МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
«МИФИ»

Т.И. Савёлова

Методические указания к решению задач по вероятностным разделам математики

Рекомендовано к изданию УМО
«Ядерные физика и технологии»

Москва 2014

УДК 519.21(075)
ББК 22.19я7
С 12

Савёлова Т.И. **Методические указания по решению задач по вероятностным разделам математики**. М.: НИЯУ МИФИ, 2014. – 112 с.

Даны методические указания к решению задач по вероятностным разделам математики: «Теория вероятностей», «Математическая статистика», «Метод Монте-Карло», «Теория случайных функций».

Приводятся краткие сведения из теории, примеры решения типовых задач и упражнения для самостоятельной работы.

Предназначено студентам специальностей «Прикладная математика», «Ядерная физика и технологии», а также всем, желающим освоить начала теории вероятностей и её приложений.

Рецензент проф. Н.А. Скоркин

ISBN 978-5-7262-1927-1

Редактор Е.Г. Станкевич

Подписано в печать 20.11.2014. Формат 60x84 1/16.
Печ. л. 7,0. Уч.-изд. л. 7,0. Тираж 135 экз.
Изд. № 1/35. Заказ № 24.

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ».
115409, Москва, Каширское ш., 31.
ООО «Клаб Принт».
127018, Москва, Марьиной Рощи 3-й проезд, д. 40, корп. 1.

Оглавление

Предисловие

Нельзя выучить математику, только слушая
лекции, точно так же, как нельзя выучиться
игре на пианино, только слушая пианиста.
К. Рунге (1856 –1927)

В пособии собраны задачи по разделам теории вероятностей, которые автор издания давала решать студентам физических и экономических специальностей в течении ряда лет.

Знакомство с теорией вероятностей началось на Мехмате МГУ в 1960-е годы. Лектором курса по теории вероятностей был профессор Дынкин Е.Б., который позже эмигрировал в США. Практические занятия вели преподаватель с двумя аспирантами. Студентам на каждом занятии давались задачи на индивидуальных листочках (без ответов), тут же проверялись, и каждому студенту начислялись баллы. Нерешенные в аудитории задачи студент должен был решать дома, но эти задачи уже засчитывались по меньшему количеству баллов. В конце семестра студенты сдавали экзамен по теории вероятностей с решением задач. Многие студенты отказывались идти на экзамен и добровольно получали «неуд.». Потом шли на пересдачу.

Автор издания начала преподавать курс теории вероятностей в 1974 году на вновь образованной кафедре профессора Б.Л. Рождественского «Прикладная математическая физика». Лекции читал известный в мире специалист по методам Монте-Карло профессор И.М. Соболь, работавший в Институте прикладной математики им. М.В. Келдыша. Занятия вели совместно с ним в группах из 12 студентов. Для получения зачета студенты должны были решить все 100 задач, написать две контрольные работы и получить положительную оценку при сдаче вопросов по теории.

В 1970–1980 годы автор издания читала лекции и вела семинары по вероятностным разделам математики для студентов факультета повышения квалификации специалистов промышленности (ФПКСП).

С 1997 года в течение ряда лет автор преподавала вероятностные разделы математики студентам Экономико-аналитического института (ЭАИ) МИФИ. С 2001 года в течение нескольких лет работала в Высшем физическом колледже (ВФК) МИФИ.

В последнее время более десяти лет автор преподает вероятностные разделы математики студентам 31-й и 32-й кафедр факультета «Т» НИЯУМИФИ.

В учебном пособии изложены краткие сведения из теории соответствующих разделов, приведены примеры решения. К предложенным для самостоятельной работы задачам даются ответы и указания. Эти задачи прошли проверку на многих десятках студентов и показали возможность научить студента, при его желании, освоить непростые, но интересные разделы математики из области теории вероятностей.

Годовой курс рассчитан на 3 часа в неделю, из них 2 часа лекций и 1 час практических занятий. Материал из главы 1 рассчитан на один семестр по теории вероятностей. В пособии приведены 24 примера с решениями по 7 темам и 94 задачи для самостоятельной работы. Во второй части курса содержатся главы 2, 3 и 4, практические семинары имеют 8 тем. В этой части даются 19 примеров с решениями и 72 задачи для самостоятельных занятий.

В настоящее время имеется много изданий по теории и решению задач по теории вероятностей и её приложениям в физике, экономике, технике и т.д. (см. [1–5], [8–12]). Предлагаемое учебное пособие предназначено для студентов специальностей «Прикладная математика», «Ядерная физика и технологии». В основу пособия положены работы [6,7].

Автор выражает благодарность профессору Соболю И.М., работа с которым в течение многих лет давала радость познания интереснейших разделов теории вероятностей, а также студентам кафедры №31 Антоновой Анастасии и Никаноровой Марине за техническое оформление рукописи.

Раздел 1. Теория вероятностей.

В развитие теории вероятностей огромный вклад внесли российские и советские математики: П.Л. Чебышев (1821–1894), А.А. Марков (1856–1922), А.М. Ляпунов (1857–1918), С.Н. Бернштейн (1880–1968), А.Н. Колмогоров (1903–1987) и др.

Ю.В. Прохоров

1.1. Случайные события. Классические вероятности

Формулы двойственности: $\overline{\sum_i A_i} = \prod_i \overline{A}_i$; $\overline{\prod_i A_i} = \sum_i \overline{A}_i$.

Вероятность суммы событий

$P\{A+B\} = P\{A\} + P\{B\} - P\{A \cdot B\}$,

Для несовместных событий $P\{A+B\} = P\{A\} + P\{B\}$.

Классическое определение вероятности

Пусть $E_1, .., E_m$ – полная группа попарно несовместных исходов опыта, равноправных с точки зрения возможностей наступления. Если

$A = E_{i1} + \ldots + E_{is}$, то $P\{A\} = s/m$.

Примеры решения типовых задач

Пример 1.1

В компьютерной программе, написанной на TurboPascal, использована функция *Random*(x), генерирующая случайные целые числа от 1 до x. Какова вероятность, что при выполнении *Random*(*100*) появится число, делящееся на 5.

Решение. Обозначим событие: A – при значении $x = 100$ программа возвращает число, делящееся на 5. Найдем вероятность события A.

Общее число исходов испытания $m = 100$. Для того чтобы найти число исходов испытания, благоприятствующих событию A, вос-

пользуемся признаком делимости чисел на 5 (числа должны оканчиваться цифрами 0 или 5). Среди целых чисел от 1 до 100 их 20. Следовательно, $s = 20$. Итак, вероятность события A $P(A) =$
$= s/m = 20/100 = 0{,}2$.

Ответ: 0,2.

Пример 1.2

Лифт в пятиэтажном доме отправляется с тремя пассажирами наверх с первого этажа. Найти вероятность того, что на каждом этаже выйдет не более одного пассажира. Предполагается, что все возможные способы распределения пассажиров по этажам равновероятные.

Решение. Обозначим событие: C – на каждом этаже выйдет не более одного пассажира.

Каждый пассажир имеет 4 возможности для выхода из лифта (на 2-м, 3-м, 4-м и 5-м этажах). Общее число возможных исходов испытания равно $m = 4^3$. По условию, на каждом этаже должно выйти не более одного пассажира. Из этого следует, что первый пассажир может выйти на каждом из четырех этажей, второй – на каждом из трех оставшихся и третий – на двух оставшихся этажах. Следовательно, $s = 4 \cdot 3 \cdot 2$. Тогда вероятность события C

$$P(C) = \frac{s}{m} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{4^3} = \frac{3}{8}.$$

Ответ: $3/8$.

Пример 1.3

В партии из N изделий имеется k стандартных. Для проверки наудачу выбрали 1 изделие. Найти вероятность того, что среди отобранных изделий ровно r стандартных.

Решение. Обозначим событие A: среди отобранных изделий l ровно r стандартных.

Общее число m всевозможных исходов испытания равно числу способов, которыми можно отобрать l элементов из N. Следовательно, $m = C_N^l$.

Найдем число исходов испытания, благоприятствующих событию A. Среди отобранных l изделий имеются r стандартных и $l-r$ нестандартных. Число способов, которыми можно взять r стандартных изделий из k таких изделий в партии равно C_k^r .

Число способов, которыми можно взять $l-r$ нестандартных изделий из имеющихся в партии $N-k$ таких изделий равно C_{N-k}^{l-r} .

Таким образом, вероятность события A равна

$$P(A) = \frac{C_k^r \cdot C_{N-k}^{l-r}}{C_N^l} .$$

Задачи

1.1. Доказать эквивалентность следующих соотношений: $A \subset B,\ A \cdot B = A,\ A\bar{B} = 0$.

1.2. Верно ли утверждение, что «из $A + B = B$следует $A = 0$» для:

а) любых A и B;

б) для несовместных Aи B.

1.3. При каких условиях возможно равенство $A \cdot B = A + B$?

1.4. Прибор состоит из двух блоков первого типа и трех блоков второго типа. Событие A_i состоит в том, что i-й блок первого типа исправен (i = 1,2); событие B_j – в том, что исправен j-й блок второго типа (j = 1,2,3). Прибор работает, если исправен хотя бы один блок первого типа и хотя бы два блока второго. Событие D состоит в том, что прибор работает. Выразить D и $\bar{D}$ через события A_i , $\bar{A}_i$, B_j , $\bar{B}_j$.

1.5. Судно имеет рулевое устройство, четыре котла и две турбины. Событие A означает исправность рулевого устройства, событие B_i – исправность i-го котла, событие C_j – исправность j-й турбины. Событие D, состоящее в том, что судно управляемо, имеет место в том случае, когда исправны рулевое устройство, хотя бы один котел и хотя бы одна турбина. Выразить D и $\bar{D}$ через A , $\bar{A}$, B_i , $\bar{B}_i$, C_j , $\bar{C}_j$.

1.6. Доказать, что для любых событий *A, B, C* из какого-либо поля вероятностей $A + B + C = A + B \cdot \bar{A} + C \cdot \bar{A} \cdot \bar{B}$. Выразить $P\{A + B + C\}$ через вероятности событий A, B, C, AB, AC, BC, ABC.

1.7. События *A, B, C* из некоторого поля вероятностей удовлетворяют трем условиям:

1) $P\{A\} = P\{B\} = P\{C\} = p$;
2) *A, B, C* попарно независимы;
3) $ABC = 0$.

Вычислить *p*, если:

а) Вероятность $A+B+C$ равна ¾;
б) Вероятность $A+B+C$ равна единице.

1.8. Сколько раз нужно бросить пару игральных костей для того, чтобы появление хотя бы при одном бросании 12 очков имело вероятность $\geq 1/2$?

1.9. На десяти карточках написаны буквы А, Г, И, Л, О, П, Р, Т, У, Я. Какова вероятность, расположив эти карточки в произвольном порядке, получить слово «ПОРТУГАЛИЯ»?

1.10. На десяти карточках написаны буквы А, А, А, А, Г, Д, К, М, Р, С. Какова вероятность, расположив эти карточки в произвольном порядке, получить слово «МАДАГАСКАР»?

1.11. В урне *m* белых и *n* черных шаров. Из урны извлекают 2 шара:

1) одновременно;
2) последовательно с возвратом;
3) последовательно без возврата;

Каковы вероятности, что оба извлеченных шара окажутся:

а) белыми?
б) черными?
в) разных цветов?

1.12. В урне *m* белых и *n* черных шаров. Из урны вынимают все шары подряд. Какова вероятность того, что *k*-м будет извлечен белый шар?

1.13. В урне *m* белых и *n* черных шаров. Два игрока поочередно вынимают шар и каждый раз возвращают его обратно. Выигрывает тот, кто первым вынет белый шар. Какова вероятность, что выиграет тот, кто начинает? Справедливы ли условия игры?

1.14. Прибор может перегореть только в момент срабатывания. Если он сработал $k-1$ раз, не перегорев, то условная вероятность перегореть при k-м срабатывании равна q_k. Найти вероятности следующих событий:

1) A_n – прибор выдержит не менее n срабатываний;
2) B_n – прибор выдержит не более n срабатываний;
3) C_n – прибор выдержит ровно n срабатываний.

1.15. На N креслах случайно рассаживаются N человек. Какова вероятность того, что два заранее указанных лица окажутся рядом, если:

1) кресла расположены в ряд;
2) кресла стоят кругом.

1.2. <u>Условные вероятности. Формула полной вероятности. Геометрическая схема</u>

Вероятность произведения событий $P\{AB\} = P\{A\}\,P\{B/A\}$, для независимых событий $P\{AB\} = P\{A\}\,P\{B\}$.

Пусть $H_1,\ H_2, \ldots$ - полная группа попарно несовместных событий («гипотез»). Тогда имеет место формула полной вероятности

$$P\{A\} = \sum_i P\{A/H_i\} \cdot P\{H_i\}.$$

Формула Байеса:

$$P\{H_i|A\} = \frac{P\{A|H_i\} \cdot P\{H_i\}}{\sum_i P\{A|H_i\} \cdot P\{H_i\}}.$$

<u>Геометрическое определение вероятности</u>. Предположим, что исходом опыта может быть любая точка Q, принадлежащая плоскому множеству U, и площадь (мера) этого множества $S(U)$ конечна. Каждому измеримому подмножеству A поставим в соответствие случайное событие A, которое наступает тогда и только тогда, когда $Q \in A$.

Если все исходы Q равноправны с точки зрения возможностей наступления, то

$$P\{A\} = \frac{s(A)}{s(U)}.$$

Примеры решения типовых задач

Пример 1.4

Контрольная работа по математике оценивается целым числом баллов от 0 до 10. Вероятность студенту получить за эту работу 10 баллов равна 0,2; 9 баллов – 0,3; и от 1 до 9 баллов включительно – 0,7. Найти вероятность того, что студент получит:

а) не менее 9 баллов;

б) 0 баллов.

Решение. Введем следующие обозначения событий:

A – студент получит не менее 9 баллов;

B – студент получит 0 баллов;

A_1 – студент получит 10 баллов, $P(A_1) = 0{,}2$;

A_2 – студент получит 9 баллов, $P(A_2) = 0{,}3$;

A_3 – от 1 до 9 баллов включительно, $P(A_3) = 0{,}7$.

Обратим внимание на то, что события A_2 иA_3– совместные.

а. Найдем вероятность события *A,* пользуясь тем, что события A_1 и A_2 – несовместные.

$P(A) = P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) = 0{,}2 + 0{,}3 = 0{,}5$.

б. Рассмотрим событие $\bar{B}$, противоположное событию *B:*

$\bar{B}$ − студент не получит 0 баллов.

Событие $\bar{B}$ является суммой двух несовместных событий A_1 и A_3.

Следовательно,

$P(\bar{B}) = P(A_1 + A_3) = P(A_1) + P(A_3) = 0{,}2 + 0{,}7 = 0{,}9$;

$P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$.

Ответ: $P(A) = 0{,}5$; $P(B) = 0{,}1$.

Пример 1.5

В урне 4 белых, 6 черных и 5 красных шаров. Из нее извлекаются наугад один за другим два шара. Найти вероятность того, что оба шара одного цвета.

Решение. Рассмотрим события:

$A_1(B_1)$ – первым (вторым) извлечен белый шар;

$A_2(B_2)$ – первым (вторым) извлечен черный шар;

$A_3(B_3)$ – первым (вторым) извлечен красный шар;

C – извлечены два шара одного цвета.

Событие C представляет собой сумму следующих несовместных событий: $C = C_1 + C_2 + C_3$, где C_1, C_2, C_3 – из урны извлечены два белых/черных/красных шара соответственно.

Имеем $C_1 = A_1 \cdot B_1$, $C_2 = A_2 \cdot B_2$, $C_3 = A_3 \cdot B_3$.

Находим

$$P(C_1) = P(A_1 B_1) = P(A_1) \cdot P(B_1|A_1) = \frac{4}{15} \cdot \frac{3}{14} = \frac{2}{35} ;$$

$$P(C_2) = P(A_2 B_2) = P(A_2) \cdot P(B_2|A_2) = \frac{6}{15} \cdot \frac{5}{14} = \frac{1}{7} ;$$

$$P(C_3) = P(A_3 B_3) = P(A_3) \cdot P(B_3|A_3) = \frac{5}{15} \cdot \frac{4}{14} = \frac{2}{21} .$$

Искомую вероятность *P(C)* найдем по теореме сложения вероятностей несовместных событий:

$$P(C) = P(C_1) + P(C_2) + P(C_3) = \frac{31}{105} = 0{,}2952 \approx 0{,}3$$

Ответ: $P(C) \approx 0{,}3$.

Пример 1.6

У пользователя на рабочем столе компьютера находятся две папки с файлами. В первой папке 16 файлов, причем 4 из них имеют размер менее 500 кбайт. Во второй папке 20 файлов, из них 5 файлов размером менее 500 кбайт. Не интересуясь размерами файлов, пользователь переводит из первой папки во вторую один файл, после чего открывает один из файлов во второй папке. Найти вероятность того, что будет открыт файл размером менее 500 кбайт.

Решение. Рассмотрим следующие события:

A – файл из второй папки, открытый пользователем, размером менее 500 кбайт;

$B_1(B_2)$ – из первой папки во вторую перенесен файл размером менее (не менее) 500 кбайт.

$$P(B_1) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}\ , P(B_2) = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$$

Находим вероятность P(A) по формуле полной вероятности: $P(A) = P(B_1) \cdot P(A|B_1) + P(B_2) \cdot P(A|B_2) = \frac{1}{4} \cdot \frac{6}{21} + \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{21} = \frac{1}{4}$.

Ответ: $0{,}25$.

Пример 1.7

У пользователя имеются три дискеты для компьютера, изготовленные на фирмах *K, L* и *M*, по одной от каждой фирмы, причем штампы этих фирм на дискетах отсутствуют. Две из трех оказались бракованными. Какова вероятность, что бракованными оказались изделия фирм *L* и *M*, если брак в продукции фирм *K, L* и *M* составляет соответственно 10, 20 и 15%.

Решение. Обозначим события:

A – бракованными являются две дискеты;

$B_1 \backslash B_2 \backslash B_3$ – годными являются дискеты фирм *M* \ *L* \ *K*, две другие – бракованные;

$C_1 \backslash C_2 \backslash C_3$ – дискета фирмы *K* \ *L* \ *M* бракованная.

Исходя из условия, получим

$$P(C_1) = p_1 = 0{,}1\ ;\ P(C_2) = p_2 = 0{,}2\ ;\ P(C_3) = p_3 = 0{,}15\ .$$

Найдем:

$$P(\overline{C_1}) = q_1 = 0{,}9\ ;\ P(\overline{C_2}) = q_2 = 0{,}8\ ;\ P(\overline{C_3}) = q_3 = 0{,}85\ .$$

Тогда имеем:

$$P(B_1) = P(C_1, C_2, \overline{C_3}) = p_1 \cdot p_2 \cdot q_3 = 0{,}017;$$
$$P(B_2) = P(C_1, \overline{C_2}, C_3) = p_1 \cdot q_2 \cdot p_3 = 0{,}012;$$
$$P(B_3) = P(\overline{C_1}, C_2, C_3) = q_1 \cdot p_2 \cdot p_3 = 0{,}027.$$

Также $P(A|B_1) = P(A|B_2) = P(A|B_3) = 1$.

По формуле полной вероятности получаем

$$P(A) = \sum_{i=1}^{3} P(B_i) \cdot P(A|B_i) = 0{,}056.$$

Искомая вероятность по формуле Байеса равна

$$P(B_3|A) = \frac{P(B_3) \cdot P(A|B_3)}{P(A)} = \frac{0{,}027}{0{,}056} = 0{,}4821.$$

Ответ: $\sim 0{,}48$.

Пример 1.8

Два друга условились встретиться в определенном месте между 12 часами и половиной первого дня. Пришедший первым ждет другого 20 минут, после чего уходит. Найти вероятность того, что встреча друзей состоится, если каждый из них наудачу выбирает момент своего прихода (в промежутке от 12 до 12^{30}), и моменты прихода друзей независимы.

Решение. Обозначим события:

A – встреча друзей состоится. Обозначим момент прихода одного из них через x мин, а второго – y мин. Для того чтобы встреча состоялась, необходимо и достаточно выполнение условия $|x - y| \leq$ ≤ 20. Изобразим возможные x и y как множества точек на декартовой координатной плоскости (рис 1.1).

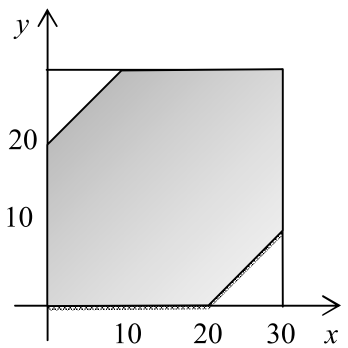

Рис. 1.1

Исходы испытания, благоприятствующие событию A, удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} x - y \leq \ \ 20; \\ x - y \geq -20; \\ 0 \ \leq x \leq \ 30; \\ 0 \ \leq y \leq \ 30. \end{cases}$$

Искомая вероятность события А равна отношению площади закрашенной фигуры к площади всего квадрата:

$$P(A) = \frac{30^2 - 10^2}{30^2} = \frac{8}{9}.$$

Ответ: $\frac{8}{9}$.

Задачи

1.16. Что вероятнее: добиться трех выигрышей из четырех партий или пяти выигрышей из восьми партий? Предполагается, что оба противника одинаково сильны, а ничьи в игре исключены.

1.17. Батарея, состоящая из k орудий, ведет огонь по группе из N самолетов ($k \leq N$). Каждое орудие выбирает себе цель случайно и независимо от других. Каковы вероятности, что:

а) все орудия будут стрелять по разным целям;

б) все орудия будут стрелять по одной и той же цели?

1.18. Прибор состоит из 10 узлов. Вероятность безотказной работы в течение времени T для каждого узла равна p. Узлы выходят из строя независимо один от другого. Найти вероятность того, что за время T:

а) откажет хотя бы один узел;

б) откажет ровно один узел;

в) откажут ровно два узла;

г) откажут не менее двух узлов.

1.19. В ти́ре имеется пять ружей, для которых вероятность попадания в цель при одном выстреле равна соответственно 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,8. Определить вероятность попадания в цель при одном выстреле, если стреляющий берет одно из ружей наудачу.

1.20. Радиолампа может принадлежать к одной из трех партий с вероятностями p_1, p_2, p_3, где $p_1 = p_2 = 1/4$, $p_3 = 1/2$. Вероятность, что лампа проработает T часов, равна для этих партий соответственно 0,1; 0,2; 0,4. Найти вероятность того, что лампа проработает T часов.

1.21. Вероятность поступления k вызовов на телефонную станцию за промежуток времени длительностью t равна $p_t(k)$. Считая количество вызовов за любые неперекрывающиеся промежутки времени независимым, вычислить вероятность поступления S вызовов за промежуток времени длительностью $2t$.

