Федеральное агентство по образованию Российской Федерации

Московский инженерно-физический институт
(государственный университет)

А.С. Логинов, Н.В. Мирошин, С.Г. Селиванова

Избранные разделы курса
«Векторный анализ»
(теория и примеры)

Москва 2009

УДК 514.742.4(07)

ББК 22.151.5я7

Л69

Логинов А. С., Мирошин Н. В., Селиванова С. Г. **Избранные разделы курса «Векторный анализ» (теория и примеры)**: Учебно-методическое пособие. - М.: МИФИ, 2009. – 96 с.

Данное пособие предназначено для студентов МИФИ второго курса (3-й семестр) факультета «Т». В нем содержится материал по базовым разделам теории двойных, тройных, криволинейных и поверхностных интегралов. Кроме этого, в пособие включены элементы теории поля, дифференциальные операторы. Отдельная глава посвящена интегралам, зависящим от параметра. Эти разделы составляют лекционный курс «Векторный и тензорный анализ», за исключением последних разделов курса, посвященных началам тензорного исчисления, которые в настоящем пособии не рассматриваются. Перед каждым разделом приводятся теоретические сведения, необходимые для решения задач, после чего разбираются примеры по соответствующей теме. Теоретические материалы, непосредственно не относящиеся к задачам, приведенным в пособии, исключаются из рассмотрения.

Рецензент: д. ф.–м. н. Ю.Н. Гордеев

Рекомендовано редсоветом МИФИ в качестве учебного пособия

ISBN 978-5-7262-1118-3

Оглавление

Глава 1. ДВОЙНЫЕ И ТРОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

1.1. Вычисление двойных интегралов

1.1.1. Интегрирование по прямоугольнику

Рассмотрим прямоугольник $D=[a,b]\times[c,d]=\{a\le x\le b,\ c\le y\le d\}$.

Теорема. *Если функция $f(x,y)$ интегрируема на D и для любого x существует интеграл* $\int\limits_c^d f(x,y)dy$, *то существует и интеграл* $\int\limits_a^b\left[\int\limits_c^d f(x,y)dy\right]dx$ *и выполняется равенство*

$$\int\limits_a^b\left[\int\limits_c^d f(x,y)dy\right]dx=\int\limits_a^b dx\int\limits_c^d f(x,y)dy=\iint\limits_D f(x,y)dxdy.$$

Интегралы $\int\limits_c^d dy\int\limits_a^b f(x,y)dx$, $\int\limits_a^b dx\int\limits_c^d f(x,y)dy$ *называются повторными.*

Перемена порядка интегрирования. *Если $f(x,y)$ интегрируема на D и для любого y существует интеграл* $\int\limits_a^b f(x,y)dx=I(y)$, *а для любого x существует интеграл* $\int\limits_c^d f(x,y)dy$, *то существуют и повторные интегралы*

$$\int\limits_c^d\left[\int\limits_a^b f(x,y)dx\right]dy,\quad \int\limits_a^b\left[\int\limits_c^d f(x,y)dy\right]dx$$

и выполняется равенство

$$\int\limits_c^d dy\int\limits_a^b f(x,y)dx=\int\limits_a^b dx\int\limits_c^d f(x,y)dy=\iint\limits_D f(x,y)dxdy.$$

1.1.2. Интегрирование по области, представляющей собой криволинейную трапецию

Рассмотрим область $D=\{(x,y): y_1(x) \le y \le y_2(x), x\in[a,b]\}$, где $y_1(x)$, $y_2(x)$ – непрерывные функции на $[a,b]$. Области такого вида будем называть областями типа A (рис.1.1). Области вида $D=\{(x,y): x_1(y)\le x\le x_2(y),\ \ y\in[c,d]\}$, где $x_1(y)$, $x_2(y)$ – непрерывные функции на $[c,d]$, называются областями типа B (рис.1.2) .

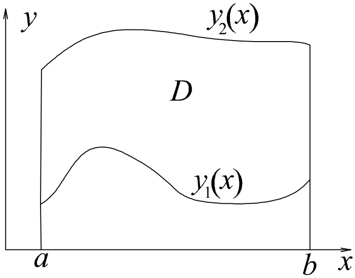

Рис. 1.1

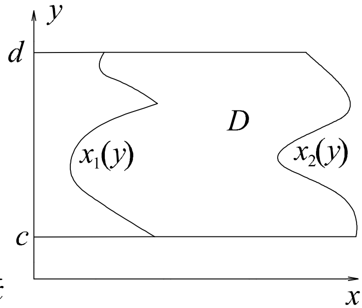

Рис. 1.2

Теорема. *Если для области типа A существует интеграл* $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ *и для любого* $x\in[a,b]$ *существует интеграл* $\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$, *то существует интеграл* $\int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$ *и выполняется равенство* $\int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy = \iint\limits_D f(x,y)dxdy$.

Пример 1.1. Расставить пределы интегрирования в интеграле $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ в том и другом порядке. Рассмотреть два случая: область задается в виде $D=\{(x,y):0 \le x\le 1,\ x^2\le y\le 1+(x-1)^2\}$ (рис. 1.3);

область задается в виде $D=\{(x,y):0\le x\le 1,\ x^2-1\le y\le \cos(\frac{\pi}{2}x)\}$ (рис. 1.4).

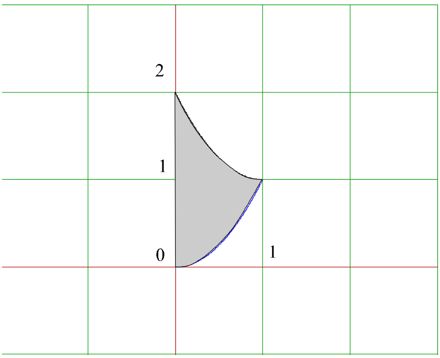

Рис. 1.3

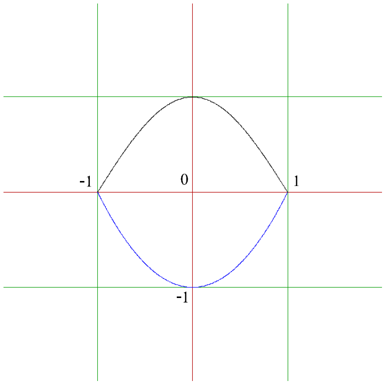

Рис. 1.4

Решение. Для первой области интеграл будет равен

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{2-2x+x^2} f(x,y)dy=\int_1^2 dy\int_0^{1+\sqrt{y-1}} f(x,y)dx+$$

$$+\int_1^2 dy\int_0^{1+\sqrt{y-1}} f(x,y)dx.$$

Для второй области расстановка пределов выполняется следующим образом:

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_{-1}^1 dx\int_{x^2-1}^{x^2} f(x,y)dy=\int_{-1}^0 dy\int_{-\sqrt{y+1}}^{\sqrt{y+1}} f(x,y)dx+$$

$$+\int_0^1 dy\int_{-\frac{2}{\pi}\arccos y}^{\frac{2}{\pi}\arccos y} f(x,y)dx.$$

1.2. Замена переменных в двойном интеграле

1.2.1. Отображение плоских областей

Рассмотрим два экземпляра плоскости: плоскость переменных x, y и область D в этой плоскости; плоскость переменных ξ, η и область Σ в этой плоскости (рис. 1.5).

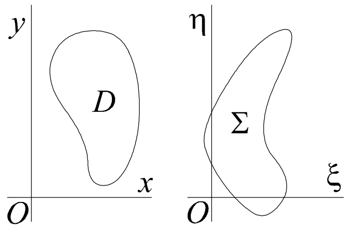

Рис. 1.5

Пусть имеется взаимно однозначное отображение области D на область Σ

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \xi(x, y) \\ \eta &= \eta(x, y) \end{aligned}\right\}, (x, y) \in D. \tag{1.1}$$

Обратное отображение запишем в виде:

$$\left.\begin{aligned} x &= x(\xi, \eta) \\ y &= y(\xi, \eta) \end{aligned}\right\}, \ (\xi, \eta) \in \Sigma. \tag{1.2}$$

Будем предполагать, что отображения (1.1), (1.2) непрерывно дифференцируемы и якобианы этих отображений не обращаются в ноль:

$$\frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \xi}{\partial x} & \dfrac{\partial \xi}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \eta}{\partial x} & \dfrac{\partial \eta}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0, \ \frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial x}{\partial \eta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Для этих якобианов выполняется равенство

$$\frac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)}\,\frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}=1.$$

1.2.2. Вычисление площади при отображениях

Пусть заданы отображения (1.1), (1.2), тогда площадь области D будет равна $\mu D=\iint\limits_D dxdy=\iint\limits_\Sigma \left|\frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}\right| d\xi d\eta$.

1.2.3. Примеры отображений

Проиллюстрируем три известных отображения, которые изучаются в курсе теории функций комплексного переменного. На рисунках показана координатная сетка, по которой можно судить о характере деформации области при каждом из этих отображений.

Экспонента. Это отображение определяется функциями:

$$\left.\begin{aligned} u &= e^x \cos y \\ v &= e^x \sin y \end{aligned}\right\},\quad (x,y)\in\Sigma,\ \Sigma=[-3,1]\times[0,\pi].$$

Область Σ показана на рис. 1.6, а образ этой области при данном отображении представлен на рис. 1.7.

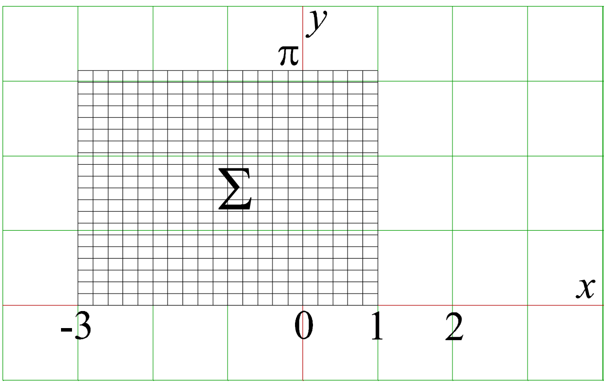

Рис. 1.6

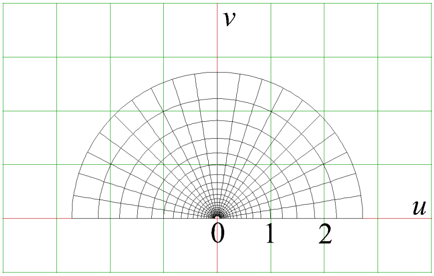

Рис. 1.7

Функция Жуковского. Отображение определяется функциями:

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{1}{2}\left(x + \frac{x}{x^2+y^2}\right) \\ v &= \frac{1}{2}\left(y - \frac{y}{x^2+y^2}\right) \end{aligned}\right\}, (x, y) \in \Sigma.$$

В качестве области Σ выбрано множество $[0,\pi]\times[0.25,0.9]$ в полярных координатах $\left.\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \end{aligned}\right\}, \varphi \in [0,\pi], r \in [0.25, 0.9]$ (рис. 1.8).

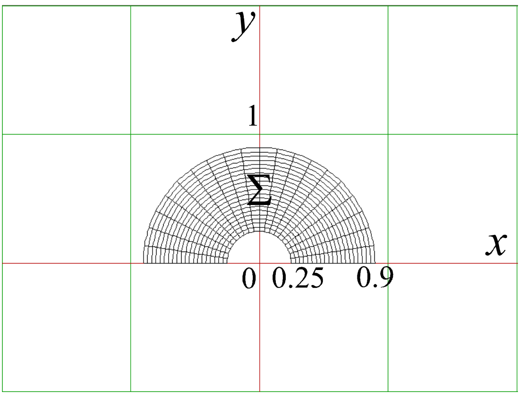

Рис. 1.8

Образ области Σ при отображении функцией Жуковского показан на рис. 1.9.

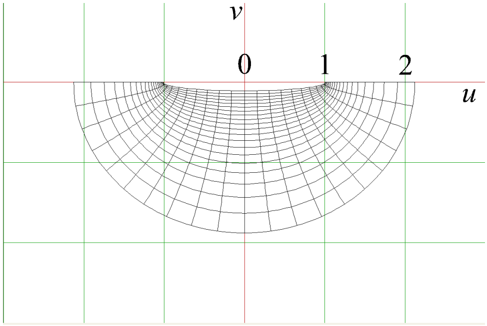

Рис. 1.9

Дробно-линейное отображение. Здесь приводится некоторый частный случай дробно-линейного отображения. На рис. 1.10 показан вид образа области $\Sigma = [0.25,1]\times[0,1]$ при отображении

$$\left.\begin{aligned} u &= 1 + \frac{x}{x^2+y^2} \\ v &= 1 - \frac{y}{x^2+y^2} \end{aligned}\right\},\ (x,y)\in\Sigma.$$

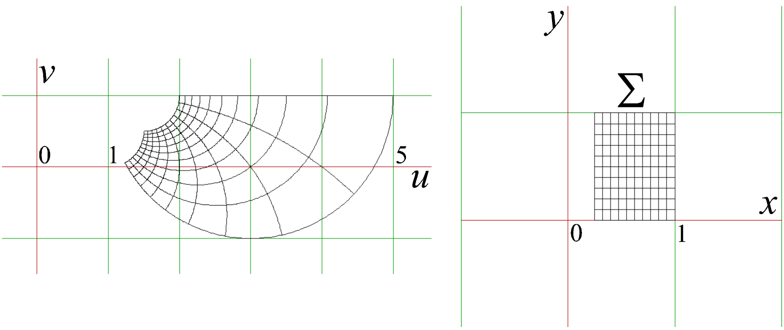

Рис. 1.10

1.2.4. Замена переменных в двойном интеграле

Рассмотрим отображение $\left.\begin{matrix} \xi = \xi(x, y) \\ \eta = \eta(x, y) \end{matrix}\right\}, (x, y) \in D$ и его обратное отображение $\left.\begin{matrix} x = x(\xi, \eta) \\ y = y(\xi, \eta) \end{matrix}\right\}, (\xi, \eta) \in \Sigma$. Будем предполагать, что это отображение непрерывно дифференцируемо в области D и имеет там отличный от нуля якобиан.

Теорема. *Пусть функция f интегрируема в D, тогда*

$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy = \iint\limits_\Sigma f[x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)]\left|\frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)}\right| d\xi d\eta .$$

Пример 1.2. Рассмотреть область $D=\{\varphi\in[\alpha,\beta], r\in[r_1,r_2]\}$ (рис. 1.11) и сделать замену в интеграле $\iint\limits_D f(x, y)dxdy$, используя полярные координаты

$$\left.\begin{matrix} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{matrix}\right\}, \varphi\in[\varphi_1, \varphi_2], r\in[r_1, r_2] .$$

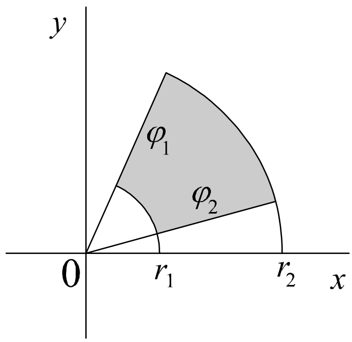

Рис. 1.11

Решение. Для полярных координат вычисляем якобиан отображения $\dfrac{D(x,y)}{D(\varphi,r)} = \begin{vmatrix} -r\sin\varphi & \cos\varphi \\ r\cos\varphi & \sin\varphi \end{vmatrix} = -r$, $\left|\dfrac{D(x,y)}{D(\varphi,r)}\right| = r$. Поэтому для областей указанного типа получим

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{r_1}^{r_2} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r dr =$$

$$= \int_{r_1}^{r_2} r dr \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) d\varphi .$$

Пример 1.3. Сделать замену переменных $u=x+y$, $v=y-x$ в интеграле $\iint_D f(x,y)dxdy$ для области $D=\{|x|+|y|\le 1\}$ (рис. 1.12 слева).

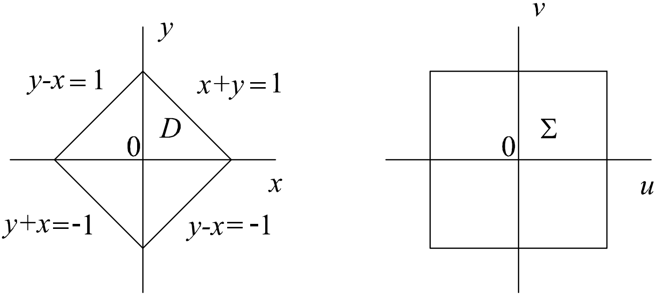

Рис. 1.12

Решение. В координатах u, v область Σ является квадратом со сторонами параллельными координатным осям (рис. 1.12 справа). Якобиан отображения $\left|\dfrac{D(u,v)}{D(x,y)}\right| = \left\|\begin{matrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{matrix}\right\| = 2$. Нужный нам якобиан равен $\left|\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}\right| = \dfrac{1}{2}$. Поэтому

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_\Sigma f\left(\frac{u-v}{2},\frac{u+v}{2}\right)\frac{1}{2}dudv =$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}du\int_{-1}^{1} f\left(\frac{u-v}{2},\frac{u+v}{2}\right)dv\,.$$

Пример 1.4. Сделать замену переменных $x=u\cos^4 v$, $y=u\sin^4 v$ в интеграле $\iint_D f(x,y)dxdy$ для области D, ограниченной осями координат x=0, y=0 и аркой астроиды $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ (рис. 1.13).

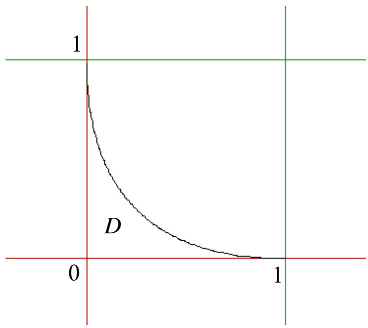

Рис. 1.13

Решение. Отображение $x=u\cos^4 v$, $y=u\sin^4 v$ является обобщенными полярными координатами, где параметр v имеет смысл угла, а параметр u является радиусом обобщенных полярных координат. Поэтому область интегрирования D в обобщенных координатах (u,v) описывается, как прямоугольник $\Sigma=[0,1]\times[0,\pi/2]$. Якобиан отображения будет равен

$$\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right| = \begin{vmatrix}\cos^4 v & -4u\cos^3 v\sin v\\ \sin^4 v & 4u\sin^3 v\cos v\end{vmatrix} = 4u\sin^3 v\cos^5 v +$$

$$+4u\cos^3 v\sin^5 v = 4u\sin^3 v\cos^3 v\,.$$

Тогда

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = 4\int\limits_0^1 udu\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(u\cos^4 v, u\sin^4 v\right)\sin^3 v\cos^3 v dv\ .$$

Пример 1.5. Является ли конечной площадь области, заключенной между биссектрисой второго–четвертого координатных углов и кривой $(x^3+y^3)^2=x^2+y^2$ (рис. 1.14).

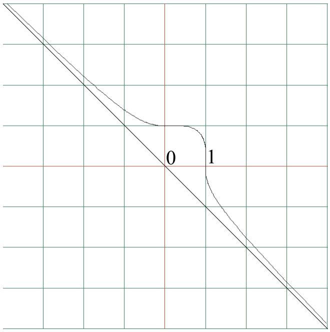

Рис. 1.14

Решение. В полярных координатах уравнение заданной области имеет вид $r^6(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi)^2=r^2$, $r=\dfrac{1}{\sqrt{\cos^3\varphi+\sin^3\varphi}}$. Тогда площадь указанной области будет равна

$$\mu D = \iint\limits_D dxdy = \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} d\varphi \int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{\cos^3\varphi+\sin^3\varphi}}} rdr = \frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \frac{d\varphi}{\cos^3\varphi+\sin^3\varphi} =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \frac{d\varphi}{(\cos\varphi+\sin\varphi)(1-\cos\varphi\sin\varphi)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \frac{d\varphi}{\sin(\varphi+\frac{\pi}{4})(2-\sin 2\varphi)} =$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\frac{d\varphi}{\sin(\varphi+\frac{\pi}{4})(2+\cos(2(\varphi+\frac{\pi}{4})))}=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\frac{d\cos(\varphi+\frac{\pi}{4})}{\sin^2(\varphi+\frac{\pi}{4})(2+\cos(2(\varphi+\frac{\pi}{4})))}=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\frac{d\cos(\varphi+\frac{\pi}{4})}{(1-\cos^2(\varphi+\frac{\pi}{4}))(1+2\cos^2(\varphi+\frac{\pi}{4}))}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_{1}^{-1}\frac{du}{(1-u^2)(1+2u^2)}.$$

Этот интеграл расходится и область не имеет конечной площади.

