ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ РФ

МОСКОВСКИЙ ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)

---

Е.Н. Аксенова, Н.К. Гасников, Н.П. Калашников

# МЕТОДЫ ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТЕЙ РЕЗУЛЬТАТОВ ПРЯМЫХ И КОСВЕННЫХ ИЗМЕРЕНИЙ В ЛАБОРАТОРИЯХ ФИЗИЧЕСКОГО ПРАКТИКУМА

*Учебно-методическое пособие*

Москва 2009

УДК 53.08(07)
ББК 22.3я7
А 42

*Аксенова Е.Н., Гасников Н.К., Калашников Н.П.* **Методы оценки погрешностей результатов прямых и косвенных измерений в лабораториях физического практикума:** *Учебно-методическое пособие.* – М.: МИФИ, 2009. – 24 с.

Пособие отражает в предельно краткой форме простейшие методы оценки погрешностей результатов прямых и косвенных физических измерений и их графического изображения.

Предназначено для облегчения работы студентов 1–5 семестров всех факультетов МИФИ в лабораториях физического практикума. Изложенный материал полезен любому начинающему экспериментатору.

Авторы выражают благодарность доктору физ.-мат. наук, профессору С.А. Воронову, кандидатам физ.-мат. наук, доцентам В.А. Шилову и Т.А. Семеновой за ценные замечания.

Рецензенты: д-р физ.-мат. наук *В.М.Дубовик*,
д-р физ.-мат. наук *Е.Д . Жижин*,
д-р физ.-мат. наук *В.П.Крайнов*

Рекомендовано редсоветом МИФИ к изданию в качестве учебно-методического пособия.

ISBN 978-5-7262-1140-4

СОДЕРЖАНИЕ

# 1. ПРЯМЫЕ И КОСВЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ФИЗИЧЕСКОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Основная задача физического эксперимента – измерение физических величин для дальнейшего их анализа и установления взаимосвязей между ними – физических законов.

Измерения бывают прямые и косвенные.

**В прямых измерениях физическая величина измеряется непосредственно** (например, измерение длины предмета линейкой, штангенциркулем или микрометром, силы тока – амперметром и т.д.).

**При косвенных измерениях искомая величина не измеряется, а вычисляется по результатам прямых измерений других величин** (например, измеряя силу тока и напряжение на зажимах электроплитки, можно вычислить ее тепловую мощность и сопротивление).

В физическом эксперименте любое измерение (прямое или косвенное) дает лишь приблизительное значение данной физической величины. Физика – наука естественная, абсолютная точность (истина) никогда не может быть достигнута в физических экспериментах. Абсолютная точность присуща лишь математике, которая является описательным инструментом для трактовки наблюдаемых закономерностей.

При измерении длины полученный результат будет зависеть, по крайней мере: 1) от точности выбранного прибора (штангенциркуль, например, позволяет измерять с точностью до 0,1 мм, а линейка – до 1 мм); 2) от внешних условий: температуры, деформации, влажности и т.д.

Разумеется, результаты косвенных измерений, вычисленные по приближенным результатам, полученным в прямых измерениях, также будут приближенными. Поэтому **вместе с результатом всегда необходимо указывать его точность, называемую абсолютной погрешностью результата Δ.**

Пример: L = (427,1 ± 0,2) мм

Учитывая, что в учебных лабораториях кафедры общей физики из-за ограничения по времени число прямых измерений каждой величины не превышает 20, погрешность этих измерений согласно выводам математической статистики [1] не может быть представлена более, чем одной значащей цифрой. Исключением является случай равенства этой первой значащей цифры абсолютной погрешности 1, при этом отбрасывание остальных цифр погрешности приводит к значительному (до 50 %) ее искажению, поэтому в данном случае рекомендуется оставлять две значащие цифры в записи абсолютной погрешности. Таким образом, **абсолютная погрешность результата Δ должна после округления содержать лишь одну значащую цифру, если эта цифра не 1, если же 1, то следует оставить в погрешности две значащих цифры**.

