY}{dt}=0}$. Из равенства нулю произведения двух тензоров не следует, что хотя бы один из них является нулевым.

Действительно, рассмотрим тензор $A=\vec{e}_1\vec{e}_2$ с матрицей: $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\vec{e}_2$, A – ненулевой тензор,

$AA=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ – нулевой тензор. Если же в равенстве $AB=0$ один из тензоров является полным $\det A\neq 0$, то другой тензор равен нулю. Получим $X_1\dfrac{dY}{dt}=0$, X_1 – полный тензор, $X_1(t)=I+Ut+\dfrac{U^2t^2}{2!}+\dfrac{U^3t^3}{3!}+\ldots$, I – тензор с матрицей $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

§ 10. *Дифференцирование тензора по координатам*

Рассмотрим тензор $T=\ t_k^i$ и вектор $\vec{r}=\ x^1,\ x^2,\ x^3$. Производной тензора T называется совокупность величин $\dfrac{\partial t_k^i}{\partial x^j}$ (в трехмерном пространстве их будет 27). $\dfrac{dT}{d\vec{r}}=\left(\dfrac{\partial t_k^i}{\partial x^j}\right)$. При дифференцировании ранг тензора увеличивается на единицу. Для этого достаточно доказать, что при переходе к новому базису координаты тензора $\left(\dfrac{\partial t_k^i}{\partial x^j}\right)$ преобразуются по базисному закону.

Действительно, в новом базисе

$$\frac{\partial' t_k^i}{\partial' x^j} = c_k^l b_h^i \frac{\partial t_l^h}{\partial x^m} \frac{\partial x^m}{\partial' x^j} = c_k^l b_h^i \frac{\partial t_l^h}{\partial x^m} \frac{\partial (c_s^{m\prime} x^s)}{\partial' x^j} =$$

$$= c_k^l c_i^h c_s^m \frac{\partial t_l^h}{\partial x^m} \underbrace{\frac{\partial'(x^s)}{\partial' x^j}}_{\delta^{sj}=1, s=j} = c_k^l c_i^h c_j^m \frac{\partial t_l^h}{\partial x^m} \quad -$$

ранг тензора увеличился на единицу.

§ 11. *Приведение симметричного тензора 2-го ранга к главным осям*

Будем интерпретировать аффинный ортогональный тензор как линейный оператор $T\vec{a} = \vec{b} \Rightarrow t_k^i a^k = b^i$. Если вектор $\vec{b}$ коллинеарен вектору $\vec{a}$, т.е. если вектор $\vec{a}$ после преобразования с помощью линейного оператора T изменяет только свою величину, не изменяя направления, то направление вектора $\vec{a}$ называется главным направлением тензора T. Если $\vec{b} = \lambda \vec{a}$, то величина λ называется главным значением тензора T. Оно показывает, во сколько раз тензор T увеличивает векторы, направленные по главным осям тензора, направление главных осей тензор не меняет. Найдем главные значения и главные оси тензора. Уравнение $T\vec{a} = \lambda\vec{a}$ равносильно трем уравнениям:

$$\begin{cases} t_1^1 a^1 + t_2^1 a^2 + t_3^1 a^3 = \lambda a^1 \Rightarrow t_i^1 a^i = \lambda a^1; \\ t_1^2 a^1 + t_2^2 a^2 + t_3^2 a^3 = \lambda a^2 \Rightarrow t_i^2 a^i = \lambda a^2; \\ t_1^3 a^1 + t_2^3 a^2 + t_3^3 a^3 = \lambda a^3 \Rightarrow t_i^3 a^i = \lambda a^3, \end{cases}$$

или $t_i^k a^i = \lambda a^k$, $k = 1, 2, 3$. Имеем три линейных однородных уравнения относительно a^1, a^2, a^3:

$$\begin{cases} t_1^1 - \lambda \;\; a^1 + t_2^1 a^2 + t_3^1 a^3 = 0; \\ t_1^2 a^1 + \;\; t_2^2 - \lambda \;\; a^2 + t_3^2 a^3 = 0; \\ t_1^3 a^1 + t_2^3 a^2 + \;\; t_3^3 - \lambda \;\; a^3 = 0, \end{cases} \tag{8}$$

Эта система имеет ненулевое решение, если ее определитель равен нулю.