1.3. Тройные интегралы

1.3.1. Сведение тройного интеграла к повторному для прямоугольного параллелепипеда

Пусть V – прямоугольный параллелепипед $[a,b]\times[c,d]\times[g,h]$ и функция $f(x,y,z)$ определена на V. Проекцию этой области на плоскость $x=0$ обозначим D через (рис. 1.15). Эта область представляет собой прямоугольник $[c,d]\times[g,h]$.

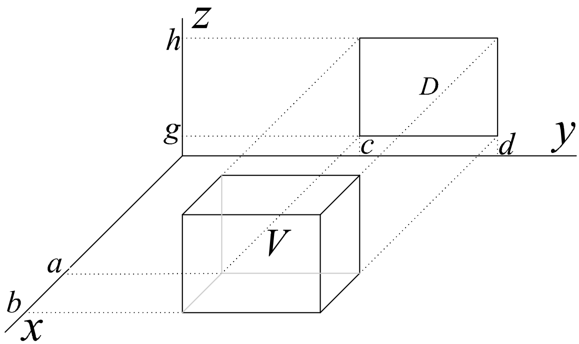

Рис. 1.15

Теорема. *Если существует* $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$ *и для любого* $x\in[a,b]$ *существует* $\iint\limits_D f(x,y,z)dydz$*, то существует интеграл* $\int\limits_a^b dx\iint\limits_D f(x,y,z)dydz$ *и имеет место равенство*

$$\int\limits_a^b dx\iint\limits_D f(x,y,z)dydz = \iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz.$$

В формулировке теоремы и в дальнейшем используются обозначения

$$\int\limits_a^b dx\iint\limits_D f(x,y,z)dydz = \int\limits_a^b\left(\iint\limits_D f(x,y,z)dydz\right)dx.$$

В свою очередь, внутренние двойные интегралы можно представить в виде повторных интегралов. Для первого из написанных соотношений это будет выглядеть следующим образом:

$$\int\limits_a^b dx\int\limits_c^d dy\int\limits_g^h f(x,y,z)dz = \iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz,$$

$$\int\limits_a^b dx\int\limits_g^h dz\int\limits_c^d f(x,y,z)dy = = \iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz,$$

где используются обозначения:

$$\int\limits_a^b dx\int\limits_c^d dy\int\limits_g^h f(x,y,z)dz = \int\limits_a^b\left(\int\limits_c^d\left(\int\limits_g^h f(x,y,z)dz\right)dy\right)dx.$$

Можно собирать внешние повторные интегралы в двойные, в результате получатся равенства:

$$\iint\limits_{D_{xy}} dxdy \int\limits_{g}^{h} f(x,y,z)dz = \iiint\limits_{V} f(x,y,z)dxdydz,$$

$$\iint\limits_{D_{zx}} dzdx \int\limits_{c}^{d} f(x,y,z)dy == \iiint\limits_{V} f(x,y,z)dxdydz .$$

Для другой координатной плоскости получим

$$\iint\limits_{D_{yz}} dydz \int\limits_{a}^{b} f(x,y,z)dx = \iiint\limits_{V} f(x,y,z)dxdydz ,$$

здесь $D_{xy} = D_z = [a,b] \times [c,d]$, $D_{zx} = D_y = [g,h] \times [a,b]$, $D_{yz} = D_x =$

$= [c,d] \times [g,h]$.

1.3.2. Сведение тройного интеграла к повторному интегралу для областей общего вида

Пусть V – область, расположенная между плоскостями $x=a$, $x=b$. Через L_x обозначим плоскость, параллельную координатной плоскости Oyz и проходящую через точку x. Для точек $x \in [a,b]$ обозначим через D_x сечение области V плоскостью L_x . Будем предполагать, что D_x квадрируема для всех $x \in [a,b]$. При этих предположениях справедлива следующая теорема:

Теорема. *Если существует* $\iiint\limits_{V} f(x,y,z)dxdydz$ *и для любого* $x \in [a,b]$ *существует интеграл* $I(x) = \iint\limits_{D_x} f(x,y,z)dydz$, *то существует и повторный интеграл* $\int\limits_{a}^{b} dx \iint\limits_{D_x} f(x,y,z)dydz$, *и этот интеграл будет равен тройному интегралу*

$$\int\limits_{a}^{b} dx \iint\limits_{D_x} f(x,y,z)dydz = \iiint\limits_{V} f(x,y,z)dxdydz.$$

Указанные в формулировке теоремы области показаны на рис. 1.16.

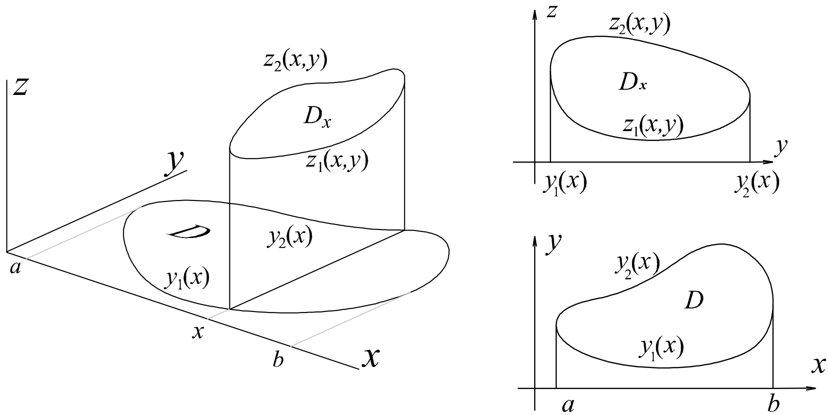

Рис. 1.16

Замечание. Сечение $D_x = V \cap L_x$ может быть задано в виде

$$D_x = \{(y,z) \colon y_1(x) \le y \le y_2(x) \,,\, z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y)\}.$$

В этом случае пределы интегрирования в тройном интеграле можно расставить следующим образом:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz =$$

$$= \iint\limits_D dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz \,,$$

где D – представляет собой проекцию области V на плоскость $z=0$. Эта проекция описывается неравенствами $D = \{(x,y){:}a \le x \le b, y_1(x) \le y \le y_2(x)\}$. Расставляя переменные x, y, z в другом порядке, можно получить другие аналогичные формулы представления тройного интеграла через повторные интегралы.

1.3.3. Замена переменных в тройном интеграле

Пусть задано взаимно-однозначное, непрерывно-дифференцируемое отображение

$$\left.\begin{aligned} x &= x(\xi,\eta,\zeta)\\ y &= y(\xi,\eta,\zeta)\\ z &= z(\xi,\eta,\zeta)\end{aligned}\right\}, (\xi,\eta,\zeta)\in\Sigma$$

с якобианом, отличным от нуля, переводящее область Σ в область *V,* где области Σ и V кубируемы.

В этом случае для объема области *V* справедлива формула

$$\mu\, V = \iiint\limits_{\Sigma} \left|\frac{D(x,y,z)}{D(\xi,\eta,\zeta}\right| d\xi\, d\eta\, d\zeta\,.$$

Теорема (*о замене переменных*). *Если f интегрируема в V, то*

$$\iiint\limits_{V} f\,(x,y,z)\,dx\,dy\,dz\ =$$

$$=\iiint\limits_{\Sigma} f\,[x(\xi,\eta,\zeta),y(\xi,\eta,\zeta),z(\xi,\eta,\zeta)]\left|\frac{D(x,y,z)}{D(\xi,\eta,\zeta}\right| d\xi\, d\eta\, d\zeta\,.$$

Пример 1.6. Цилиндрические координаты. Вычислить интеграл $\iiint\limits_{V}\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz\,,$ где область интегрирования $V=\{x^2+y^2=z^2, 0\le z\le 1\}$ представляет собой конус (рис. 1.17).

Решение. Воспользуемся цилиндрическими координатами

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\varphi\\ y &= r\sin\varphi\\ z &= h\end{aligned}\right\},\ \left|\frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,h)}\right| = r\,.$$

В этом случае область D можно описать неравенствами в цилиндрических координатах $D = \{(r,\varphi,h)\colon 0\le h\le 1\ ,0\le\varphi\le 2\pi\ ,0\le r\le h\}$. Тогда для указанного в условии интеграла по формуле замены переменных получим

$$\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_D r^2 dr\,d\varphi\,dh =$$

$$= \int\limits_0^1 dh \iint\limits_{D_h} r^2 dr\,d\varphi = = \int\limits_0^1 dh \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^h r^2 dr = 2\pi \int\limits_0^1 \frac{h^3}{3} dh = \frac{\pi}{6}.$$

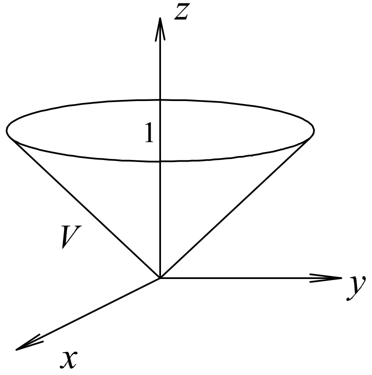

Рис. 1.17

Пример 1.7. Сферические координаты. Вычислить интеграл $A = = \iiint\limits_V xyz dx\,dy\,dz$ по области V, расположенной в первом октанте, внутри единичного шара: $x^2+y^2+z^2\le 1, 0\le x, 0\le y, 0\le z$.

Решение. Для сферических координат имеем:

$$\left.\begin{aligned} x &= \rho\cos\theta\cos\varphi \\ y &= \rho\cos\theta\sin\varphi \\ z &= \rho\sin\theta \end{aligned}\right\},$$

$$\frac{D(x,y,z)}{D(\varphi,\rho,\theta)} = \begin{vmatrix} -\rho\cos\theta\sin\varphi & \cos\theta\cos\varphi & -\rho\sin\theta\cos\varphi \\ \rho\cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & -\rho\sin\theta\sin\varphi \\ 0 & \sin\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} =$$

$$= -\sin\theta(\rho^2\sin\theta\cos\theta\sin^2\varphi + \rho^2\sin\theta\cos\theta\cos^2\varphi) -$$

$$-\rho\cos\theta(\rho\cos^2\theta\sin^2\varphi + \rho\cos^2\theta\cos^2\varphi) =$$

$$= -\sin\theta\rho^2\sin\theta\cos\theta - \rho\cos\theta\rho\cos^2\theta = -\rho^2\cos\theta\,.$$

Область $x^2 + y^2 + z^2 \le 1, 0 \le x, 0 \le y, 0 \le z$ изображена на рис. 1.18.

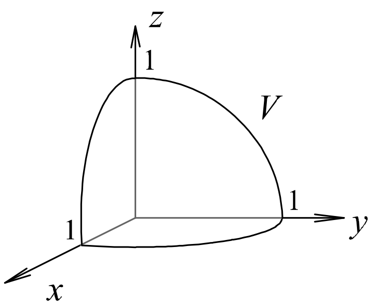

Рис. 1.18

Геометрическая интерпретация сферических координат показана на рис. 1.19.

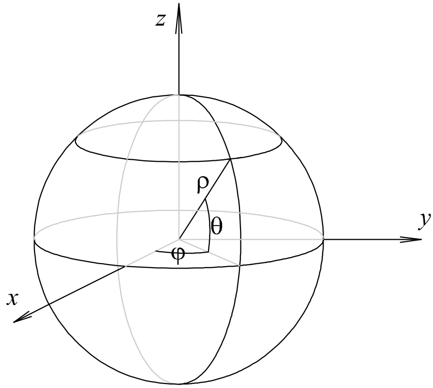

Рис. 1.19

Решение. Расставляя пределы интегрирования в сферических координатах, получим

$$A=\int_0^1 \rho^5 d\rho \int_0^{\pi/2} \cos\varphi \sin\varphi d\varphi \int_0^{\pi/2} \cos^3\theta \sin\theta d\theta \quad =$$

$$=\frac{1}{6}\left(\frac{\sin^2\varphi}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-\frac{\cos^4\theta}{4}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{48}.$$

Пример 1.8. В интеграле $\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{x+y} f(x,y,z)dz$ расставить пределы интегрирования в порядке $\int dx \int dz \int f(x,y,z)dy$ и $\int dz \int dx \int f(x,y,z)dy$. Область, соответствующая пределам интегрирования в исходном интеграле, показана на рис. 1.20 для первого случая и на рис. 1.21 для второго

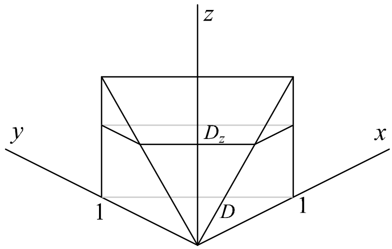

Рис. 1.20

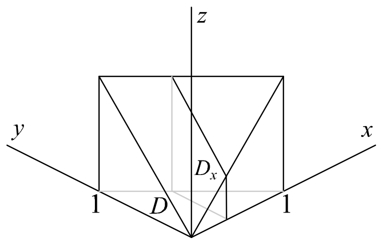

Рис. 1.21

Решение. Обозначим область интегрирования W. Тогда исходный интеграл будет равен

$$\iiint_W f(x,y,z)dxdydz=\int_0^1 dx \iint_{D_x} f(x,y,z)dydz=\int_0^1 dz \iint_{D_z} f(x,y,z)dxdy.$$

Далее, в двойных интегралах $\iint\limits_{D_x} f(x,y,z)dydz$, $\iint\limits_{D_z} f(x,y,z)dxdy$

можно расставить пределы интегрирования в нужном порядке для указанных сечений (трапеций) (рис. 1.22).

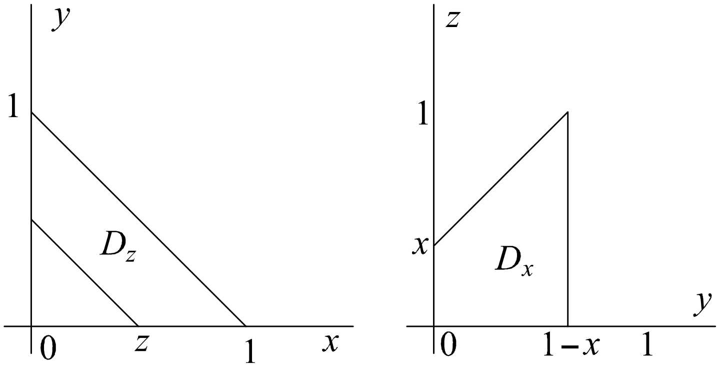

Рис. 1.22

Для этих трапеций повторные интегралы будут иметь следующий вид

$$\iint\limits_{D_x} f(x,y,z)dydz = \int\limits_0^x dz \int\limits_0^{1-x} f(x,y,z)dy + \int\limits_x^1 dz \int\limits_{z-x}^{1-x} f(x,y,z)dy,$$

$$\iint\limits_{D_z} f(x,y,z)dxdy = \int\limits_0^z dx \int\limits_{z-x}^{1-x} f(x,y,z)dy + \int\limits_z^1 dx \int\limits_0^{1-x} f(x,y,z)dy.$$

Пример 1.9. Заменить тройной интеграл $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{x+y} f(z)dz$

однократными интегралами. Так как подинтегральная функция f зависит только от одного переменного z, то пределы интегрирования нужно расставить так, чтобы внешнее интегрирование происходило по переменной z. Таким образом, во внутреннем двойном интеграле интегрирование будет происходить по x, y. Обозначения для сечений области, соответствующей интегралу, заданному в условии задачи, указаны на рис. 1.23.

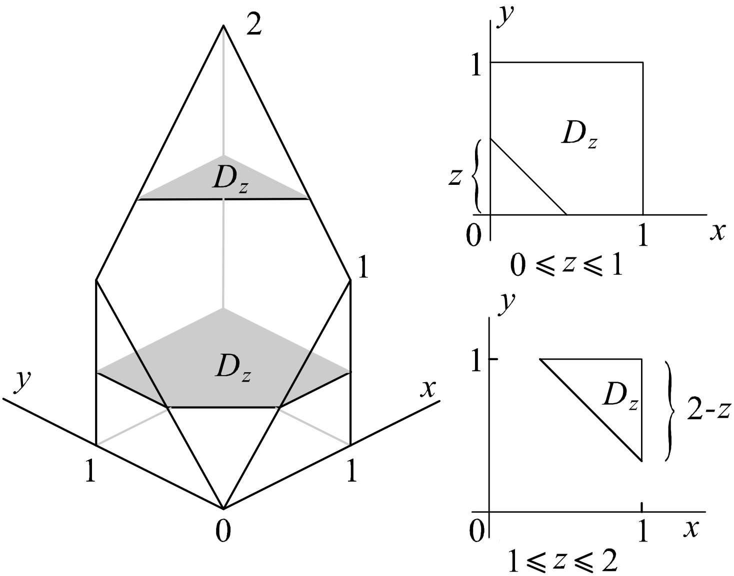

Рис. 1.23

Решение. Для решения этого примера выполним следующие преобразования интегралов

$$\int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^{x+y} f(z)dz = \int_0^1 f(z)dz \iint_{Dz} dxdy + \int_1^2 f(z)dz \iint_{Dz} dxdy = = \int_0^1 f(z)\mu D_z dz$$

$$+ \int_1^2 f(z)\mu D_z dz = \int_0^1 f(z)\left(1 - \frac{z^2}{2}\right)dz + + \int_1^2 f(z)\frac{1}{2}(2-z)^2 dz.$$

1.3.4. Замена переменных в общем случае

Рассмотрим регулярное отображение

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = x_1(u_1, u_2, ..., u_n) \\ x_2 = x_2(u_1, u_2, ..., u_n) \\ ... \\ x_n = x_n(u_1, u_2, ..., u_n) \end{array}\right\} \text{ (кратко } x=x(u) \text{)}$$

из области Σ в область V. При измеримости областей Σ, V справедлива формула замены переменных

$$\int_V f(x)dx = \int_\Sigma f[x(u)]\left|\frac{\partial x}{\partial u}\right|du .$$

Существование интегралов предполагается.

Глава 2. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

2.1. Криволинейные интегралы 1-го рода

2.1.1. Вычисление интегралов

Рассмотрим случай, когда кривая задана параметрически

$$\left.\begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{array}\right\}, \ t \in [\alpha, \beta\ ]. \qquad (2.1)$$

Теорема. *Если кривая* (2.1) *гладкая (непрерывно дифференцируема без особых точек* ($x'^{\,2}+y'^{\,2}+z'^{\,2}\neq 0$)), *функция* $f(x,y,z)$ *непрерывна на* (2.1), *тогда криволинейный интеграл* $\int_\gamma f(x,y,z)ds$ *существует и имеет место равенство*

$$\int_\gamma f(x,y,z)ds = \int_\alpha^\beta f[x(t), y(t), z(t)]\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\,dt. \quad (2.2)$$

2.1.2. Свойства криволинейного интеграла 1-го рода

1. $\int\limits_{\gamma}(\alpha f+\beta g)ds=\alpha\int\limits_{\gamma} fds+\beta\int\limits_{\gamma} gds$.

2. (Аддитивность по множеству.) Если дуга AB составлена из двух дуг AC и CB и существует $\int\limits_{AB} f\ ds$, *то существуют интегралы* $\int\limits_{AC} f\ ds$, $\int\limits_{CB} f\ ds$ *и справедлива формула*

$$\int\limits_{AB} f\ ds=\int\limits_{AC} f\ ds+\int\limits_{CB} f\ ds.$$

3. Если существует $\int\limits_{AB} fds$, *то существует и* $\int\limits_{AB}|f|ds$ *и выполнено неравенство* $\left|\int\limits_{AB} fds\right|\le\int\limits_{AB}|f|ds$.

