МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
«МИФИ»

Е.Б. Сандаков, Ю.Н. Гордеев, В.М. Простокишин

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ «ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, КРАЕВЫЕ И СПЕКТРАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ»

Учебно-методическое пособие

Москва 2012

УДК 517.968(07)
ББК 22.161.6я7
С 18

Сандаков Е.Б., Гордеев Ю.Н., Простокишин В.М. **Методы решения задач по теме «Интегральные уравнения, краевые и спектральные задачи»: Учебно-методическое пособие.** – М.: НИЯУ МИФИ, 2012. – 64 с.

Пособие разбито на восемь занятий. В начале каждого занятия дан теоретический материал, а затем изложены методы решения задач по данной теме. Также приведено решение большого количества интересных задач, которые помогут студентам лучше понять материал рассматриваемой темы .

Предназначено для преподавателей НИЯУ МИФИ, ведущих лекционные и практические занятия по дифференциальным и интегральным уравнениям на 2-м курсе всех специальностей.

Рецензент д-р физ.-мат. наук, проф. И.М. Петрушко

ISBN 978-5-7262-1734-5

Редактор *М.В. Макарова*
Оригинал-макет изготовлен *С.В. Тялиной*

Подписано в печать 18.09.2012. Формат 60×84 1/16.
Уч.-изд.л. 4,0. Печ.л. 4,0. Тираж 290 экз. Изд. № 011-1. Заказ № 219.

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ».
Типография НИЯУ МИФИ.
115409, Москва, Каширское ш., 31.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Первое занятие.

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЙ

Интегральные уравнения содержат искомую функцию под знаком интеграла.

Пусть G – ограниченная область из R^n с кусочно-гладкой границей. Рассмотрим линейные интегральные уравнения вида

$$\int_G \mathrm{K}(t, s)x(s)ds = y(t), \tag{1}$$

$$x(t) = \mu\int_G \mathrm{K}(t, s)x(s)ds + y(t), \tag{2}$$

где $x(t)$ – искомая функция $(t \in G)$, а $y(t)$ и $\mathrm{K}(t, s)$ – заданные функции, определенные, соответственно, в G и $\overline{G}\times\overline{G}$; μ – комплексное число (параметр). Функция $\mathrm{K}(t, s)$ – ядро интегрального уравнения, а функция $y(t)$ – свободный член уравнения.

Интегральные уравнения (1) и (2) – линейные интегральные уравнения Фредгольма, соответственно, первого и второго рода.

Пусть $n = 1$, а $G = (a, b)$. Тогда уравнения (1) и (2) примут вид

$$\int_a^b \mathrm{K}(t, s)x(s)ds = y(t), \tag{1$'$}$$

$$x(t) = \mu\int_a^b \mathrm{K}(t, s)x(s)ds + y(t). \tag{2$'$}$$

Интегральные уравнения вида

$$\int_a^t \mathrm{K}(t, s)x(s)ds = y(t), \tag{3}$$

$$x(t) = \mu\int_a^t \mathrm{K}(t, s)x(s)ds + y(t). \tag{4}$$

называются линейными интегральными уравнениями Вольтерра, соответственно, первого и второго рода.

Замечание 1. Очевидно, что уравнение Вольтерра можно рассматривать как уравнение Фредгольма, в котором ядро $\mathrm{K}(t, s)$ удовлетворяет условию:

$$\mathrm{K}(t, s) = 0 \quad \text{при} \quad s > t.$$

Решением интегральных уравнений (1), (2), (3), (4) будет функция $\varphi(t)$, которая будучи подставлена в эти уравнения обращает их в тождество (по t).

Для интегрального уравнения Вольтерра второго рода справедлива теорема 1.

Теорема 1. Если ядро $\mathrm{K}(t, s)$ интегрального уравнения (4) Вольтерра второго рода непрерывно в квадрате $P = \{(t, s): \ a \le s, \ t \le b\}$ (a и b конечны), то для любого числа μ и для любой функции $y(t) \in C[a, b]$ существует единственное непрерывное решение $x(t)$ уравнения (4), причем это решение может быть найдено методом последовательных приближений, т.е. $x(t) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n(t)$ (сходимость по норме пространства $C[a, b]$, т.е. равномерная), где $x_n(t)$ задается рекуррентным соотношением

$$x_n(t) = \mu \int_a^t \mathrm{K}(t, s) x_{n-1}(s) ds + y(t), \quad n = 1, 2, \dots,$$

а $x_0(t)$ – произвольная непрерывная на $[a, b]$ функция.

Для интегрального уравнения Фредгольма второго рода решение, как будет показано дальше, может существовать не для любых μ, а в случае его существования может быть не единственным. Тем не менее следующая теорема дает условия, при которых решение уравнения Фредгольма второго рода всегда существует и единственно.

Теорема 2. Если ядро $\mathrm{K}(t, s)$ интегрального уравнения (2) Фредгольма второго рода определено и непрерывно в $\bar{G} \times \bar{G}$, и $|\mu| < \dfrac{1}{d}$, где

$$d = \max_{t \in \overline{G}} \int\limits_{G} \left| \mathrm{K}(t, s) \right| ds,$$

то для любой функции $y(t) \in C(\overline{G})$ существует единственное решение $x(t) \in C(\overline{G})$ уравнения Фредгольма второго рода (2), причем это решение может быть найдено методом последовательных приближений, т.е. $x(t) = \lim\limits_{n \to \infty} x_n(t)$ (сходимость по норме пространства $C(\overline{G})$, т.е. равномерная), где

$$x_n(t) = \mu \int\limits_{G} \mathrm{K}(t, s)\, x_{n-1}(s)\, ds + y(t), \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

а $x_0(t)$ – любая непрерывная в $\overline{G}$ функция.

Пример 1.1. Составить интегральное уравнение, соответствующее следующему дифференциальному уравнению с заданными начальными условиями:

$$\begin{cases} y'' - y' \sin t + e^t \cdot y = t; \\ \quad y(0) = 1; \\ \quad y'(0) = -1. \end{cases}$$

Решение. Обозначим $y''(t) = \varphi(t)$. Тогда

$$y'(t) = \int\limits_0^t \varphi(\tau)\, d\tau + y'(0) = \int\limits_0^t \varphi(\tau)\, d\tau - 1;$$

$$y(t) = \int\limits_0^t \left[\int\limits_0^s \varphi(\tau)\, d\tau - 1 \right] ds + y(0) = \int\limits_0^t \left[\int\limits_0^s \varphi(\tau)\, d\tau \right] ds - t + 1 =$$

$$= \int\limits_0^t \left[\varphi(\tau) \int\limits_\tau^t ds \right] d\tau + 1 - t = \int\limits_0^t (t - \tau)\, \varphi(\tau)\, d\tau + 1 - t.$$

Подставляя y'', y' и y в исходное уравнение, получим интегральное уравнение

$$\varphi(t) = t - \sin t + e^t (t - 1) + \int\limits_0^t \left[\sin t - e^t (t - \tau) \right] \varphi(\tau)\, d\tau.$$

Пример 1.2. Методом дифференцирования решить следующее интегральное уравнение:

$$x(t)=2\int_0^t \frac{2s+1}{(2t+1)^2}x(s)\,ds+1.$$

Решение. Дифференцируя данное интегральное уравнение Вольтерра, получим

$$x'(t)=\frac{2}{2t+1}\cdot x(t)-8\int_0^t \frac{2s+1}{(2t+1)^3}x(s)\,ds.$$

Воспользовавшись заданным уравнением, перепишем это уравнение в виде

$$x'(t)=\frac{2}{2t+1}x(t)-\frac{4}{2t+1}x(t)+\frac{4}{2t+1},$$

или
$$x'(t)=-\frac{2}{2t+1}x(t)+\frac{4}{2t+1}.$$

Очевидно, что $x(0)=1$. Следовательно, решение заданного интегрального уравнения сводится к решению задачи Коши

$$\begin{cases} x'(t)=-\dfrac{2}{2t+1}x(t)+\dfrac{4}{2t+1}. \\ x(0)=1. \end{cases}$$

Решая ее стандартным методом [7], получим

$$x(t)=\frac{4t+1}{2t+1}.$$

Второе занятие.
ИТЕРИРОВАННЫЕ ЯДРА. РЕЗОЛЬВЕНТА ОПЕРАТОРА

Следует ввести понятие итерированного ядра. Для этого введем линейный интегральный оператор T, действующий в пространстве $C(\overline{G})$, который для любой функции $x(t)\in C(\overline{G})$ задается соотношением

$$\mathrm{T}x=\int_G \mathrm{K}(t,s)\,x(s)\,ds. \qquad (5)$$

Тогда уравнение (2) в операторной записи примет вид

$$x(t)=\mu \mathrm{T}x+y(t).$$

Пусть даны два интегральных оператора T_1 и T_2 с непрерывными ядрами $\mathrm{K}(t,s)$ и $\mathrm{L}(t,s)$, т.е.

$$\mathrm{T}_1 x(t)=\int_G \mathrm{K}(t,s)x(s)\,ds; \qquad \mathrm{T}_2 x(t)=\int_G \mathrm{L}(t,s)x(s)\,ds.$$

Теперь можно определить произведение операторов $\mathrm{T}_2\mathrm{T}_1$:

$$\left(\mathrm{T}_2\mathrm{T}_1\right)x(t)=\mathrm{T}_2\left(\mathrm{T}_1 x\right)=\int_G \mathrm{L}\left(t,s_1\right)\left[\int_G \mathrm{K}\left(s_1,s\right)x(s)\,ds\right]ds_1=$$

$$=\int_G\left[\int_G \mathrm{L}\left(t,s_1\right)\mathrm{K}\left(s_1,s\right)ds_1\right]x(s)\,ds.$$

Таким образом, ядро оператора $\mathrm{T}_2\mathrm{T}_1$ находится по формуле

$$\tilde{\mathrm{K}}(t,s)=\int_G \mathrm{L}\left(t,s_1\right)\mathrm{K}\left(s_1,s\right)ds_1.$$

Введем итерированные ядра, соответствующие целым положительным степеням оператора T, заданного формулой (5), причем основное ядро $\mathrm{K}(t,s)$ обозначим для симметрии через $\mathrm{K}_1(t,s)$:

$$\mathrm{K}_1(t,s)=\mathrm{K}(t,s); \qquad \mathrm{K}_n(t,s)=\int_G \mathrm{K}_{n-1}\left(t,s_1\right)\mathrm{K}_1\left(s_1,s\right)ds_1. \qquad (5_0)$$

Ядро $\mathrm{K}_n(t,s)$ есть ядро оператора T^n.

Рассмотрим ряд (ряд Неймана уравнения (2)):

$$y(t)+\mu\int_G \mathrm{K}_1(t,s)y(s)\,ds+\ldots+\mu^n\int_G \mathrm{K}_n(t,s)y(s)\,ds+\ldots.$$

При $|\mu|<\dfrac{1}{d}$, где $d=\max\limits_{t\in\overline{G}}\int_G\left|\mathrm{K}(t,s)\right|ds$, этот ряд равномерно в $\overline{G}$ сходится к решению $x(t)$ интегрального уравнении (2), т.е.

$$x(t)=y(t)+\mu\int_G \mathrm{K}_1(t,s)y(s)\,ds+\ldots+\mu^n\int_G \mathrm{K}_n(t,s)y(s)\,ds+\ldots.$$

Это равенство можно переписать в виде

$$x(t) = y(t) + \mu \int_G \left(\sum_{n=1}^{\infty} \mu^{n-1} \mathrm{K}_n(t, s) \right) y(s)\, ds,$$

или

$$x(t) = y(t) + \mu \int_G \Gamma(t, s, \mu)\, y(s)\, ds, \tag{6}$$

где функция

$$\Gamma(t, s, \mu) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^{n-1} \mathrm{K}_n(t, s) - \tag{6_0}$$

резольвента уравнения (2).

Пример 1.3. Построить резольвенту для интегрального уравнения Фредгольма второго рода

$$x(t) = \lambda \int_0^{\pi/2} (\sin t \cos s)\, x(s)\, ds + y(t).$$

Решение. Резольвента интегрального уравнения Фредгольма второго рода вычисляется по формуле (6_0). Следовательно, для нахождения резольвенты необходимо вычислить итерированные ядра $\mathrm{K}_n(t, s)$. По формуле (5_0)

$$\mathrm{K}_1(t, s) = \sin t \cos s; \quad \mathrm{K}_2(t, s) = \int_0^{\pi/2} \sin t \cos s' \sin s' \cos s\, ds' =$$

$$= \frac{\sin t \cos s}{2} \int_0^{\pi/2} \sin 2s'\, ds' = \frac{\sin t \cos s}{2}.$$

Методом математической индукции нетрудно показать, что

$$\mathrm{K}_n(t, s) = \frac{\sin t \cos s}{2^{n-1}}.$$

Таким образом, резольвента заданного интегрального уравнения имеет вид

$$\Gamma(t, s, \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} \mathrm{K}_n(t, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{2} \right)^{n-1} \sin t \cos s =$$

$$= \frac{2\lambda}{2 - \lambda} \sin t \cos s \quad \text{при} \quad |\lambda| < 2.$$

Пример 1.4. Найти резольвенту для интегрального уравнения Вольтерра второго рода

$$x(t) = \lambda \int_0^t a^{t-s} x(s)\,ds + y(t), \qquad a > 0.$$

Решение. Согласно формуле (6_0) резольвента $\Gamma(t, s, \lambda)$ имеет вид $\Gamma(t, s, \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} \mathrm{K}_n(t, s)$, где $\mathrm{K}_n(t, s)$ – итерированные ядра, которые могут быть вычислены по формуле:

$$\mathrm{K}_n(t, s) = \int_s^t \mathrm{K}_{n-1}(t, s') \mathrm{K}_1(s', s)\,ds'.$$

Тогда получим: $\qquad \mathrm{K}_1(t, s) = a^{t-s};$

$$\mathrm{K}_2(t, s) = \int_s^t a^{t-s'} \cdot a^{s'-s} ds' = \int_s^t a^{t-s} ds' = a^{t-s}(t-s);$$

$$\mathrm{K}_3(t, s) = \int_s^t a^{t-s'}(t-s') a^{s'-s} ds' = a^{t-s} \int_s^t (t-s')\,ds' = \frac{a^{t-s}(t-s)^2}{2}.$$

Методом математической индукции нетрудно показать, что

$$\mathrm{K}_n(t, s) = a^{t-s} \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Подставляя выражения $\mathrm{K}_n(t, s)$ в (6_0), получим

$$\Gamma(t, s, \lambda) = a^{t-s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[\lambda(t-s)]^{n-1}}{(n-1)!} = a^{t-s} \cdot e^{\lambda(t-s)}.$$

Пример 1.5. С помощью резольвенты найти решение интегрального уравнения

$$x(t) = \int_0^t a^{t-s} x(s)\,ds + 2t \cdot e^t.$$

Решение. Согласно примеру 1.4 резольвента заданного интегрального уравнения Вольтерра второго рода имеет вид

$$\Gamma(t, s, \lambda) = a^{t-s} \cdot e^{\lambda(t-s)}.$$

Следовательно, согласно формуле (6) решение нашего интегрального уравнения будет:

$$x(t)=2\int_0^t a^{t-s}\cdot e^{t-s}e^s\cdot sds+2te^t=2e^t\left(\frac{a^t}{\ln^2 a}+\frac{\ln a-1}{\ln a}t-\frac{1}{\ln^2 a}\right).$$

Третье занятие.

