МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

Е.Б. Сандаков, Ю.Н. Гордеев

Методы решения линейных дифференциальных уравнений и систем с постоянными коэффициентами

Рекомендовано к изданию УМО
«Ядерные физика и технологии»

Москва 2013

УДК 517.9(07)
ББК 22.161.6я7
С 18

Сандаков Е.Б., Гордеев Ю.Н. **Методы решения линейных дифференциальных уравнений и систем с постоянными коэффициентами.** М.: НИЯУ МИФИ, 2013. – 64 с.

Книга содержит материал по девяти темам. В начале каждой темы дан теоретический материал, а затем изложены методы решения задач по данной теме. Приведенные решения большого количества задач помогут студентам лучше понять материал рассматриваемой темы. В конце каждой темы дано по 25 задач примерно одинаковой сложности для самостоятельного решения, которые можно предлагать студентам в качестве домашнего задания по этой дисциплине.

Предназначена для студентов второго курса всех факультетов НИЯУ МИФИ, а также может быть полезна преподавателям, ведущим лекционные и практические занятия по дифференциальным уравнениям.

Подготовлена в рамках Программы создания и развития НИЯУ МИФИ.

Рецензенты: доц. Е.А. Зернышкина (НИЯУ МИФИ);
д-р физ.-мат. наук, проф. И.М. Петрушко (МЭИ)

ISBN 978-5-7262-1844-1

СОДЕРЖАНИЕ

1. Линейные однородные дифференциальные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами

Линейными однородными дифференциальными уравнениями n-го порядка с постоянными коэффициентами называются уравнения вида

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \qquad (1.1)$$

где a_i – действительные постоянные ($i = 0, 1, \ldots, n$), причем $a_0 \neq 0$.

Любые n линейно независимых решений этого уравнения называются фундаментальной системой решений (ФСР) линейного однородного дифференциального уравнения (1.1).

ФСР уравнения (1.1) ищем в виде $y = e^{\lambda x}$, где λ – некоторое постоянное число (вещественное или комплексное), которое подлежит определению. Для его нахождения подставим $y = e^{\lambda x}$ в уравнение (1.1). В результате получим

$$e^{\lambda x}(a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n) = 0.$$

Так как $e^{\lambda x} \neq 0$, то

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0. \qquad (1.2)$$

Это уравнение называется характеристическим уравнением для линейного однородного дифференциального уравнения (1.1).

Характеристическое уравнение (уравнение n-го порядка) согласно основной теореме алгебры имеет ровно n корней с учетом их кратностей. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ – его корни. Тогда возможны следующие случаи.

1. Корни $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ – вещественные и различные. В этом случае ФСР уравнения (1.1) имеет вид $y_1 = e^{\lambda_1 x}$, $y_2 = e^{\lambda_2 x}$, ..., $y_n = e^{\lambda_n x}$, т.е. каждому корню λ_k характеристического уравнения (1.2) соответствует одна функция в ФСР. Общее решение уравнения (1.1) в этом случае имеет вид

$$y_{oo} = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + \ldots + c_n e^{\lambda_n x},$$

где $c_1, c_2, \ldots, c_n$ – произвольные числа.

2. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ – вещественные и различные корни характеристического уравнения (1.2) кратности $r_1, r_2, \ldots, r_k$, соответственно, причем $r_1 + r_2 + \ldots + r_k = n$, тогда функции

$$e^{\lambda_1 x}, xe^{\lambda_1 x}, ..., x^{r_1-1}e^{\lambda_1 x};$$
$$e^{\lambda_2 x}, xe^{\lambda_2 x}, ..., x^{r_2-1}e^{\lambda_2 x};$$
$$...;$$
$$e^{\lambda_k x}, xe^{\lambda_k x}, ..., x^{r_k-1}e^{\lambda_k x}$$

образуют ФСР уравнения (1.1). В этом случае общее решение уравнения (1.1) имеет вид

$$y_{\text{оо}} = (c_1 + c_2 x + ... + c_{r_1} x^{r_1-1})e^{\lambda_1 x} + (c_{r_1+1} + c_{r_1+2} x + ... + c_{r_1+r_2} x^{r_2-1})e^{\lambda_2 x} + ... +$$
$$+(c_{r_1+...+r_{k-1}+1} + c_{r_1+...+r_{k-1}+2} + ... + c_n x^{r_k-1})e^{\lambda_k x}.$$

3. Все корни характеристического уравнения (1.2) различны, но среди них есть комплексные корни.

Если характеристическое уравнение (1.2) имеет комплексный корень $\lambda_0 = \alpha + i\beta$ кратности k_0, то комплексно-сопряженное число $\overline{\lambda}_0 = \alpha - i\beta$ также является корнем характеристического уравнения (1.2) той же кратности k_0. Это следует из того, что коэффициенты уравнения (1.2) – вещественные.

Пусть

$$\lambda_1 = \alpha_1 + i\beta_1,\ \ \lambda_2 = \alpha_2 + i\beta_2, ..., \lambda_p = \alpha_p + i\beta_p;$$
$$\lambda_{p+1} = \alpha_1 - i\beta_1,\ \lambda_{p+2} = \alpha_2 - i\beta_2, ..., \lambda_{2p} = \alpha_p - i\beta_p;$$
$$\beta_k \neq 0,\ \ k = 1, ..., p,$$

различные комплексные, а $\lambda_{2p+1}, ..., \lambda_n$ – различные вещественные корни характеристического уравнения (1.2). Тогда ФСР уравнения (1.1) имеет вид $e^{\alpha_1 x}\cos\beta_1 x,\ e^{\alpha_1 x}\sin\beta_1 x,\ e^{\alpha_2 x}\cos\beta_2 x,\ e^{\alpha_2 x}\sin\beta_2 x, ...,$ $e^{\alpha_p x}\cos\beta_p x,\ e^{\alpha_p x}\sin\beta_p x,\ e^{\lambda_{2p+1} x}, ..., e^{\lambda_n x}$. Общее решение уравнения (1.1) в этом случае имеет вид

$$y_{oo} = (c_1\cos\beta_1 x + c_2\sin\beta_1 x)e^{\alpha_1 x} + (c_3\cos\beta_2 x + c_4\sin\beta_2 x)e^{\alpha_2 x} + ... +$$
$$+ (c_{2p-1}\cos\beta_p x + c_{2p}\sin\beta_p x)e^{\alpha_p x} + c_{2p+1}e^{\lambda_{2p+1} x} + ... + c_n e^{\lambda_n x}.$$

4. Среди корней характеристического уравнения (1.1) есть корни $\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k$ и $\overline{\lambda}_k = \alpha_k - i\beta_k$ ($\beta_k \neq 0$), комплексно-сопряженные кратности r_k ($k = 1, ..., s$).

Для того чтобы построить вещественную ФСР уравнения (1.1), надо для каждой пары комплексно-сопряженных корней $\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k$ и $\overline{\lambda}_k = \alpha_k - i\beta_k$ кратности r_k выписать $2r_k$ функций:

$$e^{\alpha_k x}\cos\beta_k x,\ e^{\alpha_k x}\sin\beta_k x,\ \ xe^{\alpha_k x}\cos\beta_k x,\ xe^{\alpha_k x}\sin\beta_k x,\ \ x^2e^{\alpha_k x}\cos\beta_k x,$$
$$x^2e^{\alpha_k x}\sin\beta_k x, ...,\ x^{r_k-1}e^{\alpha_k x}\cos\beta_k x,\ x^{r_k-1}e^{\alpha_k x}\sin\beta_k x,\ \ k=1, 2, ..., s. \qquad (1.3)$$

Затем добавить к найденным решениям (1.3) решения, отвечающие вещественным корням характеристического уравнения (1.2). Общее решение уравнения (1.1) в этом случае будет иметь вид

$$y_{\text{оо}} = c_1y_1 + c_2y_2 + ... + c_ny_n,\ \ c_i \in \mathbb{R},\ \ i = 1, 2, ..., n,$$

где $y_1, y_2, ..., y_n$ – построенная в этом случае ФСР.

Рассмотрим несколько примеров решений уравнений.

Пример 1.1. Решить уравнение

$$y^{(5)} - 10y''' + 9y' = 0. \qquad (1.4)$$

Решение. Выпишем характеристическое уравнение

$$\lambda^5 - 10\lambda^3 + 9\lambda = 0.$$

Это уравнение имеет пять различных корней: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 1$, $\lambda_4 = -3$, $\lambda_5 = 3$. Тогда функции $y_1 = 1$, $y_2 = e^{-x}$, $y_3 = e^x$, $y_4 = e^{-3x}$, $y_5 = e^{3x}$ образуют ФСР уравнения (1.4). Таким образом, общее решение уравнения (1.4) имеет вид

$$y_{oo} = c_1 + c_2e^{-x} + c_3e^x + c_4e^{-3x} + c_5e^{3x},$$

где c_k – произвольные вещественные числа $(k = 1, 2, ..., 5)$..

Пример 1.2. Решить уравнение

$$y^{(5)} - 4y^{(4)} + 4y''' = 0. \qquad (1.5)$$

Решение. Выпишем характеристическое уравнение

$$\lambda^5 - 4\lambda^4 + 4\lambda^3 = 0.$$

Это уравнение имеет два различных корня: $\lambda_1 = 0$ кратности три и $\lambda_2 = 2$ кратности два. Тогда функции $y_1 = 1$, $y_2 = x$, $y_3 = x^2$, $y_4 = e^{2x}$, $y_5 = xe^{2x}$ образуют ФСР уравнения (1.5). Общее решение уравнения (1.5) имеет вид

$$y_{\text{оо}} = c_1 + c_2x + c_3x^2 + (c_4 + c_5x)e^{2x},$$

где c_k – произвольные вещественные числа $(k = 1, 2, ..., 5)$.

Пример 1.3. Решить уравнение

$$y^{(6)} + 64y = 0. \qquad (1.6)$$

Решение. Выпишем характеристическое уравнение

$$\lambda^6 + 64 = 0.$$

Преобразуем его к виду $\lambda = \sqrt[6]{-64}$.