4. (Инвариантность интеграла относительно поворотов и сдвигов системы координат.) При поворотах системы координат вокруг осей и при сдвигах криволинейный интеграл не меняется.

Поясним это свойство на примере отображения

$$\left.\begin{array}{r} x=u\cos\alpha-v\sin\alpha\\ y=u\sin\alpha+v\cos\alpha\\ z=w\end{array}\right\}\text{ (поворот на угол }\alpha\text{ вокруг оси }Oz).$$

Если функция $f\ (x,y,z)$ определена на γ, то в системе координат (u,v,w) функция

$$F(u,v,w)=f\,(u\cos\alpha-v\sin\alpha,\ u\sin\alpha+v\cos\alpha,\ w)$$

будет определена на образе Γ кривой γ. И в данном случае это свойство означает равенство интегралов

$$\int\limits_{\gamma} f(x,y,z)ds=\int\limits_{\Gamma} F(u,v,w)ds.$$

2.2. Криволинейные интегралы 2-го рода

2.2.1. Вычисление интегралов

Определение. *Замкнутая кривая называется контуром. Криволинейный интеграл второго рода в этом случае обозначается* $\oint\limits_C$.

Теорема. *Пусть кривая* γ *задана в параметрическом виде*

$$\left.\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \\ z &= z(t) \end{aligned}\right\}, \ t \in [\alpha, \beta]. \qquad (2.3)$$

Если кривая (2.3) *непрерывна,* $x(t)$ *– непрерывно дифференцируема, функция* f *непрерывна на* γ, *то криволинейный интеграл по этой кривой от функции* f *существует и имеет место формула*

$$\int\limits_{AB} f(x, y, z)dy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f[x(t), y(t), z(t)]x'(t)dt \ .$$

Замечание. Обычно рассматривают интегралы вида

$$\int\limits_{\gamma} P(x, y, z)dx + \int\limits_{\gamma} Q(x, y, z)dy + \int\limits_{\gamma} R(x, y, z)dz = \int\limits_{\gamma} Pdx + Qdy + Rdz =$$

$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} (Px' + Qy' + Rz')dt \ .$$

Последний интеграл записывают в векторной форме:

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} (\vec{V}, \vec{r}\,')dt = \int\limits_{\alpha}^{\beta} (\vec{V}, d\vec{s}) = \int\limits_{\gamma} (\vec{V}, d\vec{s}) \, ,$$

где $\vec{V} = (P, Q, R)$ заданное векторное поле.

Интеграл $\int\limits_{\gamma} (\vec{V}, d\vec{s})$ можно интерпретировать, как работу силового поля $\vec{V}$ вдоль пути γ.

2.2.2. Свойства криволинейного интеграла 2-го рода

Перечисляемые ниже свойства выписаны для интегралов вида $\int\limits_{\gamma}(\vec{V},d\vec{s})$, но они справедливы и для интегралов $\int\limits_{\gamma}Pdx$, $\int\limits_{\gamma}Qdy$, $\int\limits_{\gamma}Rdz$. Через γ^{-} обозначается кривая, отличающаяся от γ только направлением обхода. Кривую γ будем предполагать кусочно-гладкой, а функции *P, Q, R* непрерывными на этой кривой. Если $\vec{V}=(P,Q,R)$, то справедливы следующие свойства:

1. $\int\limits_{\gamma}(\vec{V},d\vec{s}) = -\int\limits_{\gamma^{-}}(\vec{V},d\vec{s})$;

2. $\int\limits_{\gamma}(\alpha\vec{V}+\beta\vec{W},d\vec{s}) = \alpha\int\limits_{\gamma}(\vec{V},d\vec{s}) + \beta\int\limits_{\gamma}(\vec{W},d\vec{s})$;

3. *(Аддитивность по множеству.) Если существует интеграл* $\int\limits_{AB}(\vec{V},d\vec{s})$ *и кривая AB разбита точкой C на два участка AC, CB, то*

$$\int\limits_{AB}(\vec{V},d\vec{s}) = \int\limits_{AC}(\vec{V},d\vec{s}) + \int\limits_{CB}(\vec{V},d\vec{s});$$

4. *Если существует интеграл* $\int\limits_{AB}(\vec{V},d\vec{s})$*, то*

$$\left|\int\limits_{\gamma}(\vec{V},d\vec{s})\right| \le \sup_{\gamma}|V|\,\mu\gamma;$$

5. *(Инвариантность интеграла относительно поворотов и сдвигов системы координат.) При поворотах системы координат вокруг осей и при сдвигах криволинейный интеграл не меняется.*

2.2.3. Связь с интегралом 1-го рода

Рассмотрим кусочно-гладкую кривую γ и непрерывную функцию $f(x,y,z)$, определенную на γ. Справедливо равенство

$$\int_{\gamma} Pdx + Qdy + Rdz = \int_{\gamma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)ds\,, \qquad (2.4)$$

$$\cos\alpha = \frac{x'(t)}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}}\,, \cos\beta = \frac{y'(t)}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}}\,,$$

$$\cos\gamma = \frac{z'(t)}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}}\,.$$

Обозначим орт вектора касательной $\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ и введем понятие вектора элемента длины дуги $d\vec{s} = \vec{n}ds$. В этих обозначениях интеграл справа в (2.4) может быть записан в виде $\int_{\gamma} (\vec{V}, \vec{n})ds$ – это интеграл первого рода. Интеграл слева в (2.4) является интегралом второго рода $\int_{\gamma} (\vec{V}, d\vec{s})$. Таким образом, формула (2.4) в векторном виде может быть записана следующим образом:

$$\int_{\gamma} (\vec{V}, d\vec{s}) = \int_{\gamma} (\vec{V}, \vec{n})ds\,.$$

Эта формула является одной из основных формул для вычисления интеграла второго рода.

Определение. *Кривая с заданным направлением обхода называется ориентированной кривой.*

Для замкнутой кривой, лежащей в плоскости z=0, *положительным направлением обхода называется такое направление, при котором область, ограниченная этой кривой, остается слева (рис. 2.1).*

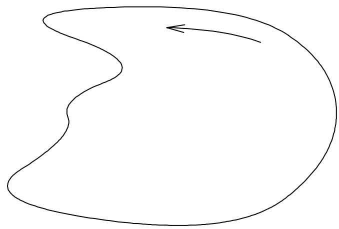

Рис. 2.1

Пример 2.1. Вычислить интеграл первого рода $\int\limits_{\gamma}\left(x^{\frac{4}{3}}+y^{\frac{4}{3}}\right)ds$, где γ – дуга астроиды $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$.

Решение. Выпишем параметрическое уравнение астроиды

$$\left.\begin{aligned} x&=a\cos^3 t\\ y&=a\sin^3 t\end{aligned}\right\},\ t\in[0,2\pi].$$

На рис. 2.2 показан график этой кривой в декартовой системе координат.

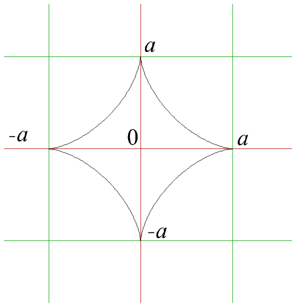

Рис. 2.2

Воспользуемся формулами для вычисления криволинейного интеграла

$$\int\limits_{\gamma}\left(x^{\frac{4}{3}}+y^{\frac{4}{3}}\right)ds=$$

$$=4\int\limits_{0}^{\pi/2}\left(a^{\frac{4}{3}}\cos^4 t+a^{\frac{4}{3}}\sin^4 t\right)\sqrt{a^2 9\cos^4 t\sin^2 t+a^2 9\sin^4 t\cos^2 t}\,dt=$$

$$=4a^{\frac{7}{3}}\int\limits_{0}^{\pi/2}\left(\cos^4 t+\sin^4 t\right)\left|\sin t\cos t\right|dt=12a^{\frac{7}{3}}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos^4 t+\sin^4 t\right)\sin t\cos t dt=$$

$$=-12a^{\frac{7}{3}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5 t d\cos t+12a^{\frac{7}{3}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5 t d\sin t=-12a^{\frac{7}{3}}\int_1^0 u^5 du+$$

$$+12a^{\frac{7}{3}}\int_0^1 u^5 du=\frac{12}{6}a^{\frac{7}{3}}+\frac{12}{6}a^{\frac{7}{3}}=4a^{\frac{7}{3}}.$$

Пример 2.2. Вычислить интеграл $\int\limits_{\gamma} x^2 ds$, где γ – окружность $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x+y+z=0$.

Решение. Сделаем поворот системы координат на угол 45 градусов вокруг оси Oz. В этом случае, преобразование координат задается формулами

$$\left.\begin{array}{c} x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(u-v) \\ y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(u+v) \\ z=w \end{array}\right\}.$$

Расположение осей при повороте на угол α показано на рис. 2.3.

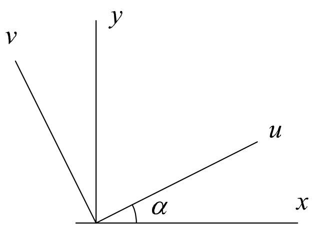

Рис. 2.3

Согласно свойству инвариантности интеграла относительно поворотов, будет выполнено равенство:

$$\int\limits_{\gamma} x^2 ds=\frac{1}{2}\int\limits_{\Gamma}(u^2-2uv+v^2)ds,$$

где Γ - окружность $u^2+v^2+w^2=a^2$, $\sqrt{2}u+w=0$. Отметим, что этим поворотом мы «избавились» от одного переменного в уравнении плоскости. Попробуем избавиться таким же способом от второго переменного. Так как $\sqrt{2}\, u+w = =\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}u+\frac{1}{\sqrt{3}}w\right)$, то этого можно добиться, сделав поворот осей координат, определяемый отображением

$$\left.\begin{array}{c} p=\frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{2}u+w) \\ q=\frac{1}{\sqrt{3}}(-u+\sqrt{2}w) \\ r=v \end{array}\right\}.$$

Обратное отображение будет иметь вид:

$$\left.\begin{array}{c} u=\frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{2}p-q) \\ w=\frac{1}{\sqrt{3}}(p+\sqrt{2}q) \\ v=r \end{array}\right\}.$$

Это соответствует повороту на угол β, для которого $\cos\beta=\sqrt{\frac{2}{3}}$, $\sin\beta=-\frac{1}{\sqrt{3}}$. В новых координатах *p, q, r* уравнение плоскости будет иметь уравнение $p=0$. Подынтегральная функция равна $u^2-2uv+v^2=\frac{1}{3}q^2+\frac{2}{\sqrt{3}}qr+r^2$. Кривая лежит в плоскости p=0, поэтому в качестве параметризации возьмем полярные координаты

$$\left.\begin{aligned} p&=0\\ q&=a\cos t\\ r&=a\sin t\end{aligned}\right\},\ t\in[0,2\pi].$$

Тогда $\int\limits_\gamma x^2ds=\frac{1}{2}\int\limits_\Gamma(u^2-2uv+v^2)ds\ =\ \frac{1}{2}\int\limits_\Gamma\left(\frac{1}{3}q^2+\frac{2}{\sqrt{3}}qr+r^2\right)ds=$

$$=\frac{a^3}{2}\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{1}{3}\cos^2 t+\frac{2}{\sqrt{3}}\sin t\cos t+\sin^2 t\right)dt=$$

$$=\frac{a^3}{2}\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{1+\cos 2t}{6}+\frac{\sin 2t}{\sqrt{3}}+\frac{1-\cos 2t}{2}\right)dt=2\pi\frac{a^3}{2}\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{3}\pi a^3\ .$$

Пример 2.3. Вычислить интеграл $\int\limits_\gamma xdy-ydx$, где γ представляет собой (рис. 2.4):

1) отрезок $\gamma_1=OA,\ O=(0,0),\ A=(1,2)$;
2) параболу $\gamma_2=\{y=2x^2\}$, от O до A;
3) два отрезка $\gamma_3+\gamma_4$: по оси Ox и вертикально вверх до точки A.

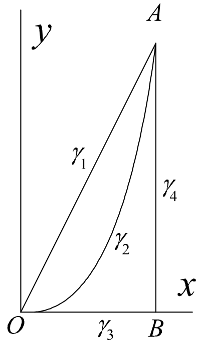

Рис. 2.4

Решение. В первом случае кривая имеет параметризацию:
$\left.\begin{array}{l} x = t \\ y = 2t \end{array}\right\}$, $t \in [0,1]$, и интеграл будет равен

$$\int_\gamma xdy - ydx = \int_0^1 (2t - 2t)dt = 0 .$$

Во втором случае кривая параметризуется следующим образом: $x=t$, $y=2t^2$, $t \in [0,1]$, и можно записать для интеграла

$$\int_\gamma xdy - ydx = = \int_0^1 \left(4t^2 - 2t^2\right)dt = \frac{2}{3} .$$

2.3. Формула Грина

2.3.1. Использование формулы Грина для вычисления интегралов

Рассмотрим область D. Границу этой области с положительным направлением обхода обозначим Г. Пусть в области D задано векторное поле (P,Q) с непрерывными частными производными $\frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y}$. Тогда справедлива формула Грина

$$\int_\Gamma Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy .$$

Пример 2.4. Вычислить интеграл $\oint_C \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$, где контур C ориентирован положительно. Рассмотреть два случая: контур не содержит начала координат, контур содержит начало координат.

Решение. Обозначим через D область, ограниченную контуром C. Вычислим частные производные

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) = \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} ,$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right)=-\frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\,.$$

Тогда, в первом случае $\oint\limits_C \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}==\iint\limits_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=0.$

Во втором случае формула Грина не может быть использована, так как поле (P,Q) имеет особенность в начале координат, и эта точка (0,0) попадает в область интегрирования D. Выберем круг с центром в начале координат и достаточно малого радиуса r так, чтобы он содержался в области D. Границу этого круга, ориентированную положительно, обозначим C_r.

Произведем два разреза кусочно-гладкими кривыми, соединяющими какие-либо две точки границы контура C с какими-либо точками окружности C_r (рис. 2.5).

Отметим, что $C=C_1+C_8$, $C_r^-=C_3+C_6$, $C_2=C_7^-$, $C_4=C_5^-$. Внутри контуров $C_1+C_2+C_3+C_4$ и $C_5+C_6+C_7+C_8$ особенностей нет и, как было доказано, для этих контуров интеграл будет равен нулю. Поэтому справедливо равенство

$$0=\oint\limits_{C_1+C_2+C_3+C_4}+\oint\limits_{C_5+C_6+C_7+C_8}=$$

$$=\oint\limits_{C_1}+\oint\limits_{C_2}+\oint\limits_{C_3}+\oint\limits_{C_4}+\oint\limits_{C_5}+\oint\limits_{C_6}+\oint\limits_{C_7}+\oint\limits_{C_8}=\oint\limits_{C}+\oint\limits_{C_3}+\oint\limits_{C_6}=\oint\limits_{C}-\oint\limits_{C_r}\,.$$

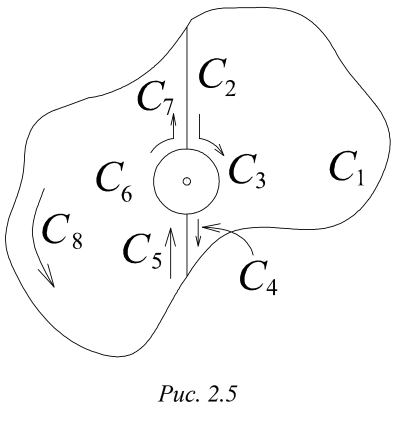

Рис. 2.5

Таким образом,

$$\oint_C \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = \oint_{C_r} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = \int_0^{2\pi} \frac{r\cos t(r\cos t) - r\sin t(-r\sin t)}{r^2} dt = 2\pi .$$

Пример 2.5. Вычислить интеграл

$$\oint_{AmB} (\sin ye^x - my)dx + (\cos ye^x - m)dy ,$$

где AmB – верхняя полуокружность $x^2+y^2=ax$, начало – $A(a,0)$, конец – $B(0,0)$ (рис. 2.6).

Решение. Вычислим частные производные координат векторного поля

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\cos ye^x - m\right) = \cos ye^x , \ \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\sin ye^x - my\right) = \cos ye^x - m .$$

Тогда $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = m$ и для контура интегрирования получается равенство

$$\int_{AmB} Pdx + Qdy + \int_{BA} Pdx + Qdy = \oint_{AmB+BA} Pdx + Qdy =$$

$$= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = m\iint_D dxdy = m\mu D = m\frac{\pi a^2}{8} .$$

Отсюда следует, что

$$\int_{AmB} Pdx + Qdy = m\frac{\pi a^2}{8} - \int_{BA} Pdx + Qdy = m\frac{\pi a^2}{8} + \int_{AB} Pdx + Qdy .$$

Контур AB имеет параметризацию $\left.\begin{matrix} x = t \\ y = 0 \end{matrix}\right\}, \ t \in [0, a]$. Тогда

$$\int_{AmB} Pdx + Qdy = m\frac{\pi a^2}{8} + \int_0^a (0) dt = m\frac{\pi a^2}{8} .$$

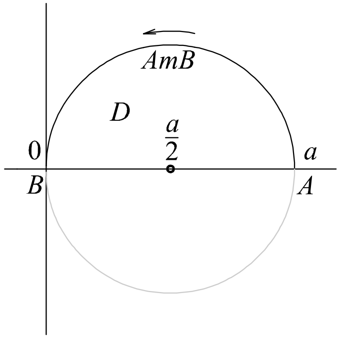

Рис. 2.6

Пример 2.6. Вычислить $\oint\limits_{AmB}(f(y)e^x - my)dx + (f'(y)e^x - m)dy$, где функция $f(y)$ – непрерывно дифференцированная на проекции кривой AmB (проекция на ось Oy), AmB – кривая, соединяющая точки A, B, ограничивающая вместе в отрезком AB область D (рис. 2.7).