ТЕОРЕМЫ ФРЕДГОЛЬМА И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ВЫРОЖДЕННЫМ ЯДРОМ

Пусть заданы следующие интегральные уравнения Фредгольма второго рода

$$x(t)-\mu\int_G \mathrm{K}(t,s)x(s)ds=y(t), \tag{7}$$

$$x_0(t)-\mu\int_G \mathrm{K}(t,s)x_0(s)ds=0. \tag{7_0}$$

Совместно с этими уравнениями будем рассматривать сопряженные к ним уравнения:

$$z(t)-\overline{\mu}\int_G \overline{\mathrm{K}(s,t)}z(s)ds=\omega(t), \tag{8}$$

$$z_0(t)-\overline{\mu}\int_G \overline{\mathrm{K}(s,t)}z_0(s)ds=0, \tag{8_0}$$

где ядро $\overline{\mathrm{K}(s,t)}$ называют сопряженным к ядру $\mathrm{K}(t,s)$.

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 3. При фиксированном μ следующие четыре условия эквивалентны:

1) однородное уравнение (7_0) имеет только тривиальное решение $x_0(t)\equiv 0$;

2) для неоднородного уравнения (7) существует единственное решение для любой правой части $y(t)\in C(\overline{G})$;

3) однородное сопряженное уравнение (8_0) имеет только тривиальное решение $z_0(t)\equiv 0$;

4) для неоднородного сопряженного уравнения (8) существует единственное решение для любой правой части $\omega(t)\in C(\overline{G})$.

<u>Замечание 2.</u> Из теоремы 3 следует, что единственность решения уравнения Фредгольма второго рода эквивалентна существованию решения этого уравнения при любой правой части.

<u>Теорема 4.</u> При фиксированном μ однородное уравнение (7_0) и сопряженное ему уравнение (8_0) имеют одинаковое конечное число $r \geq 0$ линейно независимых решений $x_1^{(0)}$, $x_2^{(0)}$, ..., $x_r^{(0)}$ и $z_1^{(0)}$, $z_2^{(0)}$, ..., $z_r^{(0)}$.

<u>Замечание 3.</u> Если однородное уравнение (7_0) имеет только тривиальное решение при фиксированном μ, то это число μ называют нехарактеристическим (несингулярным).

Если при заданном μ однородное уравнение (7_0) имеет r ($r \geq 1$) линейно независимых решений, то μ называют характеристическим (сингулярным) числом, число $\lambda = \dfrac{1}{\mu}$ называют собственным числом, а соответствующие ему r линейно независимых функций называют собственными функциями оператора Фредгольма (5).

<u>Теорема 5.</u> При фиксированном μ для существования решения неоднородного уравнения (7) (соответственно (8)) необходимо и достаточно чтобы правая часть $y(t)$ (соответственно $\omega(t)$) была ортогональна (в метрике L_2) всем решениям однородного сопряженного уравнения (8_0) (соответственно (7_0)) или более подробно:

а) для существования решения неоднородного уравнения (7) необходимо и достаточно, чтобы правая часть $y(t)$ была ортогональна всем решениям однородного сопряженного уравнения (8_0), т.е.

$$\left(y, z_i^{(0)}\right) = 0, \quad i = 1, 2, ..., r$$

при этом решение $x(t)$ уравнения (7) имеет вид

$$x(t) = x_{\text{част}}(t) + \sum_{\text{K}=1}^{r} C_{\text{K}} x_{\text{K}}^{(0)}(t), \tag{9}$$

где $x_{\text{част}}(t)$ – произвольное частное решение уравнения (7), $x_{\text{K}}^{(0)}(t)$ $(\text{K} = 1, 2, ..., r)$ – линейно независимые решения уравнения (7_0), а C_{K} $(\text{K} = 1, 2, ..., r)$ – произвольные числа;

б) для существования решения неоднородного уравнения (8) необходимо и достаточно, чтобы правая часть $\omega(t)$ была ортогональна всем решениям однородного уравнения (7_0), т.е.

$$\left(\omega,\, x_i^{(0)}\right)=0, \qquad i=1,\,2,\,...,\,r$$

при этом решение $z(t)$ уравнения (8) имеет вид

$$z(t)=z_{\text{част}}(t)+\sum_{\mathrm{K}=1}^{r}\alpha_{\mathrm{K}}\, z_{\mathrm{K}}^{(0)}(t), \tag{10}$$

где $z_{\text{част}}(t)$ – произвольное частное решение уравнении (8); $z_{\mathrm{K}}^{0}(t)$ $(\mathrm{K}=1,\,2,\,...,\,r)$ – линейно независимые решения уравнения (8_0), а α_{K} – произвольные числа.

Замечание 4. Скалярное произведение $(f,\, g)$ вводится следующим образом $(f,\, g)=\int\limits_G f(t)\overline{g(t)}dt.$

После формулировок теорем Фредгольма рекомендуем проиллюстрировать эти теоремы на примере систем линейных алгебраических уравнений.

Интегральные уравнения с вырожденным ядром

Ядро $\mathrm{K}(t,\, s)$ интегрального уравнения Фредгольма второго рода называют вырожденным, если оно является суммой конечного числа произведений функций только от t на функции только от s, т.е. если оно имеет вид

$$\mathrm{K}(t,\, s)=\sum_{i=1}^{n}a_i(t)\overline{b_i}(s), \tag{11}$$

где функции $a_i(t)$ и $b_i(t)$ $(i=1,\,2,\,...,\,n)$ непрерывны в G и линейно независимы между собой.

Замечание 5. Ядро сопряженное к вырожденному ядру (11), очевидно, также вырождено и имеет вид

$$\overline{\mathrm{K}(s;\, t)}=\sum_{i=1}^{n}\overline{a_i(t)}b_i(s).$$

Интегральное уравнение с вырожденным ядром

$$x(t)-\mu\int_G\sum_{i=1}^{n}a_i(t)\overline{b_i(s)}x(s)\,ds=y(t) \tag{12}$$

легко сводится к системе линейных алгебраических уравнений. Действительно, положим

$$\int_G x(s)\overline{b_j}(s)\,ds=\xi_j, \qquad j=1,2,...,n.$$

Тогда если у интегрального уравнения (12) есть решение, то оно имеет вид

$$x(t)=\mu\sum_{i=1}^{n}\xi_i a_i(t)+y(t), \tag{14}$$

где ξ_i, $i=1,2,...,n$ – неизвестные постоянные. Чтобы найти постоянные ξ_i, подставим значение $x(t)$, определяемое формулой (14), в равенство (13) и получим, вводя обозначения

$$\alpha_i=\left(y,b_i\right); \qquad a_{ij}=\delta_{ij}-\mu\left(a_i,b_j\right)=\begin{cases}1-\mu\left(a_i,b_i\right) \text{ при } i=j;\\ -\mu\left(a_i,b_j\right) \text{ при } i\neq j,\end{cases}$$

систему линейных алгебраических уравнений относительно ξ_i

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\xi_j=\alpha_i, \qquad i=1,2,...,n. \tag{15}$$

Если определитель этой системы отличен от нуля, то система (15), а следовательно, и интегральное уравнение (12) имеют единственное решение. Решением интегрального уравнения (12) будет функция $x(t)$, определяемая равенством (14), где числа ξ_1, ξ_2, ..., ξ_n есть решения системы (15). Если же определитель системы (15) равен нулю, то согласно теореме Фредгольма (теорема 5) интегральное уравнение (12) имеет решение тогда и только тогда, когда правая часть $y(t)$ ортогональна всем решениям однородного интегрального уравнения

$$z^0(t)-\overline{\mu}\int_G\sum_{i=1}^{n}b_i(t)\overline{a_i}(s)z^0(s)\,ds=0.$$

Замечание 6. Можно показать, что интегральное уравнение (12) с вырожденным ядром и система (15) эквивалентны в том смысле, что каждому решению $x(t)$ уравнения (12) соответствует только одно решение $(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ системы (15) и, наоборот, каждому решению $(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ системы (15) соответствует единственное решение интегрального уравнения (12) и это соответствие между решениями уравнения (12) и системы (15) осуществляется формулой (14).

Пример 1.6. Решить однородное интегральное уравнение

$$x(t) = \lambda \int_0^1 (\arccos t) \cdot x(s)\, ds.$$

Решение. Запишем это интегральное уравнение в виде

$$x(t) = \lambda (\arccos t) \cdot C_1, \tag{16}$$

где

$$C_1 = \int_0^1 x(s)\, ds. \tag{17}$$

Подставляя (16) в (17), получим для определения постоянной C_1 уравнение

$$C_1 = \lambda C_1 \int_0^1 \arccos s\, ds.$$

Откуда очевидно имеем

$$C_1 (1 - \lambda) = 0.$$

Следовательно, если $\lambda = 1$, то C_1 – произвольное, и решение получаем в виде $x(t) = C \arccos t$. Если же $\lambda \neq 1$, то $C_1 = 0$ и заданное интегральное уравнение имеет только тривиальное решение $x(t) \equiv 0$.

Пример 1.7. Найти все решения уравнения

$$x(t) = \lambda \int_{-1}^1 t\left(s^2 \operatorname{ch} s - e^{s^2}\right) x(s)\, ds + \operatorname{sh} t.$$

Решение. Перепишем заданное интегральное уравнение Фредгольма второго рода с вырожденным ядром в виде

$$x(t)=\lambda tC_1-\lambda tC_2+\operatorname{sh} t, \qquad (18)$$

где $$C_1=\int_{-1}^{1} s^2\operatorname{ch} s\cdot x(s)\,ds, \quad C_2=\int_{-1}^{1} e^{s^2}\cdot x(s)\,ds. \qquad (19)$$

Подставляя (18) в (19), получим для определения постоянных C_1 и C_2 систему уравнений

$$\begin{cases} C_1=\lambda C_1\int_{-1}^{1} s^3\operatorname{ch} s\,ds-\lambda C_2\int_{-1}^{1} s^3\operatorname{ch} s\,ds+\int_{-1}^{1} s^2\operatorname{ch} s\cdot\operatorname{sh} s\,ds; \\ C_2=\lambda C_1\int_{-1}^{1} s\,e^{s^2}\,ds-\lambda C_2\int_{-1}^{1} s\,e^{s^2}\,ds+\int_{-1}^{1} e^{s^2}\operatorname{sh} s\,ds. \end{cases}$$

Так как под знаком всех интегралов стоят нечетные функции, то получим $C_1=0,\ \ C_2=0.$ Следовательно, заданное интегральное уравнение имеет единственное решение $x(t)=\operatorname{sh} t.$

Пример 1.8. Найти характеристические числа и собственные функции для следующего однородного интегрального уравнения:

$$x(t)=\lambda\int_{-1}^{1}(t\operatorname{ch} s-s\operatorname{sh} t)\,x(s)\,ds.$$

Решение. Запишем это интегральное уравнение в виде

$$x(t)=\lambda tC_1-\lambda\operatorname{sh} t\cdot C_2, \qquad (20)$$

где $$C_1=\int_{-1}^{1}\operatorname{ch} s\cdot x(s)\,ds; \quad C_2=\int_{-1}^{1} s\cdot x(s)\,ds. \qquad (21)$$

Подставляя (20) в (21), получим для определения постоянных C_1 и C_2 систему уравнений

$$\begin{cases} C_1=\lambda C_1\int_{-1}^{1} s\cdot\operatorname{ch} s\,ds-\lambda C_2\int_{-1}^{1}\operatorname{ch} s\cdot\operatorname{sh} s\,ds, \\ C_2=\lambda C_1\int_{-1}^{1} s^2 ds-\lambda C_2\int_{-1}^{1} s\operatorname{sh} s\,ds, \end{cases}$$

или после простых вычислений имеем

$$\begin{cases} C_1 = 0; \\ C_2 = \frac{2}{3}\lambda C_1 - \lambda C_2 \cdot 2e, \end{cases}$$

откуда $$C_1 = 0, \quad C_2(1 + 2e\cdot\lambda) - 0.$$

Следовательно, $\lambda = -\frac{1}{2e}$ является единственным характеристическим числом интегрального уравнения, ему соответствует собственная функция $x(t) = C\operatorname{sh} t,\ C \neq 0.$

Пример 1.9. Найти характеристические числа и собственные функции для следующего однородного интегрального уравнения

$$x(t) = \lambda\int_0^1 \left(45t^2 \ln s - 9s^2 \ln t\right) x(s)\, ds.$$

Решение. Запишем это интегральное уравнение в виде

$$x(t) = 45\lambda t^2 C_1 - 9\lambda \ln t C_2, \tag{22}$$

где $$C_1 = \int_0^1 \ln s \cdot x(s)\, ds; \quad C_2 = \int_0^1 s^2 \cdot x(s)\, ds. \tag{23}$$

Подставляя (22) в (23), получим для определения постоянных C_1 и C_2 систему уравнений

$$\begin{cases} C_1 = 45\lambda C_1\int_0^1 s^2 \ln s ds - 9\lambda C_2\int_0^1 \ln^2 s ds; \\ C_2 = 45\lambda C_1\int_0^1 s^4 ds - 9\lambda C_2\int_0^1 s^2 \ln s ds, \end{cases}$$

или после элементарных вычислений получим

$$\begin{cases} (1+5\lambda) C_1 + 18\lambda C_2 = 0; \\ 9\lambda C_1 + (\lambda - 1) C_2 = 0. \end{cases} \tag{24}$$

Определитель этой системы

$$\Delta = -157\lambda^2 - 4\lambda - 1$$

и очевидно, что при любом вещественном λ он отличен от нуля. Следовательно, система (24) имеет только тривиальное решение

$C_1 = C_2 = 0,$ и поэтому заданное интегральное уравнение не имеет вещественных характеристических чисел.

Пример 1.10. Исследовать на разрешимость при различных значениях параметра λ следующее интегральное уравнение

$$x(t) - \lambda \int_{-1}^{1} \left(t^2 - 2ts\right) x(s)\, ds = t^3 - t.$$

Решение. Запишем заданное интегральное уравнение в виде

$$x(t) = \lambda t^2 C_1 - 2\lambda t C_2 + t^3 - t, \tag{25}$$

где
$$C_1 = \int_{-1}^{1} x(s)\, ds; \quad C_2 = \int_{-1}^{1} s \cdot x(s)\, ds. \tag{26}$$

Подставляя (25) в (26), получим для определения постоянных C_1 и C_2 систему уравнений

$$\begin{cases} C_1 = \lambda C_1 \int_{-1}^{1} s^2 ds - 2\lambda C_2 \int_{-1}^{1} s ds + \int_{-1}^{1} \left(s^3 - s\right) ds; \\ C_2 = \lambda C_1 \int_{-1}^{1} s^3 ds - 2\lambda C_2 \int_{-1}^{1} s^2 ds + \int_{-1}^{1} \left(s^4 - s^2\right) ds, \end{cases}$$

или
$$\begin{cases} \left(1 - \frac{2}{3}\lambda\right) C_1 = 0; \\ C_2 \left(1 + \frac{4}{3}\lambda\right) = -\frac{4}{15}. \end{cases}$$

Отсюда получаем: а) если $\lambda = -\frac{3}{4},$ то второе уравнение этой системы несовместно, и, следовательно, заданное интегральное уравнение при этом значении λ не разрешимо; б) если $\lambda = \frac{3}{2},$ то постоянная C_1 – произвольная, а $C_2 = -\frac{4}{45}$ и решение интегрального уравнения при этом значении параметра λ имеет вид $x(t) = t^3 - \frac{11}{15} t + Ct^2;$ в) если $\lambda \neq -\frac{3}{4},$ $\lambda \neq \frac{3}{2},$ то постоянные C_1 и

C_2 равны, соответственно, $C_1 = 0,\ C_2 = -\dfrac{4}{5(3+4\lambda)}$, а решение заданного интегрального уравнения единственно и имеет вид

$$x(t) = t^3 - \frac{3(4\lambda+5)}{5(4\lambda+3)} \cdot t.$$

Четвертое и пятое занятия.
ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В ЛИНЕЙНЫХ НОРМИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Следует напомнить основные определения, относящиеся к линейным нормированным пространствам и привести примеры нормированных пространств, с которыми в дальнейшем предстоит работать.