$$\begin{vmatrix} t_1^1-\lambda & t_2^1 & t_3^1 \\ t_1^2 & t_2^2-\lambda & t_3^2 \\ t_1^3 & t_2^3 & t_3^3-\lambda \end{vmatrix} = 0\ .$$

Это уравнение называется характеристическим(вековым). Из него определяем λ – главное значение тензора. При данном λ из системы (8) находим отношение $a^1 : a^2 : a^3$, т.е. главное направление тензора, отвечающее главному значению λ. Если тензор симметричен, т.е. если его матрица в каждом базисе $\vec{e}$ симметрична, то все корни характеристического уравнения вещественны. Можно так выбрать нормированные собственные векторы $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3$, отвечающие собственным значениям $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$, чтобы они представляли ортогональный нормированный базис (ОНБ) и в этом ОНБ матрица тензора T будет иметь диагональную форму, так как известно, что линейный оператор задается в базисе $\vec{e}$ диагональной матрицей тогда и только тогда, когда векторы этого базиса являются собственными векторами линейного оператора.

Таким образом, в этом ОНБ все элементы тензора, кроме диагональных, обращаются в нуль и сам тензор принимает простейший вид $T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$. Преобразование вектора $\vec{b} = T\vec{a}$ имеет простой вид $b^1 = \lambda_1 a^1,\ \ b^2 = \lambda_2 a^2,\ \ b^3 = \lambda_3 a^3$. Для симметричного тензора направления осей $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3$, являются главными направлениями, а величины $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$ – главными значениями. Таким образом, в случае симметричного тензора существуют три главных направления и три главных значения. Выбор базиса $\vec{e}$, в котором матрица тензора имеет диагональную форму, называется приведением тензора к главным осям.

Глава III. Поле тензора

§ 12. *Дивергенция тензора*

Если каждой точке M некоторой области D пространства ставится в соответствие тензор $T \sim t_{ik}$, то говорят, что в области D задано поле тензора T. Обобщим определение вектора и дадим определение аффинного ортогонального тензора в пространстве E^3 в такой же форме.

Определение. Если в каждом ОНБ дана упорядоченная совокупность трех чисел $x^1,\ x^2,\ x^3$, которые при переходе к новому базису преобразуются по закону $x^{i} = b_k^i x^k$ или $x^i = c_i^k x^k$ (так как в евклидовом пространстве $b_k^i = c_i^k$), то совокупность этих чисел $(x^1,\ x^2,\ x^3)$ называют аффинным ортогональным вектором $\vec{x}$.

Введем понятие тензора, обобщив это определение. Если в каждом ОНБ дана совокупность векторов $\vec{T}_1,\ \vec{T}_2,\ \vec{T}_3$, которые при переходе к новому базису преобразуются по закону $T_i' = C_i^k \vec{T}_k$, то совокупность этих трех векторов $\vec{T}_1,\ \vec{T}_2,\ \vec{T}_3$ называется ортогональным тензором второго ранга. Векторы $\vec{T}_1,\ \vec{T}_2,\ \vec{T}_3$ можно называть составляющими тензора T по осям $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3$. Иногда аффинные ортогональные тензоры 2-го ранга называют аффинорами. Разложим векторы $\vec{T}_1,\ \vec{T}_2,\ \vec{T}_3$ по базису $\vec{e}$.

$$\vec{T}_1 = t_1^1\vec{e}_1 + t_1^2\vec{e}_2 + t_1^3\vec{e}_3 = t_1^i\vec{e}_i;$$

$$\vec{T}_2 = t_2^i\vec{e}_i;$$

$$\vec{T}_3 = t_3^i\vec{e}_i.$$

Определим дивергенцию тензора T с составляющими $\vec{T}_1,\ \vec{T}_2,\ \vec{T}_3$. Предположим, что $T \in C^1(D)$, т.е. $t_k^i \in C^1(D)$ (координаты тензора являются функциями координат точки $M(x_1,\ x_2,\ x_3)$). Дивергенцией тензора T называется вектор

$$\operatorname{div} T = \frac{\partial \vec{T}_1}{dx^1} + \frac{\partial \vec{T}_2}{dx^2} + \frac{\partial \vec{T}_3}{dx^3} = \frac{\partial \vec{T}_i}{dx^i} =$$

