

Федеральное агентство по образованию  
Московский инженерно-физический институт  
(государственный университет)

**В.В. Смирнов**

**Моделирование процесса переноса электронов  
в задачах радиационной физики**

Рекомендовано УМО «Ядерные физика и технологии»  
в качестве учебного пособия  
для студентов высших учебных заведений

Москва 2008

УДК 539.124(075)  
ББК 22.382  
С50

Смирнов В.В. **Моделирование процесса переноса электронов в задачах радиационной физики:** Учебное пособие. — М.: МИФИ, 2008. — 76 с.

В учебном пособии представлена основная информация о моделировании процесса переноса быстрых электронов в веществе на основе метода статистических испытаний. Приводятся данные о способах построения расчетных моделей, используемых сечениях и функциях распределения параметров при многократном взаимодействии электронов с веществом, оценки погрешностей рассчитываемых величин и практические методы реализации программных кодов. Дан обзор известных в настоящее время моделей переноса электронов. Приведены примеры областей применения соответствующих модификаций моделей для решения задач радиационной физики. Пособие ориентировано на студентов, обучающихся по специальности «Радиационная безопасность человека и окружающей среды».

Пособие подготовлено в рамках Инновационной образовательной программы

Рецензент канд. техн. наук, доц. В.К. Сахаров

ISBN 978-5-7262-1084-1 © Московский инженерно-физический институт (государственный университет), 2008

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение .....	4
<b>Глава 1.</b> Процессы взаимодействия электронов с веществом: сечения и распределения многократных столкновений в моделях переноса электронов .....	6
1.1. Ионизационные потери энергии электронов.....	6
1.2. Тормозное излучение.....	8
1.3. Многократное рассеяние электронов.....	10
1.4. Неупругие столкновения электронов с большой передачей энергии.....	14
1.5. Флуктуации ионизационных потерь энергии электронов ..	16
<b>Глава 2.</b> Основные принципы построения расчетных моделей переноса электронов в рамках метода Монте-Карло.....	18
2.1. Расчет переноса электронов в веществе на основе модели «укрупненных столкновений».....	18
2.2. Модель класса I.....	26
2.3. Модель класса II.....	29
2.4. Вычислительные аспекты программ расчета .....	32
2.5. Оценка погрешностей результатов расчета характеристик полей ионизирующего излучения .....	35
<b>Глава 3.</b> Некоторые расчетные коды .....	38
<b>Глава 4.</b> Решение задач радиационной физики методом Монте-Карло .....	44
4.1. Определение удельной активности объёмных бета- источников.....	44
4.2. Энергетическая чувствительность твердотельного дозиметра .....	47
4.3. Расчет характеристик сцинтилляционных детекторов.....	51
4.4. Характеристики вторичных электронов, выходящих из мишеней, облучаемых фотонами.....	57
4.5. Метод Монте-Карло в задачах лучевой терапии .....	61
4.6. Расчет характеристик тормозного излучения электронов ...	70
 Список литературы .....	 74

## ВВЕДЕНИЕ

Использование источников электронов в различных областях науки, техники, биологии, медицины и в радиационных технологических процессах обуславливает потребности в практически доступных методах получения необходимой информации о характеристиках формируемых полей рассеянных в различных средах электронов и генерированного ими тормозного излучения. Определение характеристик полей рассеянных в веществе электронов необходимо для решения различных задач радиационной физики, связанных с определением ряда функционалов полей, т.е. интегральных и дифференциальных распределений полей частиц, в частности, пространственных дозовых распределений, потоков и токов частиц, временного состояния различных параметров полей, характер поглощенного заряда частиц в веществе, энергетического распределения частиц, спектры частиц по линейным потерям энергии и т.д.

Решение аналогичных задач переноса фотонного излучения для корректного учета радиационных эффектов также обуславливает необходимость учета эффектов переноса вторичной электронной компоненты (в частности, фотоэлектронов, комптоновских электронов, электронно-позитронных пар).

Изучение изменений свойств объектов при облучении их пучками ионизирующих излучений требует детального знания закономерностей процесса переноса электронов через вещество с целью установления количественных связей между наблюдаемыми эффектами и параметрами полей электронов. Решение широкого круга задач радиационной физики зависит от корректного учета переноса электронов или сопряженного с ним тормозного излучения. Экспериментальные исследования характеристик полей рассеянных в веществе электронов и генерированного ими тормозного излучения, как правило, достаточно трудоемки и, кроме того, в ряде ситуаций невозможны (например, нельзя определить параметры поля электронов внутри облучаемого объекта без нарушения его структуры). Все это обуславливает необходимость развития надежных расчетных методов получения требуемой информации.

Достаточно хорошо разработаны численные методы расчета переноса фотонов и нейтронов в веществе и, особенно, метод ста-

тистических испытаний (метод Монте–Карло) [1]. В литературе описано большое число алгоритмов расчета функционалов полей излучения с использованием различных аналитических модификаций, уменьшающих погрешность получаемых результатов и, следовательно, сокращающих время проведения расчетов на ЭВМ. Успешное применение такого рода программ основано на корректной формулировке интегро-дифференциального уравнения переноса Больцмана и на основании достаточно надежных сечениях элементарных процессов взаимодействия частиц с веществом.

Существенно отличная ситуация имеет место при аналогичном подходе к задачам прохождения электронов через вещество ввиду сложности процессов взаимодействия электронов с атомами среды (в частности, недостаточна информация по дифференциальным сечениям неупругого рассеяния электронов). Последнее обстоятельство исключает возможность корректной формулировки соответствующего уравнения переноса. Численные методы решения этого уравнения при различных упрощающих предположениях (в основном, в приближении непрерывного замедления электронов) приемлемы для ограниченного круга задач.

Применение метода Монте–Карло к задачам переноса электронов через вещество началось с середины прошлого века, когда было предложено использовать имитационные модели, основанные на концепции так называемых «укрупненных столкновений», заключающейся в замене моделирования однократных взаимодействий электронов с атомами моделированием процессов многократного взаимодействия при последовательном прохождении электроном небольших отрезков, в виде суммы которых приближенно представляется полная траектория частицы. До предложения такой идеи стандартный подход к моделированию переноса электронов в толстых поглотителях по аналогии с методами моделирования переноса фотонов и нейтронов был практически нереален ввиду большой величины сечения взаимодействия электрона с атомом и, следовательно, большого числа столкновений ( $\sim 10^5$ ), что приводит к временным затратам значительным даже для современных ЭВМ.

## ГЛАВА 1

# ПРОЦЕССЫ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЭЛЕКТРОНОВ С ВЕЩЕСТВОМ: СЕЧЕНИЯ И РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МНОГОКРАТНЫХ СТОЛКНОВЕНИЙ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ В МОДЕЛЯХ ПЕРЕНОСА ЭЛЕКТРОНОВ

### 1.1. Ионизационные потери энергии электронов

При прохождении через вещество электроны теряют энергии на ионизацию и возбуждения атомов среды [2]. Соответствующая величина средних потерь энергии электрона на единице длины (удельные потери энергии), или тормозная способность вещества, определяется соотношением Бете – Блоха (массовые удельные потери энергии):

$$\frac{1}{\rho} \cdot \frac{dE}{dx_u}(E, Z) = \frac{2\pi r_0^2 \cdot mc^2}{u} \cdot \frac{1}{\beta^2} \cdot \frac{Z}{A} \left[ \ln \left( \frac{E}{I} \right)^2 + \ln \left( 1 + \frac{\tau}{2} \right) + F^- (\tau) - \delta \right], \quad (1.1.1)$$

где  $Z$  и  $A$  – атомный номер и относительная масса атома (атомный вес) вещества;

$u$  –  $1.66 \cdot 10^{-24}$  г, атомная единица массы (1/12 массы атома углерода  $^{12}\text{C}$ );

$E$  – кинетическая энергия падающего электрона;

$\tau = \frac{E}{mc^2}$  – отношение кинетической энергии налетающего электрона к его энергии покоя;

$r_0$  – классический радиус электрона;

$I$  – средняя энергия возбуждения атомов среды;

$\beta = v/c$  – отношение скорости электрона к скорости света;

$\rho$  – плотность вещества;

$\delta$  – поправка на эффект плотности.

Эффект плотности обусловлен поляризацией атомов при прохождении заряженной частицы через вещество, что уменьшает электромагнитное поле, действующее на частицу, и уменьшает тормозную способность.

$$F^-(\tau) = \frac{1}{\tau+1} + \frac{\tau^2}{8 \cdot (\tau+1)^2} - \frac{2\tau+1}{(\tau+1)^2} \cdot \ln 2 \quad (1.1.2)$$

Функция  $F^-(\tau)$  определяет величину потерь, связанную с образованием дельта-электронов. Выделение этой части ионизационных потерь  $\varepsilon_e$  определяется модификацией функции  $F^-(\tau)$  с учетом минимальной энергии дельта-электронов  $\Delta$ :

$$F^-(\tau, \varepsilon_e) = -1 - \beta^2 + (1 - \varepsilon_e)^{-1} + (1 - \beta^2) \cdot \left[ \varepsilon_e^2 \cdot \tau^2 / 2 + (2\tau + 1) \cdot \ln(1 - \varepsilon_e) \right] + \frac{1}{1 - \varepsilon_e} + \ln \left[ 4\varepsilon_e(1 - \varepsilon_e) \right] \quad (1.1.3)$$

где  $\varepsilon_e = \Delta/E$ . На рис. 1.1 и 1.2 показана зависимость удельных массовых потерь энергии электронов для углерода ( $Z=6$ ) и свинца ( $Z=82$ ).

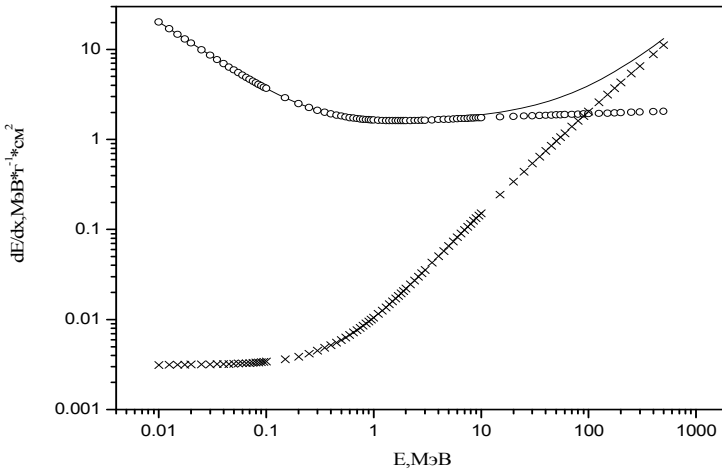


Рис. 1.1. Удельные потери энергии электронов в углероде: — полные потери энергии, x — радиационные потери энергии, o — ионизационные потери энергии

Для массовых тормозных способностей сложных веществ применимо правило аддитивности:

$$dE / dx_u = \sum_i w_i \left[ dE / dx_u (E, Z) \right]_i,$$

где  $w_i$  – массовая доля  $i$  – го компонента.

На основании соотношений (1.1.1) и (1.1.3) величина тормозной способности может быть представлена в виде суммы двух компонент:

$$dE / dx_u = dE / dx_u (\Delta E > \Delta) + dE / dx_u (\Delta E < \Delta); \quad (1.1.4)$$

потери энергии  $\Delta E > \Delta$  обусловлены образованием дельта – электронов. Такое разделение ионизационных потерь энергии используется в расчетных моделях переноса электронов.

## 1.2. Тормозное излучение

Учет радиационных потерь энергии электронов осуществляется на основании сечения этого процесса  $\frac{d\sigma}{dk}(E, Z, k)$  в диапазоне рассматриваемых энергий электронов  $E$  и атомных номеров поглочителей  $Z$ ;  $k$  – энергия тормозного фотона. Используются сечения тормозного излучения, полученные в борновском приближении или на основании волновых функций Зоммерфельда - Мауэ:

$$\frac{dE}{dx_p}(E, Z) = \frac{N_A}{A} \int_0^E k \cdot \frac{d\sigma}{dk}(E, Z, k) dk \quad \text{МэВ} \cdot \text{г}^{-1} \cdot \text{см}^2, \quad (1.2.1)$$

где  $N_A$  – число Авогадро,  $A$  – атомный вес вещества.



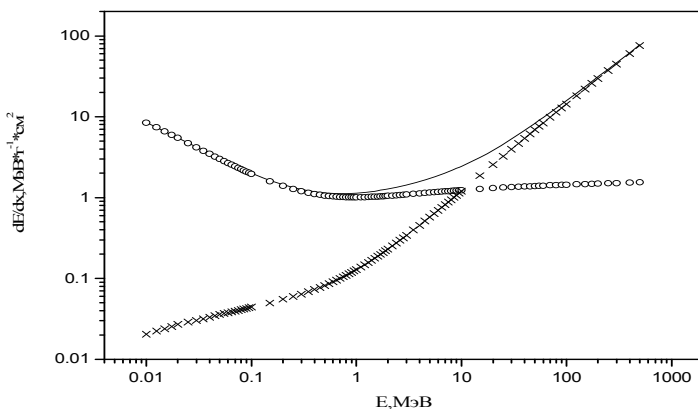


Рис. 1.2. Удельные потери энергии электронов в свинце: — полные потери энергии, x – радиационные потери энергии, o – ионизационные потери энергии

Для сложных веществ хорошим приближением является правило аддитивности:

$$\frac{dE}{dx_p} = \sum_i w_i \left[ \frac{dE}{dx_p}(E, Z) \right]_i,$$

где  $w_i$  – массовая доля  $i$  – го компонента.

Согласно принятому в модели переноса электронов способу учета радиационных потерь энергии необходимы расчетные значения макроскопических сечений тормозного излучения

$$\Sigma_\gamma(E, Z) = \frac{N_A}{A} \int \frac{E}{\varepsilon} \frac{d\sigma}{dk}(E, Z, k) dk. \quad (1.2.2)$$

При  $\varepsilon = 0.001$  значения макроскопического сечения определяет вероятность излучения фотонов, суммарная энергия которых на единице длины пути электрона близка к величине средних удельных радиационных потерь энергии. Введение некоторой малой граничной энергии фотонов в соотношении (1.2.2) необходимо, так

как при  $\varepsilon \rightarrow 0$  величина сечения  $\frac{d\sigma}{dk}(E_e, Z, k) \rightarrow \infty$ ; при величине

$\varepsilon = 0.001$  удельные потери энергии меньше соответствующих значений при  $\varepsilon = 0$  примерно на 2÷3 %. Ошибка в 2÷3 % находится в пределах погрешности сечений тормозного излучения. На рис.1.1 и 1.2 показана зависимость удельных радиационных потерь энергии электронов для углерода ( $Z=6$ ) и свинца ( $Z=82$ ).

Последняя систематизация сечений тормозного излучения приведена в работе [3], где представлены в табличном виде сечения в диапазоне энергий падающих электронов 1 кэВ ÷ 1 ГэВ для  $Z = 6\div 92$ . Угловое распределение тормозных фотонов может быть аппроксимировано, в частности, приближенным соотношением:

$$p(\mu) = \frac{1 - \beta^2}{4\pi} \cdot \frac{1}{(1 - \beta \cdot \mu)^2} \quad (1.2.3)$$

где  $\mu = \cos(\theta)$ ,  $\theta$  – полярный угол рассеяния; азимутальный угол  $\phi$  распределен равномерно в интервале  $[0, 2\pi]$ .

### 1.3. Многократное рассеяние электронов

Для расчета функций углового распределения электронов, выходящих из тонких плоских слоев вещества, наиболее известными являются соотношения, полученные Мольером и Гоудсмитом и Саундерсоном [4]. Рассматриваются случаи нормального падения электронов на поглотитель и предполагается, что в процессе прохождения через вещество энергия электрона не изменяется (приближение малых потерь энергии). Результат, полученный Мольером, есть решение кинетического уравнения переноса электронов в малоугловом приближении; Гоудсмит и Саундерсон получили аналогичное решение в диапазоне углов  $0^\circ\div 180^\circ$ , исходя из вероятностного подхода к процессу многократного упругого рассеяния электронов. Показано, что результат, полученный Мольером, идентичен результату Гоудсмита и Саундерсона в случае малоуглового приближения. Оба распределения, используемые в расчетах переноса электронов, обеспечивают совпадающие результаты. Угловое распределение электронов, прошедших тонкий слой вещества, имеет резкую анизотропию в направлении первичного пучка электронов, виду чего в основном малоугловые отклонения будут определять формирование итогового углового и зависящего от него энергетического распределения вышедших из толстого поглотите-

ля электронов. Теория Гоудсмита и Саундерсона имеет некоторые преимущества перед теорией Мольера, которые определяют её более широкое применение:

1. Распределение Гоудсмита и Саундерсона учитывает разницу в рассеянии электронов и позитронов, в отличие от распределения Мольера, где знак заряда налетающей частицы не учитывается.
2. Применение распределения Гоудсмита и Саундерсона не ограничено минимальной энергией электронов и определяется только наличием сечений упругого рассеяния электронов на атоме.

Расчет углового распределения электронов, пересекающих малый слой  $\Delta S$  (при условии  $\Delta E \ll E$ ), может быть реализован на основании теории многократного рассеяния Мольера: вероятность  $dP(\theta, \varphi)$  рассеяния электрона в телесный угол  $d\Omega(\theta, \varphi) = \sin\theta d\theta d\varphi$  после прохождения расстояния  $\Delta S$  (см) определяется функцией  $f(x)$

в единицах  $x = \frac{\theta}{X_c \sqrt{B}}$ :

$$dP(\theta, \varphi) = P(\theta, \varphi) d\Omega = P(\theta, \varphi) \sin\theta d\theta d\varphi = f(x) x dx \frac{d\varphi}{2\pi};$$

$$f(x) = 2 \exp(-x^2) + \frac{1}{B} f_1(x) + \frac{1}{B^2} f_2(x) + \dots; \quad (1.3.1)$$

параметр  $x_c$  определяется соотношением:

$$X_c^2 = 0,1569 \frac{Z^2}{P^2 v^2} \cdot \frac{\rho \cdot \Delta S}{A}; \quad (1.3.2)$$

где  $Z, A$  – атомный номер и атомный вес вещества - рассеивателя,

$v$  – скорость электрона,  $P$  – импульс электрона в ед. МэВ/с,  
 $\rho$  – плотность вещества, г/см<sup>3</sup>.