Линейное пространство X называют нормированным пространством, если каждому элементу $x \in X$ поставлено в соответствие неотрицательное число $\|x\|$ (норма x), для которого выполнены следующие аксиомы:

1) для любого x: $\|x\| \geq 0$; $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$; 3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Линейное нормированное пространство называется полным, если в нем всякая фундаментальная последовательность сходится. Полное нормированное пространство – банаховое.

Унитарное пространство H называется гильбертовым, если оно полно в норме, порожденной скалярным произведением этого пространства.

Примеры линейных нормированных пространств

1. Пространство $C(\overline{G})$ – пространство непрерывных функций, заданных в $\overline{G}$ с нормой $\|x(t)\| = \max\limits_{t \in \overline{G}} |x(t)|$. Справедливость аксиом 1)–3) без труда проверяется.

2. $RL_2(G)$ – унитарное пространство (определение унитарного пространства и введение нормы в унитарном пространстве см. в

[4]) интегрируемых по Риману в G функций со скалярным произведением

$$(x, y) = \int_G x(t)\,\overline{y}(t)\,dt,$$

становится нормированным, если норму в нем определить равенством $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$.

3. ***Пространство*** $\boldsymbol{C^{(m)}(\overline{G})}$. Элементами этого пространства являются всевозможные функции, определенные в $\overline{G}$ и имеющие в $\overline{G}$ непрерывные производные до m-й включительно. Операции сложения функций и умножения функции на число определяются обычным образом. Норма элемента $x(t) \in C^{(m)}(\overline{G})$ находится по формуле

$$\|x\| = \sum_{k=0}^{m} \max_{t \in \overline{G}} \left| x^{(k)}(t) \right|.$$

4. ***Гильбертовое пространство*** $\boldsymbol{L_2(G)}$ определяется как пополнение пространства $RL_2(G)$ по норме, порожденной скалярным произведением в пространстве $RL_2(G)$.

5. ***Пространство ограниченных числовых последовательностей.*** Пусть X – множество ограниченных числовых последовательностей $x = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, ...)$. Это означает, что для любого $x \in X$ существует такая постоянная M, зависящая только от x, что $|\xi_i| \le M$ для всех i.

Введем норму в этом пространстве равенством $\|x\| = \sup\limits_i |\xi_i|$.

Она, очевидно, удовлетворяет всем аксиомам нормы. Действительно, проверки требует лишь аксиома треугольника. Имеем (если $x = \{\xi_i\}$, $y = \{\eta_i\}$)

$$|\xi_i - \eta_i| \le |\xi_i - \mu_i| + |\mu_i - \eta_i| \le \sup_i |\xi_i - \mu_i| + \sup_i |\mu_i - \eta_i| =$$

$$= \|x - z\| + \|z - y\|.$$

Следовательно, и $\sup\limits_i |\xi_i - \eta_i| = \|x - y\| \le \|x - z\| + \|z - y\|$.

Полученное нормированные пространство называют пространством m ограниченных числовых последовательностей.

<u>Замечание 7.</u> Сходимость в пространстве m есть сходимость по координатам, равномерная относительно номеров координат.

6. ***Пространство числовых*** последовательностей l_2 (иначе координатное гильбертовое пространство). Элементами этого пространства служат последовательности чисел (действительных или комплексных)

$$x = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, ...),$$

удовлетворяющих условию

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2 < \infty.$$

Это пространство – гильбертовое со скалярным произведением

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \, \overline{y}_i \, .$$

Аксиомы скалярного произведения здесь проверяются непосредственно.

Пусть X и Y – нормированные пространства и D подмножество в X, $D \subset X$. Если каждому элементу $x \in D$ поставлен в соответствие по некоторому правилу (закону) некоторый (вполне определенный) элемент $Ax = y \in Y$, то говорят, что задан оператор A, действующий из X в Y с областью определения $D = D(A)$. Совокупность всех элементов $Ax \in Y$, которые получаются, когда x пробегает D, называется областью значений, или образом оператора A (обозначается $\operatorname{Im} A$).

Оператор A, действующий из X в Y, – линейный, если:

а) область определения $D(A)$ оператора A – линейное множество, т.е. из того, что $x, y \in D(A)$ следует, что $\alpha x + \beta y \in D(A)$ (α, β – произвольные числа);

б) $A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay$.

В дальнейшем мы будем рассматривать линейные операторы, определенные на всем пространстве X (т.е. $D(A) = X$).

Число $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|_X=1} \|Ax\|_Y$ – норма линейного оператора A.

Линейный оператора $A: X \to Y$ называют ограниченным, если его норма $\|A\|$ конечна.

Оператор A, действующий из X в Y, называют непрерывным, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что каковы бы ни были элементы $x, \ y \in X$, из условия $\|x - y\|_x < \delta$ следует, что $\|Ax - Ay\|_Y < \varepsilon$.

Между ограниченностью и непрерывностью линейного оператора существует тесная связь, а именно справедливо утверждение 1.

Утверждение 1. Линейный оператор A, действующий из X в Y (X и Y – линейные нормированные пространства), непрерывен тогда и только тогда, когда он ограничен.

Пусть H – унитарное или гильбертово пространство, и A – линейный оператор, действующий из H в H. Тогда оператор A называют самосопряженным (или эрмитовым), если для любых $x, \ y \in H$ справедливо соотношение

$$(Ax, \ y) = (x, \ Ay).$$

Теорема 6 (о норме самосопряженного оператора). Если A – линейный самосопряженный оператор, действующий в унитарном или гильбертовом пространстве H, то норма оператора A равна

$$\|A\| = \sup_{\substack{\|x\|=1 \\ x \in H}} |(Ax, \ x)|.$$

Собственные числа и собственные векторы оператора

Пусть A – линейный оператор, действующий в нормированном пространстве X.

Число $\lambda \in C$ – собственное значение оператора A в X, если существует нетривиальное решение x уравнения

$$Ax = \lambda x.$$

Само это решение $x \in X$ – собственный элемент (сабственный вектор), отвечающий собственному значению λ.

Наибольшее число линейно независимых элементов, соответствующих собственному значению λ, называют кратностью данного собственного значения λ.

Величина, обратная собственному значению λ (если $\lambda \neq 0$) есть характеристическое значение (число) оператора A. Таким образом, характеристическое число оператора A есть число μ, для которого уравнение $x = \mu A x$ имеет нетривиальное решение x.

Пример 1.11. Найти характеристические числа и собственные функции однородного интегрального уравнения с симметричным ядром

$$x(t) = \lambda \int_0^\pi \mathrm{K}(t, s)\, x(s)\, ds,$$

где

$$\mathrm{K}(t, s) = \begin{cases} \sin t \cos s, & 0 \le t \le s; \\ \sin s \cos t, & s \le t \le \pi. \end{cases}$$

Решение. Заданное интегральное уравнение запишем в виде

$$x(t) = \lambda \int_0^t \sin s \cos t \cdot x(s)\, ds + \lambda \int_t^\pi \sin t \cos s \cdot x(s)\, ds. \qquad (27)$$

Дифференцируя это равенство по t, получим

$$x'(t) = -\lambda \sin t \int_0^t \sin s \cdot x(s)\, ds + \lambda \cos t \int_t^\pi \cos s \cdot x(s)\, ds. \qquad (28)$$

Продифференцируем это равенство еще раз по t, найдем

$$x''(t) = -\lambda \cos t \int_0^t \sin s \cdot x(s)\, ds - \lambda \sin^2 t \cdot x(t) -$$

$$-\lambda \cos^2 t x(t) - \lambda \sin t \int_t^\pi \cos s \cdot x(s)\, ds,$$

или в силу равенства (27)

$$x''(t) = -x(t) - \lambda x(t).$$

Итак, получаем, что $x(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$x''(t) + (\lambda + 1) x = 0. \qquad (29)$$

Из (27) и (28) очевидно имеем

$$\begin{cases} x(0) = 0; \\ x'(\pi) = 0. \end{cases} \tag{30}$$

Общее решение уравнения (29) при $\lambda = -1$ имеет вид

$$x(t) = at + b.$$

Отсюда следует, что при $\lambda = -1$ уравнение (29) имеет только тривиальное решение, удовлетворяющее краевым условиям (30). Следовательно, $\lambda = -1$ не является характеристическим числом заданного уравнения.

Рассмотрим $\lambda > -1$. Тогда общее решение уравнения (29) имеет вид

$$x(t) = C_1 \sin\left(\sqrt{\lambda+1}\right)t + C_2 \cos\left(\sqrt{\lambda+1}\right)t.$$

В силу краевых условий (30) для определения постоянных C_1 и C_2 получим систему

$$\begin{cases} C_2 = 0; \\ C_1 = \sqrt{\lambda+1}\cos\sqrt{\lambda+1}\pi - C_2\sqrt{\lambda+1}\sin\sqrt{\lambda+1}\pi = 0, \end{cases}$$

или отсюда имеем $C_2 = 0,\ \sqrt{\lambda+1} = \mathrm{K} + \dfrac{1}{2},\ \ \mathrm{K} = 0, 1, 2, \ldots$.

Следовательно, характеристическими значениями заданного интегрального уравнения являются числа

$$\lambda_{\mathrm{K}} = \left(\mathrm{K} + \frac{1}{2}\right)^2 - 1, \quad \mathrm{K} = 0, 1, 2, \ldots,$$

а соответствующие им собственные функции имеют вид

$$x_{\mathrm{K}}(t) = \sin\left(\mathrm{K} + \frac{1}{2}\right)t.$$

Пусть $\lambda < -1$. Тогда общее решение уравнения (29) имеет вид

$$x(t) = C_1 e^{\left(\sqrt{-(\lambda+1)}\right)t} + C_2 e^{-\left(\sqrt{-(\lambda+1)}\right)t}.$$

В силу краевых условий (30) для нахождения постоянных C_1 и C_2 получаем систему

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0; \\ C_1\sqrt{-(\lambda+1)}e^{\left(\sqrt{-(\lambda+1)}\right)\pi} - C_2\sqrt{-(\lambda+1)}e^{-\left(\sqrt{-(\lambda+1)}\right)\pi} = 0. \end{cases}$$

Очевидно, что эта система имеет единственное решение $C_1 = C_2 = 0$. Следовательно, при $\lambda < -1$ заданное интегральное уравнение не имеет характеристических чисел и собственных функций.

Пример 1.12. Найти характеристические числа и собственные функции однородного интегрального уравнения с симметричным ядром

$$x(t) = \lambda \int_0^1 e^{-|t-s|} \cdot x(s)\,ds, \quad 0 \le t \le 1.$$

Решение. Запишем заданное интегральное уравнение в виде

$$x(t) = \lambda \int_0^t e^{s-t} \cdot x(s)\,ds + \lambda \int_t^1 e^{t-s} \cdot x(s)\,ds. \qquad (31)$$

Продифференцируем это равенство по t:

$$x'(t) = -\lambda \int_0^t e^{s-t} \cdot x(s)\,ds + \lambda \int_t^1 e^{t-s} \cdot x(s)\,ds. \qquad (32)$$

Дифференцируя это равенство еще раз по t, получим

$$x''(t) = \lambda \int_0^t e^{s-t} \cdot x(s)\,ds + \lambda \int_t^1 e^{t-s} \cdot x(s)\,ds - 2\lambda x(t),$$

или в силу (31) имеем

$$x''(t) + (2\lambda - 1)\,x(t) = 0. \qquad (33)$$

Пользуясь (31) и (32) нетрудно заметить, что

$$\begin{cases} x(0) - x'(0) = 0; \\ x(1) + x'(1) = 0. \end{cases} \qquad (34)$$

Итак, задача о нахождении характеристических чисел и собственных функций заданного интегрального уравнения эквивалентна нахождению собственных чисел и собственных функций краевой задачи (33), (34). Для решения последней задачи рассмотрим несколько случаев.

1. $\lambda = \dfrac{1}{2}$. Тогда общее решение уравнения (33) имеет вид $x(t) = C_1 t + C_2$. Из краевых условий (34) получаем $C_1 = C_2 = 0$.

Следовательно, $\lambda = \frac{1}{2}$ не является характеристическим числом заданного интегрального уравнения.

2. $2\lambda - 1 < 0$. Введем обозначение $\mu^2 = 1 - 2\lambda$ $(\mu > 0)$. Тогда общее решение уравнения (33) имеет вид

$$x(t) = C_1 e^{\mu t} + C_2 e^{-\mu t}.$$

Из краевых условий (34) для нахождения постоянных C_1 и C_2 получим систему

$$\begin{cases} C_1(1-\mu) + C_2(1+\mu) = 0; \\ C_1 e^{\mu}(1+\mu) + C_2 e^{-\mu}(1-\mu) = 0. \end{cases}$$

Определитель Δ этой системы равен

$$\Delta = e^{-\mu}(1-\mu)^2 - e^{\mu}(1+\mu)^2.$$

Этот определитель при наших μ очевидно не обращается в нуль (так как правая часть равенства $\left(\frac{1-\mu}{1+\mu}\right)^2 = e^{2\mu}$ больше единицы, а левая – меньше). Следовательно, при $\lambda < \frac{1}{2}$ нет характеристических чисел у заданного интегрального уравнения.