1.22. Известно, что 5 % всех мужчин и 0,25 % всех женщин– дальтоники. Случайно выбранный представитель из группы, состоящей из N мужчин и M женщин, оказался дальтоником. Какова вероятность того, что это мужчина?

1.23. Употребление стимуляторов роста s_1, s_2, s_3 дает определенный биологический эффект с вероятностями p_1, p_2, p_3 соответственно. Поставлено n опытов, причем во всех был использован один и тот же стимулятор. Вероятности того, что был использован s_1, s_2, s_3, равны соответственно $\omega_1, \omega_2, \omega_3$. Желаемый эффект имел место в m опытах. Какова вероятность того, что использовался стимулятор s_1?

1.24. В круге случайно выбирается хорда. Чему равна вероятность того, что ее длина больше стороны правильного вписанного треугольника?

Рассмотреть три варианта задачи:

а) строятся хорды, перпендикулярные фиксированному диаметру;

б) строятся хорды, проходящие через фиксированную точку на окружности;

в) выбирается случайный центр хорды - точка C, а хорда строится перпендикулярно OC, где O – центр окружности.

1.25. В ограниченной области на плоскости произвольно (случайно) расположены N кругов радиуса r. Какова вероятность, что случайная точка Q, равномерно расположенная в области, попадает внутрь хотя бы одного круга?

1.26. На плоскости проведена бесконечная полоса ширины h, в которой случайно разбросаны кружки радиуса r. Найти вероятность того, что случайно выбранная прямая, перпендикулярная границе полосы, не пересечет ни одного кружка, если на 1 см^2 полосы в среднем приходится k кружков.

1.27. В коробке 12 новых теннисных мячей и 4 побывавших в эксплуатации. Из коробки наугад берут 3 мяча. Какова вероятность, что все эти мячи новые? После игры все мячи возвращают в коробку, а через некоторое время снова берут наугад 3 мяча. Какова теперь вероятность того, что все эти мячи новые?

1.3. Случайные величины дискретного типа

Случайная величина ξ называется величиной дискретного типа, если она может принимать значения x_1 , x_2 , ... с вероятностями p_1, p_2, ... При этом $p_i = P\{\xi = x_i\} > 0$, $\sum_i p_i = 1$.

Математическим ожиданием величины ξ называется число

$$M\xi = \sum_i x_i \cdot p_i$$

при условии, что ряд сходится абсолютно.

Дисперсией величины ξ называется число

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2 .$$

Для случайной величины $\eta = g(\xi)$ справедлива формула

$$M\eta = Mg(\xi) = \sum_i g(x_i) \cdot p_i ,$$

если последний ряд сходится абсолютно.

Некоторые распределения вероятностей:

а) Биноминальный закон с параметрами n и p:

$$p_n(m|p) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}, \qquad m = 0, 1, \dots, n \ ;$$

б) Закон Пуассона с параметром a:

$$p(m|a) = \frac{a^m}{m!} e^{-a}, \qquad m = 0, 1, \dots;$$

в) Гипергеометрический закон с параметрами N и M<N:

$$P_n(m|N,M)=\frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n},\ \ m=0,1,\ldots,n;\ \ m\leqslant M,\ \ n\leqslant N-M.$$

Примеры решения типовых задач

Пример 1.9

Вероятность выиграть по одному билету лотереи равна 1/7. Какова вероятность, имея 7 билетов, выиграть:

а) по двум билетам?

б) по трем билетам?

Решение. Применяем схему Бернулли (биномиальный закон распределения) с параметрами $n=7,\ p=\frac{1}{7}, q=\frac{6}{7}$.

Находим

$$P_7(2)=C_7^2\ \cdot p^2\ \cdot q^5=\frac{7!}{2!\cdot 5!}\cdot\left(\frac{1}{7}\right)^2\cdot\left(\frac{6}{7}\right)^5\approx 0{,}1983\ ;$$

$$P_7(3)=C_7^3\ \cdot p^3\ \cdot q^4=\frac{7!}{3!\cdot 4!}\cdot\left(\frac{1}{7}\right)^3\cdot\left(\frac{6}{7}\right)^4\approx 0{,}0551\ .$$

Ответ: а) $\sim$0,2 ; б) $\sim$0,06 .

Пример 1.10

Большая партия автопокрышек содержит 1,5 % брака. Каков должен быть объем случайной выборки для того, чтобы вероятность обнаружить в ней хотя бы одну бракованную автопокрышку была бы более 0,92?

Решение. Объем случайной выборки обозначим n. Вероятность бракованного изделия $p=0{,}015$; $q=1-p=0{,}985$.

Обозначим события:

$C(\bar{C})$ – выборка проверяемых покрышек содержит хотя бы одну бракованную (выборка не содержит ни одной бракованной покрышки).

Имеем

$$P(C) = 1 - P(\bar{C}) = 1 - q^n = 1 - (0{,}985)^n.$$

По условию $P(C) > 0{,}92$. Следовательно, $(0{,}985)^n < 0{,}08$, или $n > \ln 0{,}08/\ln 0{,}985 \approx 167{,}16$, округляя до целого, получаем $n = 168$ шт.

Ответ: 168 покрышек.

Пример 1.11

Вероятность изготовления нестандартного изделия при налаженном технологическом процессе постоянна и равна 0,05. Для проверки качества изготавливаемых изделий отдел технического контроля (ОТК) берет из партии не более четырех изделий. Если будет обнаружено нестандартное изделие, то вся партия будет задержана. Найти закон распределения случайной величины ξ – числа изделий, проверяемого ОТК из каждой партии.

Решение. По условию задачи имеем

$p_1 = P(\xi = 1) = 0{,}05$;

$p_2 = P(\xi = 2) = 0{,}95 \cdot 0{,}05 = 0{,}0575$;

$p_3 = P(\xi = 3) = (0{,}95)^2 \cdot 0{,}05 = 0{,}045125$;

$p_4 = P(\xi = 4) = (0{,}95)^3 \cdot 0{,}05 + (0{,}95)^4 = 0{,}8573375$;

Проверка: $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$

Ответ:

ξ	1	2	3	4
p	0,05	0,0575	0,045125	0,8573375

Пример 1.12

Найти закон распределения случайной величины ξ – числа выпадения шестерки при трех бросаниях игральной кости. Вычислить $M\xi$ и $D\xi$.

Решение. По формуле Бернулли находим ($p = \frac{1}{6}$, $q = \frac{5}{6}$) :

$$p_0 = P(\xi = 0) = C_3^0\, p^0\, q^3 = \frac{125}{216}\ ;$$

$$p_1 = P(\xi = 1) = C_3^1\, p\, q^2 = \frac{75}{216}\ ;$$

$$p_2 = P(\xi = 2) = C_3^2\, p^2\, q = \frac{15}{216}\ ;$$

$$p_3 = P(\xi = 3) = C_3^3\, p^3\, q^0 = \frac{1}{216}\,.$$

Имеем

$$M\xi = n \cdot p = 3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{2}\ , \qquad D\xi = n \cdot p \cdot q = \frac{5}{12}\ .$$

Ответ:

ξ	0	1	2	3
p	$\frac{125}{216}$	$\frac{75}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{1}{216}$

$$M\xi = \frac{1}{2}\ ,\ \ D\xi = \frac{5}{12}.$$

Пример 1.13

Средняя плотность болезнетворных микробов в одном кубическом метре воздуха равна $100\,\frac{\text{микробов}}{\text{м}^3}$. Берут на пробу 2 дм^3 воздуха. Найти вероятность того, что в пробе будет обнаружен хотя бы один микроб.

Решение. Пусть случайная величина ξ – число болезнетворных микробов, находящихся в 2 дм^3 воздуха. Примем гипотезу о распределении Пуассона величины ξ. Тогда имеем $\lambda = \frac{100}{1000} \cdot 2 = 0{,}2$.

Вероятность того, что в данном объеме будет обнаружен хотя бы один микроб, равна

$$p = 1 - p_0 = 1 - e^{-0{,}2} = 0{,}181.$$

Ответ: 0,181.

Задачи

1.28. Из урны, содержащей 5 белых и 5 черных шаров, извлекаются наудачу n шаров. Найти наименьшее n такое, что вероятность извлечь хотя бы один белый шар больше, чем 0,8.

1.29. В каждом разряде лотереи N = 5000 билетов и M = 500 выигрышей. Какое минимальное число билетов n надо купить, чтобы вероятность хотя бы одного выигрыша была больше, чем 0,9? Сравнить результаты биноминального и пуассоновского приближения.

1.30. Вероятность успеха в одном испытании p = 0,001. Какова вероятность добиться по крайней мере два раза успеха при n = 5000 независимых испытаниях? Сравнить точную формулу с пуассоновским приближением.

1.31. Вероятность того, что абонент позвонит в течение часа на коммутатор, для каждого абонента равна 0,01. Коммутатор обслуживает 300 абонентов. Какова вероятность того, что в течение часа позвонят 4 абонента?

1.32. Монета подбрасывается n раз. Найти закон распределения числа гербов.

1.33. Автоматическая линия при нормальной настройке может выпускать бракованное изделие с вероятностью p. Сразу после появления брака производится переналадка линии. Найти среднее число хороших изделий, изготовляемых между двумя последовательными переналадками линии.

1.34. Последовательно испытываются пять блоков. Вероятность выдержать испытание для каждого блока равна 0,9. Испытания прекращаются после первой неудачи. Найти закон распределения количества испытаний и среднее количество испытаний.

1.35. В урне лежат N шаров, из них M белых и $N - M$черных. Два игрока вынимают по шару; если шары разноцветные, то выигрывает игрок, доставший белый шар; если шары одного цвета, то их кладут обратно и повторяют розыгрыш. Пусть ξ – количество розыгрышей, потребовавшихся для выявления победителя. Найти закон распределения ξ и математическое ожидание $M\xi$.

1.36. В начале игры игрок A уплачивает игроку B s рублей. Затем бросают монету до появления орла. Если орел выпадает при k-м бросании, то B платит A k рублей. Каким должно быть s, чтобы игра была справедливой?

1.37. Дискретная случайная величина ξ принимает численно значение $x_k = 2^{k/2}$ с вероятностями $p_k = 2^{-k}$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Вычислить $M\xi$ и $D\xi$.

1.38. Число ν проведенных опытов может изменяться от 0 до ∞, причем $P\{\nu = k\} = e^{-\alpha} a^k / k!$ Каждый опыт может оказаться успешным с вероятностью p. Найти закон распределения числа η успешных опытов и математическое ожидание $M\eta$.

1.39. В лотерее всего N билетов. Разыгрывается m_i выигрышей стоимостью k_i рублей, $i = 1, 2, \ldots, n$. Сколько должен стоить билет, чтобы математическое ожидание выигрыша равнялось половине стоимости билета?

1.40. Случайная величина ξ принимает значения $x_k = (-1)^k k$ с вероятностями $p_k = {}^{c}/_{k!}$ $(k = 0, 1, \ldots)$. Вычислить c, $M\xi$ и $D\xi$.

1.41. Прибор, состоящий из трех блоков A, B_1, B_2, работает, если исправен блок A и хотя бы один из блоков B_1 или B_2. Космическая частица, попавшая в прибор, выводит из строя один из блоков с вероятностями $P_A = 0{,}5$; $P_{B_1} = P_{B_2} = 0{,}25$. Предложим, что частицы попадают в прибор последовательно и ν – номер частицы, которая выводит его из строя. Найти закон распределения ν.

1.4. Случайные величины непрерывного типа

Случайная величина ξ называется величиной непрерывного типа, если существует интегрируемая функция $p(x)$ – плотность вероятности, такая, что для любых $x_1 < x_2$

$$P\{x_1 < \xi < x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} p(x)\, dx.$$

При этом $p(x) \geq 0$ и $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\, dx = 1$.

Математическим ожиданием величины ξ называется число

$$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot p(x)\, dx$$

при условии, что интеграл сходится абсолютно.

Дисперсией величины ξ называется число

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2 .$$

Для случайной величины $\eta = g(\xi)$ справедлива формула

$$M\eta = Mg(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cdot p(x)\, dx ,$$

если последний интеграл сходится абсолютно.

Плотность вероятности случайной величины $\eta = g(\xi)$, если таковая существует, может быть найдена по формуле

$$p_\eta(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta\big(y - g(x)\big)p(x)\, dx.$$

Если функция $g(\xi)$ дифференцируема и монотонна, то

$$p_\eta(y) = p\big(h(y)\big)|h'(y)| ,$$

где $x = h(y)$ – обратная функция по отношению к $y = g(x)$.

Некоторые распределения вероятностей:

а) равномерное распределение на конечном интервале $a < x < b$:

$$p(x) = \frac{1}{b-a} \text{ при } a < x < b ;$$

б) экспоненциальное распределение с параметром a:

$$p(x) = ae^{-ax} \text{ при } 0 < x < \infty ;$$

в) нормальное распределение или распределение Гаусса с параметрами a и σ:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right] \text{ при } -\infty < x < +\infty.$$

<u>Примеры решения типовых задач</u>

Пример 1.14

На шоссе установлен автоматический светофор, в котором для транспорта 1 минуту горит зеленый свет, и 45 секунд – красный. Автомобиль проезжает по шоссе в случайный момент времени, не связанный с работой светофора. Найти вероятность того, что машина проедет мимо светофора не останавливаясь.

Решение. Рассмотрим случайную величину $t,\ 0 \leqslant t \leqslant \left(1+\frac{3}{4}\right) = = \frac{7}{4}$, момент времени проезда машины мимо светофора в интервале, равном периоду смены цветов в светофоре. Случайная величина t распределена равномерно на отрезке $\left[0, \frac{7}{4}\right]$. Плотность распределения вероятности $p(t) = \frac{4}{7}$. Вероятность безостановочного проезда автомобиля мимо светофора равна

$$P(0 < t < 1) = \frac{4}{7}.$$

Ответ: $\frac{4}{7}$.

Пример 1.15

На станке изготавливают шарики для подшипников. Номинальный диаметр шарика $d_0 = 5$ мм. Фактический размер шарика представляет собой случайную величину ξ , распределенную по нормальному закону с математическим ожиданием $a = d_0$ и средним квадратическим отклонением $\sigma = 0{,}05$ мм. Найти:

а) процент шариков для подшипников, которые будут иметь диаметр от 4,8 до 5 мм,

б) процент брака, если известно, что при контроле отбраковывают все шарики, диаметр которых отклоняется от номинального по абсолютной величине больше, чем на 0,1 мм.

Решение. Имеем:

а) $P(4{,}8 < \xi < 5) = \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{5-5}{0{,}05}\right) - \Phi\left(\frac{4{,}8-5}{0{,}05}\right)\right] =$

$= \frac{1}{2}[\Phi(0) - \Phi(-4)] = 0{,}499968 \approx 0{,}5.$

Здесь
$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-t^2/2}\, dt.$$
б) Вычисляем $P(|\xi - 5| \leqslant 0{,}1) = \Phi\left(\frac{0{,}1}{0{,}05}\right) = \Phi(2) = 0{,}9544.$

Ответ: а) $\approx 0{,}5$; б) $\approx 0{,}95$.

Пример 1.16

Испытывают два независимо работающих элемента. Продолжительность безотказной работы первого и второго элементов – случайные величины ξ_1 и ξ_2 , распределенные по показательному закону.

Эти величины характеризуются функциями распределения

$F_1(t) = P(\xi_1 < t) = 1 - e^{-0{,}02t}$, $F_2(t) = P(\xi_2 < t) = 1 - e^{-0{,}01t}$.

Найти вероятность того, что в интервале времени (0; 100) часов:

а) оба элемента откажут;

б) оба элемента не откажут;

в) только один элемент откажет;

г) откажет хотя бы один элемент.

Решение. Рассмотрим события:

$A_1 \setminus A_2$ – откажет первый\второй элемент;

$B \setminus C$ – откажут\не откажут оба элемента.

D – откажет только один элемент.

Имеем вероятности событий:

$P(A_1) = p_1 = F_1(100) = 1 - e^{-2} = 0{,}8647$;

$P(A_2) = p_2 = F_2(100) = 1 - e^{-1} = 0{,}6321$;

$P(\overline{A_1}) = q_1 = 1 - p_1 = 0{,}1353$;

$P(\overline{A_2}) = q_2 = 1 - p_2 = 0{,}3679$.

а. События A_1 и A_2 независимые, поэтому

$P(B) = P(A_1 A_2) = p_1 p_2 = 0{,}5466$.

б. События $\overline{A_1}$ и $\overline{A_2}$ также независимые, следовательно,

$P(C) = P(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2}) = q_1 q_2 = 0{,}0498$.

в. Вероятность события D найдем, использую теорему умножения вероятностей независимых событий и теорему сложения вероятностей несовместных событий:

$P(D) = p_1 q_2 + q_1 p_2 = 0{,}4036$.

г. Найдем

$P(\bar{C}) = 1 - P(C) = 0{,}9502$.

Ответ:

а) $\approx 0{,}55$; в) $\approx 0{,}4$;

б) $\approx 0{,}05$; г) $\approx 0{,}95$.

Пример 1.17

Случайная величина ξ подчиняется нормальному закону с параметрами (0; 1). Найти функцию распределения и плотность вероятности случайной величины $\eta = \xi^2$.

Решение. Находим

$$F_\eta(y) = P(\eta < y) = P(\xi^2 < y) = P\left(|\xi| < \sqrt{y}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} e^{-t^2/2}\, dt = \Phi\left(\sqrt{y}\right),$$

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{\frac{-t^2}{2}}\, dt$$

Вычисляем плотность вероятности:

$$p_\eta(y) = \frac{d}{dy} F_\eta(y) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-y/2} \frac{1}{2\sqrt{y}}\,, \qquad y > 0$$

Проверка:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-y/2} \frac{1}{\sqrt{y}}\, dy = \left|\text{замена} \sqrt{y} = t\right| = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-t^2/2}\, dt =$$

$$= \Phi(+\infty) = 1.$$

Ответ: $F_\eta(y) = \Phi\left(\sqrt{y}\right)$, $p_\eta(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-y/2}$, $y > 0$.

Задачи

1.42. Плотность вероятностей случайной величины ξ, определенной в интервале $-a < x < a$, обратно пропорциональна $\sqrt{a^2 - x^2}$. Вычислить $M\xi$ и $D\xi$.

1.43. Вычислить $M\xi$ и $D\xi$, если случайная величина ξ имеет плотность

$$p(x) = \begin{cases} 0\ , & x < 0\,; \\ \dfrac{x^m}{m!} e^{-x}\ , & x \geq 0. \end{cases}$$

1.44. Значения случайной величины ξ заключены в отрезке $-h \leq x \leq h$. Доказать, что $|M\xi| \leq h$, $D\xi \leq h^2$. Возможно ли в этих условиях равенство $D\xi = h^2$?

1.45. Предположим, что абсолютная величина $\xi = |\vec{\vartheta}|$ скорости молекул газа распределена по закону Максвелла, т.е. имеет плотность вероятности

$$p(\vartheta) = \frac{4h^3}{\sqrt{\pi}} \vartheta^2 e^{-h^2\vartheta^2},\ \ 0 < \vartheta < \infty\,.$$

Вычислить и сравнить $M\xi$ со средней квадратичной скоростью $\sqrt{M\xi^2}$.

1.46. Время τ безотказной работы прибора имеет функцию распределения

$$F(t) = \begin{cases} 0\,, & t < 0; \\ 1 - e^{-t/T}\ , & t \geq 0, \end{cases}$$

где T– постоянная. Вычислить вероятности того, что:

а) $\tau \geq T$;

б) $\tau \geq 2T$;

в) $T \leq \tau \leq 2T$.

Каков смысл постоянной T?

1.47. Точка брошена наугад внутрь круга радиуса R; вероятность попадания в любой участок круга пропорциональна площади этого участка. Найти функцию распределения и плотность расстояния от точки до центра круга.

Решить аналогичную задачу для точки в шаре.

1.48. Контроль шариков для подшипников производится так: если шарик не проходит через отверстие диаметра d_1 , но проходит через отверстие диаметра d_2, то размер его считается приемлемым $(d_2 > d_1)$. Если хотя бы одно из этих условий не выполнено, то шарик отбраковывают. Определить вероятность брака в предположении, что диаметр подчиняется нормальному закону с параметрами

$$a = \frac{1}{2}(d_1 + d_2), \ \ \sigma = \frac{1}{4}(d_2 - d_1) .$$

1.49. Функция распределения случайной величины ξ

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ e^{-1/x^{\alpha}}, & x \geq 0, \end{cases}$$

параметр $\alpha > 0$. Найти функцию распределения величины $\eta = \frac{-1}{\xi}$.

1.50. Случайная величина ξ имеет функцию распределения *F(x)*. Найти функцию распределения $G(y) = P\{\eta < y\}$ случайной величины η, где:

а) $\eta = c \cdot \xi$, $c \neq 0$;

б) $\eta = \xi^2$.

Предположив дополнительно, что существует плотность $p_\xi(x)$, выразить через нее плотность $p_\eta(y)$.

1.51. На перекрестке стоит автоматический светофор, в котором чередуются зеленый свет в течение 1 минуты и красный свет в течение ½ минуты. Какова вероятность проехать перекресток без остановки? Найти функцию распределения времени ожидания у светофора τ и вычислить *M*τ.

1.52. Случайная величина ξ, все значения которой заключены в интервале (*a*, *b*), имеет плотность $p_\xi(x)$. Найти плотность $p_\eta(y)$ случайной величины $\eta = f(\xi)$, если:

а) $f(x) = e^{-x}$, $a = 0$, $b = \infty$;

б) $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$, $a = -R$, $b = R$;

в) $f(x) = e^{-x^2}$, $a = -\infty$, $b = \infty$.

1.53. Случайная величина ξ нормальна с параметрами (0; 1).

Найти функцию распределения величины $\eta = \xi + |\xi|$.

1.54. Электронная лампа включается в момент времени $t = 0$. Условная вероятность выхода из строя этой лампы в промежутке времени $(t,\ t + \Delta t)$ при условии, что в момент времени t лампа еще работала, равна $a \cdot \Delta t + \tilde{o}(\Delta t)$, где a – постоянная, не зависящая от t. Вычислить функцию распределения времени безотказной работы τ и найти $M\tau$.

1.55. Случайная величина ξ нормальна с параметрами $(a; \sigma)$. Доказать, что при любых $C \neq 0$ и C_1 случайная величина $\eta = C\xi + C_1$ также нормальна, и выразить $M\eta$ и $D\eta$ через $M\xi$ и $D\xi$.