Пользуясь формулой для извлечения корня n-й степени из комплексного числа, получим шесть различных комплексных корней:

$$\lambda_k = 2\left(\cos\frac{\pi + 2\pi k}{6} + i\sin\frac{\pi + 2\pi k}{6}\right), \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

Воспользовавшись этой формулой, получим

$$\lambda_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} + i,$$

$$\lambda_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 2i,$$

$$\lambda_2 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} + i,$$

$$\lambda_3 = 2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} - i,$$

$$\lambda_4 = 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = -2i,$$

$$\lambda_5 = 2\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right) = \sqrt{3} - i.$$

Все корни попарно комплексно-сопряженные. Корням $\lambda_0 = \sqrt{3} + i$ и $\lambda_5 = \sqrt{3} - i$ соответствуют две вещественные функции из ФСР: $y_1 = e^{\sqrt{3}x}\cos x$ и $y_2 = e^{\sqrt{3}x}\sin x$, а корням $\lambda_1 = 2i$ и $\lambda_4 = -2i$ – функции $y_3 = \cos 2x$ и $y_4 = \sin 2x$. И, наконец, корням $\lambda_2 = -\sqrt{3} + i$ и $\lambda_3 = -\sqrt{3} - i$ соответствуют $y_5 = e^{-\sqrt{3}x}\cos x$ и $y_6 = e^{-\sqrt{3}x}\sin x$. Отсюда следует, что общее решение уравнения (1.6) имеет вид

$$y_{\text{оо}} = (c_1\cos x + c_2\sin x)e^{\sqrt{3}x} + c_3\cos 2x + c_4\sin 2x +$$
$$+ (c_5\cos x + c_6\sin x)e^{-\sqrt{3}x}.$$

Пример 1.4. Решить уравнение

$$y^{(6)} + 8y^{(4)} + 16y'' = 0. \tag{1.7}$$

Решение. Выпишем характеристическое уравнение

$$\lambda^6 + 8\lambda^4 + 16\lambda^2 = 0.$$

Это уравнение имеет три различных корня: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2i$, $\lambda_3 = -2i$. Все они имеют кратность два, причем λ_2 и λ_3 комплексно-сопряженные. Тогда функции $y_1 = 1$, $y_2 = x$, $y_3 = \cos 2x$, $y_4 = x\cos 2x$, $y_5 = \sin 2x$, $y_6 = x\sin 2x$ образуют ФСР уравнения (1.7). Общее решение уравнения (1.7) имеет вид

$$y_{\text{oo}} = c_1 + c_2 x + (c_3 + c_4 x)\cos 2x + (c_5 + c_6 x)\sin 2x.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. $y''' + 2y'' + 4y' + 8y = 0.$
2. $y^{(IV)} - 2y'' - 3y = 0.$
3. $y''' + y'' + 4y = 0.$
4. $y''' - y'' - 8y' + 12y = 0.$
5. $y''' + y'' + y' - 3y = 0.$
6. $2y''' + y'' + 5y' - 3y = 0.$
7. $y^{(IV)} - 5y''' - 20y' - 16y = 0.$
8. $y^{(IV)} + 7y''' + 11y'' + 7y' + 10y = 0.$
9. $y^{(IV)} + 16y = 0.$
10. $y^{(IV)} + y''' - 8y' - 8y = 0.$
11. $y^{(IV)} + 2y''' + y'' - 2y' - 2y = 0.$
12. $y^{(IV)} - 7y''' + 5y'' + 4y' + 12y = 0.$
13. $y^{(6)} + 64y = 0.$
14. $y^{(8)} - y = 0.$
15. $y^{(6)} - 64y = 0.$
16. $y^{(6)} - 7y''' - 8y = 0.$
17. $y''' - 3y'' + 4y' - 2y = 0.$
18. $y''' + y' - 10y = 0.$
19. $y''' - 2y'' - 3y' + 10y = 0.$
20. $y^{(IV)} + 18y'' + 81y = 0.$
21. $y^{(IV)} - 2y''' + 5y'' - 8y' + 4y = 0.$
22. $y^{(IV)} + 3y''' - 8y' + 24y = 0.$
23. $y^{(IV)} - 2y''' - 8y'' + 19y' - 6y = 0.$
24. $y^{(8)} - 15y^{(IV)} - 16y = 0.$
25. $y^{(5)} - y''' + 4y'' - 4y' = 0.$

2. Неоднородные дифференциальные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами и специальной правой частью

Линейным неоднородным дифференциальным уравнением n-го порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение вида

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x), \tag{2.1}$$

где a_k – действительные постоянные ($k = 0, 1, 2, \ldots, n$), причем $a_0 \neq 0$, а $f(x)$ – известная функция, называемая правой частью уравнения. Если $f(x) \equiv 0$, то уравнение

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \tag{2.2}$$

называется однородным уравнением, соответствующим неоднородному уравнению (2.1). Для неоднородного уравнения (2.1) справедлива следующая теорема.

Теорема 2.1. Общее решение уравнения (2.1) равно сумме общего решения соответствующего однородного уравнения (2.2) и какого-либо частного решения неоднородного уравнения (2.1), т.е.

$$y_{\text{он}} = y_{\text{оо}} + y_{\text{чн}},$$

где $y_{\text{он}}$ – общее решение неоднородного уравнения; $y_{\text{оо}}$ – общее решение соответствующего однородного уравнения; $y_{\text{чн}}$ – частное решение неоднородного уравнения.

Методы нахождения общего решения однородного уравнения (2.2) были рассмотрены в теме 1. Здесь остановимся на методе нахождения частного решения неоднородного уравнения (2.1) в случае, когда правая часть $f(x)$ имеет специальный вид:

$$f(x) = [P_k(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x]e^{\alpha x}, \tag{2.3}$$

где $P_k(x)$ и $Q_m(x)$ – многочлены степени k и m соответственно. (Иногда этот вид правой части $f(x)$ называют «квазиполиномом».)

Утверждение 2.1. Частное решение неоднородного уравнения (2.1) с правой частью $f(x)$, имеющей вид (2.3), может быть найдено в виде

$$y_{чн} = x^s[P_n(x)\cos\beta x + Q_n(x)\sin\beta x]e^{\alpha x}, \tag{2.4}$$

где $n = \max(k, m)$; s – кратность корня $\lambda_0 = \alpha + i\beta$ характеристического уравнения (1.2) (если $\lambda_0 = \alpha + i\beta$ не является корнем характеристического уравнения (1.2), то $s = 0$); $P_n(x)$ и $Q_n(x)$ – многочлены от x степени n общего вида с неизвестными коэффициентами.

Чтобы найти неизвестные коэффициенты многочленов $P_n(x)$ и $Q_n(x)$ из (2.4), пользуются методом неопределенных коэффициентов. Суть метода состоит в том, что, подставляя частное решение (2.4) в уравнение (2.1) со специальной правой частью $f(x)$ вида (2.3) и используя линейную независимость функций $\cos\beta x$, $\sin\beta x$, а затем линейную независимость функций x^r, $r = 0, 1, 2, ..., n$, получим для определения коэффициентов систему $2n + 2$ уравнений с $2n + 2$ неизвестными.

При нахождении частных решений линейных дифференциальных уравнений

$$Ly = a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x), \qquad (2.5)$$

где $a_0(x) \neq 0$ и $a_i(x), f(x)$ – заданные функции от x ($i = 0, 1, 2, ..., n$), часто бывает полезным следующее утверждение.

Утверждение 2.2 (принцип суперпозиции). Если правая часть уравнения (2.5) представляет собой сумму функций $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + ... + f_k(x)$, то в качестве частного решения уравнения (2.5) можно взять функцию $y(x) = y_1(x) + y_2(x) + ... + y_k(x)$, где $y_i(x)$ ($i = 1, 2, ..., k$) есть частное решение уравнения с той же левой частью и правой частью $f_i(x)$, т.е. $y_i(x)$ есть частное решение уравнения $Ly = f_i(x)$, $i = 1, 2, ..., k$.

Пример 2.1. Решить уравнение

$$y'' - 2y' - 3y = 9x^2. \qquad (2.6)$$

Решение. Сначала найдем общее решение соответствующего однородного уравнения

$$y'' - 2y' - 3y = 0.$$

Его характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$$

имеет корни: $\lambda_1 = -1$ и $\lambda_2 = 3$. Следовательно, общее решение однородного уравнения имеет вид

$$y_{\text{оо}} = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x}.$$

Остается найти частное решение неоднородного уравнения (2.6). Сравнивая его правую часть $f = 9x^2$ с (2.3), видим, что $n = 2$, $\alpha = 0$, $\beta = 0$. Число $\lambda_0 = \alpha + i\beta = 0$ не является корнем характеристического уравнения, следовательно, $s = 0$. Поэтому $y_{\text{ч.н}}$ согласно (2.4) следует искать в виде

$$y_{\text{чн}} = ax^2 + bx + c.$$

Подставляя эту функцию в (2.6), получим

$$2a - 2(2ax + b) - 3(ax^2 + bx + c) = 9x^2$$

или

$$-3ax^2 - (4a + 3b)x + 2a - 2b - 3c = 9x^2.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, имеем для нахождения коэффициентов a, b, c систему

$$\begin{cases} -3a = 9; \\ 4a + 3b = 0; \\ 2a - 2b - 3c = 0. \end{cases}$$

Из этой системы находим: $a = -3$, $b = 4$, $c = -\dfrac{14}{3}$. Следовательно, $y_{чн} = -3x^2 + 4x - \dfrac{14}{3}$. Тогда общее решение неоднородного уравнения (2.6) имеет вид

$$y_{он} = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x} - 3x^2 + 4x - \frac{14}{3}.$$

Пример 2.2. Решить уравнение

$$y'' + y' - 2y = 4e^{-x}. \qquad (2.7)$$

Решение. Сначала найдем общее решение соответствующего однородного уравнения

$$y'' + y' - 2y = 0.$$

Его характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$

имеет корни: $\lambda_1 = -2$ и $\lambda_2 = 1$. Следовательно, общее решение однородного уравнения получаем в виде $y_{\text{оо}} = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{x}$.

Остается найти частное решение неоднородного уравнения (2.7). Сравнивая его правую часть $f = 4e^{-x}$ с (2.3), видим, что $n = 0$, $\alpha = -1$, $\beta = 0$. Число $\lambda_0 = \alpha + i\beta = -1$ не является корнем характеристического уравнения, следовательно, $s = 0$. Поэтому $y_{\text{чн}}$ согласно (2.4) следует искать в виде $y_{\text{чн}} = ae^{-x}$. Подставляя эту функцию в (2.7), получим

$$ae^{-x} - ae^{-x} - 2ae^{-x} = 4e^{-x},$$

откуда следует, что $a = -2$. Следовательно, $y_{\text{чн}} = -2e^{-x}$.