3. $2\lambda - 1 > 0$. Введем обозначение $\mu^2 = 2\lambda - 1$ $(\mu > 0)$. Тогда общее решение уравнения (33) имеет вид

$$x(t) = C_1 \sin \mu t + C_2 \cos \mu t.$$

Из краевых условий (34) для нахождения постоянных C_1 и C_2 получаем систему

$$\begin{cases} -C_1\mu + C_2 = 0; \\ C_1(\sin\mu + \mu\cos\mu) + C_2(\cos\mu - \mu\sin\mu) = 0. \end{cases}$$

Определитель этой системы Δ равен

$$\Delta = -2\mu\cos\mu + \left(\mu^2 - 1\right)\sin\mu.$$

В точках μ_K, являющихся корнями уравнения

$$\operatorname{ctg}\mu = \frac{\mu^2 - 1}{2\mu}, \tag{35}$$

этот определитель обращается в нуль и, следовательно, все числа $\lambda_K = \dfrac{1+\mu_K^2}{2}$, $K = 1, 2, \ldots,$ где μ_K являются корнями уравнения (35), будут характеристическими числами заданного интегрального уравнения. Собственными функциями, отвечающими заданному λ_K, будут

$$x_K(t) = \sin \mu_K t + \mu_K \cos \mu_K t.$$

Пример 1.13. Решить неоднородное интегральное уравнение с симметричным ядром

$$x(t) = \lambda \int_0^1 K(t, s)\, x(s)\, ds + \operatorname{ch} t,$$

где
$$K(t, s) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{ch} t \cdot \operatorname{ch}(s-1)}{\operatorname{sh} 1}, & 0 \le t \le s; \\ \dfrac{\operatorname{ch} s \cdot \operatorname{ch}(t-1)}{\operatorname{sh} 1}, & s \le t \le 1. \end{cases}$$

Решение. Запишем заданное интегральное уравнение в виде

$$x(t) = \lambda \int_0^t \frac{\operatorname{ch} s \cdot \operatorname{ch}(t-1)}{\operatorname{sh} 1} x(s)\, ds + \lambda \int_t^1 \frac{\operatorname{ch} t \cdot \operatorname{ch}(s-1)}{\operatorname{sh} 1} x(s)\, ds + \operatorname{ch} t. \qquad (36)$$

Продифференцируем это равенство по t:

$$x'(t) = \lambda \int_0^t \frac{\operatorname{ch} s \cdot \operatorname{sh}(t-1)}{\operatorname{sh} 1} x(s)\, ds + \lambda \int_t^1 \frac{\operatorname{sh} t \cdot \operatorname{ch}(s-1)}{\operatorname{sh} 1} x(s)\, ds + \operatorname{sh} t. \qquad (37)$$

Дифференцируя это равенство еще раз по t, получим

$$x''(t) = \lambda \int_0^t \frac{\operatorname{ch} s \cdot \operatorname{ch}(t-1)}{\operatorname{sh} 1} x(s)\, ds + \lambda \frac{\operatorname{ch} t \cdot \operatorname{sh}(t-1)}{\operatorname{sh} 1} x(t) +$$

$$+\lambda \int_t^1 \frac{\operatorname{ch} t \cdot \operatorname{ch}(s-1)}{\operatorname{sh} 1} x(s)\, ds - \lambda \frac{\operatorname{sh} t \cdot \operatorname{ch}(t-1)}{\operatorname{sh} 1} x(t) + \operatorname{ch} t.$$

В силу (36) после элементарных преобразований это равенство приводится к виду

$$x''(t) + (\lambda - 1)\, x(t) = 0. \qquad (38)$$

Из (37) нетрудно заметить, что $x(t)$ удовлетворяет следующим краевым условиям

$$x'(0)=0, \qquad x'(1)=\operatorname{sh} 1. \tag{39}$$

Таким образом, искомое решение интегрального уравнения является решением краевой задачи (38), (39).

Рассмотрим следующие случаи.

1. $\lambda=1$. Тогда общее решение уравнения (38) имеет вид

$$x(t)=C_1 t+C_2.$$

Учитывая краевые условия (39) для нахождения постоянных C_1 и C_2, получим несовместную систему

$$\begin{cases} C_1=0; \\ C_1=\operatorname{sh} 1. \end{cases}$$

Следовательно, при $\lambda=1$ заданное интегральное уравнение не имеет решений.

2. $\lambda-1<0$. Введем обозначение $\mu^2=1-\lambda$ $(\mu>0)$. Тогда общее решение уравнения (38) имеет вид

$$x(t)=C_1 e^{\mu t}+C_2 e^{-\mu t}.$$

Из краевых условий (39) для нахождения постоянных C_1 и C_2 получим систему

$$\begin{cases} C_1-C_2=0; \\ C_1 \mu e^{\mu}-C_2 \mu e^{-\mu}=\operatorname{sh} 1, \end{cases}$$

решение которой имеет вид

$$C_1=C_2=\frac{\operatorname{sh} 1}{2\mu \operatorname{sh} \mu}.$$

Следовательно, искомое решение заданного интегрального уравнения имеет в этом случае вид

$$x(t)=\frac{\operatorname{sh} 1}{2\mu \operatorname{sh} \mu}\left(e^{\mu t}+e^{-\mu t}\right)=\frac{\operatorname{sh} 1 \cdot \operatorname{ch} \mu t}{\mu \operatorname{sh} \mu}, \quad \text{где} \quad \mu=\sqrt{1-\lambda}.$$

3. $\lambda-1>0$. Введем обозначение $\mu^2=\lambda-1$ $(\mu>0)$. Тогда общее решение уравнения (38) имеет вид

$$x(t)=C_1 \sin \mu t+C_2 \cos \mu t.$$

Из краевых условий (39) для нахождения постоянных C_1 и C_2 получим систему

$$\begin{cases} C_1 = 0; \\ C_1 \mu \cos \mu - C_2 \mu \sin \mu = \operatorname{sh} 1, \end{cases}$$

решением которой будет $C_1 = 0,\ C_2 = -\dfrac{\operatorname{sh} 1}{\mu \sin \mu}$.

Следовательно, искомое решение заданного интегрального уравнения имеет в этом случае вид

$$x(t) = -\frac{\operatorname{sh} 1 \cos \mu t}{\mu \sin \mu}, \quad \text{где} \quad \mu = \sqrt{\lambda - 1}.$$

Замечание 8. При $\lambda = 1$ заданное интегральное уравнение не имеет решения, так как правая часть $\operatorname{ch} t$ не ортогональна к решениям однородного интегрального уравнения (ядро $\mathrm{K}(t, s)$ интегрального уравнения симметрично, следовательно, однородное сопряженное уравнение совпадает с однородным уравнением, соответствующим заданному неоднородному уравнению). Решениями однородного уравнения при $\lambda = 1$ являются $x(t) = C,\ C = \text{const}$.

Шестое и седьмое занятия.
КОМПАКТНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Линейный оператор A, действующий из пространства X в пространство Y, – компактный (или вполне непрерывный), если он каждое ограниченное множество из X переводит в предкомпактное в Y, иначе если для любой ограниченной последовательности $\{x_k\}_1^\infty$ в X из последовательности $\{Ax_k\}_1^\infty$ можно выбрать фундаментальную в Y подпоследовательность.

Очевидно следующее утверждение.

Утверждение 2. Если A – линейный компактный оператор, действующий в X, то он ограничен и, следовательно, непрерывен.

Обозначим через $L(X, Y)$ множество линейных ограниченных операторов, действующих из пространства X в пространство Y. Это множество, как нетрудно показать, само является линейным пространством, если операции сложения операторов и умножения на число ввести обычным образом [4].

Утверждение 3. Пусть $A \in L(X, Y)$, тогда если X или Y – конечномерное пространство, то оператор A компактен.

Доказательство. Пусть X – конечномерное пространство, а $\{x_n\}_1^\infty$ – произвольная ограниченная последовательность в X. По теореме Больцано-Вейерштрасса из $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$. В силу непрерывности A последовательность $\{Ax_{n_k}\}$ – сходящаяся. Следовательно, оператор A компактен. Далее, пусть Y конечномерно, а $\{x_n\}_1^\infty$ – произвольная ограниченная последовательность в X. Тогда $\{Ax_n\}_1^\infty$ – также ограниченная последовательность в пространстве Y. Поэтому в силу теоремы Больцано-Вейерштрасса из последовательности $\{Ax_n\}_1^\infty$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. Следовательно, оператор A снова компактен.

Нормированное пространство H – сепарабельное, если в этом пространстве существует счетное всюду плотное подмножество M, т.е. для каждого элемента $x \in H$ существует такая последовательность $\{x_n\}_1^\infty \subset M$ такая что $x_n \to x$ при $n \to \infty$.

Примеры сепарабельных пространств.

1. Любое конечномерное пространство сепарабельно. Достаточно фиксировать в нем базис и рассматривать множество элементов с рациональными координатами.
2. Пространство R^1 сепарабельно, так как совокупность рациональных чисел образует счетное, всюду плотное в R^1 множество.
3. Пространство $\mathrm{C}[a, b]$ сепарабельно, так как в нем всюду плотно множество многочленов с рациональными коэффициентами, которое, очевидно, счетно.

Замечание 9. Можно показать, что пространства $\mathrm{C}^{(\mathrm{m})}(\overline{G})$ и $RL_2(\overline{G})$ также сепарабельны.

Пример несепарабельного пространства

Рассмотрим линейное нормированное пространство m ограниченных числовых последовательностей. В нем рассмотрим подмножество элементов $H = \{x = (\xi_i),\ \text{где}\ \xi_i = 0\ \text{или}\ 1\}$. Множество этих элементов, как известно из курса математического анализа, несчетно. Для любых двух элементов x и y из этого подмножества H очевидно $\|x - y\| = \sup\limits_i |\xi_i - \eta_i| = 1$. Отсюда легко получить, что m не сепарабельно. Действительно, допустим, что в m существует счетное всюду плотное множество M. Опишем около каждого элемента из M шар радиусом $\frac{1}{4}$. Тогда все элементы множества M расположатся внутри этих шаров. Так как шаров счетное множество, то, по крайней мере, в одном из них должно быть два разных элемента x и y из H. Пусть центр этого шара есть z. Тогда $1 = \|x - y\| \le \|x - z\| + \|z - y\| \le \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$. Полученное противоречие доказывает несепарабельность пространства m.

Система функций $\{\varphi_\alpha\}$ ($\alpha \in I$, I – некоторое множество индексов) – ортонормированная система (ОНС), если

$$(\varphi_\alpha, \varphi_\beta) = \delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 0 & \text{при}\ \alpha \ne \beta; \\ 1 & \text{при}\ \alpha = \beta. \end{cases}$$

В сепарабельном гильбертовом пространстве справедливо утверждение 4.

Утверждение 4. В сепарабельном гильбертовом пространстве H любая ОНС не более чем счетна.

Доказательство. Пусть $\{\varphi_\alpha\}$, $\alpha \in I$, – ортонормированная система в H. Так как H – сепарабельное пространство, то в нем существует счетное всюду плотное множество $M = \{J_n\}_1^\infty$. Рассмотрим совокупность шаров $U\left(\varphi_\alpha, \frac{1}{2}\right)$ с центром в точке φ_α и радиусом $\frac{1}{2}$.

Так как $\left\|\varphi_\alpha - \varphi_\beta\right\| = \sqrt{2}$ при $\alpha \neq \beta$, то эти шары не пересекаются. С другой стороны, так как счетное множество M плотно в H, то в каждом таком шаре найдется, по крайней мере, один элемент из M. Следовательно, число таких шаров, а потому и число элементов φ_α не более чем счетно.

Система элементов $\left\{\varphi_k\right\}_1^\infty$ унитарного пространства X – базис в X, если для любого элемента $x \in X$ существует единственное разложение

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \varphi_k$$

(ряд сходится к x по норме, порожденной скалярным произведением в X).

Базис, элементы которого образуют ОНС, называют ортонормированным базисом (ОНБ). Имеет место.

Теорема 7. В любом сепарабельном унитарном пространстве существует ОНБ из конечного или счетного числа элементов.

Замечание 10. Верно и обратное утверждение, т.е. если в унитарном пространстве существует ОНБ, то это пространство – сепарабельное.

Свойства линейного компактного самосопряженного оператора в унитарном пространстве

Теорема 8. Пусть A – линейный компактный самосопряженный оператор в унитарном пространстве. Тогда собственные числа и собственные функции оператора A обладают следующими свойствами.

1. Все собственные числа λ оператора A вещественны и удовлетворяют оценке $|\lambda| \leq \|A\|$.

2. Собственные функции оператора A, отвечающие различным собственным числам, ортогональны, т.е. если $x \neq 0$, $y \neq 0$, $Ax = \lambda x$, $Ay = \mu y$ и $\lambda \neq \mu$, то $(x, y) = 0$.

3. Любому собственному числу $\lambda = \lambda_0 \neq 0$ соответствует конечное число линейно независимых собственных элементов.

4. Множество собственных чисел оператора A не более чем счетно.

5. Если множество собственных чисел λ_k счетно, то оно имеет единственную предельную точку $\lambda = 0$.

6. Если $\lambda = 0$ – собственное число оператора A, то ему могут соответствовать как конечное, так и бесконечное число линейно независимых собственных элементов.

Теорема 9. Пусть $A \in L(H)$ $(A \neq 0)$ – компактный самосопряженный оператор, действующий в унитарном пространстве H. Тогда число $\lambda_0 \neq 0$, $|\lambda_0| = \|A\| = \sup\limits_{\|x\|=1} |(Ax, x)|$ является собственным значением оператора A, т.е. существует такой элемент e, $\|e\| = 1$, что $Ae = \lambda_0 e$, причем собственный элемент e является решением экстремальной задачи $\sup\limits_{\|x\|=1} |(Ax, x)|$.

Максимальная ортонормированная система собственных функций

Перенумеруем все собственные числа оператора A в порядке убывания модуля, что в силу теоремы 8 возможно.

$$|\lambda^{(1)}| \geq |\lambda^{(2)}| \geq \ldots$$

Каждому собственному значению λ_k соответствует конечное число q_k линейно независимых собственных функций, ортонормировав которые методом Шмидта, обозначим

$$\varphi_1^{(k)}(x),\ \varphi_2^{(k)}(x), \ldots,\ \varphi_{q_k}^{(k)}(x). \tag{40}$$

Далее выпишем две последовательности

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x), \ldots,\ \varphi_n(x), \ldots \tag{41}$$

$$\lambda_1,\ \lambda_2, \ldots,\ \lambda_n, \ldots \tag{42}$$

причем в последовательности (42) каждое собственное значение $\lambda^{(k)}$ выписывается столько раз сколько его кратность, т.е. $\lambda_1 = \lambda^{(1)}$, $\lambda_2 = \lambda^{(1)}, \ldots,$ $\lambda_{q_1} = \lambda^{(1)}$, $\lambda_{q_1+1} = \lambda^{(2)}, \ldots,$ а последовательность (41) строится следующим образом: берем собственное число $\lambda^{(1)}$ и выписываем функции системы (40) при $k=1$, затем добавляем все функции системы (40) при $k=2$ и т.д.

Любая система функций (41) есть максимальная ортонормированная система функций оператора A.

Элемент y, принадлежащий унитарному пространству H, называют истокопредставимым через оператор A, если существует такой элемент $x \in H$, что

$$y = Ax.$$

Теорема 10 (Гильберта–Шмидта). Пусть A – линейный компактный самосопряженный оператор $(A \neq 0)$, действующий в унитарном пространстве H, и пусть $\{e_k\}_1^{\infty}$ – максимальная ортонормированная система данного оператора, тогда

1) для любого $x \in H$

$$Ax = \sum_{k=1}^{\infty} (Ax, e_k) e_k = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (x, e_k) e_k \qquad (43)$$

(иначе, любой истокопредставимый через оператор A элемент может быть разложен в ряд Фурье по максимальной ОНС из собственных элементов $\{e_k\}_1^{\infty}$ оператора A);

2) если дополнительно уравнение $Ax = 0$ имеет только нулевое решение (т.е. $\lambda = 0$ не является собственным значением оператора A), то для любого $x \in H$

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} (x, e_k) e_k \qquad (44)$$

(иначе, если уравнение $Ax = 0$ имеет только тривиальное решение, то максимальная ортонормированная система $\{e_k\}_1^{\infty}$ оператора A есть ОНБ пространства H).

Замечание 11. Если оператор A имеет конечное число n собственных элементов e_k, то в формулах (43), (44) суммирование производится по k от 1 до n.

Теорема 11 (Гильберта). Пусть A – линейный компактный самосопряженный оператор, действующий в сепарабельном гильбертовом пространстве H, и пусть $\{e_k\}_1^{\infty}$ – максимальная ОНС из собственных элементов оператора A, а $\{e_k^0\}$ – ОНС из собственных элементов оператора A, отвечающая собственному значению $\lambda = 0$, тогда:

1) для каждого $x \in H$

$$x = x' + x_0 = \sum_{k=1}^{\infty} (x, e_k) e_k + x_0,$$

причем $Ax_0 = 0$ и $(x_0, e_k) = 0$, $k = 1, 2, \ldots$;

2) для любого $x \in H$

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} (x, e_k) e_k$$

тогда и только тогда, когда уравнение $Ax = 0$ имеет только тривиальное решение;

3) для любого $x \in H$

$$x = x' + x_0 = \sum_{k=1}^{\infty} (x, e_k) e_k + \sum_{i=1}^{\infty} (x, e_i^0) e_i^0.$$

<u>Замечание 12.</u> Теорема Гильберта справедлива и в случае, когда число собственных элементов у оператора A конечно.

