МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
«МИФИ»

Е.В. Сумин, В.Б. Шерстюков

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Учебно-методическое пособие

Москва 2019

УДК 517.91(075.8)
ББК 22.161.6я7
С89

Сумин Е.В., Шерстюков В.Б. **ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ:** *Учебно-методическое пособие*. – М.: НИЯУ МИФИ, 2019. – 168 с.

Предлагаемое учебно-методическое пособие посвящено обыкновенным дифференциальным уравнениям первого порядка, уравнениям высших порядков и системам линейных дифференциальных уравнений. Рассмотрено интегрирование дифференциальных уравнений при помощи степенных рядов. Приведены решения многочисленных задач.

Издание предназначено для студентов 2-го курса НИЯУ МИФИ в качестве учебно-методического пособия при изучении курса «Обыкновенные дифференциальные уравнения». Указанное пособие будет также полезно преподавателям, ведущим практические занятия по этому курсу.

Рецензент д-р физ.-мат. наук, проф. НИЯУ МИФИ А.С. Леонов

ISBN 978-5-7262-2546-3

1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Определение 1.1

Дифференциальным называется уравнение, связывающее независимую переменную, неизвестную функцию и её производные различных порядков.

Порядком дифференциального уравнения называется порядок старшей производной, входящей в уравнение.

Если искомая функция зависит от одной переменной, то соответствующее дифференциальное уравнение называется *обыкновенным*.

Если же искомая функция зависит от нескольких переменных, то соответствующее дифференциальное уравнение называется *уравнением в частных производных*.

1. Обыкновенное дифференциальное уравнение n-го порядка в общем виде можно записать так

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0, \qquad (1.1)$$

где x – независимая переменная; $y = y(x)$ – искомая функция; $y', y'', ..., y^{(n)}$ – её производные.

Если данное уравнение (1.1) разрешимо относительно производной n-го порядка, то его можно представить в виде

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}). \qquad (1.2)$$

Определение 1.2

Общим решением обыкновенного дифференциального уравнения n-го порядка (1.1) называется функция

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_n) \in C^n(< a, b >)$$

(здесь C_1, C_2, …, C_n – произвольные постоянные), обращающая данное уравнение в тождество для всех $x \in <a, b>$.

Замечание 1.1

Здесь и далее под числовым промежутком $<a, b>$ понимается любое из множеств $[a, b]$, (a, b), $[a, b)$, $(a, b]$.

2. Обыкновенное дифференциальное уравнение 1-го порядка в общем виде записывается следующим образом:

$$F(x, y, y') = 0. \tag{1.3}$$

Если данное уравнение (1.3) разрешимо относительно y', то его можно представить в виде

$$y' = f(x, y), \tag{1.4}$$

где функция $f(x, y)$ определена в области $D = \{(x, y):$ $x \in <a, b>, y \in <c, d>\}$ плоскости Oxy.

Определение 1.3

Общим решением обыкновенного дифференциального уравнения 1-го порядка (1.4) называется функция

$$y = \varphi(x, C) \in C^1(<a, b>)$$

(здесь C – произвольная постоянная), обращающая данное уравнение в тождесто для всех $x \in <a, b>$.

Определение 1.4

Общее решение $\Phi(x, y, C) = 0$, заданное в неявном виде, называется *общим интегралом этого уравнения*.

Геометрически общее решение (общий интеграл) представляет собой семейство интегральных кривых на плоскости Oxy, зависящее от одного параметра C.

Определение 1.5

Частным решением уравнения называется решение, полученное из общего при фиксированном значении $C = C_0$: $y = \varphi(x, C_0)$, где

C_0 – число. Аналогично определяется частный интеграл $\Phi(x, y, C_0) = 0$.

Определение 1.6

Задачей Коши называют задачу нахождения частного решения $y = y(x)$ обыкновенного дифференциального уравнения 1-го порядка (1.4), удовлетворяющего начальному условию $y(x_0) = y_0$, $x_0 \in < a, b >$. Геометрически это означает, что ищется интегральная кривая этого дифференциального уравнения, проходящая через точку $M_0(x_0, y_0) \in D \subset \mathbb{R}^2$.

2. УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С РАЗДЕЛЯЮЩИМИСЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

Определение 2.1

Обыкновенными дифференциальными уравнениями (ОДУ) 1-го порядка с разделяющимися переменными называются уравнения вида

$$y' = f_1(x) \cdot f_2(y), \quad x \in <a, b>, \quad y \in <c, d>, \tag{2.1}$$

или в симметричной форме

$$m_1(x)\, n_1(y)\, dy + m_2(x)\, n_2(y)\, dx = 0. \tag{2.2}$$

Для решения уравнения (2.1) нужно рассмотреть два случая.

1. $f_2(y) = 0$, непосредственная подстановка в уравнение (2.1) даёт ответ, являются ли корни уравнения $f_2(y) = 0$ решениями уравнения (2.1).

2. $f_2(y) \neq 0$, в этом случае обе части уравнения (2.1) делим на $f_2(y)$, в результате получаем

$$\frac{y'}{f_2(y)} = f_1(x) \quad \text{или} \quad \frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)\, dx.$$

Интегрируем последнее уравнение

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)\, dx + C.$$

Объединяя случаи 1 и 2, получаем окончательный ответ.

В случае симметричной записи уравнения (2.2) нужно рассмотреть три случая.

1. $m_1(x) = 0$.

2. $n_2(y) = 0$.

В этих случаях вопрос о решениях определяется непосредственной подстановкой в уравнение (2.2), причём в случае существования корней уравнения $m_1(x)=0$ нужно считать, что $dx=0,$ а в случае существования корней уравнения $n_2(y)=0$ необходимо считать, что $dy=0.$

3. $m_1(x)\neq 0,$ $n_2(y)\neq 0,$ в этом случае уравнение (2.2) приводится к виду

$$\frac{n_1(y)\,dy}{n_2(y)}+\frac{m_2(x)\,dx}{m_1(x)}=0,$$

из которого получаем общий интеграл уравнения (2.2)

$$\int\frac{n_1(y)\,dy}{n_2(y)}+\int\frac{m_2(x)\,dx}{m_1(x)}=C.$$

Объединяя случаи 1, 2, 3, получаем окончательный ответ.

Замечание 2.1

Деление обеих частей уравнения (2.1) на $f_2(y)$ или деление обеих частей уравнения (2.2) на $m_1(x)\,n_2(y)$ может привести к потере частных решений, обращающих в нуль $f_2(y)$ или произведение $m_1(x)\,n_2(y)$.

Замечание 2.2

Отметим, что далее постоянные интегрирования будем записывать только после интегрирования соответствующих дифференциальных уравнений, т.е. получения первообразных.

Задача 2.1

Решить уравнение

$$xy\,dx+(x+1)\,dy=0.$$

Решение

Данное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Для разделения переменных обе части уравнения делим на $y\,(x+1).$

Рассмотрим три случая.

1. $x+1=0,$ $x=-1,$ $dx=0,$ подставляем в исходное уравнение

$$-1\cdot y\cdot 0+0\cdot dy\equiv 0,$$

получаем, что $x=-1$ – решение.

2. $y=0,\ \ dy=0,$ подставляем в исходное уравнение

$$x\cdot 0\cdot dx+(x+1)\cdot 0\equiv 0,$$

получаем, что $y=0$ – решение.

3. $y\,(x+1)\neq 0,$ тогда

$$\frac{dy}{y}=-\frac{x\,dx}{x+1},\quad \int\frac{dy}{y}=-\int\frac{x\,dx}{x+1},$$

$$\ln|y|=-x+\ln|x+1|+C_1,$$

где $C_1=\ln|C|,\ \ C\neq 0.$ Тогда $|y|=|C|\cdot|x+1|\cdot e^{-x},$ так как C может иметь произвольный знак, то

$$y=C\,(x+1)\,e^{-x}.$$

Объединяя случаи 1–3, получаем

$$y=C\,(x+1)\,e^{-x},\quad y=0,\quad x+1=0,\quad C\neq 0.$$

Отсюда видно, что $y=0$ получается из общего решения, если допустить, что C может быть и нулём. В этом случае окончательно имеем

$$y=C\,(x+1)\,e^{-x},\quad x=-1,\quad C\in\mathbb{R}.$$

Задача 2.2

Найти решение уравнения

$$(x^2-1)\,y'+2xy^2=0,$$

удовлетворяющее начальному условию $y(0)=1$.

Решение

Данное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Для разделения переменных обе части уравнения делим на $y^2\,(x^2-1)$.

Рассмотрим четыре случая.

1. $y^2=0,\ \ y=0,$ т.е. $y'=0,$ подставляем в исходное уравнение, получаем, что $y=0$ – решение.

2. $x-1=0,\ \ x=1,\ \ dx=0,$ подставляем в исходное уравнение

$$0\cdot y'+2\cdot 1\cdot y^2=0,\quad \text{т.е.}\quad y=0.$$

Получаем точку (1; 0), а точка решением дифференциального уравнения быть не может (в разд. 1 решение ОДУ 1-го порядка определялось как функция $y=\varphi(x)$ на промежутке $<a,b>$, геометрически – интегральная кривая).

3. $x+1=0,\ \ x=-1,\ \ dx=0,$ аналогично, получаем точку (–1; 0), т.е. $x=-1$ не является решением.

4. $y^2(x^2-1)\neq 0,$ тогда

$$\frac{dy}{y}=\frac{2x\,dx}{1-x^2},\quad \int\frac{dy}{y}=\int\frac{2x\,dx}{1-x^2},$$

$$-\frac{1}{y}=-\ln\left|1-x^2\right|+C_1,\quad y\,(\ln\left|1-x^2\right|+C)=1,\quad C=-C_1.$$

Объединяя случаи 1–4, получаем

$$y\,(\ln\left|1-x^2\right|+C)=1,\quad y=0,\quad C\in\mathbb{R}.$$

Решаем задачу Коши, т.е. находим частное решение (частный интеграл)

$$1\cdot(\ln\left|1-0^2\right|+C)=1,\quad \text{откуда}\quad C=1.$$

Решение задачи Коши имеет вид

$$y\,(\ln\left|1-x^2\right|+1)=1.$$

Окончательно

$$y\,(\ln\left|1-x^2\right|+C)=1,\quad y=0,\quad C\in\mathbb{R};\quad y\,(\ln\left|1-x^2\right|+1)=1.$$

Замечание 2.3

Отметим, что уравнения вида $y'=f\,(ax+by)$ приводятся к уравнениям с разделяющимися переменными заменой $z=ax+by$ (или $z=ax+by+c$).

Задача 2.3

Решить уравнение

$$y' - y = 2x - 3.$$

Решение

Запишем уравнение в виде

$$y' = 2x + y - 3.$$

Делаем замену $z = 2x + y - 3$, $z = z(x)$, тогда $z'_x = 2 + y'_x$. Получаем уравнение с разделяющимися переменными

$$z' - 2 = z, \quad \text{или} \quad z' = z + 2.$$

Для разделения переменных обе части уравнения делим на $z + 2$.

Рассмотрим два случая.

1. $z + 2 = 0$, $2x + y - 3 + 2 = 0$, $y = 1 - 2x$, $y' = -2$, подставляем в исходное уравнение, получаем, что $y = 1 - 2x$ – решение.

2. $z + 2 \neq 0$, тогда

$$\frac{dz}{z+2} = dx, \quad \int \frac{dz}{z+2} = \int dx,$$

$$\ln|z + 2| = x + C_1, \quad \ln|2x + y - 1| = x + C_1,$$

или

$$|2x + y - 1| = e^{C_1 + x}, \quad 2x + y - 1 = \pm e^{C_1} \cdot e^x,$$

$$2x + y - 1 = Ce^x,$$

где $C = \pm e^{C_1}$.

Объединяя случаи 1 и 2, получаем

$$2x + y - 1 = Ce^x, \quad y = 1 - 2x, \quad C \neq 0,$$

или

$$2x + y - 1 = Ce^x, \quad C \in \mathbb{R}.$$

3. ОДНОРОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ И УРАВНЕНИЯ, ПРИВОДЯЩИЕСЯ К НИМ

3.1. Однородные уравнения

Определение 3.1

Уравнение

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0, \tag{3.1}$$

где функции $M(x, y)$, $N(x, y)$ непрерывны в области $D \subset \mathbb{R}^2$ и являются однородными функциями одной и той же степени, называется *однородным*.

Отметим, что функция $g(x, y)$, заданная в D, называется *однородной функцией степени* m, $m \in \mathbb{R}$, если $\forall\, t > 0$ из условия $(x, y) \in D$ вытекает, что $(tx, ty) \in D$ и выполняется тождество

$$g(tx, ty) \equiv t^m g(x, y).$$

Всякое однородное уравнение приводится к виду $y' = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$. Для того, чтобы решить последнее однородное уравнение, нужно сделать замену $y(x) = x \cdot z(x)$, где $z(x)$ – новая неизвестная функция. Дифференцируя, получаем

$$y' = z + xz',$$

или

$$z + xz' = f(z).$$

Последнее уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными

$$\frac{dz}{f(z) - z} = \frac{dx}{x}.$$

Задача 3.1 (1-й способ, 2-й способ разбирается в задаче 5.5)

Решить уравнение

$$(x-y)\,dx+(x+y)\,dy=0.$$

Решение

Данное дифференциальное уравнение является однородным, так как $M(x,y)=x-y$, $N(x,y)=x+y$ – однородные функции одной и той же степени $m=1$. Для приведения исходного однородного уравнения к виду $y'=f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ обе части уравнения необходимо разделить на $(x+y)\,dx$.

Рассмотрим следующие случаи.

1. $dx=0$, т.е. $x=C_0$, подстановка в исходное уравнение приводит к следующему результату

$$(C_0-y)\cdot 0+(C_0+y)\,dy=0,$$

т.е. $y=C_1$.

Получаем точку (C_0,C_1), поэтому $x=C_0$ не является решением.

2. $x+y=0$, $y=-x$, подставляем в исходное уравнение, получаем точку $(C_0,-C_0)$, т.е. $y=-x$ не является решением.

3. $(x+y)\,dx\neq 0$, тогда

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y-x}{y+x},\quad \text{или}\quad \frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{y}{x}-1}{\dfrac{y}{x}+1}.$$

Делаем замену $y(x)=x\cdot z(x)$, $y'=z+xz'$, получаем

$$z+xz'=\frac{z-1}{z+1},\quad xz'=-\frac{z^2+1}{z+1}.$$

Для получения уравнения с разделяющимися переменными обе части последнего уравнения делим на $z^2+1\neq 0$, получаем

$$\frac{z+1}{z^2+1}\,dz+\frac{dx}{x}=0,\quad \int\frac{z+1}{z^2+1}\,dz+\int\frac{dx}{x}=0,$$

$$\operatorname{arctg} z + \frac{1}{2}\ln\,(1+z^2) + \ln|x| = C_1.$$

Так как $z = \dfrac{y}{x}$, то

$$\operatorname{arctg}\frac{y}{x} + \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right) + \ln|x| = C_1,$$

$$\operatorname{arctg}\frac{y}{x} + \frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right) = C_1,$$

$$\sqrt{x^2+y^2} = e^{C_1 - \operatorname{arctg}\frac{y}{x}},$$

окончательно

$$\sqrt{x^2+y^2} = Ce^{-\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}, \quad C = e^{C_1}, \quad C > 0.$$

Задача 3.2

Решить уравнение

$$(x+2y)\,dx - x\,dy = 0.$$

Решение

Данное уравнение является однородным, так как $M(x,y) = x+2y$, $N(x,y) = -x$ – однородные функции одной и той же степени $m=1$. Для приведения исходного однородного уравнения к виду $y' = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ обе части уравнения необходимо разделить на $x\,dx$.

Рассмотрим следующие случаи.

1. $dx = 0$, $x \neq 0$, т.е. $x = C_0 \neq 0$, подстановка в исходное уравнение приводит к следующему результату

$$(C_0+2y)\cdot 0 - C_0 \cdot dy = 0,$$

т.е. $y = C_1$. Получаем точку (C_0, C_1), поэтому $x = C_0$ ($C_0 \neq 0$) не является решением.

2. $x = 0$, $dx = 0$, подставляем в исходное уравнение, получаем, что $x = 0$ – решение.

3. $x\,dx \neq 0$, тогда

$$\frac{x+2y}{x} - \frac{dy}{dx} = 0,$$

или

$$\frac{dy}{dx} - \left(1 + 2\frac{y}{x}\right) = 0.$$

Делаем замену

$$y(x) = x \cdot z(x), \quad y' = z + xz', \quad z + xz' - 1 - 2z = 0, \quad xz' = z + 1.$$

Для получения уравнения с разделяющимися переменными обе части последнего уравнения делим на $x\,(z+1)$ (здесь $x \neq 0$, см. случай 1).

4. $z + 1 = 0$, $\frac{y}{x} + 1 = 0$, $y = -x$, подставляем в исходное уравнение, получаем, что $y = -x$ – решение.

5. $x\,(z+1) \neq 0$, тогда

$$\frac{dz}{z+1} = \frac{dx}{x}, \quad \int \frac{dz}{z+1} = \int \frac{dx}{x},$$

$$\ln|z+1| = \ln|x| + C_1,$$

где

$$C_1 = \ln|C|, \quad C \neq 0,$$

$$z + 1 = Cx, \quad \frac{y}{x} + 1 = Cx, \quad y = Cx^2 - x.$$

Объединяя случаи 1–5, получаем

$$y = Cx^2 - x, \quad x = 0, \quad C \in \mathbb{R}.$$

3.2. Уравнения, приводящиеся к однородным

Рассмотрим уравнение вида

$$y' = f\left(\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}\right). \tag{3.2}$$

1. Если $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0,$ то существует k такое, что

$$a_1 x + b_1 y = k(a_2 x + b_2 y).$$

Тогда $y' = g(a_2 x + b_2 y),$ последнее уравнение с помощью замены $z(x) = a_2 x + b_2 y(x)$ сводится к следующему уравнению

$$z' = a_2 + b_2 y' = a_2 + b_2 g(z),$$

откуда получаем уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{dz}{a_2 + b_2 g(z)} = dx.$$

2. Если $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0,$ то система линейных уравнений

$$\begin{cases} a_1\mu + b_1\nu + c_1 = 0; \\ a_2\mu + b_2\nu + c_2 = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение $(\mu_0, \nu_0).$ В этом случае замена

$$\begin{cases} x = t + \mu_0; \\ y = u + \nu_0 \end{cases}$$

(где t – новая независимая переменная; $u = u(t)$ – новая неизвестная функция, причём $y'_x = u'_t$) приводит уравнение (3.2) к виду

$$u'_t = f\left(\frac{a_1 t + b_1 u}{a_2 t + b_2 u}\right) = f\left(\frac{a_1 + b_1 \dfrac{u}{t}}{a_2 + b_2 \dfrac{u}{t}}\right) = S\left(\frac{u}{t}\right),$$

т.е. к виду $u'_t = S\left(\dfrac{u}{t}\right),$ а это – однородное уравнение.

Задача 3.3

Решить уравнение

$$(2x + y + 1)\,dx - (4x + 2y - 3)\,dy = 0.$$

Решение

При приведении исходного дифференциального уравнения к виду (3.2) обе части делятся на $(4x+2y-3)\,dx$.

Рассмотрим следующие случаи.

1. $dx=0$, т.е. $x=C_0$, подставляем в исходное уравнение, получаем точку (C_0, C_1), т.е. $x=C_0$ не является решением.

2. $4x+2y-3=0$, т.е. $y=\frac{1}{2}(3-4x)$, $dy=-2dx$, подставляем в исходное уравнение, получаем точку $\left(C_0, \frac{3}{2}-2C_0\right)$, т.е. $y=\frac{3}{2}-2x$ не является решением.

3. $(4x+2y-3)\,dx \neq 0$, тогда

$$y'=\frac{2x+y+1}{4x+2y-3}.$$

Здесь $a_1=2$, $b_1=1$, $a_2=4$, $b_2=2$. Вычислим

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}=0,$$

т.е. $\exists\, k=\frac{1}{2}$ такое, что $2x+y=\frac{1}{2}(4x+2)$. Тогда

$$y'=g\,(a_2x+b_2y)=\frac{\frac{1}{2}(4x+2y)+1}{4x+2y-3}.$$

Делаем замену $z=4x+2y$, $z'=4+2y'$, т.е. приводим исходное уравнение к уравнению с разделяющимися переменными

$$z'=4+2\,\frac{\frac{1}{2}z+1}{z-3}, \quad z'=\frac{5z-10}{z-3}=\frac{5\,(z-2)}{z-3}.$$

Для получения уравнения с разделяющимися переменными обе части последнего уравнения делим на $(z-2)$.

4. $z-2=0$, $4x+2y-2=0$, $y=1-2x$, подставляем в исходное уравнение, получим, что $y=1-2x$ – решение.

5. $z-2\neq 0,$ тогда

$$\frac{z-3}{z-2}\,dz=5\,dx,\quad \int \frac{z-3}{z-2}\,dz=5\int dx,$$

$$z-\ln|z-2|=5x+\ln|C_2|,\quad C_2\neq 0,$$

$$4x+2y-\ln|4x+2y-2|=5x+\ln|C_2|,$$

$$2y-x=\ln\left(2\,|C_2|\right)+\ln|2x+y-1|,$$

$$2y-x=\ln\left(|C_1|\cdot|2x+y-1|\right),\quad C_1=2C_2,$$

$$|C_1|\cdot|2x+y-1|=e^{2y-x},\quad C_1\,(2x+y-1)=e^{2y-x},$$

или

$$2x+y-1=Ce^{2y-x},\quad C=\frac{1}{C_1}\neq 0.$$

Объединяя случаи 1–5, получаем

$$2x+y-1=Ce^{2y-x},\quad y=1-2x,\quad C\neq 0,$$

или

$$2x+y-1=Ce^{2y-x},\quad C\in\mathbb{R}.$$

Задача 3.4

Решить уравнение

$$(2x-4y+6)\,dx+(x+y-3)\,dy=0.$$

Решение

При приведении исходного дифференциального уравнения к виду (3.2) обе части делятся на $(x+y-3)\,dx.$

Рассмотрим следующие случаи.

1. $dx=0,$ т.е. $x=C_0,$ подставляем в исходное уравнение, получаем точку $(C_0,C_1),$ т.е. $x=C_0$ не является решением.

2. $x+y-3=0,$ $y=3-x,$ $dy=-dx,$ подставляем в исходное уравнение, получаем точку $(C_0,3-C_0),$ т.е. $y=3-x$ не является решением.

3. $(x+y-3)\,dx \neq 0$, тогда

$$y' = -\frac{2x-4y+6}{x+y-3} = \frac{4y-2x-6}{x+y-3}.$$

Здесь $a_1 = -2,\ \ b_1 = 4,\ \ a_2 = 1,\ \ b_2 = 1$. Вычислим

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -6 \neq 0.$$

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} -2\mu + 4\nu - 6 = 0; \\ \mu + \nu - 3 = 0, \end{cases}$$

откуда $\mu_0 = 1,\ \ \nu_0 = 2$.

Делаем замену $\begin{cases} x = t+1; \\ y = u+2, \end{cases}$ при этом $y'_x = u'_t$. Получаем

$$u'_t = \frac{4\,(u+2) - 2\,(t+1) - 6}{(t+1)+(u+2)-3} = \frac{4u-2t}{u+t} = \frac{4\,\frac{u}{t} - 2}{\frac{u}{t}+1} = f\left(\frac{u}{t}\right) -$$

однородное уравнение.

Делаем замену $u(t) = t \cdot z(t)$, где $z(t)$ – новая неизвестная функция, тогда $u' = z + tz'$, получаем

$$z + tz' = \frac{4z-2}{z+1},$$

или

$$tz' = \frac{3z - z^2 - 2}{z+1} = -\frac{z^2 - 3z + 2}{z+1}.$$

Для разделения переменных обе части последнего уравнения делятся на $z^2 - 3z + 2 = (z-1)\,(z-2)$, отметим, что $t \neq 0$.

4. $z - 1 = 0,\ \ \frac{u}{t} - 1 = 0,\ \ \frac{y-2}{x-1} - 1 = 0,\ \ \ y = x+1$, подставляем в исходное уравнение, получаем, что $y = x+1$ – решение.

5. $z-2=0,\ \ \dfrac{u}{t}-2=0,\ \ \dfrac{y-2}{x-1}-2=0,\ \ y=2x,$ подставляем в исходное уравнение, получаем, что $y=2x$ – решение.

6. $(z-1)(z-2)\neq 0,$ тогда

$$-\frac{z+1}{z^2-3z+2}\,dz=\frac{dt}{t},\qquad -\int\frac{(z+1)\,dz}{z^2-3z+2}=\int\frac{dt}{t}.$$

Разлагаем подынтегральную функцию $\dfrac{z+1}{z^2-3z+2}$ на сумму простейших дробей

$$\frac{z+1}{(z-1)(z-2)}=\frac{A}{z-1}+\frac{B}{z-2},$$

левую и правую части умножаем на $(z-1)(z-2),$ получаем

$$z+1=A(z-2)+B(z-1),$$

$$z+1=(A+B)\,z-2A-B.$$

Приравниваем коэффициенты слева и справа при одинаковых степенях z:

$z^1:\ 1=A+B;$

$z^0:\ 1=-2A-B,$

т.е.

$$\begin{cases}A+B=1;\\ 2A+B=-1,\end{cases}$$

откуда $A=-2,\ \ B=3.$ Получаем

$$-\int\left(-\frac{2}{z-1}+\frac{3}{z-2}\right)dz=\int\frac{dt}{t};$$

$$2\ln|z-1|-3\ln|z-2|=\ln|t|+\ln|C_1|,\qquad C_1\neq 0;$$

$$\ln\left|\frac{(z-1)^2}{(z-2)^3}\right|=\ln\left(\,|C_1t|\,\right),\qquad \left|\frac{(z-1)^2}{(z-2)^3}\right|=|\,C_1t\,|;$$

$$\frac{(z-1)^2}{(z-2)^3}=C_1 t, \quad \frac{(u-t)^2}{(u-2t)^3}=C_1,$$

$$C\,(y-x-1)^2=(y-2x)^3, \quad C=\frac{1}{C_1}\neq 0.$$

Объединяя случаи 1–6, получаем

$$C\,(y-x-1)^2=(y-2x)^3, \quad y=x+1, \quad y=2x, \quad C\neq 0,$$

или

$$C\,(y-x-1)^2=(y-2x)^3, \quad y=x+1, \quad C\in\mathbb{R}.$$

3.3. Приведение уравнения к однородному заменой $y=z^m$

Некоторые уравнения приводятся к однородным заменой $y=z^m$, при этом число m заранее неизвестно. Уравнение будет однородным, если после указанной замены найдется такое число m, что степени всех членов уравнения будут одинаковыми. Если такое m не существует, то данное уравнение не приводится к однородному этим способом.

Задача 3.5

Решить уравнение

$$y'=y^2-\frac{2}{x^2}.$$

Решение

Указанное уравнение попробуем привести к однородному заменой $y=z^m$, получим

$$mz^{m-1}\cdot z'=z^{2m}-2x^{-2}.$$

Степени всех его членов будут одинаковыми, если $m-1=2m=-2$, откуда $m=-1$.

Итак, исходное уравнение можно привести к однородному заменой $y=\frac{1}{z}$. Получим

$$-\frac{z'}{z^2}=\frac{1}{z^2}-\frac{2}{x^2},\quad z'=2\,\frac{z^2}{x^2}-1.$$

Для решения полученного однородного уравнения делаем замену $z(x)=xt(x)$, где $t(x)$ – новая неизвестная функция. Получаем

$$z'=t+xt',\quad t+xt'=2t^2-1,\quad xt'=2t^2-t-1.$$

Для разделения переменных обе части уравнения делятся на $2t^2-t-1=(t-1)\,(2t+1)$, отметим, что $x\neq 0$.

Рассмотрим следующие случаи.

1. $t-1=0,\ \ \frac{z}{x}-1=0,\ \ \frac{1}{xy}-1=0,\ \ y=\frac{1}{x}$, подставляем в исходное уравнение, получаем, что $y=\frac{1}{x}$ – решение.

2. $2t+1=0,\ \ 2\,\frac{z}{x}+1=0,\ \ \frac{2}{xy}+1=0,\ \ y=-\frac{2}{x}$, подставляем в исходное уравнение, получаем, что $y=-\frac{2}{x}$ – решение.

3. $(t-1)\,(2t+1)\neq 0$, тогда

$$\frac{dt}{2t^2-t-1}=\frac{dx}{x},\quad \int\frac{dt}{2t^2-t-1}=\int\frac{dx}{x}.$$

Разлагаем подынтегральную функцию $\frac{1}{2t^2-t-1}$ на сумму простейших дробей

$$\frac{1}{(t-1)\,(2t+1)}=\frac{A}{t-1}+\frac{B}{2t+1};$$

$$1=A\,(2t+1)+B\,(t-1);$$

$$1=(2A+B)\,t+A-B.$$

$t^1:\ 0=2A+B;$

$t^0:\ 1=A-B,$

т.е.

$$\begin{cases} 2A + B = 0; \\ A - B = 1, \end{cases}$$

откуда $A = \dfrac{1}{3}$, $B = -\dfrac{2}{3}$. Получаем

$$\int \left(\frac{1}{3\,(t-1)} - \frac{2}{3\,(2t+1)} \right) dt = \int \frac{dx}{x};$$

$$\frac{1}{3}\ln|t-1| - \frac{1}{3}\ln|2t+1| = \ln|x| + \ln|C_1|, \quad C_1 \neq 0;$$

$$\ln\left| \frac{t-1}{2t+1} \right| = \ln\left(|C|\cdot|x^3|\right), \quad C = C_1^3;$$

$$\frac{t-1}{2t+1} = Cx^3, \quad 1 - xy = Cx^3(2+xy).$$

Объединяя случаи 1–3, получаем

$$1 - xy = Cx^3(2+xy), \quad 1 - xy = 0, \quad 2 + xy = 0, \quad C \neq 0,$$

или

$$1 - xy = Cx^3(2+xy), \quad 2 + xy = 0, \quad C \in \mathbb{R}.$$

4. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА. УРАВНЕНИЯ БЕРНУЛЛИ И РИККАТИ

4.1. Линейные уравнения первого порядка

Определение 4.1

Линейным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение, линейное относительно неизвестной функции $y(x)$ и её производной первого порядка y'. Оно имеет вид

$$y' + a(x)y = b(x), \tag{4.1}$$

где $a(x)$, $b(x)$ – известные функции независимой переменной x, непрерывные на промежутке $< a, b >$.

Если $b(x) = 0$, то уравнение (4.1) называется *линейным однородным*, исходное уравнение (4.1) с правой частью $b(x) \neq 0$ называется *линейным неоднородным дифференциальным уравнением*.

Рассмотрим два метода решения линейного неоднородного уравнения (4.1).

Метод Лагранжа (метод вариации произвольной постоянной)

Сначала решается однородное уравнение, соответствующее уравнению (4.1). Это однородное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными и имеет общее решение вида

$$y = Ce^{-\int a(x)\,dx}, \tag{4.2}$$

где C – произвольная постоянная.

Затем в общем решении (4.2) постоянную C заменяем некоторой дифференцируемой функцией $C(x)$, т.е.

$$y = C(x)e^{-\int a(x)\,dx}. \tag{4.3}$$

Выражение (4.3) подставляем в уравнение (4.1), из полученного дифференциального уравнения находим функцию $C(x)$ и тем самым решение уравнения (4.1).

Метод Бернулли

Полагаем $y = u(x)v(x)$, где $u(x)$, $v(x)$ – неизвестные дифференцируемые функции. Подставляем указанное выражение в уравнение (4.1) и преобразуем его к виду

$$u'v + uv' + a(x)uv = b(x),$$

или

$$u'v + u\,(v' + a(x)v) = b(x).$$

Пользуясь тем, что одна из неизвестных функций (например, $v(x)$) может быть выбрана совершенно произвольно, так как лишь $u(x)v(x)$ должно удовлетворять исходному уравнению (4.1), за $v(x)$ принимаем любое частное решение уравнения $v' + a(x)v = 0$. Получаем уравнение $u'v = b(x)$, из которого находим $u(x)$ и затем решение $y(x) = u(x)v(x)$ уравнения (4.1).

Задача 4.1

Решить уравнение

$$xy' - 2y = 2x^4. \tag{4.4}$$

Решение

Делим обе части уравнения на x (здесь $x \neq 0$, так как $x = 0$ не является решением исходного уравнения), получим

$$y' - 2\frac{y}{x} = 2x^3.$$

Решим это уравнение двумя способами.

1. Метод Лагранжа

Сначала решаем соответствующее однородное уравнение

$$y' - 2\frac{y}{x} = 0.$$

Это уравнение является уравнением с разделяющимися переменными, для разделения переменных обе части делим на y.

1. $y=0$, подставляем в однородное уравнение, получаем, что $y=0$ – решение.

2. $y\neq 0$, тогда

$$\frac{dy}{y}=2\,\frac{dx}{x},\quad \int\frac{dy}{y}=2\int\frac{dx}{x};$$

$$\ln|y|=2\ln|x|+C_1,\quad \ln\left|\frac{y}{x^2}\right|=C_1,\quad \left|\frac{y}{x^2}\right|=e^{C_1},\quad \frac{y}{x^2}=\pm e^{C_1}=C,$$

$$y=Cx^2,\quad C\neq 0.$$

Объединяя случаи 1 и 2, получаем

$$y=Cx^2,\quad y=0,\quad C\neq 0,$$

или

$$y=Cx^2,\quad C\in\mathbb{R}.$$

Подставляем выражением $y(x)=C(x)x^2$ в исходное уравнение (4.4). получаем

$$C'(x)x^2+C(x)2x-2C(x)x=2x^3,$$

или

$$C'(x)x^2=2x^3,\quad C'(x)=2x,$$

$$C(x)=2\int x\,dx=x^2+C.$$

Таким образом, общее решение уравнения (4.4) имеет вид

$$y(x)=(x^2+C)x^2=Cx^2+x^4,\quad C\in\mathbb{R}.$$

2. Метод Бернулли

Полагаем, что $y(x)=u(x)v(x)$, тогда $y'=u'v+uv'$. Подставляем в уравнение (4.4), получаем

$$u'v+uv'-\frac{2}{x}uv=2x^3,$$

или

$$u'v + u\left(v' - \frac{2}{x}v\right) = 2x^3.$$

Решая уравнение $v' - \frac{2}{x}v = 0$, принимаем, что $v(x) = x^2$. Тогда получаем

$$u'x^2 = 2x^3, \quad u' = 2x, \quad u(x) = x^2 + C,$$

окончательно

$$y(x) = u(x)v(x) = (x^2 + C)x^2 = Cx^2 + x^4, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Замечание 4.1

Некоторые уравнения становятся линейными после замены переменных или перемены ролями искомой функции и независимой переменной.