Значения  $B$  есть решение трансцендентного уравнения:

$$B - \ln(B) = \ln \left[ \frac{6700 Z^{4/3} \rho \Delta S / A}{B^2 + 1,77 \cdot 10^{-4} Z^2} \right], \quad (1.3.3)$$

$\beta = v/c$  – отношение скорости электрона к скорости света.

Функции  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  табулированы; результаты теории корректны в малоугловом приближении:  $\sin(\theta) \approx \theta$ .

Уравнение (1.3.1) верно для таких толщин и энергий электронов, когда  $B > 4.5$ . Для больших углов  $x$  ( $x \gg 1$ ) доминирующим в распределении становится резерфордовское рассеяние, закон которого заменяет часть функции  $f_1(x)/B$ . В промежуточном интервале  $x$  происходит гладкий переход от распределения Гаусса к форме распределения Резерфорда. После интегрирования по азимутальному углу  $\varphi$ , вероятность  $dP(\theta)$  рассеяния на полярный угол между  $\theta$  и  $\theta + d\theta$ .

$$dP(\theta) = f(x) dx = f(x) \frac{\theta d\theta}{X_c^2 B} = f(x) \frac{d\theta^2}{2 X_c B}.$$

Гауссовское распределение при малых углах имеет вид:

$$dP(\theta) = f(0) \exp \left[ - \left( \frac{\theta}{\theta_{1/c}} \right)^2 \right] \cdot \frac{1 - 1.25/B}{2} \cdot \frac{d\theta^2}{\theta_{1/c}^2}; \quad \theta_{1/c} = X_c \sqrt{B - 1.25}.$$

При  $\theta = x = 0$  используется значение функции согласно теории Мольера:

$$f(0) = 2 + 0.846 \frac{1}{B} + 2.493 \frac{1}{B^2}.$$

С учетом этого уравнения

$$dP(\theta) = \frac{1 - 0.827}{B} \cdot \exp \left[ - \frac{\theta}{\theta_{1/c}} \right]^2 \frac{d\theta^2}{\theta_{1/c}^2}.$$

Для учета больших углов рассеяния к данному распределению суммируется закон резерфордовского рассеяния для углов больше  $\theta_0 = \sqrt{2} \theta_{1/c}$ , так что полная вероятность рассеяния в диапазон углов  $\theta$  и  $\theta + d\theta$  представляется как

$$dP(\theta) = \left(1 - 0.827/B\right) \exp \left[ - \left( \frac{\theta}{\theta_{1/c}} \right)^2 \right] \frac{d\theta^2}{\theta_{1/c}^2} + H \left( \theta - \sqrt{2} \theta_{1/c} \right) \frac{X_c^2}{4} d \left( - \frac{1}{\sin^2 \left( \frac{\theta}{2} \right)} \right),$$

$$\text{где } H \left( \theta - \sqrt{2} \theta_{1/c} \right) = \begin{cases} 1, & \text{при } \theta \geq \sqrt{2} \theta_{1/c} \\ 0, & \text{при } \theta \leq \sqrt{2} \theta_{1/c} \end{cases}. \quad (1.3.4)$$

Интегрирование уравнения (1.3.4) дает вероятность рассеяния в диапазоне углов от 0 до  $\theta$ :

$$P(\theta) = \left(1 - 0.827/B\right) \left\{ 1 - \exp \left( - \frac{\theta}{\theta_{1/c}} \right)^2 \right\} + \\ + H \left( \theta - \sqrt{2} \theta_{1/c} \right) \frac{X_c^2}{4} \left( \frac{1}{\sin^2 \left( \frac{\theta}{2} \right)} - \frac{1}{\sin^2 \left( \frac{\theta}{2} \right)} \right).$$

На основании этого уравнения осуществляется выборка случайного угла  $\theta$ .

Результатом теории Гоудсмита и Саундерсона является функция углового распределения в виде следующего разложения по полиномам Лежандра:

$$F(\theta, s) = \sum_{l=0}^{\infty} (l+0.5) \exp \left\{ - \int_0^s G_l(s') ds' \right\} P_l(\cos(\theta)) \sin(\theta) d\theta$$

$$G_l = 2\pi \cdot N_0 \int_0^{\pi} \frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} \{1 - P_l(\cos(\theta))\} \sin(\theta) d\theta,$$

где  $\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega}$  – дифференциальное сечение упругого рассеяния электронов на атоме:

$$\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} = \frac{(Z^2 + Z) \cdot e^4}{p^2 \cdot v^2 (1 - \cos(\theta) + 2\eta)}, \eta = 1.7 \times 10^{-5} \cdot Z^{2/3} \cdot T^{-1} \cdot (T + 2)^{-1} \cdot \eta_c,$$

$\eta_c = 1.13 + 3.76 \cdot (Z/137\beta)^2$  – параметр экранирования;  $N_0$  – число атомов рассеивающей среды в единице объёма;  $s$  – длина пути, пройденного электроном;  $\beta = v/c$  – отношение скорости электрона к скорости света;  $T$  – кинетическая энергия электрона в единицах  $mc^2$ ;  $p$  – импульс электрона.

Использование в модели расчета распределения Гоудсмита и Саундерсона является, как правило, более сложным в вычислительном отношении по сравнению с распределением Мольера. Целесообразность использования того или иного вида распределения зависит от конкретных условий задачи и в основном связано с различиями, указанными выше в разделах 1, 2.

#### 1.4. Неупругие столкновения электронов с большой передачей энергии (образование дельта-электронов)

Процесс неупругого столкновения электронов с электронами атомов среды соответствует сечению Мёллера, которое получено в приближении свободных электронов:

$$\sigma_m(K) = \frac{2\pi \cdot e^4}{m \cdot v^2} \cdot \frac{Z}{E \cdot k^2} \left[ 1 + \left( \frac{k}{1-k} \right)^2 - \frac{k}{1-k} + \left( \frac{\gamma-1}{\gamma} \right)^2 \cdot \left( k^2 + \frac{k}{1-k} \right) \right], \quad (1.4.1)$$

где  $e$  и  $m$  – заряд и масса электрона,  $v$  – скорость электрона;

$\gamma = (E + mc^2)/mc^2$ ;  $E$  – энергия электрона;  $k = W/E$  – относительная часть кинетической энергии  $W$  дельта-электрона;  $Z$  – атомный номер среды.

Максимальная теряемая энергия  $W_m$  соответствует  $k_m = 1/2$  из-за неразличимости падающего и свободного электрона. Степень точности сечения (1.4.1) определяется выполнением условия борновского приближения: энергия передачи должна быть много больше энергии связи атомных электронов.

Обратная величина свободного пробега электрона  $\lambda_m^{-1}$  до столкновения с образованием дельта - электрона при условии, что переданная дельта - электрону энергия больше  $W_m$

$$\lambda_m^{-1} = \frac{2\pi \cdot e^4}{m \cdot v^2} \cdot \frac{Z \cdot N}{E} \left\{ \frac{1-2km}{k_m(1-k_m)} + \left( \frac{\gamma-1}{\gamma} \right)^2 \left( \frac{1}{2} - k_m \right) + \left[ \left( \frac{\gamma-1}{\gamma} \right)^2 - 1 \right] \times \ln \frac{1-k_m}{k_m} \right\}. \quad (1.4.2)$$

где  $k_m = W_m / E$  и  $N$  – число молекул вещества в  $\text{см}^3$ ;  $\lambda_m$  определяет длину пробега первичного электрона до образования дельта – электрона.

Угол отклонения  $\psi$  первичного электрона, связанный с энергетической потерей при столкновении с большей передачей энергии, определяемый из законов сохранения энергии и импульса, находится по соотношению

$$\cos \psi = \left[ \frac{(1-k)(\tau+2)}{(1-k)\tau+2} \right]^{1/2}$$

а угол отклонения  $\psi_\delta$  электрона с меньшей энергией ( $\delta$ -электрон) определяется по соотношению

$$\cos \psi_\delta = \left[ \frac{k(\tau+2)}{k\tau+2} \right]^{1/2}.$$

Удельные потери энергии на ионизацию атома при образовании дельта–электронов при различных относительных значениях  $k_m$  в зависимости от энергий первичных электронов представлены на рис. 1.3. Величина  $k_m$  определяет энергетический порог образования вторичных дельта - электронов в моделях переноса электронов.

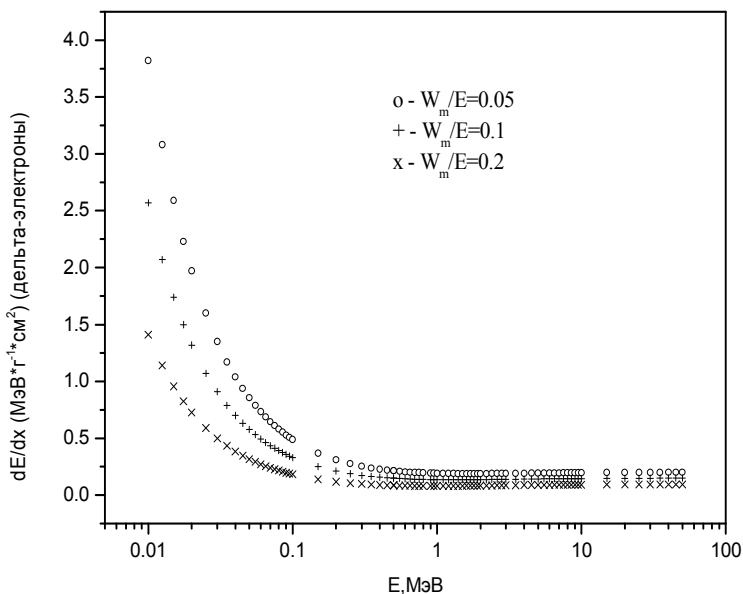


Рис. 1.3. Зависимость удельных потерь энергии на образование дельта-электронов от энергий первичного электрона при различных значениях энергиях  $W_m/E$

### 1.5. Флуктуации ионизационных потерь энергии электронов

При прохождении электронов через тонкий слой поглотителя величина потерянной на ионизацию энергии  $\Delta E$  имеет некоторое непрерывное распределение  $W(\Delta E)$ , которое впервые было рассчитано Ландау при следующем предположении: суммарная величина энергии  $\Delta E$ , потерянной электроном в слое  $\Delta S$ , много меньше начальной энергии электрона  $E$ , т.е.  $\Delta E \ll E$ . Блунк и Лейзеганга [5] уточнили распределение Ландау, включив в член, отображающий резонансное взаимодействие, второй момент, учитывающий редкие столкновения с электронами внутренних оболочек атома.

Распределение потерь энергии было представлено в виде суммы четырех функций Гаусса:



$$W(\Delta E)d(\Delta E) = \sum_{i=1}^4 \frac{c_i \gamma_i}{(\gamma_i^2 + b^2)^{1/2}} \cdot \exp\left\{-\frac{(\lambda - \lambda_i)^2}{\gamma_i^2 + b^2}\right\} d\lambda ; \quad (1.5.1)$$

$$\lambda = \frac{\Delta E - \frac{dE}{dx} \cdot \Delta S}{a \cdot \Delta S} + \ln \frac{E}{a \Delta S} - 1.116; \quad a = 0.154 \frac{Z}{A} \cdot \frac{1}{\beta^2}, \quad \text{МэВ} \cdot \text{г}^{-1} \cdot \text{см}^2;$$

$$b = \frac{2 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{dE}{dx} \cdot Z^{4/3}}{(a \cdot \Delta S)^2},$$

где  $\frac{dE}{dx}$  – удельные ионизационные потери энергии,  $\beta = v/c$ ,

$Z$  и  $A$  – атомный номер и атомный вес вещества поглотителя,

$c_i, \gamma_i, \lambda_i$  – константы.

Функция  $W(\Delta E)$  рассчитывается при значениях  $\lambda$  в пределах  $2 < \lambda < 15$ , т.е. большие передачи энергии (при  $\lambda > 15$ ) в распределение не включены. Поправка Блунка и Лейзеганга существенна для очень тонких слоев, когда величина  $b^2$  велика.

## ГЛАВА 2

### ОСНОВНЫЕ ПРИНЦИПЫ ПОСТРОЕНИЯ РАСЧЕТНЫХ МОДЕЛЕЙ ПЕРЕНОСА ЭЛЕКТРОНОВ В РАМКАХ МЕТОДА МОНТЕ-КАРЛО

#### 2.1. Расчет переноса электронов в веществе на основе модели «укрупненных столкновений»

Применение метода Монте-Карло для расчета характеристик полей рассеянного нейтронного и фотонного излучения представляет реализацию процесса последовательного конечного числа случайных актов взаимодействия, вероятность и параметры которых известны и определяют траекторию соответствующей частицы. Для расчета переноса электронов аналогичный подход практически невозможен, так как сечения взаимодействия электронов с веществом велики, и для расчета одной траектории необходимо моделировать  $10^4$ - $10^5$  столкновений, что практически обуславливает невозможность решения поставленной задачи.

Для решения этой проблемы была разработана техника так называемых «укрупненных столкновений», (или «конденсированных историй»). В этом методе большое число столкновений учитывается моделированием изменения энергии частицы и направления движения на некотором малом шаге  $\Delta S$  на основании распределений многократного рассеяния. Это приближение основано на том, что отдельные столкновения с атомами обуславливают, в большинстве случаев, малые изменения энергии частиц и направления движения.

Общий характер модели расчета переноса электронов следующий. Основным параметром, определяющим построение процесса случайных блужданий электрона в среде, является величина энергии  $\Delta E$ , теряемой при прохождении им некоторого участка  $\Delta S$ , величина которого выбирается такой, что полная средняя потерянная энергия  $\Delta E$  электрона на пути  $\Delta S$  значительно меньше его энергии  $E$  в начале участка  $\Delta S$ . Тогда малые энергетические потери  $\Delta E_1$  электронов с энергией  $E$  ( $\Delta E_1 \ll E$ ) определяют совокупность соответствующих случайных траекторий, а относительно маловероят-

ные большие энергетические потери  $\Delta E_2$ , обусловленные образованием высокоэнергетических дельта-электронов и тормозных фотонов, рассматриваются как редкие события, влияющие на траекторию электрона, формируемую в результате малых передач энергии (рис. 2.1).

Такое построение модели основано на представлении о реальном физическом характере прохождения электронов через вещество. Определяющими видами взаимодействия электронов со средой являются неупругие процессы с малыми передачами энергии в основном на ионизацию и возбуждение атомов среды, упругое рассеяние электронов, а также потери энергии на излучение тормозных фотонов. По сравнению с этими процессами большие передачи энергии относительно редки.

При построении модели переноса электронов с малыми энергетическими потерями в соответствии с концепцией «укрупненных столкновений» процесс блужданий электронов описывается с учетом следующих модельных приближений:

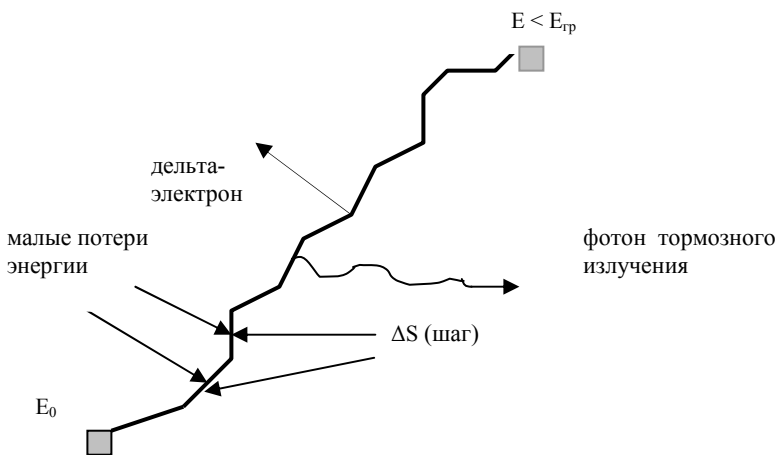


Рис. 2.1. Структура траектории электрона

электрон считается не взаимодействующим со средой в пределах некоторого плоского слоя толщиной  $\Delta S$ , т.е. не рассеивается и не теряет энергию, а все процессы многократного взаимодействия

предполагаются сосредоточенными в конце слоя  $\Delta S$ , который частица проходит, двигаясь нормально к его поверхности. Толщина слоя  $\Delta S$  выбирается такой, чтобы удовлетворялись условия применимости теорий многократного рассеяния и энергетических потерь электронов в тонких слоях вещества. Выбор величины слоя зависит от энергии электрона  $E$  до взаимодействия и определяется заданными средними потерями энергии  $\Delta \bar{E}$  :

$$\Delta S = f(E, \Delta \bar{E}) .$$

Для тонкого слоя вещества, пересекаемого электронами, не установлена корреляция между величиной потери энергии и углом рассеяния электрона. Известно, что при условии малых энергетических потерь в слое вещества, энергетическое распределение выходящих из него электронов слабо зависит от угла их выхода. Этот факт установлен из данных, полученных при экспериментальной проверке результатов теорий многократного рассеяния и флуктуаций энергетических потерь электронов в тонких фольгах. Измерялись либо только энергетические потери и не учитывалось многократное рассеяние электронов, либо исследовалось угловое распределение прошедших через мишень электронов без учета их энергетических потерь. Хорошее совпадение экспериментальных результатов с данными теорий, в основу которых положена предпосылка о взаимной независимости энергетических и угловых распределений, позволяет считать в данном случае обоснованным разделение угловых и энергетических переменных.

Рассеяние электронов, выходящих из слоя  $\Delta S(E)$ , является равновероятным по азимутальному углу  $\varphi$ , а угловое распределение по полярному углу  $\theta$  может быть рассчитано на основании соответствующих результатов теорий многократного упругого рассеяния электронов.