$$= \left(\frac{\partial t_1^1}{\partial x^1}\vec{e}_1 + \frac{\partial t_1^2}{\partial x^1}\vec{e}_2 + \frac{\partial t_1^3}{\partial x^1}\vec{e}_3 \right) + \left(\frac{\partial t_2^1}{\partial x^2}\vec{e}_1 + \frac{\partial t_2^2}{\partial x^2}\vec{e}_2 + \frac{\partial t_2^3}{\partial x^2}\vec{e}_3 \right) +$$

$$+ \left(\frac{\partial t_3^1}{\partial x^3}\vec{e}_1 + \frac{\partial t_3^2}{\partial x^3}\vec{e}_2 + \frac{\partial t_3^3}{\partial x^3}\vec{e}_3 \right) = \frac{\partial t_i^1}{\partial x^i}\vec{e}_1 + \frac{\partial t_i^2}{\partial x^i}\vec{e}_2 + \frac{\partial t_i^3}{\partial x^i}\vec{e}_3 =$$

$$= \operatorname{div} T\ ^1 \vec{e}_1 + \operatorname{div} T\ ^2 \vec{e}_2 + \operatorname{div} T\ ^3 \vec{e}_3 = \operatorname{div} T\ ^i \vec{e}_i = \frac{\partial t_i^k}{\partial x^i}\vec{e}_k.$$

Таким образом, $\operatorname{div} T$ – вектор $\frac{\partial t_i^k}{\partial x^i}\vec{e}_k$.

§ 13. *Формула Гаусса – Остроградского для поля тензора*

Пусть t_i^k – координаты тензора T, которые принадлежат классу $C^1\ D$. По аналогии с вектором тензор можно представить в виде суммы $T = \vec{T}_1\vec{e}_1 + \vec{T}_2\vec{e}_2 + \vec{T}_3\vec{e}_3$, т.е. в виде суммы трех диад: $\vec{T}_i\vec{e}_i$. Действительно,

$$T = \begin{pmatrix} t_1^1 & t_2^1 & t_3^1 \\ t_1^2 & t_2^2 & t_3^2 \\ t_1^3 & t_2^3 & t_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1^1 & 0 & 0 \\ t_1^2 & 0 & 0 \\ t_1^3 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & t_2^1 & 0 \\ 0 & t_2^2 & 0 \\ 0 & t_2^3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & t_3^1 \\ 0 & 0 & t_3^2 \\ 0 & 0 & t_3^3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} t_1^1 \\ t_1^2 \\ t_1^3 \end{pmatrix} 1 \quad 0 \quad 0 + \begin{pmatrix} t_2^1 \\ t_2^2 \\ t_2^3 \end{pmatrix} 0 \quad 1 \quad 0 + \begin{pmatrix} t_3^1 \\ t_3^2 \\ t_3^3 \end{pmatrix} 0 \quad 0 \quad 1 = t_k^i\ .$$

Определим в каждой точке поля для каждого направления $\vec{n}$ вектор $\vec{T}_n = T\vec{n} = \vec{T}_1 \cos\ \vec{n}, x^1\ + \vec{T}_2 \cos\ \vec{n}, x^2\ + \vec{T}_3 \cos\ \vec{n}, x^3$. Рассмотрим интеграл $\oint\limits_S \vec{T}_n dS$ и применим к нему формулу Гаусса – Остроградского:

$$\oint\limits_S \vec{n}T dS = \oint\limits_S \left(\vec{T}_1 \cos(\vec{n},x^1) + \vec{T}_2 \cos(\vec{n},x^2) + \vec{T}_3 \cos(\vec{n},x^3)\right) dS =$$

$$= \int\limits_V \left(\frac{\partial \vec{T}_1}{\partial x^1} + \frac{\partial \vec{T}_2}{\partial x^2} + \frac{\partial \vec{T}_3}{\partial x^3} \right) dV = \int\limits_V \frac{\partial \vec{T}_i}{\partial x^i} dV.$$