Задача 4.2

Решить уравнение

$$y = (2x + y^3)y'.$$

Решение

Это уравнение не является линейным. Однако оно становится линейным, если поменять ролями искомую функцию и независимую переменную, т.е. искать решение в виде функции $x = x(y)$.

Делим обе части исходного уравнения на $y'y$, учитывая, что $x'_y = \frac{1}{y'_x}$, если $y'_x \neq 0$.

1. $yy' = 0$, т.е. $y = C$, подставляем в исходное уравнение, получаем, что $y = 0$ – решение; $y = C$, где $C \neq 0$, не является решением.

2. $yy' \neq 0$, тогда

$$x' = \frac{2x + y^3}{y}, \quad \text{или} \quad x' - 2\frac{x}{y} = y^2.$$

Решаем полученное линейное уравнение методом Бернулли. Полагаем $x(y) = u(y)v(y)$, $x' = u'v + uv'$, подставляем в уравнение, получаем

$$u'v + uv' - \frac{2}{y}uv = y^2,$$

или

$$u'v + u\left(v' - \frac{2}{y}v\right) = y^2.$$

Решая уравнение $v' - \frac{2}{y}v = 0,$ принимаем, что $v(y) = y^2.$ Тогда

$$u'y^2 = y^2,$$

т.е.

$$u' = 1, \;\; u(y) = y + C.$$

Получаем

$$x(y) = u(y)v(y) = (y + C)y^2 = Cy^2 + y^3.$$

Окончательно

$$x = Cy^2 + y^3, \quad y = 0, \quad C \in \mathbb{R}.$$

4.2. Уравнения Бернулли и Риккати

Уравнение

$$y' + a(x)y = b(x)y^n, \quad n \neq 0; 1, \tag{4.5}$$

называется *уравнением Бернулли.*

Чтобы решить уравнение Бернулли, необходимо обе его части разделить на y^n и сделать замену $z(x) = \frac{1}{y^{n-1}}.$ После замены получается линейное уравнение.

Уравнение Риккати

$$y' + a(x)y + b(x)y^2 = c(x) \tag{4.6}$$

в общем случае не решается в квадратурах. Однако если известно одно его частное решение $y_1(x),$ то заменой $y(x) = y_1(x) + z(x)$ (здесь $z(x)$ – новая неизвестная функция) уравнение Риккати сводится к уравнению Бернулли. Частное решение уравнения Риккати иногда удаётся подобрать, исходя из вида свободного члена $c(x).$

Задача 4.3

Решить уравнение

$$xy' + 2y + x^5 y^3 e^x = 0.$$

Решение

Разделим обе части уравнения на x (здесь $x \neq 0$, так как $x = 0$ не является решением исходного уравнения), получим

$$y' + 2\frac{y}{x} = -x^4 y^3 e^x. \qquad (4.7)$$

Полученное уравнение является уравнением Бернулли ($n = 3 > 0$).

Отметим, что $y = 0$ всегда является решением уравнения Бернулли при $n > 0$. Разделим обе части уравнения (4.7) на y^3, получим

$$\frac{y'}{y^3} + \frac{2}{x} \cdot \frac{1}{y^2} = -x^4 e^x.$$

Обозначим $z(x) = \frac{1}{y^2}$, $z' = -\frac{2}{y^3} y'$, приходим к уравнению

$$-\frac{1}{2} z' + \frac{2}{x} z = -x^4 e^x,$$

или

$$z' - \frac{4}{x} z = 2x^4 e^x,$$

которое является линейным уравнением.

Решаем методом Бернулли. Полагаем

$$z(x) = u(x) \cdot v(x), \quad z' = u'v + uv',$$

подставляем в полученное уравнение

$$u'v + uv' - \frac{4}{x} uv = 2x^4 e^x,$$

или

$$u'v + u\left(v' - \frac{4}{x} v\right) = 2x^4 e^x.$$

Решая уравнение $v' - \dfrac{4}{x}v = 0,$ принимаем, что $v(x) = x^4$. Тогда

$$u' \cdot x^4 = 2x^4 e^x,$$

т.е. $u' = 2e^x$, $u(x) = 2e^x + C$. Получаем

$$z(x) = u(x)v(x) = (2e^x + C)x^4.$$

Таким образом, общее решение линейного уравнения записывается в виде $z(x) = (2e^x + C)x^4$, а для уравнения Бернулли окончательно имеем

$$\frac{1}{y^2} = (2e^x + C)x^4, \quad y = 0, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Задача 4.4

Решить уравнение

$$y' + 2ye^x - y^2 = e^{2x} + e^x. \tag{4.8}$$

Решение

Данное уравнение является уравнением Риккати. Вид правой части указывает на возможность существования частного решения $y_1(x) = ae^x$, где a – постоянная. Подставляем выражение для $y_1(x)$ в исходное уравнение

$$ae^x + 2ae^{2x} - a^2e^{2e} = e^{2x} + e^x,$$

или

$$(2a - a^2)e^{2x} + ae^x = e^{2x} + e^x.$$

Приравнивая коэффициенты слева и справа при одинаковых функциях, получаем

$e^{2x}:\ 2a - a^2 = 1;$

$e^x:\ a = 1,$

т.е.

$$\begin{cases} 2a - a^2 = 1; \\ a = 1, \end{cases}$$

откуда $a = 1$.

Частное решение имеет вид $y_1(x) = e^x$. Сделав замену

$$y(x) = y_1(x) + z(x) = e^x + z(x)$$

в уравнении (4.8), получим

$$e^x + z' + 2(e^x + z)e^x - (e^x + z)^2 = e^{2x} + e^x,$$

$$e^x + z' + 2e^{2x} + 2ze^x - e^{2x} - 2ze^x - z^2 = e^{2x} + e^x,$$

или $z' - z^2 = 0$.

Получаем уравнение Бернулли. Однако проще это уравнение решать как уравнение с разделяющимися переменными. Для разделения переменных обе части последнего уравнения разделим на z^2.

1. $z = 0$, подставляем, получаем, что $z = 0$, т.е. $y = e^x$ – решение.

2. $z \neq 0$, тогда

$$\frac{dz}{z^2} = dx, \quad \int \frac{dz}{z^2} = \int dx, \quad -\frac{1}{z} = x + C, \quad z = -\frac{1}{x + C},$$

откуда

$$y = y_1(x) + z(x) = e^x - \frac{1}{x + C}.$$

Окончательно

$$y = e^x - \frac{1}{x + C}, \quad y = e^x, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Задача 4.5

Решить уравнение

$$y' - 2xy + y^2 = 5 - x^2. \tag{4.9}$$

Решение

Данное уравнение является уравнением Риккати. Вид правой части указывает на возможность существования частного решения $y_1(x) = ax + b$, где a, b – постоянные.

Подставляем выражение для $y_1(x)$ в исходное уравнение

$$a - 2x(ax + b) + (ax + b)^2 = 5 - x^2,$$

или

$$(a^2-2a)x^2+(2ab-2b)x+(b^2+a)=5-x^2.$$

Приравнивая коэффициенты слева и справа при одинаковых степенях x, получаем

$x^2:\ a^2-2a=-1;$

$x^1:\ 2ab-2b=0;$

$x^0:\ b^2+a=5,$

т.е.

$$\begin{cases} a^2-2a=-1; \\ 2ab-2b=0; \\ b^2+a^2=5, \end{cases}$$

отсюда $a=1,\ b=\pm 2.$

Возьмём $b=2,$ частное решение имеет вид $y_1(x)=x+2.$ Сделав замену $y(x)=y_1(x)+z(x)=x+2+z(x)$ в уравнении (4.9), получим

$$1+z'-2x(x+2+z)+(x+2+z)^2=5-x^2,$$

или

$$z'+4z=-z^2, \quad z'=-z^2-4z.$$

Получаем уравнение Бернулли. Однако проще это уравнение решать как уравнение с разделяющимися переменными.

Для разделения переменных обе части последнего уравнения разделим на $z(z+4).$

1. $z=0,$ подставляем, получаем, что $z=0$, т.е. $y=x+2$ – решение.

2. $z+4=0,\ \ z=-4,\ \ z'=0,$ подставляем, получаем, что $z=-4$, т.е. $y=x-2$ – решение.

3. $z(z+4)\neq 0,$ тогда

$$\frac{dz}{z(z+4)}=-dx, \quad \int\frac{dz}{z(z+4)}=-\int dx;$$

$$\int\frac{dz}{z(z+4)}=\frac{1}{4}\int\frac{(4+z)-z}{z(z+4)}dz=\frac{1}{4}\int\frac{dz}{z}-\frac{1}{4}\int\frac{dz}{z+4}=\frac{1}{4}\ln|z|-\frac{1}{4}\ln|z+4|,$$

получаем

$$\frac{1}{4}\ln\left|\frac{z}{z+4}\right| = -x + C_2, \quad \left|\frac{z}{z+4}\right| = e^{-4x+C_1}, \quad C_1 = 4C_2,$$

$$\frac{z}{z+4} = \pm e^{C_1} e^{-4x} = \tilde{C} e^{-4x}, \quad \tilde{C} = \pm e^{C_1}, \quad \frac{y-x+2}{y-x-2} = Ce^{4x}, \quad C = \frac{1}{\tilde{C}},$$

$$1 + \frac{4}{y-x-2} = Ce^{4x}, \quad y - x - 2 = \frac{4}{Ce^{4x}-1}.$$

Окончательно

$$y = x + 2 + \frac{4}{Ce^{4x}-1}, \quad y = x+2, \quad y = x-2, \quad C \neq 0,$$

или

$$y = x + 2 + \frac{4}{Ce^{4x}-1}, \quad y = x+2, \quad C \in \mathbb{R}.$$

5. УРАВНЕНИЯ В ПОЛНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛАХ. ИНТЕГРИРУЮЩИЙ МНОЖИТЕЛЬ. МЕТОДЫ НАХОЖДЕНИЯ ИНТЕГРИРУЮЩЕГО МНОЖИТЕЛЯ

5.1. Уравнения в полных дифференциалах

Определение 5.1

Уравнение

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0 \tag{5.1}$$

называется *уравнением в полных дифференциалах*, если его левая часть представляет полный дифференциал некоторой функции $u(x,y)$, т.е.

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy \equiv du = \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy. \tag{5.2}$$

Теорема 5.1

Пусть функции $M(x,y)$, $N(x,y)$, $\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y}$, $\dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}$ непрерывны в односвязной области D плоскости Oxy. Выражение $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy$ будет полным дифференциалом тогда и только тогда, когда

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}, \quad (x,y) \in D. \tag{5.3}$$

Согласно (5.1) и (5.2) уравнение в полных дифференциалах можно записать в виде

$$du = 0, \tag{5.4}$$

тогда его общий интеграл имеет вид

$$u(x,y) = C, \tag{5.5}$$

где C – произвольная постоянная.

Пусть для уравнения (5.1) выполняется условие (5.3). Найдём функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую соотношению (5.2). Поскольку

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = M(x,y),$$

то после интегрирования получаем

$$u(x,y) = \int M(x,y)\,dx + \varphi(y). \tag{5.6}$$

Дифференцируя полученное выражение для $u(x,y)$ по y и учитывая, что $\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$, получаем дифференциальное уравнение относительно $\varphi'(y)$. Из полученного уравнения находим $\varphi(y)$ и, следовательно, искомую функцию $u(x,y)$.

Аналогично, используя соотношение

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = N(x,y),$$

находим

$$u(x,y) = \int N(x,y)\,dy + \psi(x). \tag{5.7}$$

Дифференцируя полученное выражение для $u(x,y)$ по x и учитывая, что $\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x} = M(x,y)$, получаем дифференциальное уравнение относительно $\psi'(x)$. Из полученного уравнения находим $\psi(x)$ и, следовательно, искомую функцию $u(x,y)$.

Задача 5.1

Решить уравнение

$$\frac{y}{x}\,dx + (y^3 + \ln x)\,dy = 0, \quad x > 0. \tag{5.8}$$

Решение

Отметим, что в предлагаемом уравнении односвязной областью D является правая полуплоскость плоскости Oxy, т.е.

$$D = \{(x,y):\ 0 < x < +\infty,\ -\infty < y < +\infty\} \subset \mathbb{R}^2.$$

В данном уравнении (5.8) $M(x,y)=\dfrac{y}{x}$, $N(x,y)=y^3+\ln x$. Вычислим $\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{1}{x}$, $\dfrac{\partial N}{\partial x}=\dfrac{1}{x}$. Так как $\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial N}{\partial x}$ в области D, то данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах. Следовательно,

$$\frac{\partial u}{\partial x}=M(x,y),\quad \frac{\partial u}{\partial y}=N(x,y),$$

откуда

$$u(x,y)=\int M(x,y)\,dx=\int\frac{y}{x}\,dx=y\ln x+\varphi(y).$$

Дифференцируя полученное выражение для $u(x,y)$ по y, получаем

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\ln x+\varphi'(y)=N(x,y)=y^3+\ln x,$$

т.е.

$$\varphi'(y)=y^3,\quad \varphi(y)=\int y^3\,dy=\frac{1}{4}y^4+C.$$

Следовательно,

$$u(x,y)=y\ln x+\varphi(y)=y\ln x+\frac{1}{4}y^4,$$

и общий интеграл уравнения (5.8) будет иметь вид

$$y\ln x+\frac{1}{4}y^4=C,\quad C\in\mathbb{R}.$$

Можно сделать проверку полученного решения.

Проверка

$$u'_x=\left(y\ln x+\frac{1}{4}y^4\right)'_x=\frac{y}{x}=M(x,y),$$

$$u'_y=\left(y\ln x+\frac{1}{4}y^4\right)'_y=\ln x+y^3=N(x,y).$$

Задача 5.2

Решить уравнение

$$(1+y^2\sin 2x)\,dx-2y\cos^2 x\,dy=0. \qquad (5.9)$$

Решение

Здесь $M(x,y)=1+y^2\sin 2x$, $N(x,y)=-2y\cos^2 x$. Вычислим

$$\frac{\partial M}{\partial y}=2y\sin 2x,\quad \frac{\partial N}{\partial x}=-2y\cdot 2\cos x\,(-\sin x)=2y\sin 2x.$$

Так как $\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial N}{\partial x}$, то данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах. Следовательно,

$$\frac{\partial u}{\partial x}=M(x,y),\quad \frac{\partial u}{\partial y}=N(x,y).$$

Решим уравнение двумя способами.

1-й способ

Запишем

$$\frac{\partial u}{\partial x}=M(x,y)=1+y^2\sin 2x,$$

тогда

$$u(x,y)=\int M(x,y)\,dx=\int(1+y^2\sin 2x)\,dx=$$

$$=x+2y^2\int\sin x\cos x\,dx=x+2y^2\int\sin x\,d(\sin x)=$$

$$=x+y^2\sin^2 x+\varphi(y).$$

Дифференцируя полученное выражение по y, получаем

$$\frac{\partial u}{\partial y}=2y\sin^2 x+\varphi'(y)=N(x,y)=-2y\cos^2 x,$$

$$\varphi'(y)=-2y\sin^2 x-2y\cos^2 x=-2y,$$

$$\varphi(y)=-2\int y\,dy=-y^2+C.$$

Следовательно,

$$u(x, y) = x + y^2 \sin^2 x + \varphi(y) = x + y^2 \sin^2 x - y^2 =$$
$$= x - y^2 (1 - \sin^2 x) = x - y^2 \cos^2 x,$$

и общий интеграл уравнения (5.9) будет иметь вид

$$x - y^2 \cos^2 x = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

2-й способ

Запишем

$$\frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y) = -2y \cos^2 x,$$

тогда

$$u(x, y) = \int N(x, y)\, dy = -2\cos^2 x \int y\, dy = -y^2 \cos^2 x + \psi(x).$$

Дифференцируя полученное выражение по x, получаем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -y^2\, 2\cos x(-\sin x) + \psi'(x) =$$
$$= y^2 \sin 2x + \psi'(x) = M(x, y) = 1 + y^2 \sin 2x,$$
$$\psi'(x) = 1, \quad \psi(x) = x + C.$$

Следовательно,

$$u(x, y) = -y^2 \cos^2 x + \psi(x) = -y^2 \cos^2 x + x,$$

и общий интеграл уравнения (5.9) будет иметь вид

$$x - y^2 \cos^2 x = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

5.2. Интегрирующий множитель. Методы нахождения интегрирующего множителя

Если левая часть уравнения (5.1) не является полным дифференциалом, то возникает задача подбора такой функции $\mu(x, y)$, при умножении на которую левая часть уравнения (5.1) становится полным дифференциалом некоторой функции $u(x, y)$. Такая функция $\mu(x, y)$ (если она существует) называется *интегрирующим множителем*.

Теорема 5.2 (достаточные условия)

Если функции $M(x,y)$ и $N(x,y)$ уравнения (5.1) непрерывны, имеют непрерывные частные производные в односвязной области *D* плоскости *Oxy*, то интегрирующий множитель существует, если

$$M^2(x,y)+N^2(x,y)\neq 0$$

в области *D*.

В общем случае для нахождения интегрирующего множителя надо подобрать хотя бы одно не равное тождественно нулю частное решение уравнения в частных производных

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y}=\frac{\partial(\mu N)}{\partial x},$$

или в развёрнутом виде

$$M\frac{\partial\mu}{\partial y}+\mu\frac{\partial M}{\partial y}-N\frac{\partial\mu}{\partial x}-\mu\frac{\partial N}{\partial x}=0.$$

Делим обе части уравнения на μ и после переноса некоторых членов в правую часть уравнения получаем

$$N\frac{\partial\ln\mu}{\partial x}-M\frac{\partial\ln\mu}{\partial y}=\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}. \tag{5.10}$$

Подчеркнём ещё раз, что задача отыскания интегрирующего множителя $\mu(x,y)$ в общем случае является столь же трудной, как и задача решения уравнения в частных производных (5.10).

Рассмотрим некоторые частные случаи нахождения интегрирующего множителя.

1. Если $\mu=\mu(x)$, то $\dfrac{\partial\ln\mu}{\partial y}\equiv 0$, и уравнение (5.10) приобретает вид

$$\frac{d\ln\mu}{dx}=\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N}.$$

Считая $\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N}=\varphi(x)$ непрерывной функцией от x, получим

$$\ln\mu=\int\varphi(x)\,dx+\ln C,$$

$$\mu(x)=Ce^{\int\varphi(x)\,dx}. \qquad (5.11)$$

Можно считать, что $C=1$, так как достаточно иметь лишь один интегрирующий множитель.

Итак, если $\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N}$ является функцией только от x (или постоянной), то интегрирующий множитель, зависящий только от x, существует и определяется формулой (5.11). В противном случае интегрирующего множителя вида $\mu(x)$ не существует.

2. Если $\mu=\mu(y)$, то $\dfrac{\partial\ln\mu}{\partial x}\equiv 0$, и уравнение (5.10) приобретает вид

$$\frac{d\ln\mu}{dy}=\frac{\dfrac{\partial N}{\partial x}-\dfrac{\partial M}{\partial y}}{M}.$$

Считая $\dfrac{\dfrac{\partial N}{\partial x}-\dfrac{\partial M}{\partial y}}{M}=\psi(y)$ непрерывной функцией от y, получим

$$\ln\mu=\int\psi(y)\,dy+\ln C,$$

или

$$\mu(y)=Ce^{\int\psi(y)\,dy}. \qquad (5.12)$$

Можно считать $C=1$, так как достаточно иметь лишь один интегрирующий множитель.

Итак, если $\dfrac{\dfrac{\partial N}{\partial x}-\dfrac{\partial M}{\partial y}}{N}$ является функцией только от y (или постоянной), то интегрирующий множитель, зависящий только от y, существует и определяется формулой (5.12). В противном случае интегрирующего множителя вида $\mu(y)$ не существует.

Задача 5.3

Решить уравнение

$$(x^2+y^2+x)\,dx+y\,dy=0.$$

Решение

Здесь

$$M(x,y)=x^2+y^2+x, \quad N(x,y)=y.$$

Так как

$$\frac{\partial M}{\partial y}=2y\neq\frac{\partial N}{\partial x}=0,$$

то данное уравнение не является уравнением в полных дифференциалах. Вычислим

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N}=\frac{2y-0}{y}=2=\varphi(x)=\mathrm{const},$$

следовательно, существует интегрирующий множитель $\mu(x)$. Для сравнения вычислим

$$\frac{\dfrac{\partial N}{\partial x}-\dfrac{\partial M}{\partial y}}{M}=\frac{-2y}{x^2+y^2+x}=\psi(x,y),$$

т.е. интегрирующий множитель $\mu(y)$ не существует. Запишем

$$\frac{d\ln\mu}{dx}=2, \quad \ln\mu=2x, \quad \mu(x)=e^{2x}$$

(полагаем $C=1$). Поэтому

$$\mu M=e^{2x}(x^2+y^2+x), \quad \mu N=ye^{2x}.$$

Вычислим

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y}=2ye^{2x}, \quad \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}=2ye^{2x}.$$

Так как

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x},$$

то получили уравнение в полных дифференциалах

$$e^{2x}(x^2 + y^2 + x)\,dx + ye^{2x}\,dy = 0. \tag{5.13}$$

Имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \mu M = e^{2x}(x^2 + y^2 + x),$$

$$u(x, y) = \int \mu M\,dx = \int e^{2x}(x^2 + y^2 + x)\,dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}e^{2x} + \frac{y^2}{2}e^{2x} + \varphi(y).$$

Дифференцируя полученное выражение по y, получаем

$$\frac{\partial u}{\partial y} = ye^{2x} + \varphi'(y) = \mu N = ye^{2x}, \quad \varphi'(y) = 0, \quad \varphi(y) = C_1.$$

Следовательно,

$$u(x, y) = \frac{e^{2x}}{2}(x^2 + y^2) + \varphi(y) = \frac{e^{2x}}{2}(x^2 + y^2),$$

и общий интеграл уравнения (5.13) будет иметь вид

$$\frac{e^{2x}}{2}(x^2 + y^2) = C_1, \quad C_1 > 0. \tag{5.14}$$

Прологарифмируем полученное выражение

$$\ln\frac{e^{2x}}{2} + \ln\,(x^2 + y^2) = \ln C_1,$$

$$2x - \ln 2 + \ln\,(x^2 + y^2) = \ln C_1,$$

или

$$2x + \ln\,(x^2 + y^2) = C, \quad C = \ln\,(2C_1), \quad C \in \mathbb{R}.$$

Проверка

Отметим, что проверяется уравнение в полных дифференциалах (5.13), общий интеграл берётся в виде (5.14).

$$u'_x = \left(\frac{1}{2}e^{2x}(x^2+y^2)\right)'_x = e^{2x}(x^2+y^2) + \frac{1}{2}e^{2x}\cdot 2x =$$

$$= e^{2x}(x^2+y^2+x) = \mu M,$$

$$u'_y = \left(\frac{1}{2}e^{2x}(x^2+y^2)\right)'_y = \frac{1}{2}e^{2x}\cdot 2y = ye^{2x} = \mu N.$$

Задача 5.4

Решить уравнение

$$y(1+xy)\,dx - x\,dy = 0.$$

Решение

Здесь

$$M(x,y) = y(1+xy), \quad N(x,y) = -x.$$

Так как

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1+2xy \neq \frac{\partial N}{\partial x} = -1,$$

то данное уравнение не является уравнением в полных дифференциалах. Вычислим

$$\frac{\dfrac{\partial N}{\partial x} - \dfrac{\partial M}{\partial y}}{M} = \frac{-2-2xy}{y\,(1+xy)} = -\frac{2}{y} = \psi(y),$$

следовательно, существует интегрирующий множитель $\mu(y)$. Для сравнения вычислим

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{2+2xy}{-x} = \varphi(x,y),$$

т.е. интегрирующий множитель $\mu(x)$ не существует. Запишем

$$\frac{d\ln\mu}{dy} = -\frac{2}{y}, \quad \ln\mu = -2\ln y + \ln C = \ln\frac{1}{y^2} + \ln C, \quad \mu(y) = \frac{1}{y^2}$$

(полагаем $C = 1$). Поэтому

$$\mu M = \frac{1+xy}{y}, \quad \mu N = -\frac{x}{y^2}.$$

Вычислим

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = -\frac{1}{y^2}, \quad \frac{\partial(\mu N)}{\partial x} = -\frac{1}{y^2}.$$

Так как

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x},$$

то получили уравнение в полных дифференциалах

$$\frac{1+xy}{y}\,dx - \frac{x}{y^2}\,dy = 0. \qquad (5.15)$$

Имеем

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \mu N = -\frac{x}{y^2}, \quad u(x,y) = \int \mu N\,dy = -\int \frac{x\,dy}{y^2} = \frac{x}{y} + \psi(x).$$

Дифференцируя полученное выражение по x, получаем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{y} + \psi'(x) = \mu M = \frac{1+xy}{y} = \frac{1}{y} + x,$$

$$\psi'(x) = x, \quad \psi(x) = \frac{x^2}{2} + C.$$

Следовательно,

$$u\,(x,y) = \frac{x}{y} + \psi(x) = \frac{x}{y} + \frac{x^2}{2}.$$

Получаем

$$\frac{x}{y} + \frac{x^2}{2} = C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}, \quad \text{или} \quad 2x + x^2 y = Cy, \quad C = 2C_1.$$

Отметим, что $y = 0$ является частным решением исходного уравнения.

Окончательно

$$2x + x^2 y = Cy, \quad y = 0, \quad C \in \mathbb{R}.$$

3. В общем случае, полагая, что $\mu = \mu(z)$, где $z = x + y$, $z = x - y$, $z = xy$, $z = \dfrac{x}{y}$, $z = x^2 + y^2$ и т.д., можно узнать, существует ли интегрирующий множитель, зависящий от данного z, и найти его. Для этого необходимо исходное дифференциальное уравнение умножить на $\mu(z)$. Если в уравнении

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$$

удаётся избавиться от x и y, т.е. привести его к виду $F(z, \mu, \mu'_z) = 0$, то интегрирующий множитель, зависящий от данного z, существует.

Задача 5.5

Решить уравнение

$$(y^4 - 4xy)\,dx + (2xy^3 - 3x^2)\,dy = 0.$$

Решение

Здесь

$$M(x, y) = y^4 - 4xy, \quad N(x, y) = 2xy^3 - 3x^2.$$

Вычислим

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 4y^3 - 4x, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2y^3 - 6x.$$

Так как $\dfrac{\partial M}{\partial y} \neq \dfrac{\partial N}{\partial x}$, то данное уравнение не является уравнением в полных дифференциалах.

Предположим, что интегрирующий множитель существует и $\mu(z) = \mu(xy)$. Умножаем исходное уравнение на μ, тогда

$$\mu\,(y^4 - 4xy)\,dx + \mu\,(2xy^3 - 3x^2)\,dy = 0.$$

Данное уравнение будет в полных дифференциалах, если

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x},$$

или

$$\frac{\partial[\mu(y^4 - 4xy)]}{\partial y} = \frac{\partial[\mu(2xy^3 - 3x^2)]}{\partial x}.$$

Так как

$$\mu'_x = \mu'_z \cdot z'_x = y \cdot \mu'_z, \quad \mu'_y = \mu'_z \cdot z'_y = x \cdot \mu'_z,$$

то получаем

$$\mu(4y^3 - 4x) + x \cdot \mu'_z (y^4 - 4xy) = \mu(2y^3 - 6x) + y\mu'_z (2xy^3 - 3x^2),$$

или

$$\mu'_z \cdot xy(y^3 + x) = 2\mu(y^3 + x).$$

Учтём, что $xy = z$, и разделим обе части последнего уравнения на $(y^3 + x)$, получим $z \cdot \mu'_z = 2\mu$, т.е. избавились от x и y, поэтому существует интегрирующий множитель $\mu(xy)$. Имеем

$$\frac{d\mu}{\mu} = 2\frac{dz}{z}, \quad \mu = z^2 = x^2 y^2$$

(полагаем $C = 1$). Поэтому

$$\mu M = x^2 y^2 (y^4 - 4xy), \quad \mu N = x^2 y^2 (2xy^3 - 3x^2).$$

Вычислим

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = 6x^2 y^5 - 12x^3 y^2, \quad \frac{\partial(\mu N)}{\partial x} = 6x^2 y^5 - 12x^3 y^2.$$

Так как

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x},$$

то получили уравнение в полных дифференциалах

$$x^2 y^2 (y^4 - 4xy)\, dx + x^2 y^2 (2xy^3 - 3x^2)\, dy = 0. \qquad (5.16)$$

Имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \mu M = x^2 y^2 (y^4 - 4xy),$$

$$u(x, y) = \int \mu M\, dx = \int x^2 y^2 (y^4 - 4xy)\, dx =$$

$$= \frac{1}{3} x^3 y^6 - x^4 y^3 + \varphi(y).$$

Дифференцируя полученное выражение по y, получаем

$$\frac{\partial u}{\partial y}=2x^3y^5-3x^4y^2+\varphi'(y)=\mu N=x^2y^2(2xy^3-3x^2),$$

$$\varphi'(y)=0,\quad \varphi(y)=C.$$

Следовательно,

$$u(x,y)=\frac{1}{3}x^3y^6-x^4y^3,$$

и общий интеграл уравнения (5.16) будет иметь вид

$$\frac{1}{3}x^3y^6-x^4y^3=C,\quad C\in\mathbb{R}.$$

4. Интегрирующий множитель однородного уравнения

$$M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy=0$$

имеет вид

$$\mu(x,y)=\frac{1}{x\cdot M(x,y)+y\cdot N(x,y)}. \tag{5.17}$$

Задача 5.5 (2-й способ, 1-й способ разбирается в задаче 3.1)

Решить уравнение

$$(x-y)\,dx+(x+y)\,dy=0.$$

Решение

Здесь

$$M(x,y)=x-y,\quad N(x,y)=x+y\ -$$

однородные функции одной и той же степени $m=1$. Интегрирующий множитель равен

$$\mu(x,y)=\frac{1}{x(x-y)+y(x+y)}=\frac{1}{x^2+y^2}.$$

Умножим данное однородное уравнение на этот интегрирующий множитель и сгруппируем члены, получим

$$\frac{x\,dx+y\,dy}{x^2+y^2}+\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}=0,$$

или

$$\frac{1}{2}\,d\,(\ln\,(x^2+y^2))+d\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right)=0.$$

Интегрируя, получаем

$$\ln\sqrt{x^2+y^2}+\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=C_1,$$

или

$$\sqrt{x^2+y^2}=e^{C_1-\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}=Ce^{-\operatorname{arctg}\frac{y}{x}},$$

где $C=e^{C_1}>0$.

Задача 5.6

Решить уравнение

$$(y^2-2xy)\,dx+x^2\,dy=0. \tag{5.18}$$

Решение

Здесь $M(x,y)=y^2-2xy$, $N(x,y)=x^2$ – однородные функции одной и той же степени $m=2$. Интегрирующий множитель равен

$$\mu(x,y)=\frac{1}{x(y^2-2xy)+y\cdot x^2}=\frac{1}{xy(y-x)}.$$

Умножим данное однородное уравнение на этот интегрирующий множитель, получим

$$\frac{y^2-2xy}{xy(y-x)}dx+\frac{x^2}{xy(y-x)}dy=0,$$

или

$$\frac{y-2x}{x(y-x)}dx+\frac{x}{y(y-x)}dy=0. \tag{5.19}$$

Отсюда имеем

$$\mu M=\frac{y-2x}{x(y-x)},\quad \mu N=\frac{x}{y(y-x)}.$$

Вычислим

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y}=\frac{1}{(y-x)^2},\quad \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}=\frac{1}{(y-x)^2}.$$

Так как

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y}=\frac{\partial(\mu N)}{\partial x},$$

то уравнение (5.19) является уравнением в полных дифференциалах. Запишем

$$u(x,y)=\int(\mu N)\,dy=\int\frac{x\,dy}{y(y-x)}=-\int\frac{-x\,dy}{y(y-x)}=$$

$$=-\int\frac{(y-x)-y}{y(y-x)}\,dy=-\int\frac{dy}{y}+\int\frac{dy}{y-x}=-\ln|y|+\ln|y-x|+\varphi(x).$$

Дифференцируя полученное выражение по x, получаем

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{-1}{y-x}+\varphi'(x)=\mu M=\frac{y-2x}{x(y-x)}=\frac{1}{x}-\frac{1}{y-x},$$

откуда $\varphi'(x)=\dfrac{1}{x}$, $\varphi(x)=\ln|x|+C_1$.

Таким образом,

$$u(x,y)=-\ln|y|+\ln|y-x|+\ln|x|=C_1,$$

$$u(x,y)=\ln\left|\frac{x(y-x)}{y}\right|=C_1,\quad \frac{x(y-x)}{y}=\pm e^{C_1}=C,\quad Cy=x(y-x).$$

Отметим, что решения $x=0$, $y=0$, $y=x$ являются частными решениями уравнения (5.18).

Окончательно

$$Cy=x(y-x),\quad x=0,\quad y=0,\quad y=x,\quad C\neq 0,$$

или

$$Cy=x(y-x),\quad y=0,\quad C\in\mathbb{R}.$$

5.3. Метод выделения полного дифференциала

Если исходное уравнение

$$M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy=0$$

приводится в результате преобразований к виду

$$d\varphi(x,y)+M_1(x,y)\,dx+N_1(x,y)\,dy=0,$$

где $d\varphi(x,y)$ – полный дифференциал некоторой функции $\varphi(x,y)$, то можно попытаться искать для вспомогательного уравнения

$$M_1(x,y)\,dx + N_1(x,y)\,dy = 0$$

интегрирующий множитель, зависящий от z, где $z = \varphi(x,y)$. Если такой интегрирующий множитель существует, то он же будет интегрирующим множителем и для исходного уравнения

$$d\varphi(x,y) + M_1(x,y)\,dx + N_1(x,y)\,dy = 0,$$

или

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0.$$

Задача 5.7

Решить уравнение

$$(xy + y^4)\,dx + (x^2 - xy^3)\,dy = 0.$$

Решение

Запишем исходное уравнение в виде

$$x(y\,dx + x\,dy) + y^3(y\,dx - x\,dy) = 0$$

и разделим левую и правую части уравнения на x, получим

$$y\,dx + x\,dy + \frac{y^3}{x}(y\,dx - x\,dy) = 0,$$

или

$$d\,(xy) + \frac{y^3}{x}(y\,dx - x\,dy) = 0.$$

Ищем для вспомогательного уравнения

$$\frac{y^4}{x}\,dx - y^3\,dy = 0$$

интегрирующий множитель $\mu(x,y) = \mu(xy)$. Вспомогательное уравнение будет в полных дифференциалах, если

$$\frac{\partial\left(\mu\dfrac{y^4}{x}\right)}{\partial y} = -\frac{\partial(\mu y^3)}{\partial x}.$$

Так как $\mu'_x = \mu'_z \cdot z'_x = y\mu'_z$, $\mu'_y = \mu'_z \cdot z'_y = x\mu'_z$, то получаем

$$x\mu'_z \cdot \frac{y^4}{x} + \mu\frac{4y^3}{x} = -y^4\mu'_z,$$

или

$$xy \cdot \mu'_z = -2\mu.$$

Учтём, что $xy = z$, получим $z \cdot \mu'_z = -2\mu$, т.е. избавились от x и y, поэтому существует интегрирующий множитель $\mu(xy)$.