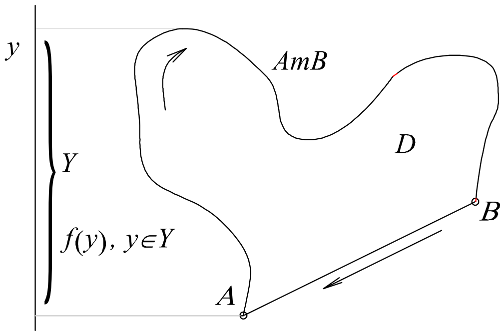

Рис. 2.7

Решение. Для частных производных имеем равенства

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(f'(y)e^{x}-m\right)=f'(y)e^{x},$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(f(y)e^{x}-my\right)=f'(y)e^{x}-m,\ \ \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=m\,.$$

Тогда

$$\int\limits_{AmB} Pdx+Qdy+\int\limits_{BA} Pdx+Qdy=\oint\limits_{AmB+BA} Pdx+Qdy=$$

$$=\iint\limits_{D}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=m\iint\limits_{D}dxdy=m\mu D\,.$$

Отсюда следует, что

$$\int\limits_{AmB} Pdx+Qdy=m\mu D-\int\limits_{BA} Pdx+Qdy=m\mu D+\int\limits_{AB} Pdx+Qdy\,.$$

Контур AB имеет параметризацию

$$\left.\begin{array}{l} x=x_0+\Delta x\,t \\ y=y_0+\Delta y\,t \end{array}\right\},\ t\in[0,1],\ A=(x_0,y_0),\ B=(x_1,y_1),\ \Delta x=x_1-x_0,\ \Delta y=y_1-y_0.$$

Тогда

$$\int\limits_{AB} Pdx+Qdy=\int\limits_0^1(((f(y_0+\Delta y\ t)e^{x_0+\Delta x\ t}-m(y_0+\Delta y\ t))\Delta x+$$

$$+(f'(y_0+\Delta y\ t)e^{x_0+\Delta x\ t}-m)\Delta y)dt=\int\limits_0^1((f(y_0+\Delta y\ t)e^{x_0+\Delta x\ t})\Delta x)dt+$$

$$+\int\limits_0^1\left(-m(y_0+\Delta y\,t)\Delta x\right)dt+\int\limits_0^1(f'(y_0+\Delta y\ t)e^{x_0+\Delta x\ t}\Delta y)dt-$$

$$-\int\limits_0^1 m\Delta y dt=\int\limits_0^1(f(y_0+\Delta y\ t)e^{x_0+\Delta x\ t})d(x_0+\Delta x t)-m\Delta x\left(y_0+\frac{\Delta y}{2}\right)-$$

$$-\int\limits_0^1(f'(y_0+\Delta y\ t)e^{x_0+\Delta x\ t})d(y_0+\Delta y\ t)-m\Delta y=$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} \left(f(y_0 + \Delta y \frac{u - x_0}{\Delta x}) e^u \right) du - m\Delta x \left(y_0 + \frac{\Delta y}{2} \right) +$$

$$+ \int_{y_0}^{y_1} \left(e^{x_0 + \Delta x \left(\frac{u - y_0}{\Delta y} \right)} \right) df(u) - m\Delta y = \int_{x_0}^{x_1} \left(f(y_0 + \Delta y \frac{u - x_0}{\Delta x}) e^u \right) du -$$

$$- m \left(\Delta x \left(y_0 + \frac{\Delta y}{2} \right) - \Delta y \right) + \left(e^{x_0 + \Delta x \left(\frac{u - y_0}{\Delta y} \right)} f(u) \right) \Bigg|_{u = y_0}^{u = y_1} -$$

$$- \int_{y_0}^{y_1} \left(e^{x_0 + \Delta x \left(\frac{u - y_0}{\Delta y} \right)} \right) \frac{\Delta x}{\Delta y} f(u) du = \int_{y_0}^{y_1} \left(f(v) \frac{\Delta x}{\Delta y} e^{x_0 + \frac{\Delta x}{\Delta y}(v - y_0)} \right) dv -$$

$$- m \left(\Delta x \left(y_0 + \frac{\Delta y}{2} \right) - \Delta y \right) + \left(e^{x_0 + \Delta x \left(\frac{u - y_0}{\Delta y} \right)} f(u) \right) \Bigg|_{u = y_0}^{u = y_1} -$$

$$- \int_{y_0}^{y_1} \left(e^{x_0 + \Delta x \left(\frac{u - y_0}{\Delta y} \right)} \right) \frac{\Delta x}{\Delta y} f(u) du = -m\Delta x y_0 + m \frac{\Delta x \Delta y}{2} - m\Delta y +$$

$$+ e^{x_1} f(y_1) - e^{x_0} f(y_0).$$

В результате получим:

$$\int_{AmB} P dx + Q dy = m\mu D - m\Delta x y_0 + m \frac{\Delta x \Delta y}{2} - m\Delta y + e^{x_1} f(y_1) - e^{x_0} f(y_0).$$

2.3.2. Использование формулы Грина для вычисления площадей

Если в качестве функций *P, Q* взять функции, для которых $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \equiv 1$, то получится формула для вычисления площади области, ограниченной кривой γ:

$$\mu D = \iint\limits_D dxdy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \int\limits_\gamma Pdx + Qdy \, .$$

Можно предложить три варианта таких функций:

1) $Q=x$, $P=0$ и тогда $\mu D = \int\limits_\gamma xdy$;

2) $Q=0$, $P=-y$ и тогда $\mu D = -\int\limits_\gamma ydx$;

3) $Q=\dfrac{x}{2}$, $P=-\dfrac{y}{2}$ и тогда $\mu D = -\dfrac{1}{2}\int\limits_\gamma ydx - xdy$.

Пример 2.7. Вычислить площадь астроиды, которая задается уравнением $\left.\begin{matrix} x = a\cos^3 t \\ y = b\sin^3 t \end{matrix}\right\}$, $t \in [0, 2\pi]$. График кривой показан на рис. 2.8.

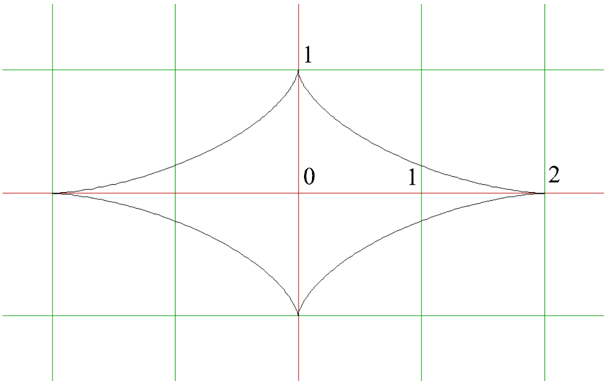

Рис. 2.8

Решение. Воспользуемся формулой Грина для вычисления площади области, ограниченной астроидой

$$\mu D = \int\limits_\gamma xdy = \int\limits_0^{2\pi} a\cos^3 t \, 3\, b\sin^2 t \cos t \, dt = 3ab\int\limits_0^{2\pi} \cos^4 t \, \sin^2 t \, dt =$$

$$=\frac{3}{4}ab\int_0^{2\pi}\cos^2 t\ \sin^2 2t\,dt=\frac{3}{16}ab\int_0^{2\pi}(1+\cos 2t)\ (1-\cos 4t)\,dt=\frac{3}{8}\pi\,ab.$$

Пример 2.8. Вычислить площадь лемнискаты $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$.

Решение. Уравнение лемнискаты в полярных координатах: $r=a\sqrt{\cos 2\varphi}$ (рис. 2.9).

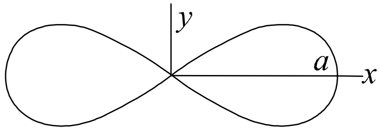

Рис. 2.9

Параметризация правой ветви для промежутка имеет вид

$$\left.\begin{aligned} x&=a\sqrt{\cos 2\varphi}\cos\varphi\\ y&=a\sqrt{\cos 2\varphi}\sin\varphi\end{aligned}\right\},\ \varphi\in[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}].$$

Поэтому

$$\mu D=2\oint_\gamma xdy=\ 2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}a^2\sqrt{\cos 2\varphi}\cos\varphi(\frac{1}{2\sqrt{\cos 2\varphi}}(-2\sin 2\varphi)\sin\varphi+$$

$$+\sqrt{\cos 2\varphi}\cos\varphi)d\varphi=-2a^2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos\varphi\sin 2\varphi\sin\varphi\ d\varphi+$$

$$+2a^2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\varphi\cos^2\varphi\ d\varphi=2a^2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left[\cos 2\varphi\frac{1+\cos 2\varphi}{2}-\frac{1-\cos 4\varphi}{4}\right]d\varphi=$$

$$=2a^2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left[\cos 2\varphi\frac{1+\cos 2\varphi}{2}-\frac{1-\cos 4\varphi}{4}\right]d\varphi=$$

$$= 2a^2 \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{1}{2}\cos 2\varphi + \frac{1+\cos 4\varphi}{4} - \frac{1}{4} + \frac{\cos 4\varphi}{4} \right] d\varphi = a^2\pi .$$

2.3.3. Условия независимости интеграла 2-го рода от пути интегрирования

Определение. *Область называется односвязной, если ее граница представляет собой связное множество. Область называется n-связной, если ее граница распадается на n- связных множеств.*

Замечание. Формула Грина верна и для многосвязных областей.

Например, для области, показанной на рис. 2.10, произведем разрезы, соединяющие обе связные компоненты границы между собой. В качестве таких разрезов выбраны кривые γ_2, γ_7 и γ_4, γ_5. Каждая из этих пар представляет собой одну кривую, проходимую в разных направлениях, как это показано на рисунке. Таким образом, образовалось 4 контура: γ_1, γ_2, γ_3, γ_4; γ_7, γ_8, γ_5, γ_5; γ_3^-, γ_6^-; γ_5, γ_6, γ_7, γ_8.

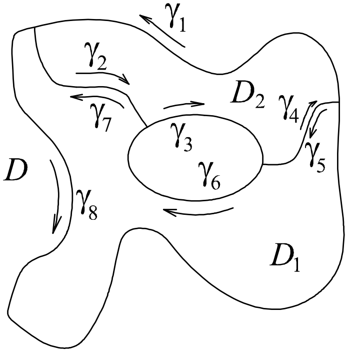

Рис. 2.10

Тогда можно выписать цепочку равенств

$$\iint\limits_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \iint\limits_{D_1+D_2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \iint\limits_{D_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) +$$

$$+\iint\limits_{D_2}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)=\int\limits_{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3+\gamma_4} Pdx+Qdy+\int\limits_{\gamma_5+\gamma_6+\gamma_7+\gamma_8} Pdx+Qdy=\int\limits_{\gamma_1}+\int\limits_{\gamma_2}+$$

$$+\int\limits_{\gamma_3}+\int\limits_{\gamma_4}+\int\limits_{\gamma_5}+\int\limits_{\gamma_6}+\int\limits_{\gamma_7}+\int\limits_{\gamma_8}=\int\limits_{\gamma_1}+\int\limits_{\gamma_3}+\int\limits_{\gamma_6}+\int\limits_{\gamma_8}=\int\limits_{\gamma_1+\gamma_8}+\int\limits_{\gamma_3+\gamma_6}=$$

$$=\oint\limits_{\partial D} Pdx+Qdy\,.$$

Теорема 1. *Для того чтобы криволинейный интеграл* $\int\limits_{\gamma} Pdx+Qdy$ *не зависел от пути интегрирования в D, необходимо и достаточно, чтобы* $\dfrac{\partial Q}{\partial x}\equiv\dfrac{\partial P}{\partial y}$ *в области D.*

Теорема 2. *Для того чтобы криволинейный интеграл* $\int\limits_{\gamma} Pdx+Qdy$ *не зависел от пути интегрирования в D, необходимо и достаточно, чтобы подынтегральное выражение Pdx+Qdy являлось полным дифференциалом некоторой непрерывно дифференцируемой функции u(x,y) в области D*

$$du = Pdx+Qdy$$

Замечание 1. Условие односвязности области D в сформулированных теоремах существенно. Ранее был рассмотрен пример с интегралом $\oint\limits_{C}\dfrac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$, где $\dfrac{\partial Q}{\partial x}==\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$. В случае, когда область содержит начало координат, полученная область является двусвязной, в частности, интегралы по контурам, содержащим начало координат, не равны нулю.

Замечание 2. При доказательстве теоремы 2 строится функция $u(x,y)=\int\limits_{A_0A} Pdx+Qdy$, которая определяется с точностью до аддитивной постоянной и называется потенциалом (скалярным) векторного поля $\vec{V}=(P,Q)$.

Пример 2.9. Решить дифференциальное уравнение

$$\left(f(y)e^x - my\right)dx + \left(f'(y)e^x - mx\right)dy = 0\,.$$

Решение. Для поля $\vec{V}=(P,Q)\ =\left(f(y)e^x - my, f'(y)e^x - mx\right)$ будет выполнено условие $\dfrac{\partial P}{\partial y} = f'(y)e^x - m = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$. В этом случае для функции $u(x,y)= \int\limits_{A_0A} Pdx + Qdy$ выполняется равенство $du=Pdx+Qdy$ и, следовательно, $u(x,y)=\text{const}$ есть решение исходного дифференциального уравнения. Найдем функцию u. Пусть $M=(x,y)$ текущая точка области и $M_0=(0,0)$. В качестве кривой, соединяющей точки M_0 и M, выберем отрезок $\gamma:\left.\begin{matrix} x\,t \\ y\,t \end{matrix}\right\},\ t\in[0,1]$. Тогда

$$u(x,y) = u(M) = \int\limits_{\gamma} Pdx + Qdy =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(\left(f(yt)e^{xt} - myt\right)x + \left(f'(yt)e^{xt} - mxt\right)y\right)dt = x\int\limits_0^1 f(yt)e^{xt}dt \ +$$

$$+\ y\int\limits_0^1 f'(yt)e^{xt}dt\ - mxy = x\int\limits_0^1 f(yt)e^{xt}dt\ + \int\limits_0^1 e^{xt}df(yt)\ - mxy =$$

$$= x\int\limits_0^1 f(yt)e^{xt}dt + [f(y)e^x - f(0)] - x\int\limits_0^1 f(yt)e^{xt}dt\ - mxy =$$

$$= f(y)e^x - f(0)\ - mxy\,.$$

Глава 3. ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

3.1. Поверхностные интегралы 1-го рода

3.1.1.Площадь поверхности, заданной уравнением $z=f(x,y)$

Пусть функция $f(x,y)$ определена и непрерывна вместе со своими частными производными $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ в области D. Обозначим эти производные $p=\frac{\partial f}{\partial x}$, $q=\frac{\partial f}{\partial y}$. Уравнение касательной плоскости в произвольной точке (x,y,z) имеет вид

$$Z - z = p\,(X - x)+q(Y-y).$$

В этом уравнении X, Y, Z – текущие точки плоскости. Нормали к этой плоскости определяются координатами p, q, -1, $\vec{N}=\pm(p,\ q,\ -1)$. Единичные нормали будут $\vec{n}=\vec{N}\,/\left|\vec{N}\right|$. Направляющие косинусы единичных нормалей представлены в таблице:

$\cos(\vec{n},\vec{i})$	$\cos(\vec{n},\vec{j})$	$\cos(\vec{n},\vec{k})$
$\cos\alpha$	$\cos\beta$	$\cos\gamma$
$\pm\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$	$\pm\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$	$\mp\frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$

Площадь поверхности $z=f(x,y)$ определяется по формуле

$$\mu S=\iint\limits_D \sqrt{1+p^2(x,y)+q^2(x,y)}\,dxdy=\iint\limits_D \left|\vec{N}\right| dxdy\,.$$

Замечание 1. Для поверхности $y=\varphi(x,z)$ аналогично получим формулу

$$\mu S=\iint\limits_{D_y} \sqrt{1+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2}\,dxdz\,.$$

Для поверхности $x=\psi(y,z)$ площадь будет равна

$$\mu S=\iint\limits_{D_x}\sqrt{1+\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2}\,dydz\,.$$

Замечание 2. Для вычисления площади поверхности, не представимой ни в одном из видов $z=f(x,y)$, $y=\varphi(x,z)$, $x=\psi(y,z)$, можно попытаться ее разбить на отдельные поверхности указанных типов.

3.1.2. Площадь поверхности,заданной параметрически

Параметрическим заданием поверхности называется отображение следующего вида

$$\Phi\colon \left.\begin{array}{c} x=x(u,v)\\ y=y(u,v)\\ z=z(u,v)\end{array}\right\},\ (u,v)\in D\,,$$

$x(u,v), y(u,v), z(u,v)$ – непрерывно дифференцируемые функции в области D, а якобианы

$$A=\frac{D(y,z)}{D(u,v)},\ B=\frac{D(z,x)}{D(u,v)},\ C=\frac{D(x,y)}{D(u,v)}$$

не обращаются в 0 одновременно (ни в одной точке области D). Нормалью к поверхности будет вектор

$$\vec{N}=[\vec{r}_u,\vec{r}_v]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v}\end{vmatrix}=\left(\begin{vmatrix}\frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u}\\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v}\end{vmatrix},\begin{vmatrix}\frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u}\\ \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial v}\end{vmatrix},\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}\right)=$$

$$=(A,B,C).$$

При сделанных предположениях поверхность Ф будет квадрируема, и её площадь будет равна

$$\mu\Phi=\iint\limits_{D}\left|\vec{N}\right|dudv=\iint\limits_{D}\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,dudv\,.$$

Если положить

$$E=\left|\vec{r}_u\right|^2=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2,$$

$$G=\left|\vec{r}_v\right|^2==\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2,\ F=\left(\overrightarrow{r_u},\overrightarrow{r_v}\right),$$

то $EG-F^2=EG-EG\cos^2\varphi==EG\sin^2\varphi=\left|\left[\vec{r}_u,\vec{r}_v\right]\right|^2$. Тогда

$$\mu\Phi=\iint\limits_D\sqrt{EG-F^2}\,dudv.$$

Выражение $\sqrt{EG-F^2}\,dudv=\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,dudv$ или $\sqrt{1+p^2+q^2}\,dxdy$ в случае явного задания, называется элементом поверхности (точнее, площадью элемента поверхности).

3.1.3. Существование и вычисление интеграла 1-го рода

1. Поверхность Φ задана явно $z = z(x,y)$, $(x,y)\in D$, где $z(x,y)$ имеет в D непрерывные частные производные первого порядка, функция $f(x,y,z)$ определена и непрерывна на Φ. Тогда существует интеграл $\iint\limits_\Phi f(x,y,z)dS$, равный

$$\iint\limits_\Phi f(x,y,z)dS=\iint\limits_D f\left[x,y,z(x,y)\right]\sqrt{1+p^2+q^2}\,dxdy,\ p=\frac{\partial z}{\partial x},\ q=\frac{\partial z}{\partial y}.$$

2. Поверхность задана параметрически

$$\Phi:\ \left.\begin{array}{l}x=x(u,v)\\ y=y(u,v)\\ z=z(u,v)\end{array}\right\},(u,v)\in D,$$

с непрерывно дифференцируемыми функциями $x(u,v), y(u,v), z(u,v)$. Вектор $\overrightarrow{N}=(A,B,C)\neq 0$ в D, а функция $f(x,y,z)$ непрерывна на Φ. Тогда поверхностный интеграл существует и равен

$$\iint\limits_{\Phi} f(x,y,z)dS = \iint\limits_{D} f\left[x(u,v), y(u,v), z(u,v)\right]\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,dudv\,.$$

3.1.4. Основные свойства интегралов 1-рода

1. $\iint\limits_{\Phi} dS = \mu\Phi.$
2. $\iint\limits_{\Phi} (\alpha f + \beta g)dS = \alpha\iint\limits_{\Phi} fdS + \beta\iint\limits_{\Phi} gdS\,.$
3. $\iint\limits_{\Phi_1\cup\Phi_2} fdS = \iint\limits_{\Phi_1} fdS + \iint\limits_{\Phi_2} fdS\,.$
4. $\left|\iint\limits_{\Phi} fdS\right| \le \iint\limits_{\Phi} |f|dS\,.$

3.2. Поверхностные интегралы 2-го рода

3.2.1.Определение стороны поверхности

Для поверхностей, которые нам встречались до сих пор, можно ввести понятие стороны поверхности. Такие поверхности характеризуются как двухсторонние поверхности. Их можно выкрасить в два цвета так, что разные цвета не будут граничить между собой. Аналитически сторону поверхности можно определить как множество всех единичных нормалей к поверхности, таких, что любые две нормали данной стороны получаются одна из другой непрерывным движением по поверхности вдоль некоторой непрерывной кривой, лежащей на этой поверхности.

Существуют поверхности, не обладающие подобным свойством. Такие поверхности называются односторонними. Примером односторонней поверхности может служить лист Мёбиуса (рис. 3.1).

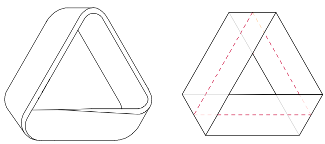

Рис. 3.1

Другим примером односторонней замкнутой поверхности является «бутылка» Клейна (рис. 3.2). Из любой точки этой поверхности можно попасть в ту же точку с другой стороны поверхности, двигаясь по некоторому непрерывному пути.

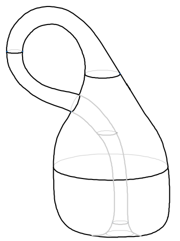

Рис. 3.2

Можно дать следующее определение односторонней и двухсторонней поверхностей. Поверхность называется двухсторонней, если выполнено следующее свойство: для произвольной точки поверхности при движении по любому замкнутому пути, лежащему на поверхности и выходящему из этой точки, мы возвращаемся в эту точку с тем же направлением нормали (рис. 3.3).

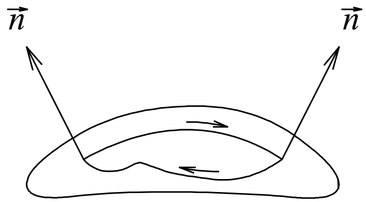

Рис. 3.3

Если же существует хотя бы один замкнутый путь, двигаясь по которому мы вернемся в исходную точку с противоположным направлением нормали, то такую поверхность называют односторонней. Предполагается, что при движении вдоль пути нормаль изменяется непрерывно. Для листа Мёбиуса такой линией, например, является продольная пунктирная линия. Если произвести разрез по этой линии, то поверхность не распадется на две части, как это может показаться на первый взгляд, а останется единой (рис. 3.4).