Напишем эту формулу в более развернутом виде:

$$\oint\limits_S T_n dS = \oint\limits_S T\vec{n} dS = \oint\limits_S \left(\vec{T}_1 \cos(\vec{n},x^1) + \vec{T}_2 \cos(\vec{n},x^2) + \vec{T}_3 \cos(\vec{n},x^3)\right) dS =$$

$$= \oint\limits_S \left(t_1^k \vec{e}_k \cos(\vec{n},x^1) + t_2^k \vec{e}_k \cos(\vec{n},x^2) + t_3^k \vec{e}_k \cos(\vec{n},x^3)\right) dS =$$

$$= \oint\limits_S \left(t_1^k \cos(\vec{n},x^1) + t_2^k \cos(\vec{n},x^2) + t_3^k \cos(\vec{n},x^3)\right) dS \vec{e}_k =$$

$$= \int\limits_V \frac{\partial t_i^k}{\partial x^i} \vec{e}_k dV = \int\limits_V \operatorname{div} T dV.$$

Таким образом, $\oint\limits_S \vec{n}T dS = \int\limits_V \operatorname{div} T dV$, т.е. поток тензора через замкнутую поверхность (так называется левая часть равенства) равен тройному интегралу от дивергенции тензора T по объему, ограниченному этой поверхностью.

Применим эту формулу к выводу уравнения движения сплошной среды (рис. 2). Выделим элементарную область в движущейся сплошной среде. По второму закону Ньютона, если рассматривать область Ω, заполненную массой, как материальную точку, то

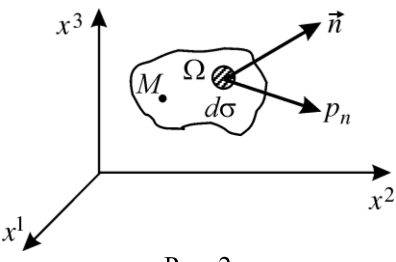

Рис. 2

$$\rho\Omega \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho\Omega \vec{f} + \int\limits_{\sigma_\Omega} \vec{p}_n d\sigma, \tag{9}$$

где ρ – объемная плотность массы; Ω – объем области; $\vec{f}$ – объемная сила, приходящаяся на единицу массы; $\vec{p}_n$ – напряжение на элементарной площадке $d\sigma$ с единичным нормальным вектором $\vec{n}$;

$$\int\limits_{\sigma_\Omega} \vec{p}_n dS = \int\limits_{\sigma_\Omega} T\vec{n} d\sigma ,$$

где T – тензор напряжений. По формуле Гаусса – Остроградского:

$$\int\limits_{\sigma_\Omega} T\vec{n} d\sigma = \int\limits_{\Omega} \operatorname{div} T d\omega =$$

$$= \vec{e}_1 \int\limits_{\Omega} \operatorname{div} T^{\,1} d\omega + \vec{e}_2 \int\limits_{\Omega} \operatorname{div} T^{\,2} d\omega + \vec{e}_3 \int\limits_{\Omega} \operatorname{div} T^{\,3} d\omega.$$

По теореме о среднем $\int\limits_{\sigma_\Omega} T\vec{n} d\sigma = \vec{e}_1 \Omega \operatorname{div} T^{\,1}_{\,*} + \vec{e}_2 \Omega \operatorname{div} T^{\,2}_{\,*} +$ $+ \vec{e}_3 \Omega \operatorname{div} T^{\,3}_{\,*}$. Подставляем правую часть в (9), деля на Ω и переходя к пределу при $\Omega \to M$ (Ω стягивается в точку M), получаем уравнение движения сплошной среды $\rho \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \rho \vec{f} + \operatorname{div} T.$ Это выражение – уравнение в векторной форме. В проекциях на оси координат получаем три скалярных уравнения:

$$\rho \frac{dv_1}{dt} = \rho f_1 + \frac{\partial t_i^1}{\partial x^i};$$

$$\rho \frac{dv_2}{dt} = \rho f_2 + \frac{\partial t_i^2}{\partial x^i};$$

$$\rho \frac{dv_3}{dt} = \rho f_3 + \frac{\partial t_i^3}{\partial x^i}.$$

Расшифруем, например, $\dfrac{\partial t_i^1}{\partial x^i} = \dfrac{\partial t_1^1}{\partial x^1} + \dfrac{\partial t_2^1}{\partial x^2} + \dfrac{\partial t_3^1}{\partial x^3}$.