При прохождении электрона через тонкий плоский слой поглотителя его путь отождествляется с толщиной этого слоя. Величина шага  $\Delta S(E_i)$  может определяться различными способами, в частности таким образом, чтобы изменение энергии электрона после прохождения через слой, отнесенное к величине энергии  $E_i$  при входе в слой, было постоянным числом  $k$ :

$$k = \frac{E_i - \int_{s_i}^{s_{i+1}} \frac{dE}{dx}(E_i) \cdot dx}{E_i} \quad (2.1.1)$$

если пренебречь зависимостью удельной потери энергии  $\frac{dE}{dx}(E_i)$  от энергии в пределах  $\Delta S(E_i)$ , то

$$\Delta S(E_i) \cdot \frac{dE}{dx}(E_i) = (1-k) \cdot E_i,$$

При таком способе выбора величины шага траектории остается практически постоянным средний косинус углов многократного рассеяния:

$$\langle \cos(\theta) \rangle = \left[ \frac{E_{i+1} \cdot (E_i + 2mc^2)}{E_i \cdot (E_{i+1} + 2mc^2)} \right]^{0.3 \cdot Z}$$

где  $E_i, E_{i+1}$  - кинетическая энергия в начале и в конце шага;  $Z$  - атомный номер мишени.

Результаты зависимости рассчитываемых величин от длины шага  $\Delta S$  показано далее для ряда интегральных характеристик полей электронов (табл. 2.1), где  $T_N$  - число прошедших через алюминиевый поглотитель толщиной  $13,7 \text{ мг/см}^2$  электронов с начальной энергией  $200 \text{ кэВ}$ , отнесенное к полному числу первичных электронов, падающих на поглотитель (коэффициент прохождения по числу частиц);  $T_E$  - коэффициент прохождения по энергии;  $R_N$  - коэффициент отражения по числу частиц;  $R_E$  - коэффициент отражения по энергии и средний косинус углового распределения вышедших из поглотителя частиц. При потерях энергии не более  $2\%$  расчетные значения достаточно близки.

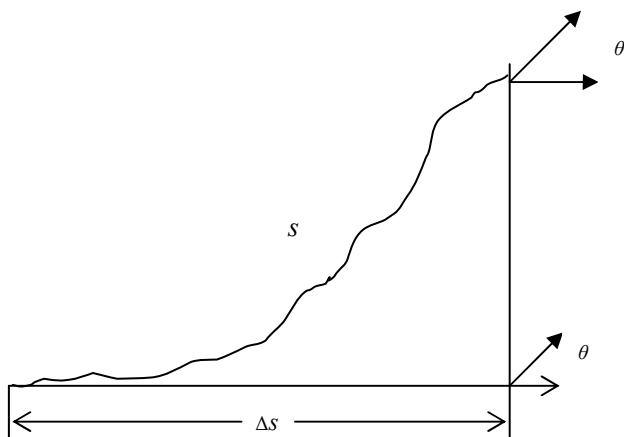


Рис. 2.2. Прямолинейный шаг  $\Delta s$  и длина реального шага  $s$  отрезка траектории

Таблица 2.1

**Зависимость  $T_N$ ,  $T_E$ ,  $R_N$ , и  $\langle \cos\theta \rangle$  от доли энергетических потерь  $\Delta E$  в слое  $\Delta s$ , %**

$\Delta E$ , %	$T_N$	$T_E$	$R_N$	$R_E$	$\langle \cos\theta \rangle$
8,30	0,811	0,726	0,061	0,034	0,695
4,15	0,872	0,682	0,083	0,048	0,713
2,77	0,845	0,660	0,100	0,058	0,726
2,1	0,841	0,652	0,107	0,062	0,731
1,66	0,841	0,650	0,104	0,062	0,733

Реальная длина пути  $s$  отличается от заданной величины шага  $\Delta s$  (рис. 2.2); связь между ними устанавливается соотношением:

$$s = \int_0^{\Delta s} \frac{dx}{\cos[\theta(x)]} ,$$

которое решается с использованием различных приближений. В частности, одно из них следующее:

$$s = 2\Delta s / [1 + \cos(\theta)] .$$

Важной характеристикой модели расчета является корректное воспроизведение моментов глубинного распределения  $\left\langle \frac{z}{s} \right\rangle$  и попе-

речного смещения  $r = \frac{x^2 + y^2}{s}$  электронов в среде. Это обеспечивается различными приближенными способами расчета координат частицы.

Конечное пространственное состояние электрона с учетом многократного рассеяния может быть определено с помощью следующих соотношений:

$$x = t' \cdot \sin(\psi) \cdot \cos(\varphi)$$

$$y = t' \cdot \sin(\psi) \cdot \sin(\varphi)$$

$$z = t' \cdot \cos(\psi)$$

(здесь начальное положение электрона  $x_0 = 0, y_0 = 0, z_0 = 0$ ), где  $\psi$  - угол поперечного смещения и  $t'$  - прямолинейное расстояние между начальной и конечной точками трека электрона (рис.2.3). Это расстояние

$$t' = \frac{2t^2}{\xi} \left( 1 - \frac{1 - \exp(-\xi)}{\xi} \right), \quad \text{где } \xi = \frac{1}{2} T_s \cdot t, \quad T_s - \text{угловая рассеиваю-}$$

щая способность  $\left( T_s = \frac{d\langle \theta^2 \rangle}{dx} \right)$  и связь между углом рассеяния  $\theta$  в конце шага  $\Delta s$  и отрезком  $t$  определяется результатами модифицированной теории многократного рассеяния [12]. .... Угол поперечного смещения  $\psi$  зависит от угла рассеяния  $\theta$ :

$$\cos(\psi) = 1 - \alpha(1 - \cos(\theta)); \quad \alpha \approx \frac{1}{3} \cdot \left( 1 + \frac{\xi}{4} + \frac{\xi^2}{360} - \dots \right)$$

Другие способы определения координат:

$$\begin{aligned} \text{а) } \quad x &= \frac{\Delta s}{2} (\sin(\theta) \cdot \cos(\theta)) + \delta_x \\ y &= \frac{\Delta s}{2} (\sin(\theta) \cdot \sin(\varphi)) + \delta_y \\ z &= \frac{\Delta s}{2} (1 + \cos(\theta)), \end{aligned}$$

где  $\delta_x$  и  $\delta_y$  - случайные независимые числа, нормально распределенные с нулевым средним значением и дисперсией  $D = \sqrt{\frac{\langle \theta^2 \rangle}{6}}$ ;

должны исключаться случаи  $x^2 + y^2 + z^2 \geq \Delta s^2$ .

б) 
$$x = \Delta s \cdot \xi \cdot \sin(\theta) \cos(\varphi)$$

$$y = \Delta s \cdot \xi \cdot \sin(\theta) \sin(\varphi)$$

$$z = \Delta s \cdot (1 - \xi + \xi \cdot \cos(\theta)),$$

где  $\xi$  - равномерно распределенное случайное число в интервале от 0 до 1.

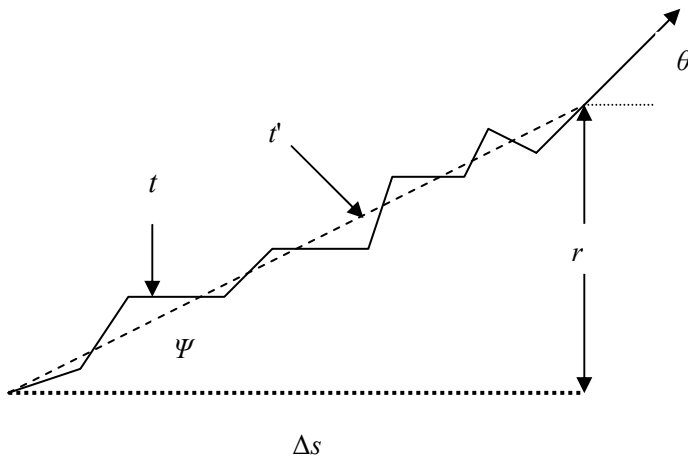


Рис. 2.3. К расчету пространственного поперечного смещения на шаге  $\Delta s$

Сохранение пространственных моментов обеспечивается при использовании «метода случайного вращения», в рамках которого точки взаимодействия определяются следующим образом: длина шага  $\Delta s$  разбивается на две части:  $\Delta s_a = \Delta s \cdot \xi$  и  $\Delta s_b = \Delta s - \Delta s_a$ , где  $\xi$  - равномерно распределенное случайное число в интервале от 0 до 1.

На первом отрезке  $\Delta s_a$  электрон отклоняется на угол многократного рассеяния, рассчитанного для шага  $\Delta s$ ; далее электрон проходит отрезок  $\Delta s_b$  в новом направлении.



За конечное число шагов  $n$  энергия электрона  $E_n$  может достигнуть сколь угодно малой величины. При решении задач переноса излучений через вещество всегда вводится энергетическая отсечка  $E_{гр}$  и предполагается, что частицы с энергией ниже  $E_{гр}$  локально поглощаются.

Угол отклонения  $\theta$  электрона в сферической системе координат после прохождения слоя  $\Delta S$  определяется случайным образом (разыгрывается) из распределений Мольера или Гоудсмита и Саундерсона. Соответствующий азимутальный угол рассеяния  $\Psi$  ввиду аксиальной симметрии сечения рассеяния электронов определяется соотношением  $\Psi = 2\pi \cdot \zeta$ , где  $\zeta$  – случайное число, равномерно распределенное в интервале  $[0,1]$ . Если перед прохождением слоя  $\Delta S$  направление движения электрона определялось полярным углом  $\theta_0$  и азимутальным углом  $\varphi_0$ , то с учетом углов  $\theta$  и  $\Psi$  относительно направления, определяемого углами  $\theta_0$  и  $\varphi_0$ , новое направление рассчитывается согласно соотношениям:

$$u = u_0 \cdot \cos \theta + \sin \theta \cdot (w_0 \cdot \cos \Psi \cdot \cos \varphi_0 - \sin \Psi \cdot \sin \varphi_0)$$

$$v = v_0 \cdot \cos \theta + \sin \theta \cdot (w_0 \cdot \cos \Psi \cdot \sin \varphi_0 + \sin \Psi \cdot \cos \varphi_0)$$

$$w = w_0 \cdot \cos \theta - \sin \theta \cdot \sin \varphi_0 \cdot \cos \Psi,$$

где направление движения электрона  $\vec{\Omega}$  определяется направляющими косинусами

$$\vec{\Omega} \rightarrow (u, v, w) \rightarrow (\sin \theta \cdot \cos \varphi, \sin \theta \cdot \sin \varphi, \cos \theta).$$

Новые координаты  $(x, y, z)$  определяют следующее пространственное состояние электрона:

$$x = x_0 + u_0 \cdot \Delta S; \quad y = y_0 + v_0 \cdot \Delta S; \quad z = z_0 + w_0 \cdot \Delta S.$$

Вышеперечисленные вычисления повторяются до выполнения следующих условий: а)  $z_{i+1} > d$  (электрон вышел из барьера); 2)  $z_{i+1} < 0$  (обратное рассеяние из барьера); в) энергия электрона достигла значения ниже  $E_{гр}$ . При выполнении одного из этих условий моделируемая история электрона заканчивается, и начинается аналогичная вычислительная процедура для следующего электрона, выходящего из источника.

Электроны при прохождении через вещество теряют энергию в результате двух процессов: при неупругом столкновении с атомными электронами и при генерации тормозных фотонов. В резуль-

тате для первичных электронов за счет радиационных потерь энергии формируется связанный каскад переноса электронного и фотонного излучения. Тормозное излучение доминирует при высоких энергиях электронов, неупругие столкновения – при малых энергиях электронов. Величиной, определяющей область преобладания того или иного вида потерь энергии, является критическая энергия  $E_{\kappa}$ , при которой имеет место равенство:

$$dE / dx_{и} (E_{\kappa}, Z) = dE / dx_{р} (E_{\kappa}, Z) .$$

Зависимость критической энергии от атомного номера среды  $Z$  оценивается соотношением:

$$E_{\kappa} = \frac{800}{Z + 1.2} \text{ МэВ} .$$

Неупругие столкновения электронов и фотонов с атомами обуславливают ионизацию и возбуждение атомов на треке частицы. Возбужденные атомы с вакансиями на внутренних оболочках релаксируют с испусканием характеристического фотонного излучения.

При большом числе приближений для учета в моделях переноса различных физических процессов при прохождении электронов через вещество требуются оценки погрешности рассчитываемых величин. Основным способом установления степени точности модели является сравнение результатов расчетов с соответствующими экспериментальными данными.

## 2.2. Модель класса I

Это наиболее простая модель переноса электронов, основанная на приближении непрерывного замедления: потери энергии на образование дельта-электронов и тормозных фотонов не учитываются (может учитываться их образование на шаге  $\Delta s$ ). Считается, что потери энергии на ионизацию и возбуждение атомов среды происходят непрерывно в пределах слоя  $\Delta s$ , величина которого обеспечивает применимость результатов теорий многократного рассеяния. При выбранном способе определения длин шагов  $\Delta s$  (например, в соответствии с соотношением 1.1.1) можно определить всю совокупность шагов  $\Delta s_i$  траектории от начальной энергии до достижения установленной минимальной энергии. Это позволяет рассчитать функции распределения многократного рассеяния на пред-

варительном этапе для дальнейшего использования в процессе расчета переноса электронов.

Последовательность этапов расчета (отдельных блоков) в рамках модели переноса класса I представлена на рис. 2.4 и прокомментирована ниже.

Блок 1: заданные начальные параметры электрона: координаты в среде, энергия и направление движения для дальнейшего моделирования переноса; переход на блок 2;

Блок 2: передача начальных параметров в текущие параметры изменяемые в процессе расчета; переход в блок 3;

Блок 3: проверка условий нахождения электрона в среде и превышения энергии отсечки; при выполнении этих условий – переход на блок 4, в противном случае - переход на блок 14 – окончание истории (рис. 2.4);

Блок 4: определение транспортного шага  $\Delta s$  многократного рассеяния и потерь энергии электрона в приближении непрерывного замедления;

Блок 5: случайная выборка угла многократного рассеяния и определение нового направления движения электрона;

Блок 6: расчет новой энергии электрона;

Блок 7: проверка условия осуществления катастрофических событий на шаге  $\Delta s$ ; в случае невыполнения условия – переход на блок 8; при выполнении – переход на блок 9;

Блок 9: розыгрыш вида катастрофического столкновения образование тормозного фотона или дельта - электрона;

Блок 10: определение параметров вторичной частицы; запоминание параметров дельта-электронов в накопителе, расчет переноса тормозного фотона; переход на дальнейший расчет истории первичного электрона;

Блок 8: проверка условий нахождения электрона в среде и превышения энергии отсечки; при выполнении этих условий – переход на блок 4, в противном случае переход на блок 11 – окончание истории;

Блок 11: фиксация окончания истории электрона;

Блок 12: проверка содержимого накопителя; при наличии дельта - электрона переход на блок 13, в противном случае – расчет истории новой частицы;

Блок 13: передача параметров дельта-электрона в блок 2 для моделирования процесса переноса.



характер изменения текущей энергии на треке электрона, что затрудняет применение предварительно рассчитанных распределений многократного рассеяния.

### 2.3. Модель класса II

Схема класса II модели переноса заряженных частиц отличается включением достаточно точного метода учета дискретных взаимодействий. В этой схеме эффекты образования тормозного излучения выше некоторого энергетического порога  $E_{\gamma\min}$  и неупругого рассеяния первичных электронов на атомных электронах с энергией выше  $E_{\delta\min}$  входит в группу дискретных взаимодействий ("катастрофических столкновений"). Подпороговые неупругие процессы учитываются в приближении непрерывного замедления. Для учета влияния на параметры движущегося в среде электрона эффектов излучения тормозных фотонов и образования дельта-электронов (с энергиями выше  $E_{\gamma\min}$  и  $E_{\delta\min}$ ) применяется следующий подход. Макроскопические сечения образования дельта-электронов и тормозных фотонов зависят от энергии электрона  $E$ , величина которой в свою очередь зависит от расстояния, пройденного электроном. Это расстояние  $s = \sum_n \Delta s_n(E)$ . Для каждого участка  $\Delta s_n(E)$  в процессе моделирования переноса электронов можно рассчитать величину суммарного сечения

$$\Sigma_n(E) = \Sigma_n^\gamma(E) + \Sigma_n^\delta(E) \quad (2.2.1)$$

и рассматривать прохождение электрона через "квазинеоднородную" среду (неоднородность среды определяется различными сечениями  $\Sigma_n(E)$  в слоях  $\Delta s_n(E)$ ) при наличии взаимодействий, определяемых суммой сечений  $\Sigma^\gamma(E)$  и  $\Sigma^\delta(E)$ , которые равны:

$$\Sigma^{\gamma}(E) = \frac{N_A}{A} \cdot \int_{E_{\gamma\min}}^E \frac{d\sigma_{\gamma}(E, E_{\gamma})}{dE_{\gamma}} \cdot dE_{\gamma}$$

$$\Sigma^{\delta}(E) = \frac{N_A \cdot Z}{A} \cdot \int_{E_{\delta\min}}^{E/2} \frac{d\sigma_{\delta}(E, E_{\delta})}{dE_{\delta}} \cdot dE_{\delta}, \quad (2.2.2)$$

где  $N_A$  и  $A$  – число Авогадро и атомный вес среды.

Розыгрыш длины свободного пробега  $L^*$  до столкновений с образованием тормозного фотона или дельта-электрона можно определить методом постоянного сечения [1]: пусть  $\bar{r}$  - начальная точка пробега и  $\Sigma(E(s))$  - полное макроскопическое сечение взаимодействия (сумма (2.2.1)); если можно выбрать величину  $\Sigma_{\max}$  такую, что  $\Sigma(E(s)) \leq \Sigma_{\max}$ , то конструируются две последовательности независимых выборочных значений: 1)  $\xi_1 \dots \xi_n$ , соответствующая плотности распределения  $\Sigma_{\max} \cdot \exp(-\Sigma_{\max} \cdot x)$  и 2)  $\alpha_1 \dots \alpha_n$  — случайные числа, равномерно распределенные в интервале  $(0,1)$ . Положим

$$N = \min\{n : \alpha_n \leq \Sigma(\bar{r} + \eta_n \cdot \bar{\Omega}_n, E/\Sigma_{\max})\}, \quad \text{где } \eta_n = \sum_{k=1}^n \xi_k. \quad (2.2.3)$$

Тогда  $L^*$  равна сумме некоторого числа шагов  $\Delta s_n$ , в последнем из которых реализуется эффект взаимодействия. Далее разыгрывается конкретный эффект на основании сечений (1.1) – излучение фотона или образование дельта-электрона; изменение состояния основного электрона и вся процедура повторяется заново до момента выхода электрона из среды или его поглощения. Упругие угловые отклонения моделируются в рамках соответствующих теорий многократного рассеяния заряженных частиц. Последовательность этапов расчета (отдельных блоков) в рамках модели переноса класса II представлена на рис. 2.5. Отличие от схемы расчета класса I заключается в реализации алгоритма (2.3), что отражено в блоках 4 и 13.