Тогда общее решение неоднородного уравнения (2.7) имеет вид

$$y_{он} = c_1e^{-2x} + c_2e^{x} - 2e^{-x}.$$

Пример 2.3. Решить уравнение

$$y'' + 9y = 6\cos 3x. \qquad (2.8)$$

Решение. Сначала найдем общее решение соответствующего однородного уравнения

$$y'' + 9y = 0.$$

Его характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + 9 = 0$$

имеет два комплексно-сопряженных корня: $\lambda_1 = 3i$ и $\lambda_2 = -3i$. Следовательно, общее решение однородного уравнения получаем в виде

$$y_{\text{оо}} = c_1\cos 3x + c_2\sin 3x.$$

Остается найти частное решение неоднородного уравнения (2.8). Сравнивая его правую часть $f = 6\cos 3x$ с (2.3), видим, что $n = 0$, $\alpha = 0$, $\beta = 3$. Число $\lambda_0 = \alpha + i\beta = 3i$ является корнем характеристического уравнения, следовательно, $s = 1$. Поэтому $y_{\text{ч.н}}$ согласно (2.4) следует искать в виде

$$y_{\text{чн}} = x(a\cos 3x + b\sin 3x).$$

По формуле Лейбница находим

$$y''_{чн} = 2(-3a\sin 3x + 3b\cos 3x) + x(-9a\cos 3x - 9b\sin 3x)$$

и вместе с $y_{\text{ч.н}}$, подставляя в (2.8), получим

$$x(-9a\cos 3x - 9b\sin 3x) + 2(-3a\sin 3x + 3b\cos 3x) +$$
$$+9x(a\cos 3x + b\sin 3x) = 6\cos 3x.$$

После упрощения получаем

$$-6a\sin 3x + 6b\cos 3x = 6\cos 3x,$$

откуда следует, что $a = 0$, $b = 1$. Поличили $y_{\text{ч.н}} = x\sin 3x$. Тогда общее решение неоднородного уравнения (2.8) имеет вид

$$y_{он} = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x + x \sin 3x\,.$$

Пример 2.4. Решить уравнение

$$y'' - 6y' + 10y = 2e^{3x} \sin x. \tag{2.9}$$

Решение. Сначала найдем общее решение соответствующего однородного уравнения

$$y'' - 6y' + 10y = 0.$$

Его характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - 6\lambda + 10 = 0$$

имеет два комплексно-сопряженных корня: $\lambda_1 = 3 - i$ и $\lambda_2 = 3 + i$. Следовательно, общее решение однородного уравнения имеет вид

$$y_{\text{оо}} = c_1 e^{3x} \cos x + c_2 e^{3x} \sin x.$$

Остается найти частное решение неоднородного уравнения (2.9). Сравнивая его правую часть $f = 2e^{3x}\cos x$ с (2.3), видим, что $n =$ $= 0$, $\alpha = 3$, $\beta = 1$. Число $\lambda_0 = \alpha + i\beta = 3 + i$ является корнем характеристического уравнения кратности один, следовательно, $s = 1$. Поэтому $y_{\text{чн}}$ согласно (2.4) следует искать в виде

$$y_{\text{чн}} = x(A\cos x + B \sin x)\, e^{3x}.$$

Найдем $y'_{\text{чн}}$ и $y''_{\text{чн}}$:

$$y'_{\text{чн}} = [(Bx + A)\cos x + (B - Ax)\sin x]e^{3x} + 3(Ax\cos x + Bx\sin x)e^{3x},$$

$$y''_{\text{чн}} = [(2B - Ax)\cos x + (Bx - 2A)\sin x]e^{3x} + 6[(Bx + A)\cos x +$$

$$+(B - Ax)\sin x]e^{3x} + 9(Ax\cos x + Bx\sin x)e^{3x},$$

и подставим их вместе с $y_{\text{чн}}$ в (2.9):

$$(2B - Ax)\cos x - (Bx + 2A)\sin x + 6[(Bx + A)\cos x + (B - Ax)\sin x] +$$

$$+9(Ax\cos x + Bx\sin x) - 6[(Bx + A)\cos x + (B - Ax)\sin x] -$$

$$-18(Ax\cos x + Bx\sin x) + 10(ax\cos x + Bx\sin x) = \sin x$$

или

$$2B\cos x - 2A\sin x = 2\sin x\,,$$

откуда получим $A = -1$, $B = 0$. Следовательно, $y_{\text{чн}} = -xe^{3x}\cos x$.
Таким образом, окончательно имеем

$$y_{он} = c_1 e^{3x} \cos x + c_2 e^{3x} \sin x - xe^{3x} \cos x.$$

Пример 2.5. Решить уравнение

$$y'' + y' - 2y = 18xe^{x} + 3e^{-2x}. \qquad (2.10)$$

Решение. Сначала найдем общее решение соответствующего однородного уравнения

$$y'' + y' - 2y = 0.$$

Его характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$

имеет два корня: $\lambda_1 = -2$ и $\lambda_2 = 1$. Следовательно, общее решение однородного уравнения имеет вид

$$y_{\text{оо}} = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{x}.$$

Остается найти частное решение неоднородного уравнения (2.10). Правая часть уравнения (2.10) $f = 18xe^{x} + 3e^{-2x}$ может быть представлена в виде $f = f_1 + f_2$, где $f_1 = 18xe^{x}$, $f_2 = 3e^{-2x}$.

Тогда для нахождения $y_{\text{чн}}$ уравнения (2.10) воспользуемся принципом суперпозиции (утверждение 2.2), согласно которому $y_{\text{чн}} = y_1 + y_2$, где y_1 – частное решение уравнения

$$y'' + y' - 2y = 18xe^{x}, \qquad (2.11)$$

а y_2 – частное решение уравнения

$$y'' + y' - 2y = 3e^{-2x}. \qquad (2.12)$$

Будем искать y_1 в виде $y_1 = x(ax + b)e^{x}$. Подставляя y_1 в (2.11), получим

$$2a + 2(2ax + b) + (ax^2 + bx) + (2ax + b) + (ax^2 + bx) - 2(ax^2 + bx) = \\ = 18x$$

или

$$2a + 3b + 6ax = 18x.$$

Следовательно, $\begin{cases} 2a + 3b = 0; \\ 6a = 18, \end{cases}$ откуда $a = 3$, $b = -2$.

Итак, $y_1 = x(3x - 2)e^{x}$.

Будем искать y_2 в виде $y_2 = axe^{-2x}$. Подставляя y_2 в (2.12), получим

$$-4a + 4ax + a - 2ax - 2ax = 3,$$

откуда $a = -1$. Следовательно, $y_2 = -xe^{-2x}$. Тогда

$$y_{\text{чн}} = y_1 + y_2 = x(3x - 2)e^{x} - xe^{-2x}.$$

Таким образом, общее решение уравнения (2.10) будет иметь вид

$$y_{он} = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{x} + (3x^2 - 2x)e^{x} - xe^{-2x} .$$

Задачи для самостоятельного решения

1. $y'' - 4y' + 4y = xe^{2x} + 2\cos 2x$.
2. $y'' - 4y' = x\sin 2x + x^2 e^{-4x}$.
3. $y'' + 2y' + y = 2xe^{-x} + 3\sin x$.
4. $y'' - 9y' = xe^{3x} + \cos 3x$.
5. $y'' + 2y' + 2y = e^{-x} + \cos x + xe^{x}$.
6. $y'' + 6y' + 9y = 2e^{-3x} + x\sin x$.
7. $y'' - 4y' + 8y = e^{2x}\sin 2x + 2x\cos x$.
8. $y'' - 2y' + y = 3xe^{x} + 2\cos x$.
9. $y'' - 4y' + 3y = 2xe^{x} + e^{3x}$.
10. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 2xe^{x} + 3e^{-2x}$.
11. $y'' - 6y' + 9y = 4xe^{3x} + \sin 2x$.
12. $y'' - 2y' + 2y = xe^{x}\cos x + 2e^{-x}$.
13. $y''' + 2y'' - y' - 2y = xe^{-2x} + \mathrm{ch}\, x$.
14. $y'' - 10y' + 25y = xe^{5x} + x\sin 2x$.
15. $y'' - 8y' + 16y = xe^{4x} + \mathrm{ch}\, 2x$.
16. $y'' + 25y = x\sin 5x + x^2 e^{2x}$.
17. $y'' - 4y' + 8y = e^{2x}\cos 2x + 2x\,\mathrm{sh}\, 2x$.
18. $y^{(IV)} + 4y'' + 4y = x\cos 2x + x^2\mathrm{ch}\, x$.
19. $y'' - 9y = xe^{3x} + \cos 3x$.
20. $y'' + 8y' + 16y = 2xe^{-4x} + x\sin 2x$.
21. $y'' + 16y = x\sin 4x + 2x^2 e^{2x}$.
22. $y'' + 4y' + 8y = e^{-2x}\sin 2x + 3xe^{x}$.
23. $y^{(IV)} + 2y''' + y'' = 2xe^{-x} + x^2$.
24. $y^{(IV)} + 2y'' + y = x\sin x + 2x^2 e^{2x}$.
25. $y''' + 6y'' + 9y' = xe^{-3x} + 3\mathrm{ch}\, 2x$.

3. Неоднородные дифференциальные уравнения *n*-го порядка с постоянными коэффициентами, решаемые методом вариации постоянных

В теме 2 был рассмотрен метод нахождения частного решения неоднородного уравнения (2.1) со специальной правой частью. Метод вариации постоянных, который будет рассмотрен здесь, применим для любого вида линейных неоднородных дифференциальных уравнений независимо от вида правой части и позволяет найти общее решение неоднородного уравнения во всех случаях, если известно общее решение соответствующего однородного уравнения.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x)\,, \qquad (3.1)$$

где $a_k(x)$ и $f(x)$ – заданные непрерывные функции ($k = 0, 1, 2, \ldots, n$), определенные на $<a; b>$, $a_0(x) \neq 0$. (Всюду ниже через $<a, b>$ будем обозначать любое из множеств (a, b), $(a, b]$, $[a, b)$, $[a, b]$, $-\infty \leq a <$ $< b \leq +\infty$.)

Пусть $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ – ФСР соответствующего однородного уравнения

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0\,, \qquad (3.2)$$

Тогда общее решение однородного уравнения (3.2) имеет вид

$$y_{\text{оо}} = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \ldots + c_ny_n(x),$$

где c_1, c_2, ..., c_n – произвольные постоянные.