§ 14. *Правила применения тензорной символики в векторных операциях*

В ортонормированном базисе $\vec{e}$ $\quad \vec{e}_i, \vec{e}_k \; = \delta_{ik}$; если $\vec{x} = \; x^1, x^2, x^3 \;$, то $\dfrac{\partial x^i}{\partial x^k} = \delta_{ik}$. Рассмотрим числа $\; \vec{e}_i, \left[\vec{e}_j, \vec{e}_k\right] \; = \varepsilon_{ijk}$, где $i = 1, 2, 3$, $j = 1, 2, 3$, $k = 1, 2, 3$.

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, \text{ если } (i, j, k) \text{ имеет четное число транспозиций;} \\ -1, \text{ если } (i, j, k) \text{ имеет нечетное число транспозиций;} \\ 0, \text{ если среди индексов } (i, j, k) \text{ имеются равные;} \end{cases}$$

$$\varepsilon_{123} = 1,\ \varepsilon_{132} = -1,\ \varepsilon_{213} = -1,\ \varepsilon_{231} = 1,\ \varepsilon_{312} = 1,\ \varepsilon_{321} = -1.$$

Покажем, что ε_{ijk} представляют тензор 3-го ранга. Для этого достаточно доказать, что при переходе к новому базису они преобразуются по тензорному закону: $\varepsilon'_{ijk} = \; \vec{e}'_i, \left[\vec{e}'_j, \vec{e}'_k\right] \; = \; c_i^l \vec{e}_l, \left[c_j^h \vec{e}_h, c_k^q \vec{e}_q\right] \; = c_i^l c_j^h c_k^q \varepsilon_{lhq}$. Таким образом, величины ε_{ijk} представляют тензор 3-го ранга, который меняет знак при отражении, т.е. равен 1 в правой системе координат и равен –1 в левой системе координат.

Понятие аксиального тензора в E_3. Выберем ОНБ $\; \vec{e} \;$ в E_3. Рассмотрим величину

$$\varepsilon = \begin{cases} 1, \text{ если базис правый;} \\ -1, \text{ если базис левый.} \end{cases}$$

Величина ε называется псевдоскаляром. Таким образом, если скаляр инвариантен при преобразовании координат, то псевдоскаляр – величина, которая меняет знак при переходе от правой системы координат к левой. Например, смешанное произведение векторов – псевдоскаляр.

Аксиальным тензором ранга r в E_3 будем называть произведение εT, где ε – псевдоскаляр; T – тензор ранга r. В частности, если T – вектор $T = \vec{a}$, то $\varepsilon \vec{a}$ будем называть псевдовектором (аксиальным вектором). Векторы типа векторного произведения – аксиальные, так как они меняют знак при переходе от правой системы координат к левой.

Как пользоваться аксиальным тензором ε_{ijk} в векторном исчислении? Тензор ε_{ijk} обладает свойством $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk}=\begin{vmatrix}\delta_{il} & \delta_{im}\\ \delta_{jl} & \delta_{jm}\end{vmatrix}$, δ_{ij} – символ Кронекера.

Доказательство. Можно доказать, что

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lms}=\begin{vmatrix}\delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{is}\\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{js}\\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{ks}\end{vmatrix}.$$

1. Если в i, j, k или l, m, s есть совпадающие индексы, то это очевидно.

2. Все индексы различны: i, j, k – четная перестановка; l, m, s – четная, тогда

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lms}=\begin{vmatrix}\delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13}\\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23}\\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33}\end{vmatrix}=|E|=1 \text{ и т.д.};$$

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk}=\begin{vmatrix}\delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{ik}\\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jk}\\ \delta_{kl} & \delta_{km} & 1\end{vmatrix}.$$

Пусть $i\neq k$. Если бы $i=k$, то имели бы $0=\begin{vmatrix}\delta_{il} & \delta_{im} & 1\\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jl}\\ \delta_{il} & \delta_{im} & 1\end{vmatrix}=0$ – очевидное равенство.

Пусть $j\neq k,$ если $j=k$: $0=\begin{vmatrix}\delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{ij}\\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & 1\\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & 1\end{vmatrix}=0.$

Таким образом, $i \neq k, \quad j \neq k$ и $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk} = \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & 0 \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & 0 \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} \end{vmatrix}$.