1.56. Вычислить $M\xi$ и $D\xi$, если плотность ξ равна

$$p(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}, \quad -\infty < x < +\infty.$$

1.5. Многомерные распределения. Условные плотности вероятностей

Случайные величины ξ и η называются независимыми, если их совместная функция распределения

$$F_{\xi\eta}(x, y) = P\{\xi < x, \eta < y\}$$

равна произведению функций распределения:

$$F_{\xi\eta}(x, y) = F_{\xi}(x) F_{\eta}(y).$$

Если случайные величины ξ и η имеют совместную плотность $p_{\xi\eta}(x, y)$, а случайная величина $\zeta = g(\xi, \eta)$ имеет плотность $p_{\zeta}(z)$, то

$$p_{\zeta}(z) = \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta\big(z - g(x, y)\big) \cdot p_{\xi\eta}(x, y)\, dx\, dy.$$

Если случайные величины ξ и η независимы и имеют плотность $p_{\xi}(x)$ и $p_{\eta}(y)$, то плотность их суммы $\zeta = \xi + \eta$ равна свертке этих плотностей

$$p_\zeta(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_\xi(x) p_\eta(z-x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} p_\xi(z-y) p_\eta(y)\, dy.$$

Если случайные величины ξ и η имеют совместную плотность $p_{\xi\eta}(x,y)$, то условная плотность ξ (при условии $\eta = y$) равна

$$p_\xi(x|y) = \frac{p_{\xi\eta}(x,y)}{p_\eta(y)}.$$

Примеры решения типовых задач

Пример 1.18

Случайные величины ξ и η независимы и одинаково распределены по показательному закону с параметрами λ и μ. Положим

$$U = \max(\xi,\eta)\ , V = \min(\xi,\eta).$$

а. Являются ли случайные величины U и V независимыми?

б. Независима ли случайная величина U от события $(\xi > \eta)$?

Решение:

а) обозначим событие $A = (y_1 < \xi_1, \eta < y_2), 0 < y_1, y_2 < +\infty$.

Находим

$$P(A) = P(y_1 < \xi < y_2) \cdot P(y_1 < \eta < y_2) =$$
$$= \int_{y_1}^{y_2} \lambda \cdot e^{-\lambda x_1}\, dx_1 \int_{y_1}^{y_2} \mu \cdot e^{-\mu x_2}\, dx_2 =$$
$$= \left(e^{-\lambda y_1} - e^{-\lambda y_2}\right)\left(e^{-\mu y_1} - e^{-\mu y_2}\right), 0 < y_1 < y_2.$$

С другой стороны,

$$P(U > y_1) \cdot P(V < y_2) = P(\xi,\eta > y_1) \cdot P(\xi,\eta < y_2) =$$
$$= e^{-(\lambda+\mu)y_1}\left(1 - e^{-\lambda y_2}\right)\left(1 - e^{-\mu y_2}\right).$$

Оно имеет другое выражение, следовательно, случайные величины U и V зависимы;

б) далее, $P(\xi > \eta) = \frac{\mu}{\mu+\lambda}$, и произведение

$$P(\xi > \eta) P(U < y) = \frac{\mu}{\mu+\lambda}\left(1 - e^{-\lambda y}\right)\left(1 - e^{-\mu y}\right)$$

отличается от $P(\xi > \eta, U < y) = P(\eta < \xi < y)$. Значит, U и $(\xi > \eta)$ зависимы.

Ответ: а) зависимы; б) зависимы.

Пример 1.19

Спортсмен стреляет по круговой мишени. Вертикальная и горизонтальная координаты точки попадания пули (при условии, что центр мишени – начало координат) – независимые случайные величины, каждая из которых распределена по нормальному закону с параметрами (0; 1). Найти плотность распределения расстояния от точки попадания до центра.

Решение:

Имеем совместную плотность распределения

$$p(x,y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}}, \quad -\infty < x\,,\ \ y < +\infty.$$

Положим $r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$. Обозначим (r, θ) – полярные координаты на плоскости, $r > 0$, $0 \leqslant \theta < 2\pi$. Якобиан преобразования равен $\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r$. Поэтому

$$p(r,\theta) = r \cdot e^{-r^2/2} \frac{1}{2\pi}.$$

Интегрируя по всем θ, получаем

$$p(r) = \int_0^{2\pi} r \cdot e^{-r^2/2} \frac{1}{2\pi} d\theta = re^{-r^2/2}.$$

Проверка:

$$\int_0^{+\infty} p(r)\,dr = 1\,.$$

Ответ: $p(r) = r \cdot e^{\frac{-r^2}{2}}$, $r \geqslant 0$.

Пример 1.20

Докажите, что если ξ, η и ζ – независимые случайные величины, каждая из которых равномерно распределена на интервале $(0,1)$, то случайная величина $(\xi \cdot \eta)^{\zeta}$ также равномерно распределена на $(0,1)$.

Решение:

Рассмотрим случайную величину

$$\ln\left[(\xi \cdot \eta)^{\zeta}\right] = \zeta \cdot [\ln \xi + \ln \eta].$$

Доказать, что случайная величина $(\xi \cdot \eta)^{\zeta}$ равномерно распределена на (0, 1), – это то же самое, если доказать, что случайная величина $\zeta \cdot [\ln \xi + \ln \eta]$ распределена по показательному закону на $(0, +\infty)$. Величина $\psi = -\ln \xi - \ln \eta$ имеет плотность

$$p_{\psi}(y) = \begin{cases} y \cdot e^{-y}, & 0 < y < \infty, \\ 0, & y \leqslant 0. \end{cases}$$

Совместная плотность имеет вид

$$p_{\zeta,\psi}(x, y) = \begin{cases} y \cdot e^{-y}, & 0 < x < 1, \ 0 < y < \infty, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Нас интересует произведение $\zeta\psi$. Удобно перейти от x, y к величинам $U = x/y$ и $V = y/x$ с помощью обратного якобиана преобразования $1/(2V)$. В терминах новых переменных совместная плотность случайных величин $Z = \zeta \cdot \psi$ и $W = \frac{\psi}{\zeta}$ имеет вид

$$P_{Z,W}(U, V) = \begin{cases} \dfrac{1}{2V}(U \cdot V)^{1/2} e^{-(U \cdot V)^{1/2}}, & U, V > 0, \ 0 < U/V < 1, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Плотность распределения Z тогда равна

$$P_Z(U) = \int P_{Z,W}(U, V)\, dV = \int_0^{\infty} \frac{1}{2V}(U \cdot V)^{1/2} e^{-(U \cdot V)^{1/2}}\, dV =$$

$$= -\int_0^{\infty} d\left(e^{-(U \cdot V)^{1/2}}\right) = e^{-U}, \ U > 0,$$

где $P_Z(U) = 0$ при $U < 0$.

Задачи

1.57. Случайная величина η равна целой части случайной величины ξ. Найти закон распределения η, если:

а) ξ равномерно распределена в интервале $0 < x < M$, где M – целое;

б) ξ подчиняется экспоненциальному закону.

1.58. Кусок проволоки длиной $2L$ изогнут под прямым углом в случайной (равномерно распределенной) точке. Концы куска соединены прямой. Найти функцию распределения площади полученного треугольника.

1.59. Пусть γ_1 и γ – независимые случайные величины, равномерно распределенные на интервале (0, 1). Доказать, что случайные величины $\xi_1 = \sqrt{\gamma}$, $\xi_2 = \max(\gamma, \gamma_1)$ и $\xi_3 = \begin{cases} \gamma, & \text{если } \gamma > \gamma_1, \\ 1 - \gamma, & \text{если } \gamma < \gamma_1, \end{cases}$ имеют одну и ту же плотность.

1.60. Случайные величины ξ и η независимы и одинаково распределены: $p\{\xi = k\} = p\{\eta = k\} = 2^{-k}$ при $k = 1, 2, \ldots$. Найти закон распределения их суммы.

1.61. Доказать, что сумма двух независимых случайных величин, подчиняющихся законам Пуассона, также подчиняется закону Пуассона.

1.62. Координаты вектора $\vec{\vartheta}$ независимы и нормальны с параметрами (0, σ). Найти плотность распределения абсолютной величины ϑ вектора $\vec{\vartheta}$:

а) на плоскости (распределение Релея);

б) пространстве (распределение Максвелла);

в) n-мерном пространстве (распределение хи-квадрат).

1.63. Рассмотрим независимые случайные величины ξ и η, где ξ дискретна с распределением

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ p_1 & p_2 & \ldots & p_n \end{pmatrix},$$

а η непрерывна с плотностью $p_\eta(y)$. Доказать, что сумма $\xi + \eta$ непрерывна, и вычислить ее плотность.

1.64. Случайная точка равномерно распределена внутри эллипса

$(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$. Вычислить условные и безусловные плотности декартовых координат этой точки.

1.65. Случайные величины $\xi_1, \dots, \xi_n$ независимы (в совокупности) и одинаково распределены: их функции распределения равны $F(x)$. Найти функции распределения случайных величин

$$\eta = \max_{1 \le i \le n} \xi_i \ \text{ и } \ \theta = \min_{1 \le i \le n} \xi_i .$$

Предположив дополнительно, что существуют плотность $p(x) = F'(x)$, вычислить плотности $p_\eta(y)$ и $p_\theta(z)$.

1.66. Плотность трехмерной случайной точки Q с декартовыми координатамиξ, η, ζ равна

$$p_Q(x,y,z) = \begin{cases} 6(1 + x + y + z)^{-4}, & \text{если } x > 0, y > 0, z > 0, \\ 0 & \text{в ином случае.} \end{cases}$$

Вычислить плотность $p_\xi(x)$ координаты ξ, условные плотности $p_\xi(x|y)$ и $p_\xi(x|y,z)$, а также плотность суммы координат $\xi + \eta + \zeta$.

1.67. Через точку на окружности радиуса R проведена случайная хорда (любое направление ее равновероятно). Найти функцию распределения и математическое ожидание длины этой хорды.

1.68. Неотрицательные случайные величины ξ и η имеют совместную плотность распределения $p(x, y)$. Найти плотность распределения их произведения.

Рассмотреть частный случай, когда эти величины независимы и равномерно распределены в интервале (0, 1).

1.69. Случайные величины ξ и η независимы, неотрицательны, и плотности их при $0 < x < \infty$ пропорциональны $x^\alpha e^{-kx}$ и $x^\beta e^{-kx}$($\alpha > 0$, $\beta > 0, k > 0$). Найти плотность вероятностей суммы $\xi + \eta$.

1.70. Найти плотность распределения частного двух независимых одинаково распределенных случайных величин, если они:

а) подчиняются экспоненциальному закону;

б) равномерно распределены в интервале $0 < x < e$;

в) нормальны с параметрами $(0, \sigma)$.

1.71. Плотность распределения случайной точки с декартовыми координатами ξ и η равна $u(x)\vartheta(y)$. Вычислить плотности распределения величин $-\xi$ и $\xi - \eta$.

1.6. Коэффициент корреляции. Закон больших чисел

Рассмотрим случайные величины ξ и η, дисперсии которых $D\xi > 0$ и $D\eta > 0$. Коэффициентом корреляции этих величин называется число

$$r(\xi,\eta) = \frac{M(\xi - M\xi)(\eta - M\eta)}{\sqrt{D\xi \cdot D\eta}} = \frac{M\xi\eta - M\xi \cdot M\eta}{\sqrt{D\xi \cdot D\eta}}.$$

Теорема Маркова. Дана последовательность случайных величин $\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$ с конечными дисперсиями $D\xi_n$. Если

$$\lim_{n\to\infty} D\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \xi_k\right) = 0\,,$$

то последовательность подчиняется закону больших чисел.

Теорема Чебышёва. Дана последовательность попарно некоррелированных случайных величин $\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$. Если дисперсии этих величин ограничены: $D\xi_n \leq C$, то последовательность подчиняется закону больших чисел.

Теорема Хинчина. Дана последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин $\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$. Если математическое ожидание этих величин $M\xi_n = a$ конечно, то последовательность подчиняется закону больших чисел.

Примеры решения типовых задач

Пример 1.21

В ящике находятся N фишек, помеченных номерами $1, \ldots, N$. Эксперимент состоит в вытаскивании n фишек из ящика, $n \leqslant N$. Предположим, что каждая из фишек может быть вынута равновероятно с другими и вынутые фишки не возвращаются обратно. Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ – случайные величины, причем ξ_i – номер i-й вынутой фишки, $i = 1, \ldots, n$. Положим

$$\eta = \sum_{i=1}^{n} \xi_i\ .$$

а. Доказать, что $D(\xi_i) = (N+1)\,(N-1)/12$.

Указание: использовать равенство

$$\sum_{i=1}^{N} i^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} .$$

б. Проверьте, что $\operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j) = -(N+1)/12\,,\ i \neq j$.

в. Используя формулу

$$D(\eta) = \sum_{i=1}^{N} D(\xi_i) + \sum_{i \neq j} \operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j),$$

или иным путем, докажите, что

$$D(\eta) = \frac{n(N+1)(N-n)}{12} .$$

Решение:

а) очевидно, что $M\xi_i = (N+1)/2$. Тогда

$$D(\xi_i) = \sum_{k=1}^{N} \frac{k^2}{N} - \left(\frac{N+1}{12}\right)^2 = \frac{(N+1)(N-1)}{12};$$

б) поскольку $\xi_i \neq \xi_j\,, i \neq j\,$, получаем

$$\frac{1}{N(N-1)} \sum_{k \neq s} \left(k - \frac{N+1}{2}\right)\left(s - \frac{N+1}{2}\right) = -\frac{N+1}{12}\ ;$$

в) имеем

$$D(\eta) = \frac{n(N+1)(N-1)}{12} - n(n-1)\frac{N+1}{12} = \frac{n(N+1)(N-n)}{12}.$$

Пример 1.22

Случайные величины $\xi_k,\ k = 1, \dots, n,$ попарно не коррелированы и имеют распределение вероятностей

$$P(\xi_k = -\sqrt{k}) = P(\xi_k = \sqrt{k}) = 1/2.$$

Выполняется ли для

$$\eta_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \xi_k$$

закон больших чисел (ЗБЧ)?

Решение. Проверяем, выполняются ли условия ЗБЧ теоремы Чебышёва. Имеем $M\xi_k = 0, D\xi_k = k$. Следовательно,

$$M\eta_n = 0, D\eta_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2n^2} \to \frac{1}{2} \text{ при } n \to \infty.$$

Следовательно, достаточные условия теоремы П.Л. Чебышёва не выполняются. Легко проверить, что условия теоремы Маркова также не выполняются, так как

$$D\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2n^2} \nrightarrow 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Имеем, $\eta_n \nrightarrow 0$ при $n \to \infty$ в среднем, т.к. $M\eta_n \to 0$ $(M\eta_n = 0)$ при $n \to \infty$, а $D\eta_n = \frac{n(n+1)}{2n^2} \nrightarrow 0$ при $n \to \infty$.

Сходимость $\eta_n \to 0$ при $n \to \infty$ по вероятности также не имеет места – доказательство дается в примере 1.24 в разделе 1.7 с помощью характеристических функций.

Пример 1.23

Случайная точка с декартовыми координатами (ξ, η) определена в треугольнике $x > 0, y > 0, x + y < 1$ с равномерной плотностью. Вычислить коэффициент корреляции $r(\xi, \eta)$.

Решение. Плотность распределения точки (x, y) равна

$$p(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{S_\Delta} = 2, \ \ x > 0, \ \ y > 0, \ \ x + y < 1; \\ \quad 0 \qquad \text{в противном случае.} \end{cases}$$

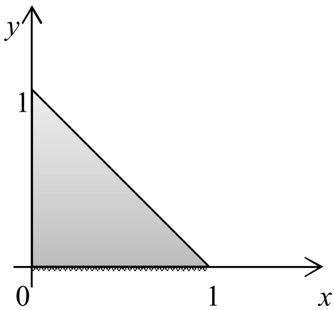

Рис. 1.2

Плотность распределения $\xi(\eta)$ найдем в силу симметрии относительно ξ и η:

$$p_\xi(x) = \int_0^{1-x} p(x,y)\,dy = \int_0^{1-x} 2\,dy = 2(1-x),\ \ 0 < x < 1\,;$$

$$p_\eta(y) = \int_0^{1-y} p(x,y)\,dx = \int_0^{1-y} 2\,dx = 2(1-y),\ \ 0 < y < 1\,.$$

Видим, что случайные величины ξ и η зависимы, так как не выполняется условие

$$p(x,y) = p_\xi(x) \cdot p_\eta(y).$$

Коэффициент корреляции вычисляется по формуле

$$r(\xi,\eta) = \frac{M(\xi\eta) - M\xi \cdot M\eta}{\sqrt{D\xi \cdot D\eta}}.$$

Вычисляем

$$M(\xi\eta) = \iint 2xy\,dx\,dy = \int_0^1 x\,dx \int_0^1 2y\,dy = \frac{1}{12}\,;$$

$$M\xi = \int_0^1 2x(1-x)\,dx = \frac{1}{3}\,;$$

$$M\eta = \int_0^1 2y(1-y)\,dy = \frac{1}{3}\,;$$

$$D\xi = M(\xi^2) - (M\xi)^2 = \frac{1}{18} = D\eta\,,$$

где

$$M(\xi^2) = \int_0^1 x^2 2(1-x)\,dx = \frac{1}{6}.$$

В итоге получаем

$$r(\xi, \eta) = -\frac{1}{2}.$$

Ответ: $-\frac{1}{2}$.

<u>Задачи</u>

1.72. Случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_{10}$ попарно некоррелированы, $M\xi_k = 0$, $D\xi_k = \sigma^2$. Вычислить коэффициент корреляции сумм $\xi_1 + \ldots + \xi_7$ и $\xi_4 + \ldots + \xi_{10}$.

1.73. Случайная точка равномерно распределена в эллипсе $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$. Вычислить коэффициент корреляции декартовых координат этой точки.

1.74. Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ – центрированные случайные величины с дисперсиями $D\xi_k = \sigma_k{}^2$. Коэффициенты корреляции заданы: $r(\xi_k, \xi_j) = a_{kj}$ при $k \neq j$. Рассмотрим сумму $\eta_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$. Вычислить $r(\xi_k, \eta_n)$.

Рассмотреть частный случай, когда все ξ_k некоррелированы и одинаково распределены.

1.75. Случайная точка с декартовыми координатами (ξ, η) определена в треугольнике $x > 0$, $y > 0$, $x + y < 1$ с плотностью $p(x, y) = 6x$. Вычислить коэффициент корреляции $r(\xi, \eta)$. Построить точную и приближенную линии регрессии η по ξ.

1.76. Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_k, \ldots$ – последовательность случайных величин, а $C_1, \ldots, C_k, \ldots$ – ограниченная числовая последовательность. Верно ли утверждение: если $\xi_k \xrightarrow{p} 0$, то $C_k \xi_k \xrightarrow{p} 0$?

1.77. Случайные величины ξ_k $(k = 1, 2, \ldots)$ попарно независимы, причем ξ_k принимает значения $\pm\sqrt{\ln(k)}$ с вероятностями ½. Подчиняется ли последовательность $\xi_1, \ldots, \xi_k, \ldots$ закону больших чисел?

1.78. Дана последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин $\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$, каждая из которых принимает значения $1, -2, 3, -4, \ldots$, причем вероятность $P\{\xi_k = (-1)^{n-1}n\}$ пропорциональна $\frac{1}{n^2}$. Подчиняется ли эта последовательность закону больших чисел?

1.79. Последовательность случайных величин ξ_k $(k = 1, 2, \ldots)$ удовлетворяет трем условиям:

1) все $M\xi_n = a$,
2) все $D\xi_n \leq C$,
3) все $r(\xi_k, \xi_j) \leq 0$ при $k \neq j$.

Доказать, что эта последовательность подчиняется закону больших чисел.

1.80. Случайная функция $\xi(t)$ определена для всех *t* формулой

$$\xi(t) = \sum_{k=1}^{n} (\xi_k \cos(k \cdot t) + \eta_k \sin(k \cdot t)),$$

где $\xi_1, \ldots, \xi_n$ и $\eta_1, \ldots, \eta_n$ – независимые нормальные случайные величины, $M\xi_k = M\eta_k = 0$, $D\xi_k = D\eta_k = {\sigma_k}^2$. Вычислить коэффициент корреляции $\xi(t)$ и $\xi(t')$ при $t \neq t'$ и доказать, что он зависит от разности $t' - t$.

1.81. Случайные величины ξ_k $(k = 1, 2, \ldots)$ попарно независимы, причем ξ_k принимает значения $\pm k^s$ с вероятностями ½. При каких значениях параметра *s* можно гарантировать, что последовательность $\xi_1, \ldots, \xi_k, \ldots$ подчиняется закону больших чисел?

1.82. Предположим, что для некоторого $a > 0$ существует $Me^{a\xi}$. Доказать, что тогда для любого $h > 0$ справедливо неравенство

$$P\{\xi \geq h\} \leq e^{-ah} Me^{a\xi}.$$

1.83. Рассмотрим последовательность центрированных случайных величин $\xi_1, \ldots, \xi_k, \ldots$. Если $M{\xi_k}^2 \to 0$, то говорят, что последовательность $\{\xi_k\}$ сходится в среднем: $\xi_k \xrightarrow{(\text{ср})} 0$. Доказать, что из $\xi_k \xrightarrow{(\text{ср})} 0$ следует $\xi_k \xrightarrow{(p)} 0$, но не наоборот.

1.84. Предположим, что случайная величина ξ нормальна с параметрами $(0, \sigma)$, а неотрицательная случайная величина η имеет плотность вероятности, пропорциональную

$$x^{\frac{m}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, \quad 0 < x < \infty.$$

Доказать, что если ξ и η независимы, то плотность отношения $\xi/\sqrt{\eta/m}$ пропорциональна

$$\left(1+\frac{x^2}{m}\right)^{-\frac{m+1}{2}}, \qquad -\infty < x < +\infty$$

(теорема Стьюдента).

1.7. Характеристические функции. Центральная предельная теорема

Характеристической функцией случайной величины ξ называется комплексная функция от действительного аргумента

$$\varphi_\xi(t) = Me^{it\xi}, \qquad -\infty < t < +\infty.$$

Если случайные величины ξ_1 и ξ_2 независимы, то

$$\varphi_{\xi_1+\xi_2}(t) = \varphi_{\xi_1}(t)\cdot\varphi_{\xi_2}(t).$$

Теорема Муавра – Лапласа утверждает, что если случайная величина ξ подчиняется биноминальному закону с параметрами n и p, то при любых $x' < x''$

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{x' < \frac{\xi - np}{\sqrt{np(1-p)}} < x''\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x'}^{x''} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx\,.$$

Примеры решения типовых задач

Пример 1.24

С помощью характеристических функций доказать, что для независимых случайных величин $\xi_1, \dots, \xi_n$ из примера 1.22 центральная предельная теорема (ЦПТ) выполняется, а ЗБЧ не имеет места.