Получаем

$$\frac{d\mu}{\mu} = -2\frac{dz}{z}, \quad \mu = \frac{1}{z^2} = \frac{1}{x^2y^2}$$

(полагаем $C = 1$). Поэтому

$$\mu M_1 = \frac{y^2}{x^3}, \quad \mu N_1 = -\frac{y}{x^2}.$$

Вычислим

$$\frac{\partial(\mu M_1)}{\partial y} = \frac{2y}{x^3}, \quad \frac{\partial(\mu N_1)}{\partial x} = \frac{2y}{x^3}.$$

Так как

$$\frac{\partial(\mu M_1)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N_1)}{\partial x},$$

то получили уравнение в полных дифференциалах

$$\frac{d(xy)}{x^2y^2} + \frac{y^2}{x^3}\,dx - \frac{y}{x^2}\,dy = 0,$$

или

$$\left(\frac{y^2}{x^3} + \frac{1}{x^2y}\right)dx + \left(\frac{1}{xy^2} - \frac{y}{x^2}\right)dy = 0. \qquad (5.20)$$

Запишем

$$u_1(x,y) = \int \mu N_1\,dy = -\int \frac{y}{x^2}\,dy = -\frac{y^2}{2x^2} + \varphi(x).$$

Дифференцируя полученное выражение по x, получаем

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{y^2}{x^3} + \varphi'(x) = \mu M_1 = \frac{y^2}{x^3}, \quad \varphi'(x) = 0, \quad \varphi(x) = C.$$

Следовательно, $u(x,y) = -\frac{1}{xy} + u_1(x,y) = -\frac{1}{xy} - \frac{y^2}{2x^2}$. Получаем

$$-\frac{1}{xy} - \frac{y^2}{2x^2} = C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}, \tag{5.21}$$

или $2x + y^3 = Cx^2 y$, $C = -2C_1$.

Отметим, что $x = 0$, $y = 0$ являются частными решениями исходного уравнения.

Окончательно $2x + y^3 = Cx^2 y$, $x = 0$, $y = 0$, $C_1 \in \mathbb{R}$.

Проверка

Отметим, что проверяется уравнение в полных дифференциалах (5.20), общий интеграл берётся в виде (5.21):

$$u'_x = \left(-\frac{1}{xy} - \frac{y^2}{2x^2}\right)'_x = \frac{1}{x^2 y} + \frac{y^2}{x^3} = \mu M,$$

$$u'_y = \left(-\frac{1}{xy} - \frac{y^2}{2x^2}\right)'_y = \frac{1}{xy^2} - \frac{y}{x^2} = \mu N.$$

5.4. Метод разбиения уравнения на две части

Исходное дифференциальное уравнение

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0 \tag{5.22}$$

записывается в следующем виде

$$(M_1(x,y)\,dx + N_1(x,y)\,dy) + (M_2(x,y)\,dx + N_2(x,y)\,dy) = 0,$$

т.е. в виде суммы двух слагаемых.

Пусть $\mu_1 = \mu_1(x,y)$ – интегрирующий множитель для 1-го слагаемого. Умножив уравнение (5.22) на μ_1, получим

$$(\mu_1 M_1(x,y)\,dx + \mu_1 N_1(x,y)\,dy) + (\mu_1 M_2(x,y)\,dx + \mu_1 N_2(x,y)\,dy) = 0.$$

Тогда 1-е слагаемое будет полным дифференциалом, т.е.

$$\mu_1 M_1(x,y)\,dx + \mu_1 N_1(x,y)\,dy = du(x,y),$$

где $u(x,y)$ – известная функция.

Выберем теперь $\mu_2 = \mu_2(x,y) = \varphi(u(x,y))$ так, чтобы в равенстве

$$\mu_1\mu_2(M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy) =$$
$$= \varphi(u)\,du + \mu_1\mu_2(M_2(x,y)\,dx + N_2(x,y)\,dy)$$

2-е слагаемое стало полным дифференциалом. При этом 1-е слагаемое остается полным дифференциалом, и вся левая часть исходного уравнения (5.22) становится полным дифференциалом.

Задача 5.8

Решить уравнение

$$(x - xy)\,dx + (y + x^2)\,dy = 0.$$

Решение

Разобъём левую часть уравнения на сумму двух слагаемых

$$(x\,dx + y\,dy) + x(x\,dy - y\,dx) = 0. \qquad (5.23)$$

Запишем 1-е слагаемое

$$x\,dx + y\,dy = \frac{1}{2}d(x^2 + y^2) = \frac{1}{2}du(x,y),$$

где $u(x,y) = x^2 + y^2$. Очевидно, что $\mu_1(x,y) = 1$. Умножив уравнение (5.23) на $\mu_2 = \varphi(u)$ и преобразовав 2-е слагаемое, получим

$$\frac{1}{2}\varphi(u)\,du + \varphi(u)x^3\,\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2} = 0.$$

Поскольку $\dfrac{x\,dy - y\,dx}{x^2} = d\left(\dfrac{y}{x}\right)$, то 2-е слагаемое будет полным дифференциалом, если $\varphi(u)x^3$ будет функцией от $t = \dfrac{y}{x}$. Путём подбора находим, что $\varphi(u) = \dfrac{1}{u^{3/2}}$. Действительно, тогда

$$\varphi(u)x^3 = \frac{x^3}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = \frac{1}{\left(1 + \dfrac{y^2}{x^2}\right)^{3/2}} = f\left(\frac{y}{x}\right) = f(t).$$

Уравнение принимает вид

$$\frac{du}{2u^{3/2}} + \frac{dt}{(1 + t^2)^{3/2}} = 0.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными, тогда

$$\frac{1}{2}\int \frac{du}{u^{3/2}} = -\int \frac{dt}{(1+t^2)^{3/2}},$$

откуда

$$\frac{1}{\sqrt{u}} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} + C.$$

Общий интеграл имеет вид

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{y}{x\sqrt{1+\dfrac{y^2}{x^2}}} = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Задача 5.9

Решить уравнение

$$(x^2 - y)\,dx + x(y+1)\,dy = 0.$$

Решение

Разобъём левую часть уравнения на сумму двух слагаемых

$$(x^2\,dx + xy\,dy) + (x\,dy - y\,dx) = 0,$$

или

$$x(x\,dx + y\,dy) + (x\,dy - y\,dx) = 0.$$

Разделим обе части уравнения на x (отметим, что $x = 0$ – решение исходного уравнения), получим

$$x\,dx + y\,dy + \frac{x\,dy - y\,dx}{x} = 0. \tag{5.24}$$

Запишем 1-е слагаемое

$$x\,dx + y\,dy = \frac{1}{2}d(x^2+y^2) = \frac{1}{2}du(x,y),$$

где $u(x,y) = x^2 + y^2$. Очевидно, что $\mu_1(x,y) = 1$. Умножив уравнение (5.24) на $\mu_2 = \varphi(u)$ и преобразовав 2-е слагаемое, получим

$$\frac{1}{2}\varphi(u)\,du + \varphi(u)x \cdot \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2} = 0.$$

Поскольку $\dfrac{x\,dy - y\,dx}{x^2} = d\left(\dfrac{y}{x}\right)$, то 2-е слагаемое будет полным дифференциалом, если $\varphi(u)x$ будет функцией от $t = \dfrac{y}{x}$. Путём подбора находим, что $\varphi(u) = \dfrac{1}{u^{1/2}}$. Действительно, тогда

$$\varphi(u)x = \frac{x}{(x^2 + y^2)^{1/2}} = \frac{1}{\left(1 + \dfrac{y^2}{x^2}\right)^{1/2}} = f\left(\frac{y}{x}\right) = f(t).$$

Уравнение принимает вид

$$\frac{du}{2u^{1/2}} + \frac{dt}{(1+t^2)^{1/2}} = 0.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными, тогда

$$\frac{1}{2}\int \frac{du}{u^{1/2}} = -\int \frac{dt}{(1+t^2)^{1/2}},$$

откуда

$$\sqrt{u} = -\ln\left(t + \sqrt{1+t^2}\right) + C.$$

Общий интеграл имеет вид

$$\sqrt{x^2 + y^2} = -\ln\left(\frac{y}{x} + \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}}\right) + C.$$

Окончательно,

$$x\sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}} + \ln\left(\frac{y}{x} + \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}}\right) = C, \quad x = 0, \quad C \in \mathbb{R}.$$

По-другому (когда $\mu_1(x, y) \not\equiv 1$ и $\mu_2(x, y) \not\equiv 1$) метод разбиения уравнения на две части формулируется следующим образом.

Исходное дифференциальное уравнение (5.22) записывается в виде двух слагаемых

$$(M_1(x, y)dx + N_1(x, y)dy) + (M_2(x, y)dx + N_2(x, y)dy) = 0.$$

Пусть $u_1(x, y) = C_1$, $\mu_1(x, y)$; $u_2(x, y) = C_2$, $\mu_2(x, y)$ – общие интегралы и интегрирующие множители соотвественно для первого и второго слагаемых. Тогда функции $\mu_1\varphi_1(u_1)$ и $\mu_2\varphi_2(u_2)$ являются интегрирующими множителями для первого и второго уравнений соответсвенно. Если удается подобрать функции φ_1 и φ_2 так, чтобы выполнялось равенство

$$\mu_1\varphi_1(u_1) = \mu_2\varphi_2(u_2),$$

то интегрирующим множителем для уравнения (5.22) является функция

$$\mu = \mu_1\varphi_1(u_1) = \mu_2\varphi_2(u_2).$$

Задача 5.10

Решить уравнение

$$(6x - 2y + 2y^2)dx + (8xy - 5y^2 - x)dy = 0$$

Решение

Разобъем левую часть уравнения на сумму двух слагаемых

$$((6x - 2y)dx - xdy) + ((8xy - 5y^2)dy + 2y^2dx) = 0$$

Для первого уравнения имеем $u_1(x, y) = 2x^3 - x^2y = C_1$, $\mu_1(x, y) = x$, так как

$$x((6x - 2y)dx - xdy) = (6x^2 - 2xy)dx - x^2dy = d(2x^3 - x^2y).$$

Для второго уравнения имеем

$$u_2(x, y) = 2y^4x - y^5 = C_2, \quad \mu_1(x, y) = y^2,$$

так как

$$y^2((8xy - 5y^2)dy + 2y^2dx) = (8xy^3 - 5y^4)dy + 2y^4dx = d(2y^4x - y^5).$$

Интегрирующий множитель для исходного уравнения ищем в виде

$$\mu = x\varphi_1(2x^3 - x^2y) = y^2\varphi_2(2y^4x - y^5).$$

Отсюда

$$\varphi_1(2x^3 - x^2y) = \frac{y^2}{x}\varphi_2(2y^4x - y^5).$$

Полагая $u = \dfrac{y^2}{x}$, получаем

$$\varphi_1\left(2\frac{y^6}{u^3} - \frac{y^5}{u^2}\right) = u\varphi_2\left(2\frac{y^6}{u} - y^5\right),$$

или

$$\varphi_1(\alpha) = u\varphi_2(u^2\alpha), \quad \text{где} \quad \alpha = 2\frac{y^6}{u^3} - \frac{y^5}{u^2}.$$

Путем подбора находим, что $\varphi_2(z) = \dfrac{1}{\sqrt{z}}$ ($z > 0$), тогда

$$\varphi_2(u^2\alpha) = \frac{1}{\sqrt{u^2\alpha}} = \frac{1}{u\sqrt{\alpha}} \quad (u > 0).$$

Следовательно,

$$\varphi_1(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}, \quad \mu(x, y) = \frac{x}{\sqrt{2x^3 - x^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{2x - y}},$$

где $2x > y$. Отметим, что если $2x < y$, то получаем

$$\mu(x, y) = \frac{1}{\sqrt{y - 2x}}.$$

Уравнение в полных дифференциалах имеет вид

$$\frac{6x - 2y + 2y^2}{\sqrt{2x - y}}dx + \frac{8xy - 5y^2 - x}{\sqrt{2x - y}}dy = 0,$$

где $2x > y$.

В обоих случаях после интегрирования уравнения в полных диффренциалах получаем окончательно

$$(2x - y)(x + y^2)^2 = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

6. ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ (ТСЕ) РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ $y' = f(x,y)$

Теорема 6.1 (ТСЕ решения уравнения $y' = f(x,y)$)

Пусть дано дифференциальное уравнение $y' = f(x,y)$, где функция $f(x,y)$ определена в прямоугольнике $D = \{(x,y):$ $x_0 - a \le x \le x_0 + a, \quad y_0 - b \le y \le y_0 + b\}$, содержащем точку (x_0, y_0). Если функция $f(x,y)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $f(x,y)$ есть непрерывная функция двух своих аргументов x и y в D;

2) $f(x,y)$ удовлетворяет в D условию Липшица по переменной y

$$|\, f(x, y_1) - f(x, y_2)\,| \le N \cdot |\, y_1 - y_2\,|,$$

где N – постоянная, то существует единственное решение $y = \varphi(x)$, $x_0 - H \le x \le x_0 + H$, данного уравнения, удовлетворяющее условию $y(x_0) = y_0$, где $H < \min\left(a, \dfrac{b}{M}, \dfrac{1}{N}\right)$, $M = \max\limits_{D} |f(x, y)|$.

Замечание 6.1

Условие Липшица может быть заменено более грубым, но зато обычно легко проверяемым условием существования ограниченной частной производной $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ в D, т.е. $\left|\dfrac{\partial f}{\partial y}\right| \le N_1$, где N_1 – постоянная.

Отметим, что если частная производная $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ существует и ограничена в D, то функция $f(x,y)$ автоматически удовлетворяет условию Липшица в этой области.

Замечание 6.2

Таким образом, теорема 6.1 даёт лишь достаточные условия. Однако эти условия не являются необходимыми, т.е. может существовать единственное решение уравнения $y' = f(x, y)$, удовлетворяющее условию $y(x_0) = y_0$, хотя в точке (x_0, y_0) нарушается условие 1) или 2).

Теорема 6.2 (ТСЕ решения уравнения $y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$, достаточные условия)

Существует единственное решение дифференциального уравнения n-го порядка $y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$, удовлетворяющее условиям

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y'_0, ..., y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},$$

если в окрестности начальных значений $(x_0, y_0, y'_0, ..., y_0^{(n-1)})$ функция f удовлетворяет условиям:

1) функция f является непрерывной функцией всех своих аргументов;

2) функция f удовлетворяет условию Липшица по всем аргументам, начиная со второго.

Замечание 6.3

Условие Липшица может быть заменено более грубым условием существования в окрестности начальных значений $(x_0, y_0, y'_0, ..., y_0^{(n-1)})$ ограниченных частных производных 1-го порядка функции f по всем аргументам, начиная со второго.

Рассмотрим несколько задач, в которых нарушается одно из достаточных условий теоремы 6.1 (ТСЕ решения уравнения $y' = f(x, y)$).

Задача 6.1

$$y' = \sqrt{y}, \quad y(0) = 0.$$

Решение

Функция $f(x, y) = \sqrt{y}$ непрерывна в области $D = \{(x, y):$ $-\infty < x < +\infty,\ \ y \geq 0\}$. Однако её частная производная $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{1}{2\sqrt{y}}$ не ограничена при $y \to 0+0$, т.е. условие 2) (здесь и далее с учётом замечания 6.1) теоремы 6.1 не выполнено. Поэтому единственность решения задачи Коши не гарантируется. Оказывается, что рассматриваемая задача Коши имеет два решения: $y_1(x)=0$, $y_2(x)=\dfrac{x^2}{4}$.

Задача 6.2

$$y' = 3\cdot\sqrt[3]{y^2}, \quad y(0)=0.$$

Решение

Функция $f(x, y) = 3\cdot\sqrt[3]{y^2}$ непрерывна на всей плоскости Oxy. Однако её частная производная $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{2}{\sqrt[3]{y}}$ не ограничена при $y \to 0$, т.е. условие 2) теоремы 6.1 не выполнено. Единственность решения задачи Коши нарушена. Рассматриваемая задача Коши имеет два решения: $y_1(x)=0$, $y_2(x)=x^3$.

Задача 6.3

Показать, что условия 1) и 2) теоремы 6.1 являются достаточными, но не являются необходимыми для уравнения $y' = |y|$.

Решение

Данное уравнение имеет единственное решение $y=0$ в каждой точке на оси Ox, т.е. через каждую точку $(x, 0)$ проходит единственная интегральная прямая $y=0$. Однако условие 2) не выполняется, так как $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ не существует при $y=0$ (на оси Ox).

Задача 6.4

Пользуясь каким-либо достаточным условием ТСЕ решения уравнения $y' = f(x, y)$, выделить области на плоскости Oxy, в которых через каждую точку проходит единственное решение:

а) $y' = 2xy + y^2$;

б) $y' = 2 + \sqrt[3]{y-2x}$;

в) $y' = 1 + \operatorname{tg} y$.

Решение

а) Функция $f(x, y) = 2xy + y^2$ непрерывна на всей плоскости Oxy, её частная производная $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2(x + y)$ также непрерывна и, значит, ограничена в окрестности любой точки на плоскости Oxy. Следовательно, по теореме 6.1 через каждую точку (x_0, y_0) проходит единственная интегральная кривая уравнения $y' = 2xy + y^2$.

б) Функция $f(x, y) = 2 + \sqrt[3]{y - 2x}$ непрерывна на всей плоскости Oxy, а её частная производная $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{(y - 2x)^2}}$ ограничена в окрестности любой точки, не лежащей на прямой $y = 2x$. Следовательно, по теореме 6.1 через каждую точку (x_0, y_0) плоскости Oxy, где $y_0 \neq 2x_0$, проходит единственная интегральная кривая уравнения $y' = 2 + \sqrt[3]{y - 2x}$.

в) Функция $f(x, y) = 1 + \operatorname{tg} y$ непрерывна и имеет ограниченную производную $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{1}{\cos^2 y}$ в окрестности любой точки, не лежащей на прямых $y = \dfrac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Следовательно, по теореме 6.1 через каждую точку (x_0, y_0) плоскости Oxy, за исключением точек на прямых $y = \dfrac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, проходит единственная интегральная кривая уравнения $y' = 1 + \operatorname{tg} y$.

Задача 6.5

При каких начальных условиях существует единственное решение следующих уравнений:

а) $y'' = \operatorname{tg} y + \sqrt[3]{x}$;

б) $(x + 1)y'' = y + \sqrt{y}$;

в) $y'' - y \cdot y''' = \sqrt[5]{y' - x}$?

Решение

а) Функция $f(x, y, y') = \operatorname{tg} y + \sqrt[3]{x}$ и её частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{1}{\cos^2 y}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y'} = 0$ непрерывны при $y \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Следовательно, по теореме 6.2 (здесь и далее с учётом замечания 6.3) в окрестности каждой точки (x_0, y_0, y_0'), где $y_0 \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, существует единственная интегральная кривая, проходящая через эту точку.

б) Функция $f(x, y, y') = \dfrac{y + \sqrt{y}}{x+1}$ и её частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{2\sqrt{y}(x+1)}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y'} = 0$ непрерывны при $x \neq 1$ и $y > 0$. Следовательно, по теореме 6.2 через каждую точку (x_0, y_0, y_0'), где $x_0 \neq -1$ и $y_0 > 0$, проходит единственная интегральная кривая.

в) Функция $f(x, y, y', y'') = \dfrac{1}{y}\left(y'' - \sqrt[5]{y' - x}\right)$ вместе с частными производными $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -\dfrac{1}{y^2}\left(y'' - \sqrt[5]{y' - x}\right)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y'} = -\dfrac{1}{5y \cdot \sqrt[5]{(y'-x)^4}}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y''} = \dfrac{1}{y}$ непрерывна при $y \neq 0$ и $y' \neq x$. Следовательно, по теореме 6.2 через каждую точку (x_0, y_0, y_0', y_0''), где $y_0 \neq 0$ и $y_0' \neq x_0$, проходит единственная интегральная кривая уравнения $y''' = \dfrac{1}{y}\left(y'' - \sqrt[5]{y' - x}\right)$.

Задача 6.6

Могут ли графики двух решений данного уравнения на плоскости Oxy пересекаться в некоторой точке (x_0, y_0) для уравнения:

а) $y' = x + y^2$;

б) $y'' = x + y^2$?

Решение

а) Функция $f(x, y) = x + y^2$ непрерывна на всей плоскости Oxy, её частная производная $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2y$ ограничена в окрестности любой точки плоскости Oxy. Следовательно, по теореме 6.1 через каждую точку (x_0, y_0) проходит единственная интегральная кривая уравнения $y' = x + y^2$, т.е. пересечение графиков двух его решений в этой точке (x_0, y_0) невозможно.

б) Функция $f(x, y, y') = x + y^2$ и её частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2y$, $\dfrac{\partial f}{\partial y'} = 0$ непрерывны. Поэтому по теореме 6.2 через каждую точку $(x_0, y_0, y'_\mathbf{0})$ пространства проходит единственная интегральная кривая. Последнее, однако, не исключает того, что через точку (x_0, y_0) плоскости проходят две разные интегральные кривые с различными угловыми коэффициентами y'_0 касательных к ним, т.е. пересечение графиков двух решений в некоторой точке (x_0, y_0) возможно. Более того, отметим, что через точку (x_0, y_0) проходит бесконечно много графиков с различными угловыми коэффициентами y'_0.

Задача 6.7

Сколько существует решений уравнения $y^{(n)} = x + y^2$, удовлетворяющих одновременно двум условиям: $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$? Рассмотреть отдельно случаи n = 1, 2, 3.

Решение

а) При n = 1 имеем уравнение $y' = x + y^2$. Запишем

$$y'(0) = (x + y^2)\Big|_{x=0} = y^2(0) = 1 \neq 2.$$

Следовательно, данное уравнение не имеет ни одного решения с указанными начальными условиями.

б) При $n = 2$ имеем уравнение $y'' = x + y^2$. Функция $f(x, y, y') = x + y^2$ и её частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2y$, $\dfrac{\partial f}{\partial y'} = 0$ непрерывны в окрестности точки $(x_0, y_0, y_0') = (0, 1, 2)$. Согласно теореме 6.2 задача $y'' = x + y^2$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$ имеет единственное решение в окрестности точки (0, 1, 2).

в) При $n = 3$ имеем уравнение $y''' = x + y^2$. Согласно теореме 6.2 задача $y''' = x + y^2$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$, $y''(0)$ – произвольно, имеет единственное решение в окрестности точки $(0, 1, 2, y''(0))$. Следовательно, в окрестности точки (0, 1, 2) имеется бесконечно много решений задачи

$$y''' = x + y^2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$$

В следующей задаче применение неравносильного преобразования (возведение в квадрат) приводит к неверному заключению о нарушении единственности решения соответствующей задачи Коши.

Задача 6.8

Решить уравнение

$$y' - \frac{4}{x} y = x\sqrt{y}. \tag{6.1}$$

Решение

Это уравнение Бернулли, здесь $n = \frac{1}{2}$ (см. разд. 4). Очевидно, что $y \ge 0$, $x \ne 0$. Кроме того, $y = 0$ – решение уравнения Бернулли (при $n > 0$). Таким образом, достаточно рассмотреть решения уравнения (6.1) в 1-м ($x > 0$, $y > 0$) и 2-м ($x < 0$, $y > 0$) квадрантах плоскости *Oxy*, т.е. $D = \{(x, y): \ x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty), \ y \in (0, +\infty)\}$.

Уравнение можно переписать в виде

$$y' = \frac{4}{x} y + x\sqrt{y}. \tag{6.2}$$

Функции $f(x, y) = \frac{4}{x} y + x\sqrt{y}$ и $f_y'(x, y) = \frac{4}{x} + \frac{x}{2\sqrt{y}}$ непрерывны в указанных квадрантах, поэтому в них в соответствии с теоремой 6.1 (с учётом замечания 6.1) имеет место существование и единственность решения задачи Коши, т.е. через каждую точку

$(x_0, y_0) \in D$ проходит единственная интегральная кривая уравнения (6.1).

При решении уравнения (6.1) делим обе его части на $\sqrt{y}$ и делаем замену $z(x) = \sqrt{y}$, $z'_x = \dfrac{y'_x}{2\sqrt{y}}$. Получаем

$$\frac{y'}{\sqrt{y}} - \frac{4\sqrt{y}}{x} = x,$$

или

$$z' - \frac{2z}{x} = \frac{x}{2}.$$

Полученное линейное уравнение решаем методом Бернулли. Пусть $z = uv$, $z' = u'v + uv'$. Тогда

$$u'v + uv' - \frac{2}{x}uv = \frac{x}{2}, \quad u'v + u\left(v' - \frac{2}{x}v\right) = \frac{x}{2}.$$

Решая $v' - \dfrac{2}{x}v = 0$, $\dfrac{dv}{v} = \dfrac{2}{x}dx$, принимаем, что $v = x^2$. Тогда

$$u'x^2 = \frac{x}{2}, \quad du = \frac{dx}{2x}, \quad u = \frac{1}{2}\ln|x| + \frac{1}{2}\ln|C_1|, \quad u = \frac{1}{2}\ln|C_1 x|.$$

Имеем

$$z = uv = \frac{1}{2}x^2 \ln|C_1 x|,$$

или

$$\sqrt{y} = \frac{1}{2}x^2 \ln|C_1 x|.$$

Поскольку $\sqrt{y} > 0$ и $x \neq 0$, то из полученного решения следует, что $\ln|C_1 x| > 0$, т.е. $|x| > \dfrac{1}{|C_1|}$.

Итак,

$$y = \frac{1}{4}x^4 \ln^2|C_1 x|, \quad |x| > \frac{1}{|C_1|}. \qquad (6.3)$$

Отметим, что решение $y=0$ является особым, т.е. на оси Ox нарушается единственность решения (см. разд. 7).

Картина интегральных кривых представлена на рис. 1, *а* ($|C_1|<|C_2|$).

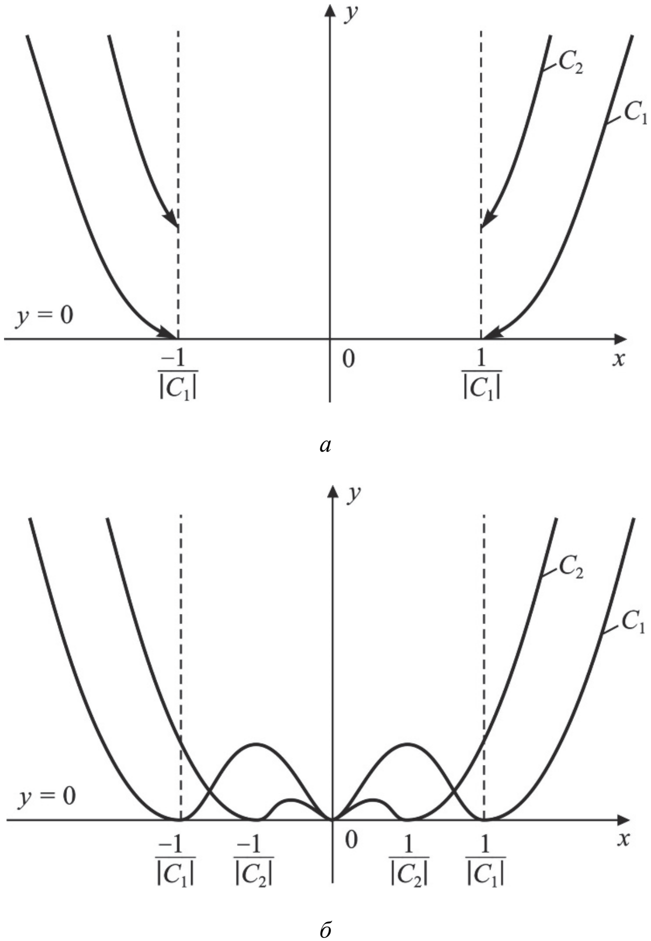

Рис. 1

Если же в полученном решении (6.3) не учитывать условие $|x| > \dfrac{1}{|C_1|}$, то функция $y = \dfrac{1}{4}x^4 \ln^2 |C_1 x|$ оказывается определённой на всей оси Ox, и её график имеет вид, показанный на рис. 1, *б* ($|C_1| < |C_2|$). Очевидно, что тогда будет нарушена единственность решения задачи Коши уравнения (6.1) в вертикальной полуполосе

$$H = \left\{ (x, y): \ x \in \left[-\frac{1}{|C_1|}, \frac{1}{|C_1|} \right], \ y \in (0, +\infty) \right\},$$

лежащей в 1-м и 2-м квадрантах. Ошибочность рис. 1, *б* следует из того, что в уравнении (6.2) при $x > 0$, $y > 0$ производная $y' > 0$, поэтому $y(x)$ возрастает для положительных значений x (1-й квадрант). Если же $x < 0$, $y > 0$, то производная $y' < 0$, поэтому $y(x)$ убывает для отрицательных значений x (2-й квадрант).

7. УРАВНЕНИЯ, НЕ РАЗРЕШЁННЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНОЙ. УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА И КЛЕРО. ОСОБЫЕ РЕШЕНИЯ

7.1. Уравнения, не разрешённые относительно производной. Особые решения

Теорема 7.1 (ТСЕ решения уравнения $F(x, y, y') = 0,$ не разрешённого относительно производной)

Существует единственное решение $y = y(x),\ \ x_0 - h_0 \le x \le x_0 + h_0,$ где h_0 достаточно мало, уравнения $F(x, y, y') = 0,$ удовлетворяющее условию $y(x_0) = y_0,$ для которого $y'(x_0) = y'_0,$ где y'_0 – один из действительных корней уравнения $F(x, y, y') = 0,$ если в замкнутой окрестности точки (x_0, y_0, y'_0) функция $F(x, y, y')$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $F(x, y, y')$ непрерывна по всем аргументам;

2) производная $\dfrac{\partial F}{\partial y'}$ существует и отлична от нуля;

3) существует и ограничена производная $\dfrac{\partial F}{\partial y}$: $\left|\dfrac{\partial F}{\partial y}\right| \le N_1,$ где N_1 – постоянная.

Замечание 7.1

Множество точек $(x, y),$ в которых нарушается единственность решения уравнения $F(x, y, y') = 0,$ называется *особым множеством*. В точках особого множества должно быть нарушено, по крайней мере, одно из условий последней теоремы. Как правило, условия 1) и 3) выполняются, а условие 2) нарушено, и тогда в случае существования $\dfrac{\partial F}{\partial y'}$ в точках особого множества должны одновременно выполняться уравнения $F(x, y, y') = 0,\ \dfrac{\partial F(x, y, y')}{\partial y'} = 0.$ Исключая y', получим уравнение $\Psi(x, y) = 0$, называемое *p-дискриминантной кривой*. Если какая-нибудь ветвь $y = \psi(x)$ кривой $\Psi(x, y) = 0$ принадлежит особому множеству и в то же время является интегральной кривой, то она называется *особой интегральной кривой*, а функция $y = \psi(x)$ – *особым решением*.

Замечание 7.2

Для нахождения особого решения уравнения $F(x, y, y') = 0$ необходимо:

а) найти p-дискриминантную кривую, определяемую уравнениями $F(x, y, p) = 0,\ \dfrac{\partial F}{\partial p} = 0,$ где $y' = p$;

б) выяснить путём непосредственной подстановки в уравнение $F(x, y, y') = 0$, есть ли среди ветвей p-дискриминантной кривой интегральные кривые;

в) если такие кривые есть, то ещё проверить, нарушена ли в точках этих кривых единственность решения, и если единственность нарушена, то такая ветвь p-дискриминантной кривой является особой интегральной кривой.

Замечание 7.3

Нарушение единственности решения означает, что две интегральные кривые $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$ проходят через одну точку (x_0, y_0) и в этой точке имеют общую касательную, т.е.

$$\begin{cases} y_1(x_0) = y_2(x_0); \\ y_1'(x_0) = y_2'(x_0). \end{cases} \tag{7.1}$$

Определение 7.1

Кривая, которая касается каждой кривой семейства интегральных кривых $\Phi(x, y, C) = 0$ уравнения $F(x, y, y') = 0$ и притом вся состоит из точек касания, называется *огибающей данного семейства интегральных кривых*.

Теорема 7.2 (необходимое условие)

Пусть $\Phi(x, y, C) = 0$ является семейством интегральных кривых уравнения $F(x, y, y') = 0$, причём

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 \neq 0 .$$

Если указанное семейство $\Phi(x, y, C) = 0$ имеет огибающую, то эта огибающая является особой интегральной кривой. При этом все точки, лежащие на данной огибающей, удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} \Phi(x, y, C) = 0; \\ \dfrac{\partial \Phi(x, y, C)}{\partial C} = 0. \end{cases} \tag{7.2}$$

Замечание 7.4

Теорема 7.2 утверждает, что если семейство интегральных кривых $\Phi(x, y, C) = 0$ уравнения $F(x, y, y') = 0$ имеет огибающую, то любая её точка удовлетворяет системе уравнений (7.2). Обратное неверно, т.е. определяемая системой уравнений (7.2) кривая может и не быть огибающей.

Приведём соответствующий пример.

Пример 7.1

Уравнение $y'^2 = x$ имеет семейство интегральных кривых $\Phi(x, y, C) = (y - C)^2 - \frac{4}{9}x^3 = 0$ (это семейство полукубических парабол). Имеем $\frac{\partial \Phi}{\partial C} = 2(y - C),$ так что из системы (7.2) находим $x = 0.$ Эта прямая $x = 0$ не является огибающей полученного семейства интегральных кривых, а вся состоит из точек возврата кривых данного семейства (рис. 2, где 1: $(y-1)^2-\dfrac{4}{9}x^3=0,\quad C=1;$ 2: $y^2-\dfrac{4}{9}x^3=0,\ C=0;$ 3: $(y+1)^2-\dfrac{4}{9}x^3=0,\ C=-1$).