Блок 4: определение длины пробега электрона до катастрофического столкновения;

Блок 13: учет изменения энергии и направления движения первичного электрона.

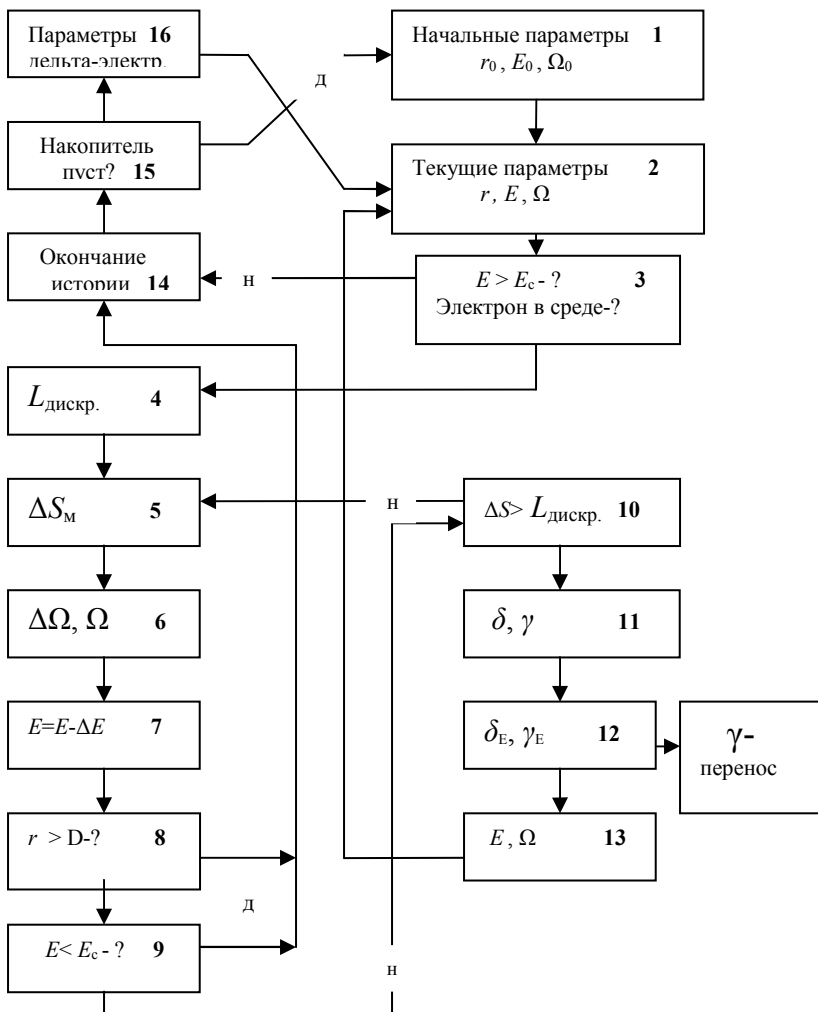


Рис. 2.5. Блок-схема расчета переноса электронов (класс II)

## 2.4. Вычислительные аспекты программ расчета

При реализации на ЭВМ разработанных моделей переноса частиц важным моментом является применение экономичных способов выборки случайных величин, определяющих параметры частиц в процессе их прохождения через среду. Оптимальное решение этого вопроса по степени важности сравнимо с разработкой самой модели переноса (обуславливает возможность получения надежных результатов за приемлемое время расчета на ЭВМ).

Основное соотношение, связывающее случайные число  $\eta$  с заданным законом распределения  $f(x)$  и случайной равномерно распределенной на отрезке  $[0,1]$  величиной  $\xi$ , имеет вид:

$$\xi_i = \frac{\eta_i}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx}. \quad (2.2.1)$$

Процедура получения очередного числа  $\eta_i$  для некоторого выбранного числа  $\xi_i$  сводится к решению (2.2.1) относительно  $\eta_i$ . В большинстве практически важных случаев это уравнение в указанном выше смысле точно не решается и применяются различные приближенные методы, которые могут быть выгоднее в смысле временных затрат, чем непосредственное решение уравнения (2.2.1).

Достаточно экономичным и универсальным методом получения последовательности случайных чисел с заданным законом распределения является способ линейно-кусочной аппроксимации, сущность которого заключается в следующем: пусть имеется некоторая функция плотности вероятности  $f(x)$  на отрезке  $x_0 \leq x \leq x_m$ , которой соответствует функция распределения вероятности

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(x)dx;$$

отрезок  $[0,1]$  разделяется на  $n$  равных частей и определяются  $x_i$  из

условия  $\frac{1}{n} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx$ , где  $i$  изменяется от 0 до  $n$ . Далее на основа-

нии предварительно рассчитанного массива чисел  $\xi$  соответствующее случайное число  $\tilde{x}$  определяется по соотношению:  $\tilde{x} = x_i + (x_{i+1} - x_i) (n \xi - [n \xi])$ , где  $[n \xi]$  – целая часть числа  $n \xi$ , т.е.  $\tilde{x}$  находится линейной интерполяцией по величинам  $x_i$  и  $x_{i+1}$ .



Этот способ применяется для выборки случайных величин из распределения Мольера, Блунка и Лейзеганга, а также при выборке значений энергий тормозных гамма - квантов и дельта-электронов в соответствии с видом сечений данных процессов.

Процедура расчета соответствующих числовых массивов  $[x_i]$  заключалась в интегрировании по методу Гаусса функций плотности вероятности  $f(x)$  с переменным верхним пределом, нормировке и нахождению по значению функции  $F(x)$  (в интервале  $(0,1)$ ) значений  $x_i$ . Все эти операции для каждого отдельного вещества, в котором предполагается моделировать процесс переноса электронов, выполняется один раз перед началом работы основной программы и, следовательно, не влияет на время её счета. Так как модель переноса построена таким образом, что имеет место однозначная связь между энергией электрона и величиной проходимого или малого слоя  $\Delta S$ , все указанные выше числовые массивы рассматривались для набора фиксированных значений энергий электронов. Таким образом, выборка случайных параметров электрона сводится к двойной линейной интерполяции из двумерного массива  $x_{i,e}$ . Описанный выше подход к использованию численной информации обеспечивает достаточную точность и экономичность проведения расчетов.

При расчете текущих параметров частиц могут возникать различные вычислительные ситуации, требующие дополнительной коррекции. Ниже приведен фрагмент программы пересчета направляющих косинусов  $u, v, w$  при новых углах многократного рассеяния  $\text{costh}, \text{phi}$  следующих значений  $u, v, w$  (входные значения  $u, v, w$  заменяются на идентичные выходные значения  $u, v, w$ ); учтены случаи, требующие определенных коррекций:

**subroutine rotate**( $u, v, w, \text{costh}, \text{phi}$ )

```
implicit none
real*4 u,v,w,costh,phi
real*4 rho2,sinphi,cosphi,sthrho,urho,vrho,sinth,norm
real*4 SZERO,ZERO
parameter (SZERO=1.0E-14,ZERO=1.0E-90)
```

```
rho2 = u*u+v*v
norm = rho2+w*w
```

!\*\*\* проверка нормировки:

```

if (abs(norm-1.0).gt.SZERO) then
  if (norm.lt.ZERO) then
    write(*,*) 'ошибка:поворот:нулевой вектор не может    быть
                перенормирован'
    stop
  endif
!*** перенормировка:
  norm = 1./sqrt(norm)
  u = u*norm
  v = v*norm
  w = w*norm
endif

  sinphi = sin(phi)
  cosphi = cos(phi)
!*** случай z' не = z:
  if (rho2.gt.ZERO) then
    sthrho = sqrt((1.0-costh*costh)/rho2)
    urho = u*sthrho
    vrho = v*sthrho
    u = u*costh - vrho*sinphi +   w*urho*cosphi
    v = v*costh + urho*sinphi +   w*vrho*cosphi
    w = w*costh                   -   rho2*sthrho*cosphi
  else
!*** случай, когда z'=z или z'=-z:
    sinh = sqrt(1.0-costh*costh)
    v = sinh*sinphi
    if (w.gt.0.) then
      u = sinh*cosphi
      w = costh
    else
      u = -sinh*cosphi
      w = -costh
    endif
  endif
endif
end

```

## 2.5. Оценка погрешностей результатов расчета функционалов полей ионизирующего излучения

Применение моделей переноса электронов, с той или иной степенью адекватности отражающих процесс прохождения частиц, тесно связано с основной вычислительной задачей, решаемой методом Монте-Карло – задачей статистической оценки вычисляемых случайных величин. В качестве результата принимается средняя величина выборки значений последовательности рассчитываемых параметров, реализуемых в процессе моделирования траекторий, причем эта величина тем ближе к истинному математическому ожиданию (в рамках используемой модели), чем больше объём выборки. Каждый вычисляемый параметр является случайной величиной, и для оценки его погрешности необходимо знать закон распределения этой величины, что позволяет вычислить вероятность соответствующей оценки, т.е. получить точечные оценки (среднее, дисперсия) или провести интервальное оценивание, т.е. установить доверительные границы при выбранной доверительной вероятности.

Результатами расчетов методом Монте-Карло являются функции распределения (или плотности распределений) случайных величин и в основном определяются два момента этих функций – первый начальный (среднее) и второй центральный (дисперсия). Выборочное среднее  $\bar{m}_x$  и дисперсия  $\sigma_x^2$  являются точечными оценками при реализации  $N$  историй, характеризующих результаты расчетов:

$$\bar{m}_x = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N x_i, \quad \sigma_x^2 = \frac{1}{N-1} \cdot \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{m}_x)^2.$$

Дисперсия выборочного среднего

$$\bar{\sigma}_m^2 = \frac{\sigma_x^2}{N}$$

определяет сходимость метода расчета как  $\sim \frac{1}{\sqrt{N}}$ .

Для дискретной величины  $x_i$  с соответствующей вероятностью  $p_i$  в общем виде дисперсия определяется как

$$D[X] = \sum_{i=1}^N (x_i - m_x)^2 \cdot p_i,$$

где  $N$  – полное число реализаций  $x_i$ . Расчет дисперсии в процессе моделирования траекторий может быть осуществлен на основании следующего преобразования:

$$\begin{aligned} D[X] &= \sum_{i=1}^N (x_i - m_x)^2 \cdot p_i = \sum_{i=1}^N x_i^2 \cdot p_i - 2 \cdot m_x \sum_{i=1}^N x_i \cdot p_i + \\ &+ m_x^2 \sum_{i=1}^N p_i = \sum_{i=1}^N x_i^2 \cdot p_i - m_x^2, \end{aligned}$$

что соответствует

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2 - \frac{1}{N^2} \left( \sum_{i=1}^N x_i \right)^2.$$

Искомая величина представляется как  $m = \tilde{m}_x \pm \sigma_{\tilde{m}}$ ; среднеквадратичному отклонению  $\sigma_{\tilde{m}}$  соответствует доверительная вероятность 0.68, удвоенному среднеквадратичному отклонению ( $2\sigma_{\tilde{m}}$ ) – доверительная вероятность 0.95, утроенному ( $3\sigma_{\tilde{m}}$ ) – 0.997.

Относительное среднеквадратичное отклонение  $\sigma_{\tilde{m}} = \sqrt{\sigma_{\tilde{m}}^2}$ , выраженное как отношение  $w = \frac{\sigma_{\tilde{m}}}{\tilde{m}_x}$ , называют относительной погрешностью (или коэффициентом вариации).

Интервальные оценки некоторого рассчитываемого неизвестного параметра  $\alpha$  сводятся к расчету верхнего и нижнего предела, в который с доверительной вероятностью  $1-\varepsilon$  ( $\varepsilon$ -уровень значимости) попадает истинное значение  $\alpha$ . Рассчитываются точечные оценки среднего  $\tilde{m}_\alpha$  и дисперсии  $\sigma_\alpha^2$ , и в случае нормального распределения случайной величины  $\tilde{m}_\alpha$  устанавливается довери-

тельный интервал на основании распределения Стьюдента (дисперсия определяется в процессе расчета траекторий):

$$\bar{m}_\alpha - \frac{t_0 \cdot \sigma_\alpha}{\sqrt{N}} \leq \alpha \leq \bar{m}_\alpha + \frac{t_0 \cdot \sigma_\alpha}{\sqrt{N}},$$

где  $t_0$  есть квантиль распределения Стьюдента при доверительной вероятности  $1-\varepsilon$ .

Расчет различных дифференциальных характеристик (например, энергетических и угловых распределений) рассеянных в веществе частиц методом Монте-Карло сводится обычно к разбиению всего диапазона изменения рассматриваемой переменной на дискретные интервалы и усреднению соответствующих вкладов в зависимости от признака принадлежности параметров частицы конкретному интервалу (формируется распределение в виде гистограммы). Тогда оценка погрешности каждой ординаты гистограммы проводится по той же методике с той лишь разницей, что эта оценка относится к ограниченному интервалу изменения переменной.

Показателем эффективности модели при решении конкретной задачи является величина

$$\varepsilon = \frac{1}{T \cdot \sigma^2},$$

(F.O.M. – Figure-of-merit – оценка качества), определяемая дисперсией  $\sigma^2$  и полным временем расчета  $T$ . Если среднее время расчета одной траектории  $T_0$  и полное число рассчитанных траекторий

$N$ , то при зависимости  $\sigma^2 \approx \frac{a}{N}$  величина  $\varepsilon \approx \frac{1}{T_0 \cdot a}$  близка к кон-

станте. В главе 4 приведены некоторые данные о погрешностях и соответствующих временах расчета для конкретной модели расчета переноса электронов и тормозного излучения.

## ГЛАВА 3

### НЕКОТОРЫЕ РАСЧЕТНЫЕ КОДЫ

#### Код ETRAN

Программный комплекс ETRAN (Electron TRANsport) - одна из первых программ расчета переноса в веществе быстрых электронов и фотонов [4]. Падающие на мишень (плоские барьеры) частицы имеют произвольное энергетическое и угловое распределение; рассчитываются необходимые функционалы электронно-фотонного каскада (напр., первичные фотоны и вторичные электроны, или первичные электроны и вторичные фотоны тормозного излучения). Расчет переноса электронной компоненты поля реализуется методом укрупненных столкновений, т.е. электронные треки моделируются в виде совокупности малых отрезков, после прохождения которых учитываются энергетические потери и угловые отклонения электронов; эти величины моделируются в приближении непрерывного замедления согласно распределению Ландау (энергетические потери) и Гоудсмита-Саундерсона (угловые отклонения многократного рассеяния). Образование дельта-электронов определяется на каждом отрезке в соответствии вероятностью, определяемой сечением Мёллера (без учета связи атомарных электронов); дальнейшие истории этих электронов рассчитываются аналогично первичным электронам. Процессы генерации тормозных фотонов учитываются на основании соответствующих сечений (теория Бете-Гайтлера с эмпирическими поправками). Учитывается образование вторичных характеристических фотонов на основании сечения ионизации К-оболочки.

#### Код EGS

В программном коде EGS рассматривается перенос электронов (+ позитроны) и фотонов в любых простых,  $Z = 1 \div 100$ , и многокомпонентных средах. Диапазон энергий – от десятков кэВ до сотен ГэВ.

Следующие процессы взаимодействия учтены в коде EGS:  
— генерация тормозного излучения;

- аннигиляция позитронов “на лету” и “в покое”;
- многократное рассеяние заряженных частиц при кулоновском рассеянии на ядрах, включая эффекты однократного рассеяния, и большие величины шагов при многократном рассеянии;
- образование дельта-электронов: сечение Мёллера ( $e^- - e^-$ ) и Баба' ( $e^+ - e^-$ );
- непрерывные энергетические потери между дискретными (или катастрофическими) взаимодействиями (полные потери энергии до величины энергетической отсечки), включающие ионизационные потери и излучение низкоэнергетических фотонов;
- образование пар фотонами;
- комптоновское рассеяние на связанных электронах;
- когерентное (рэлеевское) рассеяние;
- фотоэффект;
- релаксация возбужденных атомов с возникновением флюоресцентных фотонов.

## Код DPM

Конструктивное использование ряда упрощающих и оптимизирующих процедур для решения задач дозового планирования было реализовано в алгоритме DPM (метод дозового планирования) [6] для расчета транспорта электронов и фотонов в условиях 3D геометрии однородного или гетерогенного состава. Модель основана на стандартной концепции конденсированных историй с учетом больших передач энергии в соответствующих столкновениях и малых энергетических потерь в приближении непрерывного замедления.

Основные модификации модели относятся к процессу моделирования переноса электронов и включают следующие моменты:

- а) выбор величины транспортного шага  $s$  на основании соответствующей теории многократного рассеяния, обеспечивающей точное представление функции углового распределения электронов на данной величине шага;
- б) способ учета переноса электронов в условиях неоднородной среды;

в) возможность использования больших величин транспортных шагов  $s$ , которые могут пересекать несколько вокселей до момента упругого рассеяния.

На основании распределения Гоудсмита и Саундерсона для углового распределения электронов расчет реализуется с помощью соответствующих аппроксимирующих функций.

$$F_{GC}(\omega)d\omega = \sum_{i=0}^{\infty} (l + \frac{1}{2}) \cdot P_l(\omega) \exp(-\frac{s}{\lambda} g_l) d\omega,$$

где  $s$  – длина пути электрона,  $\omega = \cos(\theta)$ ,  $P_l$  - полином Лежандра,  $\lambda$  - средний свободный пробег электрона до упругого рассеяния,

$$g_l = 1 - \int_{-1}^1 P_l(\omega) p(\omega) d\omega, \text{ где } p(\omega) = \frac{2\eta(1+\eta)}{(1+2\eta-\omega)}$$

плотность вероятности однократного рассеяния;  $\eta$  – параметр экранирования. Была введена новая угловая переменная величина  $u$ , которая определяет соотношение с новым экранирующим параметром  $B$  (аналог сечения Резерфорда) :

$$\left| \frac{du}{d\omega} \right| = \frac{2B(1+B)}{(1+2B-\omega)}, \text{ что определяет } u = (1+\omega) \frac{1+B}{1+2B-\omega}.$$

Далее из равенства

$$F_{GC}(\omega) = q(u) \frac{2B(1+B)}{(1+2B-\omega)} \quad (3.1)$$

значения  $B$  определяются таким образом (процедура оптимизации), чтобы функция  $q(u)$  была достаточно гладкой. Это позволяет при розыгрыше  $\omega$  из второго сомножителя (3.1) использовать это значение в методе исключения с использованием  $q(u)$ .