Утверждение 3.1. Решение неоднородного уравнения (3.1) может быть найдено в виде

$$y_{\text{он}} = c_1(x)\, y_1 + c_2(x)\, y_2 + \ldots + c_n(x)\, y_n, \qquad (3.3)$$

где $c_1(x)$, $c_2(x)$, ..., $c_n(x)$ – неизвестные функции, которые определяются из системы:

$$\begin{cases} c_1'y_1 + c_2'y_2 + \ldots + c_n'y_n = 0; \\ c_1'y_1' + c_2'y_2' + \ldots + c_n'y_n' = 0; \\ \ldots; \\ c_1'y_1^{(n-2)} + c_2'y_2^{(n-2)} + \ldots + c_n'y_n^{(n-2)} = 0; \\ c_1'y_1^{(n-1)} + c_2'y_2^{(n-1)} + \ldots + c_n'y_n^{(n-1)} = f(x). \end{cases} \qquad (3.4)$$

Замечание. Определитель системы (3.4) всегда отличен от нуля на всём <*a*, *b*> так как он совпадает с определителем Вронского от ФСР y_1, y_2, ..., y_n. Тогда из теоремы Крамера следует, что система (3.4) имеет единственное решение $c_k'(x) = \varphi_k(x)$, $k = 1, 2, ..., n$. Откуда находим

$$c_k(x) = \int \varphi_k(x)dx + \tilde{c}_k, \quad k = 1, 2, ..., n,$$

где $\tilde{c}_k$ – произвольные постоянные.

Подставляя найденные $c_k(x)$ в (3.3), получим общее решение исходного неоднородного уравнения (3.1).

Рассмотрим примеры применения этого метода.

Пример 3.1. Решить уравнение

$$y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{1+e^x}. \tag{3.5}$$

Решение. Сначала найдем общее решение соответствующего однородного уравнения

$$y'' + 3y' + 2y = 0.$$

Его характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

имеет два корня: $\lambda_1 = -2$ и $\lambda_2 = -1$. Следовательно, общее решение однородного уравнения имеет вид $y_{\text{оо}} = c_1e^{-2x} + c_2e^{-x}$, где c_1, c_2 – произвольные постоянные.

Общее решение неоднородного уравнения (3.5) будем искать в виде

$$y_{\text{он}} = c_1(x)e^{-2x} + c_2(x)e^{-x}, \tag{3.6}$$

где $c_1(x)$, $c_2(x)$ – неизвестные функции, которые согласно утверждению 3.1 могут быть найдены из системы $\begin{cases} c_1'e^{-2x} + c_2'e^{-x} = 0; \\ -2c_1'e^{-2x} - c_2'e^{-x} = \dfrac{1}{1+e^x}. \end{cases}$

Решая эту систему, находим $c_1' = -\dfrac{e^{2x}}{1+e^x}$ и $c_2' = \dfrac{e^x}{1+e^x}$. Откуда получаем:

$$c_1(x) = -\int \frac{e^{2x}dx}{1+e^x} = -e^x + \ln(1+e^x) + \widetilde{c_1},$$
$$c_2(x) = \int \frac{e^x dx}{1+e^x} = \ln(1+e^x) + \widetilde{c_2}.$$

Подставляя найденные $c_1(x)$, $c_2(x)$ в (3.6), получим общее решение неоднородного уравнения (3.5):

$$y_{он} = \widetilde{c_1}e^{-2x} - e^{-x} + e^{-2x}\ln(1+e^x) + \widetilde{c_2}e^{-x} + e^{-x}\ln(1+e^x)$$

или

$$y_{он} = \widetilde{c_1}e^{-2x} + \widetilde{c_2}e^{-x} + (e^{-2x} + e^x)\ln(1+e^x),$$

где $\tilde{c}_1$ и $\tilde{c}_2$ – произвольные постоянные.

Пример 3.2. Решить уравнение

$$y'' + 4y = 4\operatorname{ctg} 2x. \tag{3.7}$$

Решение. Сначала найдем общее решение соответствующего однородного уравнения $y'' + 4y = 0$. Его характеристическое уравнение $\lambda^2 + 4 = 0$ имеет два комплексно-сопряженных корня: $\lambda_1 = -2i$ и $\lambda_2 = 2i$. Следовательно, общее решение однородного уравнения имеет вид $y_{оо} = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$, где c_1, c_2 – произвольные постоянные.

Общее решение неоднородного уравнения (3.7) будем искать в виде

$$y_{он} = c_1(x)\cos 2x + c_2(x)\sin 2x, \tag{3.8}$$

где $c_1(x)$, $c_2(x)$ – неизвестные функции, которые согласно утверждению 3.1 могут быть найдены из системы

$$\begin{cases} c_1' \cos 2x + c_2' \sin 2x = 0; \\ -2c_1' \sin 2x + 2c_2' \cos 2x = 4\operatorname{ctg} 2x. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим $c_1' = -2\cos 2x$ и $c_2' = 2\dfrac{\cos^2 2x}{\sin 2x}$. Откуда получаем:

$$c_1(x) = -2\int \cos 2x dx = -\sin 2x + \tilde{c}_1,$$

$$c_2(x) = 2\int \frac{\cos^2 2x}{\sin 2x}dx = 2\int \frac{dx}{\sin 2x} - 2\int \sin 2x dx = \ln|\operatorname{tg} x| + \cos 2x + \tilde{c}_2.$$

Подставляя найденные $c_1(x)$, $c_2(x)$ в (3.8), получим общее решение неоднородного уравнения (3.7):

$$y_{\text{он}} = (-\sin 2x + \tilde{c}_1)\cos 2x + (\ln|\operatorname{tg}x| + \cos 2x + \tilde{c}_2)\sin 2x$$

или $$y_{\text{он}} = \tilde{c}_1 \cos 2x + \tilde{c}_2 \sin 2x + \sin 2x \ln|\operatorname{tg}x|.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. $y'' + y' = \dfrac{1}{1+e^x}$.
2. $y'' + y' - 2y = \dfrac{1}{1-e^x}$.
3. $y'' + y' - 2y = \operatorname{sech} x$.
4. $y'' + 4y' + 4y = \dfrac{e^{-2x}}{\operatorname{ch} 2x}$.
5. $y'' - 4y = 4\operatorname{th} 2x$.
6. $y'' + 2y' = \dfrac{2}{\operatorname{sh} 2x}$.
7. $y'' - 2y' - 3y = \dfrac{e^{2x}}{(1+e^x)^2}$.
8. $y'' - y' - 6y = \dfrac{e^x}{1+e^{2x}}$.
9. $y'' - 9y = 3e^{3x} \operatorname{cth} 3x$.
10. $y'' + 4y' = \dfrac{e^{-4x}}{\operatorname{ch} 2x}$.
11. $y'' + 2y' + y = \dfrac{e^{-x}}{1+x^2}$.
12. $y'' - 3y' = \dfrac{1}{1+e^{3x}}$.
13. $y'' - 4y' + 4y = \dfrac{2e^{2x}}{x+2}$.
14. $y'' + 4y' = 2\operatorname{ctg} 2x$.
15. $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} x\sqrt{x-2}$.
16. $y'' - 2y' = \dfrac{e^x}{1-e^{2x}}$.
17. $y'' - 3y' + 2y = \dfrac{e^x}{(1-e^x)^2}$.
18. $y'' + 9y = \dfrac{3}{\sin^2 3x}$.
19. $y'' - 2y' + y = \dfrac{xe^x}{1+x^2}$.
20. $y'' + 3y' + 2y = 2\operatorname{th} x$.
21. $y'' + 3y' = \dfrac{e^x}{\operatorname{sh}^2 x}$.
22. $y'' - 4y' + 3y = \dfrac{e^{2x}}{(1+e^x)^2}$.
23. $y'' - 6y' + 9y = \dfrac{xe^{2x}}{\sqrt{x^2+1}}$.
24. $y'' + 16y = \dfrac{1}{\sin^2 4x}$.
25. $y'' + 4y' + 3y = e^{-x} \operatorname{cth} x$.

4. Уравнения Эйлера

Уравнения

$$a_0 x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-2} x^2 y'' + a_{n-1} x y' + a_n y = f(x), \quad (4.1)$$

где a_0, a_1, a_2, ..., a_n – постоянные ($a_0 \neq 0$) называется уравнением Эйлера. Оно сводится к линейному уравнению с постоянными коэффициентами заменой независимого переменного $x = e^t$ при $x > 0$ (или $x = -e^t$ при $x < 0$).

Вычисляя производные

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dt}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{1}{x^3}\left(\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\right) \text{ и т.д.}$$

и подставляя их в уравнение Эйлера, получим линейное уравнение с постоянными коэффициентами, характеристическое уравнение которого имеет вид

$$a_0 \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\ldots(\lambda-n+1) + \ldots + a_{n-2}\lambda(\lambda-1) + a_{n-1}\lambda + a_n = 0. \quad (4.2)$$

При составлении этого уравнения каждое произведение $x^k y^{(k)}$ в (4.1) заменяется на произведение к убывающих на единицу чисел $\lambda(\lambda - 1) \ldots (\lambda - k + 1)$.

Пример 4.1. Решить уравнение

$$x^3 y''' + 2xy' - 2y = 0. \quad (4.3)$$

Решение. Это однородное уравнение Эйлера. После замены независимого переменного $x = e^t$ оно сводится к линейному уравнению с постоянными коэффициентами, характеристическое уравнение которого имеет вид

$$\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2) + 2\lambda - 2 = 0. \quad (4.4)$$

У него корень $\lambda_1 = 1$ и два комплексно-сопряженных корня $\lambda_2 = -1 - i$, $\lambda_3 = -1 + i$. При таких λ общее решение однородного уравнения с постоянными коэффициентами (с характеристическим уравнением (4.4)) имеет вид

$$y_{oo}(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} \cos t + c_3 e^{-t} \sin t\,,$$