Векторное исчисление можем рассматривать как частный случай тензорного:

$$\vec{a}, \vec{b} \;\; = a^i b^i = \delta_{ik} a^i b^k;$$

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial a^i}{\partial x^i} = \delta_{ik} \frac{\partial a^i}{\partial x^k};$$

$$\left[\vec{a}, \, \vec{b}\right]^i = \varepsilon_{ijk} a^j b^k .$$

Действительно,

$$\left[\vec{a}, \vec{b}\right]^i = \;\left[\vec{a}, \vec{b}\right], \vec{e}_i \; = \; \vec{e}_i, \left[a^j \vec{e}_j, \vec{b}^k \vec{e}_k\right] \; = a^j b^k \;\; \vec{e}_i, \left[\vec{e}_j, \vec{e}_k\right] \; = \varepsilon_{ijk} a^j b^k;$$

$$\operatorname{rot} \vec{a} \;\; ^i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial a^k}{\partial x^j} .$$

Докажем это.

Пусть

$$\operatorname{rot} \vec{a} \;\; ^i = \; \operatorname{rot} \vec{a}, \vec{e}_i \; = \; \vec{e}_i, \; \nabla, \vec{a} \; = \; \vec{e}_i, \left[\nabla^j \vec{e}_j, a^k \vec{e}_k\right] \; =$$

$$= \nabla^j a^k \;\; \vec{e}_i, \left[\vec{e}_j, \vec{e}_k\right] \; = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial a^k}{\partial x^j};$$

$$\operatorname{grad} \varphi \;\; ^i = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} .$$

Доказательство:

$$\operatorname{grad} \varphi \;\; ^i = \; \vec{e}_i, \nabla \;\; \varphi = \; \vec{e}_i, \nabla^j \vec{e}_j \;\; \varphi = \; \vec{e}_i, \vec{e}_j \;\; \nabla^j \varphi = \delta_{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial x^j} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} .$$

Рассмотрим основные векторные операции.

1. $\operatorname{div} \; \vec{u}, \, \vec{v} \; = \; \operatorname{rot} \vec{u}, \, \vec{v} \; - \; \vec{u}, \, \operatorname{rot} \vec{v} \;$.

Доказательство:

$$\operatorname{div} \;\vec{u}, \vec{v} \;\; = \frac{\partial}{\partial x^i} \;\; \vec{u}, \vec{v} \;\; ^i = \frac{\partial}{\partial x^i} \;\; \varepsilon_{kij} u^j v^k \;\; =$$

$$= \varepsilon_{ijk} \frac{\partial u_j}{\partial x^i} v^k + \varepsilon_{ijk} \frac{\partial v^k}{\partial x^i} u^j = v^k \varepsilon_{kij} \frac{\partial u^j}{\partial x^i} - u^j \varepsilon_{jik} \frac{\partial v^k}{\partial x^i} =$$

$$= \; \vec{v}, \, \operatorname{rot} \vec{u} \; - \; \vec{u}, \, \operatorname{rot} \vec{v} \; .$$

2. $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{u} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{u} - \Delta\vec{u}$.

Доказательство:

$$[\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{u}]^i = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial [\operatorname{rot}\vec{u}]^k}{\partial x^j} = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x^j}\varepsilon_{klm}\frac{\partial u^m}{\partial x^l} =$$

$$= \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk}\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial u^m}{\partial x^l}\right) = \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} \end{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial u^m}{\partial x^l}\right) =$$

$$= \underbrace{\delta_{il}\delta_{jm}}_{l=i,m=j}\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial u^m}{\partial x^l}\right) - \underbrace{\delta_{im}\delta_{jl}}_{m=i,l=j}\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial u^m}{\partial x^l}\right) = \frac{\partial}{\partial x^j}\frac{\partial u^j}{\partial x^i} - \frac{\partial}{\partial x^j}\frac{\partial u^i}{\partial x^j} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial u^j}{\partial x^j}\right) - \frac{\partial^2 u^i}{\partial x^{j2}} = (\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{u})^i - (\nabla^2\vec{u})^i.$$

3. Чему равен $\operatorname{rot}[\vec{u},\vec{v}]$?