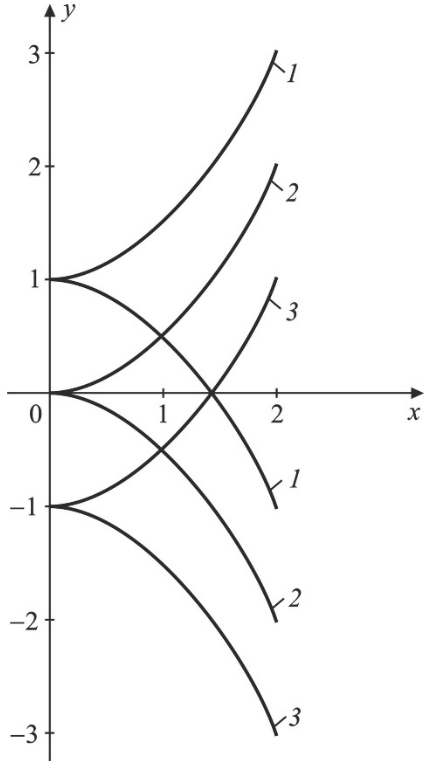

Рис. 2

Рассмотрим некоторые способы решения дифференциального уравнения 1-го порядка $F(x, y, y')=0$, не разрешённого относительно производной.

1. Уравнения разрешить относительно y' и далее решать с помощью рассмотренных ранее методов.

Задача 7.1

Решить уравнение

$$y'^2 - 4y^3 = 0.$$

Решение

Запишем $y'^2 = 4y^3$, $y' = \pm 2\sqrt{y^3}$. Отметим, что $y = 0$ является решением обоих уравнений, поэтому из теоремы 6.1 вытекает, что другие решения нигде не обращаются в нуль. Далее,

$$\frac{dy}{\sqrt{y^3}} = \pm 2\,dx, \quad \int \frac{dy}{\sqrt{y^3}} = \pm 2 \int dx,$$

$$-\frac{2}{\sqrt{y}} = \pm 2x + C_1, \quad \frac{1}{\sqrt{y}} = \pm x \pm C, \quad y = \frac{1}{(\pm x \pm C)^2} = \frac{1}{(x+C)^2}.$$

Получаем окончательно

$$y(x+C)^2 = 1, \quad y = 0, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Задача 7.2

Решить уравнение

$$y'^3 + y^2 = yy'(y'+1).$$

Решение

Запишем

$$y'^3 + y^2 - yy'^2 - yy' = 0, \quad \text{или} \quad (y'^2 - y)(y' - y) = 0.$$

Отсюда

$$\left[\begin{array}{l} y'^2 - y = 0; \\ y' - y = 0. \end{array}\right.$$

а) $y'^2 - y = 0$, $y' = \pm\sqrt{y}$, $\dfrac{dy}{\pm\sqrt{y}} = dx$, $\pm\displaystyle\int \frac{dy}{\sqrt{y}} = \int dx$, $\pm\sqrt{y} = \dfrac{1}{2}(x + C_1)$, $4y = (x+C_1)^2$, $y = 0$;

б) $y' - y = 0$, $\dfrac{dy}{y} = dx$, $\displaystyle\int \frac{dy}{y} = \int dx$, $\ln|y| = x + \tilde{C}_1$, $|y| = e^{x+\tilde{C}_1}$, или $y = C_2 e^x$, $y = 0$, где $C_2 = \pm e^{\tilde{C}_1}$.

Окончательно,

$$4y=(x+C_1)^2, \quad y=C_2e^x; \quad y=0; \quad C_1\in\mathbb{R}, \quad C_2\neq 0,$$

$$\text{или} \quad 4y=(x+C_1)^2, \quad y=C_2e^x; \quad C_1, C_2\in\mathbb{R}.$$

Задача 7.3

Решить уравнение

$$y'^2+xy=y^2+xy'.$$

Решение

Запишем

$$y'^2-xy'+(xy-y^2)=0.$$

Решаем данное квадратное уравнение относительно y', получаем

$$y'_{1,2}=\frac{x\pm\sqrt{x^2-4(xy-y^2)}}{2}=\frac{x\pm(x-2y)}{2}.$$

Имеем два случая:

а) $y'=\dfrac{x-(x-2y)}{2}=y$, т.е. $y'=y$, отсюда $y=C_2e^x$ (см. случай б) задачи 7.2);

б) $y'=\dfrac{x+(x-2y)}{2}=x-y$, т.е. $y'+y=x$ – линейное уравнение.

Решаем методом Бернулли.

Полагаем $y(x)=u(x)\cdot v(x)$, тогда $y'=u'v+uv'$, подставляем в линейное уравнение $u'v+uv'+uv=x$, $u'v+u(v'+v)=x$. Решая уравнение $v'+v=0$, принимаем, что $v(x)=e^{-x}$. Тогда

$$u'e^{-x}=x, \quad u'=xe^x, \quad u(x)=\int xe^x\,dx=e^x(x-1)+C_1.$$

Получаем

$$y(x)=u(x)v(x)=C_1e^{-x}+x-1.$$

Окончательно,

$$y=C_1e^{-x}+x-1, \quad y=C_2e^x; \quad C_1, C_2\in\mathbb{R}.$$

Задача 7.4

Решить уравнение

$$y^2(1+y'^2)=1.$$

Имеет ли это уравнение особое решение?

Решение

Разделим обе части уравнение на y^2.

1. $y^2=0$, $y=0$, подставляем в исходное уравнение, получаем, что $y=0$ не является решением.

2. $y^2\neq 0$, тогда

$$1+y'^2=\frac{1}{y^2},\quad y'^2=\frac{1-y^2}{y^2},\quad y'=\pm\frac{\sqrt{1-y^2}}{y}.$$

Полученное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Для разделения переменных обе части уравнения делим на $\pm\sqrt{1-y^2}$.

3. $1-y^2=0$, $y=\pm 1$, подставляем в исходное уравнение, получаем, что $y=\pm 1$ – решения.

4. $1-y^2\neq 0$, тогда

$$\pm\frac{y\,dy}{\sqrt{1-y^2}}=dx,\quad \mp\frac{1}{2}\int\frac{d\,(1-y^2)}{\sqrt{1-y^2}}=\int dx,$$

$$\mp\sqrt{1-y^2}=x-C,\quad 1-y^2=(x-C)^2,$$

т.е. $(x-C)^2+y^2=1$ – семейство окружностей радиуса 1, у которых центры лежат на оси Ox.

Окончательно,

$$(x-C)^2+y^2=1,\quad y=\pm 1;\quad C\in\mathbb{R}.$$

Выясним, являются ли решения $y=\pm 1$ особыми (в соответствии с замечанием 7.2).

а)

$$\begin{cases} F(x,y,y')=y^2(1+y'^2)-1=0;\\ \dfrac{\partial F(x,y,y')}{\partial y'}=2y^2y'=0; \end{cases}\qquad \begin{cases} y^2(1+y'^2)-1=0;\\ y^2y'=0, \end{cases}$$

получаем $y^2-1=0$, $y=\pm 1$ – две ветви p-дискриминантной кривой.

б) Подставляем в исходное уравнение, получаем, что $y=\pm 1$ – решения (интегральные прямые).

в) Проверим нарушение условий единственности решения.

Имеем

$$\begin{cases} y_1(x_0) = y_2(x_0); \\ y_1'(x_0) = y_2'(x_0), \end{cases}$$

где $y_1(x) = \pm\sqrt{1-(x-C)^2}$ – общее решение исходного уравнения; $y_2(x) = \pm 1$ – «кандидаты» в особое решение.

1) Для решения $y_2(x) = 1$ имеем

$$\begin{cases} \pm\sqrt{1-(x_0-C)^2} = 1; & (7.3) \\ \mp\dfrac{x_0 - C}{\sqrt{1-(x_0-C)^2}} = 0. & (7.4) \end{cases}$$

Из уравнения (7.4) $C = x_0$. Подставляя в (7.3), получаем, что $\pm 1 = 1$, т.е. $y(x) = 1$ является особым решением для верхних полуокружностей $y = \sqrt{1-(x-C)^2}$.

2) Для решения $y_2(x) = -1$ имеем

$$\begin{cases} \pm\sqrt{1-(x_0-C)^2} = -1; \\ \mp\dfrac{x_0 - C}{\sqrt{1-(x_0-C)^2}} = 0. \end{cases}$$

Решая аналогично данную систему уравнений, получаем, что $\pm 1 = -1$, т.е. $y(x) = -1$ является особым решением для нижних полуокружностей $y = -\sqrt{1-(x-C)^2}$.

Таким образом, прямые $y(x) = -1$ и $y(x) = 1$ являются общими касательными (огибающими) семейства окружностей $(x-C)^2 + y^2 = 1;$ $C \in \mathbb{R}$ (рис. 3).

Используем теперь теорему 7.2, чтобы убедиться в том, что точки огибающих $y(x) = -1$ и $y(x) = 1$ удовлетворяют системе уравнений (7.2).

Исходное уравнение $F(x, y, y') = y^2(1 + y'^2) - 1 = 0$ имеет семейство интегральных кривых $\Phi(x, y, C) = (x - C)^2 + y^2 - 1 = 0$. Тогда $\dfrac{\partial\Phi}{\partial x} = 2(x - C)$, $\dfrac{\partial\Phi}{\partial y} = 2y$, $\dfrac{\partial\Phi}{\partial C} = -2(x - C)$.

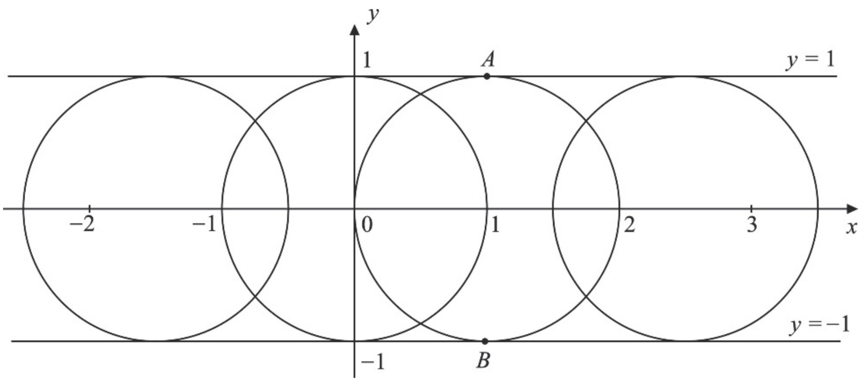

Рис. 3

Возьмём две точки $A(1, 1)$ и $B(1, -1)$, лежащие на окружности $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ и на соответствующих огибающих (см. рис. 3).

а) В точке $A(1, 1)$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = 2(1 - C), \quad \frac{\partial\Phi}{\partial y} = 2, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial C} = -2(1 - C),$$

тогда

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2 = 4(1 - C)^2 + 4 \neq 0,$$

$$\Phi(x, y, C) = (1 - C)^2 + 1^2 - 1 = (1 - C)^2 = 0,$$

т.е. $C = 1$, откуда

$$\frac{\partial\Phi(x, y, C)}{\partial C} = -2(1 - C) = 0.$$

Таким образом, в точке $A(1, 1)$ справедлива система уравнений (7.2).

б) В точке $B(1,-1)$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}=2(1-C),\quad \frac{\partial\Phi}{\partial y}=-2,\quad \frac{\partial\Phi}{\partial C}=-2(1-C),$$

тогда

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2=4(1-C)^2+4\neq 0,$$

$$\Phi(x,y,C)=(1-C)^2+(-1)^2-1=(1-C)^2=0,$$

т.е. $C=1$, откуда

$$\frac{\partial\Phi(x,y,C)}{\partial C}=-2(1-C)=0.$$

Таким образом, в точке $B(1,-1)$ справедлива система уравнений (7.2).

Следует отметить, что полученные особые решения $y(x)=-1$ и $y(x)=1$ исходного дифференциального уравнения ни при каких значениях C не принадлежат семейству интегральных кривых $(x-C)^2+y^2=1$, $C\in\mathbb{R}$.

Однако в общем случае это утверждение неверно. Рассмотрим следующий пример.

Пример 7.2

На всей плоскости Oxy дано семейство интегральных кривых

$$\Phi(x,y,C)=y-C^3x^2+2C^2x-C=0$$

некоторого дифференциального уравнения 1-го порядка. Уравнение этого семейства при $C\neq 0$ можно записать в следующем виде

$$y=C^3\left(x-\frac{1}{C}\right)^2.$$

Оно определяет семейство парабол, оси которых параллельны оси Oy, а вершины находятся на оси Ox. Очевидно, что для них $y=0$ является особым решением (огибающей) и в то же время принадлежит самому рассматриваемому семейству: особое решение получается из уравнения этого семейства при $C=0$.

2. Если исходное уравнение $F(x,y,y')=0$ можно разрешить относительно y, т.е. записать в виде $y=f(x,y')$, то вводя параметр

$p = y'$, получим $y = f(x, p)$. Взяв полный дифференциал от обеих частей последнего равенства (считаем, что $dy = p\,dx$), получаем уравнение вида

$$M(x, p)\,dx + N(x, p)\,dp = 0.$$

Если решение этого уравнения имеет вид $x = \varphi(p, C)$, то решение исходного уравнения запишется в параметрической форме $x = \varphi(p, C)$, $y = f(\varphi(p, C), p) = \psi(p, C)$.

Отметим, что уравнения вида $x = f(y, y')$ решаются тем же методом.

Задача 7.5

Решить уравнение

$$x = y'^2 - 2y' + 2.$$

Решение

Имеем уравнение вида $x = f(y, y')$. Вводим параметр $p = y'$, тогда

$$x(p) = p^2 - 2p + 2, \quad dy = p\,dx = p(2p-2)\,dp = 2p(p-1)\,dp,$$

$$y = 2\int p(p-1)\,dp = \frac{2}{3}p^3 - p^2 + C.$$

Окончательно,

$$x(p) = p^2 - 2p + 2, \quad y(p) = \frac{2}{3}p^3 - p^2 + C; \quad C \in \mathbb{R}.$$

Проверка

$$y'_x = \frac{y'_p}{x'_p} = \frac{2p^2 - 2p}{2p - 2} = \frac{p(p-1)}{p-1} = p,$$

тогда

$$y'^2 - 2y' + 2 = p^2 - 2p + 2 \equiv x.$$

Задача 7.6

Решить уравнение

$$y = \ln(1 + y'^2).$$

Решение

Уравнение вида $y = f(x, y')$. Вводим параметр $p = y'$, тогда $y(p) = \ln(1 + p^2)$, $dy = p\,dx = \dfrac{2p\,dp}{1 + p^2}$, откуда или $p = 0$, или

$$dx = \frac{2\,dp}{1 + p^2}, \quad x = 2\int \frac{dp}{1 + p^2} = 2\,\mathrm{arctg}\,p + C.$$

Окончательно,

$$x(p) = 2\,\mathrm{arctg}\,p + C, \quad y(p) = \ln(1 + p^2); \quad y = 0; \quad C \in \mathbb{R}.$$

7.2. Уравнение Лагранжа

Определение 7.2

Уравнение вида

$$y = xf(y') + \varphi(y') \tag{7.5}$$

называется *уравнением Лагранжа*.

Введём параметр $p = y'$, тогда $y = xf(p) + \varphi(p)$. Дифференцируя по x, получаем

$$\frac{dy}{dx} = p = f(p) + xf'(p)\frac{dp}{dx} + \varphi'(p)\frac{dp}{dx},$$

или

$$p - f(p) = (xf'(p) + \varphi'(p))\frac{dp}{dx}. \tag{7.6}$$

Рассмотрим два случая.

1. $\dfrac{dp}{dx} = 0$, т.е. $p = C$, подставляем в уравнение (7.6), получаем, что $p - f(p) = 0$.

2. $\dfrac{dp}{dx} \neq 0$, тогда

$$(p - f(p))\frac{dx}{dp} = xf'(p) + \varphi'(p).$$

Получили линейное уравнение 1-го порядка относительно функции $x(p)$.

Если решение этого уравнения имеет вид $x = \varphi(p, C)$, то

$$y = xf(p) + \varphi(p) = \varphi(p, C) \cdot f(p) + \varphi(p) = \psi(p, C),$$

т.е. получаем общее решение уравнения Лагранжа в параметрической форме.

Если уравнение $p - f(p) = 0$ имеет действительные корни $p = p_i$, то к общему решению необходимо добавить функции $y = xf(p_i) + \varphi(p_i)$, графиками которых являются прямые линии.

Теорема 7.3 (необходимое условие)

Если уравнение Лагранжа (7.5) имеет особое решение, то оно определяется по формуле $y = xf(p_i) + \varphi(p_i)$, где p_i – корень уравнения $f(p) = p$.

Задача 7.7

Имеет ли уравнение Лагранжа

$$y = 2xy' - y'^2 \tag{7.7}$$

особое решение?

Решение

Имеем

$$F(x, y, y') = y - 2xy' + y'^2 = 0.$$

Проверим выполнение условий 1)–3) теоремы 7.1. Условие 1) выполняется, так как функция $F(x, y, y')$ непрерывна по всем аргументам. Условие 3) выполняется, так как частная производная $\dfrac{\partial F}{\partial y} = 1$ ограничена. Согласно замечанию 7.1 из условий $F(x, y, p) = 0,\ \dfrac{\partial F}{\partial p} = 0,\ p = y'$ определяем p-дискриминантную кривую

$$\begin{cases} y = 2xp - p^2; \\ -2x + 2p = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2xp - p^2; \\ p = x. \end{cases}$$

Исключая p, получаем $y = x^2$. Подставляя в исходное уравнение, находим, что $y = x^2$ не является решением. Таким образом, данное уравнение Лагранжа не имеет особого решения.

Замечание 7.5

Указанное в теореме 7.3 необходимое условие не является достаточным. В самом деле из соотношения $f(p)=p$ для уравнения (7.7) получаем, что $2p=p$, т.е. $p=y'=0$, или $y=0$ ($y=C$, $C\neq 0$ не является решением уравнения (7.7)). Для данного уравнения Лагранжа $y=0$ является частным решением, так как это уравнение не имеет особого решения.

Задача 7.8

Решить уравнение Лагранжа

$$y=xy'^2+y'^2.$$

Решение

Полагаем $y'=p$, тогда $y(p)=xp^2+p^2$. Дифференцируя последнее равенство по x, имеем

$$y'=p=p^2+2xp\,\frac{dp}{dx}+2p\,\frac{dp}{dx}.$$

Общее решение уравнения Лагранжа находится из системы уравнений

$$\begin{cases} y=xp^2+p^2; & (7.8)\\ p=2p(x+1)\,\dfrac{dp}{dx}+p^2. & (7.9)\end{cases}$$

Решаем уравнение (7.9)

$$\frac{dx}{dp}=\frac{2p(x+1)}{p-p^2}=\frac{2(x+1)}{1-p}, \quad \text{или} \quad x'_p-\frac{2}{1-p}x=\frac{2}{1-p}.$$

Полученное линейное уравнение проще решать как уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{dx}{x+1}=\frac{2\,dp}{1-p}, \quad \int\frac{dx}{x+1}=-2\int\frac{d\,(1-p)}{1-p}, \quad \ln|x+1|=-2\ln|1-p|+C_1,$$

$$\ln\left(|x+1|\cdot(1-p)^2\right)=C_1, \quad (x+1)(1-p)^2=\pm e^{C_1}=C_2, \quad x+1=\frac{C_2}{(1-p)^2},$$

т.е. $x(p)=\dfrac{C_2}{(1-p)^2}-1$. Последнюю формулу подставим в уравнение (7.8) и получим $y(p)=xp^2+p^2=\dfrac{C_2p^2}{(1-p)^2}$. Данные формулы определяют общее решение уравнения Лагранжа в параметрической форме.

Рассмотрим интегральные кривые исходного уравнения в области $D=\{(x,y):\ x\in[-1,+\infty),\ y\in[0,+\infty)\}$. В таком случае, исключая параметр *p*, получим $y=\left(\sqrt{x+1}+C\right)^2$, при этом $C=\pm\sqrt{C_2}$, $C_2\ge 0$.

Особым решениям (если они существуют) отвечают какие-то корни уравнения $f(p)=p^2=p$, т.е. $p(p-1)=0$, $p_1=0$, $p_2=1$.

Если $p_1=0$, то $y_1=xp_1^2+p_1^2=0$; если $p_2=1$, то $y_2=xp_2^2+p_2^2=x+1$.

Проверим, являются ли эти функции решениями исходного уравнения. Подставляя по очереди $y_1=0$, $y_2=x+1$, убеждаемся, что они являются решениями.

Проверим, являются ли эти решения особыми. Для этого должны выполняться условия (7.1) нарушения единственности решения

$$\begin{cases} y_1(x_0)=y_2(x_0);\\ y_1'(x_0)=y_2'(x_0),\end{cases}$$

где $y_1(x)=\left(\sqrt{x+1}+C\right)^2$ – общее решение (в области *D*) уравнения Лагранжа, $y_2(x)=0$ или $y_2(x)=x+1$ – «кандидаты» в особое решение.

1) Для решения $y_2(x)=0$ имеем

$$\begin{cases} \left(\sqrt{x_0+1}+C\right)^2=0; & (7.10)\\ 2\left(\sqrt{x_0+1}+C\right)\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x_0+1}}=0. & (7.11)\end{cases}$$

Из уравнения (7.10) следует, что $C=-\sqrt{x_0+1}$, $C\le 0$. Подставляя в уравнение (7.11), получаем $0\equiv 0$. Таким образом, $\forall\, x_0\ge -1$ решение $y=0$ касается другого решения $y=\left(\sqrt{x+1}+C\right)^2$, не совпадая с ним в сколь угодно малой окрестности точки (x_0,y_0). Значит, $y=0$ – особое решение.

2) Для решения $y_2(x) = x + 1$ имеем

$$\begin{cases} \left(\sqrt{x_0 + 1} + C\right)^2 = x_0 + 1; & (7.12) \\ 2\left(\sqrt{x_0 + 1} + C\right) \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x_0 + 1}} = 1. & (7.13) \end{cases}$$

Из уравнения (7.13) следует, что $\sqrt{x_0 + 1} + C = \sqrt{x_0 + 1}$, т.е. $C = 0$. Подставляя в уравнение (7.12), получаем

$$\left(\sqrt{x_0 + 1} + 0\right)^2 = \left(\sqrt{x_0 + 1}\right)^2 = x_0 + 1.$$

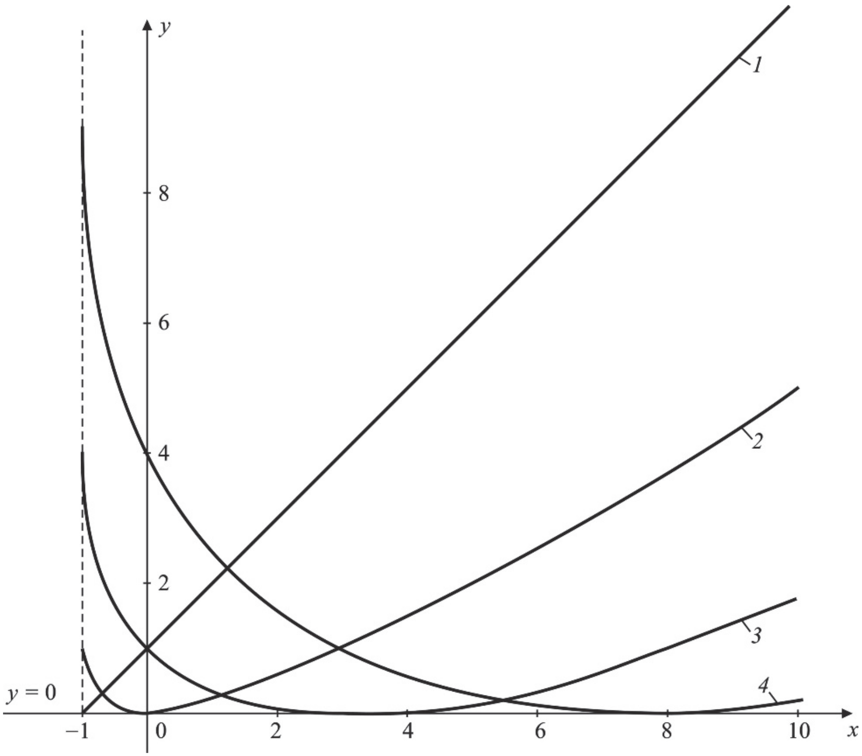

Рис. 4

Отсюда следует, что прямая $y(x) = x+1$ совпадает с интегральной прямой $y(x) = \left(\sqrt{x+1} + C\right)^2$, если $C = 0$. Таким образом, $y(x) = x+1$ является частным решением исходного уравнения (рис. 4, где 1: $y = \left(\sqrt{x+1} + 0\right)^2 = x+1$, $C = 0$; 2: $y = \left(\sqrt{x+1} - 1\right)^2$, $C = -1$; 3: $y = \left(\sqrt{x+1} - 2\right)^2$, $C = -2$; 4: $y = \left(\sqrt{x+1} - 3\right)^2$, $C = -3$).

7.3. Уравнение Клеро

Определение 7.3

Уравнение вида

$$y = xy' + \varphi(y') \tag{7.14}$$

называется *уравнением Клеро*.

Отметим, что уравнение Клеро получается из уравнения Лагранжа при $f(y') \equiv y'$.

Введём параметр $p = y'$, тогда $y = xp + \varphi(p)$. Дифференцируя по x, получаем

$$\frac{dy}{dx} = p = p + x\frac{dp}{dx} + \varphi'(p)\frac{dp}{dx},$$

или

$$(x + \varphi'(p))\frac{dp}{dx} = 0.$$

Рассмотрим два случая.

1. $\dfrac{dp}{dx} = 0$, $p = C$, тогда $y = Cx + \varphi(C)$ – общее решение.

2. $x + \varphi'(p) = 0$, в этом случае решение определяется системой уравнений

$$\begin{cases} x + \varphi'(p) = 0; \\ y = xp + \varphi(p); \end{cases} \quad \begin{cases} x = -\varphi'(p); \\ y = -\varphi'(p)\cdot p + \varphi(p). \end{cases}$$

Если $\varphi'(p) \neq \text{const}$, то получаем особое решение. Если же $\varphi'(p) = \text{const}$, то особое решение (огибающая) вырождается в точку, которая является центром пучка интегральных прямых $y = Cx + \varphi(C), \ \ C \in \mathbb{R}$.

Замечание 7.6

Для решения уравнения Клеро можно сформулировать следующее практическое правило. Заменив в уравнении Клеро символ y' символом C, получаем общее решение. Дифференцируя выражение для общего решения по C и исключая C из полученной системы уравнений, получаем особое решение (если $\varphi'(p) \neq \text{const}$).

Задача 7.9

Решить уравнение Клеро
$$y = xy' + y'^2 .$$

Решение

В соответствии с замечанием 7.6 общее решение уравнения Клеро имеет вид
$$y = Cx + C^2.$$
Особое решение (здесь $\varphi(p) = p^2, \ \varphi'(p) = 2p \neq \text{const}$) определяется из системы уравнений
$$\begin{cases} y = Cx + C^2; & (7.15) \\ 0 = x + 2C. & (7.16) \end{cases}$$
Из уравнения (7.16) $C = -x/2$. Подставляя в уравнение (7.15), получаем
$$y = -\frac{x}{2}x + \frac{x^2}{4} = -\frac{x^2}{4}, \quad \text{или} \quad 4y + x^2 = 0.$$
Убедимся, что это решение – особое. Подставляя в исходное уравнение, получаем, что $y = -\dfrac{x^2}{4}$ – решение.

Проверим выполнение условий нарушения единственности решения
$$\begin{cases} y_1(x_0) = y_2(x_0); \\ y_1'(x_0) = y_2'(x_0), \end{cases}$$

где $y_1(x) = Cx + C^2$ – общее решение; $y_2(x) = -\frac{x^2}{4}$ – «кандидат» в особое решение. Имеем

$$\begin{cases} Cx_0 + C^2 = -\frac{x_0^2}{4}; & (7.17) \\ C = -\frac{x_0}{2}. & (7.18) \end{cases}$$

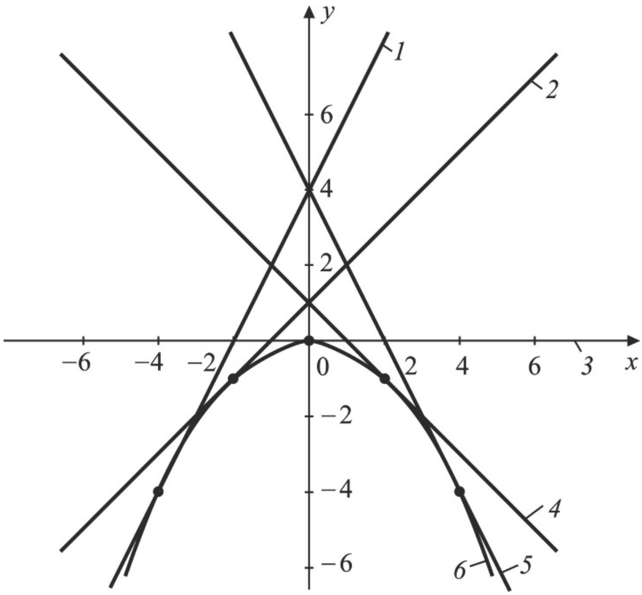

Рис. 5

Из уравнения (7.18) $C = -\frac{x_0}{2}$. Подставляя в уравнение (7.17), получаем $-\frac{x_0^2}{4} \equiv -\frac{x_0^2}{4}$ при любом x_0. Отсюда следует, что прямые $y = Cx + C^2$ являются касательными к параболе $y = -\frac{x^2}{4}$, т.е. $4y + x^2 = 0$ – особое решение (рис. 5, где 1: $y = 2x + 4$, $C = 2$;

2: $y = x + 1$, $C = 1$; 3: $y = 0$, $C = 0$; 4: $y = -x + 1$, $C = -1$; 5: $y = -2x + 4$, $C = -2$; 6: $y = -\dfrac{x^2}{4}$).

Задача 7.10

Решить уравнение Клеро

$$y = xy' + y'.$$

Решение

В соответствии с замечанием 7.6 общее решение уравнения Клеро имеет вид $y = Cx + C$. Решим теперь систему уравнений (здесь $\varphi(p) = p$, $\varphi'(p) = 1 = \text{const}$)

$$\begin{cases} y = Cx + C; \\ 0 = x + 1, \end{cases}$$

отсюда $x = -1$, $y = 0$, т.е. получили точку $(-1; 0)$, которая является центром пучка интегральных прямых $y = Cx + C$, $C \in \mathbb{R}$ (рис. 6, где 1: $y = 2x + 2$, $C = 2$; 2: $y = x + 1$, $C = 1$; 3: $y = 0$, $C = 0$; 4: $y = -x - 1$, $C = -1$; 5: $y = -2x - 2$, $C = -2$).

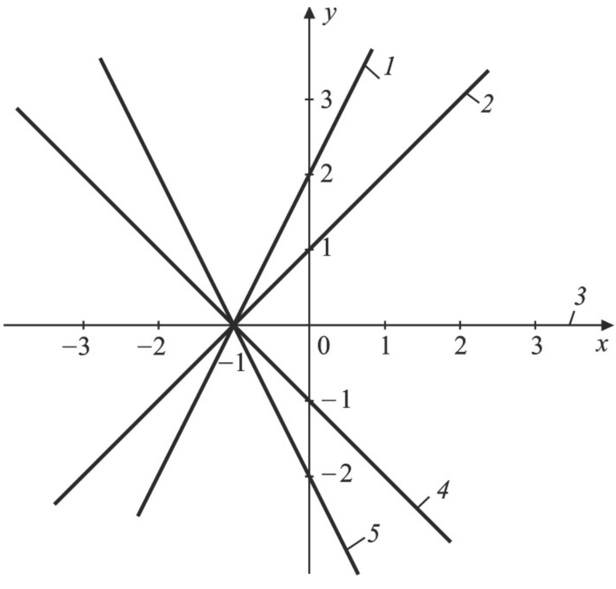

Рис. 6

8. УРАВНЕНИЯ, ДОПУСКАЮЩИЕ ПОНИЖЕНИЕ ПОРЯДКА

Рассмотрим основные классы уравнений высших порядков

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0, \tag{8.1}$$

допускающие понижение порядка.

1. Если в уравнение не входит искомая функция и её производные до $(k-1)$ -го порядка включительно, т.е. оно имеет вид

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, ..., y^{(n)}) = 0, \tag{8.2}$$

то порядок уравнения можно понизить, взяв за новую неизвестную функцию низшую из производных, входящих в уравнение, т.е. сделав замену $y^{(k)}(x) = z(x)$.

Задача 8.1

Решить уравнение

$$x^2 y'' = y'^2.$$

Решение

Имеем уравнение вида $F(x, y', y'') = 0$, т.е. в уравнение не входит искомая функция $y(x)$. Полагаем $y'(x) = z(x)$, тогда $y'' = z'$. Получаем $x^2 z' = z^2$ – уравнение с разделяющимися переменными. Для разделения переменных обе части уравнения делим на $x^2 z^2$.

Рассмотрим три случая.

1. $x^2 = 0$, $x = 0$ не является решением.

2. $z^2 = 0$, $z = 0$, подставляем в последнее уравнение, получаем, что $z = 0$ или $y' = 0$, т.е. $y = C$ – решение.

3. $x^2 z^2 \neq 0$, тогда

$$\int \frac{dz}{z^2} = \int \frac{dx}{x^2}, \quad \text{или} \quad -\frac{1}{z} = -\frac{1}{x} + \tilde{C}_1.$$

Здесь рассмотрим два варианта:

а) если $\tilde{C}_1 = 0,$ то $z = x,\ \ y' = x,\ \ y = \dfrac{x^2}{2} + \tilde{C}_2,\ \ 2y = x^2 + C_2$;

б) если $\tilde{C}_1 \neq 0,$ то

$$z = \frac{x}{C_1 x + 1} = y', \quad C_1 = -\tilde{C}_1, \quad C_1 \neq 0,$$

$$y = \int \frac{x\,dx}{C_1 x + 1} = \frac{1}{C_1}\int \frac{(C_1 x + 1) - 1}{C_1 x + 1}\,dx = \frac{x}{C_1} - \frac{1}{C_1^2}\ln\left|C_1 x + 1\right| + \tilde{C}_3,$$

или

$$\ln\left|C_1 x + 1\right| + C_3 = C_1 x - C_1^2 y,$$

где $C_3 = C_1^2 \tilde{C}_3.$ Объединяя случаи 1–3, получаем

$$\ln\left|C_1 x + 1\right| + C_3 = C_1 x - C_1^2 y, \quad y = C, \quad 2y = x^2 + C_2,$$

$$C, C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

Задача 8.2

Решить уравнение

$$y''' = y''^2.$$

Решение

Полагаем $y''(x) = z(x),$ тогда $y''' = z'.$ Получаем $z' = z^2$ – уравнение с разделяющимися переменными. Для разделения переменных обе части уравнения делим на $z^2.$

1. $z^2 = 0,$ т.е. $z = 0,$ подставляем в последнее уравнение, получаем, что $z = 0$ или $y'' = 0,$ т.е. $y = C_1 x + C_2$ – решение.