или, возвращаясь к переменному x, получим

$$y_{oo}(x) = c_1 x + c_2 \frac{\cos \ln |x|}{x} + c_3 \frac{\sin \ln |x|}{x}.$$

Пример 4.2. Решить уравнение

$$x^2 y'' + 4xy' - 4y = 7x \ln x + 17 \sin(\ln x). \qquad (4.5)$$

Решение. Это – неоднородное уравнение Эйлера. Сначала найдем общее решение однородного уравнения

$$x^2 y'' + 4xy' - 4y = 0\,.$$

Сделав замену переменной $x = e^t$, для вновь полученного уравнения с постоянными коэффициентами, получаем согласно (4.2) характеристическое уравнение $\lambda(\lambda - 1) + 4\lambda - 4 = 0$ или

$$\lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0. \qquad (4.6)$$

Оно имеет корни $\lambda_1 = -4$ и $\lambda_2 = 1$. Следовательно,

$$y_{oo}(t) = c_1 e^{-4t} + c_2 e^t\,.$$

Чтобы решить неоднородное уравнение (4.5), сначала по характеристическому уравнению (4.6) составляем левую часть дифференциального уравнения, а правую часть получаем из правой части (4.5) заменой $x = e^t$. В результате получим

$$y'' + 3y' - 4y = 7te^t + 17 \sin t. \qquad (4.7)$$

Воспользовавшись принципом суперпозиции (утверждение 2.2), будем $y_{чн}$ искать в виде $y_{чн} = y_1 + y_2$, где y_1 – частное решение уравнения

$$y'' + 3y' - 4y = 7te^t\,, \qquad (4.8)$$

а y_2 – частное решение уравнения

$$y'' + 3y' - 4y = 17 \sin t. \qquad (4.9)$$

Так как $\lambda = 1$ является корнем характеристического уравнения, то y_1 ищем в виде $y_1 = t(at + b)e^t$. Подставляя эту функцию в (4.8), находим $a = \frac{7}{10}$, $b = -\frac{7}{25}$. Следовательно,

$$y_1 = \left(\frac{7}{10}t^2 - \frac{7t}{25}\right)e^t .$$

Так как $\lambda = i$ не является корнем характеристического уравнения, то y_2 ищем в виде $y_2 = a\cos t + b\sin t$. Подставляя эту функцию в (4.9), находим $a = -\frac{3}{10}$, $b = -\frac{1}{2}$. Тогда

$$y_2 = -\frac{3}{10}\cos t - \frac{1}{2}\sin t .$$

Следовательно, общее решение уравнения (4.7) будет иметь вид

$$y_{он} = c_1 e^{-4t} + c_2 e^t + \left(\frac{7}{10}t^2 - \frac{7}{25}t\right)e^t - \frac{3}{10}\cos t - \frac{1}{2}\sin t$$

или, возвращаясь к переменной x, получим общее решение уравнения (4.5):

$$y_{он}(x) = \frac{c_1}{x^4} + c_2 x + 7\ln x\left(\frac{\ln x}{10} - \frac{1}{25}\right)x - \frac{3}{10}\cos(\ln x) - \frac{1}{2}\sin(\ln x) .$$

Задачи для самостоятельного решения

1. $x^2 y'' - 2xy' + 4y = 2\cos(\ln x) + \ln^2 x$.
2. $x^2 y'' + 3xy' + y = \frac{3\ln x}{x} + 2x^2$.
3. $x^2 y'' + 2xy' - 6y = 3x^2 + \frac{2\ln x}{x^3}$.
4. $x^2 y'' - 4xy' + 6y = x^2 \ln x + 2x^2$.
5. $x^2 y'' - xy' + 2y = x\sin(\ln x) + x\ln x$.
6. $x^2 y'' - 3xy' + 3y = 2x\ln x + x^3$
7. $x^2 y'' + xy' + 4y = \sin(2\ln x) + 3x^2$.
8. $x^2 y'' + xy' - y = \frac{\ln x}{x} + x\ln x$.
9. $x^2 y'' + 5xy' + 8y = \frac{\cos(2\ln x)}{x^2} + 2x^2$.

10. $x^2y'' - 3xy' + 4y = x^2 \ln x + \dfrac{1}{x}$.

11. $x^2y'' - 5xy' + 13y = x^3 \ln x + 3x^3 \sin(2\ln x)$.

12. $x^2y'' + 2xy' - 2y = \left(x + \dfrac{1}{x^2}\right)\ln x$.

13. $x^2y'' + 5xy' + 3y = \dfrac{(x^2+1)\ln x}{x^3}$.

14. $2x^2y'' - 3xy' + 2y = x^2 + \sqrt{x}\ln x$.

15. $x^2y'' + 3xy' + 5y = \dfrac{\sin(2\ln x)}{x} + 2x^2$.

16. $x^2y'' - xy' + y = x\ln x + \dfrac{3}{x^2}$.

17. $4x^2y'' + 8xy' + y = \dfrac{(x+2)\ln x}{\sqrt{x}}$

18. $x^2y'' + 3xy' - 3y = x\ln x - \dfrac{2}{x^3}$.

19. $x^2y'' + 7xy' + 10y = \dfrac{\sin(\ln x)}{x^3} + 3x$.

20. $2x^2y'' + 7xy' + 2y = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}} - \dfrac{3}{x^2}$.

21. $x^2y'' + xy' - 4y = \left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right)\ln x$.

22. $2x^2y'' + 5xy' - 2y = \sqrt{x}\ln x - \dfrac{2}{x^2}$.

23. $4x^2y'' + 4xy' - y = \left(\sqrt{x} - \dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)\ln x$.

24. $2x^2y'' - xy' - 2y = x^2\ln x - \dfrac{3}{\sqrt{x}}$.

25. $x^2y'' + 6xy' + 6y = \dfrac{\ln x}{x^2} + \sin(\ln x)$.

5. Решение задачи Коши для дифференциальных уравнений n-го порядка с постоянными коэффициентами

Рассмотрим линейное неоднородное дифференциальное уравнение n-го порядка

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x), \qquad (5.1)$$

где $a_1(x)$, $a_2(x)$, ..., $a_n(x)$, $f(x)$, заданные на $<a, b>$, $-\infty \le a < b \le +\infty$ – вещественные непрерывные функции. Известно, что уравнение (5.1) имеет бесконечно много решений (см [2]).

Задача нахождения среди множества всех возможных решений уравнения (5.1) решения, удовлетворяющего следующей системе начальных условий:

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0^0; \\ y'(x_0) = y_1^0; \\ \ldots; \\ y^{(n-2)}(x_0) = y_{n-2}^0; \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}^0, \end{cases} \qquad (5.2)$$

где $x_0 \in <a, b>$ – заданная точка, $y_0^0, y_1^0, \ldots, y_{n-1}^0$ – заданные вещественные числа, называется задачей Коши.

Справедлива следующая теорема существования и единственности решения задачи Коши (5.1)–(5.2).

Теорема 5.1. Пусть $a_k(x)$ и $f(x)$ ($k = 1, 2, \ldots, n$) принадлежат $C(<a, b>)$. Тогда при любых начальных условиях $y_0^0, y_1^0, \ldots, y_{n-1}^0$ задача Коши (5.1)–(5.2) имеет единственное вещественное решение $y(x)$, определенное на всем промежутке $<a, b>$ [2].

Для того чтобы из всех решений уравнения (5.1) выделить то, которое удовлетворяет начальным условиям (5.2) (условиям Коши), надо в общее решение уравнения (5.1), которое зависит от n произвольных постоянных c_1, c_2, ..., c_n, подставить начальные условия (5.2). В результате получим систему n уравнений с n неизвестными. Из этой системы однозначно определяются неизвестные c_1, c_2, ..., c_n, а следовательно, и решение задачи Коши (5.1)–(5.2).

Пример 5.1. Найти решение уравнения

$$y'' + y' - 2y = 18xe^{x} + 3e^{-2x}, \tag{5.3}$$

удовлетворяющее условиям

$$y(0) = 2,\ y'(0) = 2. \tag{5.4}$$

Решение. Общее решение уравнения (5.3), найденное в примере 2.5, имеет вид

$$y_{\text{он}} = c_1e^{-2x} + c_2e^{x} + (3x^2 - 2x)e^{x} - xe^{-2x}. \tag{5.5}$$

Тогда $y'_{\text{он}} = -2c_1e^{-2x} + c_2e^{x} + (6x - 2)e^{x} + (3x^2 - 2x)e^{x} - e^{-2x} + 2xe^{-2x}$.

Используя начальные условия (5.4), получим

$$y(0) = c_1 + c_2 = 2,\quad y'(0) = -2c_1 + c_2 - 2 - 1 = 2$$

или $\begin{cases} c_1 + c_2 = 2; \\ -2c_1 + c_2 = 5, \end{cases}$ откуда находим $c_1 = -1$, $c_2 = 3$. Подставляя эти значения в общее решение (5.5), получим решение задачи Коши (5.3)–(5.4):

$$y(x) = (3x^2 - 2x + 3)e^{x} - (x + 1)e^{-2x}.$$

Пример 5.2. Найти решение уравнения

$$x^2y'' + 4xy' - 4y = 7x\ln x + 17\sin(\ln x), \tag{5.6}$$

удовлетворяющее условиям

$$y(1) = 0{,}5,\quad y'(1) = 0{,}1. \tag{5.7}$$

Решение. Общее решение уравнения (5.6), найденное в примере 4.2, имеет вид

$$y = \frac{c_1}{x^4} + c_2x + 7\ln x\left(\frac{\ln x}{10} - \frac{1}{25}\right)x - \frac{3}{10}\cos(\ln x) - \frac{1}{2}\sin(\ln x). \tag{5.8}$$

Тогда

$$y' = -\frac{4c_1}{x^5} + c_2 + 7\left(\frac{\ln x}{10} - \frac{1}{25}\right) + \frac{7\ln x}{10} +$$

$$+7\ln x\left(\frac{\ln x}{10} - \frac{1}{25}\right) + \frac{3}{10}\frac{\sin(\ln x)}{x} - \frac{\cos(\ln x)}{2x}.$$

Используя начальные условия (5.7), получим

$$y(1) = c_1 + c_2 - \frac{3}{10} = \frac{1}{2},\quad y'(1) = -4c_1 + c_2 - \frac{7}{25} - \frac{1}{2} = 0{,}1$$

или

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0{,}8; \\ -4c_1 + c_2 = 0{,}88, \end{cases}$$

откуда находим $c_1 = -0{,}016$, $c_2 = 0{,}816$. Подставляя эти значения в общее решение (5.8), получим решение задачи Коши (5.6)–(5.7):

$$y(x) = -\frac{0{,}016}{x^4} + 0{,}816x + 7\ln x\left(\frac{\ln x}{10} - \frac{1}{25}\right)x - \frac{3}{10}\cos(\ln x) - \frac{1}{2}\sin(\ln x).$$