Доказательство:

$$rot[\vec{u},\vec{v}]^i = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial [\vec{u},\vec{v}]^k}{\partial x^j} = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x^j}(\varepsilon_{klm}u^l v^m) = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk}\frac{\partial}{\partial x^j}(u^l v^m) =$$

$$= \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} \end{vmatrix} \cdot \left(\frac{\partial u^l}{\partial x^j}v^m + u^l\frac{\partial v^m}{\partial x^j}\right) = \underset{l=i}{\delta_{il}}\,\underset{m=j}{\delta_{jm}}\left(\frac{\partial u^l}{\partial x^j}v^m + u^l\frac{\partial v^m}{\partial x^j}\right) -$$

$$-\underset{m=i}{\delta_{im}}\,\underset{l=j}{\delta_{jl}}\left(\frac{\partial u^l}{\partial x^j}v^m + u^l\frac{\partial v^m}{\partial x^j}\right) = \frac{\partial u^i}{\partial x^j}v^j + u^i\frac{\partial v^j}{\partial x^j} - \frac{\partial u^j}{\partial x^j}v^i - u^j\frac{\partial v^i}{\partial x^j} =$$

$$= ((\vec{v},\nabla)\vec{u})^i + (\vec{u}\operatorname{div}\vec{v})^i - (\vec{v}\operatorname{div}\vec{u})^i - ((\vec{u},\nabla)\vec{v})^i$$

Таким образом, $\operatorname{rot}[\vec{u},\vec{v}] = \vec{u}\operatorname{div}\vec{v} - \vec{v}\operatorname{div}\vec{u} + (\vec{v},\nabla)\vec{u} - (\vec{u},\nabla)\vec{v}$.

4. Доказать, что

$[\vec{u},\operatorname{rot}\vec{v}] + [\vec{v},\operatorname{rot}\vec{u}] + (\vec{u},\nabla)\vec{v} + (\vec{v},\nabla)\vec{u} = \operatorname{grad}(\vec{u},\vec{v})$.

Доказательство. Пусть i-я координата левой части

$$\varepsilon_{ijk}u^j(\operatorname{rot}\vec v)^k+\varepsilon_{ijk}v^j(\operatorname{rot}\vec u)^k+u^j\frac{\partial v^i}{\partial x^j}+v^j\frac{\partial u^i}{\partial x^j}=\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk}u^j\frac{\partial v^m}{\partial x^l}+$$

$$+\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk}v^j\frac{\partial u^m}{\partial x^l}+u^j\frac{\partial v^i}{\partial x^j}+v^j\frac{\partial u^i}{\partial x^j}=\begin{vmatrix}\delta_{il} & \delta_{im}\\ \delta_{jl} & \delta_{jm}\end{vmatrix}\cdot\left(u^j\frac{\partial v^m}{\partial x^l}+v^j\frac{\partial u^m}{\partial x^l}\right)+$$

$$+u^j\frac{\partial v^i}{\partial x^j}+v^j\frac{\partial u^i}{\partial x^j}=\underbrace{u^j\frac{\partial v^j}{\partial x^i}+v^j\frac{\partial u^j}{\partial x^i}}_{l=i,m=j}-$$

$$\underbrace{-u^j\frac{\partial v^i}{\partial x^j}-v^j\frac{\partial u^i}{\partial x^j}}_{m=i,l=j}+u^j\frac{\partial v^i}{\partial x^j}+v^j\frac{\partial u^i}{\partial x^j}=u^j\frac{\partial v^j}{\partial x^i}+v^j\frac{\partial u^j}{\partial x^i}=\frac{\partial}{\partial x^i}(\vec u,\vec v),$$

что и требовалось доказать.

5. Чему равен $\operatorname{rot}\left[\vec c, f(r)\vec r\right]$, если $\vec c$ – постоянный вектор.

$$\left[\operatorname{rot}\left[\vec c, f(r)\vec r\right]\right]^i=\varepsilon_{ijk}\frac{\partial\left[\vec c, f(r)\vec r\right]^k}{\partial x^j}=\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk}\frac{\partial c^l f(r)x^m}{\partial x^j}=$$

$$=\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk}\left(c^l\frac{\partial f(r)}{\partial x^j}x^m+c^l f(r)\frac{\partial x^m}{\partial x^j}\right)=$$

$$=\begin{vmatrix}\delta_{il} & \delta_{im}\\ \delta_{jl} & \delta_{jm}\end{vmatrix}\cdot\left(c^l\frac{f'(r)}{r}x^jx^m+c^l f(r)\frac{\partial x^m}{\partial x^j}\right)=$$