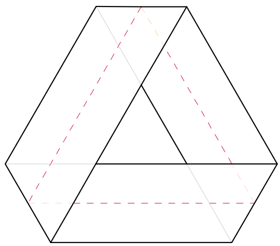

Рис. 3.4

В дальнейшем, будут рассматриваться только двухсторонние поверхности.

Определение. *Поверхность с выбранной стороной (совокупность нормалей) называется ориентированной поверхностью.*

Явно заданную поверхность Ф: $z = f(x,y)$ называют положительно ориентированной, если косинус угла между вектором нормали к поверхности (в любой ее точке) и ортом оси z положителен: $\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{k}) > 0$.

Поверхность Ф: $y = f(x,z)$ называют положительно ориентированной, если косинус угла между вектором нормали к поверхности (в любой ее точке) и ортом оси y положителен: $\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{j}) > 0$.

Поверхность Ф: $x = f(y,z)$ называют положительно ориентированной, если косинус угла между вектором нормали к поверхности (в любой ее точке) и ортом оси x положителен: $\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{i})>0$. На рис. 3.5 показана положительная ориентация поверхностей в каждом из этих трех случаев.

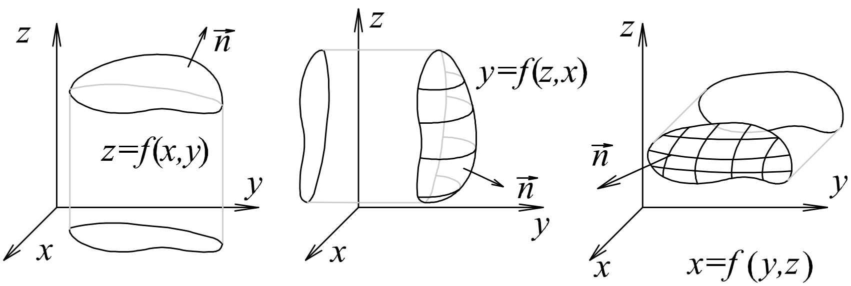

Рис. 3.5

Определение. *Для замкнутой поверхности, положительной ориентацией называется выбор внешней нормали (рис. 3.6).*

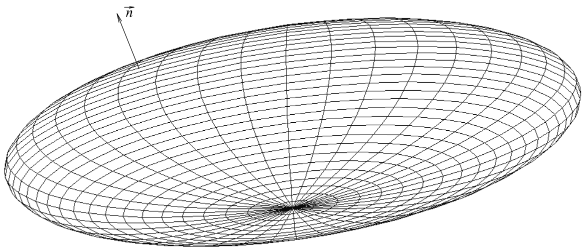

Рис. 3.6

3.2.2. Вычисление поверхностного интеграла 2-го рода

Теорема. *Если ориентированная поверхность задана явно* Φ: $z=z(x,y)$ *на* D *с непрерывно дифференцируемой функцией* $z(x,y)$, $R(x,y,z)$ *– непрерывна на* Φ, *тогда поверхностный интеграл* $\iint\limits_{\Phi} Rdxdy$ *существует и вычисляется по формуле*

$$\iint\limits_{\Phi} R(x,y,z)dxdy = or\,\Phi \iint\limits_{D} R(x,y,z(x,y))dxdy\,.$$

Здесь и в дальнейшем *or* Φ=1 для положительно ориентированной поверхности и *or* Φ=-1 в противном случае.

3.2.3. Связь с интегралом 1-го рода

Поверхностные интегралы первого и второго рода связаны равенством

$$\iint\limits_{\Phi} R(x,y,z)dxdy = \iint\limits_{\Phi} R(x,y,z)\cos\gamma\, dS\,. \qquad (3.1)$$

Определение*. Поверхность, которая однозначно проектируется на все координатные плоскости, называется поверхностью типа A . Поверхность называется допустимой, если она непрерывно* *дифференцируема, имеет везде ненулевую нормаль и допускает разбиение на конечное число поверхностей типа A.*

Для допустимых поверхностей Ф формула (3.1) будет верна по отношению ко всем координатным плоскостям. В частности, если на поверхности определено непрерывно дифференцируемое поле $\boldsymbol{V}=(P,Q,R)$, то

$$\iint_{\Phi} P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy = \iint_{\Phi} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dS\,,$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – направляющие косинусы единичной нормали к поверхности.

3.2.4. Простейшие свойства поверхностного интеграла 2-го рода

Введем обозначения: $\boldsymbol{dS}=\boldsymbol{n}dS=(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)\,dS$. Это позволяет использовать векторное обозначение для интеграла 2-го рода

$$\iint_{\Phi} P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy = \iint_{\Phi} (\boldsymbol{V},\boldsymbol{dS}).$$

В векторных обозначениях связь между интегралами первого и второго рода выглядит следующим образом:

$$\iint_{\Phi} (\boldsymbol{V},\boldsymbol{dS}) = \iint_{\Phi} (\boldsymbol{V},\boldsymbol{n})\,dS.$$

Замечание. Как это следует из формул вычисления площади поверхности, $dS=|\boldsymbol{N}|dxdy$ для поверхности $z(x,y)$, заданной явно, и $dS=|\boldsymbol{N}|dudv$ для параметрически заданной поверхности.

Эти выражения можно использовать при вычислении поверхностных интегралов. Например, для параметрически заданной поверхности можно записать

$$\iint_{\Phi} (\boldsymbol{V},\boldsymbol{dS}) = \iint_{\Phi} (\boldsymbol{V},\boldsymbol{n})\,dS = \iint_{D} (\boldsymbol{V},\boldsymbol{n})\,|\boldsymbol{N}|dudv = \iint_{D} (\boldsymbol{V}, \boldsymbol{N})dudv\,.$$

Отметим свойства интеграла 2-го рода:

1) $\iint\limits_{\Phi} (\boldsymbol{V},\boldsymbol{dS}) = -\iint\limits_{\Phi^-} (\boldsymbol{V},\boldsymbol{dS})$;

2) $\iint\limits_{\Phi} (\alpha\boldsymbol{V} + \beta\boldsymbol{W}, \boldsymbol{dS}) = \alpha\iint\limits_{\Phi} (\boldsymbol{V}, \boldsymbol{dS}) + \beta\iint\limits_{\Phi} (\boldsymbol{W}, \boldsymbol{dS})$;

3) $\iint\limits_{\Phi_1\cup\Phi_2} (\boldsymbol{V},\boldsymbol{dS}) = \iint\limits_{\Phi_1} (\boldsymbol{V},\boldsymbol{dS}) + \iint\limits_{\Phi_2} (\boldsymbol{V},\boldsymbol{dS})$;

4) $\left|\iint\limits_{\Phi} (\boldsymbol{V},\boldsymbol{dS})\right| \le \max |\boldsymbol{V}|\mu\Phi$.

Пример 3.1. Найти статические моменты однородной треугольной пластинки $x+y+z=a$, $x\ge 0$, $y\ge 0$, $z\ge 0$, относительно координатных плоскостей (рис. 3.7).

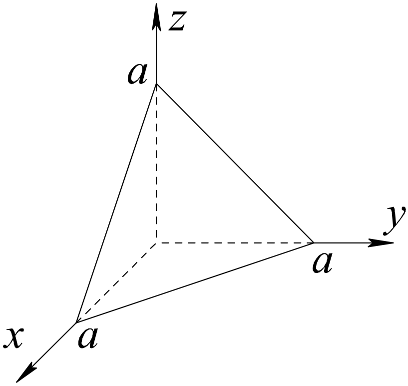

Рис. 3.7

Решение. Требуется вычислить интегралы $\iint\limits_{\Phi} x\rho(x,y,z)dS$, $\iint\limits_{\Phi} y\rho(x,y,z)dS$, $\iint\limits_{\Phi} z\rho(x,y,z)dS$. Плотность распределения массы $\rho=1$. Поэтому

$$\iint\limits_{\Phi} xdS = \iint\limits_{D} x\sqrt{3}dxdy = \sqrt{3}\int\limits_0^a xdx\int\limits_0^{a-x} dy = \frac{\sqrt{3}}{6}a^3.$$

Остальные моменты равны той же величине по соображениям симметрии.

Пример 3.2. Найти момент инерции относительно оси Oz однородной сферической оболочки $x^2+y^2+z^2=a^2$, $z \geq 0$.

Решение. Требуется вычислить интеграл

$$\iint_{\Phi}(x^2+y^2)\rho(x,y,z)dS = \iint_{\Phi}(x^2+y^2)dS .$$

Плотность распределения массы ρ возьмем равной 1. Найдем длину вектора нормали $\overrightarrow{N}$ для сферических координат

$$x=a\cos\theta\cos\varphi ,\ y=a\cos\theta\sin\varphi ,\ x=a\sin\theta:$$

$$\vec{N}=(A,B,C)=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial x}{\partial\varphi} & \dfrac{\partial y}{\partial\varphi} & \dfrac{\partial z}{\partial\varphi} \\ \dfrac{\partial x}{\partial\theta} & \dfrac{\partial y}{\partial\theta} & \dfrac{\partial z}{\partial\theta} \end{vmatrix} = a^2\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\cos\theta\sin\varphi & \cos\theta\cos\varphi & 0 \\ -\sin\theta\cos\varphi & -\sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \end{vmatrix} =$$

$$=a^2(\cos^2\theta\cos\varphi,\ \cos^2\theta\sin\varphi,\ \sin\theta\cos\theta),\ \left|\overrightarrow{N}\right| = a^2\cos\theta .$$

Эта величина равна модулю якобиана отображения, определяемого сферическими координатами. Тогда, используя сферические координаты для параметрического задания верхней полусферы (область изменения параметров – прямоугольник $D=[0,2\pi]\times[-\pi/2,\pi/2]$), получим:

$$\iint_{\Phi}(x^2+y^2)dS = \iint_{D}(x^2+y^2)\left|\overrightarrow{N}\right|d\varphi d\theta =$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(a^2\cos^2\theta\cos^2\varphi + a^2\cos^2\theta\sin^2\varphi\right)a^2\cos\theta d\theta =$$

$$=a^4\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta d\theta = 2\pi a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\sin^2\theta\right)d\sin\theta = 2\pi a^4\int_0^1\left(1-u^2\right)du =$$

$$=2\pi a^4-\frac{2}{3}\pi a^4=\frac{4}{3}\pi a^4 .$$

Пример 3.3. Найти координаты центра тяжести однородной поверхности, лежащей на конусе $z=\sqrt{x^2+y^2}$, вырезанной цилиндрической поверхностью $x^2+y^2=ax$ (рис. 3.8).

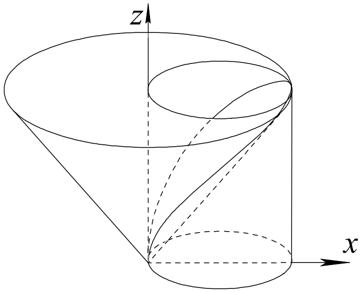

Рис. 3.8

Решение. Координаты центра тяжести будут равны:

$$X=\frac{\iint\limits_{\Phi} x\rho(x,y,z)dS}{\iint\limits_{\Phi}\rho(x,y,z)dS},\quad Y=\frac{\iint\limits_{\Phi} y\rho(x,y,z)dS}{\iint\limits_{\Phi}\rho(x,y,z)dS},\quad Z=\frac{\iint\limits_{\Phi} z\rho(x,y,z)dS}{\iint\limits_{\Phi}\rho(x,y,z)dS}.$$

Считаем плотность распределения масс равной 1. Вес поверхности равен:

$$\iint\limits_{\Phi}\rho(x,y,z)dS=\iint\limits_{D}dS=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_{0}^{a\cos\varphi}r\sqrt{2}dr==\frac{\sqrt{2}}{2}a^2\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi d\varphi=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}a^2\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2\varphi}{2}d\varphi=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}a^2.$$

Для координаты X центра тяжести интеграл в числителе будет равен

$$\iint\limits_{\Phi} x\rho(x,y,z)dS = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi d\varphi \int\limits_{0}^{a\cos\varphi} r^2\sqrt{2}dr = \sqrt{2}a^3\frac{1}{3}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\varphi d\varphi =$$

$$= \sqrt{2}a^3\frac{1}{3}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1+\cos 2\varphi)^2}{4}d\varphi = a^3\frac{\sqrt{2}}{12}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+2\cos 2\varphi+\cos^2 2\varphi)d\varphi =$$

$$= a^3\frac{\sqrt{2}}{8}\pi .$$

Таким образам, найдем $X = \dfrac{a}{2}$. Из соображений симметрии вторая координата центра тяжести будет равна $Y = 0$. И, наконец, для числителя третьей дроби

$$\iint\limits_{\Phi} z\rho(x,y,z)dS = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_{0}^{a\cos\varphi} r^2\sqrt{2}dr = \sqrt{2}\frac{a^3}{3}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^3\varphi d\varphi =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{3}a^3\left(2-\frac{2}{3}\right) = \frac{4\sqrt{2}}{9}a^3 .$$

Откуда $Z = \dfrac{19}{9\pi}a$.

Пример 3.4. Вычислить $\iint\limits_{\Phi} xdydz + ydzdx + zdxdy$, где Ф – внешняя сторона сферы $x^2+y^2+z^2=a^2$.

Решение. $\iint\limits_{\Phi} (\boldsymbol{V},\boldsymbol{dS}) = \iint\limits_{\Phi} (\boldsymbol{V},\boldsymbol{n}),\ dS = \iint\limits_{\Phi}\left(\vec{r},\dfrac{\vec{r}}{r}\right)dS = \iint\limits_{\Phi}\left(\vec{r},\dfrac{\vec{r}}{r}\right)dS =$

$=a\mu\Phi= a^3 4\pi$.

Пример 3.5. Вычислить $\iint\limits_{\Phi}\left(\dfrac{dydz}{x}+\dfrac{dzdx}{y}+\dfrac{dxdy}{z}\right)$, где Ф –

внешняя сторона эллипсоида $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$.

Решение. Запишем уравнение поверхности в явном виде $z=c\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}}$. Тогда

$$p=-\frac{c}{a^2}\frac{x}{\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}}}=-\frac{c^2x}{a^2z},\quad q=-\frac{c}{b^2}\frac{y}{\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}}}=-\frac{c^2y}{b^2z}.$$

Откуда найдем нормаль к поверхности $\vec{N}=(-p,-q,1)$. После этого вычисляется векторное произведение

$$(\vec{V},\vec{N})=\frac{c^2}{a^2z}+\frac{c^2}{b^2z}+\frac{1}{z}=\frac{c^2}{z}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right).$$

Обозначим через Δ верхний полуэллипсоид, а через D – его проекцию на плоскость xOy. Обозначим $A=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}$. Учитывая ранее сделанное замечание и симметрию относительно координатных осей, получим

$$\iint\limits_{\Phi}\left(\frac{dydz}{x}+\frac{dzdx}{y}+\frac{dxdy}{z}\right)=2\iint\limits_{\Delta}\left(\frac{dydz}{x}+\frac{dzdx}{y}+\frac{dxdy}{z}\right)=2\iint\limits_{D}\left(\vec{V},\vec{N}\right)dxdy=$$

$$=2c\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\iint\limits_{D}\frac{dxdy}{\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}}}=2abcA\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1\frac{rdr}{\sqrt{1-r^2}}=$$

$$=4\pi abcA\frac{1}{2}\int\limits_0^1\frac{du}{\sqrt{1-u}}=4\pi abcA\ .$$

3.3. Формула Стокса

3.3.1. Поверхность, заданная уравнением $z = z(x, y)$

Рассмотрим ориентированную непрерывно дифференцированную поверхность Ф, однозначно проектируемую не все координатные плоскости. Пусть эта поверхность имеет задание $z = z(x, y)$, где $(x, y) \in D_z$. Через Г обозначим край этой поверхности с согласованной ориентацией.

***Определение**. Согласованной называется такая ориентация, когда при обходе края поверхности в этом направлении с выбранной нормалью поверхность остается слева.*

На рис. 3.9 показана иллюстрация этого определения. Через D_x на этом рисунке обозначена проекция поверхности Ф на плоскость x=0.

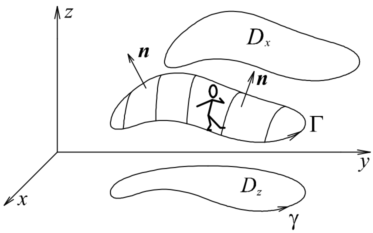

Рис. 3.9

Пусть $P(x,y,z)$ задана и непрерывна на Ф и имеет там непрерывные частные производные $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial P}{\partial z}$. Тогда имеет место равенство

$$\iint\limits_{\Phi}\left(\frac{\partial P}{\partial z}dzdx-\frac{\partial P}{\partial y}dxdy\right)=\oint\limits_{\Gamma}P(x,y,z)dx\,.$$

Области интегрирования показаны на рис. 3.10.

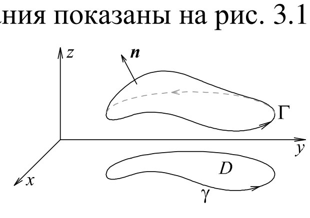

Рис. 3.10

3.3.2. Формула Стокса для векторного поля

Пусть Ф – допустимая ориентированная поверхность, $\boldsymbol{V}=(P,Q,R)$– непрерывное на Ф поле, Г – край этой поверхности с согласованной ориентацией. Справедлива формула

$$\int_{\Gamma} Pdx+Qdy+Rdz=$$

$$=\iint_{\Phi}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy .$$

Ротор векторного поля определяется по формуле

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{V}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

Используя ротор, формула Стокса может быть записана в векторной форме

$$\oint_{\Gamma} (\boldsymbol{V}, \boldsymbol{ds}) = \iint_{\Phi} (\operatorname{rot} \boldsymbol{V}, \boldsymbol{dS})=\iint_{\Phi}\begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS .$$

Формула Стокса означает, что циркуляция векторного поля по краю поверхности равна потоку ротора через эту поверхность. Подробнее о смысле этой терминологии будет сказано позже.

Пример 3.6. Вычислить $\oint_C ydx+zdy+xdz$, где C – окружность $x^2+y^2+z^2=a^2,\ x+y+z=0$, проходимая против часовой стрелки, если смотреть с положительной стороны оси Ox.

Решение. Вычислим ротор векторного поля

$$\text{rot}\,\boldsymbol{V} = = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix} =(-1,-1,-1).$$

В качестве поверхности с краем C выберем круг, полученный в сечении плоскостью $x+y+z=0$ шара $x^2+y^2+z^2 \le a^2$ и ориентированный нормалью (1,1,1) (рис. 3.11).

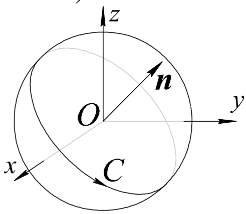

Рис. 3.11

Тогда

$$\oint\limits_C ydx + zdy + xdz = \iint\limits_\Phi \ (\text{rot}\,\boldsymbol{V}, \boldsymbol{dS}) = \iint\limits_\Phi \ (\text{rot}\,\boldsymbol{V}, \boldsymbol{n})$$

$$dS = -\sqrt{3}\iint\limits_\Phi dS = = -\sqrt{3}\ \ \mu\Phi = -\sqrt{3}\,\pi\, a^2.$$

Пример 3.7. Вычислить интеграл

$$\oint\limits_{AmB} (x^2 - yz)dx + (y^2 - xz)dy + (z^2 - xy)dz\ ,$$

взятый по отрезку винтовой линии $x=a\cos\varphi$, $y=a\sin\varphi$, $z=\dfrac{h}{2\pi}\varphi$ от $A(a,0,0)$ до $B(a,0,h)$ (рис. 3.12).