**Значащими цифрами в десятичном изображении числа считаются все цифры, кроме нулей впереди числа** [2].

Пример:

| Число | Кол-во значащих цифр в нем |
|---|---|
| 7000 | 4 |
| $700 \cdot 10$ | 3 |
| $7 \cdot 10^3$ | 1 |
| $0,7 \cdot 10^4$ | 1 |
| $0,07 \cdot 10^5$ | 1 |

Хотя с математической точки зрения все записанные числа тождественны, при представлении результатов физического эксперимента это не так. Дело в том, что если значение физической величины записано без абсолютной погрешности (как, например, в условиях задач), то это означает, что данная величина задана с точностью до ± 1 в последнем, т.е. наинизшем, разряде.

Если приведенные выше числа представляют собой, например, длину в миллиметрах, то это означает, что длина известна со следующей точностью:

| Результат $L$ | Известен с точностью до |
|---|---|
| 7000 мм | 1 мм |
| $700\cdot10^1$ мм | 10 мм = 1 см |
| $7\cdot10^3$ мм | $10^3$ мм = 1 м |
| $0{,}7\cdot10^4$ мм | $0{,}1\cdot10^4$ мм = 1 м |
| $0{,}07\cdot10^5$ мм | $0{,}01\cdot10^5$ мм = 1 м |

То есть в этих случаях измерения проводились с различной точностью.

При записи результатов измерения физических величин (в частности, в лабораторных работах) недопустима запись результата без указания абсолютной погрешности, округленной, как указано, до одной или двух значащих цифр. **Абсолютная погрешность Δ имеет ту же размерность, что и измеряемая величина. Измеряемая величина округляется таким образом, чтобы ее последняя значащая цифра (цифра наименьшего разряда) соответствовала по порядку величины последней значащей цифре погрешности.**

Примеры: $L$ = 4,45 ± 0,4 (не верно) ⇒ 4,5 ± 0,4 (верно),

$L$ = 5,71 ± 0,15 (верно),

$L$ = 6,8 ± 0,03 (не верно) ⇒ 6,80 ± 0,03 (верно),

$L$ = 705,8 ± 70 (не верно) ⇒ (71 ± 7)* 10 (верно).

**Отношение абсолютной погрешности измеряемой величины к самому значению этой величины называется относительной погрешностью:**

$$\frac{\Delta a}{< a >} = \delta a\,.$$

**Относительная погрешность** $\delta a$ **– величина безразмерная**. Фактически относительная погрешность показывает степень неточности полученного результата (или «процентное содержание неточности», равное $\delta a \cdot 100$ %).

## 2. ОЦЕНКА АБСОЛЮТНОЙ ПОГРЕШНОСТИ ПРЯМЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Погрешности в прямых измерениях можно классифицировать следующим образом [3]:


Рис. 2.1

**Систематические погрешности** (ошибки) обычно остаются постоянными на протяжении всей серии измерений. Например, при переключении шкалы вольтметра с одного предела на другой меняется его внутреннее сопротивление, что может внести в последующие измерения систематическую погрешность. Систематические погрешности **надо стараться отслеживать и учитывать, корректируя полученные результаты**, т.е. исправляя их на необходимую величину. Однако обнаружение систематических погрешностей требует, как правило, дополнительных более точных или альтернативных экспериментов, проведение которых невозможно в рамках лабораторных работ. В этих случаях достаточно указать возможный источник ошибок.

Все остальные погрешности являются случайными.

**Промахи** – грубые ошибки, обычно они связаны с неправильным отсчетом по шкале прибора, нарушением условий эксперимента и т.д. Их **надо отбросить.** Если выпадение одного измерения из общего ряда результатов замечено в процессе проведения эксперимента, то главное правило определения промаха – проведение не менее трех повторных измерений данной точки. Результат измерений, который существенно отличается от других измерений, отбрасывается как грубая ошибка. В сомнительных случаях вопрос о том, является ли данный результат промахом, решают с помощью повторного, если возможно, более точного эксперимента или привлекая математические методы обработки полученных результатов, изучение которых лежит за рамками излагаемого элементарного анализа оценки погрешностей.