Решение. Для последовательности

$$\eta_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k$$

находим характеристическую функцию. Имеем

$$\varphi_{\xi_k}(t)=\frac{1}{2}\left(e^{it\sqrt{k}}+e^{-it\sqrt{k}}\right)=\cos(\sqrt{k}t).$$

Находим

$$\varphi_{\eta_n}(t)=\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{\sqrt{k}t}{n}=\exp\left[\sum_{k=1}^{n}\ln\cos\frac{\sqrt{k}t}{n}\right]=$$

$$=\exp\left[-t^2\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}k+\bar{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right]=\exp\left[-t^2\frac{n(n+1)}{4n^2}+\bar{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right].$$

Таким образом, $\varphi_{\eta_n}(t)\to e^{-\frac{t^2}{4}}$ при $n\to\infty$.

При выполнении ЗБЧ $\varphi_{\eta_n}(t)\to 1$ при $n\to\infty$.

Для ЦПТ рассматривается последовательность случайных величин

$$\zeta_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{\xi_k}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n}D\xi_k}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}}}\sum_{k=1}^{n}\xi_k.$$

Характеристические функции случайных величин ζ_n имеют вид

$$\varphi_{\zeta_n}(t)=\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{\sqrt{k}t}{\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}}}\right)=\exp\left[\sum_{k=1}^{n}\ln\cos\left(\frac{\sqrt{k}t}{\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}}}\right)\right]=$$

$$=\exp\left[-\frac{t^2}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}k+\bar{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right].$$

$\varphi_{\zeta_n}(t)\to e^{-\frac{t^2}{2}}$, $n\to\infty$. Следовательно, ЦПТ выполняется.

Пример 1.25

На склад поступает продукция с трех предприятий. Продукция первого предприятия составляет на складе 25 %, второго – 30 %, третьего – 45 %. В продукции первого предприятия имеется 60 % изделий высшего качества, в продукции второго – 65 %, третьего –

40 %. Найти вероятность того, что среди 200 произвольно взятых изделий не менее 90 являются изделиями высшего качества.

Решение. Рассмотрим события:

A – произвольно взятое со склада изделие является изделием высшего качества;

B – среди 200 произвольно взятых изделий не менее 90 – изделия высшего качества;

$B_1 \backslash B_2 \backslash B_3$ – взятое изделие изготовлено на первом\втором\третьем предприятии.

Пользуясь формулой полной вероятности, получаем

$$P(A) = \sum_{i=1}^{3} P(B_i)P(A|B_i) = 0{,}525,$$

так как по условию $P(A|B_1) = 0{,}6;\ P(A|B_2) = 0{,}65;\ P(A|B_3) = 0{,}4.$ Для вычисления искомой вероятности пользуемся ЦПТ Муавра–Лапласа, где $n = 200\ , p = 0{,}525\ , q = 0{,}475.$

$$x' = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} \approx 13{,}45\ ; \quad x'' = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}} \approx -2{,}12\ ,$$

поскольку $m_1 = 90, m_2 = 200.$

В результате получаем

$$P(A) = P(90 \leqslant m \leqslant 200) \approx \frac{1}{2}[\Phi(13{,}45) - \Phi(-2{,}12)] \approx 0{,}983\ ,$$

$$\Phi(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^z e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt.$$

Ответ: $\approx 0{,}983.$

<u>Задачи</u>

1.85. Вычислить характеристическую функцию дискретной случайной величины с распределением

$$\begin{pmatrix} -b_m, \dots\ , & -b_1\ , & 0, & b_1 & \dots & b_m \\ p_m, \dots\ , & p_1\ , & 0, & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}.$$

1.86. Вычислить характеристическую функцию случайной величины, плотность которой изображена на рис. 1.3.

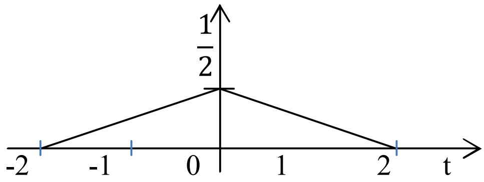

Рис. 1.3

1.87. Методом характеристических функций доказать, что сумма двух независимых случайных величин, подчиняющихся закону Пуассона, также подчиняется закону Пуассона.

1.88. Методом характеристических функций доказать предельную теорему Пуассона.

1.89. Какому условию должны удовлетворять неотрицательные числа $a_0, a_1, \ldots, a_k, \ldots$, для того чтобы функция

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos(k \cdot t)$$

была характеристической функцией? Какой случайной величины?

1.90. Вероятность наступления события *A* в одном испытании равна 1/2. Какова вероятность того, что при проведении 1000 независимых испытаний количество наступления события *A* будет заключено в интервале от 450 до 550?

1.91. Вероятность наступления события *A* в одном испытании равна $p = 0{,}4$. Сколько надо провести независимых испытаний, чтобы было гарантировано неравенство

$$P\left\{\left|\frac{n_A}{n} - p\right| < 0{,}01\right\} \geqslant 0{,}995\ ?$$

1.92. В практически неограниченной совокупности некоторых предметов половина из них обладает свойством *A* и пятая часть –

свойством B. Свойства A и B распределены между предметами независимо. Из совокупности случайно выбрали 1600 предметов. Какова вероятность, что в этой выборке частоты, с которыми встречаются свойства A и B, отличаются от их вероятностей не более чем на 5 %?

1.93. Случайные величины ξ_k при $k = 1, 2, \ldots, 4500$ взаимно независимы и имеют одинаковые дисперсии $D\xi_k = 5$. Вычислить (приближенно) вероятность того, что среднее арифметическое этих случайных величин отклонится от своего математического ожидания не более чем на 0,04.

1.94. Случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_k$независимы, причем ξ_k принимает два значения:

$$P\{\xi_k = -\sqrt{k}\} = P\{\xi_k = \sqrt{k}\} = \frac{1}{2}.$$

Методом характеристических функций найти предельное распределение средних арифметических $\frac{1}{n}(\xi_1 + \ldots + \xi_n)$ при $n \to \infty$. Доказать, что последовательность $\xi_1, \ldots, \xi_k, \ldots$ не подчиняется закону больших чисел.

Ответы и указания к решению задач

1.1. Если $AB = A$ умножить на $\bar{B}$, то $A\bar{B} = 0$. Если $A\bar{B} = 0$, то из $A = AB + A\bar{B}$ вытекает $AB = A$.
Если $AB \subset A$, то, умножив на A, получим $A \subset AB$. Вместе с очевидным $AB \subset A$ это дает $A = AB$.
Если $AB = A$, то $B = AB + \bar{A}B = A + \bar{A}B$, откуда $A \subset B$.

1.2. а) нет; б) да. (Из $A + B = B$ следует $A \subset B$ или $A = AB$. Но $AB = 0$).

1.3. При $A = B$. (Из $AB = A + B = AB + A\bar{B} + \bar{A}B$ следует $A\bar{B} + \bar{A}B = 0$. Отсюда $A\bar{B} = 0$ или $A \subset B$, и $\bar{A}B = 0$ или $A \subset B$. Итак, $B = A$).

1.4. $D = (A_1 + A_2)(B_1B_2 + B_1B_3 + B_2B_3)$, $\bar{D} = (\bar{A}_1\bar{A}_2) + (\bar{B}_1 + +\bar{B}_2)(\bar{B}_1 + \bar{B}_3)(\bar{B}_2 + \bar{B}_3) = \bar{A}_1\bar{A}_2 + \bar{B}_1\bar{B}_2 + \bar{B}_1\bar{B}_3 + \bar{B}_2\bar{B}_3$.

1.5.

$$D = A\sum_1^4 B_i \sum_1^2 G_j \ ; \quad \bar{D} = \bar{A} + \prod_1^4 \bar{B}_i + \prod_1^2 \bar{C}_j \ .$$

1.6. $P\{A + B + C\} = P\{A\} + P\{B\} + P\{C\} - P\{AB\} - P\{AC\} - -P\{BC\} + P\{ABC\}$.

1.7. $P\{A + B + C\} = 3p - 3p^2$; а) $p = \frac{1}{2}$; б) невозможно.

1.8.

$$\text{Из } 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^n \geq \frac{1}{2} \text{ вытекает } n = 1 + \left[\frac{\log 2}{\log(36/35)}\right] = 25 \ .$$

1.9. $1/10!$

1.10. $4!/10!$

1.11. В вариантах а и в ответы одинаковые:

$$\frac{m(m-1)}{(m+n)(m+n-1)}, \frac{n(n-1)}{(m+n)(m+n-1)}, \frac{2nm}{(m+n)(m+n-1)}$$

В варианте б:

$$\frac{m^2}{(m+n)^2}, \frac{n^2}{(m+n)^2}, \frac{2mn}{(m+n)^2}.$$

1.12. При любом k:

$$\frac{(m+n-1)!\,m}{(m+n)!} = \frac{m}{n+m}.$$

1.13. Пусть

$$p = \frac{m}{m+n}, \qquad q = \frac{n}{m+n}.$$

Вероятности выигрышей:

$$p_1 = p + q^2 p + q^4 p + \ldots = \frac{p}{1-q^2},$$

$$p_2 = qp + q^3 p + q^5 p + \ldots = \frac{pq}{1-q^2}.$$

Всегда $p_2 < p_1$.

1.14. Пусть S_k – событие, состоящее в том, что при k-м срабатывании прибор не перегорел. Тогда

$$A_n = S_1 S_2 \ldots S_n, \qquad P\{A_n\} = \prod_1^n (1-q_k);$$

$$\bar{B}_n = S_1 S_2 \ldots S_{n+1}, \qquad P\{B_n\} = 1 - \prod_1^{n+1} (1-q_k);$$

$$C_n = S_1 S_2 \ldots S_n \bar{S}_{n+1}, \qquad P\{C_n\} = q_{n+1} \prod_1^n (1-q_k).$$

1.15. а) $\frac{2(N-1)(N-2)!}{N!} = \frac{2}{N}$;б) $\frac{2N(N-2)!}{N!} = \frac{2}{N-1}$.

1.16. При $p = \frac{1}{2}$ значения $p_4(3) = \frac{1}{4}$, $p_8(5) = \frac{7}{32}$,следовательно, $p_4(3) > p_8(5)$.

1.17.

$$P_a = \frac{N(N-1)\ldots(N-k+1)}{N^k}, \quad P_б = \frac{N}{N^k} = \frac{1}{N^{k-1}}.$$

1.18. Вероятность k отказов равна $P_{10}(k) = C_{10}^k (1-p)^k p^{10-k}$, тогда $P_a = 1 - p^{10}$, $P_б = 10(1-p)p^9$, $P_в = 45(1-p)^2 p^8$, $P_г = 1 - p^{10} - 10p^9(1-p)$.

1.19. Вероятность равна

$$P\{A\} = \sum_1^5 P\{A|H_i\}\, P\{H_i\} = \frac{1}{5}(0{,}5 + 0{,}6 + 0{,}7 + 0{,}8 + 0{,}8) = 0{,}68.$$

1.20.

$$P\{A\} = \sum_{1}^{3} P\{A|H_i\}P\{H_i\} = 0{,}275.$$

1.21.

$$P_{2t}(s) = \sum_{k=0}^{s} p_t(k)p_t(s-k).$$

1.22.

$$P\{H_1|A\} = \frac{0{,}05\,N/(M+N)}{0{,}05\,N/(M+N) + 0{,}0025\,M/(M+N)} = \frac{1}{1+0{,}05\,M/N}.$$

1.23. $P\{H_i\} = \omega_i$, $P\{A|H_i\} = C_n^m\, p_i^m (1-p_i)^{n-m}$,

Так как A – это m удач при n испытаниях,

$$P\{H_1|A\} = \frac{\omega_1 p_1^m (1-p_1)^{n-m}}{\sum_1^3 \omega_i p_i^m (1-p_i)^{n-m}} .$$

1.24. $p_а = \frac{1}{2}$, $p_б = \frac{1}{3}$, $p_в = \frac{1}{4}$.

1.25. S – площадь области,

$$p = 1 - \left(1 - \frac{\pi r^2}{S}\right)^N .$$

1.26. *Указание:* рассмотреть сперва часть полосы длиною L.

$$P(L) = \left(1 - \frac{2r}{L}\right)^{kLh} , \quad P(\infty) = e^{-2rkh}.$$

1.27. Пусть H_i – выбор i новых мячей при первом выборе

$$P\{H_i\} = \frac{C_{12}^i C_4^{3-i}}{C_{16}^3}, \qquad i = 0, 1, 2, 3.$$

Пусть A – выбор трех новых мячей при втором выборе.

$$P\{A|H_i\} = \frac{C_{12-i}^3}{C_{16}^3}.$$

Тогда

$$P\{H_3\} = \frac{11}{28} = 0{,}39;$$

$$P\{A\} = \sum_{i=0}^{3} \frac{C_{12-i}^3 C_{12}^i C_4^{3-i}}{(C_{16}^3)^2} = \frac{4719}{23520} \approx 0{,}20.$$

1.28. Вероятность того, что все n шаров будут черными, равна $p_n(0|10{,}5) = C_5^n / C_{10}^n$. При $n = 1, 2, 3$ получаем значения 0,50; 0,22; 0,08. Из условия $p_n(0|10{,}5) \leqslant 0{,}02$ находим $n = 3$.

1.29. Точный ответ:

$$p_n(0|N, M) = \frac{(N-M)(N-M+1)\dots(N-M-n+1)}{N(N-1)\dots(N-n+1)} \leqslant 0{,}1.$$

Биноминальное приближение:

$$p_n(0, P) = (1-p)^n \leqslant 0{,}1\,; \quad p = \frac{M}{N}.$$

Пуассоновское приближение:

$$p(0, np) = e^{-np} \leqslant 0{,}1.$$

В биноминальном приближении:

$$n = 1 + \left[\frac{-\ln 10}{\ln(1 - M/N)}\right] = 22.$$

В пуассоновском приближении:

$$n = 1 + \left[\frac{\ln 10}{M/N}\right] = 24.$$

1.30. Точный ответ:

$$P\{k \geqslant 2\} = 1 - 1(1-p)^n - np(1-p)^{n-1} = 0{,}957.$$

В пуассоновском приближении:

$$P\{k \geqslant 2\} = 1 - e^{-np} - npe^{-np} = 1 - 6e^{-5} = 0{,}959.$$

1.31. $P\{4\} = \frac{(np)^4}{4!} e^{-np} = 0{,}168.$

1.32. $P\{\xi = k\} = C_n^k 2^{-n}, \;\; k = 0, 1, \dots, n.$

1.33. Если ξ – количество хороших изделий, выпущенных между двумя периодами, то $P\{\xi = k\} = (1-p)^k p, \;\; M\xi = \frac{1}{p} - 1.$

1.34. $P\{\xi = 1\} = 0{,}1;\; P\{\xi = 2\} = 0{,}99;\; P\{\xi = 3\} = 0{,}081;$
$P\{\xi = 4\} = 0{,}0729;\; P\{\xi = 5\} = 0{,}6561;\; M\xi = 4{,}095.$

1.35. Вероятность того, что при одном розыгрыше победитель будет определен, равна

$$p = \frac{2M(N-M)}{N(N-1)};\; P\{\xi = k\} = (1-p)^{k-1} p,$$

$$k = 1, 2, \dots, \quad M\xi = \frac{1}{p}.$$

1.36. $s = 2.$

1.37. $M\xi = \sqrt{2} + 1,\ \ D\xi = \infty.$

1.38. $P\{\eta = i\} = \frac{(ap)^i}{i!} e^{-ap}$ – снова закон Пуассона, $M\eta = ap$.

1.39.

$$\frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N} m_i k_i \,.$$

1.40. $C = e^{-1},\ M\xi = -e^{-2},\ D\xi = 2 - e^{-4}.$

1.41. $P\{\nu = 1\} = \frac{1}{2}$;

$P\{\nu = k\} = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}$ при $k = 2, 3, \ldots$

Замечание: В задачах 1.33, 1.35, 1.36 использована формула

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\ q^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2}\,, \qquad |q| < 1\,,$$

которая получается дифференцированием по q формулы

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}\,.$$

1.42. $M\xi = 0,\ D\xi = \frac{a^2}{2}\ ,\ \left(p_\xi(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\right).$

1.43. $M\xi = D\xi = m + 1.$

1.44.

$$|M\zeta| \leqslant \int_{-k}^{k} |x|\, dF(x) \leqslant h\,, \qquad D\xi \leqslant M\xi^2 = \int_{-k}^{k} x^2\, dF(x) \leqslant h^2.$$

Равенство имеет место для $\zeta \sim \begin{pmatrix} -h & h \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}^{-k}.$

1.45. $M\xi = \frac{2}{\sqrt{\pi}} h^{-1} = 1.13h^{-1}\,,\ \sqrt{M\xi^2} = \sqrt{1.5}h^{-1} \approx 1.22h^{-1}.$

1.46. $P\{\tau \geqslant T\} = e^{-1},\ \ P\{\tau \geqslant 2T\} = e^{-2},\ \ P\{T \leqslant \tau \leqslant 2T\} =$
$= e^{-1} - e^{-2},\ \ T = M\tau.$

1.47. Для круга:

$$F(r) = \begin{cases} 0\,, & r < 0; \\ \left({}^{r}/_{R}\right)^2, & 0 < r < R; \\ 1\,, & r > R; \end{cases}$$

$$p(r) = \frac{2r}{R^2},\ \ 0 < r < R.$$

Для шара соответственно $F(r) = \left({}^{r}/_{R}\right)^3$, $p(r) = \frac{3r^2}{R^3}$, $0 < r < R$.

1.48. $1 - P\{d_1 < \xi < d_2\} = 1 - \Phi(2) = 0.0455$.

1.49. $P\{\eta < y\} = \begin{cases} e^{-|y|^{\alpha}} & \text{при } y < 0, \\ 1 & \text{при } y \geq 0. \end{cases}$

1.50. а) Если $c > 0$, то $G(y) = F\left(\frac{y}{c}\right)$, если $c < 0$, то $G(y) = 1 -$ $-F\left(\frac{y}{c} + 0\right)$; $p_{\eta}(y) = \frac{1}{|c|} P_{\xi}(y/c)$;

б) если $y < 0$, $G(y) = 0$, если $y \geq 0$, то $G(y) = F\left(\sqrt{y}\right) -$ $-F\left(-\sqrt{y} + 0\right)$; $p_{\eta}(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}\left(P_{\xi}\left(\sqrt{y}\right) - P_{\xi}\left(-\sqrt{y}\right)\right)$ при $y \geq 0$.

1.51. $p = \frac{2}{3}$, $M\tau = \frac{1}{12}$ мин,

$$F_{\tau}(r) = \begin{cases} 0\,, & x < 0\,; \\ \dfrac{2}{3}(1 + x), & 0 < x < \dfrac{1}{2}\,; \\ 1\,, & x > \dfrac{1}{2}\,. \end{cases}$$

1.52. а) $p_{\eta}(y) = \frac{1}{y} p_{\xi}(-\ln(y))$, $0 < y < 1$;

б) $p_{\eta}(y) = \frac{y}{\sqrt{R^2 - y^2}}\left[p_{\xi}\left(\sqrt{R^2 - y^2}\right) + p_{\xi}\left(-\sqrt{R^2 - y^2}\right)\right]$, $0 < y < R$;

в) $p_{\eta}(y) = \frac{1}{2y\sqrt{-\ln(y)}}\left[p_{\xi}\left(\sqrt{-\ln(y)}\right) + p_{\xi}\left(-\sqrt{-\ln(y)}\right)\right]$, $0 < y < 1$.

1.53.

$$F_{\eta}(y) = \begin{cases} 0 & \text{при } y \leq 0; \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\Phi(y/2) & \text{при } y > 0. \end{cases}$$

1.54. $M\tau = \frac{1}{a}$, $F(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \leq 0, \\ 1 - e^{-at} & \text{при } t > 0. \end{cases}$

1.55.

$$p_\eta(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma|c|} e^{-\frac{(y-ac-c_1)^2}{2\sigma^2 c^2}}, a_1 = ac + c_{1,}\sigma_1 = \sigma|c|.$$

1.56. $M\xi = 0$, $D\xi = 2$.

1.57. а) $P\{\eta = k\} = \frac{1}{M}$, $k = 0, 1, \dots, M-1$;

б) $P\{\eta = k\} = p^k(1-p)$, $k = 0, 1, \dots, p = e^{-a}$ $(a = 1/M\xi)$.

1.58. $F(x) = 1 - \sqrt{1 - \frac{2x}{L^2}}$, $0 < x < \frac{L^2}{2}$.

1.59. $p_{\xi_1}(x) = p_{\xi_2}(x) = p_{\xi_3}(x) = 2x$, $0 < x < 1$.

1.60. $P\{\xi + \eta = k\} = (k-1)2^{-k}, k = 0, 1, \dots$.

1.61.

$$P\{\xi + \eta = k\} = \sum_{l=0}^{k} \frac{a_1^l}{l!} a^{-a_1} \frac{a_2^{k-l}}{(k-l)!} e^{-a_2} = \frac{a^{-(a_1+a_2)}}{k!}(a_1 + a_2)^k$$

1.62. а) $p_\vartheta(z) = \frac{z}{\sigma^2} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}$; б) $p_\vartheta(z) = \frac{2z^2}{\sqrt{2\pi}\sigma^3} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}$; в) $p_\vartheta(z) =$

$= c_n \dfrac{z^{n-1}}{\sigma^n} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}$, где $C_n = \left[2^{n/2-1}\Gamma(n/2)\right]^{-1}$.

1.63. $p_{\xi+\eta}(y) = \sum_{k=1}^{n} p_k\, p(y - x_k)$.

1.64. $p_\xi(x) = \frac{2}{\pi a^2}\sqrt{a^2 - x^2}$, $|x| < a$;

$$p_\xi(x|y) = \frac{b}{2a\sqrt{b^2 - y^2}}, \qquad |x| < \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2}.$$

1.65. $F_\eta(z) = [F(z)]^n$; $F_\theta(z) = 1 - [1 - F(z)]^n$;

$p_\eta(z) = n[F(z)]^{n-1}p(z)$; $p_\theta(z) = n[1 - F(z)]^{n-1}p(z)$.

1.66. $p_\xi(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$; $p_\xi(x|y) = \frac{2(1+y)^2}{(1+x+y)^3}$;

$$p_\xi(x|y,z) = \frac{3(1+y+x)^3}{(1+x+y+z)^4}; \quad p_{\xi+\eta+\zeta}(t) = \frac{3t^2}{(1+t)^4} \ , t > 0.$$

1.67. $F(y) = 1 - \frac{2}{\pi} arccos\left(\frac{y}{2R}\right)$, $0 < y < 2R$; $M\xi = \frac{4}{\pi}R$.