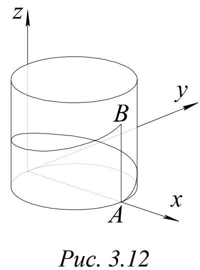

Рис. 3.12

Решение. rot $\boldsymbol{V}$ = $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x^2 - yz & y^2 - xz & z^2 - xy \end{vmatrix} =$

$= (-x + x, -y + y, -z + z)$ =(0,0,0), поэтому интеграл не зависит от пути интегрирования и вместо винтовой линии выберем отрезок, соединяющий точки *A*, *B*. $\left.\begin{matrix} x = a \\ y = 0 \\ z = t \end{matrix}\right\}$, $t \in [0, h]$. Тогда интеграл будет равен

$$\oint\limits_{AmB} (x^2 - yz)dx + (y^2 - xz)dy + (z^2 - xy)dz = \int\limits_0^h t^2 dt = \frac{h^3}{3}.$$

Пример 3.8. Доказать формулу

$\mu\Phi = \dfrac{1}{2} \oint\limits_{\partial\Phi} \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ x & y & z \end{vmatrix} = = \dfrac{1}{2} \oint\limits_{\partial\Phi} \left([\vec{n}, \vec{r}], \vec{ds}\right)$, где Ф – область, лежащая в плоскости с единичной нормалью $\vec{n}$, ограниченная кривой $\partial\Phi$, с согласованной ориентацией.

Решение. Находим векторное поле

$$\vec{V} = [\vec{n}, \vec{r}] = (z\cos\beta - y\cos\gamma, x\cos\gamma - z\cos\alpha, y\cos\alpha - x\cos\beta),$$

далее вычисляем ротор этого поля

$$\text{rot } \boldsymbol{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ z\cos\beta - y\cos\gamma & x\cos\gamma - z\cos\alpha & y\cos\alpha - x\cos\beta \end{vmatrix} =$$

$$= (2\cos\alpha, 2\cos\beta, 2\cos\gamma) = 2\vec{n}\,.$$

По формуле Стокса получим

$$\oint\limits_{\partial\Phi} \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ x & y & z \end{vmatrix} = \oint\limits_{\partial\Phi} \left(\vec{V}, \vec{ds}\right) = \iint\limits_{\Phi} \left(\operatorname{rot}\vec{V}, \vec{dS}\right) = \iint\limits_{\Phi} \left(2\vec{n}, \vec{n}\right) dS =$$

$$= 2\iint\limits_{\Phi} dS = 2\mu\Phi\,,$$

откуда и следует требуемое соотношение.

Пример 3.9. Вычислить $\oint\limits_{C} (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz$, где C – контур $x=a\sin^2 t$, $y=a\sin t\cos t$, $z=a\cos^2 t$, $t\in[0,\pi]$.

Решение. Контур лежит в плоскости $x+z=a$ (рис. 3.13) , далее $\frac{x}{y} = tg\, t = \frac{y}{z}$, $y^2=x\,z$, $y^2=x\,(a-x)$, или $\left(x-\frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}$. Таким образом, этот контур является эллипсом с полуосями $\frac{a}{2}, \frac{a}{\sqrt{2}}$ (рис. 3.14).

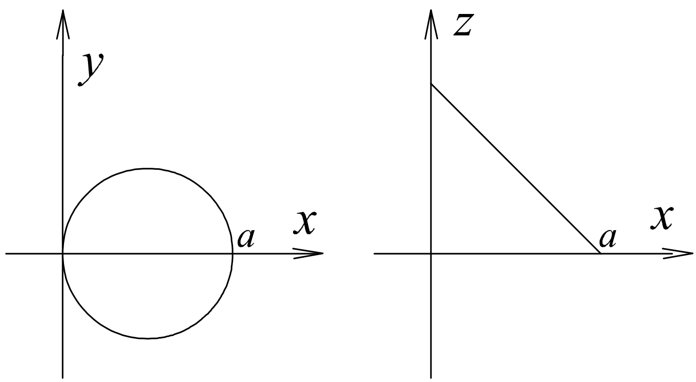

Рис. 3.13

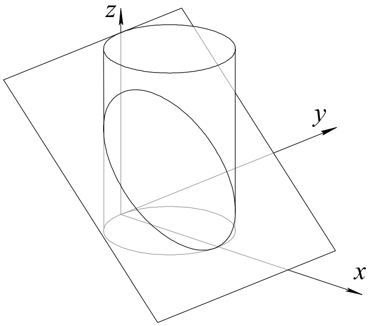

Рис. 3.14

Вычисляем ротор rot $\boldsymbol{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y-z & z-x & x-y \end{vmatrix} = (-2,-2,-2)$, для вектора нормали $\vec{n} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)$ определяется скалярное произведение $\left(\operatorname{rot}\vec{V},\vec{n}\right) = -2\sqrt{2}$. Тогда интеграл будет равен

$$\oint\limits_C (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz = \iint\limits_{\Phi}\left(\operatorname{rot}\vec{V},\overrightarrow{dS}\right) = -2\sqrt{2}\iint\limits_{\Phi} dS =$$

$$= -2\sqrt{2}\pi\frac{a}{2}\frac{a}{\sqrt{2}} = -\pi a^2 .$$

3.3.3. Условия независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования в пространстве

Определение*. Область D называется поверхностно односвязной, если для любой кусочно гладкой замкнутой кривой Г (контура Г), лежащей в D, можно указать ориентированную допустимую поверхность Ф, расположенную в D, краем которой является Г.*

Например, шар является поверхностно односвязной областью, тор не является поверхностно односвязной областью (рис. 3.15).

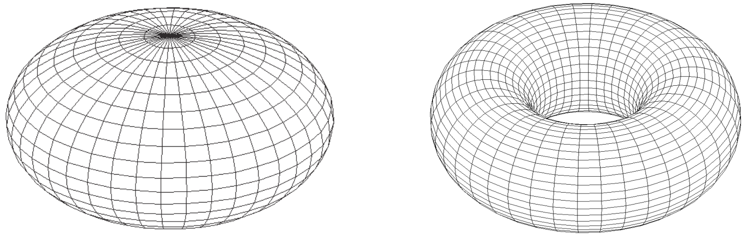

Рис. 3.15

Теорема 1. *Для того, чтобы интеграл* $\int\limits_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz$ *не зависел от пути в поверхностно односвязной области D, необходимо и достаточно, чтобы* rot $\boldsymbol{V} = 0$ *в области D.*

Теорема 2. *Для того, чтобы интеграл* $\int\limits_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz$ *не зависел от пути интегрирования в поверхностно односвязной области D , необходимо и достаточно, чтобы подынтегральное выражение было полным дифференциалом*

$$Pdx+Qdy+Rdz = du.$$

3.4. Формула Остроградского–Гаусса

Определение*. Объемно односвязной областью называется область D, удовлетворяющая следующему свойству. Любая замкнутая кусочно-гладкая не самопересекающаяся поверхность, расположенная в D , является границей области целиком лежащей в D. Можно сказать, что объемно односвязная область характеризуется отсутствием полостей внутри области.*

Если в объемно односвязной области W задано поле $\boldsymbol{V}=(P,Q,R)$ с непрерывными частными производными по соответствующим переменным, то справедлива формула

$$\iiint\limits_{W} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz = \iint\limits_{\partial W} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy \,.$$

Дивергенция векторного поля определяется по формуле

$$\operatorname{div} \boldsymbol{V} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Тогда, используя векторные обозначения, формулу Остроградского–Гаусса можно записать в виде

$$\iiint\limits_W \operatorname{div} \boldsymbol{V}\, dW = \iint\limits_{\partial W} (\boldsymbol{V}, \boldsymbol{dS}).$$

Формула Остроградского–Гаусса будет верна и для областей, допускающих разбиение на конечное число областей указанного типа.

Пример 3.10. Вычислить интеграл

$$I = \iint\limits_{\Phi} (x - y + z)dydz + (y - z + x)dzdx + (z - x + y)dxdy,$$

$$\Phi = \{|x - y + z| + |y - z + x| + |z - x + y| = 1\}.$$

Решение. Поверхность Φ показана на рис. 3.16.

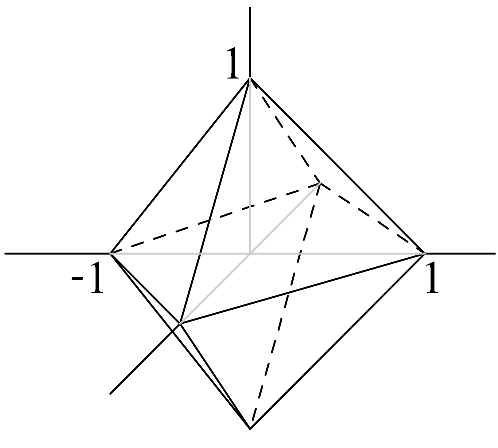

Рис. 3.16

По формуле Остроградского–Гаусса $I=3\iiint\limits_{B} dxdydz$. Сделаем замену переменных $\left.\begin{aligned} u&=x-y+z\\ v&=y-z+x\\ w&=z-x+y\end{aligned}\right\}$, в этом случае в новых координатах граница области $\partial\Delta$ будет определяться уравнением $|u|+|v|+|w|=1$. Якобиан отображения равен

$$\frac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)}=\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 1\end{vmatrix}=2+2=4.$$ Для обратного отображения якобиан будет равен $\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}=\frac{1}{4}$, поэтому интеграл I будет равен $\frac{3}{4}\iiint\limits_{\Delta} dudvdw=\frac{3}{4}2\ \frac{\sqrt{2}\sqrt{2}}{3}=1$.

Пример 3.11. Доказать, что если Ф – замкнутая простая положительно ориентированная поверхность, то $\oiint\limits_{\Phi}\left(\vec{a},\overrightarrow{dS}\right)=0$, где $\vec{a}$ – постоянное векторное поле.

Решение. Утверждение непосредственно следует из формулы Остроградского–Гаусса.

Пример 3.12. Объем области W равен $\mu W=\frac{1}{3}\oiint\limits_{\partial W}\left(\vec{r},\overrightarrow{dS}\right)$, где ∂W – положительно

следует из формулы Остроградского–Гаусса. ориентированная граница области W.

Решение. Утверждение непосредственно

Пример 3.13. Объем конуса, ограниченного гладкой конической поверхностью $F(x,y,z)=0$ и плоскостью с единичной нормалью $\vec{m}$

равен $\mu W = \frac{1}{3} h\mu\Phi$, где $\mu\Phi$ – площадь основания, h – высота конуса (рис. 3.17). Предполагается, что нормаль $\vec{m}$ к плоскости направлена в сторону вершины конуса.

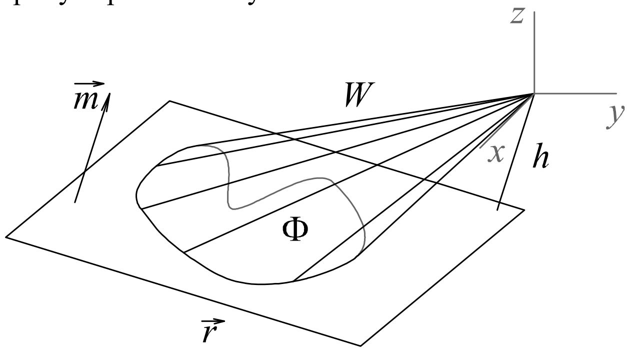

Рис. 3.17

Решение. Поместим начало координат в вершину конуса. Боковую поверхность конуса, ориентированную внешней нормалью, обозначим Φ_1, а основание, ориентированное нормалью $-\vec{m}$, обозначим Φ_2. Тогда

$$3\mu W = \iiint\limits_W 3dxdydz = \iiint\limits_W div\,\vec{r}\,dxdydz = \iint\limits_{\partial W} \left(\vec{r}, \overrightarrow{dS}\right) = \iint\limits_{\Phi_1} \left(\vec{r}, \vec{n}\right) dS\ ) +$$

$$+ \iint\limits_{\Phi_2} \left(\vec{r}, \vec{n}\right) dS .$$

Для боковой поверхности конуса скалярное произведение $\left(\vec{r}, \vec{n}\right) = 0$ и $\iint\limits_{\Phi_1} \left(\vec{r}, \vec{n}\right) dS = 0$. Для поверхности основания конуса $\left(\vec{r}, \vec{n}\right) = \left(\vec{r}, -\vec{m}\right) = h$, поэтому $\iint\limits_{\Phi_2} \left(\vec{r}, \vec{n}\right) dS = h \iint\limits_{\Phi_2} dS = h\mu\Phi$.

Пример 3.14. Вычислить $\iint\limits_{\Phi} \left(\vec{V}, \overrightarrow{dS}\right)$, где Φ – часть конической поверхности $x^2+y^2=z^2$, $0\le z \le a$, ориентированной внешней нормалью, а поле $\vec{V}=(x^2, y^2, z^2)$.

Решение. Дополним поверхность до замкнутой поверхности. Основание, ориентированное нужным образом, обозначим Φ_0, тогда интеграл по замкнутой поверхности будет вычисляться по формуле Остроградского–Гаусса

$$\iint\limits_{\Phi+\Phi_0}\left(\vec{V},\overrightarrow{dS}\right)=\iiint\limits_{W}\operatorname{div}\vec{V}\,dxdydz=2\iiint\limits_{W}(x+y+z)\,dxdydz=$$

$$=2\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{a}dh\int\limits_0^{h}r(r\cos\varphi+r\sin\varphi+h)dr=2\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{a}dh\int\limits_0^{h}rhdr=$$

$$=4\pi\int\limits_0^{a}hdh\int\limits_0^{h}rdr=2\pi\int\limits_0^{a}h^3dh=\frac{\pi}{2}a^4 .$$

Интеграл по верхней части поверхности будет равен

$$\iint\limits_{\Phi_0}\left(\vec{V},\overrightarrow{dS}\right)=\iint\limits_{D}a^2dxdy=a^2\mu D=\pi a^2 .$$

Таким образом, $\iint\limits_{\Phi}\left(\vec{V},\overrightarrow{dS}\right)=\frac{\pi}{2}a^4-\pi a^4=-\frac{\pi}{2}a^4 .$

3.5. Элементы теории поля

3.5.1. Основные определения

Для вектора будет использоваться обозначение ***a*** или $\vec{a}$. Функция $u(x,y,z)$, заданная в области D, будет называться скалярным полем. В случае задания трех функций P, Q, R можно говорить о векторном поле $\boldsymbol{V}=(P,Q,R)$.

Градиент скалярного поля u определяется как векторное поле

$$\boldsymbol{V}=\operatorname{grad} u=\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right).$$

Функция u называется потенциалом векторного поля, а само поле называется потенциальным. Связь между потенциалом и координатами векторного поля задается соотношением

$$du=Pdx+Qdy+Rdz\,.$$

***Определение 1**. Интеграл* $\int_C (\mathbf{V},\, \mathbf{ds})$ *для замкнутой кривой C называется циркуляцией векторного поля по C. Замкнутая кривая называется контуром, а интеграл по контуру обозначается* $\oint_C (\mathbf{V},\, \mathbf{ds})$ *и представляет собой работу векторного поля вдоль этого контура. Поле называется безвихревым, если его ротор равен нулю.*

***Определение 2**. Поле **V** называется соленоидальным, если для него существует векторное поле **W**, такое, что* $\mathbf{V} = \operatorname{rot} \mathbf{W}$. *Такое векторное поле **W** называется векторным потенциалом поля **V**.*

Упомянутые ранее утверждения можно сформулировать в виде теоремы.

***Теорема** (условия потенциальности поля). Пусть в поверхностно односвязной области D задано непрерывно дифференцируемое поле* $\mathbf{V}=(P,Q,R)$. *Тогда эквивалентны следующие три условия:*

1) *циркуляция векторного поля* $\oint_C (\mathbf{V},\, \mathbf{ds})$ *равна нулю вдоль любого контура, лежащего в D;*
2) *поле **V** потенциальное, т. е. существует дважды непрерывно дифференцируемая функция, градиентом которой и является данное поле. При этом* $\int_{AB} (\mathbf{V},\, \mathbf{ds}) = u(B) - u(A)$;
3) *поле **V** безвихревое.*

3.5.2. Поток векторного поля

Будем считать, что $\mathbf{V}=(P,Q,R)$ – это поле скоростей (рассматривается стационарный поток жидкости). Векторной линией поля **V** называется линия, касательная к которой в любой точке совпадает по направлению с вектором $\boldsymbol{V}$.

Определение. *Совокупность всех векторных линий данного поля, проходящих через некоторый контур, называется векторной трубкой* (*рис. 3.18*).

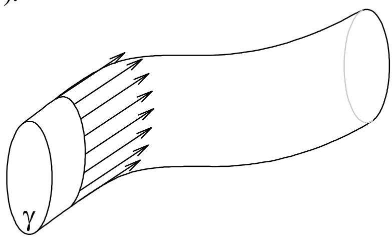

Рис. 3.18

Векторная линия $\left.\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \\ z &= z(t) \end{aligned}\right\}$ есть решение системы $\left.\begin{aligned} x' &= P(x, y, z) \\ y' &= Q(x, y, z) \\ z' &= R(x, y, z) \end{aligned}\right\}$.

Количество жидкости, протекающей через малую площадку S, перпендикулярную потоку жидкости, за единицу времени равно $\dfrac{|\vec{V}\,|\, t\mu S}{t} = |\vec{V}\,|\,\mu S$. Для наклонной площадки это количество будет равно $\left|\vec{V}\right|\cos\left(\vec{V}, \vec{n}\right)\mu S = \left(\vec{V}, \vec{n}\right)\mu S$ (рис. 3.19).

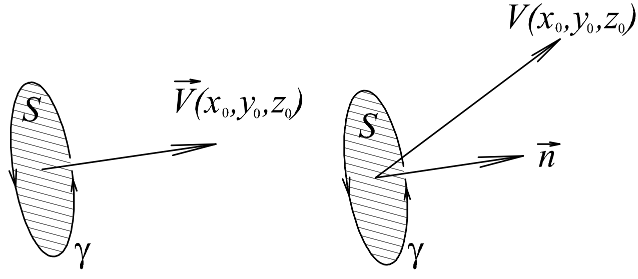

Рис. 3.19

Составляя интегральные суммы вида $\sum_k (\vec{n},\vec{V})\Big|_{M_k} \mu S_k$ и переходя к пределу, можно получить выражение для количества жидкости, протекающей через ориентированную поверхность Ф в направлении ее нормали в единицу времени. Эта величина называется потоком векторного поля $\boldsymbol{V}$ через ориентированную поверхность Ф, и она равна интегралу

$$\iint_{\Phi} (\boldsymbol{V},\boldsymbol{dS}).$$

Формула Остроградского–Гаусса

$$\iiint_W \operatorname{div} \boldsymbol{V}\, dW = \iint_{\partial W} (\boldsymbol{V},\boldsymbol{dS})$$

связывает количество вытекающей жидкости через границу области с тройным интегралом от дивергенции. Возьмем в качестве области шар, стягивающийся в точку. Тогда для потока через его границу получим

$$\iint_{\partial W} (\boldsymbol{V},\boldsymbol{dS}) = \iiint_W \operatorname{div} \boldsymbol{V}\, dW = \operatorname{div} \boldsymbol{V}\ \Big|_{M_\theta} \mu W,$$

откуда при переходе к пределу получается выражение для дивергенции векторного поля в заданной точке области:

$$\operatorname{div} \vec{V} = \lim_{W \to M_0} \frac{\iint\limits_{\partial W} \left(\vec{V},\overrightarrow{dS}\right)}{\mu W}.$$

Величина справа имеет смысл обильности источника. Таким образом, неравенство нулю дивергенции означает наличие в данной точке источника или стока в зависимости от знака дивергенции.

Известно, что поток векторного поля магнитной индукции $\vec{B}$ через замкнутую поверхность ∂W всегда равен нулю $\iint\limits_{\partial W}\left(\vec{B},\overrightarrow{dS}\right)=0.$ Отсюда следует, что $\operatorname{div}\vec{B}=0$ (уравнение Максвелла) и, таким образом, в природе не существует источников магнитного поля (магнитных зарядов).