Задачи для самостоятельного решения

1. $y'' - 4y' + 4y = xe^{2x}$, $y(0) = y'(0) = 1$.
2. $y'' + 4y' = x\sin 2x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$.
3. $y'' + 2y' + y = xe^{-x}$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$.
4. $y'' + 6y' + 9y = 2e^{-3x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.
5. $y'' + 2y' + 2y = e^{-x}\cos x$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 1$.
6. $y'' - 9y = xe^{3x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.
7. $y'' - 4y' + 8y = e^{2x}\cos 2x$, $y(0) = y'(0) = 2$.
8. $y'' - 2y' + y = xe^{x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
9. $y'' - 4y' + 3y = 2xe^{x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.
10. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 2e^{x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = y''(0) = 0$.
11. $y'' - 2y' + y = 4xe^{2x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
12. $y'' - 2y' + 2y = xe^{x}\cos x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.
13. $y''' + 2y'' - y' - 2y = xe^{-2x} + \mathrm{ch}\,x$, $y(0) = y'(0) = 0$, $y''(0) = 1$.
14. $y'' - 10y' + 25y = xe^{5x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.
15. $y'' - 8y' + 16y = xe^{4x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
16. $y'' + 25y = x\sin 5x$, $y(0) = y'(0) = 1$.
17. $y'' - 4y' + 8y = e^{2x}\cos 2x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.
18. $y^{\mathrm{IV}} + 4y'' + 4y = x\cos 2x$, $y(0) = y'(0) = 0$, $y''(0) = y'''(0) = 1$.
19. $y'' - 9y = xe^{3x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
20. $y'' + 9y' + 16y = 2xe^{-4x}$, $y(0) = y'(0) = 1$.
21. y'' _ $16y = x\sin 4x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.
22. $y'' + 4y' + 8y = e^{-2x}\sin 2x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
23. $y^{\mathrm{IV}} + 2y''' - 4y'' = 2xe^{-x}$, $y(0) = y'(0) = 0$, $y''(0) = y'''(0) = 1$.
24. $y^{\mathrm{IV}} + 2y'' + y = x\sin x$, $y(0) = y'(0) = 1$, $y''(0) = y'''(0) = 0$.
25. $y''' + 6y'' + 9y' = xe^{-3x}$, $y(0) = y'(0) = 2$, $y''(0) = 0$.

6. Однородные системы обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Однородная система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами есть система вида

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n; \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n; \\ \ldots; \\ y_n' = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n, \end{cases}$$

где a_{ij} – заданные вещественные числа ($i, j = 1, 2, \ldots, n$).

Эту систему можно записать в матричном виде:

$$\vec{y}'(x) = A\vec{y}(x), \tag{6.1}$$

где $\vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$ – заданная квадратная матрица порядка n.

Будем искать решение этой системы в виде $\vec{y}(x) = \vec{h}e^{\lambda x}$, где $\vec{h} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix}$ – ненулевой постоянный вектор, а λ – некоторое число. Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 6.1. Для того чтобы вектор-функция $\vec{y}(x) = \vec{h}e^{\lambda x}$ была нетривиальным решением системы (6.1), необходимо и достаточно, чтобы число λ было собственным значением матрицы A, а $\vec{h}$ – отвечающим ему собственным вектором ($A\vec{h} = \lambda\vec{h}$).

Из этого утверждения и известной теоремы курса линейной алгебры [3] следует теорема.

Теорема 6.1. Вектор-функция $\vec{y}(x) = \vec{h}e^{\lambda x}$ тогда и только тогда является нетривиальным решением системы (6.1), когда λ является корнем характеристического уравнения

$$\det(A - \lambda E) = 0, \tag{6.2}$$

а вектор $\vec{h}$ – ненулевым решением системы линейных алгебраических уравнений

$$(A-\lambda E)\vec{h}=\vec{0}. \qquad (6.3)$$

Определение 6.1. Любые n линейно независимых решений системы (6.1) называются фундаментальной системой решений (ФСР) системы (6.1).

Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 6.2 (об общем решении однородной системы линейных дифференциальных уравнений). Пусть $\vec{y}_1(x)$, $\vec{y}_2(x)$, ..., $\vec{y}_n(x)$ – фундаментальная система решений системы (6.1). Тогда общее решение системы (6.1) имеет вид

$$\vec{y}_{oo}=c_1\vec{y}_1(x)+c_2\vec{y}_2(x)+\ldots+c_n\vec{y}_n(x),$$

где c_1, c_2, ..., c_n – произвольные постоянные.

Метод Эйлера построения фундаментальной системы решений. Рассмотрим сначала три частных случая, а потом – общий случай.

Случай 1. Пусть матрица A имеет n различных вещественных значений λ_1, λ_2, ..., λ_n. Обозначим через $\vec{h}_1,\vec{h}_2,\ldots,\vec{h}_n$ отвечающие им собственные векторы. Тогда вектор-функции $\vec{y}_1(x)=\vec{h}_1e^{\lambda_1x}$, $\vec{y}_2(x)=\vec{h}_2e^{\lambda_2x},\ldots,\vec{y}_n(x)=\vec{h}_ne^{\lambda_nx}$ образуют фундаментальную систему решений системы (6.1) на интервале $(-\infty;+\infty)$.

Случай 2. Пусть матрица A имеет n различных вещественных значений λ_1, λ_2, ..., λ_n, среди которых есть комплексные. Так как матрица A – вещественная, то, как известно, комплексное число $\lambda=\alpha+i\beta$ является корнем ее характеристического уравнения тогда и только тогда, когда комплексно-сопряженное число $\overline{\lambda}=\alpha-i\beta$ является корнем этого же характеристического уравнения, причем кратности корней λ и $\overline{\lambda}$ совпадают.

Предположим, что среди n различных корней характеристического уравнения $\det(A-\lambda E)=0$ есть $2s$ комплексных:

$$\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_s,\overline{\lambda}_1,\overline{\lambda}_2,\ldots,\overline{\lambda}_s \quad (1\le s\le[n/2])$$

и $n-2s$ вещественных: $\lambda_{2s+1},\ldots,\lambda_n$. Тогда вектор-функции

$$\vec{y}_1(x)=\vec{h}_1 e^{\lambda_1 x},\ \vec{y}_2(x)=\vec{h}_2 e^{\lambda_2 x},\ldots,\vec{y}_s(x)=\vec{h}_s e^{\lambda_s x},\ \vec{y}_{s+1}(x)=\vec{\bar{h}}_1 e^{\bar{\lambda}_1 x},$$

$$\vec{y}_{s+2}(x)=\vec{\bar{h}}_2 e^{\bar{\lambda}_2 x},\ldots,\vec{y}_{2s}(x)=\vec{\bar{h}}_s e^{\bar{\lambda}_s x},\ \vec{y}_{2s+1}(x)=\vec{h}_{2s+1} e^{\lambda_{2s+1} x},\ldots,\vec{y}_n(x)=\vec{h}_n e^{\lambda_n x}$$

образуют фундаментальную систему решений (комплексную) системы (6.1), где $\vec{\bar{h}}_1,\vec{\bar{h}}_2,\ldots,\vec{\bar{h}}_s$ – вектор-столбцы, комплексно-сопряженные к собственным вектор-столбцам $\vec{h}_1,\vec{h}_2,\ldots,\vec{h}_s$, отвечающим собственным значениям $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$.

Если $\lambda_k=\alpha_k+i\beta_k$, $\vec{h}_k=\vec{\gamma}_k+i\vec{\sigma}_k$, $k=1,2,\ldots,s$, то вектор-функции

$$\vec{u}_k(x)=\mathrm{Re}(\vec{h}_k e^{\lambda_k x})=e^{\alpha_k x}(\vec{\gamma}_k\cos\beta_k x-\vec{\sigma}_k\sin\beta_k x),$$

$$\vec{v}_k(x)=\mathrm{Im}(\vec{h}_k e^{\lambda_k x})=e^{\alpha_k x}(\vec{\sigma}_k\cos\beta_k x+\vec{\gamma}_k\sin\beta_k x),\ \ k=1,2,\ldots,s;$$

$$\vec{y}_{2s+1}(x)=\vec{h}_{2s+1}e^{\lambda_{2s+1}x},\ldots,\vec{y}_n(x)=\vec{h}_n e^{\lambda_n x}$$

образуют вещественную фундаментальную систему решений системы (6.1).

Случай 3. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ ($p < n$) – собственные значения матрицы A, причем их алгебраические кратности k_i равны геометрическим m_i, $i = 1, 2, \ldots, p$, а $\vec{h}^{1,i},\ldots,\vec{h}^{m_i,i}$ – m_i линейно независимых собственных векторов, отвечающих собственному значению λ_i, $i = 1, 2, \ldots, p$, где $m_1 + m_2 + \ldots + m_p = n$, тогда вектор-функции $\vec{y}^1=e^{\lambda_1 x}\vec{h}^{1,1}$, $\vec{y}^2=e^{\lambda_1 x}\vec{h}^{2,1},\ldots,$ $\vec{y}^{m_1}=e^{\lambda_1 x}\vec{h}^{m_1,1},\ldots,\vec{y}^n=e^{\lambda_p x}\vec{h}^{m_p,p}$ образуют ФСР системы (6.1).

Общий случай. Пусть характеристическое уравнение $\det(A-\lambda E)=0$ имеет $2p$ различных комплексных корней $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$, $\bar{\lambda}_1,\bar{\lambda}_2,\ldots,\bar{\lambda}_p$ $(1\le p\le[n/2])$ и q различных вещественных корней $\lambda_{2p+1},\ldots,\lambda_{2p+q}$ $(0\le q\le n)$. Обозначим через r_m ($r_m \ge 1$) кратность корня λ_m, $m = 1, 2, \ldots, 2p+q$. Очевидно, что $2\sum_{k=1}^{p} r_k+\sum_{k=1}^{q} r_{2p+k}=n.$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 6.2. Пусть λ_m – корень характеристического уравнения $\det(A-\lambda E)=0$ кратности r_m ($m = 1, 2, \ldots, 2p + q$). Тогда каждому корню λ_m соответствует r_m линейно независимых решений системы (6.1) вида

$$\vec{y}(x) = (\vec{\gamma}_0 + \vec{\gamma}_1 x + \vec{\gamma}_2 x^2 + \ldots + \vec{\gamma}_{r_m-1} x^{r_m-1}) e^{\lambda_m x}\,, \qquad (6.4)$$

где вектор-столбцы $\vec{\gamma}_0, \vec{\gamma}_1, \ldots, \vec{\gamma}_{r_m-1}$ – вещественные, если λ_m – вещественное число, и комплексные, если λ_m – комплексное число. Причем общее число найденных таким образом решений, отвечающих собственным значениям λ_k (k = 1, 2, ..., $2p+q$) равно n, и эти решения образуют фундаментальную систему решений системы (6.1).

Для практического нахождения вектор-столбцов $\vec{\gamma}_0, \vec{\gamma}_1, \ldots, \vec{\gamma}_{r_m-1}$ в (6.4) поступают следующим образом.