1.68. $p_{\xi\eta}(z) = \int_0^\infty p(x, z|x)\, dx\, |x, z > 0$; $\quad p_{\xi\eta}(z) = -\ln(z)$,

$0 < z < 1$.

1.69. $p_{\xi+\eta}(z) = c_{\alpha+\beta+1} z^{\alpha+\beta+1} e^{-kz}$, где $c_\mu = \frac{k^{\mu+1}}{\Gamma(\mu+1)}$.

1.70. а) $p_{\eta|\xi}(z) = \frac{1}{(1+z)^2}$, $0 < z < \infty$;

б) $p_{\eta|\xi}(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & ,0 < z < 1; \\ \dfrac{1}{2} z^2 & ,1 < z < \infty; \end{cases}$

в) $p_{\eta|\xi}(z) = \dfrac{1}{\pi(1+z^2)}, -\infty < z < \infty.$

1.71.

$$p_{-\xi}(x) = \frac{u(-x)}{\int_{-\infty}^{+\infty} u(x)\,dx}\ , p_{\xi-\eta}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x+t)u(t)\,dt\ .$$

1.72. $r(\xi,\ \eta) = \frac{4}{7}$.

1.73. $r(\xi,\ \eta) = 0$.

1.74.

$$r(\xi_k, \eta_k) = \frac{\left(\sum_{j=1}^{n} a_{kj}\sigma_j\right)}{\sqrt{\sum_{k,j=1}^{n} a_{kj}\sigma_k\sigma_j}}\ ,\text{если } a_{kk} = 1, \qquad r(\xi_k, \eta_k) = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

1.75. $r(\xi,\ \eta) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $m(x) = \frac{1-x}{2}$. Некоторые другие величины $M\xi = \frac{1}{2}$, $D\xi = \frac{1}{20}$,$M\eta = \frac{1}{4}$, $D\eta = \frac{3}{80}$.

1.76. Да,

$P\{|C_k\xi_k| \geqslant h\} \leqslant P\{M|\xi_k| \geqslant h\} = P\left\{|\xi_k| \geqslant \dfrac{h}{M}\right\} \to 0,$

где $M = \sup\limits_k |C_k|$.

1.77. Да. Выполнены условия теоремы Маркова:

$$D\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \xi_k\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \ln k \to 0 \ \text{ при } \ n \to \infty.$$

1.78. Нет. Математическое ожидание не существует:

$$M|\xi_k| = \sum_{k=1}^{\infty} k\ \frac{c}{k^2} = \infty.$$

1.79.
$$D\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^{n}r(\xi_i,\xi_j)\sqrt{D_{\xi_i}D_{\xi_j}}\leqslant\frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^{n}D_{\xi_i}\leqslant\frac{c}{n}\to 0$$
при $n\to\infty$.

1.80. $r(\xi(t),\xi(t'))=\frac{\sum_{k=1}^{n}\sigma_k{}^2\cos k(t\prime-t)}{\sum_{k=1}^{n}\sigma_k{}^2}$.

1.81. При $s<\frac{1}{2}$, ибо $D\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right)\sim n^{2s-1}$.

1.82. $Me^{a\xi}=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{ax}\,dF_\xi(x)\geqslant e^{ah}P\{\xi\geqslant h\}$.

1.83. $P\{|\xi_k|\geqslant h\}\leqslant\frac{M\xi_k{}^2}{h^2}\to 0$ при $k\to\infty$ для любого $h>0$.

Для доказательства второго утверждения рассмотрим последовательность случайных величин ξ_k $(k=1,2,\dots)$ с плотностями
$$p_k(x)=\frac{k}{(1+k|x|)^3},-\infty<x<+\infty.$$
Очевидно, что $M\xi_k=0$,
$$P\{|\xi_k|<h\}=2\int_0^k\frac{k\,dx}{(1+kx)^3}=1-\frac{1}{(1+kh)^3}\to 1 \text{ при } k\to\infty,$$
так что $\xi_k\xrightarrow{(p)}0$. Однако
$$M\xi_k{}^2=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{kx^2\,dx}{(1+k|x|)^3}=\infty.$$

1.84. Пусть $\zeta=\frac{\xi}{\sqrt{\eta/m}}$.
$$p_\zeta(z)=c\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_0^{\infty}\delta\left(z-\frac{x}{\sqrt{y/m}}\right)e^{-\frac{x^2}{2}}y^{\frac{m}{2}-1}e^{-\frac{y}{2}}dy\ ,$$
Замена $x=u\sqrt{y/m}$,
$$p_\zeta(z)=c\int_0^{+\infty}y^{\frac{m}{2}-1}e^{-\frac{y}{2}}dy\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(z-u)e^{-\frac{u^2y}{2m}}\,du\sqrt{y/m}=$$

$$= \frac{c}{\sqrt{m}} \int_0^{+\infty} y^{\frac{m-1}{2}} \exp\left(-\frac{y}{2} - \frac{z^2 y}{2m}\right) dy \ ;$$

замена $t = \frac{y}{2}\left(1 + \frac{z^2}{m}\right)$, $p_\xi(z) = c_1 \left(1 + \frac{z^2}{m}\right)^{-\frac{m+1}{2}}$.

1.85. $\varphi_\xi(t) = p_0 + 2\sum_{k=1}^m p_k \cos b_k t$.

1.86. $\varphi_\xi(t) = \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2$.

1.87. $\varphi_\xi(t) = e^{a\left(e^{it-1}\right)}$, $\varphi_{\xi_1+\xi_2}(t) = e^{(a_1+a_2)\left(e^{it}-1\right)}$.

1.88.

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ np\to\alpha}} (pe^{it} + 1 - p)^n = e^{-\alpha(1-e^{it})}.$$

1.89.

$$\varphi(0) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k = 1, \quad \xi \sim \begin{pmatrix} \ldots -k & \ldots 0 \ldots & k \ldots \\ \ldots \frac{a_k}{2} & \ldots a_0 \ldots & \frac{a_k}{2} \ldots \end{pmatrix}.$$

Указание: см. задачу 1.85.

1.90. $p = \Phi(3{,}16) \simeq 0{,}998$.

1.91. $n \simeq 1{,}88 \cdot 10^4$.

1.92. Для свойства A вероятность равна $\Phi(2) = 0{,}955$.
Для свойства A вероятность равна $\Phi(1) = 0{,}68$.

1.93. $p = \Phi(1{,}2) \simeq 0{,}77$.

1.94. $\varphi_{\xi_k}(t) = \cos\sqrt{k}\, t$, $\lim_{n\to\infty} \varphi_{\frac{1}{n}\sum_1^n \xi_k}(t) = e^{-t^2/4}$

характеристическая функция нормального распределения с $a = 0$ и $\sigma^2 = \frac{1}{2}$. Отсюда следует, что для любого $h > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_1^n \xi_k\right| < h\right\} = \Phi\left(\frac{h}{\sqrt{2}}\right),$$

а закон больших чисел требует, чтобы при любом $h > 0$ эта вероятность стремилась к единице.

Глава 2. Математическая статистика

> Поскольку всё большее число специалистов в современном мире имеют дело с теоретическими и (особенно) прикладными задачами вероятностной и статистической природы, очень важно, чтобы указанные курсы поддерживали у студентов повышенный интерес.
>
> *М.Я. Кольберт, Ю.М. Сухов*

2.1. Смещённость, эффективность и состоятельность оценок. Метод моментов (ММ) и метод максимального правдоподобия (ММП) получения оценок

Пусть $\xi \in (-\infty; +\infty)$ – случайная величина; $\theta \in \Theta$ – множество значений параметра; $p(x, \theta)$ – плотность распределения случайной величины.

$\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ – выборочный вектор, представляющий собой взаимно независимые компоненты, имеющие одно и то же распределение. Величина

$$L(\boldsymbol{x}, \theta) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i, \theta)$$

называется *функцией правдоподобия.*

Оценка $t(\boldsymbol{x})$ величины $\tau(\theta)$ называется *несмещенной*, если

$$Mt(\boldsymbol{x}) = \tau(\theta), \quad \theta \in \Theta.$$

Несмещенная оценка $t(\boldsymbol{x})$ величины $\tau(\theta)$ называется *эффективной*, если для нее выполнено условие

$$Dt(\boldsymbol{x}) = \frac{[\tau'(\theta)]^2}{M\left[\frac{\partial \ln L(\boldsymbol{x},\theta)}{\partial \theta}\right]^2}.$$

Оценка $t_n(\boldsymbol{x})$ параметра θ называется *состоятельной*, если $t_n(\boldsymbol{x}) \xrightarrow{(p)} \theta$ при $n \to \infty$, т.е. оценка $t_n(\boldsymbol{x})$ сходится по вероятности к величине θ при неограниченном увеличении объема выборки n.

Оценкой ММП $\hat{\theta}$ параметра θ называется корень уравнения

$$L(\boldsymbol{x}, \hat{\theta}) = \max_{\theta \in \Theta} L(\boldsymbol{x}, \theta).$$

ММ состоит в нахождении неизвестных параметров $\theta_1, \dots, \theta_p$ распределения случайной величины ξ с плотностью $p(x, \theta_1, \dots, \theta_p)$ из системы уравнений

$$\alpha_s(\theta_1, \dots, \theta_p) = m_s, \ \ s = 1, \dots, p,$$

где $\alpha_s = M\xi^s = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^s \, p(x, \theta_1, \dots, \theta_p) dx$ – момент порядка s,

m_s – выборочный момент порядка s: $m_s = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^s$.

Примеры решения типовых задач

Пример 2.1

Случайная величина ξ имеет неизвестные параметры – математическое ожидание a и дисперсию σ^2. Для a предложена оценка $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$,

для σ^2 – оценки $s_0^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$, $s_1^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$.

Исследовать смещенность приведенных оценок.

Решение. Пользуясь определением, находим

$$M\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Mx_i = a;$$

$$Ms_0^2 = M\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = \frac{1}{n-1}M\sum_{i=1}^{n}[(x_i - a) + (a - \overline{x})]^2 =$$

$$= \frac{1}{n-1}\times$$

$$\times M\sum_{i=1}^{n}\left[(x_i - a)^2 + 2(x_i - a)\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(a - x_j) + \frac{1}{n^2}\sum_{k,j=1}^{n}(a - x_k)(a - x_j)\right]^2 =$$

$$= \left\{nD\xi - \frac{2}{n}D\xi + \frac{n}{n^2}D\xi\right\} = D\xi.$$

Из последнего результата имеем:

$$Ms_1^2 = \frac{n-1}{n}Ms_0^2 = \frac{n-1}{n}D\xi.$$

При исследовании оценок s_0^2 и s_1^2 использовалось свойство независимости элементов выборки.

Ответ: оценки $\overline{x}$ и s_0^2 – несмещенные, а s_1^2 – смещенная.

Пример 2.2

Пусть ξ равномерно распределена в интервале $0 < x < \theta$ с плотностью $p(x, \theta) = \frac{1}{\theta}$, длина интервала θ – неизвестный параметр распределения. Для предложенных оценок параметра θ

$$t_1(\boldsymbol{x}) = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\,;$$

$$t_2(\boldsymbol{x}) = \max_{1\le i\le n} x_i\,;$$

$$t_3(\boldsymbol{x}) = \frac{n+1}{n} t_2(\boldsymbol{x})$$

исследовать свойства смещённости и состоятельности.

Решение. Для $t_1(\boldsymbol{x})$ легко найти

$$Mt_1(\boldsymbol{x}) = \frac{2}{n} nM\xi = \theta, \qquad Dt_1(\boldsymbol{x}) = \frac{4}{n^2} nD\xi = \frac{\theta^2}{3n}.$$

Для оценки $t_2(\boldsymbol{x})$ функция распределения выглядит так:

$$F_2(x) = P(t_2 < x) = \left(\frac{x}{\theta}\right)^n,$$

плотность распределения:

$$p_2(x) = n\frac{x^{n-1}}{\theta^n}, \qquad 0 < x < \theta.$$

Тогда вычисляем

$$Mt_2 = \frac{n}{\theta^n}\int_0^\theta x^n\,dx = \frac{n}{n+1}\theta,$$

$$Dt_2 = \frac{n\theta^2}{(n+1)^2(n+2)}.$$

Рассмотрим третью оценку $t_3(\boldsymbol{x}) = \frac{n+1}{n} t_2(\boldsymbol{x})$, для нее получаем

$$Mt_3 = \theta, \qquad Dt_3 = \frac{\theta^2}{n(n+2)}.$$

Из найденных характеристик видим, что оценки $t_1(\boldsymbol{x})$ и $t_3(\boldsymbol{x})$ – несмещенные, оценка $t_2(\boldsymbol{x})$ – смещенная, но асимптотически несмещенная. Все три приведенные оценки параметра θ состоятельны, так как выполнены достаточные условия критерия состоятельности оценок: смещение оценок и их дисперсий $\longrightarrow 0$ при $n \longrightarrow \infty$.

Пример 2.3

Пусть ξ имеет нормальное распределение с неизвестными параметрами $\theta_1 = a, \theta_2 = \sigma^2$, с плотностью

$$p(x,\theta_1,\theta_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta_2}} e^{-\frac{(x-\theta_1)^2}{2\theta_2}}, -\infty < \theta_1 < +\infty, \theta_2 > 0.$$

Найти для параметров θ_1 и θ_2 ММП и ММ оценки.

Решение. Применим ММП для оценки параметров θ_1 и θ_2 по выборке $x_1, \dots, x_n$. Рассмотрим функцию правдоподобия

$$L(\boldsymbol{x},\theta_1,\theta_2) = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi\theta_2}\right)^n} e^{\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\theta_1)^2}{2\theta_2}}.$$

Находим

$$\ln L(\boldsymbol{x},\theta_1,\theta_2) = -\frac{n}{2}\ln 2\pi - \frac{n}{2}\ln\theta_2 - \frac{1}{2\theta_2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta_1)^2.$$

Получаем уравнение ММП:

$$\frac{\partial \ln L(\boldsymbol{x},\theta_1,\theta_2)}{\partial\theta_1} = \frac{1}{2\theta_2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta_1) = 0;$$

$$\frac{\partial \ln L(\boldsymbol{x},\theta_1,\theta_2)}{\partial\theta_1} = -\frac{n}{2\theta_2} + \frac{1}{2{\theta_2}^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta_1)^2 = 0.$$

Из данных уравнений находим оценки:

$$\hat{\theta}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \overline{x};$$

$$\hat{\theta}_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \theta_1)^2 = s_1^2.$$

Оценки ММ находим из системы уравнений

$$\theta_1 = m_1,$$

$$\theta_2 + {\theta_1}^2 = m_2,$$

поскольку имеем

$$\alpha_1 = M\xi = \theta_1;$$

$$\alpha_2 = M\xi^2 = D\xi + (M\xi)^2 = \theta_2 + {\theta_1}^2.$$

Из приведенной системы получаем оценки ММ:

$$\tilde{\theta}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \overline{x};$$

$$\tilde{\theta}_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \theta_1)^2 = s_1^2.$$

Таким образом, оценки ММП и ММ для нормального распределения совпадают (в общем случае это не так).

Задачи

2.1. Случайная величина имеет неизвестные математическое ожидание a и дисперсию σ^2. Для a предложена оценка

$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$, для σ^2 оценки:

$$s_1^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2, \qquad s_0^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2.$$

Какие из предложенных оценок смещенные, несмещенные?

2.2. Доказать, что если две случайные величины ξ_1, ξ_2 имеют $M\xi_1 = M\xi_2$, $D\xi_1 = D\xi_2$ и коэффициент корреляции $r=1$, то $P\{\xi_1 = \xi_2\} = 1$.

2.3. Для случайной величины с функцией распределения $F(x,\theta) = x^{\frac{1}{\theta}}$, $0 < x < 1$, $-\infty < \theta < +\infty$ найти несмещенную эффективную оценку параметра θ.

2.4. Случайная величина ξ имеет $M\xi = a$, а ее дисперсия σ^2 неизвестна. По независимой выборке $x_1, \ldots, x_n$ для σ^2 предложена оценка $s_1^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2$. Предположив, что ξ обладает центральным моментом 4-го порядка $M(\xi - a)^4$, доказать состоятельность оценки s_1^2.

2.5. Доказать, что выборочный момент порядка v

$$m_v = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^v, v = 1,2, \ldots$$

есть несмещенная и состоятельная оценка момента $m_v = M\xi^v$.

2.6. Доказать, что выборочный момент порядка v асимптотически нормален.

2.7. Доказать, что оценка математического ожидания нормально распределенной случайной величины, полученной ММП, эффективна.

2.8. Доказать, что оценка дисперсии нормально распределенной случайной величины, полученной ММП, будучи неэффективной, эффективна асимптотически.

2.9. Для распределения Пуассона

$$P\{\xi = i\} = \frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda}, \lambda > 0, i = 0,1, \ldots$$

найти оценку ММП для параметра λ. Доказать, что полученная оценка – несмещенная, состоятельная и эффективная.

2.10. Произведено n независимых испытаний, каждое из которых может иметь своим исходом событие A с неизвестной вероятностью p. Найти для p оценку ММП.

2.11. Случайная величина ξ распределена с плотностью

$$p_\xi(x) = \frac{1}{2C}\exp\left\{-\frac{1}{C}|x-\mu|\right\}, |x| < +\infty, C > 0.$$

Параметр μ задан, для C требуется найти оценку ММП.

2.12. Случайная величина ξ распределена по биномиальному закону с параметрами N и p, т.е.

$$P\{\xi = k\} = C_N^k p^k (1-p)^{N-k}, k = 0,1,\dots,N$$

(N известно, p неизвестно). Найти для p оценку ММП. Доказать, что такая оценка – несмещенная, эффективная и состоятельная.

2.13. Неотрицательная случайная величина ξ имеет «двойное пуассоновское распределение», т.е.

$$P\{\xi = k\} = \frac{1}{2}e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_1^k}{k!} + \frac{1}{2}e^{-\lambda_2}\frac{\lambda_2^k}{k!}, k = 0,1,\dots.$$

Независимые измерения дали значения $k_1,\dots,k_n$. Найти для λ_1 и λ_2 оценки методом моментов.

2.14. Неотрицательная случайная величина ξ имеет «гамма-распределение», т.е. плотность

$$p_\xi(x) = \frac{\alpha^p}{\Gamma(p)}x^{p-1}e^{-\alpha x}, x > 0, \alpha > 0.$$

Параметр p задан, параметр α неизвестен. Указать оценку ММП для α.

2.2. Доверительные интервалы.

Эмпирическая функция распределения.

χ^2-критерий проверки гипотез о распределении

Интервал (t', t'') называется доверительным интервалом для параметра θ с коэффициентом доверия $\beta \in (0,1)$, если выполнено

$$P(t' < \theta < t'') = \beta.$$

Пусть $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)$ – выборка, $-\infty < x_1 \le x_2 \le \dots \le x_n < +\infty$, отвечающая случайной величине ξ. Эмпирической функцией распределения называется

$$F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \eta(x - x_i),$$

где $\eta(x) = \begin{cases} 1, x > 0, \\ 0, x \le 0, \end{cases}$ −единичная функция Хевисайда.

Пусть $\vec{\xi}$ − случайный вектор, $\vec{\xi} \in G, G \subseteq \mathbb{R}^p, p \ge 1$,

$$G = \bigcup_{j=1}^{r} G_j, G_i \cap G_j = \emptyset, i \ne j.$$

Обозначим $P(\vec{\xi} \in G_j) = p_j > 0, \sum_{j=1}^{r} p_j = 1.$

Пусть ν_j − количество векторов $\vec{x_i} \in G_j, i = 1, \dots n, j = 1, \dots r.$

Статистикой Пирсона называется величина

$$w = \sum_{j=1}^{r} \frac{(\nu_j - np_j)^2}{np_j}.$$

При $n \gg 1$ w аппроксимируется χ^2_{r-1} с $(r-1)$ степенями свободы.

Если по выборке определяется s параметров распределения, то сходимость w будет к χ^2_{r-s-1}.

<u>Примеры решения типовых задач</u>

Пример 2.4

Пусть $F(x,\theta) = \frac{x}{\theta}, 0 < x < \infty$ −функция распределения случайной величины ξ с неизвестным параметром $\theta > 0$. Пользуясь оценкой для параметра θ

$$t(\vec{x}) = \max_{1 \le i \le n} x_i,$$

найти доверительный интервал для величины θ с коэффициентом доверия β.

Решение. Имеем

$$F_t(z) = \left(\frac{z}{\theta}\right)^n, 0 < z < \theta.$$

Решаем уравнение

$$\left(\frac{z_\beta^\pm}{\theta}\right)^n = \frac{1 \pm \beta}{2},$$

откуда находим

$$z_\beta^\pm = \theta \sqrt[n]{\frac{1 \pm \beta}{2}}.$$

В результате получаем доверительный интервал с коэффициентом доверия β:

$$P\left(\theta\sqrt[n]{\frac{1-\beta}{2}} < t < \theta\sqrt[n]{\frac{1+\beta}{2}}\right) = P\left(t\sqrt[n]{\frac{2}{1+\beta}} < \theta < t\sqrt[n]{\frac{2}{1-\beta}}\right) = \beta.$$

Пример 2.5

Некий любознательный статистик, рассматривая витрины часовщиков, записывал время на часах, причем минуты не учитывались. Полученные данные приведены в табл. 2.1.

Таблица 2.1

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
41	34	54	39	49	45	41	33	37	41	47	39

Можно ли считать, что верна гипотеза

$$H_0: p_0 = p_1 = \cdots = p_{11} = \frac{1}{12}$$

о равномерности распределения?

Решение. Поскольку

$$w = \sum_{j=1}^{r} \frac{\left(\nu_j - 500\,\frac{1}{12}\right)^2}{41,67} = 10,00,$$

то, вычислив по таблицам χ^2 с 11 степенями свободы

$$P(\chi_{11}^2 \geq 10,00) = 0,53039,$$

приходим к выводу, что если гипотеза H_0 верна, то это событие происходит в среднем в 53 случаях из 100. Сравнивая значение статистики критерия с 24,7 – критической точкой уровня β=0,01 распределения χ_{11}^2, мы приходим к выводу, что данные не противоречат гипотезе о равномерном распределении. Гипотезу H_0 следует принять.

Пример 2.6

В автобусном парке ежедневно регистрировалось число автобусов, сошедших с линии в течение рабочего дня из-за поломок в пути. В табл. 2.2 записаны результаты n=200 наблюдений. С помощью критерия H_0 проверить гипотезу о том, что случайная величина ξ, равная числу автобусов, вышедших из строя в течение рабочего дня, распределена по закону Пуассона.

Таблица 2.2

i	0	1	2	3	4	5	≥ 6
n_i	70	78	34	13	4	1	0

Решение. Находим выборочное среднее

$$\overline{x} = {}^{206}\!/_{200} = 1{,}03 \approx 1 -$$

среднее число выходящих из строя автобусов за рабочий день. Получаем оценку параметра распределения Пуассона $\lambda = \overline{x} = 1$.