**Приборные погрешности определяются** двумя факторами:

**1) классом точности прибора**, связанным с его устройством – элементной базой и принципом действия.

**Абсолютная погрешность через класс точности оценивается следующим образом:**

$$(\Delta x)_{\text{к.т.}} = (\gamma/100)\mathrm{A},$$

**где $\gamma$ – класс точности в %, указанный на панели прибора**,

**$\mathrm{A} = \mathrm{A}_{max}$ – предел измерения для стрелочных приборов, либо А есть текущее значение для магазинов сопротивления, индуктивности, емкости**;

**2) ценой делений шкалы прибора:**

$$(\Delta x)_{\text{ц.д.}} = \frac{1}{2}h,$$

**где *h* – цена деления шкалы прибора**, т.е. расстояние между ближайшими штрихами шкалы, выраженное в соответствующих единицах измерения.

**Погрешности разброса** $(\Delta x)_p$ возникают вследствие различия экспериментальных значений при многократном повторении измерений одной и той же величины. Простейший способ определения $(\Delta x)_p$ **дает метод Корнфельда**, который предписывает следующий образ действий, если физическая величина $x$ измерена $n$ раз:

1) имея $x_1,...,x_n$ – значений измеряемой величины $x$, выбираем из $\{x_1,...,x_n\}$ максимальное $x_{\max}$ и минимальное $x_{\min}$ и находим среднее значение $x$:

$$<x>=\frac{x_{\max}+x_{\min}}{2};$$

2) находим абсолютную погрешность $\Delta x_p=\frac{x_{\max}-x_{\min}}{2}$;

3) записываем результат в виде $x=<x>\pm\Delta x$ с $\alpha=1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$,

где $\alpha$ – доверительная вероятность.

**Доверительная вероятность определяет собой долю средних значений $x$, полученных в аналогичных сериях измерений, попадающих на отрезок $[<x>-\Delta x;\ <x>+\Delta x]$. Этот отрезок называется доверительным интервалом.** Указанное выражение для расчета доверительной вероятности доказывается в теории ошибок [1, 6, 7].

Недостатком метода Корнфельда является то обстоятельство, что доверительная вероятность приводимого результата определяется исключительно количеством $n$ проведенных измерений и не может быть изменена посредством увеличения или уменьшения доверительного интервала $\pm\Delta x$. Такую возможность предусматривает несколько более сложный **метод статистической обработки результатов с помощью коэффициентов Стьюдента** [1, 3, 4]. Последовательность расчета погрешностей этим методом такова.

1) Вы измерили и получили несколько $i = 1,..., m$ значений случайной величины $x_i$. Сначала следует исключить промахи, т.е. заведомо неверные результаты.

2) По оставшимся $n$ значениям необходимо определить среднее значение измеренной величины $\langle x\rangle$:

$$\langle x\rangle=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i)}{n}.$$

3) Разброс средних значений в последующих аналогичных сериях измерений величины $x$ определяется среднеквадратичной погрешностью $\sigma_{\langle x \rangle}$ среднего значения $\langle x \rangle$:

$$\sigma_{\langle x \rangle} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \left( x_i - \langle x \rangle \right)^2}{(n-1) \cdot n}}.$$

**Доверительный интервал** $\left[ <x> - \sigma_{\langle x \rangle};\ <x> + \sigma_{\langle x \rangle} \right]$ **соответствует доверительной вероятности** $\alpha = 0{,}7$ (т.е. с вероятностью 70 % средние значения $x$, полученные в аналогичных сериях измерений, будут принадлежать отрезку значений $[<x> - \sigma_{\langle x \rangle};$ $<x> + \sigma_{\langle x \rangle}]$).

4) Если требуется знание результата измерений с другой доверительной вероятностью $\alpha \neq 0{,}7$, то, используя таблицу коэффициентов Стьюдента (приложение), по известному значению числа измерений $n$ и выбранной доверительной вероятности $\alpha$ следует определить коэффициент Стьюдента $t_{\alpha n}$, находящийся на пересечении строки $n$ и столбца $\alpha$.

5) Определяется погрешность (доверительный интервал) $\Delta \langle x \rangle$ среднего значения величины $\langle x \rangle$, соответствующая выбранной доверительной вероятности $\alpha$:

$$\Delta \langle x \rangle = t_{\alpha n} \sigma_{\langle X \rangle}.$$

6) Записывается результат $x = \langle x \rangle \pm \Delta \langle x \rangle$ с указанием доверительной вероятности $\alpha$.