2. $z^2 \neq 0,$ тогда

$$\int \frac{dz}{z^2} = \int dx,$$

или

$$-\frac{1}{z} = x + \tilde{C}_3, \quad z = y'' = -\frac{1}{x + \tilde{C}_3} = \frac{1}{C_3 - x}, \quad C_3 = -\tilde{C}_3,$$

$$y' = \int \frac{dx}{C_3 - x} = C_4 - \ln\left|C_3 - x\right|,$$

$$y=\int\left(C_4-\ln\left|C_3-x\right|\right)dx=C_4x-\int\ln\left|C_3-x\right|dx=$$

$$=(C_3-x)\,(\ln\left|C_3-x\right|-1)+C_4x+C_5.$$

Объединяя случаи 1 и 2, получаем

$$y=(C_3-x)\,(\ln\left|C_3-x\right|-1)+C_4x+C_5,\quad y=C_1x+C_2;$$

$$C_1,C_2,C_3,C_4,C_5\in\mathbb{R}.$$

2. Если в уравнение не входит независимая переменная x, т.е. уравнение имеет вид

$$F(y,y',y'',...,y^{(n)})=0, \tag{8.3}$$

то порядок уравнения можно понизить, взяв за новую независимую переменную y, а за новую неизвестную функцию $y'=p(y)$.

Задача 8.3

Решить уравнение

$$y''=2yy'.$$

Решение

Имеем уравнение вида $F(y,y',y'')=0$, т.е. в уравнение не входит независимая переменная x. Берём за новую независимую переменную y, за новую неизвестную функцию $y'=p(y)$, тогда

$$y''=\frac{d(y')}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=p'_y\cdot p.$$

Получаем

$$p'_y\cdot p=2yp,\quad p(p'_y-2y)=0.$$

Рассмотрим два случая.

1. $p=0$, т.е. $y'=0$, $y=C$ – решение.

2. $p'_y-2y=0$, $p=y^2+\tilde{C}$.

Здесь рассмотрим три варианта:

а) если $\tilde{C}>0$, т.е. $\tilde{C}=C_1^2$, $C_1\neq 0$, то

$$\int\frac{dy}{y^2+C_1^2}=\int dx,\quad \frac{1}{C_1}\operatorname{arctg}\frac{y}{C_1}=x+\tilde{C}_2,$$

$$\operatorname{arctg}\frac{y}{C_1} = C_1x + C_2, \quad y = C_1 \operatorname{tg}(C_1x + C_2),$$

где $C_2 = C_1\tilde{C}_2$;

б) если $\tilde{C} < 0$, т.е. $\tilde{C} = -C_1^2$, $C_1 \neq 0$, то

$$\int \frac{dy}{y^2 - C_1^2} = \int dx, \quad \frac{1}{2C_1}\ln\left|\frac{y - C_1}{y + C_1}\right| = x + \tilde{C}_3,$$

или

$$\ln\left|\frac{y - C_1}{y + C_1}\right| = 2C_1x + C_3;$$

в) если $\tilde{C} = 0$, то $y' = y^2$, $\int \frac{dy}{y^2} = \int dx$, или $-\frac{1}{y} = x + \tilde{C}_4$, $C_4 = -\tilde{C}_4$, $y(C_4 - x) = 1$.

Объединяя случаи 1–2, получаем

$$y = C_1 \operatorname{tg}(C_1x + C_2), \quad \ln\left|\frac{y - C_1}{y + C_1}\right| = 2C_1x + C_3,$$

$$y(C_4 - x) = 1, \quad y = C; \quad C, C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}.$$

3. Если уравнение (8.1) однородно относительно функции y и её производных, т.е. не меняется при одновременной замене $y, y', y'', \ldots$ на $ky, ky', ky'', \ldots$, то порядок уравнения понижается подстановкой $y' = yz$, где $z(x)$ – новая неизвестная функция.

Задача 8.4

Решить уравнение

$$y(xy'' + y') = xy'^2(1 - x).$$

Решение

Заменим $y \to ky$, $y' \to ky'$, $y'' \to ky''$ и подставим в исходное уравнение. Получим

$$ky(xky'' + ky') = xk^2y'^2(1 - x),$$

или

$$k^2y(xy'' + y') = k^2xy'^2(1 - x),$$

т.е. новое уравнение получено из исходного умножением обеих частей на k^2. Поэтому исходное уравнение однородно относительно y, y', y''.

Делаем замену $y' = yz$, тогда $y'' = y'z + yz' = yz^2 + yz'$. Получаем

$$xy(yz^2 + yz') + y^2 z = xy^2 z^2 (1 - x),$$

или

$$y^2 (xz' + z + x^2 z^2) = 0.$$

1. $y^2 = 0$, $y = 0$, подставляя в исходное уравнение, получаем, что $y = 0$ – решение.

2. $y \neq 0$, $xz' + z + x^2 z^2 = 0$, $z' + \frac{1}{x} z = -xz^2$. Полученное уравнение является уравнением Бернулли с $n = 2$ (здесь $x \neq 0$, так как $x = 0$ не является решением исходного уравнения). Разделим обе части уравнения на z^2, получим

$$\frac{z'}{z^2} + \frac{1}{xz} = -x.$$

3. $z = 0$, т.е. $y' = 0$, $y = C$, получаем, что $y = C$ – решение.

4. $z \neq 0$, обозначим $u = \frac{1}{z}$, $u' = -\frac{z'}{z^2}$, приходим к уравнению $u' - \frac{1}{x} u = x$, которое является линейным. Решаем методом Бернулли. Пусть $u(x) = \varphi(x)\psi(x)$, тогда $u' = \varphi'\psi + \varphi\psi'$. Подставляя, получаем

$$\varphi'\psi + \varphi\psi' - \frac{1}{x}\varphi\psi = x,$$

или

$$\varphi'\psi + \varphi\left(\psi' - \frac{1}{x}\psi\right) = x.$$

Решая уравнение $\psi' - \frac{1}{x}\psi = 0$, принимаем, что $\psi = x$, тогда

$$\varphi' x = x, \quad \varphi' = 1, \quad \varphi = x + \tilde{C},$$

$$u(x) = \varphi(x)\psi(x) = (x + \tilde{C})x = \tilde{C}x + x^2.$$

Отсюда

$$z = \frac{1}{u} = \frac{1}{\tilde{C}x + x^2}, \quad \frac{y'}{y} = \frac{1}{\tilde{C}x + x^2}, \quad y' = \frac{y}{\tilde{C}x + x^2}.$$

Здесь рассмотрим два варианта:

а) $\tilde{C} = C_1 \neq 0,$ тогда

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{C_1 x + x^2},$$

$$\ln|y| = \frac{1}{C_1} \ln\left|\frac{x}{x + C_1}\right| + \tilde{C}_3,$$

$$y = C_2 \left|\frac{x}{x + C_1}\right|^{1/C_1},$$

$\tilde{C}_3 = \ln|C_3|,$ $C_2 = \pm C_3;$

б) $\tilde{C} = 0,$ тогда

$$y' = \frac{y}{x^2}, \quad \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x^2},$$

$$\ln|y| = -\frac{1}{x} + \tilde{C}_4, \quad y = C_4 e^{-1/x}, \; C_4 = \pm e^{\tilde{C}_4}.$$

Объединяя случаи 1–4, получаем

$$y = C_2 \left|\frac{x}{x + C_1}\right|^{1/C_1}, \quad y = C_4 e^{-1/x}, \quad y = C; \quad C \in \mathbb{R}; \quad C_1, C_2, C_4 \neq 0.$$

Задача 8.5

Найти решение уравнения

$$yy'' + y'^2 = 0,$$

удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 1,$ $y'(0) = 1.$

Решение

Заменим $y \to ky,$ $y' \to ky',$ $y'' \to ky''$ и подставим в исходное уравнение. Получим

$$ky \cdot ky'' + k^2 y'^2 = 0,$$

или

$$k^2(yy'' + y'^2) = 0.$$

Таким образом, исходное уравнение однородно относительно y, y', y''.

Делаем замену $y' = yz$, $y'' = y'z + yz' = yz^2 + yz'$. Подставляя, получаем уравнение

$$y(yz^2 + yz') + y^2z^2 = 0,$$

или

$$y^2(z' + 2z^2) = 0.$$

1. $y^2 = 0$, $y = 0$, получаем, что $y = 0$ – решение.

2. $y^2 \neq 0$, тогда ($z \neq 0$), получаем

$$z' + 2z^2 = 0, \quad -\int \frac{dz}{z^2} = 2\int dx,$$

$$\frac{1}{z} = 2x + C_1, \quad z = \frac{y'}{y} = \frac{1}{2x + C_1}, \quad \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{2x + C_1},$$

$$\ln|y| = \frac{1}{2}\ln|2x + C_1| + \tilde{C}_2,$$

$$2\ln|y| = \ln|2x + C_1| + \ln|C_2|,$$

где $2\tilde{C}_2 = \ln|C_2|$, откуда $y^2 = C_2(2x + C_1)$, $C_1 \in \mathbb{R}$, $C_2 \neq 0$.

Объединяя случаи 1–2, получаем $y^2 = C_2\left(2x + C_1\right)$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Дифферецируем полученное решение

$$2yy' = 2C_2.$$

Учитывая начальные условия, приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} C_1C_2 = 1; \\ 2C_2 = 2. \end{cases}$$

Отсюда $C_1 = 1$, $C_2 = 1$, и $y^2 = 2x + 1$.

Решение задачи Коши имеет вид

$$y = \sqrt{2x + 1}.$$

4. Порядок уравнения понижается, если оно является однородным относительно x и y в обощённом смысле, т.е. если уравнение $F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$ не отличается от уравнения

$$F(kx, k^m y, k^{m-1} y', ..., k^{m-n} y^{(n)}) = 0.$$

Если такое m находится, то при $x > 0$ делается замена переменной $x = e^t$ и функции $y = ze^{mt}$, где $z = z(t)$ – новая неизвестная функция; t – независимая переменная. Если же $x < 0$, то полагаем, что $x = -e^t$, $y = ze^{mt}$. В результате получаем уравнение, в которое не входит независимая переменная t. Если такое m подобрать нельзя, то дифференциальное уравнение не является однородным в обобщённом смысле, или обобщённо-однородным.

Задача 8.6

Решить уравнение

$$-x^2 y' + x^3 y'' + xy = -x^2 y'^2 + 2xyy' - y^2.$$

Решение

Проверим, что уравнение является обобщённо-однородным при $m = 1$. Заменим $x \to kx$, $y \to k^m y$, $y' \to k^{m-1} y'$, $y'' \to k^{m-2} y''$ и подставим в исходное уравнение. Получим

$$-x^2 k^2 k^{m-1} y' + k^3 x^3 k^{m-2} y'' + k^{m+1} xy = -k^2 x^2 k^{2m-2} y'^2 +$$

$$+2kxk^m yk^{m-1} y' - k^{2m} y^2,$$

или

$$k^{m+1}(-x^2 y' + x^3 y'' + xy) = k^{2m}(-x^2 y'^2 + 2xyy' - y^2).$$

Полученное уравнение не будет отличаться от исходного, если $m + 1 = 2m$, т.е. $m = 1$. Считая $x > 0$, делаем замену $x(t) = e^t$, $y(t) = z(t)e^t$. Тогда

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{y'_t}{e^t} = \frac{z'_t e^t + ze^t}{e^t} = z'_t + z,$$

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{z''_{tt} + z'_t}{e^t} = (z''_{tt} + z'_t)e^{-t}.$$

Подставляем эти выражения в исходное уравнение

$$-e^{2t}(z'_t+z)+e^{3t}(z''_{tt}+z'_t)e^{-t}+e^t z e^t=$$

$$=-e^{2t}(z'_t+z)^2+2e^t(z'_t+z)ze^t-e^{2t}z^2$$

или

$$z''_{tt}+z'^2_t=0.$$

Получили уравнение типа $F(z',z'')=0$, в котором отсутствует и аргумент t, и функция z. Поэтому это уравнение можно решать, используя или случай 1, или случай 2.

Порядок понижаем, обозначив $z'=u$ (случай 1). Получаем $u'+u^2=0$.

Рассмотрим два случая.

1. $u=0$, $z'=0$, $z(t)=C$, тогда $x(t)=e^t$, $y(t)=Ce^t$, откуда $y=Cx$.

2. $u\neq 0$, тогда

$$-\int\frac{du}{u^2}=\int dt,\quad \frac{1}{u}=t+C_1,\quad u=z'=\frac{1}{t+C_1},$$

$$\int dz=\int\frac{dt}{t+C_1},\quad z=\ln\left|t+C_1\right|+\tilde{C}_2,\ \ \tilde{C}_2=\ln\left|C_2\right|\ \text{ или }\ z=\ln\left|C_2(t+C_1)\right|.$$

Решение уравнения (при $x>0$) состоит из семейства кривых, заданных в параметрической форме

$$x(t)=e^t,\quad y(t)=\ln\left|C_2(t+C_1)\right|e^t;\quad C_1\in\mathbb{R},\quad C_2\neq 0,$$

и частного решения $y=Cx$, $C\in\mathbb{R}$. Отметим, что для получения решения при $x<0$ следует применить замену переменной $x(t)=-e^t$ и функции $y(t)=ze^{mt}$ и проделать аналогичные выкладки.

5. Порядок уравнения легко понижается, если удаётся преобразовать уравнение так, чтобы обе его части оказались полными производными каких-либо функций.

Задача 8.7

Решить уравнение

$$y'y'''=2y''^2.$$

Решение

Делим обе части уравнения на $y'y''$.

1. $y' = 0, \quad y'' = 0, \quad y = C_1 x + C_2$ (в эту формулу входит решение уравнения $y' = 0$ при $C_1 = 0$).

2. $y' \neq 0, \quad y'' \neq 0,$ тогда

$$\frac{y'''}{y''} = 2\frac{y''}{y'} \quad \text{или} \quad (\ln|y''|)' = (2\ln|y'|)'.$$

Интегрируя последнее уравнение, получаем

$$\ln|y''| = 2\ln|y'| + \ln|\tilde{C}_3|,$$

отсюда $y'' = \tilde{C}_3 y'^2$. Решаем данное уравнение, используя случай 1. Полагаем

$$y'(x) = z(x), \quad y''(x) = z'(x),$$

тогда

$$z' = \tilde{C}_3 z^2, \quad \int \frac{dz}{z^2} = \tilde{C}_3 \int dx, \quad -\frac{1}{z} = \tilde{C}_3 x + \tilde{C}_4,$$

$$z = y' = \frac{1}{C_3 x + C_4}, \quad C_3 = -\tilde{C}_3, \quad C_4 = -\tilde{C}_4,$$

$$\int dy = \int \frac{dx}{C_3 x + C_4}, \quad y = \frac{1}{C_3}\ln|C_3 x + C_4| + \tilde{C}_5.$$

Объединяя случаи 1–2, получаем

$$C_3 y = \ln|C_3 x + C_4| + C_5, \quad y = C_1 x + C_2; \quad C_5 = C_3 \tilde{C}_5,$$

$$C_1, C_2, C_4, C_5 \in \mathbb{R}, \quad C_3 \neq 0.$$

9. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

9.1. Линейные однородные уравнения

Определение 9.1

Дифференциальное уравнение n-го порядка вида

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x), \qquad (9.1)$$

где a_0, a_1, …, a_n – постоянные; $f(x)$ – известная функция, $f(x) \in C\,(<a, b>)$ называется *линейным неоднородным* ($f(x) \neq 0$) *уравнением с постоянными коэффициентами.*

Если $f(x) \equiv 0,$ то уравнение (9.1) принимает вид

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \qquad (9.2)$$

и называется *линейным однородным уравнением*, соответвующим уравнению (9.1).

Общее решение уравнения (9.2) записывается следующим образом

$$y_0(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x), \qquad (9.3)$$

где $y_1(x)$, $y_2(x), \ldots,$ $y_n(x) \in C^n\,(<a, b>)$ – линейно независимые решения линейного однородного уравнения (9.2), образующие фундаментальную систему решений (ФСР) (это подробно обсуждается в следующем разд. 10).

Для решения уравнения (9.2) необходимо составить характеристическое уравнение (подстановка $y = e^{\lambda x}$)

$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0 \qquad (9.4)$$

и найти все его корни λ_1, $\lambda_2, \ldots,$ λ_n.

Общее решение линейного однородного уравнения есть сумма, состоящая из следующих слагаемых:

1) каждому простому действительному корню λ отвечает слагаемое $Ce^{\lambda x}$, где C – произвольная постоянная;

2) каждому действительному корню λ кратности k отвечает слагаемое

$$(C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \ldots + C_k x^{k-1}) e^{\lambda x},$$

где $C_1,\ C_2,\ C_3,\ \ldots,\ C_k$ – произвольные постоянные;

3) каждой паре простых комплексно-сопряжённых корней $\lambda = \alpha \pm i\beta$ отвечает слагаемое

$$C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin \beta x,$$

где $C_1,\ C_2$ – произвольные постоянные;

4) каждой паре комплексно-сопряжённых корней $\lambda = \alpha \pm i\beta$ кратности k отвечает слагаемое

$$(C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \ldots + C_k x^{k-1}) e^{\alpha x} \cos \beta x +$$

$$+ (C_{k+1} + C_{k+2} x + C_{k+3} x^2 + \ldots + C_{2k} x^{k-1}) e^{\alpha x} \sin \beta x,$$

где $C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_k,\ C_{k+1}, \ldots,\ C_{2k}$ – произвольные постоянные.

Задача 9.1

Решить уравнение

$$y'' + y' - 2y = 0.$$

Решение

Для получения характеристического уравнения (9.4) сделаем подстановку $y = e^{\lambda x}$, $y' = \lambda e^{\lambda x}$, $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$, получаем

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + \lambda e^{\lambda x} - 2 e^{\lambda x} = 0,$$

или

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0.$$

Корни характеристического уравнения $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$ – простые действительные, поэтому общее решение имеет вид

$$y_0(x) = C_1 e^{x} + C_2 e^{-2x}; \quad C_1,\ C_2 \in \mathbb{R}.$$

Задача 9.2

Решить уравнение

$$y'' - 2y' + y = 0.$$

Решение

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0, \quad (\lambda - 1)^2 = 0.$$

Его корни: $\lambda_{1,2} = 1$ – действительный корень $\lambda = 1$ кратности 2. Общее решение имеет вид

$$y_0(x) = (C_1 + C_2 x)e^x; \quad C_1,\ C_2 \in \mathbb{R}.$$

Задача 9.3

Решить уравнение

$$y'' - 4y' + 5y = 0.$$

Решение

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0.$$

Его корни: $\lambda_{1,2} = 2 \pm i$ – пара простых комплексно-сопряжённых корней. Общее решение имеет вид

$$y_0(x) = e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x); \quad C_1,\ C_2 \in \mathbb{R}.$$

Задача 9.4

Решить уравнение

$$y^{(4)} + 4y = 0.$$

Решение

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^4 + 4 = 0, \quad \lambda^4 = -4.$$

Из курса ТФКП известно, что если $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, то

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right),$$

где $k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1$.

Запишем

$$\lambda^4 = 4\,(\cos\pi + i\sin\pi),$$

тогда

$$\lambda = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi + 2\pi k}{4} + i\sin\frac{\pi + 2\pi k}{4}\right), \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ 3.$$

Получаем $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$, $\lambda_{3,4} = -1 \pm i$ – две пары комплексно-сопряжённых корней. Общее решение имеет вид

$$y_0(x) = e^x (C_1 + C_2 x) + e^{-x}(C_3 + C_4 x); \quad C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4 \in \mathbb{R}.$$

Задача 9.5

Решить уравнение

$$y^{(5)} + 8y''' + 16y' = 0.$$

Решение

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^5 + 8\lambda^3 + 16\lambda = 0;$$

$$\lambda(\lambda^4 + 8\lambda^2 + 16) = 0, \quad \lambda(\lambda^2 + 4)^2 = 0.$$

Его корни: $\lambda_1 = 0$ – простой действительный корень, $\lambda_{2,3,4,5} = \pm 2i$ – пара комплексно-сопряжённых корней кратности 2. Общее решение имеет вид

$$y_0(x) = C_1 + (C_2 x + C_3)\cos 2x + (C_4 + C_5 x)\sin 2x;$$

$$C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4,\ C_5 \in \mathbb{R}.$$

Задача 9.6

Решить уравнение

$$y^{(4)} + 8y''' + 24y'' + 32y' + 16y = 0.$$

Решение

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^4 + 8\lambda^3 + 24\lambda^2 + 32\lambda + 16 = 0, \quad (\lambda + 2)^4 = 0.$$

Его корни: $\lambda_{1,2,3,4} = -2$ – действительный корень кратности 4. Общее решение имеет вид

$$y_0(x) = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3)e^{-2x}; \quad C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4 \in \mathbb{R}.$$

Задача 9.7

Найти решение уравнения

$$y'' - 2y' = 0,$$

удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 0,\ \ y'(0) = 2.$

Решение

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^2 - 2\lambda = 0, \quad \lambda(\lambda - 2) = 0.$$

Его корни: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$ – простые действительные. Общее решение имеет вид

$$y_0(x) = C_1 + C_2 e^{2x}; \quad C_1, \ C_2 \in \mathbb{R}.$$

Запишем $y_0'(x) = 2C_2 e^{2x}$. Учитывая начальные условия, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} y(0) = C_1 + C_2 = 0; \\ y'(0) = 2C_2 = 2, \end{cases}$$

откуда $C_1 = -1, \ C_2 = 1.$ Решение задачи Коши имеет вид

$$y(x) = e^{2x} - 1.$$

9.2. Линейные неоднородные уравнения

Теорема 9.1

Общее решение линейного неоднородного уравнения (9.1) равно сумме частного решения неоднородного уравнения и общего решения линейного однородного уравнения (9.2), соответствующего уравнению (9.1).

Общий метод решения линейного неоднородного уравнения (9.1) – метод вариации постоянных. Если же правая часть $f(x)$ является «стандартной», или квазимногочленом, т.е. имеет вид

$$f(x) = e^{\alpha x}(P_m(x)\cos\beta x + R_k(x)\sin\beta x), \tag{9.5}$$

то частное решение ищется в виде

$$y_{\text{ч}}(x) = x^p e^{\alpha x}(Q_s(x)\cos\beta x + T_s(x)\sin\beta x). \tag{9.6}$$

Здесь p – кратность числа $z = \alpha + i\beta$ среди корней характеристического уравнения, $P_m(x), \ R_k(x), \ Q_s(x), \ T_s(x)$ – многочлены степеней m, k, s соответственно, причём $s = \max\{k, m\}$.

Замечание 9.1

Если правая часть уравнения (9.1) состоит из нескольких слагаемых

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x),$$

то частное решение уравнения (9.1) с правой частью $f(x)$ равно сумме частных решений уравнений с той же левой частью и правыми частями $f_1(x),\ f_2(x), \ldots,\ f_n(x),$ соответственно, т.е.

$$y_{\text{ч}}(x) = y_{\text{ч}1}(x) + y_{\text{ч}2}(x) + \ldots + y_{\text{ч}n}(x).$$

Задача 9.8

Решить уравнение

$$y'' - 2y' - 3y = e^{4x}.$$

Решение

а) Ищем общее решение соответствующего однородного уравнения

$$y'' - 2y' - 3y = 0.$$

Характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0.$$

Его корни: $\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = -1$ – простые действительные. Общее решение имеет вид

$$y_0(x) = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x}.$$

б) Правая часть уравнения $f(x) = e^{4x}$ имеет «стандартный» вид (9.5), где $\alpha = 4,\ \beta = 0,\ s = \max\{m, k\} = 0,\ Q_s(x) = A.$ Комплексное число $z = \alpha + i\beta = 4 + i \cdot 0 = 4$ не является корнем характеристического уравнения, поэтому $p = 0$. Частное решение ищется по формуле (9.6). Тогда $y_{\text{ч}}(x) = x^0 e^{4x} A = Ae^{4x},\quad y'_{\text{ч}} = 4Ae^{4x},\quad y''_{\text{ч}} = 16Ae^{4x}.$ Подставляя в исходное неоднородное уравнение, получаем

$$16Ae^{4x} - 2 \cdot 4Ae^{4x} - 3Ae^{4x} = e^{4x},$$

или

$$5A = 1, \quad A = \frac{1}{5},$$

т.е. $y_ч(x)=\frac{1}{5}e^{4x}$. В соответствии с теоремой 9.1 общее решение неоднородного уравнения имеет вид

$$y(x)=y_0(x)+y_ч(x)=C_1e^{3x}+C_2e^{-x}+\frac{1}{5}e^{4x},\quad C_1,\ C_2\in\mathbb{R}.$$

Задача 9.9

Решить уравнение

$$y''-y=2e^x-x^2.$$

Решение

а) Ищем общее решение соответствующего однородного уравнения

$$y''-y=0.$$

Характеристическое уравнение

$$\lambda^2-1=0.$$

Его корни: $\lambda_1=1,\ \lambda_2=-1$ – простые действительные. Общее решение имеет вид

$$y_0(x)=C_1e^x+C_2e^{-x}.$$

б) Правая часть уравнения $f(x)$ имеет «стандартный» вид, причём $f(x)=f_1(x)+f_2(x)=2e^x-x^2$. Для функции $f_1(x)$: $\alpha_1=1,\ \beta_1=0,$ $s_1=\max\{m_1,k_1\}=0.$ Комплексное число $z_1=\alpha_1+i\,\beta_1=1$ является корнем характеристического уравнения кратности 1, поэтому $p_1=1$. Для функции $f_2(x)$: $\alpha_2=0,\ \ \beta_2=0,\ \ s_2=\max\{m_2,k_2\}=2.$ Комплексное число $z_2=\alpha_2+i\,\beta_2=0$ не является корнем характеристического уравнения, поэтому $p_2=0$. Частное решение ищется в виде

$$y_ч(x)=y_{ч1}(x)+y_{ч2}(x)=$$
$$=x^1e^xA+x^0e^{0\cdot x}(Bx^2+Cx+D)=Axe^x+Bx^2+Cx+D,$$

тогда

$$y_ч'=Ae^x(x+1)+2Bx+C,\quad y_ч''=Ae^x(x+2)+2B.$$

Подставляя в исходное неоднородное уравнение, получаем

$$Ae^x(x+2)+2B-Axe^x-Bx^2-Cx-D=2e^x-x^2,$$

$$2Ae^x - Bx^2 - Cx + (2B - D) = 2e^x - x^2.$$

Приравниваем коэффициенты слева и справа при e^x и одинаковых степенях x:

$$e^x:\ 2A = 2;$$

$$x^2:\ -B = -1;$$

$$x^1:\ -C = 0;$$

$$x^0:\ 2B - D = 0,$$

т.е.

$$\begin{cases} A = 1; \\ B = 1; \\ C = 0; \\ 2B - D = 0, \end{cases}$$

откуда $A = 1,\ \ B = 1,\ \ C = 0,\ \ D = 2.$ Частное решение имеет вид

$$y_ч(x) = y_{ч1}(x) + y_{ч2}(x) = xe^x + x^2 + 2.$$

Общее решение неоднородного уравнения

$$y(x) = y_0(x) + y_ч(x) = C_1e^x + C_2e^{-x} + xe^x + x^2 + 2; \quad C_1,\ C_2 \in \mathbb{R}.$$

Задача 9.10

Решить уравнение

$$y'' + y = 4\sin x.$$

Решение

а) Ищем общее решение соответствующего однородного уравнения

$$y'' + y = 0.$$

Характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + 1 = 0.$$

Его корни: $\lambda_{1,\,2} = \pm i$ – пара простых комплексно-сопряжённых корней. Общее решение имеет вид

$$y_0(x) = C_1\cos x + C_2\sin x.$$

б) Правая часть уравнения $f(x) = 4\sin x$ имеет «стандартный» вид (9.5), где $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $s = \max\{m, k\} = 0$. Комплексное число $z = \alpha + i\beta = i$ является корнем характеристического уравнения кратности 1, поэтому $p = 1$. Частное решение ищется в виде

$$y_{\text{ч}}(x) = x^1 e^{0\cdot x}(A\cos x + B\sin x) = x(A\cos x + B\sin x),$$

тогда

$$y'_{\text{ч}} = (A + Bx)\cos x + (B - Ax)\sin x,$$

$$y''_{\text{ч}} = (2B - Ax)\cos x - (2A + Bx)\sin x.$$

Подставляя в исходное неоднородное уравнение, получаем

$$(2B - Ax)\cos x - (2A + Bx)\sin x + x(A\cos x + B\sin x) = 4\sin x,$$

$$2B\cos x - 2A\sin x = 4\sin x,$$

или

$$B\cos x - A\sin x = 2\sin x.$$

Приравниваем коэффициенты слева и справа при одинаковых функциях:

$$\cos x:\ B = 0;$$

$$\sin x:\ -A = 2,$$

т.е.

$$\begin{cases} B = 0; \\ A = -2, \end{cases}$$

откуда $B = 0$, $A = -2$. Частное решение имеет вид

$$y_{\text{ч}}(x) = -2x\cos x.$$

Общее решение неоднородного уравнения

$$y(x) = y_0(x) + y_{\text{ч}}(x) = C_1\cos x + C_2\sin x - 2x\cos x; \quad C_1,\ C_2 \in \mathbb{R}.$$

Если правая часть $f(x)$ уравнения (9.1) является «нестандартной», т.е. не является квазимногочленом, то применяется метод вариации постоянных. Отметим, что указанный метод можно использовать и для уравнения со «стандартной» правой частью (9.5).

Пусть общее решение соответствующего однородного уравнения (9.2) имеет вид (9.3)

$$y_0(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x).$$

Тогда частное решение $y_ч(x)$ неоднородного уравнения ищется в виде

$$y_ч(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) + \ldots + C_n(x)y_n(x).$$

Функции $C_1(x),\ C_2(x), \ldots,\ C_n(x)$ находятся из следующей системы уравнений

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) + \ldots + C_n'(x)y_n(x) = 0; \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) + \ldots + C_n'(x)y_n'(x) = 0; \\ \ldots; \\ C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + C_2'(x)y_2^{(n-1)}(x) + \ldots + C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) = f(x). \end{cases}$$

Задача 9.11

Решить уравнение

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}.$$

Решение

а) Ищем общее решение соответствующего однородного уравнения

$$y'' - 2y' + y = 0.$$

Характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0\ , \quad (\lambda - 1)^2 = 0.$$

Его корни: $\lambda_{1,2} = 1$ – действительный корень $\lambda = 1$ кратности 2.

Общее решение имеет вид

$$y_0(x) = (C_1 + C_2 x)e^x.$$

б) Ищем частное решение неоднородного уравнения в виде

$$y_ч(x) = (C_1(x) + xC_2(x))e^x.$$

Функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ находим из следующей системы уравнений

$$\begin{cases} e^x(C_1'(x) + C_2'(x)x) = 0; \\ C_1'(x)e^x + C_2'(x)(e^x + xe^x) = \dfrac{e^x}{x}, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} C_1'(x) + C_2'(x)x = 0; \\ C_1'(x) + C_2'(x)(1+x) = \dfrac{1}{x}. \end{cases}$$

Решаем систему двух линейных алгебраических уравнений с помощью определителей

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x \\ 1 & 1+x \end{vmatrix} = 1 + x - x = 1 \neq 0, \quad \Delta_{C_1'} = \begin{vmatrix} 0 & x \\ \dfrac{1}{x} & 1+x \end{vmatrix} = -1,$$

$$\Delta_{C_2'} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \dfrac{1}{x} \end{vmatrix} = \frac{1}{x}.$$

По формулам Крамера

$$C_1' = \frac{\Delta_{C_1'}}{\Delta} = -1, \quad C_2' = \frac{\Delta_{C_2'}}{\Delta} = \frac{1}{x}.$$

Интегрируем полученные равенства и находим C_1 и C_2, при этом все постоянные интегрирования опускаем. Это можно сделать, так как ищется только одно частное решение. Тогда

$$C_1(x) = -\int dx = -x, \quad C_2(x) = \int \frac{dx}{x} = \ln|x|.$$

Получаем частное решение

$$y_{\text{ч}}(x) = (C_1(x) + xC_2(x))e^x = (x\ln|x| - x)e^x = xe^x(\ln|x| - 1).$$

Общее решение неоднородного уравнения имеет вид

$$y(x) = y_0(x) + y_{\text{ч}}(x) = (C_1 + C_2x)e^x + xe^x(\ln|x| - 1); \quad C_1,\ C_2 \in \mathbb{R}.$$

Задача 9.12

Решить уравнение

$$y'' + y = \frac{1}{\sin x}.$$

Решение

а) Ищем общее решение соответствующего однородного уравнения

$$y'' + y = 0.$$

Характеристическое уравнение $\lambda^2+1=0$. Его корни: $\lambda_{1,2}=\pm i$ – пара простых комплексно-сопряжённых корней.

Общее решение имеет вид

$$y_0(x)=C_1\cos x+C_2\sin x.$$

б) Ищем частное решение неоднородного уравнения в виде

$$y_{\text{ч}}(x)=C_1(x)\cos x+C_2(x)\sin x.$$

Функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ находим из следующей системы уравнений

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos x+C_2'(x)\sin x=0; \\ -C_1'(x)\sin x+C_2'(x)\cos x=\dfrac{1}{\sin x}. \end{cases}$$

Решаем систему двух линейных алгебраических уравнений с помощью определителей

$$\Delta=\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}=\cos^2 x+\sin^2 x=1\neq 0,$$

$$\Delta_{C_1'}=\begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \dfrac{1}{\sin x} & \cos x \end{vmatrix}=-1,\quad \Delta_{C_2'}=\begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \dfrac{1}{\sin x} \end{vmatrix}=\frac{\cos x}{\sin x}.$$

По формулам Крамера

$$C_1'=\frac{\Delta_{C_1'}}{\Delta}=-1,\quad C_2'=\frac{\Delta_{C_2'}}{\Delta}=\frac{\cos x}{\sin x},.$$

Тогда

$$C_1=-\int dx=-x,\quad C_2=\int\frac{\cos x}{\sin x}\,dx=\int\frac{d\,(\sin x)}{\sin x}=\ln|\sin x|.$$

Получаем частное решение

$$y_{\text{ч}}(x)=C_1(x)\cos x+C_2(x)\sin x=-x\cos x+\sin x\cdot\ln|\sin x|.$$

Общее решение неоднородного уравнения имеет вид

$$y(x)=y_0(x)+y_{\text{ч}}(x)=C_1\cos x+C_2\sin x-x\cos x+\sin x\cdot\ln|\sin x|;$$

$$C_1,\ C_2\in\mathbb{R}.$$

9.3. Уравнение Эйлера

Уравнение Эйлера

$$a_0x^n y^{(n)} + a_1x^{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}xy' + a_ny = f(x) \qquad (9.7)$$

приводится к линейному уравнению с постоянными коэффициентами заменой независимой переменной $x = e^t$ при $x > 0$ (или $x = -e^t$ при $x < 0$).