Особенность подхода для определения величин транспортных отрезков  $\Delta s$  в модели переноса электронов подхода заключается в разделении реальных длин взаимодействия для потерь энергии: а) приближения непрерывного замедления, дискретных потерь энергии (дельта-электроны и тормозные фотоны) и б) упругих процессов многократного рассеяния.



Моделирование угловых отклонений электронов осуществляется на основании так называемой величины интенсивности рассеяния

$$G_1 = g_1 / \lambda$$

(первый инверсный транспортный пробег электронов). Корректное определение моментов глубинного распределения  $\left\langle \frac{z}{s} \right\rangle$  и поперечного

смещения  $\frac{x^2 + y^2}{s}$  электронов в среде осуществляется использованием «метода случайного вращения», в рамках которого точка взаимодействия определяется случайным образом из соотношения

$$K_1^a = \xi \cdot K_1 = t_s,$$

где  $K_1(s) \cong s \cdot G_1(s/2)$  и  $\xi$  - равномерно распределенное случайное число от 0 до 1. На каждом шаге  $\Delta s$  суммируются величины

$$\Delta t_s = \frac{\Delta s}{2} \cdot (G_1(\Delta s = 0), G_1(\Delta s))$$

до выполнения условия  $\sum \Delta t_s \geq t_s$ , после чего рассчитывается угол многократного рассеяния  $\theta$  и расчет поворота траектории частицы; новый розыгрыш угла рассеяния возобновляется после аналогичного расчета на отрезке рассеяния  $t_s = K_1 - K_1^a$ .

В программе используется стандартный метод моделирования переноса фотонов с использованием метода  $\delta$ -рассеяния Вудкока.

Используемые в модели упрощения следующие:

- 1) при расчете переноса заряженных частиц не учитываются различия в процессах взаимодействия электронов и позитронов с веществом (за исключением аннигиляции позитронов в покое);
- 2) процесс образования дельта – электронов и генерации тормозных фотонов реализуется в приближенной аппроксимации;
- 3) спользуется равновероятное распределение энергий частиц при образовании электронно - позитронной пары;
- 4) относительно высокий нижний энергетический порог для электронов ( $\sim 200$  кэВ)

При таких значениях пороговых энергий  $W_m$  соотношение (1.4.2) для среднего свободного пробега  $\lambda_m$  при образовании дель-

та-электронов аппроксимируется соотношением, не зависящим от энергии электрона:

$$\lambda_m \cong \frac{A}{Z \cdot \rho} \cdot \frac{mc^2 \cdot W_m}{N_A \cdot 2\pi e^4}.$$

Аналогичный подход используется для учета генерации тормозных фотонов; соответствующая величина

$$\lambda_T \cong \frac{A}{Z^2 \cdot \rho} \cdot \frac{mc^2}{N_A \cdot a} \left( \ln \frac{E}{W_T} - b \right),$$

где  $a$  и  $b$  – постоянные, не зависящие от атомного номера среды и энергии электрона  $E$ ,  $W_T$  – минимальная энергия генерированных фотонов;  $\lambda_T$  слабо зависит от энергии электрона.

Отмечается, что в диапазоне энергий (200 кэВ÷20 МэВ) и сред с низкими атомными номерами вышеуказанные приближения вносят несущественную погрешность в рассчитываемые значения дозных распределений.

Существенная вычислительная оптимизация процесса моделирования определяется этапом предварительного расчета необходимых сечений и распределений для быстрой выборки необходимых величин. В качестве примера приводятся следующие данные, характеризующие порядок скорости расчета: в водном фантоме время расчета  $10^6$  историй электронов с энергией 10 МэВ составило ~3 мин.

Были реализованы варианты расчета по данной программе глубинных дозных распределений для широких электронных и фотонных пучков в условиях плоской геометрии (среда – вода) для различных транспортных отрезков  $\Delta s$ , определяемых соотношением:

$$\Delta s = k \cdot E \cdot \frac{dE}{dx}^{-1}$$

при  $k$  в диапазоне  $0.05 \div 0.3$  (доля средней потерянной энергии в пределах  $\Delta s$ ). На рис. 3.1 показаны результаты соответствующих расчетов для электронов с энергией 10 МэВ. В достаточно широком диапазоне величин  $\Delta s$  имеет место относительно небольшое различие в характере дозных распределений.

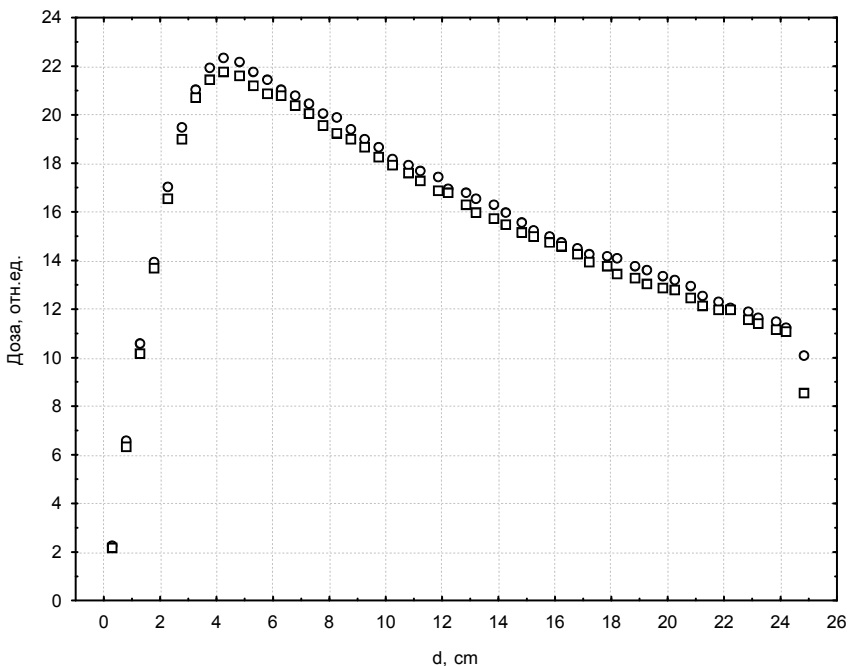


Рис. 3.1. Глубинные дозные распределения в воде для широкого пучка фотонов с энергией 10 МэВ;  $\circ$  – потери в слое 5 %,  $\square$  – потери в слое 30 %

## ГЛАВА 4

### РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ РАДИАЦИОННОЙ ФИЗИКИ МЕТОДОМ МОНТЕ-КАРЛО

#### 4.1. Определение удельной активности объёмных бета-источников

В ряде прикладных задач, связанных с использованием ионизирующих излучений, одной из важных процедур является проведение корректных радиометрических исследований толстослойных бета-препаратов. Можно отметить, например, нейтронно-активационный анализ, завершающие операции которого связаны с идентификацией и измерением абсолютной удельной активности препаратов, излучающих бета-частицы. Аналогичные измерения необходимы в процессе восстановления нейтронных спектров активационным методом. Обычно используются препараты цилиндрической формы с известным весом и размерами с равномерно распределенным по объёму излучающим веществом. Зарегистрированное в единицу времени число бета-частиц  $N_\beta$ , выходящих из такого источника объёмом  $V$ , необходимо связать с удельной активностью  $q$ :

$$q = \frac{k \cdot N_\beta}{V}, \quad (4.1.1)$$

где  $k$  - коэффициент, учитывающий геометрические условия измерений, эффективность регистрации и эффект самопоглощения бета-частиц в веществе источника. Далее рассматривается наиболее оптимальный способ регистрации бета-частиц газоразрядным счетчиком со 100 % - й эффективностью в условиях  $4\pi$  - геометрии. Тогда коэффициент  $k$  учитывает поправку только на эффект самопоглощения и его можно определить следующим образом:  $k = N_\beta / N_0$  ( $N_0$  - полное число частиц, образованных в источнике в единицу времени). Так как в процессе переноса бета-частиц в веществе источника могут образовываться вторичные дельта - электроны, то имеется вероятность их одновременного выхода из источника. Выход первичного и дельта-электрона счетчик, естест-

венно, зафиксировать как одно событие, поэтому в качестве величины  $N_\beta$  необходимо учитывать сумму первых электронов, в процессе расчета переноса вышедших из источника.

Для определения коэффициентов самопоглощения использовалась программа расчета переноса электронов (схема II), в которую были внесены соответствующие дополнения, учитывающие специфику описанной выше задачи:

1. Блок расчета эмиссионных бета-спектров и случайной выборки начальных энергий бета-частиц;
2. Блок выборки пространственно-угловых параметров эмиссионных бета-частиц при условии их изотропного характера испускания и равномерного распределения ядер-излучателей в объеме источника;
3. Блок оценки возможности выхода бета-частиц из источника, где проверяется соотношение  $R_0(E) \leq d_{\min}$ , где  $R_0(E)$  - величина среднего пробега частиц, увеличенная на 20 % для исключения случаев, когда ввиду флуктуаций в распределении пробегов возможны их значения, большие  $R_0(E)$ ;  $d_{\min}$  - кратчайшее расстояние до границы источника;
4. Анализатор результатов расчета: энергетическое распределение вышедших электронов, их полное количество и число электронов, соответствующее условиям эксперимента (т.е. «первые вышедшие электроны»), а также число бета-частиц с энергией ниже установленной граничной  $E_c = 50$  кэВ, ниже которой история электрона не прослеживалась и, следовательно, факт его выхода из источника является неопределенным.

Если воспользоваться величиной максимального пробега электрона с энергией 50 кэВ и сравнить ее с кратчайшим расстоянием от точки нахождения электрона до поверхности источника, то полное количество историй электронов  $N_{50}$ , заканчивающихся внутри источника и для которых выполняется условие  $R_0(50) > d_{\min}$ , дает верхнюю оценку указанной выше неопределенности. Действительная величина такой погрешности

гораздо меньше, так как только небольшая часть электронов с энергией 50 кэВ движется в кратчайшем направлении к поверхности. Величина  $k_{50} = N_{50} / N_0$  невелика (см. табл. 4.1), если учесть сделанные замечания о значительно меньших погрешностях, обусловленных пороговой энергией отсечки  $E_c$ .

Уменьшение величины  $k_{50}$  с ростом толщины источника объясняется увеличением полного числа поглотившихся электронов на значительных расстояниях от поверхности источника, что приводит также к уменьшению величины  $k = N_\beta / N_0$ . Незначительное уменьшение величины  $k$  при больших толщинах источника вызвано влиянием выхода электронов через его боковую поверхность, площадь которой растет с увеличением высоты цилиндра. Величина  $k_\Sigma = N_\Sigma / N_0$  (отношение полного числа вышедших электронов  $N_\Sigma$ , включая дельта-электроны, к числу образованных бета-частиц) имеет аналогичный характер зависимости от толщины источника и отличается от величины  $k$  незначительным вкладом дельта-электронов. Результаты расчетов коэффициентов  $k$ ,  $k_{50}$ ,  $k_\Sigma$  для источников различных составов и размеров, а также различных бета - изотопов представлены в табл. 4.1.

Величина заданного при расчете переноса электронов малого слоя  $\Delta s = \varepsilon \cdot E / \left(\frac{dE}{dx}\right)_{tot}$  может оказать влияние на результат в случае тонких источников. Был проведен ряд расчетов для двух значений  $\varepsilon = 0.025$  и  $\varepsilon = 0.05$ ; полученные при этом значения коэффициентов совпали в пределах статистической ошибки.

Результаты расчетов коэффициентов самопоглощения для некоторых бета-изотопов и материалов источников приведены в табл. 4.2, где они сравниваются с соответствующими экспериментальными данными, полученными В.С. Трошиным (МИФИ); погрешность экспериментальных данных  $\pm 3\%$ . Согласие результатов достаточно хорошее, что указывает на

возможность применения расчетной модели переноса электронов для решения подобного рода задач.

#### 4.2. Энергетическая чувствительность твердотельного дозиметра

С целью получения требующейся для измерений информации о дозиметрических характеристиках твердотельного люминесцентного детектора LiF была реализована соответствующая расчетная программа (с использованием метода Монте-Карло) для определения дозиметрической чувствительности детектора, расположенного в пределах облучаемой среды. В модели учитывался перенос фотонов и вторичных электронов в двух средах (детектор и окружающая облучаемая среда).

Таблица 4.1

**Значения коэффициентов  $K$ ,  $K_{\Sigma}$ ,  $K_{50}$ , рассчитанные для различных веществ источников и бета - изотопов;  $H_c$  – высота источника**

Вещество и радиус, г·см <sup>-2</sup> , источника	$\beta$ - изотоп	$H_c$ , г·см <sup>-2</sup>	$K$	$K_{\Sigma}$	$K_{50}$
Алюминий 2.52	<sup>24</sup> Na	0.1	0.66	0.68	0.04
		0.2	0.46	0.48	0.03
		0.3	0.36	0.37	0.02
		0.4	0.28	0.29	0.02
		0.53	0.22	0.22	0.01
(NH <sub>4</sub> ) <sub>2</sub> SO <sub>4</sub> 0.87	<sup>32</sup> P	0.03	0.90	0.96	0.07
		0.06	0.82	0.87	0.06
		0.09	0.75	0.80	0.05
		0.12	0.69	0.74	0.05
		0.15	0.63	0.67	0.04
NH <sub>4</sub> Cl 0.75	<sup>32</sup> P	0.03	0.90	0.96	0.08
		0.06	0.82	0.88	0.06
		0.09	0.75	0.80	0.06
		0.12	0.68	0.73	0.05
		0.15	0.62	0.66	0.05

Таблица 4.2

**Сравнение рассчитанных,  $K_p$ , и измеренных,  $K_s$ , коэффициентов самопоглощения бета-частиц для различных источников;**  
 $\delta = |K_s - K_p| / K_s * 100 \%$

Состав источника и $\beta$ - изотоп	$R_n$ , г·см <sup>-2</sup>	$N_n$ , г·см <sup>-2</sup>	$K_p$	$K_s$	$\delta$ , %
Алюминий <sup>24</sup> Na	2.52	0.03	0.900	0.902	0.2
		0.06	0.816	0.824	1.0
		0.1	0.676	0.660	2.4
		0.2	0.485	0.465	4.1
		0.3	0.364	0.357	1.9
		0.4	0.288	0.278	3.5
		0.53	0.222	0.217	2.3
NH <sub>4</sub> Cl <sup>32</sup> P	0.75	0.03	0.910	0.903	0.8
		0.06	0.831	0.822	1.1
		0.09	0.741	0.755	1.9
		0.12	0.676	0.685	1.3
		0.15	0.619	0.623	0.6

Диапазон начальных энергий фотонов составлял 0.03÷5 МэВ для нормального падения, расходящегося пучка и изотропного облучения. Получены данные о функциях энергетической зависимости чувствительности детекторов для различных условий облучения.

Важным моментом процесса измерения поглощенных доз фотонного излучения в среде с помощью твердотельных дозиметров (например, LiF) является переход от измеренных величин к значениям поглощенных доз. Для каждого конкретного вида дозиметра необходима информация об энергетической зависимости чувствительности и, кроме того, величина поглощенной дозы  $D_c$  в объеме детектора произвольного размера и состава (полость) должна быть трансформирована в соответствующую величину поглощенной дозы  $D_m$  в заданной точке окружающей среды:

$$D_m = f_{cm} * D_c, \quad (4.2.1)$$

где коэффициент  $f_{cm}$  является функцией энергии фотонов и состава окружающей среды, в которой измеряются дозовые величины.

В настоящее время оптимальным подходом к решению этой задачи является использование метода Монте-Карло для мо-



делирования процесса переноса фотонов и вторичных электронов в рамках одной расчетной модели.

Была реализована соответствующая модель и программа расчета величины поглощенной энергии в термолюминесцентном детекторе (LiF, плотность  $2.635 \text{ г/см}^2$ ) цилиндрической формы с толщиной  $0.1 \text{ см}$  и диаметром  $1 \text{ см}$ . Рассматривалось облучение детектора плоским, расходящимся и изотропным пучками фотонов.

Моделирование переноса фотонов осуществлялось в пределах объема детектора с введением компенсирующих статистических весов  $W = 1 - \exp(-\mu_{\text{tot}} * L_g)$ ,  $L_g$  – расстояние от точки рассеяния фотона до границы детектора в направлении движения фотона. Основные эффекты взаимодействия фотонов с атомами среды, включенные в схему расчета, следующие: фотоэффект, когерентное и некогерентное рассеяние, эффект образования пар. Процесс столкновений сопровождался расчетом параметров вторичных заряженных частиц: фотоэлектронов, комптоновских электронов и электронно-позитронных пар. Локальное поглощение фотонов фиксировалось при их энергиях менее  $10 \text{ кэВ}$ . Отдельный блок программы, аналогичный описанному выше, учитывал процесс переноса аннигиляционных фотонов.

Моделирование переноса вторичных заряженных частиц – электронов и позитронов – осуществлялось в рамках концепции конденсированных столкновений (класс II) с учетом «катастрофических столкновений» (процесс образования высокоэнергетичных тормозных фотонов и дельта-электронов).

Расчет процесса переноса электронов осуществлялся на основании учета основных процессов взаимодействия электронов с веществом – упругих и неупругих столкновений. На каждом отрезке  $\Delta S$  траектории моделировался угол многократного упругого рассеяния на основании теории Мольера с введением модификации учета больших углов рассеяния; величина потери энергии определялась согласно теории Ландау; эффекты «катастрофических столкновений» моделировались с использованием соответствующих сечений Мёллера и генерации тормозных фотонов с определением параметров вторичных частиц. Расчет переноса осуществлялся непосредственно с момента образования фотоном вторичного электрона. Основная часть распределений и сечений, используемых в программе, рассчитывалась на предварительном этапе.