В терминах потока жидкости можно сформулировать и формулу Стокса. Предположим, что векторное поле скоростей стационарного потока жидкости является соленоидальным. Тогда поток этого векторного поля через заданную поверхность равен циркуляции векторного потенциала этого поля по краю этой поверхности в направлении, согласованном с направлением потока через поверхность. Например, для векторного поля напряженности магнитного поля $\vec{H}$ будет выполнено $\oint\limits_{\partial\Phi}\left(\vec{H},\overrightarrow{ds}\right)=\iint\limits_{\Phi}\left(\operatorname{rot}\vec{H},\overrightarrow{dS}\right)=I$, циркуляция напряженности магнитного поля по краю поверхности Ф равно полному току I, протекающему через поверхность Ф (уравнение Максвелла).

Теорема. *Для того, чтобы поле **V** было соленоидальным, необходимо и достаточно, чтобы* div ***V*** = 0.

Замечание 1. Если ***W*** векторный потенциал поля ***V***, то $\boldsymbol{W}_1 = \boldsymbol{W} + \operatorname{grad} u$ также будет векторным потенциалом для любой дважды непрерывно дифференцируемой функции *u(x,y,z)*.

Замечание 2. В случае соленоидального поля поток этого поля через любое сечение векторной трубки постоянен (рис. 3.20).

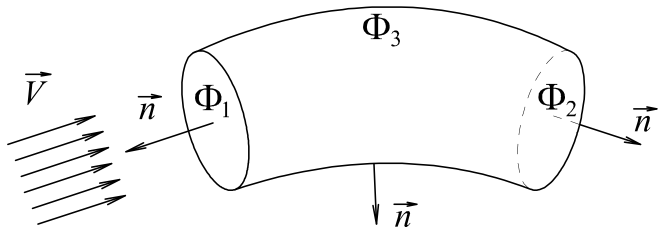

Рис. 3.20

3.6. Дифференциальные операторы

3.6.1. Дифференциальные операторы 1-го порядка

1. Оператор набла $\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}$. Этот оператор действует на скалярное поле по правилу

$$\nabla u = \boldsymbol{i}\frac{\partial u}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial u}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial u}{\partial z} = \text{grad } u.$$

Свойства оператора набла:

1) $\nabla(\alpha u + \beta v) = \alpha \nabla u + \beta \nabla v$;
2) $\nabla(uv) = v\nabla u + u\nabla v$;
3) $\nabla\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\nabla u - u\nabla v}{v^2}$;
4) $\nabla f(u) = f'(u)\ \nabla u$.

Пример 3.15. Найти ∇r.

Решение. $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\nabla r = \frac{\vec{r}}{r}$.

Пример 3.16. Найти $\text{grad}\frac{1}{r^3}$.

Решение. $\text{grad}\frac{1}{r^3} = \nabla \frac{1}{r^3} = -\frac{3}{r^4}\nabla r = -3\frac{\vec{r}}{r^5}$.

Пример 3.17. Вычислить $\text{grad}\frac{1}{r}$.

Решение. $\text{grad}\frac{1}{r} = \nabla \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2}\nabla r = -\frac{1}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3}$. Таким образом, гравитационное поле $\vec{V} = -m\frac{\vec{r}}{r^3}$ потенциальное и его потенциал равен $m\frac{1}{r}$.

2. Дивергенция div $\boldsymbol{V} = (\nabla, \boldsymbol{V}) = \dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z}$, $\boldsymbol{V}=(P,Q,R)$.

Свойства оператора:

1) $(\nabla, \alpha\boldsymbol{V}+\beta\boldsymbol{W}) = \alpha(\nabla, \boldsymbol{V}) + \beta(\nabla, \boldsymbol{W})$;

2) $(\nabla, f\boldsymbol{V}) = f(\nabla, \boldsymbol{V}) + (\nabla f, \boldsymbol{V})$.

Пример 3.18. Вычислить $\operatorname{div}\dfrac{\vec r}{r^3}$.

Решение.

$$\operatorname{div}\frac{\vec r}{r^3} = \left(\nabla, \frac{\vec r}{r^3}\right) = \frac{1}{r^3}(\nabla, \vec r) + \left(\nabla\frac{1}{r^3}, \vec r\right) = \frac{3}{r^3} + \left(-3\frac{\vec r}{r^5}, \vec r\right) = 0.$$

Пример 3.19. Пусть

$\vec r = (x-x_0, y-y_0, z-z_0)$, $r = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$, где (x_0, y_0, z_0) – фиксированная точка. Доказать, что $\operatorname{div}\dfrac{\vec r}{r} = \dfrac{2}{r}$.

Решение. Векторное поле $\vec V$ будет равно $\vec V = \dfrac{\vec r}{r}$ $= (P,Q,R) =$

$$= \left(\frac{x-x_0}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}, \frac{y-y_0}{r}, \frac{z-z_0}{r}\right).$$

Для производный получим

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{1}{r} - \frac{(x-x_0)^2}{r^3}, \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{1}{r} - \frac{(y-y_0)^2}{r^3}, \quad \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{1}{r} - \frac{(z-z_0)^2}{r^3},$$

откуда следует требуемое равенство.

Пример 3.20 . Доказать, что $\displaystyle\iiint\limits_W \frac{dxdydz}{r} = \frac{1}{2}\oiint\limits_{\partial W}\cos(\vec r, \vec n)dS$, где $\vec r = (x-x_0, y-y_0, z-z_0)$ и точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ не лежит на границе области. Отметим, что $\cos\left(\vec{r},\vec{n}\right)=\left(\dfrac{\vec{r}}{r},\vec{n}\right)$.

Решение. Рассмотрим сначала случай, когда точка M_0 не лежит в области W. Тогда по формуле Остроградского–Гаусса

$$\oiint\limits_{\partial W}\cos(\vec{r},\vec{n})dS = \oiint\limits_{\partial W}\left(\frac{\vec{r}}{r},\vec{n}\right)dS = \oiint\limits_{\partial W}\left(\frac{\vec{r}}{r},d\vec{S}\right) = \iiint\limits_{W}\mathrm{div}\frac{\vec{r}}{r}dxdydz =$$

$$= \iiint\limits_{W}\frac{2}{r}dxdydz\,.$$

В случае, когда M_0 лежит внутри области W , окружаем ее сферой достаточно малого радиуса ε так, чтобы она целиком лежала внутри W. Эту сферу, ориентированную отрицательно, обозначим Φ_ε . Шар радиуса ε с центром в M_0 обозначим K_ε . Через W_ε обозначим область W, из которой удалена шаровая полость K_ε . К области W_ε можно применить формулу Остроградского–Гаусса:

$$\oiint\limits_{\partial W_\varepsilon}\cos(\vec{r},\vec{n})dS = \oiint\limits_{\partial W_\varepsilon}\left(\frac{\vec{r}}{r},\vec{n}\right)dS = \oiint\limits_{\partial W_\varepsilon}\left(\frac{\vec{r}}{r},d\vec{S}\right) = \iiint\limits_{W_\varepsilon}\mathrm{div}\frac{\vec{r}}{r}dxdydz =$$

$$= \iiint\limits_{W_\varepsilon}\frac{2}{r}dxdydz\,.$$

С другой стороны,

$$\oiint\limits_{\partial W_\varepsilon}\left(\frac{\vec{r}}{r},d\vec{S}\right) = \iint\limits_{\partial W}\left(\frac{\vec{r}}{r},d\vec{S}\right) + \iint\limits_{\Phi_\varepsilon}\left(\frac{\vec{r}}{r},d\vec{S}\right) = \iint\limits_{\partial W}\left(\frac{\vec{r}}{r},d\vec{S}\right) + \iint\limits_{\Phi_\varepsilon}\left(\frac{\vec{r}}{r},-\frac{\vec{r}}{r}\right)dS =$$

$$= \iint\limits_{\partial W}\left(\frac{\vec{r}}{r},d\vec{S}\right) - \iint\limits_{\Phi_\varepsilon}dS == \iint\limits_{\partial W}\left(\frac{\vec{r}}{r},d\vec{S}\right) - 4\pi\varepsilon^2\,.$$

Таким образом, $\oiint\limits_{\partial W_\varepsilon}\left(\dfrac{\vec{r}}{r},d\vec{S}\right) \to \iint\limits_{\partial W}\left(\dfrac{\vec{r}}{r},d\vec{S}\right)$ при $\varepsilon\to 0$.

Аналогично, для тройного интеграла

$$\iiint\limits_{W_\varepsilon}\frac{2}{r}\,dxdydz=\iiint\limits_{W}\frac{2}{r}\,dxdydz-\iiint\limits_{K_\varepsilon}\frac{2}{r}\,dxdydz\,.$$

Интеграл $\iiint\limits_{K_\varepsilon}\frac{2}{r}\,dxdydz$ будет стремиться к 0 при $\varepsilon\to 0$.

$$\iiint\limits_{K_\varepsilon}\frac{2}{r}\,dxdydz=2\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int\limits_0^{\varepsilon}\frac{1}{\rho}\rho^2\cos\theta d\rho=2\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\varepsilon^2}{2}\cos\theta d\theta=$$

$$=4\pi\varepsilon^2\,.$$

3. Ротор rot $\boldsymbol{V}$ = [∇ , $\boldsymbol{V}$].

Свойства оператора:

1) [∇ , $\alpha\boldsymbol{V}+\beta\boldsymbol{W}$] = α[∇ , $\boldsymbol{V}$]+β [∇ , $\boldsymbol{W}$];

2) [∇ , $f\boldsymbol{V}$] = f [∇ , $\boldsymbol{V}$])+[∇f, $\boldsymbol{V}$].

3.6.2. Дифференциальные операторы 2-го порядка

В этом пункте перечисляются наиболее употребительные дифференциальные операторы второго порядка.

1. rot grad u = [∇ , ∇u]= 0.

2. div rot $\boldsymbol{V}$ = (∇ ,[∇ , $\boldsymbol{V}$]) = 0.

Определение 1. *Оператор Лапласа обозначается* Δu *и определяется по формуле* Δu = div grad u = (∇ , ∇u) = $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$.

Определение 2. *Функция и называется гармонической в некоторой области, если* Δu =0 *в этой области.*

3. grad div $\boldsymbol{V}$.

4. rot rot $\boldsymbol{V}$.

Пример 3.21. Найти поток вектора гравитационного поля точечной массы, расположенной в начале координат $\boldsymbol{V} = -m\dfrac{1}{r^3}\boldsymbol{r}$, через замкнутую поверхность Ф, не проходящую через начало координат в направлении внешней нормали.

Решение. В примере 3.18 было показано, что div $\boldsymbol{V} = 0$, поэтому вычисляемый поток будет равен нулю в случае, когда поверхность Ф не охватывает начало координат. В случае, когда гравитационная масса находится внутри области D, ограниченной поверхностью Ф, рассмотрим сферу S с центром в начале координат, целиком лежащую в области D, и ориентированной внутренней нормалью (рис. 3.21).

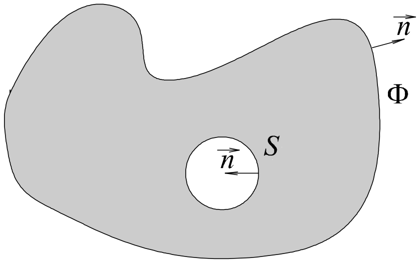

Рис. 3.21

Тогда поток $\boldsymbol{V}$ через границу области с границей Ф + S (область D с шаровой полостью) будет равен нулю. Следовательно, искомый поток будет равен

$$\iint_{\Phi}(\vec{V}, d\vec{S}) = -\iint_{S}(\vec{V}, d\vec{S}) = -\iint_{S}(\vec{V}, \frac{\vec{r}}{r})dS == m\iint_{S}\left(\frac{\vec{r}}{r^3}, \frac{\vec{r}}{r}\right)dS$$

$$== m\iint_{S}\frac{1}{r^2}dS = m\frac{1}{\varepsilon^2}\mu S = 4\pi\, m\,.$$

Пример 3.22. Доказать, что $\displaystyle\iint_{S}\frac{\partial u}{\partial n}dS = \iint_{V}\Delta u\, dxdydz$.

Решение. $\dfrac{\partial u}{\partial n} = (\text{grad}\ u\,, \boldsymbol{n})$, откуда из равенства $\Delta u = \text{div grad}\ u$ и формулы Остроградского–Гаусса следует требуемое равенство.

Замечание. Количество тепла, протекающее в поле температуры u за единицу времени через поверхность Ф в направлении ее нормали (поток градиента температуры), равно $Q=-k\iint\limits_{\Phi}(\nabla u, d\vec{S})$, где k – коэффициент внутренней теплопроводности (предполагается константой). По формуле Остроградского–Гаусса $-k\iint\limits_{\Phi}(\nabla u, d\vec{S}) = =-k\iiint\limits_{D}\Delta u\, dxdydz$. Эта величина имеет смысл количества тепла, накопленного телом за единицу времени.

Глава 4. ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА

4.1. Собственные интегралы, зависящие от параметра

4.1.1. Непрерывность интеграла, зависящего от параметра

Рассмотрим интеграл $F(y) = \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx$ для области типа B, $D=\{(x,y): x_1(y)\le x\le x_2(y),\ y\in[c,d]\}$. Предполагается, что f определена в некоторой прямоугольной области R, содержащей D, как показано на рис. 4.1 (D – замкнутая), $x_1(y)$, $x_2(y)$ – непрерывные функции, определенные на $[c,d]$.

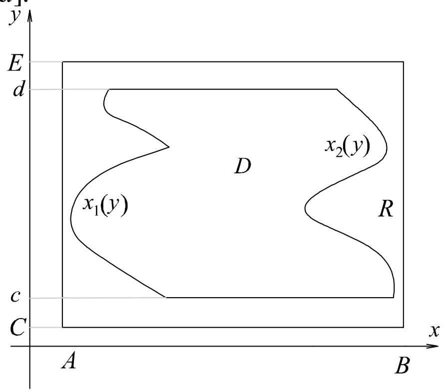

Рис. 4.1

Теорема. *Если f непрерывна на R , $x_1(y)$, $x_2(y)$ непрерывны на $[c,d]$, то $F(y)$ непрерывна на $[c,d]$.*

Определение. *Пусть функция $f(x,y)$ определена на $[a,b]$ для любого $y \in Y$. Говорят, что $f(x,y)$ равномерно сходится к $g(x)$ на $[a,b]$ при $y \to y_0$, если*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in [a,b] \forall y \in U_\delta(y_0): |f(x,y) - g(x)| < \varepsilon .$$

Это понятие является обобщением понятия равномерной сходимости функциональной последовательности $f_n(x)$, где вместо дискретного переменного n (индекса) выступает «непрерывный» параметр y .

Теорема 1 *(аналог теоремы о непрерывности предельной функции, равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций). Если $f(x,y)$ непрерывна и равномерно сходится к $g(x)$ на $[a,b]$ при $y \to y_0$, то функция $g(x)$ непрерывна на $[a,b]$.*

Теорема 2 *(аналог теоремы о переходе к пределу под знаком интеграла или, что то же самое, о почленном интегрировании равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций). Если $f(x,y)$ непрерывна и равномерно сходится к $g(x)$ на $[a,b]$ при $y \to y_0$, то*

$$\lim_{y \to y_0} \int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b g(x)dx .$$

4.1.2. Интегрирование интегралов, зависящих от параметра

Предположим, что область является областью типа A и B . Из формул выражения двойного интеграла через повторные следуют следующие формулы (рис. 4.2):

$$F(y) = \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx , \int_c^d F(y)dy = \iint_D f(x,y)dxdy ;$$

$$G(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy , \int_a^b G(x)dx = \iint_D f(x,y)dxdy .$$

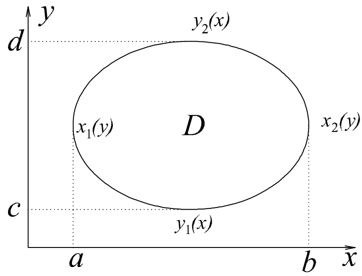

Рис. 4.2

4.1.2. Дифференцирование интегралов, зависящих от параметра

Теорема (Лейбница). *Если* f *и* $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ *непрерывны в* $[a,b]\times[c,d]$ *, то* $F(y) = \int\limits_a^b f(x,y)dx$ *дифференцируема на* $[c,d]$ *и* $\dfrac{\partial F}{\partial y} = \int\limits_a^b \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}dx.$

Рассмотрим область типа B, указанную на рис. 4.3, и функцию f, определенную на прямоугольнике R, содержащем область D.

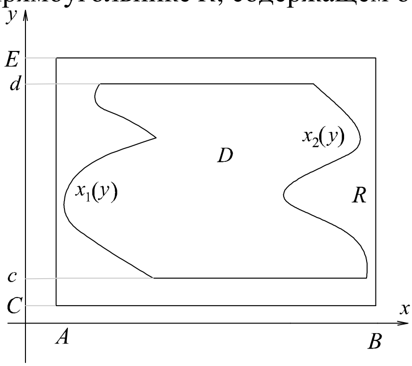

Рис. 4.3

Теорема. *Если* f *и ее производная* $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ *непрерывны на* R, $x_1(y)$, $x_2(y)$ *имеют непрерывные на* $[c,d]$ *производные, то функция*

$F(y) = \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)dx$ *также имеет производную*

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx + f\big(x_2(y), y\big)x_2'(y) - f\big(x_1(y), y\big)x_1'(y).$$

4.2. Несобственные интегралы, зависящие от параметра

4.2.1. Равномерная сходимость несобственного интеграла, зависящего от параметра

Рассмотрим интеграл

$$\Phi(y) = \int\limits_a^b f(x, y)dx, \; -\infty < a < b \le +\infty, \; y \in Y. \qquad (4.1)$$

Предположим, что при некоторых y интеграл (4.1) является несобственным. Так, если $-\infty < a < b \le +\infty$ и при некотором y интеграл (4.1) имеет единственную особенность в b, то условием сходимости интеграла (4.1) будет существование конечного предела

$$\lim_{\eta \to b-0} \int\limits_a^\eta f(x, y)dx.$$

Если при заданном y интеграл сходится, то для любого $\eta \in [a,b)$ интеграл $\int\limits_\eta^b f(x, y)dx$ (называемый остатком) будет существовать, и условие сходимости можно записать в виде $\lim\limits_{\eta \to b-0} \int\limits_\eta^b f(x, y)dx = 0$. В случае расходимости этого интеграла естественно считать, что условие $\lim\limits_{\eta \to b-0} \int\limits_\eta^b f(x, y)dx = 0$ не выполнено. Таким образом, условие сходимости будет в дальнейшем записываться в виде

$$\lim_{\eta\to b-0}\int_{\eta}^{b} f(x,y)dx = 0.$$

Определение. *Пусть интеграл с параметром* $\int_a^b f(x,y)dx$ *для всех или для некоторых* $y\in Y$ *имеет единственную особенность в точке* b *(если* b *конечное, интеграл 2-го рода) или в* $+\infty$ *(интеграл 1-го рода). Сходящийся на* Y *интеграл называется равномерно сходящимся на* Y*, если выполнено условие*

$\forall\varepsilon>0\exists\delta>0\forall\eta\in(b\text{-}\delta,b)\forall y\in Y$: $\left|\int_{\eta}^{b} f(x,y)dx\right| < \varepsilon$ *(для интеграла 2-го рода),*

$\forall\varepsilon>0\exists M\forall\eta\in(M,+\infty)\forall y\in Y$: $\left|\int_{\eta}^{+\infty} f(x,y)dx\right| < \varepsilon$ *(для интеграла 1-го рода).*

Признак Вейерштрасса равномерной сходимости. *Если существует функция* $g(x)$*, определенная на отрезке* $[a,b)$ *(*b *– конечное или* $+\infty$*), интегрируемая на любом отрезке* $[a,\ \eta)$*,* $\eta\in(a,b)$ *и такая, что: 1)* $|f(x,y)|\le g(x)$*,* $a\le x<b$*,* $\forall y\in Y$*; 2)* $\int_a^b g(x)dx$ *сходится, то интеграл* $\int_a^b f(x,y)dx$ *сходится равномерно на множестве* Y*.*