Рассмотрим в унитарном пространстве H операторное уравнение вида

$$x - \mu A x = y, \qquad (45)$$

где $\mu \neq 0$, A – линейный компактный самосопряженный оператор $(A \neq 0)$, действующий в H. Запишем соответствующее однородное уравнение

$$x - \mu A x = 0. \qquad (45_0)$$

Если ввести обозначение $\lambda = \dfrac{1}{\mu}$, то уравнение (45_0) перепишется в виде

$$Ax = \lambda x. \qquad (46)$$

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ – собственные числа оператора A, а $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$ – максимальная ортонормированная система из собственных векторов оператора A.

Замечание 13. Числа $\mu_k = \dfrac{1}{\lambda_k}$, $k = 1, 2, \ldots,$ – характеристические числа оператора A.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 12. Пусть A – линейный компактный самосопряженный оператор, действующий в гильбертовом пространстве H, и $\{e_k\}$ – максимальная ОНС из собственных элементов оператора A, тогда: 1) если μ – не характеристическое число оператора A, то уравнение (45) имеет единственное решение при любой правой части $y \in H$, которое может быть представлено в виде ряда

$$x = y + \mu \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(y, e_k)}{\mu_k - \mu} e_k; \qquad (47)$$

2) если μ совпадает с характеристическим числом $\mu = \mu_m = = \mu_{m+1} = \ldots = \mu_{m+p-1}$, то решение уравнения (45) существует тогда и только тогда, когда $(y, e_k) = 0,\ k = m,\ m+1, \ldots, m+p-1.$ Решение в этом случае неединственно и может быть представлено в виде

$$x = y + \mu \sum_i{}' \frac{(y, e_i)}{\mu_i - \mu} + \sum_{i=m}^{m+p-1} c_i e_i, \qquad (48)$$

где $\sum\limits_i{}'$ означает суммирование по всем i, кроме $i = m,\ m+1, \ldots,$ $m+p-1,$ а c_i – произвольные постоянные $(i = m,\ m+1, \ldots,$ $m+p-1)$.

Замечание 14. Формулы (47) и (48) называют, соответственно, первой и второй формулами Шмидта.

Замечание 15. Формулы Шмидта справедливы и в унитарном пространстве H.

Приведенную выше теорию применим для интегральных уравнений Фредгольма второго рода

$$x(t) = \mu \int_G \mathrm{K}(t, s)\, x(s)\, ds + y(t), \qquad t \in G, \qquad (49)$$

в некоторых конкретных пространствах.

Будем говорить, что ядро $\mathrm{K}(t, s) \in RL_2(G \times G)$, если

$$\int\limits_G \int\limits_G |\mathrm{K}(t, s)|^2 \, dtds = B^2 < +\infty,$$

причем при любом s существует интеграл $\int\limits_G |\mathrm{K}(t, s)|^2 \, dt.$ Сопоставим уравнению (49) интегральный оператор A, определенный равенством

$$Ax(t) = \int\limits_G \mathrm{K}(t, s) x(s) ds. \tag{50}$$

Для этого оператора справедливы следующие утверждения.

<u>Утверждение 5.</u> Если $\mathrm{K}(t, s)$ есть RL_2 ядро, то для любой функции $x(t) \in RL_2(G)$ элемент $Ax(t) \in RL_2(G)$, т.е. оператор A $RL_2(G)$ переводит в $RL_2(G)$ и $\|A\| \le B.$

<u>Утверждение 6.</u> Если $\mathrm{K}(t, s)$ есть RL_2 ядро, то оператор A, определенный соотношением (50) и действующий в $RL_2(G)$, компактен.

Ядро $\mathrm{K}(t, s)$ – самосопряженное (или эрмитовое), если $\mathrm{K}(t, s) = \overline{\mathrm{K}(s, t)}$ для всех $t, s \in G.$

<u>Утверждение 7.</u> Если $\mathrm{K}(t, s)$ – самосопряженное RL_2 ядро, то оператор A самосопряжен в $RL_2(G)$.

Итак, следствием всех этих утверждений является вывод.

<u>*Вывод 1.*</u> Если в уравнении (49) $\mathrm{K}(t, s)$ отличное от нуля самосопряженное RL_2 ядро, то оператор A, определенный по формуле (50), является линейным самосопряженным компактным оператором в $RL_2(G)$. Для уравнения (49), записанного в виде $x - \mu Ax = y$, справедлива вся теория самосопряженных компактных операторов, а именно: 1) множество характеристических чисел μ_{K} дискретно и соответствующие им собственные функции образуют ОНС в RL_2, и для решения уравнения (49) справедлива первая и вторая формулы Шмидта, а также теоремы Гильберта–Шмидта и Гильберта в $RL_2(G)$. Для RL_2 ядра $\mathrm{K}(t, s)$ имеет место следующая теорема.

<u>Теорема 13.</u> Если $\mathrm{K}(t, s)$ – самосопряженное RL_2 ядро, и пусть $\{e_\mathrm{K}\}_1^\infty$ – максимальная ОНС из собственных элементов оператора A, определенного соотношением (50). Тогда справедливо разложение

$$\mathrm{K}(t, s) = \sum_{\mathrm{K}=1}^{\infty} \frac{e_\mathrm{K}(t)\overline{e_\mathrm{K}(s)}}{\mu_\mathrm{K}}$$ – билинейное разложение ядра.

<u>Следствие 1.</u> Самосопряженное RL_2 ядро $\mathrm{K}(t, s)$ является вырожденным тогда и только тогда, когда

$$\mathrm{K}(t, s) = \sum_{\mathrm{K}=1}^{n} \frac{e_\mathrm{K}(t)\overline{e_\mathrm{K}(s)}}{\mu_\mathrm{K}},$$

или тогда и только тогда, когда оператор A, определенный соотношением (50), имеет конечное число n линейно независимых собственных функций $\{e_\mathrm{K}\}_1^n$, отвечающих характеристическим числам μ_K.

В случае C-ядра (или ядра Гильберта–Шмидта), т.е. ядра $\mathrm{K}(t, s)$, удовлетворяющего условию

$$\int_G |\mathrm{K}(t, s)|^2\, ds \le \mathrm{C}^2 \text{ для всех } t \in G,$$

теорема Гильберта–Шмидта для уравнения (49) может быть уточнена.

<u>Теорема 14</u> (Гильберта–Шмидта). Если $\mathrm{K}(t, s)$ – самосопряженное ядро Гильберта–Шмидта (C-ядро), то функция

$$f(t) = Ax(t) = \int_G \mathrm{K}(t, s)\, x(s)\, ds$$

для любой $x(t) \in RL_2(G)$ разлагается в ряд Фурье

$$f(t) = \sum_{\mathrm{K}=1}^{\infty} (f, e_\mathrm{K}) e_\mathrm{K} = \sum_{\mathrm{K}=1}^{\infty} \frac{(x, e_\mathrm{K})}{\mu_\mathrm{K}} e_\mathrm{K}(t)$$

по максимальной ОНС $\{e_\mathrm{K}(t)\}_1^\infty$ из собственных функций оператора A, который сходится абсолютно и равномерно, иначе если ядро $\mathrm{K}(t, s)$ – самосопряженное ядро Гильберта–Шмидта, то ряд

Фурье для истокопредставимой через ядро функции $f(t)$ сходится абсолютно и равномерно.

Следствие 2. Если $K(t, s)$ – самосопряженное ядро Гильберта–Шмидта (С-ядро), то для решения $x(t)$ уравнения (49), найденного по первой или второй формулам Шмидта, ряды сходятся абсолютно и равномерно по $t \in G$.

Решение интегрального уравнения с непрерывным ядром

Утверждение 8. Если ядро $K(t, s) \in C(\overline{G} \times \overline{G})$, то для любой функции $x(t) \in RL_2(G)$ элемент

$$g(t) = Ax(t) = \int_G K(t, s)x(s)\,ds \in C(\overline{G}),$$

иначе интегральный оператор A с непрерывным ядром отображает $RL_2(G)$ в $C(\overline{G})$.

Следствие 3. Собственные функции интегрального оператора с самосопряженным непрерывным в $\overline{G} \times \overline{G}$ ядром являются непрерывными в $\overline{G}$ функциями, более того, если правая часть из (49) $y(t) \in C(\overline{G})$, то решение уравнения (49) $x(t) \in C(\overline{G})$, причем ряды в формулах Шмидта (47) и (48), а также ряд в теореме Гильберта–Шмидта сходятся абсолютно и равномерно по $t \in \overline{G}$.

Теорема 15 (Мерсера). Если $K(t, s)$ – непрерывное самосопряженное положительное ядро (т.е. $(Ax, x) \geq 0$ для любого x), то ряд

$$K(t, s) = \sum_{K=1}^{\infty} \frac{e_K(t)\overline{e_K(s)}}{\mu_K}$$

сходится равномерно к своему ряду $K(t, s)$.

Следствием из этой теоремы является следующее утверждение.

Утверждение 9. Билинейное разложение для итерированного ядра $K_m(t, s)$, $m \geq 2$, сходится равномерно.

Некоторые свойства компактных операторов

Теорема 16. Если $\{A_n\}$ – последовательность компактных операторов в гильбертовом пространстве, сходящаяся по норме к некоторому оператору A (т.е. $\|A_n - A\| \underset{n\to\infty}{\to} 0$), то оператор A тоже компактен.

Пусть a_{K}, b_{K} $(\text{K} = 1, 2, ..., n)$ и x есть заданные элементы из унитарного пространства H. Тогда оператор A_n, который задается соотношением

$$A_n x = \sum_{\text{K}=1}^{n} a_{\text{K}} \left(x, b_{\text{K}}\right),$$

называют вырожденным.

Очевидно, вырожденный оператор действует из H в конечномерное подпространство $V = L\left(a_1, a_2, ..., a_n\right)$. Поэтому согласно утверждению 3 вырожденный оператор A_n всегда компактен.

Замечание 16. Интегральный оператор с вырожденным ядром очевидно конечномерный, а следовательно, и компактный оператор тоже.

Пользуясь теоремой 16, можно получить следующее утверждение.

Утверждение 9. Интегральный оператор с ядром $\text{K}(t, s) \in$ $\in L_2(G \times G)$ компактен.

Замечание 17. Для компактных операторов справедливы все теоремы Фредгольма.

Пример 1.14. Оператор A, действующий в пространстве $C\,[0, 1]$, задан соотношением

$$Af(x) = x.$$

Показать, что оператор A компактен.

Доказательство. Очевидно следует из определения компактного оператора.

Пример 1.15. Верно ли утверждение, что произведение двух некомпактных операторов есть некомпактный оператор.

Решение. Нет, неверно. В качестве примера рассмотрим оператор, действующий в пространстве l_2 и заданный для любого $x = \left(\xi_1,\ \xi_2, ...,\ \xi_{2n},\ \xi_{2n+1}, ...\right)$ соотношением $Ax = \left(0,\ \xi_1,\ 0,\ \xi_3,\ 0,\right.$ $\left.\xi_5,\ 0, ...\right)$. Этот оператор некомпактен. Действительно, если рассмотреть ограниченную последовательность $x_n \in l_2$, где $x_n =$

$=(0, 0, ..., 0, 1, 0, ...)$ (единица стоит на n-м месте), то из последовательности Ax_n, очевидно, нельзя выбрать сходящуюся подпоследовательность. Следовательно, так определенный оператор A некомпактен. Но, с другой стороны, $A^2 = 0$ и, очевидно, является компактным оператором.

Пример 1.16. Пусть $A \in L(X, Y)$, $B \in L(Y, X)$. Доказать, что если хоть один из этих операторов вполне непрерывен, то вполне непрерывным оператором будет и их произведение BA.

Доказательство. Пусть $\{x_n\}_1^\infty$ – ограниченная последовательность в X. Если A – компактный оператор, то из последовательности $\{Ax_n\}_{n=1}^\infty$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность $\{Ax_{n_K}\}$. Так как оператор B непрерывен, то и $\left\{BA\left(x_{n_K}\right)\right\}$ сходится. Следовательно, оператор BA компактен. Пусть оператор B компактен. Так как последовательность $\{Ax_n\}_1^\infty$, в силу ограниченности A, ограничена, то из последовательности $\{B(Ax_n)\}$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. Следовательно, оператор BA снова компактен.

Пример 1.17. Пусть I – единичный оператор в гильбертовом пространстве X. Показать, что если X бесконечномерно, то оператор I не компактен.

Решение. Рассмотрим в пространстве X последовательность $\{e_K\}_1^\infty$, где e_K – элементы ОНБ в пространстве X. Очевидно, что последовательность $\{e_K\}_1^\infty$ ограничена. Из последовательности $\{Ie_K\}_1^\infty = \{e_K\}_1^\infty$ нельзя выбрать сходящуюся подпоследовательность, так как $\|e_K - e_i\| = \sqrt{2}$ для любых $i \neq K$, i, $K = 1, 2, \ldots$. Следовательно, оператор I не является компактным.

Пример 1.18. Показать, что в бесконечномерном гильбертовом пространстве X компактный оператор A не может иметь ограниченного обратного.

Доказательство. Действительно, если компактный оператор A имеет ограниченный обратный оператор A^{-1}, то согласно примеру 1.16 оператор $I = A \cdot A^{-1}$ компактен, но это в силу примера 1.17 невозможно. Следовательно, компактный оператор A не может иметь ограниченного обратного в бесконечном пространстве.

Пример 1.19. Оператор A, действующий в пространстве $C\,[0, 1]$, задан соотношением

$$Af(x) = x f(x).$$

Показать некомпактность оператора A.

Решение. 1-й способ. Оператор A на множестве $B = \left\{ f(x) \in C[0,1] : f(x) \equiv 0 \text{ при } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \right\}$, очевидно, обратим. Следовательно, в силу примера 1.18 на множестве B он некомпактен, а потому некомпактен и в $C\,[0, 1]$.

2-й способ. Рассмотрим в $C\,[0, 1]$ ограниченную последовательность $f_n(x) = x^{n-1}$, $n = 1, 2, \ldots$. Тогда $\{Ax_n\} = \{x^n\}$, как известно, некомпактна в $C\,[0, 1]$ (сходится в $C\,[0, 1]$ к разрывной функции). Следовательно, заданный оператор некомпактен в $C\,[0, 1]$.

Пример 1.20. Оператор A, действующий в пространстве $C\,[0, 1]$, задан соотношением

$$Af(x) = \int\limits_0^x f(t)\,dt.$$

Показать некомпактность оператора A.

Решение. На множестве D всех непрерывно дифференцируемых функций из $C\,[0, 1]$ оператор A, очевидно, имеет ограниченный обратный. Следовательно, в силу примера 1.18 на множестве D он некомпактен, а потому некомпактен и в $C\,[0, 1]$.

Пример 1.21. Пусть в пространстве l_2 оператор A определен следующим образом: если $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \in l_2$, то $Ax = \left(x_1, \frac{1}{2}x_2, \ldots, \frac{1}{2^{n-1}}x_n, \ldots \right)$. Доказать, что оператор A компактен.