При снижении энергии позитрона ниже граничной учитывался эффект аннигиляции в покое с излучением двух аннигиляционных фотонов, истории которых последовательно моделировались.

Так как основным результатом расчета является полная поглощенная энергия на один падающий фотон, определялась разность между суммой энергий образованных фотоном вторичных электронов и суммарной энергией вышедших из детектора частиц. При этом делалась коррекция на конечную длину отрезков, из которых состоят траектории электронов, при их выходе за пределы детектора.

На рис. 4.1 представлены результаты расчетов и ряда оценок энергетической зависимости поглощенной в детекторе энергии при нормальном падении широкого пучка фотонов (в диапазоне энергий  $0.03 \div 6$  МэВ). Показано различие в результатах расчетов, проведенных в приближении локального поглощения вторичных электронов (без учета их переноса) и с учетом их утечки из объема детектора. Представлены также оценки поглощенной энергии  $\Delta E_d$  в предположении однократного взаимодействия фотонов в детекторе, когда  $\Delta E_d \approx \mu_{tr} * E_\gamma$ , где  $\mu_{tr}$  – сечение передачи энергии фотонов; результаты достаточно хорошо согласуются для данных условий до значений энергий фотонов  $\approx 0.5$  МэВ.

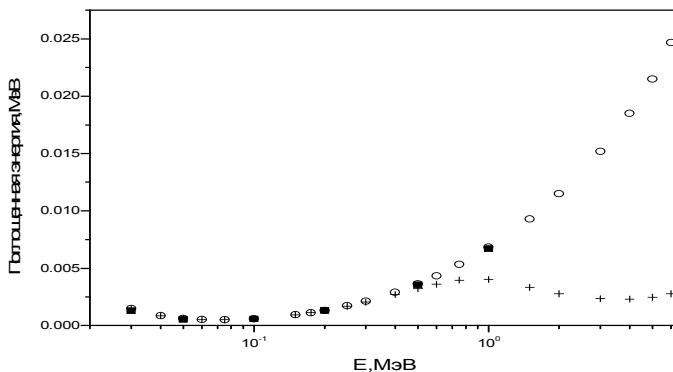


Рис. 4.1. Энергетическая зависимость поглощенной в детекторе энергии при нормальном падении широкого пучка фотонов;  $\circ$  - расчет в приближении локального поглощения вторичных электронов;  $+$  - расчет с учетом утечки вторичных электронов;  $\blacksquare$  - оценка поглощения энергии фотонов в приближении однократного столкновения

Результаты расчетов поглощенной в детекторе энергии для широкого мононаправленного пучка фотонов и расходящегося пучка от точечного изотропного источника на расстоянии 10 см от поверхности детектора для всего рассматриваемого диапазона начальных энергий фотонов не превышало 3 %.

На рис. 4.2 показано сравнение аналогичных результатов для нормального и изотропного облучения детектора.

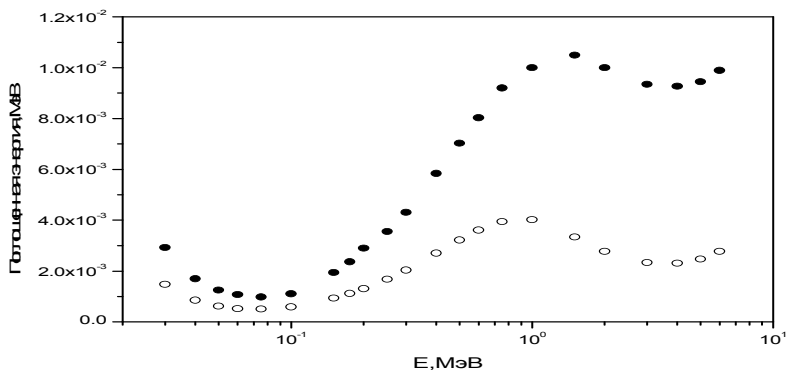


Рис. 4.2. Энергетическая зависимость поглощенной в детекторе энергии при нормальном (○) и изотропном (●) падении фотонов

Для оценки коэффициента  $f_{cm}$  (переход от дозы в детекторе к дозе в среде) был рассмотрен водный фантом размером 20x20x20 см, на различных глубинах которого по центральной оси располагались LiF-детекторы (в виде кубических вокселей); рассчитывались поглощенные дозы на заданных глубинах в водном фантоме и в водном фантоме с детекторами. В диапазоне глубин 1 ÷ 10 см получены значения  $f_{cm} = 1.22 \div 1.25$ .

### 4.3. Расчет характеристик сцинтилляционных детекторов

Широко распространенный метод регистрации и спектрометрии излучений, основанный на использовании твердотельных сцинтилляционных детекторов, сопряжен с необходимостью обработки результатов измерений, в частности, требуется учет формы линии

спектрометра для перехода от измеренного приборного энергетического распределения к истинному спектру.

Расчет методом Монте-Карло функции чувствительности (формы линии), эффективности, фоточасти и фотоэффективности сцинтилляционного спектрометра в ряде случаев может компенсировать отсутствие моноэнергетических источников фотонов, необходимых для получения перечисленных выше параметров.

Для регистрации и спектрометрии фотонного излучения обычно используются неорганические монокристаллы NaI(Tl) и CsI(Tl). Фотоны, взаимодействуя с веществом сцинтиллятора, инициируют заряженные частицы – фотоэлектроны, комптоновские электроны, электронно-позитронные пары – которые теряют энергию на ионизацию и возбуждение атомов и молекул, что в конечном итоге приводит к эффектам люминесценции и выходу световых фотонов из объема сцинтиллятора и их последующей регистрации фотоумножителем.

Одна из широко используемых моделей расчета характеристик сцинтилляционных детекторов основана на предположении полного (локального) поглощения всех образованных фотонами вторичных заряженных частиц в чувствительном объеме детектора; при этом утечка энергии из детектора обусловлена рассеянными фотонами.

Эффекты утечки из детектора вторичных электронов и генерированного ими тормозного излучения в зависимости от размеров чувствительного объема, геометрии источника и энергии фотонов оказывают влияние на форму линии сцинтилляционного спектрометра, на величину среднего тока сцинтилляционного дозиметра, и в определенных ситуациях должны быть учтены.

В условиях сложной геометрии системы «источник-детектор» расчетные модели процесса переноса фотонов и вторичных заряженных частиц, основанные на методе Монте-Карло, обеспечивают возможность оценки степени воздействия различных факторов на форму линии спектрометра. В частности, в имитационную модель можно включить процедуру обработки спектра энергопоглощений на энергетическое разрешение системы «сцинтиллятор-фотоумножитель», зависимость световых выходов от величины энергопоглощения, особенности источника фотонов (объемные источники), эффекты каскадного суммирования гамма-квантов и т. д.

Фотонные истории в объёме детектора моделируются в соответствии с физическими процессами взаимодействия фотонов с веществом детектора. Тип взаимодействия (фотоэффект – полное сечение процесса  $\sigma_{\text{ф}}(E_{\gamma})$ , комптон-эффект –  $\sigma_{\text{к}}(E_{\gamma})$  и эффект образования пар –  $\sigma_{\text{п}}(E_{\gamma})$ ) определяется относительным вкладом этих процессов. При фотопоглощении практически вся энергия фотона передается фотоэлектрону с вычетом энергии связи  $E_{\text{б}}$ :  $E_{\text{ф}} = E_{\gamma} - E_{\text{б}}$ ; обычно  $E_{\text{б}} \approx 0$  для энергий фотонов более сотен кэВ). Угловое распределение фотоэлектронов может быть учтено на основании соотношении Заутера ( $\beta \approx 1$ ,  $Z/137 \ll 1$ ) при равновероятном распределении азимутального угла  $\varphi$  в диапазоне  $2\pi$ .

Для фотонов, энергия которых превышает энергию связи электронов в атоме, направление движения и энергия рассеянного при комптоновском взаимодействии фотона рассчитываются согласно сечению Кляйна-Нишины-Тамма. Энергия фотона  $E_{\gamma\text{р}}$  после рассеяния на полярный угол  $\theta$

$$E_{\gamma\text{р}} = E_{\gamma} / [1 + \alpha \cdot (1 - \cos \theta)] \quad (4.3.1)$$

и энергия  $E_{\text{е}}$  комптоновского электрона определяется соотношением

$$E_{\text{е}} = \alpha \cdot E_{\gamma} \cdot (1 - \cos \theta) / [1 + \alpha \cdot (1 - \cos \theta)], \quad (4.3.2)$$

где  $\alpha = E_{\gamma} / mc^2$  (также при равновероятном распределении азимутального угла  $\varphi$ ).

На основании этих основных процессов реализуется расчетная модель и алгоритм метода статистических испытаний процесса переноса фотонов в чувствительном объёме сцинтиллятора. Все вторичные электроны, инициированные в результате каждой фотонной истории, далее последовательно прослеживаются (являются начальными параметрами) в программе переноса электронов. Основным результатом расчета этой программы является величина поглощенной энергии всех вторичных электронов с учетом их утечки из детектора в расчете на один фотон (распределение поглощенной энергии – форма линии спектрометра).

Учет влияния энергетического разрешения системы «сцинтиллятор – фотоумножитель» на форму линии спектрометра заключается в обработке расчетного распределения энерговыделения в детекторе согласно соотношению:

$$R(E, h) = \int_{E_n}^{E_{n+1}} D(E, \varepsilon) \cdot S(\varepsilon, h) d\varepsilon, \quad (4.3.3)$$

где  $R(E, h)$  - плотность вероятности образования фотоном с энергией  $E$  импульса с амплитудой  $h$ ;

$D(E, \varepsilon)$  - плотность вероятности для фотона с энергией  $E$  создать в детекторе величину поглощенной энергии  $\varepsilon$ ;

$S(\varepsilon, h)$  - плотность вероятности образования импульса с амплитудой  $h$  при поглощенной энергии  $\varepsilon$ .

Статистический характер формирования аппаратурного спектра определяет функцию разрешения  $S(\varepsilon, h)$ , которая обычно представляется в виде гауссиана:

$$S(\varepsilon, h) = [\sqrt{2\pi} \cdot \sigma(\varepsilon)]^{-1} \cdot \exp[-\frac{1}{2}(\varepsilon - h)^2 / \sigma^2(\varepsilon)], \quad (4.3.4)$$

где дисперсия  $\sigma^2(\varepsilon) = a + b \cdot \varepsilon$ ; константы  $a$  и  $b$  определяются экспериментально для конкретного спектрометра. Измеряется полуширина пика полного поглощения  $\Delta_{1/2} = 2.355 \cdot \sigma(\varepsilon)$  для моноэнергетических фотонов с различными энергиями и устанавливается значение  $\sigma(\varepsilon)$ .

При моделировании процесса переноса фотонов в веществе детектора используются различные модификации в зависимости от условий облучения, в частности, от энергии фотонов и размеров детектора. Например, если вероятность взаимодействия фотонов в детекторе мала, то обычно используется схема расчета с введением статистического веса  $W$ , учитывающая вероятность взаимодействия фотона в пределах объема детектора:

$$W_n = W_{n-1} \cdot (1 - \exp(-\mu(E_\gamma) \cdot L)),$$

где  $\mu(E_\gamma)$  - полное сечение взаимодействия фотонов,  $L$  - расстояние до границы детектора в направлении движения фотона (дополнительный вес вводится для учета вероятности вылета фотона из детектора).

Результаты расчетов методом Монте-Карло распределений энергопоглощений в сцинтилляционных детекторах достаточно хорошо отражают основные физические закономерности формирования спектров и согласуются с соответствующими экспериментальными

данными. На рис. 4.3 представлены результаты расчетов (программа переноса электронов класса II) и измерений энергетического распределения гамма-квантов изотропного источника  $^{137}\text{Cs}$ , при регистрации их сцинтилляционным спектрометром с кристаллом NaI(Tl); результаты достаточно хорошо согласуются. Для этого же кристалла на рис. 4.4. показана зависимость величины утечки энергии  $\Delta E$ , обусловленной выходом вторичных электронов из детектора, от энергии первичного пучка фотонов при локальном поглощении электронов, а также для случаев облучения широким и узким пучком фотонов.

При энергиях фотонов выше порога параобразования ( $E_\gamma > 2m_0c^2$ ) в спектре появляются дополнительные пики, связанные с эффектом аннигиляции позитронов. На рис. 4.5 приведен рассчитанный спектр радиоактивного изотопа  $^{24}\text{Na}$  (кристалл NaI(Tl) размером  $\varnothing 40 \times 40$ , изотоп имеет две линии -  $E_\gamma = 2.75$  МэВ и  $E_\gamma = 1.37$  МэВ). При начальной энергии 2.76 МэВ сечение образования пар в кристалле NaI(Tl) является существенным.

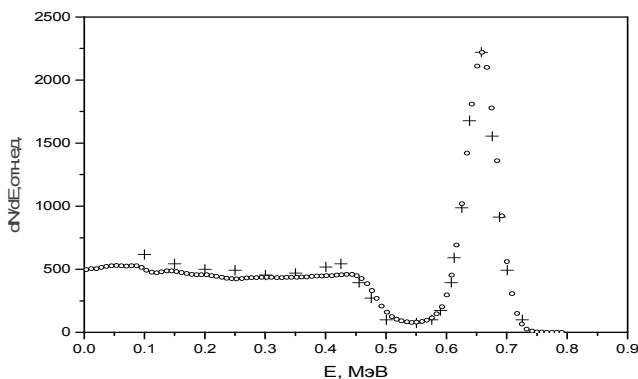


Рис. 4.3. Энергетическое распределение для гамма-изотопа  $^{137}\text{Cs}$ ; кристалл NaI(Tl),  $\varnothing 40 \times 40$ , точечный источник на оси кристалла на расстоянии 0.1 см от поверхности, о – расчет методом Монте-Карло, + - экспериментальные данные [7]

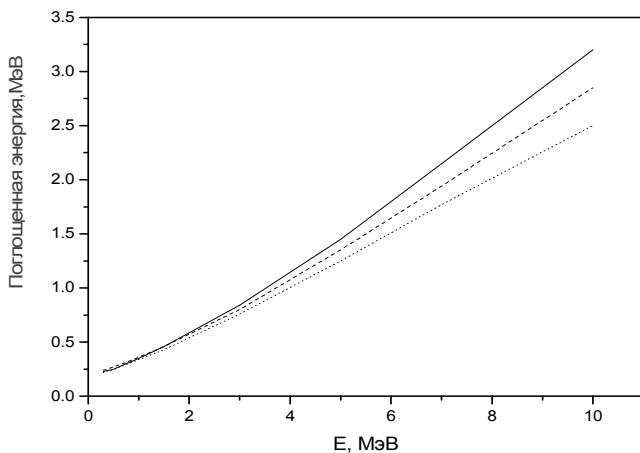


Рис. 4.4. Зависимость величины поглощенной энергии в кристалле NaI(Tl) размером  $\text{Ø}40 \times 40$  от энергии падающих на него фотонов; ---- - без утечки электронов, - - - широкий пучок, ..... - узкий пучок

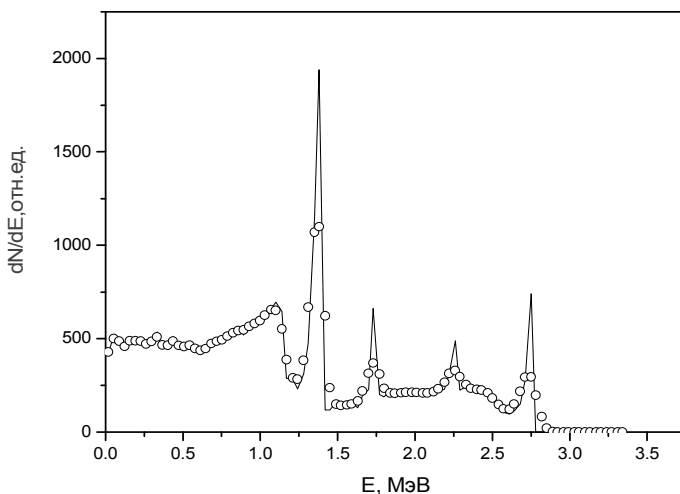


Рис. 4.5. Спектр изотопа  $^{24}\text{Na}$ ; кристалл NaI(Tl)  $\text{Ø}40 \times 40$ ; точечный изотропный источник на поверхности кристалла



В процессе параобразования энергия кванта выше порога 1.02 МэВ переходит в кинетическую энергию пары электрон-позитрон. Поглощение позитрона в кристалле обуславливает эффект аннигиляции (преобладает аннигиляция «в покое») с образованием двух фотонов с энергией 0.511 МэВ каждый. Оба этих фотона могут выйти из кристалла, тогда первичный квант потеряет энергию, равную кинетической энергии пары, т.е. энергию на 1.02 МэВ меньше; в спектре появится пик, соответствующий этой энергии (пик двойного вылета). Если из кристалла вылетит один из аннигиляционных квантов, а другой поглотится, то в спектре появится пик, соответствующий энергии  $E_\gamma = 0.511$  МэВ. Эти пики наблюдаются в расчитанном спектре  $^{24}\text{Na}$ .

#### **4.4. Характеристики вторичных электронов, выходящих из мишеней, облучаемых фотонами**

При взаимодействии ионизирующего излучения с веществом, в частности с фотонами, образуются вторичные электроны, характеристики которых зависят от параметров поля первичных фотонов и свойств облучаемой среды. Детальное изучение характеристик вторичных электронов (интегральный выход, энергетические спектры, угловые распределения) представляет практически важную задачу, поскольку эти данные необходимы при конструировании детекторов излучения (детекторы, принцип действия которых основан на «стеночном» эффекте – газоразрядные счетчики, ионизационные камеры) для расчета поглощенной дозы и других задач дозиметрии и радиационной техники.