$$=\underbrace{c^i\frac{f'(r)}{r}x^jx^j+c^i f(r)\frac{\partial x^j}{\partial x^j}}_{l=i,m=j}\underbrace{-c^j\frac{f'(r)}{r}x^jx^i-c^j f(r)\frac{\partial x^i}{\partial x^j}}_{m=i,l=j}=$$

$$=c^i\frac{f'(r)}{r}r^2+3c^l f(r)-\frac{f'(r)}{r}(\vec c,\vec r)x^i-f(r)c^i,$$

так как $\frac{\partial x^j}{\partial x^j}=3$, $\frac{\partial x^i}{\partial x^j}=\begin{cases}1, j=i;\\ 0, i\neq j.\end{cases}$

Таким образом, $\operatorname{rot}\left[\vec c, f(r)\vec r\right]=\vec c f'(r)r-\frac{f'(r)}{r}(\vec c,\vec r)\vec r+2\vec c f(r)$.

6. Вычислить $\oint\!\!\!\oint_S \left[(\vec n,\vec u)-(\vec n,\operatorname{rot}\vec u)\right]\vec r\,ds.$

$$\oint_s \left([\vec{n},\vec{u}]^i - (\vec{n}, \operatorname{rot}\vec{u})\,\vec{r}^{\;i} \right) ds = \oint_s \left\{ \varepsilon_{ijk} n^j u^k - x^i n^j \varepsilon_{jlm} \frac{\partial u^m}{\partial x^l} \right\} ds,$$

применяем формулу Гаусса – Остроградского:

$$\int_v \left(\varepsilon_{ijk} \frac{\partial u^k}{\partial x^j} - \varepsilon_{jlm} \frac{\partial}{\partial x^j} \left(x^i \frac{\partial u^m}{\partial x^l} \right) \right) dv =$$

$$= \int_v \left(\varepsilon_{ijk} \frac{\partial u^k}{\partial x^j} - \varepsilon_{jlm} \underbrace{\frac{\partial x^i}{\partial x^j}}_{j=i} \frac{\partial u^m}{\partial x^l} - \varepsilon_{jlm} x^i \frac{\partial^2 u^m}{\partial x^j \partial x^l} \right) dv =$$

$$= \int_v \left(\varepsilon_{ijk} \frac{\partial u^k}{\partial x^j} - \varepsilon_{ilm} \frac{\partial u^m}{\partial x^l} - \varepsilon_{jlm} x^i \frac{\partial^2 u^m}{\partial x^j \partial x^l} \right) dv = \int_v x^i \frac{\partial}{\partial x^l} \left(\varepsilon_{ljm} \frac{\partial u^m}{\partial x^j} \right) dv =$$

$$= \int_v x^i \frac{\partial}{\partial x^l} (\operatorname{rot}\vec{u})^l \, dv = 0,$$

так как $\dfrac{\partial}{\partial x^l} (\operatorname{rot}\vec{u})^l = \operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{u} = 0$ и $(\nabla, [\nabla,\vec{u}]) = 0$.

Таким образом, $\oint_s \left([\vec{n},\vec{u}] - (\vec{n}, \operatorname{rot}\vec{u})\,\vec{r} \right) ds = 0$.

Изложенный метод применения тензорной символики в векторных операциях широко используется в физических курсах, читаемых в МИФИ.

Рекомендуемая литература

1. Кочин И.Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. – М.: Изд-во АНСССР, 1951.

2. Будак Б.М., Фомин С.В. Кратные интегралы и ряды. – М.: Наука, 1965.

Евгений Борисович Сандаков

Светлана Григорьевна Селиванова

НАЧАЛА ВЕКТОРНОГО АНАЛИЗА

Методические рекомендации

Редактор *М.В. Макарова*

Оригинал-макет изготовлен *С.В. Тялиной*

Подписано в печать 18.06.2009. Формат 60×84 1/16.
Уч.-изд. л. 2,5. Печ. л. 2,5. Тираж 350 экз. Изд. № 057-1 Заказ № 000

Московский инженерно-физический институт (государственный университет).
Типография МИФИ. 115409, Москва, Каширское ш., 31.

ДЛЯ ЗАМЕТОК