Уравнение вида

$$a_0(bx+c)^n y^{(n)} + a_1(bx+c)^{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(bx+c)y' + a_ny = f(x) \quad (9.8)$$

приводится к линейному уравнению с постоянными коэффициентами заменой независимой переменной $bx+c = e^t$ при $bx+c > 0$ (или $bx+c = -e^t$ при $bx+c < 0$).

Отметим, что однородное уравнение, соответствующее уравнению (9.8)

$$a_0(bx+c)^n y^{(n)} + a_1(bx+c)^{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(bx+c)y' + a_ny = 0,$$

можно решать проще, используя подстановку $y = (bx+c)^\lambda$, где λ не зависит от *x*.

Задача 9.13

Решить уравнение Эйлера

$$x^2y'' - 4xy' + 6y = 0.$$

Решение

Делаем замену переменной $x = e^t$, считая, что $x > 0$ (тогда $t = \ln x$). Запишем

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{y'_t}{e^t} = y'_t e^{-t},$$

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{y''_{tt}e^{-t} - y'_t e^{-t}}{e^t} = e^{-2t}(y''_{tt} - y'_t).$$

Подставляем в исходное уравнение

$$e^{2t} \cdot e^{-2t}(y''_{tt} - y'_t) - 4e^t y'_t e^{-t} + 6y = 0,$$

или

$$y''_{tt} - 5y'_t + 6y = 0.$$

Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$ имеет корни $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$. Общее решение

$$y = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t} = C_1 e^{2\ln x} + C_2 e^{3\ln x} = C_1 x^2 + C_2 x^3; \quad C_1, \ C_2 \in \mathbb{R}.$$

Заметим, что полученное решение охватывает и случай $x < 0$.

Задача 9.14

Решить уравнение Эйлера

$$x^2 y'' - xy' + y = 8x^3.$$

Решение

Делаем замену переменной $x = e^t$, считая, что $x > 0$ (тогда $t = \ln x$). Получаем $y'_x = y'_t e^{-t}$, $y''_{xx} = e^{-2t}(y''_{tt} - y''_t)$. Подставляем в исходное уравнение

$$e^{2t} e^{-2t}(y''_{tt} - y'_t) - e^t y'_t e^{-t} + y = 8e^{3t},$$

или

$$y''_{tt} - 2y'_t + y = 8e^{3t}.$$

а) Ищем общее решение соответствующего однородного уравнения

$$y''_{tt} - 2y'_t + y = 0.$$

Характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0, \quad (\lambda - 1)^2 = 0$$

имеет корни $\lambda_{1,2} = 1$ – корень $\lambda = 1$ кратности 2. Общее решение имеет вид $y_0(t) = (C_1 + C_2 t)e^t$.

б) Правая часть уравнения $f(x) = 8e^{3t}$ имеет «стандартный» вид, где $\alpha = 3$, $\beta = 0$, $s = \max\{m, k\} = 0$. Комплексное число $z = \alpha + i\beta = 3$ не является корнем характеристического уравнения, поэтому $p = 0$. Частное решение ищется в виде $y_ч = Ae^{3t}$. Тогда $y'_ч = 3Ae^{3t}$, $y''_ч = 9Ae^{3t}$. Подставляя в неоднородное уравнение, получаем

$$9Ae^{3t} - 6Ae^{3t} + Ae^{3t} = 8e^{3t},$$

или

$$4A = 8, \quad A = 2, \quad \text{т.е.} \quad y_ч(t) = 2e^{3t}.$$

Общее решение исходного неоднородного уравнения имеет вид

$$y(x) = y_0(x) + y_ч(x) = x(C_1 + C_2 \ln x) + 2x^3.$$

Если учитывать случай $x < 0,$ то общее решение можно записать в виде, охватывающем оба случая

$$y = x(C_1 + C_2 \ln|x|) + 2x^3; \quad C_1,\ C_2 \in \mathbb{R}.$$

Задача 9.15

Решить уравнение Эйлера

$$(2x+3)^3 y''' + 3(2x+3)y' - 6y = 0.$$

Решение

1-й способ

Делаем замену переменной $2x+3 = e^t$, считая, что $2x+3 > 0$ (тогда $x = \dfrac{1}{2}e^t - \dfrac{3}{2},\ t = \ln(2x+3)$). Запишем

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{y'_t}{\frac{1}{2}e^t} = 2y'_t e^{-t},$$

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = 2\frac{y''_{tt}e^{-t} - y'_t e^{-t}}{\frac{1}{2}e^t} = 4e^{-2t}(y''_{tt} - y'_t),$$

$$y'''_{xxx} = \frac{(y''_{xx})'_t}{x'_t} = 4\frac{e^{-2t}(y'''_{ttt} - y''_{tt}) - 2e^{-2t}(y''_{tt} - y'_t)}{\frac{1}{2}e^t} = 8e^{-3t}(y'''_{ttt} - 3y''_{tt} + 2y'_t).$$

Подставляя в исходное уравнение, получаем

$$e^{3t} \cdot 8e^{-3t}(y'''_{ttt} - 3y''_{tt} + 2y'_t) + 3e^t \cdot 2y'_t e^{-t} - 6y = 0,$$

или

$$4y'''_{ttt} - 12y''_{tt} + 11y'_t - 3y = 0.$$

Характеристическое уравнение $4\lambda^3 - 12\lambda^2 + 11\lambda - 3 = 0$ имеет корни $\lambda_1 = \dfrac{1}{2},\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = \dfrac{3}{2}.$ Общее решение

$$y = C_1 e^{t/2} + C_2 e^t + C_3 e^{3t/2} = C_1(2x+3)^{1/2} + C_2(2x+3) + C_3(2x+3)^{3/2}.$$

Если учитывать случай $2x+3<0,$ то общее решение можно записать в виде, охватывающем оба случая

$$y = C_1\,\left|2x+3\right|^{1/2} + C_2(2x+3) + C_3\,\left|2x+3\right|^{3/2}; \quad C_1,\ C_2,\ C_3 \in \mathbb{R}.$$

2-й способ

Полагаем $y(x)=(2x+3)^{\lambda}$, считая, что $2x+3>0$. Имеем

$$y'_x = 2\lambda(2x+3)^{\lambda-1}, \quad y''_{xx} = 4\lambda(\lambda-1)(2x+3)^{\lambda-2},$$

$$y'''_{xxx} = 8\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(2x+3)^{\lambda-3}.$$

Подставляя в исходное уравнение, получаем

$$(2x+3)^3 \cdot 8\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(2x+3)^{\lambda-3} +$$

$$+3(2x+3)\cdot 2\lambda(2x+3)^{\lambda-1} - 6(2x+3)^{\lambda} = 0,$$

или

$$4\lambda^3 - 12\lambda^2 + 11\lambda - 3 = 0.$$

Полученное уравнение имеет корни $\lambda_1 = \dfrac{1}{2},\ \ \lambda_2 = 1,\ \ \lambda_3 = \dfrac{3}{2}.$ Общее решение

$$y = C_1(2x+3)^{1/2} + C_2(2x+3) + C_3(2x+3)^{3/2},$$

или, с учётом случая $2x+3<0$, получаем окончательно

$$y = C_1\,\left|2x+3\right|^{1/2} + C_2(2x+3) + C_3\,\left|2x+3\right|^{3/2}; \quad C_1,\ C_2,\ C_3 \in \mathbb{R}.$$

10. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

10.1. Фундаментальная система решений

Определение 10.1

Функции $y_1(x)$, $y_2(x), \ldots,$ $y_n(x)$ называются *линейно зависимыми* (л.з.) на промежутке $< a, b >,$ если существуют действительные числа α_1, $\alpha_2, \ldots,$ α_n, не равные одновременно нулю (т.е. $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_n^2 \neq 0$), такие, что для всех $x \in < a, b >$ выполняется равенство

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \ldots + \alpha_n y_n(x) = 0. \qquad (10.1)$$

Функции $y_1(x)$, $y_2(x), \ldots,$ $y_n(x)$ называются *линейно независимыми* (л.н.з.) на $< a, b >,$ если тождество (10.1) выполняется только тогда, когда $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0.$

Определение 10.2

Если функции $y_1(x)$, $y_2(x), \ldots,$ $y_n(x)$ определены и $(n-1)$ раз дифференцируемы на $< a, b >,$ то определитель n-го порядка

$$W(y_1, y_2, \ldots, y_n) = W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix},$$

называется *определителем Вронского* (или *вронскианом*) для данной системы функций.

Теорема 10.1 (необходимое условие)

Если функции $y_1(x)$, $y_2(x), \ldots,$ $y_n(x)$ $(n-1)$ раз дифференцируемы и л.з. на $< a, b >,$ то определитель Вронского тождественно равен нулю на этом промежутке.

Следствие 10.1

Если же хотя бы в одной точке $x_0 \in < a, b >$ определитель Вронского $W(x_0) \neq 0$, то система функций $y_1(x)$, $y_2(x), ...,$ $y_n(x)$ л.н.з. на $< a, b >$.

Теорема 10.2

Если линейно независимые на $< a, b >$ функции $y_1(x)$, $y_2(x), ...,$ $y_n(x)$ являются частными решениями линейного однородного уравнения

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0 \qquad (10.2)$$

с непрерывными на промежутке $< a, b >$ коэффициентами $a_i(x)$, $i = \overline{0, n}$, то определитель Вронского не обращается в нуль ни в одной точке $< a, b >$.

Следствие 10.2

Максимальное число л.н.з. решений линейного однородного уравнения (10.2) равно его порядку.

Определение 10.3

Совокупность n л.н.з. решений линейного однородного уравнения n-го порядка (10.2) называется *фундаментальной системой решений* (или *ФСР*) этого уравнения.

В следующих задачах исследовать, является ли данная система функций линейно зависимой или линейно независимой в той области, в которой они определены.

Задача 10.1

Пусть $y_1(x) = x + 2$, $y_2(x) = x - 2$. Область определения $X = (-\infty, +\infty)$.

Решение

Вычислим определитель Вронского

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} x+2 & x-2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = x + 2 - (x - 2) = 4 \neq 0,$$

следовательно, $y_1(x) = x + 2$, $y_2(x) = x - 2$ л.н.з. на $X = (-\infty, +\infty)$ по следствию 10.1.

Задача 10.2

Пусть $y_1(x) = 4 - x$, $y_2(x) = 2x + 3$, $y_3(x) = 6x + 8$. Область определения $X = (-\infty, +\infty)$.

Решение

Вычислим определитель Вронского

$$W(y_1, y_2, y_3) = \begin{vmatrix} 4-x & 2x+3 & 6x+8 \\ -1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \equiv 0$$

на $X = (-\infty, +\infty)$. Однако это ещё не доказывает линейную зависимость системы функций $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$, так как теорема 10.1 носит лишь необходимый, но не достаточный характер.

Составим линейную комбинацию функций $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$ с произвольными коэффициентами C_1, C_2, C_3 и приравняем её тождественно к нулю

$$C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + C_3 y_3(x) = C_1(4 - x) + C_2(2x + 3) +$$
$$+ C_3(6x + 8) = (-C_1 + 2C_2 + 6C_3)x + (4C_1 + 3C_2 + 8C_3) \equiv 0$$

на $X = (-\infty, +\infty)$. Полученный многочлен обращается в тождественный нуль тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} -C_1 + 2C_2 + 6C_3 = 0; \\ 4C_1 + 3C_2 + 8C_3 = 0. \end{cases}$$

Данная система уравнений является однородной, т.е. всегда совместная. Так как ранг основной матрицы равен 2 и меньше числа неизвестных ($n = 3$), то система неопределённая, т.е. существуют C_1, C_2, C_3, не равные одновременно нулю (например, $C_1 = 2$, $C_2 = -32$, $C_3 = 11$), такие, что

$$C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + C_3 y_3(x) \equiv 0$$

на $X = (-\infty, +\infty)$. Таким образом, функции $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$ л.з. на $X = (-\infty, +\infty)$.

Задача 10.3

Составить линейное однородное уравнение (возможно меньшего порядка), имеющее частные решения $y_1(x) = 1$, $y_2(x) = \cos x$. Область определения $X = (-\infty, +\infty)$.

Решение

Вычислим определитель Вронского

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} 1 & \cos x \\ 0 & -\sin x \end{vmatrix} = -\sin x.$$

Так как существует точка $x_0 = \dfrac{\pi}{2} \in X = (-\infty, +\infty),$ в которой $W(x_0) = -1 \neq 0,$ то по следствию 10.1 функции $y_1(x),$ $y_2(x)$ л.н.з. на $X = (-\infty, +\infty).$

Рассмотрим три функции 1, $\cos x$ и $y(x) \in C^2(-\infty, +\infty).$ Тогда 1, $\cos x$ можно считать функциями, составляющими ФСР некоторого линейного однородного уравнения 2-го порядка. Если $y(x)$ – произвольное решение этого уравнения, то функции 1, $\cos x$, $y(x)$ л.з., поэтому они являются решениями следующего дифференциального уравнения

$$W(y_1, y_2, y_3) = \begin{vmatrix} 1 & \cos x & y(x) \\ 0 & -\sin x & y'(x) \\ 0 & -\cos x & y''(x) \end{vmatrix} = -y'' \sin x + y' \cos x = 0,$$

$$y'' \sin x - y' \cos x = 0, \quad \text{или} \quad y'' - y' \operatorname{ctg} x = 0.$$

Последнее уравнение рассматривается на любом промежутке, не содержащем точек вида $x = \pi n,$ $n \in \mathbb{Z}.$

10.2. Формула Остроградского–Лиувилля

Рассмотрим линейное однородное уравнение 2-го порядка с переменными коэффициентами

$$a_0(x) y'' + a_1(x) y' + a_2(x) y = 0. \tag{10.3}$$

Если известно одно частное решение $y_1(x)$ этого уравнения, то порядок уравнения можно понизить следующим способом: положить в уравнении $y(x) = y_1(x) \cdot u(x),$ а затем заменой $u'(x) = z(x)$ ($u(x),$ $z(x)$ – новые неизвестные функции) свести данное уравнение к уравнению 1-го порядка.

Однако удобнее воспользоваться формулой Остроградского–Лиувилля

$$W(x) = W(x_0)\, e^{-\int\limits_{x_0}^{x} \frac{a_1(t)}{a_0(t)}dt},$$

или

$$W(x) = Ce^{-\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx}, \qquad (10.4)$$

если $a_0(x) \neq 0$ на промежутке $< a, b >$, где $W(x)$ – определитель Вронского. Для уравнения (10.3) формула Остроградского–Лиувилля принимает вид

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = Ce^{-\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx},$$

где $y_1(x)$, $y_2(x)$ – любые два решения данного уравнения.

Пусть $y(x)$ – любое решение уравнения (10.3), отличное от частного решения $y_1(x)$, тогда

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y(x) \\ y_1'(x) & y'(x) \end{vmatrix} = y_1 y' - y_1' y = Ce^{-\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx}. \qquad (10.5)$$

Делим обе части уравнения (10.5) на $y_1^2(x)$ (при этом считаем, что $y_1(x) \neq 0$ на $< a, b >$). Получим

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y(x)}{y_1(x)}\right) = \frac{1}{y_1^2(x)} Ce^{-\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx},$$

откуда $y(x)$ определяется квадратурой

$$y(x) = y_1(x)\left(\int \frac{1}{y_1^2(x)} Ce^{-\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx} dx + C_1\right); \quad C, C_1 \in \mathbb{R}. \qquad (10.6)$$

Полученная формула (10.6) определяет общее решение уравнения (10.3) и называется формулой Абеля.

Общего способа отыскания частного решения $y_1(x)$ уравнения (10.3) не существует. В некоторых случаях частное решение удаётся найти путём подбора, например в виде показательной функции $y_1(x) = e^{ax}$ или алгебраического многочлена

$$y_1(x) = x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \ldots$$

(a, b, … – постоянные).

Задача 10.4

Найти частное решение уравнения

$$(1-2x^2)y'' + 2y' + 4y = 0,$$

являющееся алгебраическим многочленом (если такое решение существует).

Решение

Сначала найдём старшую степень многочлена. Подставляя $y_1(x) = x^n + \ldots$ в исходное уравнение и выписывая только слагаемые с самой старшей степенью переменной x для каждого члена уравнения, получим

$$-2x^2 n(n-1)x^{n-2} + \ldots + 2nx^{n-1} + \ldots + 4x^n + \ldots = 0.$$

Приравнивая нулю коэффициент при самой старшей степени x полученного уравнения, находим

$$-2n(n-1) + 4 = 0, \quad n^2 - n - 2 = 0.$$

Отсюда $n_1 = 2$, $n_2 = -1$ (не подходит, так как $n \in \mathbb{N}$). Итак, $n = 2$, т.е. частное решение ищем в виде $y_1(x) = x^2 + ax + b$.

Подставляя в исходное уравнение, имеем

$$2(1-2x^2) + 2(2x+a) + 4(x^2 + ax + b) = 0,$$

$$(4a+4)x + (2a+4b+2) = 0,$$

или

$$2(a+1)x + (a+2b+1) = 0.$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x:

x^1 : $2(a+1) = 0$;

x^0 : $a + 2b + 1 = 0$,

т.е.

$$\begin{cases} a + 1 = 0; \\ a + 2b + 1 = 0, \end{cases}$$

откуда $a = -1$, $b = 0$. Итак, $y_1(x) = x^2 - x$ является частным решением.

Задача 10.5

Решить уравнение

$$(2x+1)y''+4xy'-4y=0, \quad x\neq -1/2.$$

Решение

Будем искать частное решение в виде показательной функции $y_1(x)=e^{ax}$ (если такое решение существует).

Подставляя $y_1(x)=e^{ax}$, $y_1'(x)=ae^{ax}$, $y''(x)=a^2e^{ax}$ в исходное уравнение, имеем

$$(2x+1)a^2e^{ax}+4xae^{ax}-4e^{ax}=0,$$

$$a^2(2x+1)+4ax-4=0,$$

или

$$(2a^2+4a)x+(a^2-4)=0,$$

$x^1:\ 2a^2+4a=0;$

$x^0:\ a^2-4=0,$

т.е.

$$\begin{cases} a^2+2a=0; \\ a^2-4=0, \end{cases}$$

откуда $a=-2$. Итак, частное решение $y_1(x)=e^{-2x}$.

Применим формулу Остроградского–Лиувилля. Пусть $y(x)$ – любое решение исходного уравнения, отличное от $y_1(x)$. Запишем

$$\begin{vmatrix} e^{-2x} & y \\ -2e^{-2x} & y' \end{vmatrix} = Ce^{-\int \frac{4x}{2x+1}dx},$$

$$y'e^{-2x}+2ye^{-2x}=Ce^{-2x+\ln|2x+1|+\tilde{C}},$$

$$y'e^{-2x}+2ye^{-2x}=C_1e^{-2x}(2x+1),$$

где $C_1=\pm Ce^{\tilde{C}}$. Левую и правую части последнего уравнения делим на $y_1^2(x)=e^{-4x}$, тогда

$$\frac{y'e^{-2x}+2ye^{-2x}}{e^{-4x}}=\frac{1}{e^{-4x}}C_1e^{-2x}(2x+1),$$

$$\left(\frac{y}{e^{-2x}}\right)' = C_1 e^{2x}(2x+1),$$

$$y = e^{-2x}\int C_1 e^{2x}(2x+1)\,dx = C_1 x + C_2 e^{-2x}; \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Задача 10.6

Решить уравнение

$$xy'' - (2x+1)y' + 2y = 0.$$

Решение

1-й способ

Будем искать частное решение в виде алгебраического многочлена $y_1(x) = x^n + \ldots$ (если такое решение существует).

Сначала найдём старшую степень многочлена. Подставляя $y_1(x) = x^n + \ldots$ в исходное уравнение и выписывая только слагаемые с самой старшей степенью переменной x для каждого члена уравнения, получим

$$n(n-1)x\cdot x^{n-2} + \ldots - 2x\cdot nx^{n-1} + \ldots + 2x^n + \ldots = 0.$$

Приравнивая нулю коэффициент при самой старшей степени x полученного уравнения, находим

$$-2n + 2 = 0, \quad n = 1.$$

Частное решение ищем в виде $y_1(x) = x + a.$ Подставляя в исходное уравнение, имеем

$$x\cdot 0 - (2x+1)\cdot 1 + 2(x+a) = 0,$$

отсюда $a = \dfrac{1}{2}.$ Итак, $y_1(x) = x + \dfrac{1}{2}$ является частным решением.

Применим формулу Остроградского–Лиувилля. Пусть $y(x)$ – любое решение исходного уравнения, отличное от $y_1(x).$ Запишем

$$\begin{vmatrix} x+\frac{1}{2} & y \\ 1 & y' \end{vmatrix} = Ce^{-\int\left(-\frac{2x+1}{x}\right)dx},$$

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)y'-y=Ce^{2x+\ln|x|+\tilde{C}},$$

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)y'-y=\tilde{C}_1xe^{2x},$$

где $\tilde{C}_1=\pm Ce^{\tilde{C}}$.

Левую и правую части последнего уравнения делим на $y_1^2(x)=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$, тогда

$$\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)y'-y}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\tilde{C}_1xe^{2x}}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2},$$

$$\left(\frac{y}{x+1/2}\right)'=\frac{4\tilde{C}_1xe^{2x}}{(2x+1)^2},$$

$$y=\left(x+\frac{1}{2}\right)\int\frac{4\tilde{C}_1xe^{2x}}{(2x+1)^2}\,dx=2\tilde{C}_1(2x+1)\left(\frac{e^{2x}}{4(2x+1)}+\tilde{C}_2\right)=$$

$$=C_1(2x+1)+C_2e^{2x},$$

где $C_1=2\tilde{C}_1\tilde{C}_2$, $C_2=\frac{1}{2}\tilde{C}_1$, $C_1,C_2\in\mathbb{R}$.

2-й способ

Будем искать частное решение в виде показательной функции $y_1(x)=e^{ax}$ (если такое решение существует).

Подставляя $y_1(x)=e^{ax}$, $y_1'(x)=ae^{ax}$, $y_1''(x)=a^2e^{ax}$ в исходное уравнение, получаем

$$xa^2e^{ax}-(2x+1)ae^{ax}+2e^{ax}=0,$$

$$a^2x-(2x+1)a+2=0,$$

или

$$x(a^2-2a)+(2-a)=0,$$

$x^1: \ a^2 - 2a = 0;$

$x^0: \ 2 - a = 0,$

т.е.

$$\begin{cases} a^2 - 2a = 0; \\ 2 - a = 0, \end{cases}$$

откуда $a = 2$. Итак, частное решение $y_1(x) = e^{2x}$.

Применим формулу Остроградского–Лиувилля. Пусть $y(x)$ – любое решение исходного уравнения, отличное от $y_1(x)$. Запишем

$$\begin{vmatrix} e^{2x} & y \\ 2e^{2x} & y' \end{vmatrix} = Ce^{-\int\left(-\frac{2x+1}{x}\right)dx},$$

$$y'e^{2x} - 2ye^{2x} = Ce^{2x+\ln|x|+\tilde{C}},$$

$$y'e^{2x} - 2ye^{2x} = \tilde{C}_1 xe^{2x},$$

где $\tilde{C}_1 = \pm Ce^{\tilde{C}}$.

Левую и правую части последнего уравнения делим на $y_1^2(x) = e^{4x}$, тогда

$$\frac{y'e^{2x} - 2ye^{2x}}{e^{4x}} = \frac{\tilde{C}_1 xe^{2x}}{e^{4x}},$$

$$\left(\frac{y}{e^{2x}}\right)' = \tilde{C}_1 xe^{-2x},$$

$$y = e^{2x}\int \tilde{C}_1 xe^{-2x}\,dx = \tilde{C}_1\left(-\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right) + C_2e^{2x} = C_1(2x+1) + C_2e^{2x},$$

где $C_1 = -\frac{1}{4}\tilde{C}_1; \ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

11. СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

11.1. Нормальные системы уравнений

Определение 11.1

Система обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка вида

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(t, x_1, x_2, ..., x_n); \\ \dot{x}_2 = f_2(t, x_1, x_2, ..., x_n); \\ ...; \\ \dot{x}_n = f_n(t, x_1, x_2, ..., x_n), \end{cases} \tag{11.1}$$

где t – независимая переменная; $x_1(t)$, $x_2(t), ...,$ $x_n(t)$ – неизвестные функции переменной t, называется *нормальной системой уравнений*. Число n называется *порядком нормальной системы уравнений* (здесь и далее $\dot{x}_i = \dfrac{dx_i}{dt}$, $i = \overline{1, n}$).

Определение 11.2

Общим решением нормальной системы уравнений (11.1) называется система функций $x_i = \varphi_i(t, C_1, C_2, ..., C_n)$, $i = \overline{1, n}$ (C_1, $C_2, ...,$ C_n – произвольные постоянные), которая при любых допустимых значениях C_1, $C_2, ...,$ C_n обращает уравнения системы (11.1) в тождества.

Определение 11.3

Частным решением системы (11.1) называется совокупность n функций $x_1 = \varphi_1(t)$, $x_2 = \varphi_2(t), ...,$ $x_n = \varphi_n(t)$, определённых и непрерывно-дифференцируемых на промежутке $< a, b >$, если эти функции обращают все уравнения системы (11.1) в тождества на $<a, b>$.

Определение 11.4

Задачей Коши для нормальной системы уравнений (11.1) называется задача нахождения решения

$$x_1 = x_1(t),\ \ x_2 = x_2(t), ...,\ \ x_n = x_n(t),$$

удовлетворяющего начальным условиям

$$x_1(t_0) = x_{10},\ \ x_2(t_0) = x_{20}, ...,\ \ x_n(t_0) = x_{n0},$$

где $(t_0, x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0})$ – фиксировнаная точка.

Теорема 11.1 (ТСЕ нормальной системы дифференциальных уравнений, достаточные условия)

Пусть дана нормальная система дифференциальных уравнений (11.1), где правые части f_i $(i = \overline{1, n})$ определены на множестве $D = \{t_0 - a \le t \le t_0 + a, x_{i0} - b \le x \le x_{i0} + b\}$. Если функции f_i $(i = \overline{1, n})$ удовлетворяют в D условиям:

1) все функции f_i $(t,\ x_1,\ x_2, ...,\ x_n)$ $(i = \overline{1, n})$ непрерывны и, следовательно, ограничены $|f_i| \le M$;

2) все функции f_i $(t,\ x_1,\ x_2, ...,\ x_n)$ $(i = \overline{1, n})$ удовлетворяют условиям Липшица

$$|f_i(t, x_1, x_2, ..., x_n) - f_i(t, y_1, y_2, ..., y_n)| \le N \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|,$$

где N – постоянная, то существует единственное решение $x_1 = \varphi_1(t),\ \ x_2 = \varphi_2(t), ...,\ \ x_n = \varphi_n(t),\ \ t_0 - h_0 \le t \le t_0 + h_0$, данной системы уравнений, удовлетворяющее начальным условиям $x_1(t_0) = x_{10},\ x_2(t_0) = x_{20}, ...,\ x_n(t_0) = x_{n0}$, где

$$h_0 \le \min\left(a, \frac{b_1}{M}, \frac{b_2}{M}, ..., \frac{b_n}{M}\right).$$

Замечание 11.1

Условия Липшица можно заменить более грубыми условиями существования ограниченных частных производных в D, т.е. $\left|\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}\right| \le N_2$ $(i, j = \overline{1, n})$, где N_2 – постоянная.

Рассмотрим основные методы решения нормальной системы уравнений (11.1).

1. Метод исключения

Суть этого метода заключается в следующем: из уравнений системы (11.1) и из уравнений, получающихся дифференцированием уравнений, входящих в систему, исключают все неизвестные функции, кроме одной, для определения которой получают одно дифференциальное уравнение более высокого порядка. Интегрируя это уравнение более высокого порядка, находят одну из неизвестных функций, а остальные неизвестные функции, по возможности без интегрирования, определяются из исходных уравнений и уравнений, получившихся в результате их дифференцирования.

Задача 11.1

Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = y + t; & (11.2) \\ \dot{y} = x - 2e^t. & (11.3) \end{cases}$$

Решение

Уравнение (11.2) дифференцируем по t, получаем $\ddot{x} = \dot{y} + 1$, или $\dot{y} = \ddot{x} - 1$. Подставляем в уравнение (11.3)

$$\ddot{x} - 1 = x - 2e^t, \quad \ddot{x} - x = 1 - 2e^t.$$

Получили линейное неоднородное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами со «стандартной» правой частью (см. разд. 9). Оно имеет решение

$$x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t} - te^t - 1.$$

Тогда из уравнения (11.2) получаем

$$y(t) = \dot{x} - t = C_1 e^t - C_2 e^{-t} - e^t - te^t - t = C_1 e^t - C_2 e^{-t} - e^t (t+1) - t.$$

Окончательно,

$$x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t} - te^t - 1, \quad y(t) = C_1 e^t - C_2 e^{-t} - e^t(t+1) - t;$$

$$C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

2. Метод интегрируемых комбинаций

Этот метод состоит в том, что с помощью подходящих арифметических операций из уравнений нормальной системы (11.1) образуются комбинации, которые достаточно просто проинтегрировать. Каждая комбинация даёт первый интеграл системы. Если найдены n первых независимых интегралов системы, то интегрирование системы уравнений закончено.

Определение 11.5

Функция $\Phi(t, x_1, x_2, ..., x_n)$, определённая и непрерывно-дифференцируемая в области определения нормальной системы уравнений (11.1), называется *первым интегралом этой системы*, если производная этой функции, составленная с учётом системы (11.1), равна нулю, т.е.

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} f_i(t, x_1, x_2, ..., x_n) = 0.$$

Задача 11.2

Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{x}{2x+3y}; & (11.4) \\ \dot{y} = \dfrac{y}{2x+3y}. & (11.5) \end{cases}$$

Решение

Составим первую интегрируемую комбинацию. Разделив почленно уравнение (11.4) на уравнение (11.5), получим

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x}{y}, \quad \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}, \quad \int \frac{dx}{x} = \int \frac{dy}{y},$$

$$\ln|x| = \ln|y| + \ln|C_1|, \quad x = C_1 y.$$

Решение имеет вид $\Phi_1(t, x, y) = \dfrac{x}{y} = C_1$.

Составим вторую интегрируемую комбинацию. Умножаем уравнение (11.4) на 2, уравнение (11.5) на 3 и складываем их, получим

$$2\dot{x} + 3\dot{y} = 1, \quad \text{или} \quad 2dx + 3dy = dt,$$

$$2\int dx + 3\int dy = \int dt, \quad 2x + 3y = t + C_2.$$

Решение имеет вид $\Phi_2(t, x, y) = 2x + 3y - t = C_2$.

Покажем, что полученные решения $\Phi_1(t, x, y)$, $\Phi_2(t, x, y)$ являются первыми интегралами.

Запишем

$$\frac{d\Phi_1}{dt} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} + \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_i} f_1(t, x_1, x_2) = 0 + \frac{1}{y} \cdot \frac{x}{2x+3y} - \frac{x}{y^2} \cdot \frac{y}{2x+3y} = 0;$$

$$\frac{d\Phi_2}{dt} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial t} + \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_i} f_i(t, x_1, x_2) =$$

$$= -1 + 2\frac{x}{2x+3y} + 3\frac{y}{2x+3y} = -1 + 1 = 0, \text{ где } x_1 = x, \ x_2 = y.$$

Полученные первые интегралы $\Phi_1(t, x_1, x_2)$, $\Phi_2(t, x_1, x_2)$ являются независимыми, если якобиан (определитель матрицы Якоби) отличен от нуля. Запишем

$$J = \frac{D(\Phi_1, \Phi_2)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial x} & \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial x} & \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{y} & -\dfrac{x}{y^2} \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = \frac{3}{y} + \frac{2x}{y^2} \neq 0,$$

где $2x + 3y \neq 0$, $y \neq 0$.

Общий интеграл системы уравнений есть совокупность двух независимых первых интегралов.

Запишем систему уравнений

$$\begin{cases} x = C_1 y; \\ 2x + 3y = t + C_2, \end{cases}$$

откуда общее решение исходной системы уравнений имеет вид

$$x(t) = \frac{C_1(t + C_2)}{2C_1 + 3}, \quad y(t) = \frac{t + C_2}{2C_1 + 3}, \quad C_1 \neq -\frac{3}{2}, \quad C_2 \in \mathbb{R}.$$

Заметим, что при нахождении первой интегрируемой комбинации потеряны решения вида

$$x = \frac{t + C}{2}, \quad y = 0.$$

Замечание 11.2

В общем случае, когда матрица Якоби является прямоугольной, полученные первые интегралы данной системы уравнений будут независимыми, если ранг матрицы Якоби равен числу первых интегралов.

11.2. Линейные однородные и неоднородные системы уравнений с постоянными коэффициентами

Определение 11.5

Нормальная система уравнений вида

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + f_1(t); \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + f_2(t); \\ \ldots; \\ \dot{x}_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n + f_n(t), \end{cases} \tag{11.6}$$

где $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $f_i(t)$ – непрерывные функции на $< a, b >$ $(i, j = \overline{1, n})$, $x_1(t)$, $x_2(t), \ldots,$ $x_n(t)$ – неизвестные функции переменной t, называется *линейной неоднородной системой уравнений с постоянными коэффициентами*. Если $f_1(t) = f_2(t) = \ldots = f_n(t) \equiv 0$, то система уравнений (11.6) называется *линейной однородной системой уравнений с постоянными коэффициентами*.