С точки зрения механизма эмиссии электронов, применяемые методы вычислений обычно разбиваются на два этапа. Вначале определяются характеристики электронного излучения, возникающего в элементарном акте взаимодействия фотонов. Далее по той или иной модели прослеживается движение электронов через среду. Одним из способов решения такого задач является метод Монте-Карло. Расчет переноса фотонов проводится методом статистических испытаний. С целью уменьшения статистической погрешности итоговых результатов расчета взаимодействие каждого

фотона учитывается введением вероятности его поглощения в мишени, т.е. соответствующим статистическим весом:

$$W_{\gamma} = 1 - \exp\left\{-\sigma_{tot} \cdot l^*\right\},$$

где  $l^*$  - расстояния от точки нахождения фотона до границы возможного выхода из среды,  $\sigma_{tot}$  - полное сечение взаимодействия фотона. Каждый акт взаимодействия сопровождается расчетом соответствующих параметров образовавшихся электронов. Состояние каждого электрона фиксируется в накопителе вторичных частиц; после окончания истории фотона все эти электроны последовательно выбираются, и их параметры являются входными для дальнейшего моделирования в программе переноса электронов. Истории электронов заканчиваются после их выхода из мишени или при достижении энергии отсечки; в последнем случае для позитронов разыгрываются параметры аннигиляционных фотонов с энергией 0.511 МэВ.

Результирующее распределение вторичных электронов при облучении железной мишени фотонами с энергией 2 МэВ (табл. 4.3) дает представление о количественном характере процессов в облучаемом объекте.

Таблица 4.3

**Баланс вторичных электронов, инициированных фотонным пучком с энергией 2 МэВ, нормально падающих на мишень из железа толщиной 0.8 мм**

Число первичных фотонов	1 915563
Образовано электронов	50000
Поглощено электронов	29402
Выход электронов вперед	18069
Выход электронов назад	949
Образовано электронно-позитронных пар	1580

Вычисление интегрального выхода электронов из мишеней, облучаемых фотонами, может быть рассчитано приближенными методами, принципы которых иллюстрируется ниже (для энергий фотонов меньше ~1 МэВ).

Фотон с энергией  $h\nu_0$  проходит расстояние  $x$  (отсчет ведется от координаты  $x = 0$ , влево), инициируют вторичные электроны с кинетической энергией  $E$  и в направлении движения  $\theta$ . Предполагается, что электрон должен пройти расстояние  $x/\cos\theta$ , чтобы избежать поглощения в мишени. Тогда полный выход числа вторичных электронов определяется интегралом:

$$\varepsilon_{2\pi} = 2\pi \frac{N_0}{A} \rho \int_0^d \int_0^{\pi/2} \left[ \sigma_{CS}(E, \theta) \cdot T(E, x/\cos\theta, Z) + \sigma_{PE}(E, \theta) \cdot T(E, x/\cos\theta, Z) \right] \times \sin\theta d\theta dx, \quad (4.4.1)$$

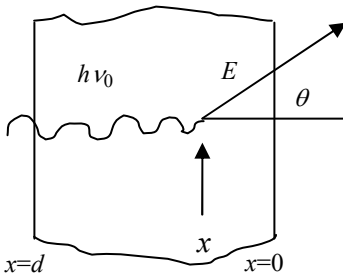


Рис. 4.6. Геометрия расчета

где  $\sigma_{CS}(E, \theta)$  и  $\sigma_{PE}(E, \theta)$  - дифференциальные по углу вылета  $\theta$  и энергии  $E$  комptonовского и фотоэлектрона сечений соответствующих взаимодействий,  $N_0$  - число Авогадро,  $A$ ,  $Z$  - атомный вес и номер вещества мишени,  $\rho$  - его плотность. Электрон, образовавшийся на глубине  $x$  с кинетической энергией  $E$  и направлением  $\theta$ , имеет вероятность выхода  $T$  из мишени, которая определяется следующим эмпирическим соотношением:

$$T\left(E, \frac{x}{\cos\theta}, Z\right) = \exp \left\{ - \left[ E \cdot \left( \frac{0.585 \cdot Z^{-0.271}}{x/\cos\theta} \right)^{0.848} \right]^{-14.52Z^{-0.48}} \right\}. \quad (4.4.2)$$

В табл. 4.4 обобщены результаты расчетов и экспериментов [8] по выходу электронов из алюминиевых мишеней различной вели-

чины; очевидна необходимость установления детального анализа причин некоторого расхождения величин. Приближения расчетного соотношения 4.4.1 являются достаточно грубыми, так как траектории электронов до выхода из мишени не являются прямолинейными (соотношение 4.4.2 относится к случаю нормального падения электронов на плоский поглотитель, что не соответствует реальной геометрии задачи).

Характер зависимости выхода электронов от толщины мишени из свинца показан на рис. 4.7 для случая облучения фотонами с энергией 10 МэВ.

Таблица 4.4

**Число вторичных электронов на один первичный фотон, выходящих из алюминиевых поглотителей различной толщины  $d$  при различных начальных энергиях фотонов**

$E_{\gamma 0}$

$E_{\gamma 0}$ , МэВ	$d$ , г/см <sup>2</sup>	Эксп. , $\times 10^{-3}$ [22]	Расч. , $\times 10^{-3}$ (4.4.1)	М-К, $\times 10^{-3}$
0,412	0,055	$1,00 \pm 0,15$	1,22	1,19
1,25	0,0343	$1,99 \pm 0,10$	1,57	1,57
1,25	0,614	$7,97 \pm 0,32$	8,0	6,93
1,50	1,7	8,70	—	8,20
2,50	2,0	15,0	—	14,69

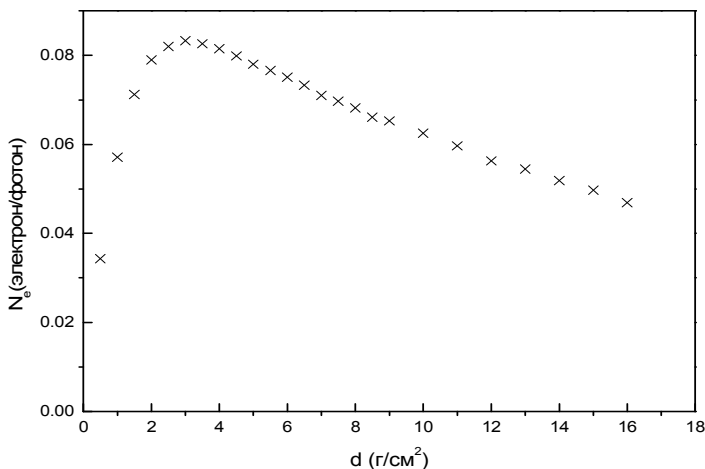


Рис. 4.7. Число вторичных электронов за барьерами из свинца различной толщины;  $E_{\gamma 0} = 10$  МэВ

#### 4.5. Метод Монте-Карло в задачах лучевой терапии

Считается, что метод Монте-Карло потенциально является наиболее точным среди других расчетных методов для определения дозных распределений от электронных и фотонных пучков в задачах планирования лучевой терапии в медицине. В случае наличия информации об источнике и структуре объекта облучения этот метод может обеспечить достаточно точное моделирование переноса, учитывая неоднородности и сложную геометрию объекта, в котором рассчитывается пространственное распределение поглощенной энергии. Точность, с которой определяются значения доз, зависит от типа негетогенностей в среде, энергии пучков электронов или фотонов, размера поля облучения и других факторов. Простые модели переноса электронов часто не могут быть использованы из-за больших затрат времени расчета для достижения необходимой статистической погрешности.

Развитие методологии радиационной терапии обуславливает необходимость развития более точных расчетных моделей с высокой скоростью счета. Рассчитываемые величины в условиях трех-

мерной геометрии представляют совокупность данных весьма большого объёма, так как необходимо определять энергию рассеянного электронного излучения в малых ячейках (вокселях (voxel)) размером в несколько кубических миллиметров; массив данных может, например, иметь размерность  $128 \times 128 \times 100$  (типичная геометрия расчета показана на рис. 4.8). Такие условия определяют необходимость расчета весьма большого числа историй первичного излучения. В случае использования фотонных пучков основной временной объём расчетов связан с моделированием переноса электронов. В качестве примера ниже рассмотрены основные особенности одной из моделей переноса электронов [9] для расчета дозных распределений в тканеэквивалентной среде в энергетическом диапазоне  $1 \div 30$  МэВ в низкоатомных тканеэквивалентных средах с плотностью в интервале  $0 \div 3$  г/см<sup>2</sup>. Основная задача этой модели – обеспечить высокую скорость расчета пространственного дозного распределения (3D - геометрия) за счет введения упрощающих модификаций, не приводящих к существенным погрешностям результатов.

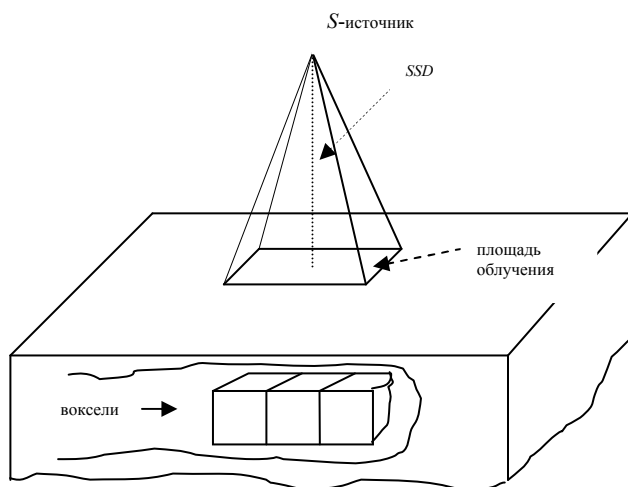


Рис. 4.8. Геометрия расчета: *S* - источник, *SSD* – расстояние между источником и облучаемой поверхностью

Наиболее существенны временные затраты ЭВМ на моделирование угла многократного рассеяния (распределения Гудсмита - Саундерсона и Мольера) и в данном случае используется функция

$$f(q) \cdot q dq = \frac{2}{p^2 \cdot \langle \theta^2 \rangle \cdot (1 - \exp(-4 / \langle \theta^2 \rangle))} \cdot \exp\left(-\frac{q^2}{\langle \theta^2 \rangle \cdot p^2}\right), \quad (4.5.1)$$

где  $q$  – передаваемый при рассеянии импульс и  $p$  – импульс электрона. Связь между  $q$  и углом рассеяния  $\theta$  соответствует соотношению:

$$q^2 = 2p^2 \cdot (1 - \cos \theta).$$

Величина среднего квадрата угла рассеяния  $\langle \theta^2 \rangle$  определяется угловой рассеивающей способностью  $T_S(t')$  электронов в рассматриваемой среде

$$\langle \theta^2 \rangle = \int_0^{\Delta s} T_S(t) dt,$$

где  $\Delta s$  – длина шага траектории; такой вид распределения (4.5.1) является более точным (в области больших углов), чем гауссовское распределение в малоугловом приближении.

Образование дельта-электронов (1.4.1) определяется в соответствии с дифференциальным сечением Мёллера, которое можно представить в виде:

$$\frac{d\sigma_M(\tau, \tau')}{d\tau'} = \frac{g(\tau, \tau')}{\tau'^2}; \quad (4.5.2)$$

функция  $g(\tau, \tau')$  мало изменяется с изменением  $\tau'$  для определенного значения  $\tau$ . В первом приближении кинетическая энергия дельта-электронов определяется распределением вида  $1/\tau'^2$ ; для точной выборки энергии дельта-электрона функция  $g(\tau, \tau')$  может быть использована в методе исключения: энергия  $\tau'$  вторичного электрона, выбранная согласно распределению  $1/\tau'^2$  принимается, если  $g(\tau, \tau') < \xi$ , где  $\xi$  – равномерно распределенное в интервале  $[0, 1]$ .

Аналогично может быть представлено дифференциальное сечение (1.4.1) процесса генерации тормозных фотонов:

$$\frac{d\sigma_T(E, \kappa)}{d\kappa} = \frac{f(E, \kappa)}{\kappa}, \quad (4.5.3)$$

где  $E$  – первичная энергия электрона,  $\kappa$  – энергия тормозного фотона. Функция  $f(E, \kappa)$  также слабо зависит от значения  $\kappa$ , и случайная выборка значений энергии фотонов реализуется из распределения вида  $1/\kappa$ . Такое приближение вносит определенную погрешность в модель расчета, но вклад тормозного излучения в дозные распределения при энергиях, используемых в лучевой терапии, достаточно мал.

В величину полных удельных потерь энергии электронов  $S(E) = dE / dx(E)$  включены потери, обусловленные дискретными взаимодействиями (тормозные фотоны и дельта-электроны); так как эти эффекты рассматриваются как отдельные события, то они должны быть исключены из величины  $S(E)$ , которая используется для реализации модели в приближении непрерывного замедления:

$$\begin{aligned} \langle S \rangle_\gamma(E) &= S_\gamma(E) - \Sigma_\gamma(E) \cdot \bar{k}(E, k_c), \\ \langle S \rangle_I(E) &= S_I(E) - \Sigma_\delta(E) \cdot E'_\delta(E, E_c). \end{aligned}$$

$\Sigma_\gamma(E)$  и  $\Sigma_\delta(E)$  есть полные макроскопические сечения образования тормозных фотонов и дельта-электронов с энергиями, выше  $k_c$  и  $E_c$ . Величины средних энергий  $\langle k \rangle(E, k_c)$  и  $E'_\delta(E, E_c)$  определяют на основании аппроксимирующих сечений (4.5.2) и (4.5.3):

$$\langle k(E, k_c) \rangle = \frac{E - k_c}{\ln(E / k_c)}, \quad E'_\delta(E, E_c) = \frac{E \cdot E_c}{E - 2 \cdot E_c} \cdot \ln\left(\frac{E}{2 \cdot E_c}\right).$$

Длины шагов, на которых учитываются процессы взаимодействия, определяются в зависимости от энергии электрона. В модели не учитываются поперечное смещение на прямолинейном элементарном шаге  $s$ , и поправка, учитывающая действительный путь  $\Delta s$ , соответствует теории Ферми — Эйджеса:

$$\Delta s = s + \frac{T_s(E) \cdot \Delta s^2}{2},$$

откуда определяется



$$\Delta s1_{\max}(E) = \frac{1}{T_S(E)}.$$

При больших энергиях (например, при  $E = 10$  МэВ  $\Delta s1_{\max}(E) = 12.45$  см) используется следующее условие определения длины шага:

$$\Delta s2_{\max} = \text{Min}(E / 20, 200 \cdot t_{eff}),$$

( $200 \cdot t_{eff} = 0.53$  см в воде,  $E$  – МэВ,  $\Delta s2_{\max}$  – см), Для малых энергий величина шага соответствует соотношению:

$$\Delta s3_{\max} \approx E / 50, \quad (E, \text{МэВ}).$$

Окончательный выбор  $\Delta s_{\max}$  выполняется на основании следующих условий:

$$\Delta s_{\max} = \text{Max}\{\Delta s3_{\max}, \text{Min}[\Delta s1_{\max}(E), \Delta s2_{\max}(E)]\}.$$

Рассматриваемая модель должна обеспечивать расчет переноса электронов в тканеэквивалентной среде, отдельные области которой имеют различную плотность (устанавливаются из данных компьютерной томографии). Как функции плотности  $\rho$  должны быть определены значения  $T_S(E, \rho)$ ,  $S_I(E, \rho)$  и  $S_\gamma(E, \rho)$ ; эти величины рассчитываются на основании приведенных ниже аппроксимирующих соотношений, базовыми величинами которых являются соответствующие данные для воды (значения с индексом «0»).

$$\frac{S_I(E, \rho) / \rho}{S_I^0(E) / \rho_0} = \begin{cases} \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{-0.17}, \rho \geq 0.795 \text{ г/см}^3 \\ 1.039, \rho < 0.795 \text{ г/см}^3 \end{cases}$$

$$\frac{S_\gamma(E, \rho) / \rho}{S_\gamma^0(E) / \rho_0} = \begin{cases} 1.13 + 0.56 \cdot \ln\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right) - 0.3, \rho \geq 0.9 \text{ г/см}^3 \\ 1.049 - 0.228 \cdot \frac{\rho}{\rho_0}, \rho < 0.9 \text{ г/см}^3 \end{cases}$$

$$T_S(E, \rho) = \frac{T_S^0(E)}{\rho_0} \cdot \rho.$$

Алгоритм формирования истории электрона в рамках этой модели следующий: в начале каждого  $i$ -го шага электрона  $\Delta s^i_{\max}$  с начальной энергией  $E_i$  случайным образом определяется величина

расстояния  $t$ , на котором осуществляются дискретные взаимодействия (образование тормозных фотонов и дельта-электронов), в соответствии с вероятностью

$$P(t) = \exp\left(-\int_0^t (\Sigma_{\delta}(E_i, t') + \Sigma_{\gamma}(E_i, t')) dt'\right),$$

где  $\Sigma_{\delta}$  и  $\Sigma_{\gamma}$  есть макроскопические сечения образования дельта-электронов и фотонов в воде, которые в пределах шага  $\Delta s^i_{\max}$  считаются постоянными. Если  $t > \Delta s^i_{\max}$ , вторичные частицы не образуются и новое значения значение энергии электрона

$$E_{i+1} = E_i - (\bar{S}_I(E_i) + \bar{S}_{\gamma}(E_i)) \cdot \Delta s^i_{\max}.$$

Далее выбирается случайное значение угла многократного рассеяния  $\theta_i$  и равномерно распределенного азимутального угла  $\varphi_i$ , т.е. имеются все параметры для определения следующего состояния электрона.

Если  $t < \Delta s^i_{\max}$ , с вероятностью  $P_{\delta} = \frac{\Sigma_{\delta}}{\Sigma_{\delta} + \Sigma_{\gamma}}$ ; с вероятностью

$P_{\gamma} = \frac{\Sigma_{\gamma}}{\Sigma_{\delta} + \Sigma_{\gamma}}$  эмитируется тормозной фотон. В данной модели перенос фотонов не учитывается; соответствующие параметры вторичных дельта-электронов запоминаются с целью дальнейшего моделирования их переноса. Производится расчет поглощенной энергии в вокселях, пересекаемых на шаге  $\Delta s_i$  в соответствии с величинами длин трека  $t_i^k$  в  $k$ -м вокселе:

$$\Delta E_i^{(k)} = S_I(\rho^k) \cdot t_i^k.$$

Важная особенность изложенного здесь подхода – отсутствие необходимости предварительного расчета сечений и распределений; все необходимые параметры рассчитываются в процессе реализации расчета. Отмечается достаточно хорошее согласие результатов расчета, полученных с помощью данной модели и других программных кодов (в частности EGS4).