В научных статьях обычно приводят **доверительный интервал** $\Delta x = \sigma_{\langle x \rangle}$**, соответствующий доверительной вероятности** $\alpha = 0{,}7$. Такой интервал **называется стандартным, при его использовании часто значение доверительной вероятности не приводят.**

Использование метода статистической обработки является необходимым, когда требуется знать значение физических параметров с заданной доверительной вероятностью (как в ряде лабораторных работ). На практике доверительная вероятность погрешности разброса выбирается в соответствии с доверительной вероятностью, соответствующей классу точности измерительного прибора. При инженерных измерениях с повышенной точностью выбирается $t_\alpha = 3$, так как на соответствующую доверительную вероятность воспроизведения результатов при повторных измерениях рассчитываются приборы, выпускаемые промышленностью [5].

Для большинства исследований, в которых не выдвигаются жесткие требования к доверительной вероятности полученных результатов, метод Корнфельда является вполне приемлемым.

Как показывается в теории ошибок, **результирующая погрешность**

$$\Delta x = \sqrt{(\Delta x)^2_{\text{к.т.}} + (\Delta x)^2_{\text{ц.д.}} + (\Delta x)^2_p},$$

**если все эти погрешности рассчитаны для одной и той же доверительной вероятности.**

Так как суммарная погрешность округляется до одной значащей цифры, на практике достаточно выбрать максимальную из трех вычисленных погрешностей, и если она в 3 или более раз превосходит остальные, принять ее за погрешность измеренной величины. При этом фактор, с которым связана эта погрешность, и будет в данном случае определять собой точность (вернее – погрешность) эксперимента (подробнее см. в [2]).

# 3. ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТЕЙ КОСВЕННЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Чтобы понять основной принцип оценки погрешностей косвенных измерений, следует проанализировать источник этих погрешностей.

Пусть физическая величина $Y = f(x)$ есть функция непосредственно измеряемой величины $x$.

Величина $x$ имеет погрешность $\Delta x$. Именно эта погрешность $\Delta x$ – неточность в определении аргумента $x$ есть источник погрешности физической величины $Y$, являющейся функцией $f(x)$.

Приращение $\Delta x$ аргумента $x$ определяет собой приращение функции $\Delta Y \approx f'\Delta x$. Погрешность аргумента $\Delta x$ косвенно определяемой физической величины $Y$ определяет собой погрешность $\Delta Y \approx f'\Delta x$, где $\Delta x$ – погрешность физической величины, найденной в прямых измерениях.

Если физическая величина является функцией нескольких непосредственно измеряемых величин $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, то, проводя аналогичные рассуждения для каждого аргумента $x_i$, получим:

$$\Delta Y \approx \frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\Delta x_n .$$

Очевидно, что погрешность, рассчитанная по этой формуле, является максимальной и соответствует ситуации, когда все аргументы изучаемой функции имеют одновременно максимальное отклонение от своих средних значений. На практике такие ситуации маловероятны и реализуются крайне редко. В теории ошибок [1, 6, 7] доказывается, что **погрешность результата косвенных измерений** следует рассчитывать по формуле:

$$\Delta Y = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\partial f / \partial x_i\right)^2 \Delta x_i^2} .$$

Эту формулу легко проиллюстрировать для двумерного случая следующим образом:

если точка A' смещена относительно точки A по оси $x$ на $\Delta x$ и по оси $y$ на $\Delta y$, то расстояние $A'A = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ .

В реальных измерениях относительная точность различных величин $x_i$ может сильно отличаться. При этом, **если для одной из величин $x_m$ выполняется неравенство $\frac{\partial f}{\partial x_m}\Delta x_m > 3\frac{\partial f}{\partial x_i}\Delta x_i$, где $i = 1, \ldots, m-1, m+1, \ldots, n$, то можно считать, что погрешность косвенно определенной величины $\Delta Y$ определяется погрешностью $\Delta x_m$:**

$$\Delta Y \approx \left|\frac{\partial f}{\partial x_m}\right|\Delta x_m .$$

<u>Пример.</u>

При измерении скорости $V$ полета пули методом вращающихся дисков скорость пули $V = 360 l N/\varphi$ есть результат косвенных измерений, где

$l$ – расстояние между дисками, $\delta l = \frac{\Delta l}{l} \cong 0{,}5\ \%$ ,

$N$ – число оборотов в единицу времени, известное с точностью $\delta N = \frac{\Delta N}{N} = 0{,}7\ \%$ ,