1. Линейная однородная система уравнений может быть записана в матричном виде

$$\dot{\underset{\downarrow}{X}} = A\underset{\downarrow}{X}, \tag{11.7}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \underset{\downarrow}{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \dot{\underset{\downarrow}{X}} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix}.$$

Определение 11.6

Набор n л.н.з. частных решений линейной однородной системы (11.7)

$$\underset{\downarrow}{X}_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ \dots \\ x_{1n} \end{pmatrix}, \ \underset{\downarrow}{X}_2 = \begin{pmatrix} x_{21} \\ x_{22} \\ \dots \\ x_{2n} \end{pmatrix}, \dots \ \underset{\downarrow}{X}_n = \begin{pmatrix} x_{n1} \\ x_{n2} \\ \dots \\ x_{nn} \end{pmatrix} \tag{11.8}$$

(здесь первый индекс указывает номер частного решения, второй – номер функции в соответствующем частном решении) образует фундаментальную систему решений (ФСР) на $< a, b >$. В этом случае определитель Вронского отличен от нуля для всех $t \in < a, b >$, т.е.

$$W(t) = W\left(\underset{\downarrow}{X}_1, \underset{\downarrow}{X}_2, \dots, \underset{\downarrow}{X}_n\right) = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{21} & \dots & x_{n1} \\ x_{12} & x_{22} & \dots & x_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{1n} & x_{2n} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Теорема 11.2

Если система частных решений (11.8) линейной однородной системы уравнений является фундаментальной, то общее решение этой системы уравнений имеет вид

$$\underset{\downarrow}{X} = C_1 \underset{\downarrow}{X}_1 + C_2 \underset{\downarrow}{X}_2 + \dots + C_n \underset{\downarrow}{X}_n, \tag{11.9}$$

где $C_1,\ C_2, \dots,\ C_n$ – произвольные постоянные.

Для решения линейной однородной системы уравнений (11.7) наряду с рассмотренным ранее методом исключения и методом интегрируемых комбинаций используется метод Эйлера (решение системы уравнений с помощью матриц).

Метод Эйлера

Пусть дана линейная однородная система уравнений (11.7). Для нахождения ФСР этой системы уравнений необходимо найти корни характеристического уравнения

$$\det\,(A-\lambda E)=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0. \qquad (11.10)$$

Данное характеристическое уравнение имеет n корней $\lambda_1,\ \lambda_2,\ldots,$ λ_n (действительные различные, комплексные или кратные), которые являются собственными значениями матрицы A.

Линейно независимые собственные векторы $\underset{\downarrow}{\gamma_k}$, отвечающие собственным значениям λ_k $(k=\overline{1,n})$, находятся из системы уравнений

$$(A-\lambda_k E)\underset{\downarrow}{\gamma_k}=\underset{\downarrow}{0}, \quad k=\overline{1,n}. \qquad (11.11)$$

Частные ненулевые решения линейной однородной системы уравнений (11.7) выбираются линейно независимыми и образуют ФСР. Общее решение системы уравнений (11.7) согласно теореме 11.2 запишется в виде (11.9).

Рассмотрим три случая.

а) Корни уравнения λ_k $(k=\overline{1,n})$ – действительные различные.

Теорема 11.3

Пусть λ_k $(k=\overline{1,n})$ – попарно-различные действительные собственные значения матрицы A, а $\underset{\downarrow}{\gamma_k}$ – соответствующие собственные векторы. Тогда векторные функции $\underset{\downarrow}{X_1}=\underset{\downarrow}{\gamma_1}e^{\lambda_1 t}$, $\underset{\downarrow}{X_2}=\underset{\downarrow}{\gamma_2}e^{\lambda_2 t},\ldots,$

$\underset{\downarrow}{X}_n = \underset{\downarrow}{\gamma}_n e^{\lambda_n t}$ образуют фундаментальную систему решений для линейной однородной системы уравнений (11.7).

Задача 11.3

Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = x - 2y + 2z; \\ \dot{y} = x + 4y - 2z; \\ \dot{z} = x + 5y - 3z. \end{cases}$$

Решение

Запишем

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 4 & -2 \\ 1 & 5 & -3 \end{pmatrix}, \quad \underset{\downarrow}{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \underset{\downarrow}{\dot{X}} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}, \quad \underset{\downarrow}{\gamma} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Найдём корни характеристического уравнения. Пользуясь свойствами определителя. получим

$$\det\,(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 2 \\ 1 & 4-\lambda & -2 \\ 1 & 5 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 4-\lambda & -2 \\ 1 & 5 & -3-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (2-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4-\lambda & -2 \\ 1 & 5 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & -2 \\ 0 & 4 & -3-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (2-\lambda) \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 4 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)[(\lambda^2 - 9) + 8] = (2-\lambda)(\lambda^2 - 1) =$$

$$= (2-\lambda)(\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0, \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = 2.$$

Находим собственные векторы $\underset{\downarrow}{\gamma}_k$, отвечающие собственным значениям λ_k, из системы уравнений (11.11).

1) $\lambda_1 = 1,\ (A - \lambda_1 E)\underset{\downarrow}{\gamma_1} = (A - E)\underset{\downarrow}{\gamma_1} = \underset{\downarrow}{0},$ или

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 5 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Решаем систему уравнений методом Гаусса

$$A_1 = A - E = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 5 & -4 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} b_1 & b_2 & b_3 \end{array} \end{array} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \overbrace{\quad\quad\quad}^{M_2} & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} b_1 & b_2 & b_3 \end{array} \end{array}.$$

(Здесь и далее используем обозначение $\overbrace{(...)}^{M_2}$ для базисного минора M_2, имеющего в данном случае столбцы b_1 и b_2).

Запишем совершаемые элементарные преобразования:

а) меняем местами первую и вторую строки;

б) к третьей строке прибавим первую строку, умноженную на (–1);

в) к третьей строке прибавим вторую строку;

г) вычеркнем нулевую третью строку;

д) вторую строку разделим на (–2).

Базисный минор $M_2 \Rightarrow \operatorname{rang} A_1 = 2,\quad n - r = 3 - 2 = 1,$ т.е. ФСР образует один вектор. Свободная переменная – b_3.

Эквивалентная система уравнений имеет вид

$$\begin{cases} b_1 + 3b_2 - 2b_3 = 0; \\ b_2 - b_3 = 0. \end{cases}$$

Если $b_3 = 1,$ то $b_2 = 1,\ b_1 = -1,$ откуда

$$\underset{\downarrow}{\gamma_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underset{\downarrow}{X_1} = \underset{\downarrow}{\gamma_1}\, e^t = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t.$$

2) $\lambda_2 = -1,\ (A - \lambda_2 E)\underset{\downarrow}{\gamma_2} = (A + E)\underset{\downarrow}{\gamma_2} = \underset{\downarrow}{0},$ или

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & 5 & -2 \\ 1 & 5 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$A_2 = A + E = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & 5 & -2 \\ 1 & 5 & -2 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} b_1 & \quad b_2 & \quad b_3 \end{matrix} \end{array} \sim \begin{array}{c} \overbrace{\qquad\quad}^{M_2}\qquad \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} b_1 & \quad b_2 & \quad b_3 \end{matrix} \end{array}.$$

Базисный минор $M_2 \Rightarrow \operatorname{rang} A_2 = 2,\quad n - r = 3 - 2 = 1,$ т.е. ФСР образует один вектор. Свободная переменная – b_3.

Эквивалентная система уравнений имеет вид

$$\begin{cases} b_1 - b_2 + b_3 = 0; \\ 2b_2 - b_3 = 0. \end{cases}$$

Если $b_3 = 2,$ то $b_2 = 1,\ b_1 = -1,$ откуда

$$\underset{\downarrow}{\gamma_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \underset{\downarrow}{X_2} = \underset{\downarrow}{\gamma_2}\, e^{-t} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-t}.$$

3) $\lambda_3 = 2,\ (A - \lambda_3 E)\underset{\downarrow}{\gamma_3} = (A - 2E)\underset{\downarrow}{\gamma_2} = \underset{\downarrow}{0},$ или

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 5 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$A_3 = A - 2E = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 5 & -5 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} b_1 & \quad b_2 & \quad b_3 \end{matrix} \end{array} \sim \begin{array}{c} \overbrace{\qquad\quad}^{M_2}\qquad \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} b_1 & \quad b_2 & \quad b_3 \end{matrix} \end{array}.$$

Базисный минор $M_2 \Rightarrow \operatorname{rang} A_3 = 2,\ \ n - r = 3 - 2 = 1,$ т.е. ФСР образует один вектор. Свободная переменная – b_3.

Эквивалентная система уравнений имеет вид

$$\begin{cases} b_1 + 2b_2 - 2b_3 = 0; \\ b_2 - b_3 = 0. \end{cases}$$

Если $b_3 = 1,$ то $b_2 = 1,\ b_1 = 0,$ откуда

$$\underset{\downarrow}{\gamma_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underset{\downarrow}{X_3} = \underset{\downarrow}{\gamma_3}\, e^{2t} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}.$$

Решения $\underset{\downarrow}{X_1},\ \underset{\downarrow}{X_2},\ \underset{\downarrow}{X_3}$ образуют ФСР. Общее решение

$$\underset{\downarrow}{X} = C_1 \underset{\downarrow}{X_1} + C_2 \underset{\downarrow}{X_2} + C_3 \underset{\downarrow}{X_3} = C_1 e^{t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_3 e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

или

$$\begin{cases} x(t) = -C_1 e^{t} - C_2 e^{-t}; \\ y(t) = C_1 e^{t} + C_2 e^{-t} + C_3 e^{2t}; \qquad C_1,\ C_2,\ C_3 \in \mathbb{R}. \\ z(t) = C_1 e^{t} + 2C_2 e^{-t} + C_3 e^{2t}; \end{cases}$$

б) Корни комплексно-сопряжённые.

Теорема 11.4

Если комплексное число λ_i – собственное значение матрицы A линейной однородной системы уравнений (11.7), то $\lambda_{i+1} = \overline{\lambda_i}$ – также собственное значение матрицы A. При этом если $\underset{\downarrow}{\gamma_i}$ – собственный вектор, отвечающий λ_i, то комплексно-сопряжённый ему вектор $\underset{\downarrow}{\gamma_{i+1}} = \overline{\underset{\downarrow}{\gamma_i}}$ – собственный вектор, отвечающий $\lambda_{i+1} = \overline{\lambda_i}$. При решении системы уравнений (11.7) комплексно-сопряжённые корни λ_i и $\lambda_{i+1} = \overline{\lambda_i}$ характеристического уравнения (11.10) рассматриваются вместе, и в качестве линейно независимых решений $\underset{\downarrow}{X}_i$ и $\underset{\downarrow}{X}_{i+1}$ могут быть взяты действительные функции $\underset{\downarrow}{X}_i = \operatorname{Re}\left(\underset{\downarrow}{\gamma}_i\, e^{\lambda_i t}\right)$ и $\underset{\downarrow}{X}_{i+1} = \operatorname{Im}\left(\underset{\downarrow}{\gamma}_i\, e^{\lambda_i t}\right)$.

Задача 11.4

Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = -3x + 2y + 2z; \\ \dot{y} = -3x - y + z; \\ \dot{z} = -x + 2y \end{cases}$$

($\lambda_1 = -2,\ \lambda_{2,3} = -1 \pm 2i$ – корни характеристического уравнения).

Решение

1) $\lambda_1 = -2,\ (A - \lambda_1 E)\,\underset{\downarrow}{\gamma}_1 = (A + 2E)\,\underset{\downarrow}{\gamma}_1 = \underset{\downarrow}{0},$ или

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$A_1 = A + 2E = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{matrix} \end{array} \sim \begin{array}{c} \overbrace{\quad\;\;}^{M_2} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{matrix} \end{array}.$$

Базисный минор $M_2 \Rightarrow \operatorname{rang} A_1 = 2,\ \ n - r = 3 - 2 = 1,$ т.е. ФСР образует один вектор. Свободная переменная – b_3.

Эквивалентная система уравнений имеет вид

$$\begin{cases} b_1 = 0; \\ b_2 + b_3 = 0. \end{cases}$$

Если $b_3 = -1,$ то $b_2 = 1,\ \ b_1 = 0,$ откуда

$$\underset{\downarrow}{\gamma_1}=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},\quad \underset{\downarrow}{X_1}=\underset{\downarrow}{\gamma_1}\,e^{-2t}=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}e^{-2t}.$$

2) Комплексно-сопряжённые корни $\lambda_{2,\,3}=-1\pm 2i$.

Возьмём $\lambda_2=-1+2i$, $(A-\lambda_2E)\,\underset{\downarrow}{\gamma_2}=(A+(1-2i)E)\,\underset{\downarrow}{\gamma_2}=\underset{\downarrow}{0}$, или

$$\begin{pmatrix}-2-2i & 2 & 2\\ -3 & -2i & 1\\ -1 & 2 & 1-2i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix};$$

$$A_2=A-(-1+2i)E=\begin{array}{c}\begin{pmatrix}-2-2i & 2 & 2\\ -3 & -2i & 1\\ -1 & 2 & 1-2i\end{pmatrix}\\ \begin{array}{ccc}\quad b_1 & \qquad\quad b_2 & \qquad\quad b_3\end{array}\end{array}\sim\begin{array}{c}\begin{array}{ccc} & \overbrace{}^{M_2} & \end{array}\\ \begin{pmatrix}-i & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}\\ \begin{array}{ccc}b_1 & b_2 & b_3\end{array}\end{array}.$$

Свободная переменная – b_1.

Эквивалентная система уравнений имеет вид

$$\begin{cases}-ib_1+b_2=0;\\ -b_1+b_3=0.\end{cases}$$

Если $b_1=1$, то $b_2=i$, $b_3=1$, откуда

$$\underset{\downarrow}{\gamma_2}=\begin{pmatrix}1\\i\\1\end{pmatrix},\quad \underset{\downarrow}{\gamma_2}\,e^{\lambda_2 t}=\begin{pmatrix}1\\i\\1\end{pmatrix}e^{(-1+2i)t}=e^{-t}\begin{pmatrix}1\\i\\1\end{pmatrix}(\cos 2t+i\sin 2t)=$$

$$=e^{-t}\left[\begin{pmatrix}\cos 2t\\ -\sin 2t\\ \cos 2t\end{pmatrix}+i\begin{pmatrix}\sin 2t\\ \cos 2t\\ \sin 2t\end{pmatrix}\right],$$

$$\underset{\downarrow}{X_2}=\mathrm{Re}\left(\underset{\downarrow}{\gamma_2}\,e^{\lambda_2 t}\right)=e^{-t}\begin{pmatrix}\cos 2t\\ -\sin 2t\\ \cos 2t\end{pmatrix},$$

$$\underset{\downarrow}{X_3} = \operatorname{Im}\left(\underset{\downarrow}{\gamma_2}\, e^{\lambda_2 t}\right) = e^{-t}\begin{pmatrix}\sin 2t\\ \cos 2t\\ \sin 2t\end{pmatrix}.$$

Решения $\underset{\downarrow}{X_1}$, $\underset{\downarrow}{X_2}$, $\underset{\downarrow}{X_3}$ образуют ФСР. Общее решение

$$\underset{\downarrow}{X} = C_1\underset{\downarrow}{X_1} + C_2\underset{\downarrow}{X_2} + C_3\underset{\downarrow}{X_3} =$$

$$= C_1 e^{-2t}\begin{pmatrix}0\\ 1\\ -1\end{pmatrix} + C_2 e^{-t}\begin{pmatrix}\cos 2t\\ -\sin 2t\\ \cos 2t\end{pmatrix} + C_3 e^{-t}\begin{pmatrix}\sin 2t\\ \cos 2t\\ \sin 2t\end{pmatrix}; \quad C_1,\ C_2,\ C_3 \in \mathbb{R}.$$

в) Корни кратные.

Теорема 11.5

Пусть λ_m – корень характеристического уравнения (11.10) кратности r_m. Тогда линейная однородная система уравнений (11.7) имеет r_m линейно независимых решений вида

$$\underset{\downarrow}{X}(t) = \left(\underset{\downarrow}{\beta_0} + \underset{\downarrow}{\beta_1}\, t + \ldots + \underset{\downarrow}{\beta_{r_m - 1}}\, t^{r_m - 1}\right) e^{\lambda_m t},$$

где $\underset{\downarrow}{\beta_i}$ ($i = 0, 1, 2, \ldots, r_m - 1$) – постоянные векторы.

Задача 11.5

Решить систему уравнений

$$\begin{cases}\dot{x} = 2x - y - z;\\ \dot{y} = 3x - 2y - 3z;\\ \dot{z} = -x + y + 2z\end{cases}$$

($\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ – корни характеристического уравнения).

Решение

1) $\lambda_1 = 0$, $(A - \lambda_1 E)\underset{\downarrow}{\gamma_1} = A\underset{\downarrow}{\gamma_1} = \underset{\downarrow}{0}$, или

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$A_1 = A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} b_1 & \quad b_2 & \quad b_3 \end{matrix} \end{array} \sim \begin{array}{c} \overbrace{\quad\quad}^{M_2} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{matrix} \end{array}.$$

Базисный минор $M_2 \Rightarrow \operatorname{rang} A_1 = 2,\ \ n - r = 1,$ т.е. ФСР образует один вектор. Свободная переменная – b_3.

Эквивалентная система уравнений имеет вид

$$\begin{cases} b_1 + b_3 = 0; \\ b_2 + 3b_3 = 0. \end{cases}$$

Если $b_3 = 1,$ то $b_2 = -3,\ \ b_1 = -1,$ откуда

$$\underset{\downarrow}{\gamma}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underset{\downarrow}{X}_1 = \underset{\downarrow}{\gamma}_1 e^{0\cdot t} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2) Корню $\lambda = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ кратности 2 должны соответствовать два л.н.з. решения вида

$$\underset{\downarrow}{X}(t) = \left(\underset{\downarrow}{\beta}_0 + \underset{\downarrow}{\beta}_1 t \right) e^{\lambda t}.$$

Сначала находим все л.н.з. решения, у которых $\underset{\downarrow}{\beta}_1 = \underset{\downarrow}{0},$ т.е. решения вида

$$\underset{\downarrow}{X}(t) = \underset{\downarrow}{\beta}_0 e^{\lambda t} = \underset{\downarrow}{\gamma} e^{\lambda t}$$

(в этом случае $\underset{\downarrow}{\beta}_0 = \underset{\downarrow}{\gamma}$ – собственный вектор матрицы A, отвечающий собственному значению $\lambda = 1$).

Запишем

$$(A - \lambda E)\underset{\downarrow}{\gamma} = (A - E)\underset{\downarrow}{\gamma} = \underset{\downarrow}{0},$$

или

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$A_2 = A - E = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} b_1 & \quad b_2 & \quad b_3 \end{matrix} \end{array} \sim \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \overbrace{1}^{M_1} & -1 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} b_1 & \quad b_2 & \quad b_3 \end{matrix} \end{array}.$$

Базисный минор $M_1 \Rightarrow \operatorname{rang} A_2 = 1$, $n - r = 3 - 1 = 2$, т.е. ФСР образуют два вектора. Свободные переменные – b_2, b_3.

Эквивалентная система уравнений $b_1 - b_2 - b_3 = 0$, откуда имеем:

а) если $b_3 = 0$, $b_2 = 1$, то $b_1 = 1$;

б) если $b_3 = 1$, $b_2 = 0$, то $b_1 = 1$, тогда

$$\underset{\downarrow}{\gamma_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underset{\downarrow}{X_2} = \underset{\downarrow}{\gamma_2} e^t = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t,$$

$$\underset{\downarrow}{\gamma_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underset{\downarrow}{X_3} = \underset{\downarrow}{\gamma_3} e^t = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^t.$$

Так как получено два л.н.з. решения, у которых $\underset{\downarrow}{\beta_1} = \underset{\downarrow}{0}$, то решений, у которых $\underset{\downarrow}{\beta_1} \neq \underset{\downarrow}{0}$, рассматривать не нужно. Решения $\underset{\downarrow}{X_1}$, $\underset{\downarrow}{X_2}$, $\underset{\downarrow}{X_3}$ образуют ФСР.

Общее решение

$$\underset{\downarrow}{X} = C_1 \underset{\downarrow}{X_1} + C_2 \underset{\downarrow}{X_2} + C_3 \underset{\downarrow}{X_3} =$$

$$= C_1 \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad C_1,\ C_2,\ C_3 \in \mathbb{R}.$$

Задача 11.6

Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + y - 2z; \\ \dot{y} = 4x + y; \\ \dot{z} = 2x + y - z \end{cases}$$

($\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = \lambda_3 = -1$ – корни характеристического уравнения).

Решение

1) $\lambda_1 = 1,\ (A - \lambda_1 E)\underset{\downarrow}{\gamma_1} = (A - E)\underset{\downarrow}{\gamma_1} = \underset{\downarrow}{0},$ или

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$A_1 = A - E = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} b_1 & b_2 & b_3 \end{array} \end{array} \sim \begin{array}{c} \overbrace{}^{M_2} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} b_1 & b_2 & b_3 \end{array} \end{array}.$$

Базисный минор $M_2 \Rightarrow \operatorname{rang} A_1 = 2,\ n - r = 3 - 2 = 1,$ т.е. ФСР образует один вектор. Свободная переменная – b_3.

Эквивалентная система уравнений имеет вид

$$\begin{cases} b_1 = 0; \\ b_2 - 2b_3 = 0. \end{cases}$$

Если $b_3 = 1,$ то $b_2 = 2,\ b_1 = 0,$ откуда

$$\underset{\downarrow}{\gamma_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underset{\downarrow}{X_1} = \underset{\downarrow}{\gamma_1}\, e^t = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^t.$$

2) Корню $\lambda = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$ кратности 2 должны соответствовать два л.н.з. решения вида

$$\underset{\downarrow}{X}(t) = \left(\underset{\downarrow}{\beta_0} + \underset{\downarrow}{\beta_1}\, t\right) e^{\lambda t}.$$

Сначала находим все л.н.з. решения, у которых $\underset{\downarrow}{\beta_1} = \underset{\downarrow}{0},$ т.е. решения вида

$$\underset{\downarrow}{X}(t) = \underset{\downarrow}{\beta_0}\, e^{\lambda t} = \underset{\downarrow}{\gamma}\, e^{\lambda t}$$

(в этом случае $\underset{\downarrow}{\beta_0} = \underset{\downarrow}{\gamma}$ – собственный вектор, отвечающий собственному значению $\lambda = -1$).

Запишем

$$(A - \lambda E)\underset{\downarrow}{\gamma} = (A + E)\underset{\downarrow}{\gamma} = \underset{\downarrow}{0},$$

или

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$A_2 = A + E = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{matrix} \end{array} \sim \begin{array}{c} \overbrace{}^{M_2} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{matrix} \end{array}.$$

Базисный минор $M_2 \Rightarrow \operatorname{rang} A_2 = 2,$ $n - r = 3 - 2 = 1,$ т.е. ФСР образует один вектор. Свободная переменная – b_3.

Эквивалентная система уравнений имеет вид

$$\begin{cases} b_1 + b_3 = 0; \\ b_2 - 2b_3 = 0. \end{cases}$$

Если $b_3 = 1,$ то $b_2 = 2,$ $b_1 = -1,$ откуда

$$\underset{\downarrow}{\gamma} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Итак, существует только одно л.н.з. решение вида

$$\underset{\downarrow}{X} = \underset{\downarrow}{\beta_0}\, e^{-t},$$

например,

$$\underset{\downarrow}{X_2} = \underset{\downarrow}{\gamma} e^{-t} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}.$$

Теперь будем искать решение

$$\underset{\downarrow}{X}(t) == \left(\underset{\downarrow}{\beta_0} + \underset{\downarrow}{\beta_1} t \right) e^{\lambda t},$$

у которого $\underset{\downarrow}{\beta_1} \neq \underset{\downarrow}{0}$. Подставим это решение в исходную систему уравнений (11.7). Так как

$$\underset{\downarrow}{\dot{X}} = \underset{\downarrow}{\beta_1} e^{\lambda t} + \lambda \left(\underset{\downarrow}{\beta_0} + \underset{\downarrow}{\beta_1} t \right) e^{\lambda t} = e^{\lambda t} \left[\left(\underset{\downarrow}{\beta_1} + \lambda \underset{\downarrow}{\beta_0} \right) + \lambda \underset{\downarrow}{\beta_1} t \right],$$

$$A \underset{\downarrow}{X} = \left(A \underset{\downarrow}{\beta_0} + tA \underset{\downarrow}{\beta_1} \right) e^{\lambda t},$$

то имеем равенство

$$e^{\lambda t} \left[\left(\underset{\downarrow}{\beta_1} + \lambda \underset{\downarrow}{\beta_0} \right) + \lambda \underset{\downarrow}{\beta_1} t \right] = e^{\lambda t} \left(A \underset{\downarrow}{\beta_0} + tA \underset{\downarrow}{\beta_1} \right),$$

откуда получаем систему уравнений

$$\begin{cases} A \underset{\downarrow}{\beta_1} = \lambda \underset{\downarrow}{\beta_1}, \ \underset{\downarrow}{\beta_1} \neq \underset{\downarrow}{0}; & (11.12) \\ A \underset{\downarrow}{\beta_0} = \lambda \underset{\downarrow}{\beta_0} + \underset{\downarrow}{\beta_1}. & (11.13) \end{cases}$$

Из уравнения (11.12) системы и условия $\underset{\downarrow}{\beta_1} \neq \underset{\downarrow}{0}$ следует, что $\underset{\downarrow}{\beta_1}$ – собственный вектор, отвечающий собственному значению λ. В данном примере $\lambda = -1$, а

$$\underset{\downarrow}{\beta_1} = C \underset{\downarrow}{\gamma} = C \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C \neq 0.$$

Уравнение (11.13) системы перепишем в виде $(A-\lambda E)\underset{\downarrow}{\beta_0}=\underset{\downarrow}{\beta_1}$. Обозначим $\underset{\downarrow}{\beta_0}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$. Тогда при $\lambda=-1$ запишем $(A+E)\underset{\downarrow}{\beta_0}=\underset{\downarrow}{\beta_1}$, или

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -C \\ 2C \\ C \end{pmatrix}, \quad C\neq 0.$$

Решаем систему методом Гаусса, запишем расширенную матрицу $\tilde{A}_3$:

$$\tilde{A}_3=\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -2 & -C \\ 4 & 2 & 0 & 2C \\ 2 & 1 & 0 & C \end{array}\right)\sim\begin{array}{c} \overbrace{}^{M_2} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & C \\ 0 & 1 & -2 & -C \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccc} a_1 & a_2 & a_3 \end{array} \end{array}.$$

Базисный минор $M_2 \Rightarrow \operatorname{rang} A_3=2$, $\operatorname{rang}\tilde{A}_3=2$, т.е. система совместна для любого $C\neq 0$, $n-r=3-2=1$, т.е. ФСР образует один вектор. Свободная переменная – a_3.

Пусть $C=1$, тогда

$$\underset{\downarrow}{\beta_1}=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Эквивалентная система уравнений имеет вид

$$\begin{cases} a_1+a_3=1; \\ a_2-2a_3=-1. \end{cases}$$

Если $a_3=0$, то $a_2=-1$, $a_1=1$, откуда

$$\underset{\downarrow}{\beta_0}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Построим решение

$$\underset{\downarrow}{X}_3 = \left(\underset{\downarrow}{\beta}_0 + \underset{\downarrow}{\beta}_1 t \right) e^{-t} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} t \right] e^{-t} = \begin{pmatrix} 1-t \\ -1+2t \\ t \end{pmatrix} e^{-t}.$$

Решения $\underset{\downarrow}{X}_1$, $\underset{\downarrow}{X}_2$, $\underset{\downarrow}{X}_3$ образуют ФСР. Общее решение

$$X = C_1 \underset{\downarrow}{X}_1 + C_2 \underset{\downarrow}{X}_2 + C_3 \underset{\downarrow}{X}_3 =$$

$$= C_1 e^{t} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 e^{-t} \begin{pmatrix} 1-t \\ -1+2t \\ t \end{pmatrix}; \quad C_1,\ C_2,\ C_3 \in \mathbb{R}.$$

2. Линейная неоднородная система уравнений может быть записана в матричном виде

$$\dot{\underset{\downarrow}{X}} = A \underset{\downarrow}{X} + \underset{\downarrow}{F}(t), \tag{11.14}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \underset{\downarrow}{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \dot{\underset{\downarrow}{X}} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix}, \quad \underset{\downarrow}{F}(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \dots \\ f_n(t) \end{pmatrix}.$$

Теорема 11.6

Общее решение линейной неоднородной системы уравнений (11.14) равно сумме общего решения соответствующей однородной системы уравнений и любого частного решения данной неоднородной системы

$$\underset{\downarrow}{X} = \underset{\downarrow}{X}_0 + \underset{\downarrow}{X}_{\text{ч}} = C_1 \underset{\downarrow}{X}_1 + C_2 \underset{\downarrow}{X}_2 + \dots + C_n \underset{\downarrow}{X}_n + \underset{\downarrow}{X}_{\text{ч}}, \tag{11.15}$$

где $\underset{\downarrow}{X}_1, \underset{\downarrow}{X}_2, ..., \underset{\downarrow}{X}_n$ – ФСР линейной однородной системы уравнений (11.7); $\underset{\downarrow}{X}_{\text{ч}}$ – частное решение линейной неоднородной системы уравнений (11.14); $C_1, C_2, ..., C_n$ – произвольные постоянные.

Одним из методов нахождения частного решения неоднородной системы (11.14) является метод вариации постоянных. Суть его состоит в следующем.

Сначала находим ФСР и общее решение однородной системы (11.7)

$$\underset{\downarrow}{X}_0 = C_1 \underset{\downarrow}{X}_1 + C_2 \underset{\downarrow}{X}_2 + ... + C_n \underset{\downarrow}{X}_n.$$

Частное решение неоднородной системы ищем в виде

$$\underset{\downarrow}{X}_{\text{ч}} = C_1(t) \underset{\downarrow}{X}_1 + C_2(t) \underset{\downarrow}{X}_2 + ... + C_n(t) \underset{\downarrow}{X}_n.$$

Дифференцируя по t последнее равенство и подставляя его в исходную систему уравнений (11.14), получаем

$$\dot{C}_1(t) \underset{\downarrow}{X}_1 + \dot{C}_2(t) \underset{\downarrow}{X}_2 + ... + \dot{C}_n(t) \underset{\downarrow}{X}_n = \underset{\downarrow}{F}(t).$$

Решая эту систему уравнений относительно неизвестных $\dot{C}_k(t)$ ($k = \overline{1, n}$), находим выражения для $\dot{C}_k(t)$. Интегрируя их, получаем $C_k(t)$ и, таким образом, частное решение $\underset{\downarrow}{X}_{\text{ч}}$.

Задача 11.7

Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = y + \operatorname{tg}^2 t - 1; \\ \dot{y} = -x + \operatorname{tg} t. \end{cases}$$

Решение

Запишем

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \underset{\downarrow}{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \underset{\downarrow}{\gamma} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \quad \underset{\downarrow}{F}(t) = \begin{pmatrix} \operatorname{tg}^2 t - 1 \\ \operatorname{tg} t \end{pmatrix}.$$

а) Ищем общее решение соответствующей однородной системы уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = y; \\ \dot{y} = -x. \end{cases}$$

Составим характеристическое уравнение

$$\det\,(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0,$$

т.е. $\lambda_{1,\,2} = \pm i.$

1) $\lambda_1 = i,\ (A - \lambda_1 E)\underset{\downarrow}{\gamma} = (A - iE)\underset{\downarrow}{\gamma} = \underset{\downarrow}{0},$ или

$$\begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$A_1 = A - iE = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} \\ \quad b_1 \qquad b_2 \end{array} \sim \begin{array}{c} \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & i \end{pmatrix}}^{M_1} \\ b_1 \quad b_2 \end{array}.$$

Свободная переменная – b_2.