Вычисляем вероятности $p_i = \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}$:

$p_0 = p_1 = 0{,}368, p_2 = 0{,}184, p_3 = 0{,}061, p_4 = 0{,}015, p_5 = 0{,}003.$

Разбиваем на интервалы Δ_i следующим образом:

Таблица 2.3

i	n_i	p_i
0	70	0,386
1	78	0,368
2	34	0,184
≥ 3	18	0,080

Вычисляем w=0,90. Оценен один параметр λ, поэтому число степеней свободы $r = 4 - 1 - 1 = 2$. Берем $\beta = 0{,}95$. По таблице находим $\chi^2_{0,95}(2) = 5{,}99$. Так как $0{,}9 < 5{,}99$, то с коэффициентом доверия $\beta = 0{,}95$ гипотеза H_0 принимается.

Задачи

2.15. Пусть $x_1, \ldots, x_n$– независимая нормально распределенная выборка с неизвестными $M\xi=a$ и $D\xi=\sigma^2$, а $C=(c_{ij})$, $1 \leq i, j \leq n$ – ортогональная матрица, для которой $c_{n1}= c_{n2}=\ldots= c_{nn}=\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Доказать:

а) $M(y_k y_l) = \sigma^2\delta_{kl}$, где $y_k = \sum_{i=1}^{n} c_{ki}\,(x_i - a)$;

б) $\sum_{k=1}^{n} y_k^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2$;

в) $ns^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \sum_{k=1}^{n-1} y_k^2$.

2.16. Имеется выборка объема 8 из совокупности нормально распределенных величин с параметрами $\theta_1=a$, $\theta_2=\sigma^2$:

2,4,2,6,4,8,4,10 (2.1)

Построить доверительный интервал:

а) для θ_1 с уровнем доверия β=0,9, если σ^2=4;

б) для θ_1 с уровнем доверия β=0,95, если θ_2 неизвестно;

в) для $\theta_2 = \sigma^2$ с уровнем доверия β=0,9, если a=5;

г) для $\theta_2 = \sigma^2$ с уровнем доверия β=0,95, если θ_1 неизвестно.

2.17. Для выборки (2.1) построить эмпирическую функцию распределения. Найти оценку $M\xi$ и $D\xi$.

2.18. Дана выборка:

03 99 11 04 61 93 71 68 94 08 32 46 53 84 60 95

82 32 88 61 81 91 61 38 55 59 55 54 32 88 80 08

35 56 60 04 73 54 77 62 71 29 92 38 53 17 29 13

Проверить гипотезу о равномерном распределении с помощью критерия χ^2.

2.19. Доказать, что эмпирическая функция распределения является несмещенной и состоятельной оценкой функции распределения.

2.20. Доказать, что сумма двух независимых, распределенных по нормальному закону случайных величин, распределена нормально.

2.21. Доказать, что сумма двух независимых, распределенных по закону χ^2 распределений, распределена также по закону χ^2, причем число степеней свободы складывается.

2.22. При $n = 4040$ бросаниях монеты Бюффон получил h_1=1992 выпадения «решетки» и h_2=2048 выпадений «герба». Требуется проверить совместимость этих данных с гипотезой о том, что монета является симметричной, т.е. вероятности выпадения «герба» и «решетки» равны:

$$p_1 = p = \frac{1}{2};\ p_2 = q = 1 - p = \frac{1}{2}, \beta = 0{,}95.$$

2.23. Построить доверительный интервал для разности математических ожиданий двух нормально распределенных случайных величин ξ: $N(a_1, \sigma_1^2)$, η: $N(a_2, \sigma_2^2)$ с неизвестными математическими ожиданиями a_1, a_2 и известными дисперсиями σ_1^2, σ_2^2 по выборкам

ξ: $x_1, \ldots, x_m$,

η: $y_1, \ldots, y_n$.

2.24. Та же задача, что и 2.23, неизвестные a_1, a_2, также выполнено $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$.

Ответы и указания к решению задач

2.1. Оценки $\overline{x}$ и s_0^2 – несмещенные, а s_1^2 смещена.

2.3.

$$t(\vec{x}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln\frac{1}{x_i}.$$

2.9.

$$\lambda = \overline{x}, \qquad \overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

2.10. $\hat{p} = \frac{k}{n}$,

k – число успехов в серии из n испытаний.

$\mathbf{2.11}.\ \hat{C} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu).$

$\mathbf{2.12}.\hat{p} = \frac{1}{nN}\sum_{i=1}^{n}k_i,$

k_i – число успехов в i-м испытании, i=1,…,n.

$\mathbf{2.13}.\tilde{\lambda}_1 = m_1 - \sqrt{m_2 - m_1 + {m_1}^2},$

$\tilde{\lambda}_2 = m_1 + \sqrt{m_2 - m_1 + {m_1}^2}.$

$\mathbf{2.14}.\widehat{\alpha} = \frac{p}{\overline{x}}\ \ ,\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i.$

$\mathbf{2.23}.$

$$P\left((\overline{x} - \overline{y}) - \beta\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}} < a_1 - a_2 < (\overline{x} - \overline{y}) + \beta\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}}\right) =$$

$= \Phi(\beta),$

где $\overline{x} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}x_i\ ,\qquad \overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}y_j.$

2.24. *Указание:* Величина

$$t = \frac{\frac{(\overline{x} - \overline{y})}{\sigma\sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}}}{\sqrt{\frac{1}{m+n-2}\left(\frac{m-1}{\sigma^2} S_{0x}^2 + \frac{n-1}{\sigma^2} S_{0y}^2\right)}}$$

имеет распределение Стьюдента с $(m + n - 2)$ степенями свободы.

Глава 3. Метод Монте-Карло

Метод Монте-Карло – это численный
метод решения математических задач при
помощи моделирования случайных величин.

И.М. Соболь

3.1. Моделирование случайных величин

Моделирование случайной величины ξ со строго монотонной функцией распределения $F(\xi)$ осуществляется методом обратных функций. Величина ξ есть корень уравнения

$$F(\xi) = \gamma,$$

где γ – равномерно распределенная на интервале (0,1) случайная величина.

Метод суперпозиции моделирования случайной величины ξ с функцией распределения

$$F(x) = \sum_{i=1}^{m} c_i F_i(x),$$

где $c_i > 0, F_i(x)$ –функции распределения случайных величин $\xi_i, i = 1, \dots, m$,

$$\sum_{i=1}^{m} c_i = 1.$$

Тогда для моделирования используется алгоритм:

шаг 1 – моделирование дискретной случайной величины

$$\eta \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots m \\ c_1 & c_2 & \dots c_m \end{pmatrix},$$

по значению $\gamma_1 \in (0,1)$ равномерно распределенной случайной величины находим номер $k, k = 1, \dots, m$;

шаг 2 – моделирование случайной величины ξ методом обратных функций

$$F_k(\xi) = \gamma_2, \xi = F_k^{-1}(\gamma_2) = G_k(\gamma_2),$$

где $G_k(\gamma_2)$ −обратная функция к $F_k(x)$.

Моделирование многомерных случайных величин с независимыми компонентами сводится к многократному применению метода обратных функций.

Пусть $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ −случайная точка с независимыми координатами. Тогда функция распределения

$$F(x) = \prod_{i=1}^{3} F_i(x_i),$$

где $F_i(x_i), i = 1,2,3,$ −функция распределения случайной величины ξ_i. Положим $\gamma_i, i = 1,2,3,$ −совокупность независимых равномерно распределенных случайных величин в интервале (0,1). Рассмотрим систему уравнений для моделирования $\vec{\xi}$:

$$F_i(\xi_i) = \gamma_i, i = 1,2,3.$$

Из системы находим $\xi_i = F_i^{-1}(\gamma_i), i = 1,2,3,$ где $F_i^{-1}(\gamma_i)$ −обратная функция к $F_i(\xi_i)$.

В общем виде плотность распределения $\vec{\xi}$ может быть представлена в виде

$$p(x_1, x_2, x_3) = p_1(x_1)p_2(x_2/x_1)p_3(x_3/x_1, x_2),$$

где $p_1(x_1)$ −плотность распределения ξ_1, $p_2(x_2/x_1)$ −условная плотность распределения ξ_2 при условии $\xi_1 = x_1$, $p_3(x_3/x_1, x_2)$ −условная плотность распределения ξ_3 при условии $\xi_1 = x_1$, $\xi_2 = x_2$. Для моделирования $\vec{\xi}$ используется система уравнений

$$F_1(\xi_1) = \int_{-\infty}^{\xi_1} p_1(t)dt = \gamma_1;$$

$$F_2(\xi_2/\xi_1 = x_1) = \int_{-\infty}^{\xi_2} p_2(t/x_1)dt = \gamma_2;$$

$$F_3(\xi_3/\xi_1 = x_1, \xi_2 = x_2) = \int_{-\infty}^{\xi_3} p_3(t/x_1, x_2)dt = \gamma_3,$$

где $\gamma_i, i = 1,2,3$ равномерно распределены на $(0,1)$.

<u>Примеры решения типовых задач</u>

Пример 3.1. Пусть $\xi > 0$ − случайная величина, распределенная по показательному закону распределения с плотностью $p(x) = ae^{-ax}, x \geq 0$, параметр $a > 0$.

Найти закон моделирования случайной величины ξ.

Решение. В силу строгой монотонности функции распределения $F(x) = 1 - ae^{-ax}, x \geq 0$, применяем метод обратных функций

$$1 - ae^{-ax} = \gamma, \qquad \xi = -\frac{1}{a}\ln\gamma,$$

поскольку γ и $(1 - \gamma)$ имеют одно и то же равномерное распределение на интервале (0,1).

Ответ: $\xi = -\frac{1}{a}\ln\gamma$.

Пример 3.2. Пусть функция распределения случайной величины ξ имеет вид

$$F(x) = \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{4}x^5, \qquad x \in (0,1).$$

Пользуясь методом суперпозиций, дать алгоритм для моделирования случайной величины ξ.

Решение. В данной задаче *шаг 1* сводится к моделированию дискретной случайной величины

$$\eta \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix},$$

где $c_1 = \frac{3}{4}$, $c_2 = \frac{1}{4}$.

Для *шага 2* имеем функции распределения ξ_1 и ξ_2:

$F_1(x_1) = x^2$, $F_2(x_2) = x^5$.

Применяя метод обратных функций имеем уравнения

$$\xi_1^2 = \gamma_1, \qquad \xi_2^5 = \gamma_2,$$

γ_1, γ_2 – равномерно распределенные на (0,1) случайные числа.

Ответ:

если $\gamma_1 < \frac{3}{4}$, то $\xi = \sqrt{\gamma_2}$,

если $\gamma_1 > \frac{3}{4}$, то $\xi = \sqrt[5]{\gamma_2}$.

Пример 3.3. Пусть задан параллелепипед

$$D = \{\vec{x}\colon\ 0 < x_1 < 1, \qquad 1 < x_2 < 2,\ \ 2 < x_3 < 10\}.$$

Случайная точка $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ равномерно распределена в *D*. Найти формулы моделирования $\vec{\xi}$.

Решение. Случайная точка $\vec{\xi}$ равномерно распределена в *D*, т.е. плотность распределения

$$p(\vec{x}) = \begin{cases} \dfrac{1}{V_D}, \text{если } \vec{x} \in D, \\ 0, \text{если } \vec{x} \notin D, \end{cases}$$

где V_D − объем области *D*.

Имеем

$$p_1(x_1) = \begin{cases} 1, & x_1 \in (0, 1), \\ 0, & x_1 \notin (0, 1), \end{cases}$$

$$p_2(x_2) = \begin{cases} 1, & x_2 \in (1, 2), \\ 0, & x_2 \notin (1, 2), \end{cases}$$

$$p_3(x_3) = \begin{cases} \dfrac{1}{8}, & x_3 \in (2, 10), \\ 0, & x_3 \notin (2, 10). \end{cases}$$

Метод обратных функций для разыгрывания ξ_i, $i = 1, 2, 3$ дает
$\xi_1 = \gamma_1$,
$\xi_2 = 1 + \gamma_2$,
$\xi_3 = 2 + 8\gamma_3$,
где γ_i $(i = 1, 2, 3)$ равномерно распределены в интервале (0, 1).

Ответ: $\xi_1 = \gamma_1$, $\xi_2 = 1 + \gamma_2$, $\xi_3 = 2 + 8\gamma_3$.

Пример 3.4. Случайная точка (ξ, η) равномерно распределена в треугольнике, ограниченном отрезком прямой $y = b(1 - x)$, $b > 0$, и осями координат (рис. 3.1). Найти формулы для разыгрывания ξ и η.

Решение. Плотность точки (ξ,η) равна

$$p(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{S_\Delta}=\dfrac{2}{b}, & (x,y)\in D,\\ 0, & (x,y)\notin D.\end{cases}$$

Здесь D – искомый треугольник.

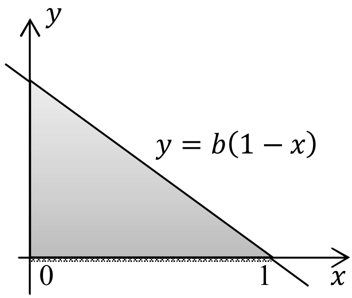

Рис. 3.1

Находим плотность координаты ξ:

$$p_1(x)=\int_0^{b(1-x)}p(x,y)\,dy=\begin{cases}2(1-x), & x\in(0,1);\\ 0, & x\notin(0,1).\end{cases}$$

Вычисляем условную плотность

$$p_2(y|x)=\frac{p(x,y)}{p_1(x)}=\frac{1}{b(1-x)},\ \ 0<y<b(1-x).$$

Находим формулы для разыгрывания ξ и η:

$$F_1(\xi)=\int_0^{\xi}p_1(t)\,dt=\int_0^{\xi}2(1-t)\,dt=2\left(\xi-\frac{\xi^2}{2}\right),\ \ \xi\in(0,1)\,;$$

$$F_2(\eta|\xi)=\int_0^{\eta}\frac{1}{b(1-\xi)}dt=\frac{\eta}{b(1-\xi)}\ ,\ \ 0<\eta<b(1-\xi).$$

Составляем уравнения

$$2\left(\xi-\frac{\xi^2}{2}\right)=\gamma_1,\qquad \frac{\eta}{b(1-\xi)}=\gamma_2.$$

Из последних уравнений получаем формулы для моделирования
$\xi=1-\sqrt{\gamma_1}$, (корень $\xi=1+\sqrt{\gamma_1}$не подходит),
$\eta=b(1-\xi)\gamma_2=b\sqrt{\gamma_1}\gamma_2$,
γ_1,γ_2 равномерно распределены в (0, 1).

Отметим, что второй способ решения получим, если представим плотность в виде

$$p(x,y)=\widetilde{p_1}(y)\cdot\widetilde{p_2}(x|y).$$

В данном примере для получения окончательного ответа уравнения более сложные.

Ответ:$\xi=1-\sqrt{\gamma_1},\eta=b\sqrt{\gamma_1}\gamma_2$.

Задачи

3.1. Доказать, что если ζ – случайное число из (0,1), то

$$\zeta = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k \, 10^{-k}, \tag{3.1}$$

ε_k – независимые случайные цифры, а также обратное утверждение: если $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k, \ldots$ - независимые случайные цифры, то формула (3.1) определяет случайное число.

3.2. Найти формулы для моделирования случайной величины ξ с плотностью распределения $p(x) = nx^{n-1}, n \geq 1, 0 < x < 1$.

3.3. Найти формулы для моделирования случайной величины с плотностью распределения $p(x) = \frac{ae^{-ax}}{1-e^{-a}}, a > 0, 0 < x < 1$.

3.4. Найти формулы для моделирования случайной величины с функцией распределения $F(x) = 1 - \frac{1}{3}(2e^{-x} + e^{-5x}), x > 0$.

3.5. Вывести формулы для расчета двумерной случайной величины в кольце $R_1^2 < \xi^2 + \eta^2 < R_2^2$.

3.6. Вывести формулы для моделирования случайной величины (ξ, η) с плотностью $p(x, y) = 3y$ в треугольнике, ограниченном прямыми $x = 0, y = x, y = 1$.

3.7. Докажите, что для моделирования случайной величины с плотностью распределения $p(x_1, x_2, x_3) = p_1(x_1) \cdot p_2(x_2/\xi_1 = x_1) \cdot p_3(x_3/\xi_1 = x_1, \xi_2 = x_2)$ достаточно решения уравнений $F_1(\xi_1) = \gamma_1$, $F_2(\xi_2/\xi_1 = x_1) = \gamma_2$, $F_3(\xi_3/\xi_1 = x_1, \xi_2 = x_2) = \gamma_3$, γ_1, γ_2, γ_3 – независимые равномерно распределенные случайные величины на (0,1).

3.8. Используя ЦПТ, получить формулы для моделирования нормального распределения с помощью последовательности γ_i – равномерно распределенных случайных величин на (0,1).

3.9. Вывести формулы для моделирования нормальной случайной величины, используя двумерное нормальное распределение с независимыми компонентами и переход к полярным координатам.

3.10. Найти формулы для моделирования случайной величины с плотностью

$$p(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & -1 < x < 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

3.11. Вывести расчетные формулы для вычисления интеграла $I = \iiint f(x, y, z) dxdydz$, $G = \{x^2 + y^2 < z < 2\}$. Привести оценку дисперсии.

3.12. Привести оценку с конечной дисперсией для вычисления интеграла $I = \int_0^\infty x^{-\frac{5}{2}} f(x) dx$ в случае, когда $f(x) \to x$ при $x \to \infty$, $f(x) \to x^2$ при $x \to 0$.

3.13. Обосновать метод суперпозиции.

3.2. Вычисление определенного интеграла методом Монте-Карло

Для простоты изложен метод вычисления в одномерном случае. Рассмотрим функцию $g(x)$, $a < x < b$. Требуется приближенно вычислить интеграл

$$J = \int_a^b g(x)\, dx$$

(если интеграл несобственный, то предполагается, что он сходится абсолютно).

Выберем произвольную плотность распределения $p(x)$, определенную на (a, b). Рассмотрим случайную величину

$$\eta = \frac{g(\xi)}{p(\xi)}.$$

Имеем

$$M\eta = \int_a^b \frac{g(x)}{p(x)} p(x)\, dx = J.$$

Рассмотрим N одинаковых независимых случайных величин $\eta_1, \dots, \eta_N$ и применим ЦПТ. В этом случае получаем

$$P\left(\left|\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\eta_i - J\right| < 3\sqrt{\frac{D\eta}{N}}\right) \simeq 0{,}997.$$

Последнее соотношение означает, что с вероятностью 0,997 погрешность вычисления

$$\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{g(\xi_i)}{p(\xi_i)} \approx J$$

не превосходит $3\sqrt{\frac{D\eta}{N}}$ для выбранных $\xi_1, \ldots, \xi_N$, распределенных с плотностью $p(x)$.

Примеры решения типовых задач

Пример 3.5

Вычислить интеграл

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx\,.$$

Точное значение этого интеграла равно

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = -\cos x \Big|_0^{\pi/2} = 1.$$

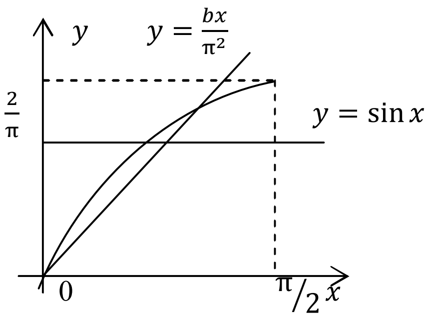

Рис.3.2

Рассмотрим два способа вычисления интеграла.

Способ 1. Пусть $p_1(x) = {}^2/_\pi$. Формула для разыгрывания ξ в этом случае $\xi = \frac{\pi}{2}\gamma$. Приближенное значение интеграла равно

$$J \approx \frac{\pi}{2N} \sum_{j=1}^{N} \sin \xi_i \ .$$

При $N = 10$ получаем $J \approx 0{,}952$, $D\eta \approx 0{,}256$.

Способ 2. Пусть $p_2(x) = {}^{8x}/_{\pi^2}$. Для разыгрывания ξ имеем уравнение $\xi = \frac{\pi}{2}\sqrt{\gamma}$. Находим

$$J \approx \frac{\pi^2}{8N} \sum_{j=1}^{N} \frac{\sin \xi_i}{\xi_i} \ .$$

При $N = 10$ имеем $J \approx 1{,}016$, $D\eta \approx 0{,}016$.

Способ 2 дает лучший результат, так как плотность $p_2(x)$ «ближе» к искомой функции, чем плотность $p_1(x)$ (рис. 3.2).

Задачи

Следует:

1) вычислить численно интеграл с точностью 10^{-3}, пользуясь традиционными методами;
2) вычислить интеграл методом Монте-Карло двумя способами при $N = 100$;
3) указать точность вычислений п. 2);
4) сделать выводы (какой из двух методов является лучшим и почему; можно ли улучшить результаты).

3.14. $J = \int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx.$

3.15. $J = \int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}} dx.$

3.16. $J = \int\limits_{-1}^{1} \sqrt[3]{1 - x^2}\, dx.$

3.19. $J = \int\limits_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx.$

3.20. $J = \int\limits_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx.$

3.21. $J = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx.$

3.17. $J = \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx.$ 3.22. $J = \int_0^1 \sin(x^2)\, dx.$

3.18. $J = \int_0^1 x \ln x dx\,.$ 3.23. $J = \int_0^1 \cos\,(x^2)\, dx.$

3.3. Создание некоторых математических моделей и решение задач методом Монте-Карло в физике и экономике

Рассмотрим простейшие модели.

Пример 3.6

Расчет прохождения нейтронов сквозь пластину.

Пусть на однородную бесконечную пластину $0 \leqslant x \leqslant h$ падает поток нейтронов с энергией E_0. Угол падения равен 90°. Предположим для простоты, что энергия нейтрона при рассеянии не меняется, и любое направление «отскока» нейтрона от ядра равновероятно.

Возможны случаи, представленные на рис. 3.3, где нейтрон

а) проходит сквозь пластину;
б) поглощается;
в) отражается.

Требуется определить:

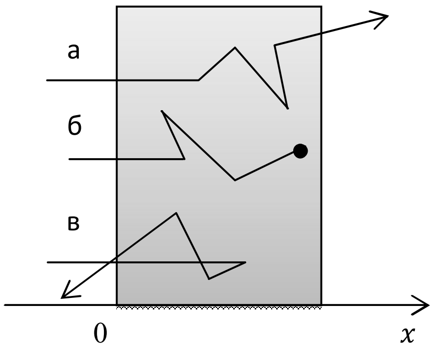

Рис3.3

p^+ – вероятность прохождения нейтрона сквозь пластину;

p^- – вероятность отражения нейтрона пластиной;

p_0 – вероятность поглощения нейтрона внутри пластины.