$\varphi$ – угол поворота, измеренный в градусах $\Delta\varphi \approx \pm 1°$, следовательно, для углов поворота $\varphi \le 50°$ определяющим точность фактором будет погрешность угла поворота дисков:

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta\varphi}{\varphi} .$$

Итак, **при вычислении погрешности косвенно определяемой физической величины $Y = f(x_1,...,x_n)$ надо прежде всего выявить наименее точно определенную в прямых измерениях величину $x_m$ и, если $\frac{\partial f}{\partial x_m}\Delta x_m >> \frac{\partial f}{\partial x_i}\Delta x_i$, считать $\frac{\partial f}{\partial \tilde{x}_m}\Delta x_m \approx \Delta Y$, пренебрегая погрешностями остальных $x_i$, $i \neq m$.**

Рассмотрим наиболее распространенные случаи взаимосвязи физических величин.

1. **<u>Степенная зависимость</u>** $Y = \frac{x_1^{p_1}}{x_2^{p_2}}$, где $p_1$, $p_2$ – любые числа

В данном случае проще сначала вычислить относительную погрешность $\frac{\Delta Y}{Y}$.

1) Прологарифмируем $Y = \frac{x_1^{p_1}}{x_2^{p_2}}$, получим $\ln Y = p_1 \ln x_1 - p_2 \ln x_2$

2) Продифференцируем это равенство: $\frac{dY}{Y} = p_1 \frac{dx_1}{x_1} - p_2 \frac{dx_2}{x_2}$.

3) Перейдем от бесконечно малых приращений-дифференциалов к конечным приращениям $\Delta x_1$, $\Delta x_2$: $\frac{\Delta f}{f} = p_1 \frac{\Delta x_1}{x_1} - p_2 \frac{\Delta x_2}{x_2}$.

4) Учтем, что $\Delta x_1$ и $\Delta x_2$ – величины алгебраические и могут быть как положительными, так и отрицательными. Так как главной целью является выявление максимально возможной погрешности, нас будет интересовать наихудшая ситуация, которая реализуется при $\Delta x_1 > 0$, а $\Delta x_2 < 0$. Вследствие этого при вычислении погрешности $\delta Y$ все минусы заменяются на плюсы, и мы имеем:

$$\delta Y = \frac{\Delta Y}{Y} = p_1 \frac{\Delta x_1}{x_1} + p_2 \frac{\Delta x_2}{x_2} = p_1 \delta x_1 + p_2 \delta x_2 .$$

Это выражение, как было показано, дает завышенную погрешность. Более точная формула, полученная в теории ошибок [1, 6, 7], имеет вид:

$$\delta Y = \sqrt{p_1^2(\delta x_1)^2 + p_2^2(\delta x_2)^2}\ .$$

5) **Если имеется $n$ переменных, определяющих собой степенную зависимость косвенного результата $Y$, то**

$$\delta Y = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} p_i^2(\delta x_i)^2}\,.$$

Следует заметить, что **чем больше по модулю показатель степени $p_i$, тем большую погрешность вносит данная переменная $x_i$ в погрешность результата**. В данном случае следует сравнить $p_i \dfrac{\Delta x_i}{x_i}$ между собой и найти среди них максимальное значение $p_m \dfrac{\Delta x_m}{x_m}$. **Если $p_m \dfrac{\Delta x_m}{x_m} > 3 p_i \dfrac{\Delta x_i}{x_i}$ для всех остальных *i* ≠ *m*, то**

**относительная погрешность** $\delta Y = p_m \dfrac{\Delta x_m}{x_m}$**,**

**абсолютная погрешность** $\Delta Y = \delta Y \cdot \langle Y \rangle = p_m \dfrac{\Delta x_m}{x_m} \cdot \langle Y \rangle$.

2. **<u>Логарифмическая зависимость</u>** $Y = \log_a x$

$dY = \dfrac{1}{\ln a}\dfrac{dx}{x}$, переходя от дифференциалов к конечным приращениям, имеем $\Delta Y = \dfrac{1}{\ln a}\dfrac{\Delta x}{x} = \dfrac{1}{\ln a}\cdot \delta x$.