Эквивалентная система уравнений имеет вид

$$b_1 + ib_2 = 0.$$

Если $b_2 = i,$ то $b_1 = 1,$ откуда

$$\underset{\downarrow}{\gamma} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad \underset{\downarrow}{\gamma} e^{\lambda_1 t} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{it} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}(\cos t + i\sin t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix},$$

$$\underset{\downarrow}{X_1} = \operatorname{Re}\left(\underset{\downarrow}{\gamma} e^{\lambda_1 t}\right) = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}, \quad \underset{\downarrow}{X_2} = \operatorname{Im}\left(\underset{\downarrow}{\gamma} e^{\lambda_1 t}\right) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}.$$

Общее решение однородной системы уравнений

$$\underset{\downarrow}{X_0} = C_1 \underset{\downarrow}{X_1} + C_2 \underset{\downarrow}{X_2} = C_1\begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix},$$

или

$$\begin{cases} x_0(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t; \\ y_0(t) = -C_1 \sin t + C_2 \cos t. \end{cases}$$

б) Ищем частное решение неоднородной системы уравнений в следующем виде

$$\begin{cases} x_{ч} = C_1(t)\cos t + C_2(t)\sin t; \\ y_{ч} = -C_1(t)\sin t + C_2(t)\cos t. \end{cases}$$

Подставляя выражения для $x_{ч}$, $y_{ч}$, $\dot{x}_{ч}$, $\dot{y}_{ч}$ в исходную неоднородную систему уравнений, получаем

$$\begin{cases} \dot{C}_1 \cos t + \dot{C}_2 \sin t = \operatorname{tg}^2 t - 1; \\ -\dot{C}_1 \sin t + \dot{C}_2 \cos t = \operatorname{tg} t. \end{cases}$$

Решаем полученную систему уравнений с помощью определителей:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{vmatrix} = \cos^2 t + \sin^2 t = 1 \neq 0;$$

$$\Delta_{\dot{C}_1} = \begin{vmatrix} \operatorname{tg}^2 t - 1 & \sin t \\ \operatorname{tg} t & \cos t \end{vmatrix} = -\cos t;$$

$$\Delta_{\dot{C}_2} = \begin{vmatrix} \cos t & \operatorname{tg}^2 t - 1 \\ -\sin t & \operatorname{tg} t \end{vmatrix} = \frac{\sin^3 t}{\cos^2 t}.$$

По формулам Крамера

$$\dot{C}_1 = \frac{\Delta_{\dot{C}_1}}{\Delta} = -\cos t, \quad \dot{C}_2 = \frac{\Delta_{\dot{C}_2}}{\Delta} = \frac{\sin^3 t}{\cos^2 t}.$$

Точно так же, как в разд. 9, интегрируем полученные равенства и находим C_1 и C_2, при этом все постоянные интегрирования опускаем.

$$C_1 = -\int \cos t\, dt = -\sin t, \quad C_2 = \int \frac{\sin^3 t}{\cos^2 t}\, dt = \cos t + \frac{1}{\cos t}.$$

Тогда

$$\begin{cases} x_{ч} = -\sin t \cos t + \left(\cos t + \dfrac{1}{\cos t}\right)\sin t = \operatorname{tg} t; \\ y_{ч} = \sin^2 t + \left(\cos t + \dfrac{1}{\cos t}\right)\cos t = 2. \end{cases}$$

Согласно формуле (11.15) общее решение исходной неоднородной системы уравнений имеет вид

$$\underset{\downarrow}{X} = \underset{\downarrow}{X}_0 + \underset{\downarrow}{X}_{\text{ч}} = C_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \operatorname{tg} t \\ 2 \end{pmatrix},$$

или

$$\begin{cases} x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t + \operatorname{tg} t; \\ y(t) = -C_1 \sin t + C_2 \cos t + 2; \end{cases} \quad C_1,\ C_2 \in \mathbb{R}.$$

Задача 11.8

Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y + \dfrac{1}{\cos t}; \\ \dot{y} = 2x - y. \end{cases}$$

Решение

а) Ищем общее решение соответствующей однородной системы уравнений методом исключения

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y; & (11.16) \\ \dot{y} = 2x - y. & (11.17) \end{cases}$$

Уравнение (11.16) дифференцируем по t, получаем $\ddot{x} = \dot{x} - \dot{y}$, или $\dot{y} = \dot{x} - \ddot{x}$. Из уравнения (11.16) почленно вычитаем уравнение (11.17), получаем $\dot{x} - \dot{y} = -x$, или $\dot{y} = \dot{x} + x$. Последнее уравнение подставляем в полученное уравнение $\dot{y} = \dot{x} - \ddot{x}$, имеем

$$\dot{x} + x = \dot{x} - \ddot{x}, \quad \text{или} \quad \ddot{x} + x = 0.$$

Получили линейное однородное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами. Оно имеет решение

$$x_0(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t.$$

Тогда из уравнения (11.16) получаем

$$y_0(t) = x - \dot{x} = C_1 \cos t + C_2 \sin t - (-C_1 \sin t + C_2 \cos t) =$$

$$= (C_1 - C_2)\cos t + (C_1 + C_2)\sin t.$$

б) Ищем частное решение неоднородной системы уравнений в следующем виде

$$\begin{cases} x_{ч} = C_1(t)\cos t + C_2(t)\sin t; \\ y_{ч} = (C_1(t) - C_2(t))\cos t + (C_1(t) + C_2(t))\sin t. \end{cases}$$

Подставляя выражения $x_{ч}$, $y_{ч}$, $\dot{x}_{ч}$, $\dot{y}_{ч}$ в исходную неоднородную систему уравнений, получаем

$$\begin{cases} \dot{C}_1\cos t + \dot{C}_2\sin t = \dfrac{1}{\cos t}; \\ (\dot{C}_1 - \dot{C}_2)\cos t + (\dot{C}_1 + \dot{C}_2)\sin t = 0, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \dot{C}_1\cos t + \dot{C}_2\sin t = \dfrac{1}{\cos t}; \\ \dot{C}_1(\cos t + \sin t) + \dot{C}_2(\sin t - \cos t) = 0. \end{cases}$$

Решаем полученную систему уравнений с помощью определителей

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ \cos t + \sin t & \sin t - \cos t \end{vmatrix} = -\cos^2 t - \sin^2 t = -1 \neq 0,$$

$$\Delta_{\dot{C}_1} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{\cos t} & \sin t \\ 0 & \sin t - \cos t \end{vmatrix} = \mathrm{tg}t - 1,$$

$$\Delta_{\dot{C}_2} = \begin{vmatrix} \cos t & \dfrac{1}{\cos t} \\ \cos t + \sin t & 0 \end{vmatrix} = -1 - \mathrm{tg}t.$$

По формулам Крамера

$$\dot{C}_1 = \frac{\Delta_{\dot{C}_1}}{\Delta} = 1 - \mathrm{tg}t\,,$$

$$\dot{C}_2 = \frac{\Delta_{\dot{C}_2}}{\Delta} = 1 + \mathrm{tg}t\,,$$

$$C_1 = \int (1 - \mathrm{tg}t)dt = t + \ln|\cos t|\,,$$

$$C_2 = \int (1 + \mathrm{tg}t)dt = t - \ln|\cos t|\,.$$

Тогда

$$\begin{cases} x_{\text{ч}} = (t + \ln|\cos t|)\cos t + (t - \ln|\cos t|)\sin t; \\ y_{\text{ч}} = 2\cos t \ln|\cos t| + 2t\sin t, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x_{\text{ч}} = t(\cos t + \sin t) + (\cos t - \sin t)\ln|\cos t|; \\ y_{\text{ч}} = 2\cos t \ln|\cos t| + 2t\sin t. \end{cases}$$

Согласно формуле (11.15) общее решение исходной неоднородной системы уравнений имеет вид

$$\underset{\downarrow}{X} = \underset{\downarrow}{X_0} + \underset{\downarrow}{X_{\text{ч}}} = C_1\begin{pmatrix} \cos t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} \sin t \\ \sin t - \cos t \end{pmatrix} +$$

$$+\begin{pmatrix} t(\cos t + \sin t) + (\cos t - \sin t)\ln|\cos t| \\ 2\cos t \ln|\cos t| + 2t\sin t \end{pmatrix},$$

или

$$\begin{cases} x(t) = C_1\cos t + C_2\sin t + t(\cos t + \sin t) + (\cos t - \sin t)\ln|\cos t|; \\ y(t) = C_1(\cos t + \sin t) + C_2(\sin t - \cos t) + 2\cos t \ln|\cos t| + 2t\sin t, \end{cases}$$

$$C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

12. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПРИ ПОМОЩИ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ

Решение многих дифференциальных уравнений не выражается в элементарных функциях. В этих случаях пользуются аналитическими приближёнными методами интегрирования дифференциальных уравнений. Одним из таких методов является метод степенных рядов, когда решение уравнения представляется в виде степенного ряда (или обобщённого степенного ряда). Этот метод базируется на следующих теоремах.

Теорема 12.1

Пусть в задаче Коши

$$y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)}),$$
$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, ..., y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \tag{12.1}$$

функция f является аналитической в некоторой окрестности точки (x_0, y_0, $y'_0, ...,$ $y_0^{(n-1)}$), т.е. она может быть разложена по степеням $(x - x_0)$, $(y - y_0)$, $(y' - y'_0), ...,$ $(y^{(n-1)} - y_0^{(n-1)})$. Тогда решение задачи Коши является аналитической функцией и может быть представлено в виде ряда по степеням $(x - x_0)$.

Следующие две теоремы формулируются для наиболее часто встречающихся в приложениях дифференциальных уравнений 2-го порядка.

Теорема 12.2

Если $p_0(x)$, $p_1(x)$, $p_2(x)$ являются аналитическими функциями в окрестности точки $x = x_0$ и $p_0(x) \neq 0$, то решения уравнения

$$p_0(x)y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0 \tag{12.2}$$

также являются аналитическими функциями в некоторой окрестности этой же точки и, следовательно, решения уравнения (12.2) можно искать в виде степенного ряда

$$y(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots$$

Теорема 12.3

Если уравнение (12.2) удовлетворяет условиям предыдущей теоремы 12.2, но $x = x_0$ является нулём конечного порядка s функции $p_0(x)$, нулём порядка $(s-1)$ или выше функции $p_1(x)$ (если $s > 1$) и нулём порядка не ниже $(s-2)$ функции $p_2(x)$ (если $s > 2$), то существует по крайней мере одно нетривиальное решение уравнения (12.2) в виде обобщённого степенного ряда

$$y(x) = a_0(x - x_0)^k + a_1(x - x_0)^{k+1} + \ldots + a_n(x - x_0)^{k+n} + \ldots, \quad (12.3)$$

где k – некоторое действительное число, которое может быть как целым, так и дробным, как положительным, так и отрицательным.

Задача 12.1

Найти решение задачи Коши

$$y' = y^2 - x, \quad y(0) = 1$$

в виде степенного ряда. Вычислить несколько первых коэффициентов ряда (до коэффициента при x^4 включительно).

Решение

Поскольку правая часть уравнения $f(x, y) = y^2 - x$ является аналитической функцией, то решение данной задачи Коши (см. (12.1)) можно искать в виде степенного ряда по степеням x ($x_0 = 0$)

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \ldots$$

Из условия $y(0) = 1$ следует, что $a_0 = 1$, тогда

$$y(x) = 1 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \ldots,$$

$$y'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \ldots$$

Полученные выражения подставим в исходное уравнение

$$a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + ... = (1 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + ...)^2 - x.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в последнем равенстве, получим

$x^0: \ a_1 = 1;$

$x^1: \ 2a_2 = 2a_1 - 1;$

$x^2: \ 3a_3 = a_1^2 + 2a_2;$

$x^3: \ 4a_4 = 2a_3 + 2a_1a_2;$

…

Из полученной системы уравнений следует, что $a_1 = 1, \ a_2 = 1/2,$ $a_3 = 2/3, \ a_4 = 7/12.$

Итак, решение задачи Коши имеет вид

$$y(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{7}{12}x^4 + ...$$

Задача 12.2

Найти линейно независимые решения уравнения

$$y'' - x^2y = 0$$

в виде степенных рядов.

Решение

Так как коэффициент при старшей производной $p_0(x) = 1$ не обращается нигде в нуль, то решение уравнения будем искать в виде степенного ряда

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + ...,$$

тогда

$$y'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + ...,$$

$$y''(x) = 2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 + 20a_5x^3 + ...$$

Подставим полученные выражения в исходное уравнение

$$(2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 + 20a_5x^3 + ...) - x^2(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + ...) = 0.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в последнем равенстве, получим

$x^0: \; 2a_2 = 0;$

$x^1: \; 6a_3 = 0;$

$x^2: \; 12a_4 = a_0;$

$x^3: \; 20a_5 = a_1;$

…

Из полученной системы уравнений выводим рекуррентные соотношения для коэффициентов

$$a_{4k} = \frac{a_{4k-4}}{4k(4k-1)}, \quad a_{4k+1} = \frac{a_{4k-3}}{4k(4k+1)}, \quad a_{4k-2} = a_{4k-1} = 0, \quad k \in \mathbb{N}.$$

В этих соотношениях a_0 и a_1 являются свободными переменными, а потому, взяв сначала $a_0 = 1$, $a_1 = 0$ (соответствует y_1), а затем $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ (соответствует y_2), получим два л.н.з. решения

$$y_1(x) = 1 + \frac{x^4}{4\cdot 3} + \frac{x^8}{8\cdot 7\cdot 4\cdot 3} + \frac{x^{12}}{12\cdot 11\cdot 8\cdot 7\cdot 4\cdot 3} + ...,$$

$$y_2(x) = x + \frac{x^5}{5\cdot 4} + \frac{x^9}{9\cdot 8\cdot 5\cdot 4} + \frac{x^{13}}{13\cdot 12\cdot 9\cdot 8\cdot 5\cdot 4} + ...$$

Отметим, что при $a_0 = a_1 = 0$ получим решение $y = 0$.

Задача 12.3

Найти те решения уравнения

$$x^2 y'' - x^2 y' + (x-2)y = 0,$$

которые выражаются степенными рядами (или обобщёнными степенными рядами).

Решение

Поскольку коэффициент при старшей производной $p_0(x) = x^2$ обращается в нуль при $x = 0$, то решение данного уравнения будем искать в виде обощённого степенного ряда (12.3):

$$y(x)=\sum_{m=0}^{\infty}a_m x^{m+k}=a_0x^k+a_1x^{k+1}+a_2x^{k+2}+a_3x^{k+3}+...,$$

тогда

$$y'(x)=\sum_{m=0}^{\infty}a_m(m+k)x^{m+k-1},\quad y''(x)=\sum_{m=0}^{\infty}a_m(m+k)(m+k-1)x^{m+k-2}.$$

Подставим эти выражения в исходное уравнение:

$$x^2\sum_{m=0}^{\infty}a_m(m+k)(m+k-1)x^{m+k-2}-x^2\sum_{m=0}^{\infty}a_m(m+k)x^{m+k-1}+$$

$$+(x-2)\sum_{m=0}^{\infty}a_m x^{m+k}=0. \qquad (12.4)$$

Приравнивая коэффициенты при наименьшей степени *x*, т.е. при x^k, получаем

$$a_0k(k-1)-2a_0=0.$$

Для этого уравнения возможны следующие случаи.

1. Если $a_0=0$, то все остальные $a_i=0$ ($i\in\mathbb{N}$), так как они согласно (12.4) выражаются через a_0 по формулам $a_i=C_ia_0$, где C_i – некоторые отличные от нуля постоянные. Таким образом, получаем тривиальное решение.

2. Если $a_0\neq 0$, то $k^2-k-2=0$, т.е. $k_1=-1$, $k_2=2$.

а) Полагая в уравнении (12.4) $k=-1$ и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях *x*, получаем

$x^0:\ 2a_0-2a_1=0;$

$x^1:\ a_1-2a_2=0;$

$x^2:\ 2a_3-a_2+a_2-2a_3=0;$

$x^3:\ 6a_4-2a_3+a_3-2a_4=0;$

$x^4:\ 12a_5-3a_4+a_4-2a_5=0;$

…

Как видно, в этой системе уравнений две свободные переменные a_0 и a_3. Поэтому, полагая сначала $a_0 = 1$, $a_3 = 0$, а затем $a_0 = 0$, $a_3 = 1$, получаем два л.н.з. решения

$$y_1(x) = \frac{1}{x} + 1 + \frac{1}{2}x;$$

$$y_2(x) = x^2 + \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{20}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + \ldots$$

Последнее решение можно записать в более компактной форме, если умножить y_2 на $\dfrac{x}{6}$ и к полученному соотношению добавить $1 + x + \dfrac{1}{2}x^2$, тогда $\dfrac{x}{6}y_2 + 1 + x + \dfrac{1}{2}x^2 = e^x$, т.е.

$$y_2(x) = \frac{6}{x}\left(e^x - 1 - x - \frac{1}{2}x^2\right) = 6\left(\frac{e^x - 1}{x} - 1 - \frac{x}{2}\right).$$

б) Если $k = 2$, то приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, получаем

x^4: $12a_0 - 2a_0 = 0;$

x^5: $20a_1 - 4a_0 + a_0 - 2a_1 = 0;$

x^6: $30a_2 - 5a_1 + a_1 - 2a_2 = 0;$

…

Получаем систему уравнений, решением которой являются $a_i = 0$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, т.е. опять имеем тривиальное решение $y = 0$.

Задача 12.4

Решить уравнение

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \lambda^2)y = 0, \quad \lambda = \text{const}. \qquad (12.5)$$

Решение

Данное уравнение называется уравнением Бесселя, хотя впервые оно встречается в работах Л. Эйлера и Д. Бернулли.

Поскольку коэффициент при старшей производной $p_0(x)=x^2$ обращается в нуль при $x=0,$ то решение уравнения Бесселя будем искать в виде обощённого степенного ряда

$$y(x)=\sum_{m=0}^{\infty}a_m x^{m+k}=a_0x^k+a_1x^{k+1}+a_2x^{k+2}+a_3x^{k+3}+..., \qquad (12.6)$$

тогда

$$y'(x)=\sum_{m=0}^{\infty}a_m(m+k)x^{m+k-1}, \quad y''(x)=\sum_{m=0}^{\infty}a_m(m+k)(m+k-1)x^{m+k-2}.$$

Подставим эти выражения в исходное уравнение и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях *x*. Получим

$x^k:\ (k^2-\lambda^2)a_0=0;$

$x^{k+1}:\ [(k+1)^2-\lambda^2]a_1=0;$

$x^{k+2}:\ [(k+2)^2-\lambda^2]a_2+a_0=0;$

…;

$x^{k+m}:\ [(k+m)^2-\lambda^2]a_m+a_{m-2}=0;$

…

Рассмотрим сначала случай, когда λ не является целым числом. Считая $a_0\neq 0,$ из первого уравнения системы находим, что $k_{1,2}=\pm\lambda.$ Пусть $k_1=\lambda.$ Тогда из второго уравнения системы получаем, что $a_1=0,$ а из уравнения $[(k+m)^2-\lambda^2]a_m=-a_{m-2},$ придавая *m* значения 3, 5, 7, …, имеем: $a_3=a_5=a_7=...=0.$ Для коэффициентов с чётными номерами получаем выражения

$$a_2=\frac{-a_0}{(2\lambda+2)\cdot 2}, \quad a_4=\frac{-a_2}{(2\lambda+4)\cdot 4}=\frac{a_0}{(\lambda+1)(\lambda+2)\cdot 1\cdot 2\cdot 2^4},...,$$

$$a_{2m}=\frac{-a_{2m-2}}{(2\lambda+2)\cdot 2\cdot m}=\frac{(-1)^m\cdot a_0}{2\cdot 4\cdot 6\cdot ...\cdot 2m(2\lambda+2)(2\lambda+4)...(2\lambda+2m)}.$$

Подставляя найденные коэффициенты в ряд (12.6), получим решение

$$y_1(x) = a_0 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{\lambda+2m}}{4^m \cdot m!(\lambda+1)(\lambda+2)...(\lambda+m)},$$

где коэффициент a_0 остаётся произвольным. При $k_2 = -\lambda$ все коэффициенты a_m аналогично определяются только в том случае, когда λ не равно целому числу. Тогда решение можно получить, заменяя в предыдущем решении $y_1(x)$ параметр λ на –λ:

$$y_2(x) = a_0 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{-\lambda+2m}}{4^m \cdot m!(-\lambda+1)(-\lambda+2)...(-\lambda+m)}.$$

Полученным решениям $y_1(x)$ и $y_2(x)$ можно придать более удобный вид, если выбрать произвольную постоянную $a_0 = \dfrac{1}{2^\lambda \Gamma(\lambda+1)}$,

где $\Gamma(\lambda) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x} x^{\lambda-1}\, dx$ – гамма-функция Эйлера, $\lambda > 0$.

Решение

$$y_1(x) = J_\lambda(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(\lambda+m+1)} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\lambda} \qquad (12.7)$$

называется *функцией Бесселя* (или *цилиндрической функцией*) *первого рода порядка* λ (отметим ещё раз, что λ не является целым числом). Решение $y_2(x)$ при $k = -\lambda$ запишется в виде

$$y_2(x) = J_{-\lambda}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(-\lambda+m+1)} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2m-\lambda} \qquad (12.8)$$

и называется *функцией Бесселя первого рода порядка –λ*.

Полученные степенные ряды (12.7), (12.8) сходятся при любых значениях *x*. Эти решения л.н.з., так как линейная комбинация $\alpha_1 J_\lambda(x) + \alpha_2 J_{-\lambda}(x) = 0$ тождественно равняется нулю лишь при $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

Следовательно, общее решение уравнения (12.5) при λ, не равном целому числу, имеет вид

$$y(x) = C_1 J_\lambda(x) + C_2 J_{-\lambda}(x),$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Если λ равно целому числу, т.е. $\lambda = n$ ($n \in \mathbb{Z}$), то частное решение $y_1(x)$ уравнения (12.5) записывается в виде функции Бесселя первого рода:

$$y_1(x) = J_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma\,(n+m+1)} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n}.$$

Для построения частного решения $y_2(x)$, образующего вместе с $y_1(x)$ л.н.з. систему, поступают следующим образом. Считая пока λ не равным целому числу, рассматривают линейную комбинацию

$$\frac{J_\lambda(x)\cos\pi\lambda - J_{-\lambda}(x)}{\sin\pi\lambda}.$$

Затем, переходя к пределу при $\lambda \to n$, получают функцию Бесселя второго рода

$$y_2(x) = Y_n(x) = \lim_{\lambda\to n} \frac{J_\lambda(x)\cos\pi\lambda - J_{-\lambda}(x)}{\sin\pi\lambda}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Указанные решения $J_n(x)$ и $Y_n(x)$ л.н.з., поэтому общее решение уравнения (12.5) при λ, равном целому числу n, имеет вид

$$y(x) = C_1 J_n(x) + C_2 Y_n(x),$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Покажем теперь, как интегрирование дифференциальных уравнений при помощи степенных рядов используется при решении некоторых задач из курса математического анализа.

Задача 12.5

Разложить в степенной ряд (ряд Маклорена) функцию

$$f(x) = \sin\,(\mu \arcsin x) \tag{12.9}$$

с параметром $\mu \in \mathbb{R}$.

Решение

Отметим сразу, что искомый степенной ряд имеет интервал сходимости (–1, 1).

Составим дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция $f(x)$. Для этого вычислим первую и вторую производные этой функции. При всех $x \in (-1, 1)$ имеем

$$f'(x)=\frac{\mu}{\sqrt{1-x^2}}\cos\,(\mu\arcsin x),$$

$$f''(x)=\frac{1}{1-x^2}\left(x\frac{\mu}{\sqrt{1-x^2}}\cos\,(\mu\arcsin x)-\mu^2\sin\,(\mu\arcsin x)\right)=$$

$$=\frac{1}{1-x^2}(xf'(x)-\mu^2 f(x)).$$

Итак, функция $y=f(x)$, заданная формулой (12.9), является решением однородного ОДУ 2-го порядка с переменными коэффициентами

$$(1-x^2)y''-xy'+\mu^2 y=0. \qquad (12.10)$$

Поскольку функция (12.9) является нечётной, то её разложение в ряд по степеням x ищем в виде

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_{2k+1}x^{2k+1}, \quad x\in(-1,1).$$

Отсюда при тех же x имеем

$$f'(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)\,a_{2k+1}x^{2k}, \quad f''(x)=\sum_{k=1}^{\infty}2k(2k+1)\,a_{2k+1}x^{2k-1}.$$

Подставляя разложения для $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ в уравнение (12.10), получаем

$$(1-x^2)\sum_{k=1}^{\infty}2k\,(2k+1)\,a_{2k+1}x^{2k-1}-x\sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)\,a_{2k+1}x^{2k}+$$

$$+\mu^2\sum_{k=0}^{\infty}a_{2k+1}x^{2k+1}=0.$$

После преобразований приходим к тождеству

$$\sum_{k=0}^{\infty}((2k+2)\,(2k+3)\,a_{2k+3}-2k\,(2k+1)\,a_{2k+1}-$$

$$-(2k+1)\,a_{2k+1}+\mu^2 a_{2k+1})\,x^{2k+1}\equiv 0.$$

Поэтому

$$(2k+2)\,(2k+3)\,a_{2k+3}=((2k+1)^2-\mu^2)\,a_{2k+1}, \quad k=0,1,2,\ldots \qquad (12.11)$$

Заметим, что $a_1 = f'(0) = \mu,$ откуда согласно (12.11) при $k = 0$ находим

$$a_3 = \frac{1^2 - \mu^2}{2 \cdot 3} a_1 = \mu \frac{1^2 - \mu^2}{3!}.$$

Далее, подставляя в (12.11) $k = 1$, получим

$$a_5 = \frac{3^2 - \mu^2}{4 \cdot 5} a_3 = \mu \frac{(1^2 - \mu^2)(3^2 - \mu^2)}{5!}.$$

Последовательное применение рекуррентного правила (12.11) даёт выражение

$$a_{2k+1} = \mu \frac{1}{(2k+1)!} \prod_{j=0}^{k-1} ((2j+1)^2 - \mu^2), \quad k \in \mathbb{N}. \qquad (12.12)$$

Отметим, что строгое обоснование формулы (12.12) проводится методом математической индукции. В результате для произвольного $\mu \in \mathbb{R}$ установлено представление

$$\sin(\mu \arcsin x) = \mu \left(x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} \prod_{j=0}^{k-1} ((2j+1)^2 - \mu^2) x^{2k+1} \right) =$$

$$= \mu x + \frac{\mu(1^2 - \mu^2)}{3!} x^3 + \frac{\mu(1^2 - \mu^2)(3^2 - \mu^2)}{5!} x^5 + \ldots, \quad x \in (-1, 1). \quad (12.13)$$

В частности, при $\mu = 1$ формула (12.12) означает, что $a_{2k+1} = 0$ при всех $k \in \mathbb{N},$ и формула (12.13) превращается в тождество

$$\sin(\arcsin x) = x, \quad x \in (-1, 1),$$

действующее, очевидно, на отрезке $[-1, 1]$.

При $\mu = \dfrac{1}{2}$ из (12.12) для всех $k \in \mathbb{N}$ имеем

$$a_{2k+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(2k+1)!} \prod_{j=0}^{k-1} \left((2j+1)^2 - \frac{1}{2^2} \right) =$$

$$= \frac{1}{2(2k+1)!} \prod_{j=0}^{k-1} \left(2j + \frac{1}{2} \right) \left(2j + \frac{3}{2} \right) =$$

$$=\frac{1}{2(2k+1)!}\cdot\frac{1}{2^{2k}}\prod_{j=0}^{k-1}(4j+1)(4j+3)=$$

$$=\frac{1}{2^{2k+1}}\cdot\frac{1}{(2k+1)!}\prod_{j=0}^{k-1}\frac{(4j+1)(4j+2)(4j+3)(4j+4)}{(4j+2)(4j+4)}=$$

$$=\frac{1}{2^{2k+1}}\cdot\frac{1}{(2k+1)!}\cdot\frac{(4k)!}{2^{2k}(2k)!}=\frac{1}{2k+1}\cdot\frac{1}{2^{4k+1}}\cdot C_{4k}^{2k}.$$

Подставляя найденные выражения для коэффициентов a_{2k+1} в (12.13) при $\mu=\frac{1}{2}$, запишем

$$\sin\left(\frac{1}{2}\arcsin x\right)=\frac{1}{2}\left(x+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\cdot\frac{1}{2^{4k}}C_{4k}^{2k}x^{2k+1}\right),\quad x\in(-1,1).\quad (12.14)$$

По формуле Стирлинга ($n!\sim\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ при $n\to\infty$)

$$a_{2k+1}=\frac{1}{2k+1}\cdot\frac{1}{2^{4k+1}}\cdot C_{4k}^{2k}\sim\frac{1}{4k\cdot 2^{4k}}\cdot\frac{(4k)!}{((2k)!)^2}\sim$$

$$\sim\frac{1}{4k\cdot 2^{4k}}\cdot\frac{\sqrt{8\pi k}\left(\frac{4k}{e}\right)^{4k}}{4\pi k\left(\frac{2k}{e}\right)^{4k}}=\frac{1}{8}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{1}{k^{3/2}},\quad k\to\infty.$$

Следовательно, ряд (12.14) сходится при $x=\pm 1$, разложение (12.14) справедливо для $x\in[-1,1]$. Отметим ещё, что левая часть (12.14) допускает следующую запись

$$\sin\left(\frac{1}{2}\arcsin x\right)=\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{2}},\quad \text{если}\quad x\in[0,1];$$

$$\sin\left(\frac{1}{2}\arcsin x\right)=-\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{2}},\quad \text{если}\quad x\in[-1,0].$$

Выделим, наконец, в общей формуле (12.13) случай $\mu = \frac{1}{3}$. Здесь

$$a_{2k+1} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(2k+1)!}\prod_{j=0}^{k-1}\left((2j+1)^2 - \frac{1}{3^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{3(2k+1)!}\prod_{j=0}^{k-1}\left(2j+\frac{2}{3}\right)\left(2j+\frac{4}{3}\right) =$$

$$= \frac{1}{3(2k+1)!}\cdot\frac{2^{2k}}{3^{2k}}\prod_{j=0}^{k-1}(3j+1)\,(3j+2) =$$

$$= \frac{2^{2k}}{3^{2k+1}}\cdot\frac{1}{(2k+1)!}\prod_{j=0}^{k-1}\frac{(3j+1)\,(3j+2)\,(3j+3)}{3j+3} =$$

$$= \frac{2^{2k}}{3^{3k+1}}\cdot\frac{1}{(2k+1)!}\cdot\frac{(3k)!}{k!} = \frac{1}{2k+1}\cdot\frac{2^{2k}}{3^{3k+1}}\,C_{3k}^{k}, \quad k\in\mathbb{N}.$$

Следовательно, представление (12.13) при $\mu = \frac{1}{3}$ принимает вид

$$\sin\left(\frac{1}{3}\arcsin x\right) = \frac{1}{3}\left(x + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\cdot\left(\frac{4}{27}\right)^{k} C_{3k}^{k}\,x^{2k+1}\right), \quad x\in(-1,1). \quad (12.15)$$

По формуле Стирлинга

$$a_{2k+1} = \frac{1}{2k+1}\cdot\frac{2^{2k}}{3^{3k+1}}\,C_{3k}^{k} \sim \frac{1}{6k}\left(\frac{4}{27}\right)^{k}\frac{(3k)!}{k!\,(2k)!} \sim$$

$$\sim \frac{1}{6k}\left(\frac{4}{27}\right)^{k}\frac{\sqrt{6\pi k}\left(\frac{3k}{e}\right)^{3k}}{\sqrt{2\pi k}\left(\frac{k}{e}\right)^{k}\sqrt{4\pi k}\left(\frac{2k}{e}\right)^{2k}} = \frac{1}{12}\sqrt{\frac{3}{\pi}}\cdot\frac{1}{k^{3/2}}, \quad k\to\infty.$$

Таким образом, ряд (12.15) сходится при $x = \pm 1$, и разложение (12.15) справедливо для $x\in[-1,1]$.

Задача 12.6

Разложить в степенной ряд (ряд Маклорена) функцию

$$g(x) = \cos(\mu \arcsin x) \tag{12.16}$$

с параметром $\mu \in \mathbb{R}$.

Решение

Эта задача аналогична предыдущей. Сохраним схему рассуждений, опуская подробные выкладки.

Здесь

$$g'(x) = -\frac{\mu}{\sqrt{1-x^2}} \sin(\mu \arcsin x),$$

$$g''(x) = -\frac{1}{1-x^2}\,(xg'(x) - \mu^2 g(x))$$

для всех $x \in (-1, 1)$. Поэтому функция (12.16) удовлетворяет тому же дифференциальному уравнению (12.10), что и функция (12.9). Нетрудно проверить, что на любом отрезке $[a, b] \subset (-1, 1)$ пара функций $f(x) = \sin(\mu \arcsin x)$, $g(x) = \cos(\mu \arcsin x)$ образует ФСР для ОДУ (12.10), и его общее решение записывается в виде

$$y(x) = C_1 \sin(\mu \arcsin x) + C_2 \cos(\mu \arcsin x); \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Поскольку функция (12.16) является чётной и $g(0) = 1$, то её разложение в ряд по степеням x ищем в виде

$$g(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} b_{2k} x^{2k}, \quad x \in (-1, 1).$$

Подставляя разложения для $g(x)$ и её производных

$$g'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} 2k b_{2k} x^{2k-1}, \quad g''(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (2k-1)\, 2k b_{2k} x^{2k-2}$$

в уравнение (12.10), после несложных преобразований приходим к рекуррентному соотношению

$$(2k+1)(2k+2) b_{2k+2} = (4k^2 - \mu^2) b_{2k}, \quad k \in \mathbb{N},$$

где $b_2 = -\frac{\mu^2}{2}$. Отсюда получаем явную формулу для коэффициентов

$$b_{2k} = \frac{1}{(2k)!}\prod_{j=0}^{k-1}(4j^2 - \mu^2), \quad k \in \mathbb{N}. \qquad (12.17)$$

Таким образом, при любом $\mu \in \mathbb{R}$ справедливо представление

$$\cos(\mu \arcsin x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)!}\prod_{j=0}^{k-1}(4j^2 - \mu^2)\, x^2 = 1 - \frac{\mu^2}{2!}x^2 -$$

$$-\frac{\mu^2(2^2-\mu^2)}{4!}x^4 - \frac{\mu^2(2^2-\mu^2)(4^2-\mu^2)}{6!}x^6 - \ldots, \quad x \in (-1, 1). \qquad (12.18)$$

Например, при $\mu = 1$ формула (12.17) даёт

$$b_{2k} = \frac{1}{(2k)!}\prod_{j=0}^{k-1}(4j^2 - 1) = \frac{1}{(2k)!}\prod_{j=0}^{k-1}(2j-1)(2j+1) =$$

$$= -\frac{1}{(2k)!}\prod_{j=1}^{k-1}\frac{(2j-1)(2j)^2(2j+1)}{4j^2} = -\frac{1}{(2k)!}\cdot\frac{(2k-2)!\,(2k-1)!}{4^{k-1}((k-1)!)^2} =$$

$$= -\frac{1}{2k}\cdot\frac{1}{4^{k-1}}\cdot C_{2k-2}^{k-1}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Тогда представление (12.18) при $\mu = 1$ записывается так:

$$\cos(\arcsin x) = 1 - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{4^{k-1}}C_{2k-2}^{k-1}x^{2k} =$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k+1}\cdot\frac{1}{4^k}C_{2k}^{k}x^{2k+2}, \quad x \in (-1, 1).$$

С учётом сходимости ряда в точках $x = \pm 1$ и тождества $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$, $x \in [-1, 1]$, получим представление

$$\sqrt{1-x^2} = 1 - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k+1}\cdot\frac{1}{4^k}C_{2k}^{k}x^{2k+2}, \quad x \in [-1, 1].$$

Укажем, что получение формул (12.13), (12.18) прямым методом, основанным на стандартных разложениях функций $\sin x$, $\cos x$, $\arcsin x$ в ряды Тейлора с последующей подстановкой ряда в ряд, связано с серьёзными вычислительными трудностями.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1969.

2. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1985.

3. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1970.

4. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1992.

5. Боярчук А.К., Головач Г.П. Справочное пособие по высшей математике. Дифференциальные уравнения в примерах и задачах. Т. 5. М.: УРСС, 1998.

6. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука. 1972.

7. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х ч. Ч. 2. М.: Высшая школа, 1986.

8. Методические указания к решению задач по курсу «Дифференциальные уравнения» / Под ред. А.С. Логинова. М.: МИФИ, 1987.

9. Костин А.Б., Михайлов Л.Е. Дифференциальные уравнения. Учебно-методическое пособие. М.: МИФИ, 2002.

10. Рубинштейн А.И. Методическое руководство по решению обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: НИЯУ МИФИ. 2012.

11. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.: Наука, 1990.

12. Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А. Математический анализ в задачах и упражнениях (числовые и функциональные ряды). М.: Факториал, 1996.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Редактор М.В. Макарова

Подписано в печать 25.04.2019. Формат 60×84 1/16.
Уч.-изд. л. 10,5. Печ. л. 10,5. Тираж 50 экз.
Изд. № 003-1. Заказ № 36

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ».
Типография НИЯУ МИФИ.
115409, Москва, Каширское ш., 31