Подставив искомое решение (6.4) в уравнение (6.1) и приравняв коэффициенты при $x^k e^{\lambda_m x}$ в левой и правой частях, получают соотношения для векторов $\vec{\gamma}_0, \vec{\gamma}_1, \ldots, \vec{\gamma}_{r_m-1}$:

$$\begin{cases} (A - \lambda_m E)\vec{\gamma}_{r_m-1} = \vec{0}; \\ (A - \lambda_m E)\vec{\gamma}_{r_m-2} = (r_m - 1)\vec{\gamma}_{r_m-2}; \\ \ldots; \\ (A - \lambda_m E)\vec{\gamma}_k = (k+1)\vec{\gamma}_{k+1}; \\ \ldots; \\ (A - \lambda_m E)\vec{\gamma}_0 = \vec{\gamma}_1. \end{cases} \qquad (6.5)$$

Из этой системы и находят векторы $\vec{\gamma}_0, \vec{\gamma}_1, \ldots, \vec{\gamma}_{r_m-1}$. На практике целесообразно руководствоваться следующим правилом. Сначала полагают $\vec{\gamma}_1 = \vec{\gamma}_2 = \ldots = \vec{\gamma}_{r_m-1} = \vec{0}$. Тогда система (6.5) приобретает наиболее простой вид:

$$(A - \lambda_m E)\vec{\gamma}_0 = \vec{0}\,. \qquad (6.6)$$

Это уравнение имеет хотя бы одно ненулевое решение, так как λ_m – собственное значение матрицы A. Находят максимальное число линейно независимых вещественных (или комплексных) решений уравнения (6.6). Если их число меньше r_m, то разыскивают максимальное число линейно независимых вещественных (или комплексных) решений системы (6.5), подчиняющейся условиям: $\vec{\gamma}_2 = \vec{\gamma}_3 = \ldots = \vec{\gamma}_{r_m - 1} = \vec{0}$, $\vec{\gamma}_1 \neq \vec{0}$, т.е. находят максимальное число линейно независимых вещественных (или комплексных) решений системы

$$\begin{cases} (A - \lambda_m E)\vec{\gamma}_1 = \vec{0}; \\ (A - \lambda_m E)\vec{\gamma}_0 = \vec{\gamma}_1. \end{cases} \tag{6.7}$$

При этом очевидно, что $\vec{\gamma}_0$ также отлично от нуля. Если число вновь найденных линейно независимых решений системы (6.7) вместе с числом линейно независимых решений системы (6.6) окажется меньше r_m, то разыскивают максимальное число линейно независимых вещественных (или комплексных) решений системы (6.5), подчиняющейся условиям $\vec{\gamma}_3 = \vec{\gamma}_4 = \ldots = \vec{\gamma}_{r_m - 1} = \vec{0}$, $\vec{\gamma}_2 \neq \vec{0}$, т.е. находят максимальное число линейно независимых решений системы

$$\begin{cases} (A - \lambda_m E)\vec{\gamma}_2 = \vec{0}; \\ (A - \lambda_m E)\vec{\gamma}_1 = 2\vec{\gamma}_2; \\ (A - \lambda_m E)\vec{\gamma}_0 = \vec{\gamma}_1. \end{cases} \tag{6.8}$$

При этом, как легко видеть, векторы $\vec{\gamma}_0$ и $\vec{\gamma}_1$ также отличны от нуля.

Если число вновь найденных линейно независимых решений системы (6.8) вместе с числом линейно независимых решений систем (6.7) и (6.6) окажется меньше r_m, то указанный процесс построения линейно независимых решений вида (6.4) продолжают.

Утверждается, что на каком-то k-м шаге ($0 \le k \le r_m - 1$) мы получим r_m линейно независимых решений системы (6.1) вида (6.4), при этом все r_m линейно независимых решений (6.4) системы (6.1) окажутся такими, что $\vec{\gamma}_{k+1} = \vec{\gamma}_{k+2} = \ldots = \vec{\gamma}_{r_m - 1} = \vec{0}$.

Пример 6.1. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} y_1'(x) = 3y_1 - y_2 + y_3; \\ y_2'(x) = y_1 + y_2 + y_3; \\ y_3'(x) = 4y_1 - y_2 + 4y_3. \end{cases}$$

Решение. Характеристическое уравнение данной системы имеет вид

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}3-\lambda & -1 & 1\\ 1 & 1-\lambda & 1\\ 4 & -1 & 4-\lambda\end{vmatrix}=0$$

или

$$\det(A-\lambda E)=(3-\lambda)(1-\lambda)(4-\lambda)-2(1-\lambda)=$$
$$=(1-\lambda)(\lambda^2-7\lambda+10)=(1-\lambda)(\lambda-2)(\lambda-5)=0,$$

т.е. это уравнение имеет три различных вещественных корня $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 5$.

Координаты собственных векторов $\vec{h}_1, \vec{h}_2, \vec{h}_3$, отвечающих собственным значениям λ_1, λ_2, λ_3, находятся из систем, соответственно,

$$\begin{cases}2h_{11}-h_{21}+h_{31}=0,\\ h_{11}\qquad\;\; +h_{31}=0,\\ 4h_{11}-h_{21}+3h_{31}=0;\end{cases}\quad \begin{cases}h_{12}-h_{22}+h_{32}=0,\\ h_{12}-h_{22}+h_{32}=0,\\ 4h_{12}-h_{22}+2h_{32}=0;\end{cases}\quad \begin{cases}-2h_{13}-h_{23}+h_{33}=0,\\ h_{13}-4h_{23}+h_{33}=0,\\ 4h_{13}-h_{23}-h_{33}=0.\end{cases}$$

Из этих систем видим, что в качестве собственных векторов можно взять

$$\vec{h}_1=\begin{bmatrix}h_{11}\\ h_{21}\\ h_{31}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 1\\ -1\end{bmatrix};\quad \vec{h}_2=\begin{bmatrix}h_{12}\\ h_{22}\\ h_{32}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\ 2\\ 3\end{bmatrix};\quad \vec{h}_3=\begin{bmatrix}h_{13}\\ h_{23}\\ h_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 3\end{bmatrix}.$$

Следовательно, общее решение заданной системы дифференциальных уравнений имеет вид

$$\vec{y}(x)=\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{bmatrix}=c_1\begin{bmatrix}1\\ 1\\ -1\end{bmatrix}e^{x}+c_2\begin{bmatrix}-1\\ 2\\ 3\end{bmatrix}e^{2x}+c_3\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 3\end{bmatrix}e^{5x}.$$

Пример 6.2. Найти общее решение системы

$$\begin{cases}y_1'(x)=2y_1-y_2;\\ y_2'(x)=y_1+2y_2.\end{cases}$$

Решение. Характеристическое уравнение данной системы имеет вид

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}2-\lambda & -1\\ 1 & 2-\lambda\end{vmatrix}=0$$

или

$$\det(A-\lambda E)=(2-\lambda)^2+1=0.$$

Это уравнение имеет два комплексно-сопряженных корня $\lambda_1 = 2 + i$, $\lambda_2 = 2 - i$.

Найдем собственный вектор $\vec{h}_1$, отвечающий собственному значению $\lambda_1 = 2 + i$. Вектор $\vec{h}_1$ является нетривиальным решением системы $\begin{bmatrix}-i & -1\\ 1 & -i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}h_{11}\\ h_{21}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$. Очевидно, что в качестве собственного вектора $\vec{h}_1$ можно взять вектор $\vec{h}_1=\begin{bmatrix}i\\ 1\end{bmatrix}$.

Собственному значению $\lambda_2 = 2 - i$ будет соответствовать собственный вектор $\vec{h}_2=\bar{\vec{h}}_1=\begin{bmatrix}-i\\ 1\end{bmatrix}$. Следовательно, вектор- функции

$$\vec{y}_1(x)=\begin{bmatrix}i\\ 1\end{bmatrix}e^{(2+i)x}=\begin{bmatrix}i\\ 1\end{bmatrix}e^{2x}(\cos x+i\sin x),$$

$$\vec{y}_2(x)=\begin{bmatrix}-i\\ 1\end{bmatrix}e^{(2-i)x}=\begin{bmatrix}-i\\ 1\end{bmatrix}e^{2x}(\cos x-i\sin x)$$

образуют фундаментальную (комплексную) систему решений, а вектор-функции

$$\vec{u}(x)=\operatorname{Re}\vec{y}_1(x)=\begin{bmatrix}-\sin x\\ \cos x\end{bmatrix}e^{2x};\quad \vec{v}(x)=\operatorname{Im}\vec{y}_1(x)=\begin{bmatrix}\cos x\\ \sin x\end{bmatrix}e^{2x}$$

образуют вещественную фундаментальную систему решений. Таким образом, общее решение заданной системы имеет вид

$$\vec{y}(x)=c_1\begin{bmatrix}-\sin x\\ \cos x\end{bmatrix}e^{2x}+c_2\begin{bmatrix}\cos x\\ \sin x\end{bmatrix}e^{2x}.$$

Пример 6.3. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} y_1'(x) = y_1 - y_2; \\ y_2'(x) = y_1 + 3y_2. \end{cases} \tag{6.9}$$

Решение. Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$$

имеет кратный корень $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$. Будем искать линейно независимые решения системы в виде

$$\vec{y}(x) = (\vec{\gamma}_0 + \vec{\gamma}_1 x)e^{2x}, \tag{6.10}$$

где $\vec{\gamma}_0$ и $\vec{\gamma}_1$ – подлежащие определению постоянные вектор-столбцы. Подставляя решение вида (6.10) в заданную систему, имеем

$$\vec{\gamma}_1 e^{2x} + 2(\vec{\gamma}_0 + \vec{\gamma}_1 x)e^{2x} = A(\vec{\gamma}_0 + \vec{\gamma}_1 x)e^{2x}.$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x, получим для определения вектор-столбцов $\vec{\gamma}_0, \vec{\gamma}_1$ систему

$$\begin{cases} (A-2E)\vec{\gamma}_1 = \vec{0}, \\ (A-2E)\vec{\gamma}_0 = \vec{\gamma}_1. \end{cases} \tag{6.11}$$

А. Положим $\vec{\gamma}_1 = \vec{0}$, тогда система (6.11) примет вид

$$(A-2E)\vec{\gamma}_0 = \vec{0} \tag{6.12}$$

или

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{10} \\ \gamma_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Единственным линейно независимым решением этой системы является вектор-столбец $\vec{\gamma}_0 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Следовательно, согласно (6.10) получим ненулевое решение $\vec{y}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2x}$ системы (6.9).