В этом случае абсолютная погрешность $\Delta Y$ пропорциональна относительной погрешности $\delta x$ непосредственно измеряемой величины $x$. Если $\Delta x$ = const, то с ростом $x$ $\Delta Y$ будет уменьшаться (вот почему графики логарифмических зависимостей $Y = \log_a x$, как правило, отличаются неравновеликими погрешностями $\Delta Y$).

Пример.

При определении тройной точки нафталина требуется построить зависимость натурального логарифма давления $\ln P$ от обратной температуры, где $P$ – давление в миллиметрах ртутного столба, определенное с точностью до 1 мм рт. ст. В этом случае погрешности $\ln P$ уменьшаются с ростом давления, как показано на рис. 3.1.

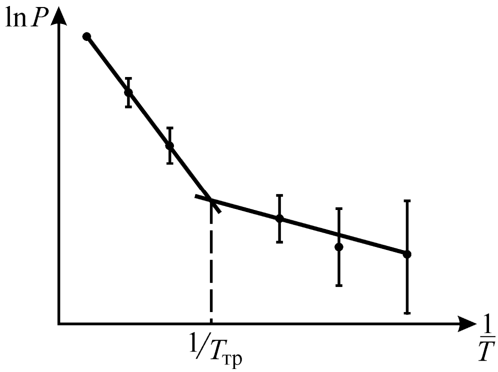


Рис. 3.1

Итак, **для логарифмических функций вида $Y = A \log_a x$ проще сразу вычислять абсолютную погрешность, которая пропорциональна относительной погрешности $\delta x$ переменной $x$:**

$$\Delta Y = \frac{A}{\ln a}\frac{\Delta x}{x} = \frac{A}{\ln a} \cdot \delta x .$$

# 4. ПРАВИЛА ПОСТРОЕНИЯ ГРАФИКОВ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

**1. Оформление осей, масштаб, размерность** [5,8]. Результаты измерений и вычислений удобно представлять в графическом виде. Графики строятся на миллиметровой бумаге; размеры графика не должны быть меньше 150×150 мм (половина страницы лабораторного журнала). На лист прежде всего наносятся координатные оси. Результаты прямых измерений, как правило, откладываются на оси абсцисс. На концах осей наносятся обозначения физических величин и их единицы измерения. Затем **на оси наносятся масштабные деления так, чтобы расстояние между делениями составляли 1, 2, (редко 4), 5 единиц или 1; 2; $5 \cdot 10^{\pm n}$, где $n$ – целое число**. Рекомендуется, чтобы количество выбранных масштабных делений оси не превышало 12, но и не было меньше 4.

Точка пересечения осей не обязательно должна соответствовать нулю по одной или более осям. Начало отсчета по осям и масштаб следует выбирать так, чтобы: 1) кривая (прямая) заняла все поле графика; 2) углы между касательными к кривой и осями должны быть близки к 45° (или 135°), по возможности, в большей части графика. Это достигается следующим образом: наименьшее значение откладываемой вдоль оси величины располагается в области пересечения осей, а максимальное – в области, соответствующей самой верхней точке оси ординат.

**2. Графическое представление физических величин**. После выбора и нанесения на оси масштабов на лист наносятся значения физических величин. Их обозначают маленькими кружочками, треугольниками, квадратами, причем **числовые значения, соответствующие нанесенным точкам, не сносятся на оси**. Затем от каждой точки вверх и вниз, вправо и влево откладываются в виде отрезков соответствующие погрешности в масштабе графика.

После нанесения точек строится график, т.е. проводится предсказанная теорией плавная кривая или прямая так, чтобы она пересекала все области погрешностей или, если это невозможно, суммы отклонений экспериментальных точек снизу и сверху кривой должны быть близки. В правом или в левом верхнем углу (иногда посередине) пишется название той зависимости, которая изображается графиком.

Исключение составляют градуировочные графики, на которых точки, нанесенные без погрешностей, соединяются последовательными отрезками прямых. Градуировочные графики, представляющие собой кусочно-линейные интерполяции, служат для отыскания промежуточных значений физических величин. Если в процессе градуировки абсолютная погрешность измерений не менялась, то погрешность градуировки указывается в правом верхнем углу, под названием графика. Однако, если в процессе градуировки прибора абсолютная погрешность измерений изменялась, то на градуировочном графике наносятся погрешности каждой измеренной точки. (Такая ситуация реализуется при градуировке шкалы «амплитуда» и «частота» генератора ГСК при помощи осциллографа).