При моделировании используются следующие случайные величины:

1) λ – длина свободного пробега нейтрона – случайная величина с плотностью $p(x) = \Sigma \exp(-\Sigma x)$, $x \geqslant 0$, $\Sigma > 0$ – сечение рассеяния; формула для разыгрывания

$$\lambda = -\frac{1}{\Sigma}\ln(\gamma_1);$$

2) направление μ движения нейтрона после рассеяния – так как направление равновероятно, то $\mu = 2\gamma_2 - 1$, $\mu = \cos\varphi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$;

3) при столкновении с ядром происходит поглощение с вероятностью $p_1 = \Sigma_c/\Sigma$ или рассеяние с вероятностью $p_2 = \Sigma_s/\Sigma$ - моделируется дискретная случайная величина с законом распределения

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ p_1 & p_2 \end{pmatrix}:$$

если $0 < \gamma_3 < p_1$, то поглощение,

если $\gamma_3 > p_1$, то рассеяние.

Здесь γ_1, γ_2, γ_3 – равномерно распределенные на $(0,1)$ случайные числа.

Начальные значения при моделировании $x_0 = 0$, $\mu_0 = 1$. Пусть нейтрон испытал k-е рассеяние внутри пластины в точке x_k и начал двигаться в направлении μ_k – разыгрываем μ_k. Длина свободного пробега разыгрывается по формуле

$$\lambda_k = -\frac{1}{\Sigma}\ln(\gamma_k),$$

и вычисляется $x_{k+1} = x_k + \lambda_k \cdot \mu_k$.

Если $x_{k+1} > h$, то добавляем «1» к счетчику прошедших частиц, если $x_{k+1} < 0$, то добавляем «1» к счетчику отраженных частиц. Если же $0 \leqslant x_{k+1} \leqslant h$, то после k столкновения нейтрон остался внутри пластины, и надо разыгрывать его «судьбу» при столкновении –

рассеяние или поглощение (см. п. 3 розыгрыша дискретной случайной величины). Если очередное $\gamma < p_1$, то счет траекторий заканчивается, и добавляем «1» к счетчику поглощенных частиц. Если $\gamma \geqslant p_1$, то считаем, что нейтрон испытал рассеяние в точке x_{k+1} и повторяем весь цикл снова.

Если разыграны N частиц, из которых N^+ прошли сквозь пластину, N^- отразились, N^0 поглотились ($N^+ + N^- + N^0 = N$), то вычисляем $\hat{p}^+ = \frac{N^+}{N}, \hat{p}^- = \frac{N^-}{N}, \hat{p}^0 = \frac{N^0}{N}$.

Пример 3.7

Расчет системы массового обслуживания (общая схема).

Система состоит из n линий (или каналов, или пунктов обслуживания), каждый из которых может обслужить потребителей. В систему поступают заявки, причем моменты их поступления случайны – промежуток времени τ между двумя последовательными заявками имеет распределение Пуассона (простейший поток) с плотностью

$$p(x) = ae^{-ax}, \;\; x \geqslant 0, \;\; a > 0.$$

Каждая заявка поступает на линию 1. Если в момент поступления k-й заявки (T_k) эта линия свободна, то она приступает к обслуживанию заявки, что продолжается в течение $t_з$ (время занятости линии). Если в момент t_k линия 1 занята, то заявка передается на линию 2 и т.д. Наконец, если все n линий заняты, то система выдает отказ. Требуется определить, сколько в среднем заявок обслужит система за время T и сколько отказов она выдает.

Решение (схема расчета). Пусть i – линия, τ_i – момент ее освобождения, $T_1 = 0$ – момент поступления первой заявки. Можно считать, что $t_i = T_1$(все линии свободны).

Первая заявка поступает на линию 1. Следовательно, в течение $t_з$ линия 1 занята. Заменяем t_1 на $t_1 + t_з = t_{1\,\text{нов}}$, добавляем «1» к счетчику выполненных заявок. Переходим ко второй заявке и т.д.

Предположим, что k заявок рассмотрено. Тогда надо разыграть момент поступления ($k + 1$) заявки. Для этого выбираем следующее γ и по формуле

$$\tau = -\frac{1}{a}\ln(\gamma)$$

находим соответствующее $\tau = \tau_k$. Затем вычисляем момент поступления заявки $T_{k+1} = T_k + \tau_k$.

Свободна ли линия 1? Проверяем условие $t_1 \leqslant T_{k+1}$. Если условие выполнено, то к моменту T_{k+1} линия 1 свободна и может обслужить эту заявку. Мы должны заменить t_1 на $T_k + t_з$, добавить «1» к счетчику выполненных заявок и перейти к следующей заявке.

Если условие $t_1 \leqslant T_{k+1}$ не выполнено, то это значит, что линия 1 в момент T_{k+1}занята. Тогда проверяем, свободна ли линия 2 и т.д. до линии n. Если $t_i > T_{k+1}$, $i = 1, \ldots, n$, то в момент T_{k+1} все линии заняты и надо добавить «1» в счетчик отказов. Затем рассматриваем следующую заявку при выполнении условия $T_{k+1} < T_{кон}$. Если $T_{k+1} \geqslant T_{кон}$, то опыт закончен и в счетчике выполненных заявок будет стоять $\mu_{вып}$, а в счетчике отказов $\mu_{отк}$.

Такой опыт повторяется N раз и вычисляется

$$M\mu_{вып} \simeq \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \mu_{вып}(i),$$

$$M\mu_{отк} \simeq \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \mu_{отк}(i),$$

где $\mu_{вып}(i)$, $\mu_{отк}(i)$ – число выполненных заявок и отказов в i-м опыте.

Задачи

3.24. Указать схему расчета в примере 3.6, когда пластина состоит из двух разных материалов $0 < h_1 < h_2$, $0 \leqslant x \leqslant h_2$.

3.25. Указать схему расчета в примере 3.6, когда пластина трёхмерная.

3.26. Указать схему расчета в примере 3.7, когда $t_з$ – случайная величина, распределенная равномерно в (0, α), α > 0.

3.27. Указать схему расчета в примере 3.7, когда рассматриваются системы с ожиданием (или очередью).

3.28. Указать схему расчета в примере 3.7, когда заявки принимает та линия, которая раньше освободится.

3.29. Указать схему расчета в примере 3.7, когда возможен случайный выход из строя линии (поломка).

3.30. Рассмотреть в качестве системы массового обслуживания работу касс в супермаркете, предполагая:

магазин работает круглосуточно, но покупатели (заявки) поступают с разной интенсивностью в течение суток:

$$p_1(x) = a_1 e^{-a_1 x},\ \ x \geqslant 0,\ \ a_1 > 0,\ \ 0 \leqslant t \leqslant T_1,$$
$$p_2(x) = a_2 e^{-a_2 x},\ \ x \geqslant 0,\ \ a_2 > 0,\ \ 0 \leqslant t \leqslant T_2;$$

покупатель выбирает кассу (линию) с наименьшей очередью.

3.31. Рассмотреть в качестве системы массового обслуживания работу «скорой помощи», где отказы отсутствуют, но имеется две бригады врачей для больных 1-й и 2-й категорий.

3.32. Рассмотреть работу по обслуживанию клиентов в кафе с ограничением на длину очереди.

Ответы и указания к решению задач

3.2. $\xi = \gamma^{\frac{1}{n+1}}$, $\gamma\ p.p.(0,1)$, $n \geqslant 1$.

3.3. $\xi = -\frac{1}{a}\ln[1-\gamma(1-e^{-a})]$, $\gamma\ p.p.(0,1)$.

3.4. γ_1, $\gamma_2 p.p.(0,1)$,

$$\xi = \begin{cases} -\ln(1-\gamma_2), & \text{если } \gamma_1 \leqslant \frac{2}{3}, \\ -\frac{1}{5}\ln(1-\gamma_2), & \text{если } \gamma_1 > \frac{2}{3}, \end{cases}$$

Указание:

$$F(x) = \frac{2}{3}(1-e^{-x}) + \frac{1}{3}(1-e^{-5x}).$$

3.5. $r = \sqrt{{R_1}^2 + \gamma_1({R_2}^2 - {R_1}^2)}$,

$\varphi = 2\pi\,\gamma_2$, где γ_1, $\gamma_2 p.p.(0,1)$.

3.6. $\eta = \sqrt[3]{\gamma_1}$,

$\xi = \eta \cdot \gamma_2$, $\quad \gamma_1$, $\gamma_2 p.p.(0,1)$.

3.10.

$$\xi = \begin{cases} -1 + \sqrt{2\gamma}, & \text{если } \gamma < \dfrac{1}{2}, \\ 1 + \sqrt{2(1-\gamma)}, & \text{если } \gamma > \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

3.12.

Указание:

$$p(x) = \begin{cases} C_1 x^{-\frac{1}{2}}, & 0 < x < 1, \\ C_2 x^{-\frac{1}{2}}, & x > 1\ ; \end{cases}$$

$C_1 > 0,\ \ C_2 > 0.$

Глава 4. Теория случайных функций

Советскими исследователями (А.Я.Хинчин, А.Н.Колмогоров и др.) создаются основы теории «случайных» или вероятностных процессов и дается окончательная форма аксиоматического изложения теории вероятностей, исходящая из усмотренных впервые Борелем аналогий между понятием вероятности и понятием меры в теории функций действительного переменного.

А.Н. Колмогоров

4.1. Основные понятия теории случайных функций

Введем следующие обозначения:

$\xi(t), t \geq 0$ – случайная функция;

$x(t)$ – реализация случайной функции;

$\xi(t_j)$ – сечение случайной функции при $t = t_j$;

$m_\xi(t) = M[\xi(t)]$ – математическое ожидание случайной функции;

$K_\xi(t, t') = M[\xi^0(t)\xi^0(t')]$, где $\xi^0(t) = \xi(t) - m(t)$ – корреляционная функция;

$D_\xi(t) = K(t, t)$ – дисперсия случайной функции;

$\sigma_\xi(t) = \sqrt{D(t)}$ – среднее квадратическое отклонение случайной функции;

$R_{\xi\eta}(t, t') = M[\xi^0(t)\eta^0(t')]$ – корреляционная функция связи случайных функций $\xi(t)$ и $\eta(t)$.

<u>Примеры решения типовых задач</u>

Пример 4.1

Задана случайная функция $\xi(t) = Ut + b, t \geq 0, b = \text{const}, U -$ случайная величина, распределенная по показательному закону. Определить плотность сечения $\xi(t), t > 0,\ m_\xi(t),\ K_\xi(t, t'),\ D_\xi(t)$.

Решение. Имеем плотность распределения случайной величины $U\ \ p_U(u) = ae^{-au}, u \geq 0, a > 0 -$ параметр. Для функции распределения случайной функции в сечении *t* находим

$$F(x) = P(\xi(t) < x) = P(Ut + b < x) = P\left(U < \frac{x - b}{t}\right) = F_U\left(\frac{x - b}{t}\right).$$

Отсюда вычисляем плотность сечения $\xi(t)$ в момент времени $t > 0$:

$$p(x) = p_U\left(\frac{x - b}{t}\right)\frac{1}{t} = \frac{a}{t}e^{-\frac{a}{t}(x-b)},$$

т.е. получаем также показательное распределение с параметром $\frac{a}{t} > 0$.

Вычисляем величины $m_\xi(t),\ K_\xi(t, t'),\ D_\xi(t)$:

$$m_\xi(t) = M[Ut + b] = \frac{t}{a} + b;$$

$$K_\xi(t, t') = M\left[\left(Ut - \frac{t}{a}\right)\left(Ut' - \frac{t'}{a}\right)\right] = tt'M\left[\left(U - \frac{1}{a}\right)^2\right] = \frac{tt'}{a^2};$$

$$D_\xi(t) = \frac{t^2}{a^2}.$$

Ответ: $p(x) = \frac{a}{t} e^{-\frac{a}{t}(x-b)}, m_\xi(t) = \frac{t}{a} + b,$

$K_\xi(t, t') = \dfrac{tt'}{a^2}, D_\xi(t) = \dfrac{t^2}{a^2}.$

Пример 4.2

Случайная функция задана в виде

$$\xi(t) = \varphi(t) + \sum_{k=1}^{n} U_k \varphi_k(t),$$

где $\varphi(t), \varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$ – неслучайные функции, $U_1, \dots, U_n$ – центрированные некоррелированные случайные величины,

$D(U_k) = D_k, k = 1, \dots, n$. Вычислить

$m_\xi(t),\ K_\xi(t, t'), \sigma_\xi(t).$

Вычислить числовые характеристики случайной функции $\eta(t) = \frac{d\xi(t)}{dt}$.

Решение. Находим характеристики случайной функции $\xi(t)$:

$m_\xi(t) = \varphi(t),$

$$K_\xi(t, t') = M\left[\left(\sum_{k=1}^{n} U_k \varphi_k(t)\right)\left(\sum_{l=1}^{n} U_l \varphi_l(t')\right)\right] =$$

$$= \sum_{k,l=1}^{n} \varphi_k(t)\, \varphi_l(t') M[U_k U_l] = \sum_{k=1}^{n} D_k\, \varphi_k(t) \varphi_k(t'),$$

$$D_\xi(t) = \sum_{k=1}^{n} D_k\, {\varphi_k}^2(t).$$

Для случайной функции $\eta(t)$ получаем

$$m_\eta(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt},$$

$$K_\eta(t,t') = \sum_{k=1}^{n} D_k \frac{d\varphi_k(t)}{dt}\frac{d\varphi_k(t')}{dt'},$$

$$D_\eta(t) = \sum_{k=1}^{n} D_k \left[\frac{d\varphi_k(t)}{dt}\right]^2.$$

Ответ:

$$m_\xi(t) = \varphi(t), K_\xi(t,t') = \sum_{k=1}^{n} D_k\, \varphi_k(t)\varphi_k(t'), D_\xi(t) = \sum_{k=1}^{n} D_k\, \varphi_k{}^2(t),$$

$$m_\eta(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt}, K_\eta(t,t') = \sum_{k=1}^{n} D_k \frac{d\varphi_k(t)}{dt}\frac{d\varphi_k(t')}{dt'},$$

$$D_\eta(t) = \sum_{k=1}^{n} D_k \left[\frac{d\varphi_k(t)}{dt}\right]^2.$$

<u>Задачи</u>

4.1. Задана случайная функция $\xi(t) = Ut + b, t \geq 0, b = \text{const}$, $U -$ случайная величина, распределенная по нормальному закону с параметрами $M(U) = a, D(U) = \sigma^2$. Определить плотность сечения $K(t,t'), m(t), D(t)$.

4.2. Дана случайная функция

$$\xi(t) = a + \sum_{k=1}^{n} U_k e^{-\alpha_k t},$$

где $a, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ — постоянные, а $U_1, \dots, U_n$ — удовлетворяют условиям $M(U_k) = 0, D(U_k) = \sigma_k{}^2, M[U_k U_l] = 0, k \neq l$. Найти $\xi(t), t \geq 0$,

$m(t), \sigma^2(t)$.

4.3. Некоррелированные случайные функции $\xi(t)$ и $\eta(t)$ обладают числовыми характеристиками: $m_\xi(t) = t,\ K_\xi(t, t') = tt'$,
$m_\eta(t) = -t, K_\eta(t, t') = tt' e^{-\alpha(t-t')}$.

Найти математическое ожидание, корреляционную функцию и дисперсию случайной функции $\zeta(t) = \xi(t) + \eta(t)$.

4.4. Задана случайная функция $\xi(t) = U\cos(\omega t)$, где ω – постоянная, U – случайная величина, причем $M(U) = 2, \sigma(U) = 3$. Найти числовые характеристики случайных функций $\xi(t)$ и $\eta(t) = \xi(t) + A\frac{d\xi(t)}{dt}, A = \text{const}$.

4.5. На вход динамической системы поступает случайная функция $\xi(t)$, сечение которой в любой момент $t > 0$ распределено нормально с параметрами $M\xi(t) = 0, D\xi(t) = bt, b > 0$.

Найти математическое ожидание и дисперсию реакции $\eta(t)$, если

$$\eta(t) = \begin{cases} 1 \text{ при } \xi(t) > C, \\ 0 \text{ при } -C \leq \xi(t) \leq C, \\ -1 \text{ при } \xi(t) < -C, \end{cases}$$

где $C = \text{const} > 0$.

4.6. Случайная функция $\xi(t)$ с числовыми характеристиками $m(t) = 0$ и $K(t, t')$ подвергается преобразованию

$$\eta(t) = L[\xi(t)] + \varphi(t),$$

где L – линейный оператор, $\varphi(t)$ – заданная неслучайная функция. Найти корреляционную функцию связи $\xi(t)$ и $\eta(t)$.

4.7. Случайная функция $\xi(t)$ с числовыми характеристиками $m(t) = 0$ и $K(t, t') = 3e^{-(t+t')}$ подвергается преобразованию

$$\eta(t) = -t\frac{d\xi(t)}{dt} + \int_0^t \tau\xi(\tau)d\tau + \sin(\omega t).$$

Найти корреляционный момент величин $\xi(0)$ и $\eta(1)$.

4.2. Стационарные случайные функции

Для стационарной в «широком смысле» случайной функции имеем основные характеристики:

$m(t) = m_0 = \text{const};$

$k(\tau) = K(t, t'), \text{где } \tau = t' - t;$

$D(t) = k(0) = D = \text{const};$

$S(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} k(\tau)e^{-i\omega\tau}\,d\tau$ – спектральная плотность стационарной случайной функции;

$$k(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega)e^{i\omega\tau}\,d\omega.$$

Динамическая система описывается обыкновенным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами $a_0, a_1, \dots, a_n, b_0, b_1, \dots, b_m$, связывающим воздействие $\xi(t)$ с реакцией $\eta(t)$:

$$a_n\frac{d^n\eta(t)}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}\eta(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1\frac{d\eta(t)}{dt} + a_0\eta(t) =$$

$$= b_m \frac{d^m \xi(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1}\xi(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_1 \frac{d\xi(t)}{dt} + b_0 \xi(t).$$

Имеем характеристики случайной функции $\eta(t)$:

$$m_\eta = \frac{b_0}{a_0} m_\xi,$$

$$|\Phi(i\omega)|^2 = \frac{|B_m(i\omega)|^2}{|A_n(i\omega)|^2},$$

$B_m(i\omega) = b_m(i\omega)^m + \cdots + b_0, A_n(i\omega) = a_n(i\omega)^n + \cdots + a_0,$ – квадрат модуля частотной характеристики системы;

$S_\eta(\omega) = |\Phi(i\omega)|^2 S_\xi(\omega)$ – спектральная плотность $\eta(t)$;

$k_\eta(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_\eta(\omega) e^{i\omega\tau}\, d\omega$ – корреляционная функция $\eta(t)$;

$D_\eta = k_\eta(0)$ – дисперсия $\eta(t)$.

Пример 4.3

Стационарная случайная функция $\xi(t)$ имеет следующие характеристики: m_0, $k_\xi(\tau) = D_\xi e^{-\alpha|\tau|}$.

Динамическая система описывается уравнением

$$a_1 \frac{d\eta(t)}{dt} + a_0 \eta(t) = b_1 \frac{d\xi(t)}{dt} + b_0 \xi(t),$$

$a_1 = b_0 = 2, a_0 = b_1 = 1.$

Найти характеристики случайной функции $\eta(t)$: $m_\eta, k_\eta(\tau)$.

Решение. Имеем $m_\eta = 2m_0$.

Квадрат модуля частотной характеристики равен

$$|\Phi(i\omega)|^2 = \frac{4+\omega^2}{1+4\omega^2}.$$

Спектральная плотность

$$S_\eta(\omega) = \frac{D_\xi}{\pi}\frac{4+\omega^2}{1+4\omega^2}\frac{\alpha}{\alpha^2+\omega^2} = \frac{2D_\xi}{\pi}\frac{1}{1+4\omega^2}$$

при $\alpha = 2$, так как

$$S_\eta(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} D_\xi e^{-\alpha|\tau|} e^{-i\omega\tau}\,d\tau.$$

Отсюда находим

$$D_\eta = D_\xi,\ k_\eta(\tau) = Re\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2D_\xi}{\pi}\frac{1}{1+4\omega^2}e^{i\omega\tau}\,d\omega =$$

$$= Re\left\{\frac{2D_\xi}{\pi}\left[res\left(\frac{e^{i\omega\tau}}{1+4\omega^2}, \omega = \frac{i}{2}\right)\right]\right\} = D_\xi e^{\frac{-|\tau|}{2}} \text{ при } \tau > 0.$$

Следовательно,

$$k_\eta(\tau) = D_\xi e^{\frac{-|\tau|}{2}}.$$

Ответ: $m_\eta = 2m_0, k_\eta(\tau) = D_\xi e^{\frac{-|\tau|}{2}}$.

Задачи

4.8. Дана случайная величина

$$\xi(t) = at + U_1\cos(\omega t) + U_2\sin(\omega t),$$

где a и ω – постоянные, U_1, U_2 – центрированные некоррелированные случайные величины, обладающие дисперсией

$D(U_1) = D(U_2) = \sigma^2$.

Требуется найти $m_\xi(t)$, $K_\xi(t,t'), \sigma_\xi^2(t)$.

Стационарна ли случайная функция $\xi(t)$?

Стационарна ли центрированная случайная функция $\xi(t) - m_\xi(t)$?

4.9. Случайная функция $\xi(t)$ обладает числовыми характеристиками: $m_\xi(t) = 0$, $K_\xi(t,t') = [1 + (t' - t)^2]^{-1}$.

Найти числовые характеристики случайной функции

$$\eta(t) = \int_0^t \xi(x)\,dx.$$

Являются ли $\xi(t)$ и $\eta(t)$ стационарными случайными функциями?

4.10. Стационарная случайная функция $\xi(t)$ имеет спектральную плотность $S_\xi(\omega) = \frac{8}{\pi(1+\omega^2)}$.

Найти ее корреляционную функцию.

4.11. Найти спектральную плотность стационарной случайной функции $\xi(t)$, имеющей корреляционную функцию $K_\xi(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}\cos(\beta\tau)$.

4.12. Динамическая система описывается уравнением, связывающим воздействие $\xi(t)$ с реакцией $\eta(t)$:

$$\frac{d^2\eta(t)}{dt^2} + 6\frac{d\eta(t)}{dt} + 9\eta(t) = \xi(t).$$

Найти квадрат модуля частотной характеристики системы. Также найти спектральную плотность $S_\eta(\omega)$ реакции $\eta(t)$, если воздействие $\xi(t)$ стационарно и $k_\xi(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}$.