Решение. Пусть $\left\{x^{(\mathrm{K})}\right\}_1^\infty$ – произвольная ограниченная в l_2 последовательность. Очевидно, без ограничения общности, можно считать, что каждый элемент этой последовательности по норме пространства l_2 не превосходит единицы. Тогда последовательность $\left\{Ax^{(K)}\right\}=\left\{y^{(K)}\right\}=\left\{\left(y_1^{(K)},\ ...,\ y_n^{(K)},\ ...\right)\right\}$ будет принадлежать в l_2 параллелепипеду

$$\pi=\left\{y\in l_2,\ y=\left(y_1,\ ...,\ y_n,\ ...\right),\ \left|y_n\right|\le\frac{1}{2^{n-1}},\ \ n=1,\ 2,\ ...\right\},$$

который называют обычно «гильбертовым кирпичом».

Пусть $\varepsilon>0$ – произвольное число. Выберем число $n_0=n_0(\varepsilon)$ так, чтобы $\frac{1}{2^{n-1}}<\frac{\varepsilon}{3}$ для всех $n>n_0$.

Сопоставим последовательности $\left\{y^{(K)}\right\}_1^{\infty}$ последовательность $\left\{z^{(K)}\right\}_1^{\infty}=\left\{\left(y_1^{(K)},\ y_2^{(K)},\ ...,\ y_{n_0}^{(K)},\ 0,\ 0,\ ...\right)\right\}_1^{\infty}$. Из этой последовательности, очевидно, можно выбрать фундаментальную подпоследовательность $\left\{z^{(K_n)}\right\}$, т.е. для любого $\varepsilon>0$ существует такой номер $N_0=N_0(\varepsilon)$, что для всех $K_n>N_0$ и $K_m>N_0$ выполнено неравенство

$$\left\|z^{(K_n)}-z^{(K_m)}\right\|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

Кроме того, в силу самого построения последовательности $\left\{z^{(K)}\right\}$ имеем

$$\left\|y^{(K_n)}-z^{(K_n)}\right\|=\sqrt{\sum_{p=n_0+1}^{\infty}\frac{1}{(2p-1)2}}<\frac{\varepsilon}{3}\text{ для любого }K_n>N_0.$$

Далее для подпоследовательности $\left\{z^{(K_n)}\right\}$ возьмем соответствующую подпоследовательность $\left\{y^{(K_n)}\right\}$ из последовательности $\left\{Ax^{(K)}\right\}$. Эта подпоследовательность будет фундаментальной. Действительно, для любого $\varepsilon>0$ существует такое $N_1=\max\left(n_0,\ N_0\right)$, что для всех $K_n>N_1$ и $K_m>N_1$ имеем

$$\left\| y^{(K_n)} - y^{(K_m)} \right\| \le \left\| y^{(K_n)} - z^{(K_n)} \right\| + \left\| z^{(K_n)} - z^{(K_m)} \right\| + \left\| z^{(K_m)} - y^{(K_m)} \right\| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Следовательно, заданный оператор A компактен.

Пример 1.22. Пусть A – компактный линейный оператор в n-мерном пространстве H. Всегда ли он имеет собственный вектор? Тот же вопрос в случае, если H – бесконечномерное гильбертовое пространство.

Решение. В n-мерном унитарном пространстве H любой оператор имеет собственный вектор [4]. Если же H – бесконечномерное гильбертовое пространство, то линейный компактный оператор, действующий в этом пространстве, не всегда имеет собственный вектор. Для примера рассмотрим оператор A, действующий в гильбертовом пространстве l_2, который задан соотношением

$$Ax = \left(0,\ x_1,\ \frac{x_2}{2}, ...,\ \frac{x_n}{n}, ... \right)$$

для любого $x = \left(x_1,\ x_2, ...,\ x_n, ...\right) \in l_2$.

Компактность этого оператора доказывается так же, как и в примере 1.21. Очевидно, что этот оператор не имеет собственных векторов.

Восьмое занятие.
КРАЕВЫЕ И СПЕКТРАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

Необходимо напомнить кратко (при необходимости) теоретический материал (см. ниже), а затем прорешать примеры 2.1–2.8. Следует отметить, что мы будем рассматривать только линейные дифференциальные уравнения второго порядка; однако многие утверждения, которые приведем для этих уравнений остаются справедливыми и для линейных уравнений более высокого порядка и даже для некоторых нелинейных уравнений.

Итак, рассмотрим уравнение

$$\begin{gathered} a(x)u''(x) + b(x)u'(x) + C(x)u = 0, \\ a \ne 0 \quad \text{при} \quad x \in (a, b). \end{gathered} \tag{51}$$

Это уравнение всегда можно привести к виду

$$Lu \equiv -\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{du}{dx}\right]+q(x)u=0. \tag{52}$$

Для этого достаточно умножить уравнение (51) на

$$\mu(x)=\frac{\exp\left(\int\limits_{x_0}^{x}\frac{b(\xi)}{a(\xi)}d\xi\right)}{a(x)}$$

и ввести обозначения

$$p(x)=\exp\left(\int\limits_{x_0}^{x}\frac{b(\xi)}{a(\xi)}d\xi\right),\qquad q(x)=\frac{C(x)p(x)}{a(x)}.$$

Рассмотрим также граничные операторы

$$\begin{cases} R_1u \equiv \alpha_1 u(a)+\alpha_2 u'(a)+\alpha_3 u(b)+\alpha_4 u'(b); \\ R_2u \equiv \beta_1 u(a)+\beta_2 u'(a)+\beta_3 u(b)+\beta_4 u'(b), \end{cases} \tag{53}$$

где α_i, β_i, $i=1, 2, 3, 4,$ – вещественные числа, которые удовлетворяют следующим условиям

$$p(b)\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \beta_1 & \beta_2\end{vmatrix}=p(a)\begin{vmatrix}\alpha_3 & \alpha_4\\ \beta_3 & \beta_4\end{vmatrix}. \tag{54}$$

Будем считать далее всюду, что $p(x)\in C^1[a, b]$, $p(x)>0$, $q(x)\in C[a, b]$.

Пусть $u, \upsilon \in C^2(a, b)\cap C^1[a, b]$ – произвольные функции. Тогда нетрудно проверить, что

$$\upsilon Lu - uL\upsilon = -\frac{d}{dx}[p(u'\upsilon-\upsilon' u)].$$

Интегрируя это равенство по промежутку (a, b), получим формулу Грина

$$\int\limits_a^b(\upsilon Lu-uL\upsilon)\,dx=[-p(x)(u'\upsilon-\upsilon' u)]_{x=a}^{x=b},$$

которую можно переписать в виде

$$(Lu, \upsilon)-(u, L\upsilon)=\left(p(x)\begin{vmatrix} u & \upsilon \\ u' & \upsilon' \end{vmatrix}\right)\Bigg|_{x=a}^{x=b}. \qquad (55)$$

Пусть $u(x),\ \upsilon(x)\in C^2(a, b)\cap C^1[a, b]$ и $R_i u = R_i\upsilon = 0,\ \ i=1, 2.$ Тогда нетрудно показать, пользуясь условиями (54), что $(Lu, \upsilon)=(u, L\upsilon)$. Таким образом, оператор L при выполнении условия (54) является самосопряженным (с нулевыми граничными условиями).

Понятие о задаче Штурма–Лиувилля

Рассмотрим уравнение

$$Lu(x)=\lambda r(x)u(x), \quad x\in(a, b), \qquad (56)$$

где $r(x)\in C[a, b]$ и $r(x)>0$ на $[a, b]$, λ – комплексное число с однородными граничными условиями

$$R_1 u = R_2 u = 0. \qquad (57)$$

Значения λ, при которых существуют нетривиальные решения уравнения (56) с граничными условиями (57), называют собственными значениями (собственными числами), а сами нетривиальные решения – собственными функциями задачи (56), (57).

Если собственному значению λ соответствует m линейно независимых собственных функций, то число m называют кратностью этого собственного значения.

Задача Штурма–Лиувилля – задача о нахождении всех собственных значений и всех собственных функций задачи (56), (57).

Замечание 18. 1. Граничные условия $u(a)=u(b)=0$ – нулевые данные Дирихле. 2. Граничные условия $u'(a)=u'(b)=0$ – нулевые данные Неймана. 3. Граничные условия $\alpha_1 u(a)+\alpha_2 u'(a)=$ $=\alpha_3 u(b)+\alpha_4 u'(b)=0,\ \ \alpha_1^2+\alpha_2^2\neq 0,\ \ \alpha_3^2+\alpha_4^2\neq 0$ – нулевые смешанные граничные условия. 4. Граничные условия $u(a)=u(b)$, $u'(a)=u'(b)$ называют периодическими граничными данными.

Рассмотрим краевую задачу

$$Lu(x)=f(x), \qquad (58)$$

$$R_1 u = R_2 u = 0, \tag{59}$$

где $f(x) \in C[a, b]$.

Если $\lambda = 0$ не является собственным значением задачи Штурма–Лиувилля (т.е. задача (58), (59) имеет единственное решение при любой $f(x) \in C[a, b]$), то функцией Грина задачи (58), (59) является функция $G(x, y)$ двух переменных $a \le x \le b$; $a \le y \le b$, удовлетворяющая следующим условиям:

1) $G(x, y)$ непрерывна по x и по y в прямоугольнике $\{a \le x \le b;\ a \le y \le b\}$;

2) при фиксированном $y \in (a, b)$ $G(x, y)$ как функция переменного x обладает свойствами $G \in C^2(a, y)$, $G \in C^2(y, b)$ и $L_x G(x, y) = 0$ при $x \ne y$;

3) при фиксированном $y \in (a, b)$ $G(x, y)$ как функция переменного x удовлетворяет однородным краевым условиям $R_1 G = R_2 G = 0$;

4) при фиксированном $y \in (a, b)$ первая производная G'_x претерпевает скачок:

$$G'_x(y+0, y) - G'_x(y-0, y) = -\frac{1}{p(y)}.$$

Замечание 19. Нетрудно показать, что функция Грина $G(x, y)$ обладает свойствами: а) $G(x, y) = G(y, x)$ – свойство симметрии; б) для любого $x \in (a, b)$ $G'_x(x, x+0) - G'_x(x, x-0) = \dfrac{1}{p(x)}$ – свойство скачка по второму аргументу.

Справедлива теорема.

Теорема 17. Если $\lambda = 0$ не является собственным значением задачи Штурма–Лаувилля, то существует единственная функция Грина задачи (58), (59).

Можно рекомендовать следующий метод нахождения функции Грина. Пусть $u(x)$ и $\upsilon(x)$ – два линейно независимых на $[a, b]$ решения уравнения $Lu(x) = 0$ (они всегда существуют), тогда функция Грина $G(x, y)$ ищется в виде

$$G(x, y)=\begin{cases} A_1u(x)+A_2\upsilon(x), & a\le x\le y; \\ A_3u(x)+A_4\upsilon(x), & y\le x\le b, \end{cases} \tag{60}$$

где A_i $(i=1, 2, 3, 4)$ – постоянные, зависящие только от y.

Из условий 1), 3), 4) определения функции Грина получаем для нахождения коэффициентов A_1, A_2, A_3, A_4 систему уравнений

$$\begin{cases} A_1u(y)+A_2\upsilon(y)-A_3u(y)-A_4\upsilon(y)=0; \\ A_1u'(y)+A_2\upsilon'(y)-A_3u'(y)-A_4\upsilon'(y)=\dfrac{1}{p(y)}; \\ A_1R_1u+A_2R_1\upsilon=0; \\ A_3R_2u+A_4R_2\upsilon=0. \end{cases}$$

Определитель этой системы, как нетрудно показать, всегда отличен от нуля. Поэтому у выписанной системы всегда существует единственное решение A_1, A_2, A_3, A_4. Подставляя найденные коэффициенты A_1, A_2, A_3, A_4 в (60), найдем искомую функцию Грина $G(x, y)$ краевой задачи (58), (59).

Замечание 20. Функцию Грина задачи (58), (59) можно искать также в виде

$$G(x, s)=\begin{cases} ay_1(x), & a\le x\le s; \\ by_2(x), & s\le a\le b, \end{cases} \tag{61}$$

где $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – ненулевые решения уравнения $Lu=0$, удовлетворяющие, соответственно, первому и второму из граничных условий, но ни одна из этих функций не удовлетворяет сразу обоим краевым условиям. Если такие решения $y_1(x)$, $y_2(x)$ уравнения $Lu=0$ существуют (т.е. если $\lambda=0$ не является собственным значением задачи Штурма–Лиувилля (56), (57), то функция Грина существует и функции $a(s)$ и $b(s)$ в (61) находятся из условий 1) и 4) определения функции Грина.

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 18 (Гильберта). Если $\lambda=0$ не есть собственное значение задачи Штурма–Лиувилля (56), (57), то краевая задача (58), (59) имеет единственное решение при любой $f(x)\in C[a, b]$ и это решение имеет вид

$$u(x)=\int_a^b G(x, y) f(y)\,dy,$$

где $G(x, y)$ – функция Грина данной задачи.

Следствие 4. Если $\lambda=0$ не есть собственное значение задачи Штурма–Лиувилля (56), (57), то для любой функции $\Phi(x)\in$ $\in C^2[a, b]$ и удовлетворяющей краевым условиям (59) справедливо представление

$$\Phi(x)=\int_a^b G(x, y) L\Phi(y)\,dy.$$

Свойства собственных чисел и собственных функций задачи Штурма–Лиувилля. Теоремы разложения

Теорема 19. Если $\lambda=0$ не есть собственное значение задачи Штурма–Лиувилля (56), (57), то задача Штурма–Лиувилля (56), (57) эквивалентна интегральному уравнению

$$u(x)=\lambda\int_a^b r(y) G(x, y) u(y)\,dy, \quad x\in(a, b), \tag{62}$$

где $G(x, y)$ – функция Грина задачи (56), (57).

Иначе, если $\lambda=0$ не есть собственное значение задачи Штурма–Лиувилля (56), (57), то любое собственное значение и соответствующая собственная функция задачи Штурма–Лиувилля (56), (57) являются характеристическим значением и собственной функцией интегрального уравнения (62) и наоборот.

Замечание 21. Если $r(x)\not\equiv 1$, то ядро интегрального уравнения (62) не самосопряженное, однако справедливо следующее утверждение.

Утверждение 10. Если $\lambda=0$ не есть собственное значение задачи Штурма-Лиувилля (56), (57), то задача Штурма–Лиувилля (56), (57) эквивалентна интегральному уравнению

$$\omega(x)=\lambda\int_a^b \mathrm{K}(x, y)\,\omega(y)\,dy \tag{63}$$

с самосопряженным ядром $\mathrm{K}(x, y)$, где $\omega(x)=\sqrt{r(x)}\, u(x)$, $\mathrm{K}(x, y)=\sqrt{r(x) r(y)}\, G(x, y)$, а $G(x, y)$ – функция Грина задачи (56), (57).

Свойства собственных чисел и собственных функций задачи Штурма–Лиувилля

Если $\lambda=0$ не есть собственное значение задачи Штурма-Лиувилля (56), (57), то справедливы следующие свойства.

Свойство 1. Все собственные значения задачи Штурма–Лиувилля (56), (57) вещественны.

Свойство 2. Множество собственных значений задачи Штурма–Лиувилля (56), (57) счетно. При этом каждое собственное значение имеет кратность не более чем два (при общих краевых условиях). Если же краевые условия имеют вид

$$\begin{aligned} &\tilde{R}_1 u=\alpha_1 u(a)+\alpha_2 u'(a)=0, \quad \alpha_1^2+\alpha_2^2 \neq 0; \\ &\tilde{R}_2 u=\beta_3 u(b)+\beta_4 u'(b)=0, \quad \beta_3^2+\beta_4^2 \neq 0, \end{aligned} \tag{64}$$

то все собственные значения задачи (56), (64) – простые, т.е. имеют кратность один.