Графики выполняются карандашом и вклеиваются в лабораторный журнал.

**3. Линейные аппроксимации**. В экспериментах часто требуется построить график зависимости полученной в работе физической величины *Y* от полученной физической величины *x*, аппроксимируя *Y*(*x*) линейной функцией $Y = kx + b$, где *k, b* – постоянные. Графиком такой зависимости является прямая, а угловой коэффициент *k* часто является основной целью эксперимента. Естественно, что *k* в этом случае представляет собой также физический параметр, который должен быть определен с присущей данному эксперименту точностью. Одним из методов решения данной задачи является метод парных точек, подробно описанный в [2, 8]. Однако следует иметь в виду, что метод парных точек применим при наличии большого числа точек $n \sim 10$, кроме того, он является достаточно трудоемким. Более простым и, при его аккуратном исполнении, не уступающим в точности методу парных точек, является следующий графический метод определения коэффициента наклона прямой ($k \pm \Delta k$) [3,9]:

1) По экспериментальным точкам, нанесенным с погрешностями, проводится прямая с использованием метода наименьших квадратов (МНК).

Основополагающей идеей аппроксимации по МНК является минимизация суммарного среднеквадратичного отклонения экспериментальных точек от искомой прямой

$$Y = kx + b\ .$$

При этом коэффициенты $k, b$ определяются из условий минимизации [1, 7]:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dk}\sum_{i=1}^{n}\left(Y\left(x_i\right) - y_i\right)^2 = 0 \\ \dfrac{d}{db}\sum_{i=1}^{n}\left(Y\left(x_i\right) - y_i\right)^2 = 0. \end{cases}$$

Здесь $x_i$, $y_i$ – экспериментально измеренные значения, $n$ – число экспериментальных точек.

В результате решения данной системы имеем выражения для расчета коэффициентов $k$, $b$ по экспериментально измеренным значениям:

$$\begin{cases} k = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i - n\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)^2 - n\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2} \\ b = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i - n\sum\limits_{i=1}^{n} y_i \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)^2 - n\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}. \end{cases}$$

2) После вычисления коэффициентов проводится искомая прямая. Затем выбирается экспериментальная точка, имеющая наибольшее, с учетом ее погрешности, отклонение от графика в вертикальном направлении $\Delta Y_{\max}$, как указано на рис. 4.1. Тогда относительная погрешность $\Delta k/k$, обусловленная неточностью значений $Y$,

$\delta k_y = \left(\dfrac{\Delta k}{k}\right)_y = \dfrac{\Delta Y_{max}}{Y_{max} - Y_{min}}$, где $\left(Y_{max} - Y_{min}\right)$ – измерительный интервал значений Y от max до min. При этом в обеих частях равенства стоят безразмерные величины, поэтому $\Delta Y_{max}$ и $\left(Y_{max} - Y_{min}\right)$ можно одновременно вычислять в миллиметрах по графику или одновременно брать с учетом размерности *Y*.

3) Аналогично вычисляется относительная погрешность $(\Delta k/k)_x$, обусловленная погрешностью при определении *x*:

$$\delta k_x = \left(\frac{\Delta k}{k}\right)_x = \frac{\Delta X_{max}}{X_{max} - X_{min}}.$$

4) $\dfrac{\Delta k}{k} = \sqrt{\delta k_x^2 + \delta k_y^2}$. Если одна из погрешностей, например, $\delta k_x^2 << \delta k_y^2$, или величина *x* имеет очень малые погрешности $\Delta x$, незаметные на графике, то можно считать $\delta k = \delta k_y$.

5) Абсолютная погрешность $\Delta k = \delta k \cdot k$.

В результате искомое значение углового коэффициента принадлежит интервалу $[k - \delta k \cdot k;\ k + \delta k \cdot k]$.