Использование упрощающих и оптимизирующих процедур для решения задач лучевого планирования было реализовано в алгоритме DPM (метод дозового планирования) [7] для расчета транспорта электронов и фотонов в условиях 3D воксельной геометрии однородного или гетерогенного состава. Модель основана на стандартной концеп-

ции конденсированных историй с учетом больших передач энергии в соответствующих столкновениях и малых энергетических потерь в приближении непрерывного замедления (2 гл.).

Ниже представлены типичные характеристики программного кода для расчета пространственных дозовых распределений в геометрии облучения, показанной на рис. 4.8. Показаны некоторые результаты расчетов, иллюстрирующие характер расчетной информации (рис. 4.9, 4.10).

Таблица 4.5

**Сравнение времени расчета и статистической погрешности ( $1\sigma$ ) для облучаемых тормозными фотонами ( $E = 6$  МВ) фантомов из различных веществ ( $30 \times 30 \times 30$  см<sup>3</sup>, поле  $10 \times 10$  см<sup>2</sup>).  
Статистика  $-10^7$  историй**

Вещество	время расчета	погрешность
Углерод	2 мин 15 с	3.1 %
Вода	1 мин 26 с	3.7 %
Алюминий	2 мин 10 с	2.7 %
Легкие	0 мин 32 с	5.3 %

Сравнение результатов расчетов дозных величин на центральной оси источника на расстоянии «источник-поверхность фантома» 100 см относительно временных затрат и соответствующих погрешностей (среднеквадратичное отклонение) при разбиении фантома размером  $30 \times 30 \times 30$  см<sup>3</sup> на совокупность вокселей  $0.5 \times 0.5 \times 0.5$  см<sup>3</sup> для различных квадратных полей облучения и различных источников первичных фотонов представлено в табл. 4.6 (рис. 4.9). Как значения погрешностей, так и времена расчетов всех вариантов незначительно различаются для рассмотренных источников фотонов.

Размер вокселей также влияет на время расчета для достижения заданного уровня погрешности результата. Были проведены соответствующие расчеты в условиях гетерогенной среды, определенной выше, для поля облучения  $5 \times 5$  см<sup>2</sup> и энергии пучка фотонов 18 МВ; для вокселей  $0.25 \times 0.25 \times 0.25$  см<sup>3</sup> время расчета  $5 \cdot 10^7$  историй фотонов составило  $\sim 8$  мин с достигнутой погрешностью  $\sim 1.4 \div 1.6$  %; для вокселей размером  $0.5 \times 0.5 \times 0.5$  см<sup>3</sup> соответствующие результаты составляют  $\sim 6$  мин. 50 с при погрешности  $\sim 0.6 \div 0.9$  %.

Проведена оценка погрешностей и временных затрат для вариантов облучения неоднородных сред. Рассматривался плоский неоднородный фантом (ICRU–фантом), состоящий из последовательных слоев воды ( $0 \div 3$  см), алюминия ( $3 \div 5$  см), легочной ткани ( $5 \div 12$  см, плотность  $0.3 \text{ г/см}^3$ ) и воды ( $12 \div 20$  см).

Таблица 4.6

**Время расчета поглощенных доз и статистическая погрешность для облучаемых фотонами ( $E = 1.25 \text{ МэВ}$ ,  $E = 6 \text{ МВ}$ ,  $E = 18 \text{ МВ}$ ) водных фантомов ( $30 \times 30 \times 30 \text{ см}^3$ ) для  $5 \cdot 10^7$  историй и полей различной площади**

Поле, см <sup>2</sup>	Время расчета	Погрешность
<sup>60</sup> Со		
10x10 5x5 2.5x2.5	~ 4 мин 26 с	1.60 % 0.80 % 0.40 %
<b>6 МВ</b>		
10x10 5x5 2.5x2.5	~ 4 мин 40 с	1.70 % 0.90 % 0.45 %
<b>18 МВ</b>		
10x10 5x5 2.5x2.5	~ 6 мин 10 с	1.40 % 0.70 % 0.45 %

Размер вокселей составлял  $0.25 \times 0.25 \times 0.25 \text{ см}^3$ ; расчеты проводились для пучка тормозного излучения с граничной энергией 18 МВ и поля облучения  $1.5 \times 1.5 \text{ см}^2$ . При статистике расчета  $5 \cdot 10^7$  фотонов время расчета составляло ~ 7 мин 45 с. и величина статистической погрешности значений доз на центральной оси источника находилась в диапазоне  $0.5 \div 0.7$  %. Этот диапазон погрешностей включает соответствующие величины вблизи раздела сред. Характер структуры дозного распределения в данной неоднородной композиции показан на рис. 4. 10.

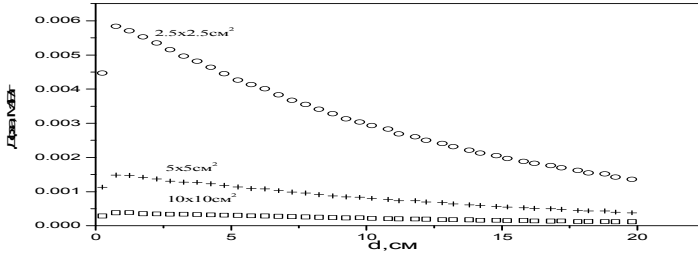


Рис. 4.9. Глубинное распределение доз на центральной оси водного фантома при различных полях облучения;  $E = 6 \text{ MB}$

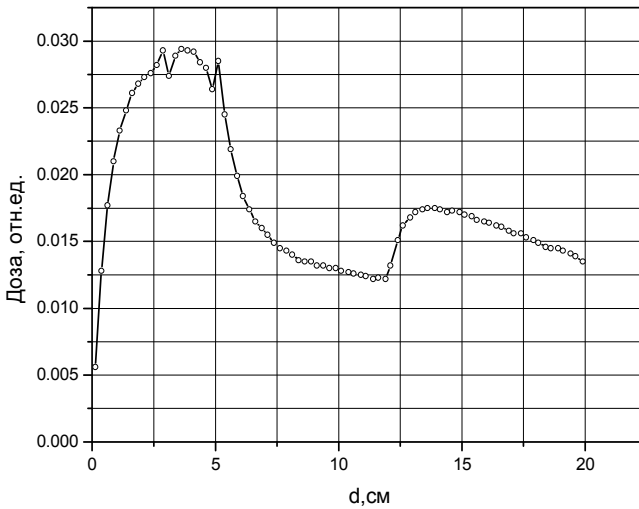


Рис. 4.10. Глубинное распределение доз на центральной оси гетерогенного фантома (вода – 3 см, алюминий – 2 см, легочная ткань – 7 см, вода – 8 см) при падении пучка фотонов тормозного излучения с  $E = 18 \text{ MB}$  (поле облучения  $1.5 \times 1.5 \text{ см}^2$ )

#### 4.6. Расчет характеристик тормозного излучения электронов

Информация о характеристиках полей тормозного излучения, формирующегося в процессе взаимодействия пучков быстрых электронов с различными материалами, необходима для решения целого ряда практических задач ускорительной техники, защиты от излучения, медицины, радиационной технологии и т.д.

В литературе весьма ограничены данные по измерению характеристик тормозного излучения, выходящего из мишеней – толстых поглотителей электронов. Проведение таких измерений сопряжено с большими методическими трудностями, основные из которых следующие: в большинстве случаев импульсный характер работы ускорителей электронов, обуславливающий необходимость исключения эффектов суммирования фотонов при их регистрации, высокий уровень фона рассеянного излучения, трудности обработки аппаратных спектров тормозного излучения (сложна процедура получения информации о форме линии спектрометра в диапазоне энергий фотонов выше  $\sim 2$  МэВ).

С целью уменьшения статистической погрешности результатов расчета характеристик тормозного излучения генерация фотонов электронами с энергией  $E$  рассчитывается для каждого слоя  $\Delta s$ , приписывая фотону начальный статистический вес:

$$W_{\gamma}^0(E) = 1 - \exp[-\Sigma_{\gamma}(E) \cdot \Delta s(E)],$$

где  $\Sigma_{\gamma}(E)$  - макроскопическое сечение тормозного излучения, полученное интегрированием дифференциального сечения при постоянном значении нижнего предела интеграла  $E_{\gamma \text{ мин}}$ , которое равняется минимальной энергии рассматриваемых в задаче тормозных фотонов. Значение начальной энергии генерированного фотона разыгрывается случайным образом из соответствующего дифференциального по энергии фотона сечения тормозного излучения. В итоге на каждый электрон, например с энергией 30 МэВ, полностью поглощающейся в среде, моделируется в среднем до 150 траекторий тормозных фотонов.

Угловое распределение тормозного излучения электрона после прохождения шага  $\Delta s$  может быть учтено с помощью теоретических данных, полученных вычислением свертки собственно угло-

вого распределения тормозного излучения и многократного рассеяния электронов в мишени. В частности, вид соответствующего соотношения представлен ниже:

$$\frac{I(\theta)}{I(0)} = \frac{-Ei\{- (E \cdot \theta)^2 \cdot \ln(183 \cdot Z \cdot \frac{1}{3}) / 1510 \cdot 8 \cdot t\} + Ei\{- (E \cdot \theta)^2 / 1.787 \cdot \mu^2\}}{\ln\{1510 \cdot 8 \cdot t / \mu^2 \cdot \ln(183 \cdot Z \cdot \frac{1}{3})\} - 0.5772}, \quad (4.6.1)$$

где  $I(\theta)$  – интенсивность тормозного излучения под углом  $\theta$  относительно направления первичных электронов;  $E$  – энергия падающих электронов, МэВ;  $\mu = mc^2$  – энергия покоя электрона, МэВ;  $t$  – толщина мишени в радиационных единицах (расстояние, на котором за счет радиационных потерь энергия электрона уменьшается в  $e$  раз);  $Ei()$  –  $Ei$ -функция. Соотношение (4.6.1) справедливо в диапазоне толщин  $10^{-3}$ – $10^{-1}$  радиационных длин.

Энергетическое и угловое распределение фотонов, выходящих из толстых поглотителей, облучаемых пучком моноэнергетических электронов, определяется рядом факторов, основные из которых следующие: энергия электронов и угол их падения на поглотитель, толщина и атомный номер поглотителя. Эти параметры определяют характеристики спектрально-углового распределения электронов на различных глубинах поглотителя, формирующих глубинное распределение источников тормозного излучения.

Модели расчета переноса электронов с учетом генерации тормозного излучения позволяют решать самые разнообразные задачи для получения детальной информации о полях тормозного излучения, различные интегральные и дифференциальные характеристики. Наиболее важной из них являются спектральные распределения по энергии выходящих из мишеней тормозных фотонов. Алгоритмы расчета учитывают процессы рассеяния и потерь энергии электронов в мишени, генерации фотонов и их дальнейший перенос в мишени. В качестве примера на рис. 4.12 показана деформация энергетического спектра тормозного излучения в зависимости от угла выхода фотонов из мишени; спектры рассчитывались в диапазоне углов выхода фотонов из мишени  $0^0$ – $90^0$  и в направлении нормально падающего тонкого пучка электронов  $-0^0$ .

Одной из практически важных интегральных характеристик является величина полного энергетического и числового выхода

тормозных фотонов из мишеней различной толщины. Характеристикой первой величины является эффективность выхода тормозного излучения

$$Y(E_0, d) = \Delta E_{\text{тор}} / E_0,$$

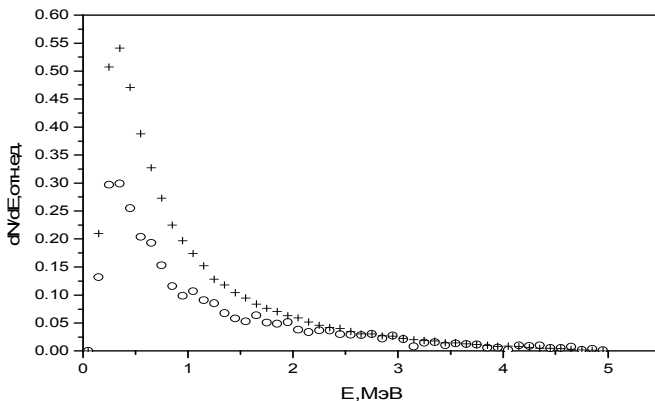


Рис. 4.12. Энергетические распределения тормозного излучения, выходящего из вольфрамовой мишени толщиной  $2 \text{ г/см}^2$  при нормальном падении тонкого пучка электронов с энергией 5 МэВ (+ - выход фотонов в переднее полупространство, o - выход “прямо-вперед”)

где  $\Delta E_{\text{тор}}$  — интенсивность тормозного излучения, выходящего из мишени, в расчете на один падающий электрон с энергией  $E_0$ . Эта величина определяет конверсию энергии электронного излучения в энергию тормозного излучения. Представленный ниже рис. 4.13 иллюстрирует зависимость этой величины от толщины мишени. Наличие максимума обусловлено конкуренцией процессов образования тормозных фотонов и их поглощением в мишени. Мишени с толщиной, обеспечивающей максимальный выход тормозного излучения, называют оптимальными. Аналогичная зависимость имеет место для числового выхода фотонов от толщины мишени (рис. 4.14).



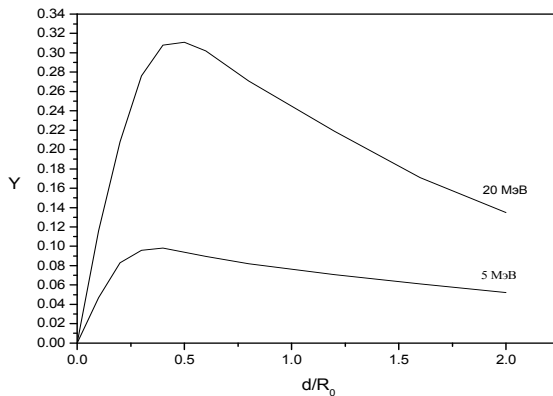


Рис.4.13.Эффективность выхода тормозного излучения из вольфрамовых мишеней различной толщины  $d$  для пучков электронов, нормально падающих на мишень ( $E_0 = 5$  и  $20$  МэВ,  $R_0$  - средний пробег электронов); минимальная энергия фотонов составляла  $50$  кэВ для  $E_0 = 5$  МэВ и  $100$  кэВ для  $E_0 = 20$  МэВ)

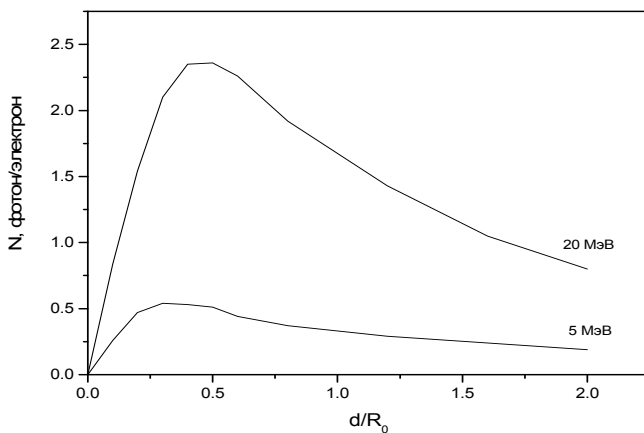


Рис. 4.14. Числовой выход тормозных фотонов из вольфрамовых мишеней различной толщины  $d/R_0$  ( $R_0$  - средний пробег электрона)

### *Список литературы*

1. Гусев Н.Г. , Климанов В.А., Машкович В.П., Суворов А.П.. Защита от ионизирующих излучений. Т.1 -М.: Энергоатомиздат, 1989.
2. Тормозная способность электронов и позитронов. Доклад 37 МКРЕ. -М.: Энергоатомиздат, 1987.
3. Seltzer S.M., Berger M.J.. Bremsstrahlung spectra from electron interaction with screened atomic nuclei and orbital electrons. Nucl. Instr. and Meth., **V12** (1985) 95-134.
4. Аккерман А.Ф. Моделирование траекторий заряженных частиц в веществе. М.: Энергоатомиздат, 1991.
5. Баранов В.Ф. Дозиметрия электронного излучения. -М.: Атомиздат, 1974.
6. Sempau J., Wilderman S.J. and Bielajew A.F., “ DPM, a fast, accurate Monte Carlo code optimized for photon and electron radiotherapy treatment planning dose calculations “, Phys. Med. Biol., **45** (2000) 2263-2291.
7. Вартанов Н.А., Самойлов П.С.. Практические методы сцинтилляционной гамма-спектрометрии. -М.: Атомиздат, 1964.
8. Вторичное электронное излучение. В сб. Ленинград: Радиевый институт им. В.Г. Хлопина, 1977.
9. Kawrakow I., Fippel M., Friedrich. “3D electron dose calculation a Voxel based Monte Carlo algorithm”. Med. Phys., **23**, No.4( 1996) 445-457.
10. Кудинов В.В., Смирнов В.В.. Пространственные и энергетические характеристики электронов с энергией  $10 \div 300$  МэВ за толстыми мишенями. -М.: изд. МИФИ, 2006.
11. Кудинов В.В., Смирнов В.В. Прохождение электронов с энергией  $2 \div 8$  МэВ в материалах и выход тормозного излучения из слоев материалов различной толщины.- М.: МИФИ, 2005.
12. Kawrakow I. “Improved modeling of multiple scattering in the voxel Monte Carlo model”. Med. Phys., **24**, No.4( 1997) 505-517.

Валерий Васильевич Смирнов

# **Моделирование процесса переноса электронов в задачах радиационной физики**

Учебное пособие

Редактор Е.Е. Шумакова

*Печать пособия выполнена в соответствии с оригиналом-макетом,  
представленным автором.*

Подписано в печать 21.11.2008.

Печ. л. 4,75. Уч.-изд. л. 4,75.

Изд. № 4/42.

Формат 60x84 1/16

Тираж 150 экз.

Заказ № 2-2423

*Московский инженерно-физический институт (государственный университет),  
115409, Москва, Каширское ш., 31.*

*Типография издательства “ТРОВАНТ”,  
г. Троицк Московской области*