Свойство 3. На каждом отрезке числовой оси содержится не более конечного числа собственных значений.

Свойство 4. Собственные функции $\varphi_i(x)$ и $\varphi_{\mathrm{K}}(x)$ задачи Штурма–Лиувилля (56), (57), отвечающие различным собственным значениям, ортогональны на отрезке $[a, b]$ с весом $r(x)>0$, т.е.

$$\int_a^b r(x) \varphi_i(x) \varphi_{\mathrm{K}}(x)\, dx=0, \quad i \neq \mathrm{K}.$$

Свойство 5. Собственные числа задачи Штурма–Лиувилля (56), (57) являются характеристическими значениями интегрального уравнения (63) и наоборот.

При этом, если $\{\lambda_{\mathrm{K}}\}_1^{\infty}$ – собственные значения $[\lambda_1] \leq |\lambda_2| \leq \ldots \leq$ $\leq \ldots \leq |\lambda_n| \leq \ldots$ задачи Штурма–Лиувилля (56), (57), то функции $\omega_{\mathrm{K}}(x)=\sqrt{r(x)}\, u_{\mathrm{K}}(x)$, $\mathrm{K}=1, 2, \ldots$ (где $u_{\mathrm{K}}(x)$ – собственная функция задачи (56), (57), отвечающая собственному значению λ_{K}), образуют максимальную ортонормированную систему из собственных функций интегрального уравнения (63), если функции $u_{\text{K}}(x)$ образуют максимальную ортонормированную систему с весом $r(x)$ из собственных функций задачи Штурма–Лиувилля (56), (57).

<u>Теорема 20.</u> Если $\lambda = 0$ не есть собственное значение задачи Штурма–Лиувилля (56), (57), то для любой функции $f(x) \in C[a, b]$ решение $u(x)$ задачи (58), (59) раскладывается в ряд Фурье по максимальной ОНС $\{u_{\text{K}}(x)\}_r$, $\text{K} = 1, 2, \ldots,$ с весом $r(x)$ из собственных функций задачи Штурма–Лиувилля (56), (57), т.е.

$$u(x) = \sum_{\text{K}=1}^{\infty} (u, u_{\text{K}})_r u_{\text{K}} = \sum_{\text{K}=1}^{\infty} \frac{(f, u_{\text{K}})}{\lambda_{\text{K}}} u_{\text{K}}(x),$$

где $(u, u_{\text{K}})_r = \int_a^b r(y) u(y) u_{\text{K}}(y)\, dy = \frac{1}{\lambda_{\text{K}}} \int_a^b f(y) u_{\text{K}}(y)\, dy$ и этот ряд сходится абсолютно и равномерно на $[a, b]$.

<u>Теорема 21</u> (Стеклова). Если $\lambda = 0$ не есть собственное значение задачи Штурма–Лиувилля (56), (57), то для любой функции $\Phi(x) \in C^2[a, b]$, удовлетворяющей краевым условиям $R_1\Phi =$ $= R_2\Phi = 0,$ ее ряд Фурье

$$\Phi(x) = \sum_{\text{K}=1}^{\infty} (\Phi, u_{\text{K}})_r u_{\text{K}}(x)$$

по максимальной ОНС $\{u_{\text{K}}(x)\}_r$, $\text{K} = 1, 2, \ldots,$ с весом $r(x)$ из собственных функций задачи Штурма–Лиувилля (56), (57) сходится к функции $\Phi(x)$ абсолютно и равномерно на $[a, b]$.

<u>Следствие 5.</u> Если $\lambda = 0$ не есть собственное значение задачи Штурма–Лиувилля (56), (57), то максимальная ОНС $\{u_{\text{K}}(x)\}_r$, $\text{K} = 1, 2, \ldots,$ с весом $r(x)$ из собственных функций задачи Штурма–Лиувилля есть ОНБ и ПОНС в $L_2(r; (a, b))$, т.е. для любой

функции $g(x) \in L_2(r; (a, b))$ с нормой $\int\limits_a^b r(x)|g(x)|^2\,dx < +\infty$ следует, что

$$\left\| g(x) - \sum_{\mathrm{K}=1}^{n} \left(g, u_{\mathrm{K}}\right)_r u_{\mathrm{K}} \right\|_{L_2(r;\,(a,\,b))} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

<u>Следствие 6.</u> Если $\lambda = 0$ есть собственное значение задачи Штурма–Лиувилля (56), (57) (ему соответствует не более двух линейно независимых собственных функций $u_0^{(1)}(x)$, $u_0^{(2)}(x)$ ортонормированных с весом $r(x)$), то ортонормированная система функций $\left\{u_0^{(i)}, u_{\mathrm{K}}\right\}_r$, $i = 1, 2;$ $\mathrm{K} = 1, 2, \ldots,$ с весом $r(x)$ из собственных функций задачи Штурма–Лиувилля (56), (57) есть ОНБ и ПОНС в $L_2(r; (a, b))$, т.е. для любой функции $g(x) \in L_2(r; (a, b))$ следует, что

$$\left\| g(x) - \left(g, u_0^{(1)}\right)_r u_0^{(1)} - \left(g, u_0^{(2)}\right)_r u_0^{(2)} - \sum_{\mathrm{K}=1}^{n} \left(g, u_{\mathrm{K}}\right)_r u_{\mathrm{K}} \right\|_{L_2(r;\,(a,\,b))} \to 0$$

$$\text{при } n \to \infty.$$

Решение неоднородной задачи с неоднородными краевыми условиями

Рассмотрим краевую задачу

$$Lz(x) = f(x), \tag{65}$$

$$\begin{cases} R_1 z = d_1; \\ R_2 z = d_2, \end{cases} \tag{66}$$

где $f(x) \in C[a, b]$, граничные операторы R_1, R_2 удовлетворяют условиям (53), (54), а d_1 и d_2 – постоянные.

<u>Утверждение 11.</u> Если $\lambda = 0$ не есть собственное значение задачи Штурма–Лиувилля (56), (57), то краевая задача (65), (66) имеет единственное решение

$$z(x)=\int_a^b G(x,y)f(y)\,dy+C_1\upsilon_1(x)+C_2\upsilon_2(x),$$

где $C_1,\ C_2$ – решение системы.

$$\begin{cases} C_1R_1\upsilon_1+C_2R_1\upsilon_2=d_1; \\ C_1R_2\upsilon_1+C_2R_2\upsilon_2=d_2, \end{cases} \tag{67}$$

где $\upsilon_1,\ \upsilon_2$ – любые линейно независимые решения уравнения $L\upsilon=0;\ G(x,y)$ – функция Грина задачи (58), (59).

Замечание 22. Система (67) всегда имеет и притом единственное решение.

Замечание 23. Решение краевой задачи (65), (66) можно представить в виде $z(x)=u(x)+\upsilon(x)$, где $u(x)$ есть решение краевой задачи

$$Lu=f,$$
$$R_1u=R_2u=0,$$

а $\upsilon(x)$ – решение краевой задачи

$$L\upsilon=0,$$
$$R_1\upsilon=d_1,$$
$$R_2\upsilon=d_2.$$

Решение неоднородной краевой задачи с параметром в случае нулевых граничных условий

Рассмотрим краевую задачу

$$Lu=\lambda r(x)u(x)+g(x),\quad x\in(a,b), \tag{68}$$

$$R_1u=R_2u=0, \tag{69}$$

здесь операторы $L,\ R_1$ и R_2 удовлетворяют условиям (52), (53), (54) $p(x)\in C^1[a,b];\ g(x)\in C[a,b];\ r(x)\in C[a,b]$ и $r(x)>0$ на $[a,b]$, λ – комплексный параметр.

Из теоремы Гильберта следует, что краевая задача (68), (69) эквивалентна интегральному уравнению

$$\omega(x)=\lambda\int_a^b \mathrm{K}(x,y)\,\omega(y)\,dy+F(x) \tag{70}$$

относительно функции $\omega(x)=\sqrt{r(x)}\,u(x)$ с непрерывным самосопряженным ядром $\mathrm{K}(x,y)=\sqrt{r(x)r(y)}\,G(x,y)$, где $G(x,y)$ – функция Грина задачи (56), (57), а $F(x)=\sqrt{r(x)}\int_a^b G(x,y)\,g(y)\,dy$.

Из (70) получаем утверждение.

Утверждение 12. Если $\lambda=0$ не есть собственное значение задачи Штурма–Лиувилля (56), (57), то:

1) при $\lambda\neq\lambda_{\mathrm{K}}$, $\mathrm{K}=1, 2, \ldots$, где λ_{K} – собственное значение задачи Штурма–Лиувилля (56), (57), существует единственное решение краевой задачи (68), (69), которое может быть найдено по 1-й формуле Шмидта для интегрального уравнения (70) (см. формулу (47));

2) при $\lambda=\lambda_{\mathrm{K}}$ (λ_{K} – собственное значение кратности 1 с собственной функцией $u_{\mathrm{K}}(x)$, либо кратности 2, т.е. $\lambda_{\mathrm{K}}=\lambda_{\mathrm{K}+1}$ с собственными функциями, отвечающими им $u_{\mathrm{K}}(x)$, $u_{\mathrm{K}+1}(x)$) для разрешимости задачи (68), (69) необходимо и достаточно, чтобы функция $g(x)$ была ортогональна всем собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля (56), (57), отвечающим собственному значению λ_{K}, т.е. чтобы $(g, u_i)=0$, где $i=\mathrm{K}$, или $i=\mathrm{K}$, $\mathrm{K}+1$. При этом решение краевой задачи (68), (69) может быть найдено по 2-й формуле Шмидта для интегрального уравнения (70) (см. формулу (48)).

Замечание 24. Решение краевой задачи

$$Lz=\lambda r(x)z(x)+g(x);$$
$$R_1 z=d_1;$$
$$R_2 z=d_2$$

можно представить в виде $z(x)=u(x)+\upsilon(x)$, где $u(x)$ есть решение краевой задачи (68), (69), а $\upsilon(x)$ – решение краевой задачи

$$L\upsilon = 0; \tag{71}$$

$$R_1\upsilon = d_1, \quad R_2\upsilon = d_2. \tag{72}$$

Если $\lambda = 0$ не есть собственное значение задачи Штурма–Лиувилля (56), (57), то решение $\upsilon(x)$ задачи (71), (72) существует и единственно и имеет вид $\upsilon(x) = C_1\upsilon_1(x) + C_2\upsilon_2(x)$, где C_1 и C_2 – решение системы (67), а $\upsilon_1(x)$, $\upsilon_2(x)$ – любые линейно независимые решения уравнения $L\upsilon = 0$. Условия существования решения $u(x)$ задачи (68), (69) дает утверждение 12.

Условия неотрицательности и положительности спектра задачи Штурма–Лиувилля

Рассмотрим задачу Штурма–Лиувилля

$$Lu = \lambda r(x)u(x), \quad x \in [a, b]; \tag{73}$$

$$\begin{cases} h_1u(a) - h_2u'(a) = 0; \\ H_1u(b) + H_2u'(b) = 0, \end{cases} \tag{74}$$

где $r(x) \in C[a, b]$; $r(x) > 0$ на $[a, b]$, $h_i \geq 0$, $H_i \geq 0$, $i = 1, 2$ и $h_1 + h_2 > 0$, $H_1 + H_2 > 0$, оператор L определяется равенством (52) и коэффициенты $p(x)$ и $q(x)$ в (52) удовлетворяют условиям: $p(x) \in C^1[a, b]$, $q(x) \in C[a, b]$.

Если λ_K, $K = 1, 2, ...,$ – собственные значения задачи Штурма–Лиувилля (56), (57), то справедливы следующие теоремы.

Теорема 22. Пусть в задаче Штурма–Лиувилля (56), (57) $q(x) \geq 0$, $p(x) > 0$ на $[a, b]$, тогда $\lambda_K \geq 0$ для любого $K = 1, 2, \ldots$.

Теорема 23. Если в задаче Штурма–Лиувилля (56), (57) $p(x) > 0$, $q(x) \geq 0$ на $[a, b]$. Тогда для того, чтобы $\lambda = 0$ было собственным значением задачи Штурма–Лиувилля (56), (57), необходимо и достаточно, чтобы $h_1 = H_1 = 0$, $q(x) = 0$ на $[a, b]$, при этом собственному значению $\lambda = 0$ соответствует собственная функция $u_0 \equiv \text{const} \neq 0$.

Пример 2.1. Найти решение краевой задачи

$$x^2 y'' + xy' - y = 0,$$

$$y(1) = 1, \quad y(x) \text{ ограничено при } x \to 0.$$

Решение. Нетрудно заметить, что заданное уравнение есть уравнение Эйлера [5]. Общее решение этого уравнения имеет вид

$$y_{\text{общ.}} = C_1 x + \frac{C_2}{x}.$$

Из краевых условий находим $C_2 = 0,\ C_1 = 1.$ Следовательно, решение краевой задачи имеет вид $y(x) = x.$

Пример 2.2. При каких a краевая задача

$$y'' + ay = 1;$$

$$y(0) = y(1) = 0$$

не имеет решений.

Решение. При $a = 0$ краевая задача решений не имеет. При $a > 0,$ очевидно, общее решение уравнения $y'' + ay = 1$ имеет вид $y = C_1 \cos\sqrt{a}\,x + C_2 \sin\sqrt{a}\,x + \dfrac{1}{a}.$

Заданная краевая задача не будет иметь решения тогда и только тогда, когда система

$$\begin{cases} C_1 = -\dfrac{1}{a}; \\ C_1 \cos\sqrt{a} + C_2 \sin\sqrt{a} = -\dfrac{1}{a} \end{cases} \tag{75}$$

относительно C_1 и C_2 несовместна (эта система получена из заданных граничных условий). Система (75) несовместна при условии, если $\sin\sqrt{a} = 0,\ \cos\sqrt{a} = -1$ (если $\sin\sqrt{a} = 0,$ то $\cos\sqrt{a} = \pm 1$). В случае $\cos\sqrt{a} = 1$ уравнения системы пропорциональны и, следовательно, система (75) совместна. Из последних условий находим, что заданная краевая задача не имеет решений при $a = (2n-1)^2\,\pi^2.$ Кроме того, как отмечено выше, при $a = 0$ также не существует решения краевой задачи. При $a < 0$ решение, очевидно, существует.

Пример 2.3. Построить функцию Грина следующей краевой задачи

$$x^2y'' + 2xy' - 2y = 0\,; \tag{76}$$

$$y(1) = 0, \quad y(x) \text{ ограничено при } x \to 0. \tag{77}$$

Решение. Сначала покажем, что для данной краевой задачи функция Грина существует и она единственная. Для этого достаточно показать, что краевая задача (76), (77) имеет только тривиальное решение.

Заданное уравнение есть уравнение Эйлера. Стандартным методом [5] находим фундаментальную систему решений этого уравнения $y_1 = x,\ y_2 = \dfrac{1}{x^2}$, т.е. общее решение уравнения (76) имеет вид $y(x) = C_1x + \dfrac{C_2}{x^2}$, где C_1 и C_2 – произвольные постоянные. Из краевых условий (77) находим, что $C_1 = C_2 = 0$. Итак, задача (76), (77) имеет только нулевое решение, а значит, для нее можно построить и притом единственную функцию Грина.