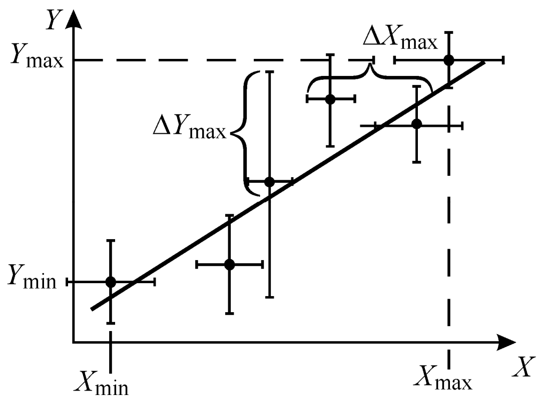


Рис. 4.1

## Список литературы


1. Худсон Д. Статистика для физиков. М.: Мир, 1967.
2. Светозаров В.В. Элементарная обработка результатов измерений. М.: МИФИ, 1983.
3. Аксенова Е.Н. Элементарные способы оценки погрешностей результатов прямых и косвенных измерений. М.: МИФИ, 2003.
4. Светозаров В.В. Статистическая обработка результатов измерений. М.: МИФИ, 1983.
5. Гасников Н.К., Калашников Н.П. Методические указания по обработке результатов измерений физических величин. М.: Завод – втуз при ЗИЛе, 1986.
6. Тейлор Дж.З. Введение в теорию ошибок. М.: Мир, 1985.
7. Бурдун Г.Д., Марков Б.Н. Основы метрологии. М.: Изд-во стандартов, 1967.
8. Лабораторный практикум «Измерительные приборы»/ Под ред. Э.А. Нерсесова. М.: МИФИ, 1998.
9. Лабораторный практикум «Электроизмерительные приборы. Электромагнитные колебания и переменный ток» / Под ред. Е.Н. Аксеновой и В.Ф. Федорова. М.: МИФИ, 1999.

## *Приложение*

### Таблица коэффициентов Стьюдента

| $n$ \ $\alpha$ | 0,8 | 0,9 | 0,95 | 0,98 | 0,99 |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 3,08 | 6,31 | 12,71 | 31,8 | 63,7 |
| 3 | 1,89 | 2,92 | 4,30 | 6,96 | 9,92 |
| 4 | 1,64 | 2,35 | 3,18 | 4,54 | 5,84 |
| 5 | 1,53 | 2,13 | 2,77 | 3,75 | 4,60 |
| 6 | 1,48 | 2,02 | 2,57 | 3,36 | 4,03 |
| 7 | 1,44 | 1,94 | 2,45 | 3,14 | 4,71 |
| 8 | 1,42 | 1,90 | 2,36 | 3,00 | 3,50 |
| 9 | 1,40 | 1,86 | 2,31 | 2,90 | 3,36 |
| 10 | 1,38 | 1,83 | 2,26 | 2,82 | 3,25 |
| 11 | 1,37 | 1,81 | 2,23 | 2,76 | 3,17 |
| 12 | 1,363 | 1,80 | 2,20 | 2,72 | 3,11 |
| 13 | 1,36 | 1,78 | 2,18 | 2,68 | 3,06 |
| 14 | 1,35 | 1,77 | 2,16 | 2,65 | 3,01 |
| 15 | 1,35 | 1,76 | 2,14 | 2,62 | 2,98 |
| 16 | 1,34 | 1,75 | 2,13 | 2,60 | 2,95 |
| 17 | 1,34 | 1,75 | 2,12 | 2,58 | 2,92 |
| 18 | 1,33 | 1,74 | 2,11 | 2,57 | 2,90 |
| 19 | 1,33 | 1,73 | 2,10 | 2,55 | 2,88 |
| 20 | 1,3 | 1,7 | 2,1 | 2,5 | 2,9 |

Елена Николаевна Аксенова
Николай Константинович Гасников
Николай Павлович Калашников

# МЕТОДЫ ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТЕЙ РЕЗУЛЬТАТОВ ПРЯМЫХ И КОСВЕННЫХ ИЗМЕРЕНИЙ В ЛАБОРАТОРИЯХ ФИЗИЧЕСКОГО ПРАКТИКУМА

*Учебно-методическое пособие*

Редактор *Е.Е. Шумакова*
Оригинал-макет изготовлен *С.В. Тялиной*

Подписано в печать 22.04.2009. Формат 60×84 1/16.
Уч.-изд. л. 1,5. Печ. л. 1,5. Тираж 3500 экз. Изд. № 022-1 Заказ №

*Московский инженерно-физический институт (государственный университет).*
*115409, Москва, Каширское ш., 31. Типография МИФИ*

*Для заметок*