Утверждение следует из неравенств

$$\left|\int_{\eta}^{b} f(x,y)dx\right| \le \int_{\eta}^{b}\left|f(x,y)\right|dx \le \int_{\eta}^{b} g(x)dx.$$

Теорема *(переход к пределу под знаком интеграла). Пусть* $-\infty<a<b\le+\infty$ *и функция* $f(x,y)$ *определена и непрерывна на отрезке* $[a,b)$ *по* x *для всех* $y\in Y$*. Если для любых* $\eta\in(a,b)$ *функция* $f(x,y)$

равномерно сходится к функции $g(x)$ *на отрезке* $[a,b-\eta]$ *при* $y \to y_0$, *интеграл* $\int_a^b f(x,y)dx$ *равномерно сходится на* Y *и интеграл* $\int_a^b g(x)dx$ *сходится, то имеет место равенство(рис. 4.4)*

$$\lim_{y \to y_0} \int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b g(x)dx .$$

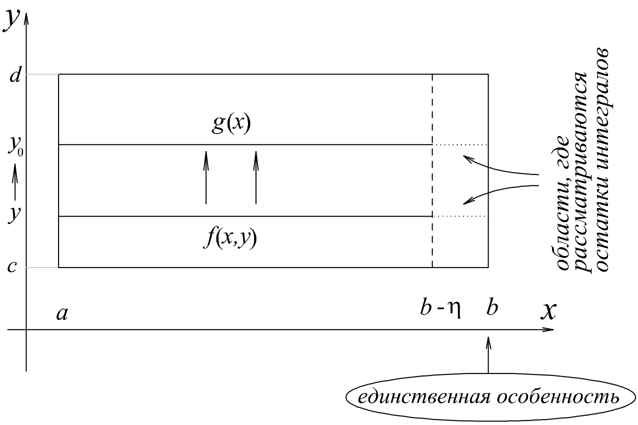

Рис. 4.4

Критерий Коши равномерной сходимости (интеграла 2-го рода). *Для равномерной сходимости интеграла* $\int_a^b f(x,y)dx$ *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall y \in Y \forall \eta', \eta'' \in (b-\delta, b): \left| \int_{\eta'}^{\eta''} f(x,y)dx \right| < \varepsilon .$$

4.2.2. Непрерывность несобственного интеграла, зависящего от параметра

Теорема. *Если* $f(x,y)$ *определена и непрерывна на* $[a,b)\times[c,d]$ *и интеграл* $\Phi(y) = \int_a^b f(x,y)dx$ *сходится равномерно на* $[c,d]$ *, то этот интеграл является непрерывной функцией (рис. 4.5).*

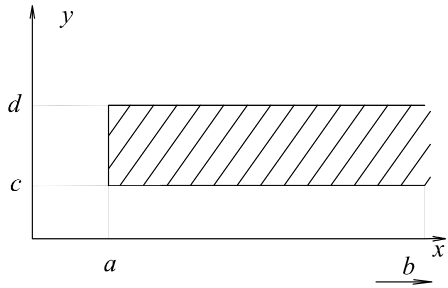

Рис. 4.5

4.2.3. Интегрирование интегралов, зависящих от параметра

Теорема. *Если функция* $f(x,y)$ *определена и непрерывна на* $[a,b)\times[c,d]$*, интеграл* $\Phi(y) = \int_a^b f(x,y)dx$ *сходится равномерно на* $[c,d]$ *, существует интеграл* $\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy$ *, то*

$$\int_c^d \Phi(y)dx = \int_c^d dy\int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy .$$

Теорема. *Если функция* $f(x,y)$ *определена и непрерывна на* $[a,b)\times[c,d)$*, интеграл* $\int_a^b f(x,y)dx$ *сходится равномерно на любом* $[c,\eta]$ *, интеграл* $\int_c^d f(x,y)dy$ *сходится равномерно на любом* $[a,\xi]$ *и* существует один из повторных интегралов $\int\limits_c^d dy\int\limits_a^b |f(x,y)|dx$, $\int\limits_a^b dx\int\limits_c^d |f(x,y)|dy$, то существует и другой и выполняется равенство

$$\int\limits_c^d dy\int\limits_a^b f(x,y)dx = \int\limits_a^b dx\int\limits_c^d f(x,y)dy\,.$$

4.2.4. Дифференцирование интегралов, зависящих от параметра

Лемма. *Если функция $f(x,y)$ непрерывна на $[a,b)\times[c,d]$, то сходимость интеграла $\int\limits_a^b f(x,y)dx$ эквивалентна условию: для любой последовательности $\eta_k\to b$, $\eta_0=a$, $\eta_k\in[a,b)$ сходится ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\int\limits_{\eta_k}^{\eta_{k+1}} f(x,y)dx$. Аналогично для равномерной сходимости: равномерная сходимость интеграла $\int\limits_a^b f(x,y)dx$ на множестве Y эквивалентна условию: для любой последовательности $\eta_k\to b$, $\eta_0=a$, $\eta_k\in[a,b)$ равномерно на Y сходится функциональный ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\int\limits_{\eta_k}^{\eta_{k+1}} f(x,y)dx$.*

Теорема. *Пусть функции $f(x,y)$ и $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны на $[a,b)\times[c,d]$. Если $\int\limits_a^b f(x,y)dx$ сходится для всех y, а $\int\limits_a^b \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}dx$ сходится рав-*

номерно на $[c,d]$ *, то функция* $\Phi(y) = \int_a^b f(x,y)dx$ *дифференцируема на этом отрезке и*

$$\frac{d}{dy}\int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dx.$$

4.2.5. Функции Эйлера

Гамма-функция Эйлера $\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}dx$, $p > 0$, непрерывна на $(0, \propto)$. Для доказательства этого утверждения разобьем интеграл на два интеграла $\Gamma(p) = \int_0^1 x^{p-1}e^{-x}dx + \int_1^\infty x^{p-1}e^{-x}dx$. Докажем непрерывность функций $\int_0^1 x^{p-1}e^{-x}dx$, $\int_1^\infty x^{p-1}e^{-x}dx$ на $(0, \propto)$. Из неравенства $\int_0^1 x^{p-1}e^{-x}dx \le \int_0^1 x^{\varepsilon-1}e^{-x}dx$, $p\in[\varepsilon, A]$, и сходимости интеграла $\int_0^1 x^{\varepsilon-1}e^{-x}dx$ по признаку Вейерштрасса следует, что интеграл $\int_0^1 x^{p-1}e^{-x}dx$ сходится равномерно на $[\varepsilon, A]$ и, следовательно, является непрерывной функцией на этом множестве $[\varepsilon, A]$.

Для доказательства непрерывности второго интеграла выпишем неравенство $\int_1^\infty x^{p-1}e^{-x}dx \le \int_1^\infty x^{A-1}e^{-x}dx$, $p\in[\varepsilon, A]$. Из сходимости интеграла $\int_1^\infty x^{A-1}e^{-x}dx$ следует, что интеграл $\int_1^\infty x^{p-1}e^{-x}dx$ сходится равномерно на [ε , A] и, следовательно, является непрерывной функцией на множестве [ε , A].

Для гамма-функции Эйлера справедлива формула

$$\frac{\Gamma(p)}{y^p} = \int_0^\infty x^{p-1} e^{-xy} dx. \tag{4.2}$$

Это равенство получается после замены $x \to xy$. Действительно,

$\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x} dx = \int_0^\infty y^{p-1} x^{p-1} e^{-xy} y dx = y^p \int_0^\infty x^{p-1} e^{-xy} dx$.

Бета-функция Эйлера: $B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx$, $p > 0$, $q > 0$.

Сделаем замену $x = \frac{y}{1+y}$, $dx = \frac{dy}{(1+y)^2}$, тогда

$$B(p,q) == \int_0^\infty \frac{y^{p-1}}{(1+y)^{p-1}} \frac{1}{(1+y)^{q-1}} \frac{dy}{(1+y)^2} = \int_0^\infty \frac{y^{p-1}}{(1+y)^{p+q}} dy,$$

откуда получается формула

$$B(p,q) = \int_0^\infty \frac{y^{p-1}}{(1+y)^{p+q}} dy. \tag{4.3}$$

4.2.6. Свойства функций Эйлера

Из формулы (4.2) следует, что $\frac{\Gamma(p+q)}{(1+y)^{p+q}} = \int_0^\infty x^{p+q-1} e^{-x(1+y)} dx$.

Умножая обе части этого равенства на y^{p-1}, получим равенство

$$\Gamma(p+q)\frac{y^{p-1}}{(1+y)^{p+q}} = y^{p-1}\int_0^\infty x^{p+q-1} e^{-xy} e^{-x} dx .$$

Далее интегрируем от 0 до ∞:

$$\Gamma(p+q)\int_0^\infty \frac{y^{p-1}}{(1+y)^{p+q}}dy = \int_0^\infty y^{p-1}dy\int_0^\infty x^{p+q-1}e^{-x(y+1)}dx =$$

$$= \int_0^\infty x^{q-1}e^{-x}dx\int_0^\infty (xy)^{p-1}e^{-xy}xdy \ .$$

Откуда, используя (4.3), получим: $B(p,q) = \dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$. В частности, $B(p,1-p) = \Gamma(p)\Gamma(1-p) = \int_0^\infty \dfrac{y^{p-1}}{1+y}dy \ = \dfrac{\pi}{\sin p\pi}, 0 < p < 1$.

Непосредственно из определения следует, что $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(p+1) = = p\,\Gamma(p)$.

Отметим, что из этой формулы следует, что гамма-функцию достаточно знать на интервале (0, 1/2). Интеграл $\int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}dx$ сходится ($p > 0$) , а интеграл $\int_0^\infty x^{p-1}\ln^k x\, e^{-x}dx$ сходится равномерно на любом отрезке $[\varepsilon\ ,\ A\ ]$ для $0 < \varepsilon\ < A$. Поэтому интеграл можно дифференцировать по параметру. Докажем равномерную сходимость интегралов $\int_0^\infty x^{p-1}\ln^k x\, e^{-x}dx$.

В окрестности нуля $|\ln x| \le \dfrac{C_1(\delta)}{x^\delta}$ для $\delta > 0$ существует $C_1(\delta)$. В окрестности бесконечности $|\ln x| \le C_2(\delta)x^\delta$ для $\delta\ > 0$ существует $C_2(\delta)$. Равномерная сходимость интеграла $\Gamma^{(k)}(p) = \int_0^\infty x^{p-1}\ln^k x\, e^{-x}dx$ на любом отрезке $[\varepsilon\ ,\ A\ ]$ следует из оценок

$$\left|\int_0^\infty x^{p-1}\ln^k x\, e^{-x}dx\right| \le\le \int_0^1 x^{\varepsilon-1}\,|\ln^k x|\,e^{-x}dx + \int_1^\infty x^{A-1}\,|\ln^k x|\,e^{-x}dx \le$$

$$C_1^k(\delta)\int_0^1 x^{\varepsilon-k\delta-1}e^{-x}dx + + C_2^k(\delta)\int_1^\infty x^{A+k\delta-1}e^{-x}dx,$$ для всех $p\in[\varepsilon\ ,\ A]$.

Здесь для $\varepsilon > 0$ следует выбрать δ так, чтобы ε - $k\,\delta$ оставалось больше нуля.

4.2.7. Примеры вычисления несобственных интегралов, зависящих от параметра

Формула Фруллани. Функция $f(x)$ непрерывна и интеграл $\int_A^\infty \frac{f(x)}{x}dx$ существует для любого $A > 0$, тогда справедлива формула Фруллани

$$\int_0^\infty \frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx = f(0)\ln\frac{b}{a},\ (a>0,\ b>0).$$

Доказательство. $\int_a^b f'(xy)dy = \frac{1}{x}\int_a^b d_y f(xy) = \frac{f(bx)-f(ax)}{x}$. Интегрируя последнее выражение, получим

$$\int_0^\infty \frac{f(bx)-f(ax)}{x}dx = \int_0^\infty dx\int_a^b f'(xy)dy = \int_a^b dy\int_0^\infty f'(xy)dx =$$

$$= \int_a^b \frac{dy}{y}\int_0^\infty f'(u)du = \int_a^b (f(\infty) - f(0))\frac{dy}{y} = -f(0)\ln\frac{b}{a},$$

откуда и следует требуемое утверждение.

Интегрированием по частям вычисляются интегралы

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x}\cos\beta x\,dx = \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2},\ \alpha \ge 0,\quad \int_0^\infty e^{-\alpha x}\sin\beta x\,dx = \frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2},\ \alpha \ge 0\,.$$

Другой способ вычисления этих интегралов: положим $\gamma = -\alpha + i\beta$, тогда

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x}(\cos\beta x+i\sin\beta x)dx=\int_0^\infty e^{\gamma x}dx=\frac{1}{\gamma}\int_0^\infty de^{\gamma x}=\frac{1}{\gamma}e^{\gamma x}\Big|_{x=0}^{\infty}=-\frac{1}{\gamma}=$$

$$=-\frac{1}{-\alpha+i\beta}=-\frac{-\alpha-i\beta}{\alpha^2+\beta^2}=\frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}+i\frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2},$$

откуда и следуют указанные формулы.

Пример 4.1. Вычислить интеграл $\int_0^\infty e^{-\alpha x}\frac{\cos bx-\cos cx}{x}dx$.

Решение. Обозначим этот интеграл через $\Phi(\alpha)$. Дифференцируя эту функцию, получим

$$\Phi'(\alpha)=\int_0^\infty e^{-\alpha x}(\cos cx-\cos bx)\,dx=\frac{\alpha}{\alpha^2+c^2}-\frac{\alpha}{\alpha^2+b^2}.$$

Откуда

$$\Phi(\alpha)-\Phi(0)=\int_0^\alpha\frac{\alpha d\alpha}{\alpha^2+c^2}-\int_0^\alpha\frac{\alpha d\alpha}{\alpha^2+b^2}=\frac{1}{2}\ln(\alpha^2+c^2)\Big|_0^\alpha-\frac{1}{2}\ln(\alpha^2+$$

$$+b^2)\Big|_0^\alpha+\frac{1}{2}\ln\frac{b^2}{c^2}=\frac{1}{2}\ln\frac{\alpha^2+c^2}{\alpha^2+b^2}-\ln\frac{c}{b},\ \Phi(\alpha)==\frac{1}{2}\ln\frac{\alpha^2+c^2}{\alpha^2+b^2}.$$

Пример 4.2. Доказать, что интеграл Пуассона $I=\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Решение. Возведем интеграл в квадрат

$$I^2=$$

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx\int_0^\infty xe^{-x^2y2}dy=\int_0^\infty dy\int_0^\infty e^{-x^2(1+y^2)}xdx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^\infty\frac{dy}{1+y^2}\int_0^\infty e^{-x^2(1+y^2)}dx^2(1+y^2)=\frac{1}{2}\int_0^\infty\frac{dy}{1+y^2}\int_0^\infty e^{-u}du=$$

$$=\frac{1}{2}arctg\ y\Big|_0^\infty=\frac{\pi}{4}.$$

Пример 4.3. Вычислить интеграл $I = \int_0^\infty e^{-ax^2} \cos bx\, dx$.

Решение. Воспользуемся формулой интегрирования по частям.

$$I = \frac{1}{b}\int_0^\infty e^{-ax^2}\, d\sin bx = \frac{1}{b}\left[\sin bx\, e^{-ax^2}\Big|_0^\infty + 2a\int_0^\infty x\sin bx\, e^{-ax^2} dx\right] =$$

$$= \frac{2a}{b}\int_0^\infty x\sin bx\, e^{-ax^2}\, dx.$$

Вычислим производную по параметру b: $I_b{}' = -\int_0^\infty x\sin bx\, e^{-ax^2}\, dx = = -\frac{b}{2a}I$. Таким образом, получено дифференциальное уравнение $\frac{dI}{I} = -\frac{bdb}{2a}$, решая которое, получим I $= C\ \ e^{-\frac{b^2}{4a}}$. Так так $I(0)$ = $= \int_0^\infty e^{-ax^2} dx = \frac{1}{\sqrt{a}}\int_0^\infty e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}}$,то I $= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-\frac{b^2}{4a}}$.

Пример 4.4. Вычислить интеграл

$$F(a,b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x\right)dx,\ a > 0,\ b > 0. \qquad (4.4)$$

Решение. Вычислим частные производные

$$\frac{\partial F}{\partial a} = 2a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}dx, \qquad (4.5)$$

$$\frac{\partial F}{\partial b} = 2b\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}dx.$$

Складывая эти выражения, получим:

$a\dfrac{\partial F}{\partial a}+b\dfrac{\partial F}{\partial b}=\pi.$ Из (4.5) следует, что

$$F(a,b)=\int_0^a 2u\,du\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x}{u^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}dx+C(b).$$

Отметим, что справедливо разложение:

$$\frac{t^2}{(a^2t^2+b^2)(t^2+1)}=\frac{1}{b^2-a^2}\left(\frac{b^2}{a^2t^2+b^2}-\frac{1}{t^2+1}\right),$$

которое проверяется непосредственно приведением к общему знаменателю. Действительно, выражение в правой части этого равенства можно преобразовать следующим образом:

$$\frac{1}{b^2-a^2}\left(\frac{b^2}{a^2t^2+b^2}-\frac{1}{t^2+1}\right)=\frac{1}{b^2-a^2}\left(\frac{b^2(t^2+1)-a^2t^2-b^2}{(t^2+1)(a^2t^2+b^2)}\right)=$$

$$=\frac{1}{b^2-a^2}\left(\frac{b^2(t^2+1)-a^2t^2-b^2}{(t^2+1)(a^2t^2+b^2)}\right)=\frac{1}{b^2-a^2}\left(\frac{b^2t^2-a^2t^2}{(t^2+1)(a^2t^2+b^2)}\right)=$$

$$=\frac{1}{b^2-a^2}\left(\frac{(b^2-a^2)t^2}{(t^2+1)(a^2t^2+b^2)}\right)=\frac{t^2}{(t^2+1)(a^2t^2+b^2)}.$$

Используя это равенство, преобразуем интеграл

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{tg^2x}{a^2tg^2x+b^2}dx=$$

$$=\int_0^{\infty}\frac{t^2}{(a^2t^2+b^2)(t^2+1)}dt=\frac{1}{b^2-a^2}\left(b^2\int_0^{\infty}\frac{dt}{a^2t^2+b^2}-\int_0^{\infty}\frac{dt}{t^2+1}\right)=$$

$$=\frac{1}{b^2-a^2}\left(\frac{b}{a}\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2a(a+b)}.$$

Откуда следует, что

$$F(a,b) = \int_0^a 2u \frac{\pi}{2u(u+b)} du + C(b) = \pi \ln \frac{a+b}{b} + C(b).$$

Из определения функции *F(a,b)* получаем выражение для значения функции F в точке (b,b). Именно, $F(b,b)=\pi \ln b$. С другой стороны, из предыдущего равенства получаем $F(b,b)=\pi \ln 2 + C(b)$, откуда находим значение $C(b) = \pi \ln \frac{b}{2}$. Таким образом,

$$F(a,b) = = \pi \ln \frac{a+b}{b} + \pi \ln \frac{b}{2} = \pi \ln \frac{a+b}{2}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. Часть 2. – М.: Наука, 1971.
2. Фихтенгольц Г. М. Основы математического анализа.Т.2. – М.: Наука, 1971.
3. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2,3. – М.: Наука, 1966.
4. Никольский С. М. Курс математического анализа. Т.2. – М.: Наука, 1973.
5. Кудрявцев Л. Д. Математический анализ. Т.2. – М.: Высшая школа, 1973.

Александр Сергеевич Логинов

Николай Васильевич Мирошин

Светлана Григорьевна Селиванова

ИЗБРАННЫЕ РАЗДЕЛЫ КУРСА

«ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ»

(ТЕОРИЯ И ПРИМЕРЫ)

Редактор Е.Н. Кочубей

Подписано в печать 16.03.2009. Формат 60x84 1/16.
Изд. №044-1. Печ. л. 6.0. Тираж 100 экз. Заказ
Московский инженерно-физический институт (государственный университет)
Типография МИФИ. Москва, Каширское ш., 31