Будем искать функцию Грина $G\,(x,\, y)$ в виде

$$G(x,\, y) = \begin{cases} a_1x + \dfrac{a_2}{x^2}, & 0 \le x \le y; \\ b_1x + \dfrac{b_2}{x^2}, & y \le x \le 1. \end{cases} \tag{78}$$

Из непрерывности функции Грина

$$\left(a_1y + \frac{a_2}{y^2}\right) - \left(b_1y + \frac{b_2}{y^2}\right) = 0. \tag{79}$$

Из условия скачка первой производной функции Грина имеем

$$\left(a_1 - \frac{2a_2}{y^3}\right) - \left(b_1 - \frac{2b_2}{y^3}\right) = \frac{1}{y^2}. \tag{80}$$

Введем обозначения

$$C_{\text{K}} = a_{\text{K}} - b_{\text{K}}, \tag{81}$$

где $\text{K} = 1,\ 2, \ldots$.

Тогда из (79) и (80) для определения $C_{\text{К}}(y)$ получим систему

$$\begin{cases} C_1 y + \dfrac{C_2}{y^2} = 0; \\ C_1 - \dfrac{2C_2}{y^3} = \dfrac{1}{y^2}, \end{cases}$$

решение которой имеет вид $C_1 = \dfrac{1}{3y^2}$, $C_2 = -\dfrac{y}{3}$. Далее функция Грина должна удовлетворять заданным краевым условиям, которые в силу (78), (81) можно переписать в виде

$$\begin{cases} a_1 x + \dfrac{a_2}{x^2} \text{ ограничено при } x \to 0; \\ \left(a_1 - \dfrac{1}{3y^2}\right) + \left(a_2 + \dfrac{y}{3}\right) = 0. \end{cases}$$

Откуда имеем $a_2 = 0$; $a_1 = \dfrac{1-y^3}{3y^2}$. Из (81) находим $b_1 = -\dfrac{y}{3}$, $b_2 = \dfrac{y}{3}$. Таким образом, искомая функция Грина имеет вид

$$G(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\left(1-y^3\right)x}{3y^2}, & 0 \le x \le y; \\ \dfrac{\left(1-x^3\right)y}{3x^2}, & y \le x \le 1. \end{cases}$$

Пример 2.4. Для краевой задачи

$$y'' - y = f(x), \tag{82}$$

$$\begin{cases} y'(0) = 0; \\ y'(2) + y(2) = 0 \end{cases} \tag{83}$$

построить функцию Грина.

Решение. Рассмотрим однородное уравнение $y'' - y = 0$. Функции $y_1(x) = \operatorname{ch} x$ и $y_2(x) = e^{-x}$ являются решениями этого однородного уравнения и удовлетворяют, соответственно, 1-му и 2-му краевым условиям (83). Следовательно, согласно замечанию 20 можно функцию Грина $G(x, s)$ краевой задачи (82), (83) искать в виде

$$G(x, s) = \begin{cases} a \operatorname{ch} x, & 0 \le x \le s; \\ b\, e^{-x}, & s \le x \le 2. \end{cases} \tag{84}$$

Постоянные a и b будем находить из условий непрерывности функции Грина и из условия скачка производной функции Грина при $x = s$. Из этих условий для нахождения a и b получаем систему

$$\begin{cases} a \operatorname{ch} s - b\, e^{-s} = 0; \\ -b\, e^{-s} - a \operatorname{sh} s = 1. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим $a = -e^{-s}$, $u = -\operatorname{ch} s$. Следовательно, согласно (84) искомая функция Грина имеет вид

$$G(x, s) = \begin{cases} -e^{-s} \operatorname{ch} x, & 0 \le x \le s; \\ -e^{-x} \operatorname{ch} s, & s \le x \le 2. \end{cases}$$

Пример 2.5. Построить функцию Грина краевой задачи

$$y'' - y = 0; \tag{85}$$

$$y'(a) = y'(b) = 0. \tag{86}$$

Решение. Функции $y_1 = \operatorname{ch}(x-a)$ и $y_2 = \operatorname{ch}(x-b)$ являются решениями уравнения (85) и удовлетворяют, соответственно, первому и второму из условий (86). Ни одна из этих функций не удовлетворяет сразу двум условиям (86). Поэтому функция Грина существует и единственна и ее можно искать в виде

$$G(x, s) = \begin{cases} A \operatorname{ch} (x-a), & 0 \le x \le s; \\ B \operatorname{ch} (x-b), & s \le x \le b. \end{cases}$$

Для нахождения постоянных A и B из условия непрерывности $G(x, s)$ при $x = s$ и условия скачка производной функции Грина при $x = s$ получаем систему:

$$\begin{cases} A \operatorname{ch} (s-a) - B \operatorname{ch} (s-b) = 0; \\ B \operatorname{sh} (s-b) - A \operatorname{sh} (s-a) = 1. \end{cases}$$

Из этой системы без труда находим

$$A=-\frac{\operatorname{ch}\,(s-b)}{\operatorname{sh}(b-a)};\quad B=-\frac{\operatorname{ch}\,(s-b)}{\operatorname{sh}(b-a)}.$$

Следовательно, искомая функция Грина имеет вид

$$G(x,\,s)=\begin{cases}-\dfrac{\operatorname{ch}(x-a)\operatorname{ch}(s-b)}{\operatorname{sh}(b-a)}, & a\le x\le s;\\ -\dfrac{\operatorname{ch}(s-a)\operatorname{ch}(x-b)}{\operatorname{sh}(b-a)}, & s\le x\le b.\end{cases}$$

Пример 2.6. Построить функцию Грина краевой задачи

$$(xy')'-\mathrm{K}^2x^{-1}y=0,\quad \mathrm{K}\in N; \tag{87}$$

$$\begin{cases}y(1)+y'(1)=0;\\ y(x)\ \text{ограничено при }\ x\to 0.\end{cases} \tag{88}$$

Решение. Уравнение (87) можно переписать в виде

$$x^2y''+xy'-\mathrm{K}^2y=0.$$

Это уравнение Эйлера. Согласно общей методике [5] нетрудно найти линейно независимые решения $y_1=x^{\mathrm{K}}$ и $y_2=x^{-\mathrm{K}}$ уравнения (87). Так как задача (87), (88) имеет только тривиальное решение, то функция Грина задачи (87), (88) существует и она единственная. Будем искать ее в виде

$$G(x,\,s)=\begin{cases}a_1x^{\mathrm{K}}+a_2x^{-\mathrm{K}}, & 0\le x\le s;\\ b_1x^{\mathrm{K}}+b_2x^{-\mathrm{K}}, & s\le x\le 1.\end{cases} \tag{89}$$

Из условия непрерывности, условия скачка производной функции Грина и граничных условий (88) получаем для нахождения коэффициентов $a_1,\ a_2,\ b_1,\ b_2$ систему:

$$\begin{cases}a_1s^{\mathrm{K}}+a_2s^{-\mathrm{K}}-b_1s^{\mathrm{K}}-b_2s^{-\mathrm{K}}=0;\\ b_1\mathrm{K}s^{\mathrm{K}-1}-b_2\mathrm{K}s^{-\mathrm{K}-1}-a_1\mathrm{K}s^{\mathrm{K}-1}+a_2\mathrm{K}s^{-\mathrm{K}-1}=\dfrac{1}{s};\\ b_1+b_2+b_1\mathrm{K}-b_2\mathrm{K}=0;\\ a_2=0.\end{cases}$$

Решая эту систему, находим

$$a_1 = \frac{1}{2K}\left[\frac{1-K}{1+K}s^K - s^{-K}\right], \quad a_2 = 0;$$

$$b_1 = \frac{s^K(1-K)}{2K(1+K)}, \quad b_2 = -\frac{s^K}{2K}.$$

Подставляя значения этих коэффициентов в (89), получим

$$G(x, s) = \begin{cases} \left(\dfrac{1-K}{1+K}s^K - s^{-K}\right)\dfrac{x^K}{2K}, & 0 \le x \le s; \\ \dfrac{s^K}{2K}\left(\dfrac{1-K}{1+K}x^K - x^{-K}\right), & s \le x \le 1. \end{cases}$$

Пример 2.7. Решить краевую задачу

$$y'' + \pi^2 y = \cos \pi x,$$

$$\begin{cases} y(0) = y(1); \\ y'(0) = y'(1). \end{cases}$$

Решение. Найдем функцию Грина данной задачи. Так как соответствующая однородная краевая задача имеет только тривиальное решение, то функция Грина заданной задачи существует и единственна. Будем искать ее в виде

$$G(x, s) = \begin{cases} a_1 \sin \pi x + a_2 \cos \pi x, & a \le x \le s; \\ b_1 \sin \pi x + b_2 \cos \pi x, & s \le x \le 1. \end{cases}$$

Из условия непрерывности, условия скачка производной функции Грина и граничных условий заданной задачи получаем для нахождения коэффициентов a_1, a_2, b_1, b_2 систему:

$$\begin{cases} a_1 \sin \pi s + a_2 \cos \pi s - b_1 \sin \pi s - b_2 \cos \pi s = 0; \\ b_1 \pi \cos \pi s - b_2 \pi \sin \pi s - a_1 \pi \cos \pi s + a_2 \pi \sin \pi s = 1; \\ \qquad a_2 = -b_2; \\ \qquad a_1 = -b_1 \end{cases}$$

или
$$\begin{cases} a_1 \sin \pi s + a_2 \cos \pi s = 0; \\ -a_1 \cos \pi s + a_2 \sin \pi s = \dfrac{1}{2\pi}; \\ b_i = -a_i, \quad i = 1,\ 2. \end{cases}$$
Из этой системы без труда находим
$$a_1 = -\frac{\cos \pi s}{2\pi}, \quad a_2 = \frac{\sin \pi s}{2\pi}, \quad b_1 = \frac{\cos \pi s}{2\pi}, \quad b_2 = -\frac{\sin \pi s}{2\pi}.$$
Следовательно, функция Грина $G(x,\ s)$ имеет вид
$$G(x,\ s) = \begin{cases} \dfrac{\sin \pi (s - x)}{2\pi}, & 0 \le x \le s; \\ \dfrac{\sin \pi (x - s)}{2\pi}, & s \le x \le 1 \end{cases}$$
или
$$G(x,\ s) = \frac{\sin \pi |x - s|}{2\pi}, \quad x \in [0,\ 1].$$

Решение заданной краевой задачи в силу теоремы Гильберта выражается через функцию Грина следующим образом:
$$y(x) = \int_0^1 \frac{\sin \pi |x - s|}{2\pi} \cos \pi s \, ds$$
или
$$y(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^x \sin \pi (x - s) \cos \pi s \, ds + \frac{1}{2\pi} \int_x^1 \sin \pi (s - x) \cos \pi s \, ds =$$
$$= \frac{\sin \pi x}{2\pi} \int_0^x \cos^2 \pi s \, ds - \frac{\cos \pi x}{4\pi} \int_0^x \sin 2\pi s \, ds + \frac{\cos \pi x}{4\pi} \int_x^1 \sin 2\pi s \, ds -$$
$$- \frac{\sin \pi x}{2\pi} \int_x^1 \cos^2 \pi s \, ds = \frac{1}{4\pi} (2x - 1) \sin \pi x.$$

Пример 2.8. Свести к интегральному уравнению следующую краевую задачу
$$y'' + \lambda y = 2x + 1;$$
$$\begin{cases} y(0) = y'(1); \\ y'(0) = y(1). \end{cases}$$

Решение. Найдем функцию Грина краевой задачи

$$y''=0;$$

$$\begin{cases} y(0)=y'(1); \\ y'(0)=y(1). \end{cases}$$

Так как $y_1=1$ и $y_2=x$ – линейно независимые решения уравнения $y''=0$ и последняя однородная краевая задача имеет только тривиальное решение, то функция Грина этой краевой задачи существует и единственна и может быть найдена в виде

$$G(x,\, s)=\begin{cases} a_1+a_2x, & 0\le x\le s; \\ b_1+b_2x, & s\le x\le 1. \end{cases}$$

Из условия непрерывности, условия скачка производной функции Грина и граничных условий получаем для определения коэффициентов $a_1,\ a_2,\ b_1,\ b_2$ систему

$$\begin{cases} a_1+a_2s-b_1-b_2s=0; \\ b_2-a_2=1; \\ a_1=b_2; \\ a_2=b_1+b_2. \end{cases}$$

Из этой системы находим $a_1=s-1,\ a_2=s-2,\ b_1=-1,$ $b_2=s-1.$ Следовательно, функция Грина имеет вид

$$G(x,\, s)=\begin{cases} (s-1)+(s-2)x, & 0\le x\le s; \\ -1+(s-1)x, & s\le x\le 1. \end{cases} \tag{90}$$

Согласно теореме 18 заданная краевая задача эквивалентна интегральному уравнению

$$y(x)+\lambda\int_0^1 G(x,\, s)\,y(s)\,ds=\int_0^1 G(x,\, s)(2s+1)\,ds,$$

или, вычисляя последний интеграл, получим, что заданная краевая задача эквивалентна интегральному уравнению

$$y(x)+\lambda\int_0^1 G(x,\, s)\,y(s)\,ds=\frac{1}{6}\left(2x^3+3x^2-17x-5\right),$$

где $G(x,\, s)$ задается формулой (90).

Рекомендуем следующую раскладку задач по темам и занятиям.

РАСКЛАДКА ЗАДАЧ ПО ЗАНЯТИЯМ

Ззаня-тие	Задача	
	для решения на занятиях	для самостоятельной работы дома
1	[2]: 11, 13, 15, 17, 20, 22, 25, 26, 28, 30, 37, 39, 40, 42	[2]: 12, 14, 16, 19, 21, 23, 24, 27, 29, 36, 38, 41
2	[2]: 93, 95, 97, 98, 100, 101, 103, 106, 87, 90, 91	[2]: 92, 94, 96, 99, 102, 105, 107, 88
3	[2]: 111, 113, 115, 118, 120, 123, 125, 127, 130, 132	[2]: 112, 114, 116, 119, 121, 124, 126, 129, 131, 133
4	[2]: 134, 136, 138, 140, 142	[2]: 135, 137, 139, 141, 143
5	[2]:160, 162, 164, 166, 168, 170, 172, 174	[2]: 161, 163, 165, 167, 169, 171, 173
6	[2]: 175, 177, 179, 181, 182, 184, 185	[2]: 176, 178, 180, 183, 186
7	Задачи настоящей разработки	Задачи настоящей разработки
8	[2]: 192, 195, 198, 200, 202, 204, 206, 208, 210, 212, 214, 217, 220, 223, 225	[2]: 193, 197, 199, 201, 203, 207, 209, 211, 213, 216, 218, 221, 224

ЛИТЕРАТУРА

1. Волков Е.А. Лизоркин П.И. Интегральные и дифференциальные уравнения. – М.: МИФИ, 1977.

2. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Интегральные уравнения (задачи и упражнения). – М.: Наука, 1976.

3. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. – Наука, 1979.

4. Сандаков Е.Б. Основы аналитической геометрии и линейной алгебры. – М.: МИФИ, 2005.

5. Прилепко А.И., Сандаков Е.Б. Методические указания для преподавателей по теме: «Системы дифференциальных уравнений и устойчивость их решений». – М.: МИФИ, 1986.

6. Прилепко А.И. Евсин В.И. Сандаков Е.Б. Методические указания для преподавателей по теме: Дифференциальные уравнения первого и высшего порядков». – М.: МИФИ, 1981.