4.13. Найти дисперсию в момент $t > 0$ частного решения $\eta(t)$ дифференциального уравнения

$$\frac{d\eta(t)}{dt} + a \cdot \eta(t) = t \cdot \xi(t),$$

удовлетворяющего начальному условию $\eta(0) = 0$, если случайная функция $\xi(t)$ стационарна, $m_\xi(t) = 0$,

$$S_\xi(\omega) = \frac{\sigma^2}{\pi} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}, \quad \alpha > 0.$$

4.3. Цепи Маркова

Пусть случайная функция $\xi(t)$ рассматривается в моменты времени $t_0, t_1, \ldots, t_m$ и при каждом значении аргумента $t = t_k$ функция принимает одно из значений $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Обозначим через $p_i(t_k)$ вероятность того, что случайная функция $\xi(t)$ в момент времени t_k принимает значение x_i. Вектор $\vec{p}(t_k) = [p_0(t_k), \ldots, p_n(t_k)]$ называется вектором вероятностей состояний цепи Маркова в момент t_k. Очевидно,

$$\sum_{i=0}^{n} p_i(t_k) = 1.$$

Обозначим вероятность того, что цепь Маркова в момент t_k примет значение x_j при условии, что в момент t_{k-1} она приняла значение x_i, через $p_{ij}(t_{k-1}, t_k)$ – вероятность перехода из состояния x_i в состояние x_j за интервал времени (t_{k-1}, t_k).

Справедливо соотношение

$$P(t_k) = P(t_{k-1})\Gamma(t_{k-1}, t_k),$$

где

$$\Gamma(t_{k-1}, t_k) = \begin{pmatrix} p_{00}(t_{k-1}, t_k) & p_{01}(t_{k-1}, t_k) & \ldots & p_{0n}(t_{k-1}, t_k) \\ \ldots & & & \\ p_{n0}(t_{k-1}, t_k) & p_{n1}(t_{k-1}, t_k) & \ldots & p_{nn}(t_{k-1}, t_k) \end{pmatrix}.$$

$\Gamma(t_{k-1}, t_k)$ называется матрицей вероятностей перехода (стохастической) за моменты времени (t_{k-1}, t_k).

Для важного класса цепей Маркова поведение их через большой промежуток времени не зависит от начального состояния.

$$\lim_{k\to\infty} p_{ij}(t_{k-1}, t_k) = \pi_j,\ \ i, j = 0, 1, \dots, n.$$

Предельные вероятности удовлетворяют системе уравнений

$$\pi_j = \sum_{k=0}^{n} \pi_k p_{\mathrm{kj}}\,,\ \ j = 0, \dots, n.$$

Цепь Маркова называется однородной, если условные вероятности за k шагов

$$P(x_j(t_k)|\ x_{k_0}(t_0), x_{k_1}(t_1), \dots, x_i(t_{k-1})) = P(x_j(t_k)|\ x_i(t_{k-1})).$$

Примеры решения типовых задач

Пример 4.4

В простейшем случае матрица вероятностей перехода в пространстве из двух состояний 0 и 1 можно записать в виде

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix},$$

где $0 \leqslant \alpha, \beta \leqslant 1$. В частности, при $\alpha = \beta = 0$ получаем единичную матрицу, а при $\alpha = \beta = 1$ – антидиагональную матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\ ,\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Система с единичной матрицей остается в начальном состоянии навсегда; в антидиагональном случае – меняет состояние в каждый момент времени, переходя из 0 в 1 и обратно.

С другой стороны, при $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ мы получаем матрицу

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

В этом случае система может либо остаться в том же состоянии, либо поменять его с вероятностью $1/2$.

Считая цепь Маркова однородной, найти матрицу вероятностей перехода за k шагов.

Решение. Элементы матрицы P^k можно найти с помощью непосредственного вычисления. Действительно, $P^k = P^{k-1}P$, откуда для элемента $p_{00}(t_k)$ получаем равенство
$p_{00}(t_k) = p_{00}(t_{k-1}) \cdot (1-\alpha) + p_{01}(t_{k-1}) \cdot \beta = p_{00}(t_{k-1})(1-\alpha) +$
$+ \left(1 - p_{00}(t_{k-1})\right) \cdot \beta = \beta + (1-\alpha-\beta) \cdot p_{00}(t_{k-1})$.

Это соотношение рекуррентно по k с начальными значениями $p_{00}(t_0) = 1$ и $P_{00}(t_1) = 1 - \alpha$. Значит,

$$p_{00}(t_k) = A + B(1-\alpha-\beta)^k,$$

где $A + B = 1,\ A + B \cdot (1-\alpha-\beta) = 1 - \alpha$.

Отсюда следует, что

$$p_{00}(t_k) = \begin{cases} \dfrac{\beta}{\alpha+\beta} + \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}(1-\alpha-\beta)^k, & \alpha+\beta > 0, \\ 1, & \text{если } \alpha = \beta = 0. \end{cases}$$

Элемент $p_{11}(t_k)$ можно получить, меняя α и β местами, а $p_{01}(t_k)$ и $p_{10}(t_k)$ как дополнения до 1.

Пример 4.5

Матрица

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha/(n+1) & \dots & \alpha/(n+1) \\ \alpha/(n+1) & 1-\alpha & \dots & \alpha/(n+1) \\ \dots & & & \\ \alpha/(n+1) & \alpha/(n+1) & \dots & 1-\alpha \end{pmatrix}$$

описывает модель мутации вируса, в которой вирус либо сохраняет свой тип, либо меняет его на любой другой тип с одинаковыми вероятностями.

Найти P^k при $n = 0$ (число состояний – 2, например, 0 и 1).

Решение. (см. пример 4.4).

Пример 4.6

Найти предельное распределение вероятностей однородной цепи Маркова с двумя состояниями с матрицей вероятностей перехода $p_{01} = \frac{1}{3}$ и $p_{10} = \frac{1}{4}$.

Решение. Имеем $p_{00} + p_{01} = 1,\ p_{10} + p_{11} = 1,$ следовательно, $p_{00} = \frac{2}{3},\ p_{11} = \frac{3}{4}$.

Уравнения для предельных вероятностей в данном случае имеют вид

$$\pi_0 = \pi_0 p_{00} + \pi_1 p_{01},$$
$$\pi_1 = \pi_0 p_{01} + \pi_1 p_{11}.$$

Из данных уравнений находим $\pi_0 = \frac{3}{7}, \pi_1 = \frac{4}{7}$.

Ответ: $\pi_0 = \frac{3}{7}, \pi_1 = \frac{4}{7}$.

Задачи

4.14. В цепи Маркова с двумя состояниями 0 и 1 вектор распределения вероятностей по начальным состояниям $p(t_0) = (\frac{1}{3}, \quad 0)$ и вектор вероятностей переходов определяется соотношениями $p_{00} = \frac{6}{7}$, $p_{10} = \frac{4}{5}$. Считая цепь Маркова однородной, найти вероятности цепочек (010), (000), (111).

4.15. Показать, что цепь Маркова с двумя состояниями и матрицей вероятностей перехода

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

не имеет предельного распределения.

4.16. Найти предельное распределение вероятностей для цепи Маркова с тремя состояниями и матрицей вероятностей переходов

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 3/4 & 1/4 \\ 0 & 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}.$$

Ответы и указания к решению задач

4.1. $p_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sigma t}\exp\left[-\frac{[x-(at+b)]^2}{2(\sigma t)^2}\right]$;

$m_\xi(t) = a \cdot t + b,\ \ \sigma_\xi{}^2(t) = t^2\sigma^2.$

4.2. $m_\xi(t) = a,$

$$K_\xi(t,t') = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k{}^2 \cdot e^{-\alpha k(t+t')},$$

$$\sigma_\xi{}^2(t) = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k{}^2 \cdot e^{-2\alpha k t}\ .$$

4.3. $m_\zeta(t) = 0,$

$K_\zeta(t,t') = t \cdot t' \cdot \left[1 + e^{-\alpha(t+t')}\right],$

$D_\zeta(t) = t^2(1 + e^{-2\alpha t}).$

4.4. $m_\xi(t) = 2\cos(\omega t);$

$K_\xi(t,t') = 9\cos(\omega t)\cos(\omega t');$

$D_\xi(t) = 9\cos^2(\omega t);$

$m_\eta(t) = 2\cos(\omega t) - 2A\omega\sin(\omega t);$

$K_\eta(t,t') = 9\cos(\omega t)\cos(\omega t') + 9A^2\omega^2\sin(\omega t)\sin(\omega t') -$
$-9A\omega\sin(2\omega(t+t'))\,;$

$D_\eta(t) = 9\cos^2(\omega t) + 9A^2\omega^2\sin^2(\omega t) - 9A\omega\sin(2\omega t).$

4.5. $m_\eta(t) = 0,$

$$D_\eta(t) = 1 - \Phi\left(\frac{c}{b \cdot \mathrm{t}}\right),\ \ \Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt.$$

4.6. $R_{\xi\eta}(t,t') = Z_{t'} \cdot K_\xi(t,t').$

4.7. $K_{\xi(0)\eta(1)} = 3(1 - e^{-1}).$

4.8. $m_\zeta(t) = at,$

$K_\xi(t,t') = \sigma^2\cos[\omega(t - t')],$

$\sigma_\xi{}^2(t) = \sigma^2,$

$\xi(t)$ – не стационарна,

$\xi(t) - m_\xi(t)$ – стационарна.

4.9. $m_\eta(t) = 0$,

$K_\eta(t,t') = t \operatorname{arctg}(t - t') + t \operatorname{arctg}(t) - \dfrac{1}{2}\ln(1 + t^2) -$

$- \dfrac{1}{2}\ln[1 + (t' - t)^2] + \dfrac{1}{2}\ln(1 + (t')^2) -$

$- t' \operatorname{arctg}(t' - t) + t' \operatorname{arctg}(t')$,

${\sigma_\eta}^2(t) = 2t \operatorname{arctg}(t)$;

$\xi(t)$ – стационарна, $\eta(t)$ – не стационарна.

4.10. $k_\xi(\tau) = 8e^{-|\tau|}$.

4.11. $S_\xi(\omega) = \frac{\alpha\sigma^2}{2\pi}\left[\frac{1}{\alpha^2+(\beta+\omega)^2} + \frac{1}{\alpha^2+(\beta-\omega)^2}\right]$.

4.12. $|\Phi(i\omega)|^2 = \frac{1}{(\omega+9)^2}$,

$S_\eta(\omega) = \dfrac{\alpha\sigma^2}{\pi(\alpha^2 + \omega^2)(9 + \omega^2)^2}$.

4.13. *Указание:*

$$\eta(t) = \int_0^t \tau \cdot \xi(\tau) \cdot e^{-a(t-\tau)}\, d\tau.$$

4.14. Вероятности цепочек равны соответственно

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{4}{5};\quad \frac{1}{3}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{6}{7};\quad \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}.$$

4.16. $\pi_0 = 0,\ \ \pi_1 = \pi_2 = \frac{1}{2}$.

Примеры вариантов контрольных работ

Глава 1

1. В первой урне 2 белых и 5 черных шаров, во второй – 4 белых и 3 черных. Наудачу извлекли шар, он оказался белым. Какова вероятность, что он извлечен из второй урны?

2. Случайная величина ξ равномерно распределена в $(-1, 2)$. Найти закон распределения $\eta = \xi^2$, $M\eta$, $D\eta$.

3. Сколько в среднем должны содержать изюма булочки, чтобы вероятность того, что в булочке найдется хотя бы одна изюмина, была не меньше 0,99?

4. Из урны с M белыми и $N - M$ черными шарами по схеме случайного выбора без возвращения извлекается n шаров. Положим $\xi_i = 1$, если i-й шар белый, и $\xi_i = 0$, если i-й шар черный $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Найти D_{ξ_i}, $\operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j)$, $i \neq j$.

   Указание. Использовать ${\xi_i}^2 = \xi_i$.

5. Случайный вектор $\vec{U}(\xi, \eta)$ равномерно распределен в треугольнике, ограниченном осями координат OX, OY и прямой $y = 2(1 - x)$. Найти плотности распределения ξ, η. Выяснить, зависимы или нет ξ и η.

6. Вероятность наступления события A равна ½. Какова вероятность, что при проведении 1000 независимых испытаний число наступления события A заключено между 350 и 600?

Главы 2–4

1. Найти оценку ММП параметра θ по выборке $x_1, \ldots, x_n$ для случайной величины с плотностью

$$p(x,\theta) = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta}\exp\left(-\dfrac{1}{\theta}x\right), & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Найти $M\hat{\theta}$, $D\hat{\theta}$. Исследовать смещенность, эффективность, состоятельность оценки.

2. Для выборки $x_1, \ldots, x_n$ случайной величины ξ, имеющей нормальное распределение $N(a,\sigma)$ предложена оценка дисперсии $s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2$при известной величине $M\xi = a$. Доказать, что случайная величина $\frac{ns^2}{\sigma^2}$ имеет распределение ${\chi_n}^2$.

3. Указать алгоритм моделирования случайной величины ξ с плотностью

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{1}{2}|x|\right), & |x| \leqslant 2\,, \\ 0, & |x| > 2. \end{cases}$$

4. Найти формулы для моделирования случайной величины (ξ, η) с плотностью $p(x,y) = 3x$ в треугольнике, ограниченном прямыми $y = 0,\ y = x,\ x = 1$.

5. Найти плотность распределения случайной функции $\xi(t)$, $M\xi(t)$, $D\xi(t)$, если $\xi(t) = tU + A, U$ равномерно распределена в интервале $(a,b), -\infty < a < b < +\infty,\ A = \mathrm{const}$.

6. Пусть случайная величина $x_t = 1$ $(t = 1,2,\ldots,n)$, если в t-м испытании схемы Бернулли с вероятностью успеха p в отдельном испытании произошло четное число успехов, и $x_t = 2$ в противном случае. Показать, что $x_0 \equiv 1,\ x_1, \ldots, x_n$ образуют цепь Маркова. Найти матрицу вероятностей переходов.

Указание. Четность числа успехов к данному испытанию зависит только от четности числа успехов к предыдущему испытанию.

Список рекомендуемой литературы

1. Айвазян С.А. Прикладная статистика / С.А. Айвазян, В.С. Мхитарян. – М.: ЮНИТИ, 2001. – Т. 1. – 656 с. – Т. 2. – 432 с. – Т. 3. – с.271.
2. Ватутин В.А. Теория вероятностей и математическая статистика в задачах / В.А. Ватутин, Г.И. Ивченко, Ю.И. Медведев, В.И. Чистяков. – М.: Агар, 2003. – 326 с.
3. Вероятностные разделы математики / под ред. Ю.Д. Максимова. – СПб.: Иван Федоров, 2001. – 589 с.
4. Золоторевская Д.И. Теория вероятностей. Задачи с решениями. – Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. – 168 с.
5. Кельберт М.Я., Сухов Ю.М. Вероятность и статистика в примерах и задачах. – М.: МЦНМО, 2010. – Т. 1. – 486 с. – Т. 2. – 560 с.
6. Прохоров Ю.В., Пономаренко Л.С. Лекции по теории вероятностей и математической статистике. – М.: МГУ, 2012. – 254 с.
7. Ребане Г.П., Савёлова Т.И. Методические указания к решению задач по теории случайных функций. – М.: МИФИ, 1990. – 20 с.
8. Савёлова Т.И. Метод Монте-Карло. М.: МИФИ, 2010. –150 с.
9. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций / под ред. А.А. Свешникова. – М.: Наука, 1970. – 756 с.
10. Соболь И.М., Савёлова Т.И. Методические указания к решению задач по теории вероятностей. – М.: МИФИ, 1991. – 28 с.
11. В. Феллер. Теория вероятностей. – М.: Мир, 1964. – Т.1. – 499 с.
12. Чистяков В.П. Теория вероятностей. –М.: Наука, 1987 –240 с.

Приложение 1

Таблицы случайных величин и вероятностных распределений

Таблица П.1.1

Некоторые дискретные распределения

Распределение Обозначение	Вероятности $p(\xi = k)$	Мат. ожидание	Дисперсия	х.ф. $\mathrm{M}e^{it\xi}$
Пуассона $P_k(\lambda)$	$\dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$	λ	λ	$e^{\lambda(e^{it}-1)}$
Биноминальное $0 < p < 1$, $q = 1 - p$. $k = 0, 1, \dots, n$	$C_n^k p^k q^{n-k}$	np	npq	$(p + qe^{it})^n$
Гипер-геометрическое $k = 0, 1, \dots, n$ $M \leqslant N, n \leqslant N$	$\dfrac{C_{N-M}^{n-k} C_M^k}{C_N^n}$	$\dfrac{nM}{N}$	$\dfrac{nM(N-M)(N-n)}{N^2(N-1)}$	
Равномерное $k = 0, 1, \dots, n$	$\dfrac{1}{n}$	$\dfrac{n+1}{n}$	$\dfrac{n^2-1}{12}$	$\dfrac{1}{n}\dfrac{e^{it(n+1)}-1}{e^{it}}$

Таблица П.1.2

Некоторые непрерывные распределения

Распределение Обозначение	Плотность $p(x)$	Мат. ожидание	Дисперсия	х.ф. $Me^{it\xi}$
Равномерное $-\infty < a < b <$ $< +\infty$	$\dfrac{1}{b-a}$	$\dfrac{a+b}{2}$	$\dfrac{(b-a)^2}{12}$	$\dfrac{e^{ibt} - e^{iat}}{it(b-a)}$
Показательное $\lambda > 0, x \geqslant 0$	$\lambda e^{-\lambda x}$	$\dfrac{1}{\lambda}$	$\dfrac{1}{\lambda^2}$	$\dfrac{\lambda}{\lambda - it}$
Гамма $\Gamma(\alpha, \lambda)$ $\alpha > 0,\ \lambda > 0,$ $x \geqslant 0$	$\dfrac{\lambda^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)}$	$\dfrac{\alpha}{\lambda}$	$\dfrac{\alpha}{\lambda^2}$	$\left(1 - \dfrac{it}{\lambda}\right)^{-\alpha}$
Нормальное $N(a, \sigma)$, $\lvert x\rvert < +\infty$	$\dfrac{\exp\left[-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right]}{\sqrt{2\pi}\sigma}$	a	σ^2	$e^{ita-\frac{1}{2}t^2\sigma^2}$

Продолжение табл. П.1.2

Распределение Обозначение	Плотность $p(x)$	Мат. ожидание	Дисперсия	х.ф. $Me^{it\xi}$
Коши $\alpha, b \in (-\infty, +\infty)$	$\dfrac{1}{\pi(b^2 + (x-\alpha)^2)}$	Не определено	Не определено	$e^{it\alpha - \lvert t \rvert b}$

Таблица П.1.3

Некоторые непрерывные распределения, часть 2

Обозначение	Область	Распределение	Характеристики
Хи-квадрат $\chi_n{}^2$	$x \geqslant 0$	$\chi_n{}^2 \sim \sum_{1}^{n} (N(0,1))^2$	$M\xi = n$ $D\xi = 2n$
Стьюдента t_n	$-\infty < x < +\infty$	$t_n \sim \dfrac{N(0,1)}{\sqrt{\chi_n{}^2/n}}$	$M\xi = 0,\ \ n > 1$ $D\xi = \dfrac{n}{n-2},\ \ n > 2$
Фишера $F_{m,n}$	$x \geqslant 0$	$F_{m,n} \sim \dfrac{\chi_m{}^2/m}{\chi_n{}^2/n}$	$M\xi = \dfrac{n}{n-2},\ \ n > 2$ $D = \dfrac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)},$ $n > 4$

Приложение 2

Вклад русских ученых в развитие теории вероятностей

Если в начале девятнадцатого века главными потребителями вероятностных методов были теория артиллерийской стрельбы и теория ошибок, то в конце девятнадцатого века и в начале двадцатого теория вероятностей получает много новых применений благодаря развитию статистической физики и разработки аппарата математической статистики.

А.Н. Колмогоров

Пафнутий Львович Чебышёв (1821–1894) был воспитанником Московского университета, где в 1841 году защитил магистерскую диссертацию «Опыт элементарного исследования теории вероятностей». В 1847 году он переехал в Петербург, где работал до своей кончины. С 1853 года был членом Академии наук. Круг научных интересов Чебышёва достаточно широк: теория вероятностей, теория чисел, теория приближения функции действительного переменного и т. д. В теории вероятностей заслугой Чебышёва П.Л. является значительное обобщение «закона больших чисел», введение нового метода – метода моментов, центральная предельная теорема для сумм независимых случайных величин.

Андрей Андреевич Марков (1856–1922) обобщал результаты своего учителя П.Л. Чебышёва и уточнял его доказательства. А.А. Марков ввел «цепи Маркова», оказавшиеся важным орудием при использовании вероятностных методов в науке и технике. Цепи Маркова появились в работе 1908 года. (Термин «цепь Маркова» был использован С.Н. Бернштейном в 1916 году. В западноевропейский научный обиход этот термин был введен Ж. Адамаром, знаменитым французским математиком).

А.А. Марков жил в Санкт-Петербурге и учился на физико-математическом факультете Санкт-Петербургского университета, куда он поступил в 1874 году. Окончил курс в университете в 1878 году, в 1880-м получил степень магистра. Степень доктора наук ему присудили в 1885 году, а в 1896-м он был избран членом Российской академии наук.

Александр Михайлович Ляпунов (1857–1918) также является учеником П.Л. Чебышёва. Ляпунову А.М. принадлежит введение метода характеристических функций в учение о предельных теоремах теории вероятностей. Ляпунов в своей докторской диссертации «Общая задача об устойчивости движения» (1892) впервые исследовал в строгой математической последовательности проблему устойчивости механических систем с конечным числом степеней свободы.

Андрей Николаевич Колмогоров (1903–1987) широко известен во всем математическом мире как создатель аксиоматики теории вероятностей в 1933 году. Колмогоров учился и работал в Московском государственном университете, где в 1960 году организовал при кафедре теории вероятностей статистическую лабораторию. Круг интересов А.Н. Колмогорова чрезвычайно широк: теория функций комплексного переменного, ряды Фурье, теория вероятностей, теория информации, математическая статистика, теория меры и интеграла, математическая логика, теория приближений, геометрия, топология, функциональный анализ, дифференциальные уравнения и динамические системы. Большой интерес А.Н. Колмогоров проявлял к теории стиха – он применял методы математической статистики к изучению поэзии А.С. Пушкина, Ф.Н. Тютчева, В.А. Жуковского, А.А. Блока, А.А. Ахматовой, В.В. Маяковского, М.И. Цветаевой и других. Являлся членом Академии наук СССР. Колмогоров воспитал блестящую плеяду математиков нескольких поколений, среди них – академики В.И.

Арнольд и А.Н. Ширяев. Много сил А.Н. Колмогоров отдал развитию математического образования в школе, написанию учебников для школьников.