Б. Рассмотрим систему $\begin{cases} (A-2E)\vec{\gamma}_1 = \vec{0}, \ \ \vec{\gamma}_1 \neq 0; \\ (A-2E)\vec{\gamma}_0 = \vec{\gamma}_1. \end{cases}$ Первое уравнение системы имеет такой же вид, что и (6.12), следовательно,

$$\vec{\gamma}_1 = \begin{bmatrix} \gamma_{11} \\ \gamma_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Подставив $\vec{\gamma}_1$ во второе уравнение системы, получим

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{10} \\ \gamma_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

или $\gamma_{10} + \gamma_{20} = 1$, т.е. за $\vec{\gamma}_0$ можно взять вектор-столбец

$$\vec{\gamma}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, согласно (6.10) получим следующее ненулевое решение системы (6.9):

$$\vec{y}_2(x) = \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} x \right) e^{2x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1+x \end{bmatrix} e^{2x}.$$

Очевидно, что $\vec{y}_1(x)$ и $\vec{y}_2(x)$ – линейно независимые решения системы (6.9) и поэтому образуют фундаментальную систему решений. Значит, общее решение системы (6.9) имеет вид

$$\vec{y}(x) = c_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2x} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1+x \end{bmatrix} e^{2x}.$$

Пример 6.4. Найти общее решение системы

$$\vec{y}'(x) = A\vec{y}(x), \text{ где } A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}. \tag{6.13}$$

Решение. Характеристическое уравнение данной системы

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

или

$$\det(A - \lambda E) = (4-\lambda)(2-\lambda)^2 + (2-\lambda) = (2-\lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 9) =$$
$$= (2-\lambda)(\lambda - 3)^2 = 0$$

имеет корни $\lambda_1 = 2$ и $\lambda_2 = \lambda_3 = 3$.

Рассмотрим простой корень $\lambda_1 = 2$. Найдем собственный вектор, отвечающий этому собственному значению $\lambda_1 = 2$. Он является нетривиальным решением системы

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{11} \\ h_{21} \\ h_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{cases} h_{11} - h_{31} = 0; \\ h_{11} - h_{21} = 0. \end{cases}$$

Следовательно, в качестве собственного вектора $\vec{h}_1$ можно взять вектор $\vec{h}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Тогда первое ненулевое решение системы (6.13) имеет вид $\vec{y}_1(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2x}$.

Рассмотрим корень $\lambda_2 = \lambda_3 = 3$ кратности два. Найдем собственный вектор, отвечающий этому собственному значению. Он является нетривиальным решением системы

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{или} \quad x_1 - x_2 - x_3 = 0\,.$$

Эта система имеет два линейно независимых решения:

$$\vec{h}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \vec{h}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Следовательно, для собственного значения $\lambda = 3$ его алгебраическая и геометрическая кратности совпадают. Поэтому согласно вышеизложенному функции

$$\vec{y}_1(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2x}, \quad \vec{y}_2(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{3x}, \qquad \vec{y}_3(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3x}$$

образуют ФСР системы (6.13). Тогда общее решение системы (6.13) имеет вид

$$\vec{y}_{\text{о.о}}(x) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2x} + \left(c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) e^{3x}.$$

Пример 6.5. Найти общее решение системы

$$\vec{y}\,'(x) = A\vec{y}(x)\text{, где } A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \qquad (6.14)$$

Решение. Характеристическое уравнение данной системы

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 & 0 \\ 3 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

или $(4-\lambda)(1-\lambda)^2 + 1 + 3(1-\lambda) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 12\lambda + 8 = (2-\lambda)^3 = 0$ имеет корень $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$ кратности три.

Будем искать линейно независимые решения системы в виде

$$\vec{y}(x) = (\vec{\gamma}_0 + \vec{\gamma}_1 x + \vec{\gamma}_2 x^2)e^{2x}, \qquad (6.15)$$

где $\vec{\gamma}_0,\ \vec{\gamma}_1, \vec{\gamma}_2$ – подлежащие определению постоянные вектор-столбцы. Подставляя решение вида (6.15) в уравнение (6.14) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях *x*, получим для определения вектор-столбцов $\vec{\gamma}_0,\ \vec{\gamma}_1, \vec{\gamma}_2$ систему

$$\begin{cases} (A-2E)\vec{\gamma}_2 = \vec{0}; \\ (A-2E)\vec{\gamma}_1 = 2\vec{\gamma}_2; \\ (A-2E)\vec{\gamma}_0 = \vec{\gamma}_1. \end{cases} \qquad (6.16)$$

А. Положим $\vec{\gamma}_1 = \vec{\gamma}_2 = \vec{0}$, тогда система (6.16) примет вид

$$(A-2E)\vec{\gamma}_0 = \vec{0} \qquad (6.17)$$

или

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{10} \\ \gamma_{20} \\ \gamma_{30} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Единственным линейно независимым решением этой системы является вектор-столбец $\vec{\gamma}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Следовательно, согласно (6.15) получим ненулевое решение $\vec{y}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2x}$ системы (6.14).

Б. Положим $\vec{\gamma}_1 \neq \vec{0}$, $\vec{\gamma}_2 = \vec{0}$, тогда система (6.16) примет вид

$$\begin{cases} (A - 2E)\vec{\gamma}_1 = \vec{0}; \\ (A - 2E)\vec{\gamma}_0 = \vec{\gamma}_1. \end{cases} \tag{6.18}$$

Согласно (6.17) имеем $\vec{\gamma}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Подставив $\vec{\gamma}_1$ во второе уравнение системы (6.18), получим $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{10} \\ \gamma_{20} \\ \gamma_{30} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Единственным ненулевым решением этой системы является вектор $\vec{\gamma}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Таким образом, за второе ненулевое решение системы (6.14) вида (6.15) можно взять вектор-функцию:

$$\vec{y}_2(x) = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} x \right) e^{2x}.$$

В. Рассмотрим, наконец, систему

$$\begin{cases} (A - 2E)\vec{\gamma}_2 = \vec{0}; \\ (A - 2E)\vec{\gamma}_1 = 2\vec{\gamma}_2; \\ (A - 2E)\vec{\gamma}_0 = \vec{\gamma}_1. \end{cases} \tag{6.19}$$

Очевидно, что в качестве $\vec{\gamma}_2$ можно взять вектор $\vec{\gamma}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Подставив $\vec{\gamma}_2$ во второе уравнение системы (6.19), получим

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{11} \\ \gamma_{21} \\ \gamma_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Отсюда без труда находим

$$\vec{\gamma}_1 = \begin{bmatrix} \gamma_{11} \\ \gamma_{21} \\ \gamma_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

И, наконец, подставляя вектор $\vec{\gamma}_1$ в последнее уравнение системы (6.19), получим для определения $\vec{\gamma}_0$ систему

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{10} \\ \gamma_{20} \\ \gamma_{30} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Откуда без труда находим $\vec{\gamma}_0 = \begin{bmatrix} \gamma_{10} \\ \gamma_{20} \\ \gamma_{30} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$

Таким образом, согласно (6.15) получим третье ненулевое решение

$$\vec{y}_3(x) = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} x^2 \right) e^{2x}.$$

Решения $\vec{y}_1(x)$, $\vec{y}_2(x)$, $\vec{y}_3(x)$ образуют фундаментальную систему решений системы. Поэтому согласно утверждению 6.2 общее решение системы (6.14) имеет вид

$$\vec{y}(x) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2x} + c_2 \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} x \right) e^{2x} + c_3 \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} x^2 \right) e^{2x}.$$

или

$$\vec{y}(x) = \left(\begin{bmatrix} c_1 + c_2 + c_3 \\ 2c_1 + c_2 \\ c_1 + c_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_2 + 2c_3 \\ 2c_2 + 2c_3 \\ c_2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} c_3 \\ 2c_3 \\ c_3 \end{bmatrix} x^2 \right) e^{2x}.$$

Задачи для самостоятельного решения

Вариант 1:

а) $\begin{cases} x' = 2x - 2y, \\ y' = -2x + y - 2z, \\ z' = -2y; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x' = 2y + 2z, \\ y' = 2x + 3y - z, \\ z' = 2x - y + 3z; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x' = 4x - 5y + 7z, \\ y' = x - 4y + 9z, \\ z' = -4x + 5z. \end{cases}$

Вариант 2:

а) $\begin{cases} x' = x - 2y, \\ y' = -2x + 2y - 2z, \\ z' = -2y + 3z; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x' = 7x + y + z, \\ y' = x + 7y + z, \\ z' = x + y + 7z; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x' = 4x - 5y + 7z, \\ y' = x - 4y + 9z, \\ z' = -4x + 5z. \end{cases}$

Вариант 3:

а) $\begin{cases} x' = 3x + 2y, \\ y' = 2x + 4y - 2z, \\ z' = -2y + 5z; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x' = x + 2y + 2z, \\ y' = 2x + y + 2z, \\ z' = 2x + 2y + z; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x' = -x - 2y + 2z, \\ y' = -2x - y + 2z, \\ z' = -3x - 2y + 3z. \end{cases}$

Вариант 4:

а) $\begin{cases} x' = 5x - 2y - 2z, \\ y' = -2x + 6y, \\ z' = -2x + 4z; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x' = 17x - 2y - 2z, \\ y' = -2x + 14y - 4z, \\ z' = -2x - 4y + 14z; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x' = -3x + 2y + 2z, \\ y' = -3x - y + z, \\ z' = -x + 2y. \end{cases}$

Вариант 5:

а) $\begin{cases} x' = 7x - 4y, \\ y' = -4x + 5y + 4z, \\ z' = 4y + 3z; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x' = 8x + 4y - z, \\ y' = 4x - 7y + 4z, \\ z' = -x + 4y + 8z; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x' = 3x - 3y + z, \\ y' = 3x - 2y + 2z, \\ z' = -x + 2y. \end{cases}$

Вариант 6:

а) $\begin{cases} x' = -2y, \\ y' = -2x + 2y - 2z, \\ z' = -2y + 5z; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x' = 2x - y + 2z, \\ y' = 5x - 3y + 3z, \\ z' = -x - 2z; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = x + 3y - z, \\ z' = -x + 2y + 3z. \end{cases}$

Вариант 7:

а) $\begin{cases} x' = 3x - 2z, \\ y' = y - 2z, \\ z' = -2x - 2y + 2z; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x' = y, \\ y' = -4x + 4y, \\ z' = -2x + y + 2z; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x' = x - y - z, \\ y' = x + y, \\ z' = 3x + z. \end{cases}$

Вариант 8:

а) $\begin{cases} x' = 5x - 2z, \\ y' = 3y + 2z, \\ z' = -2x + 2y + 4z; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x' = x - 3y + 3z, \\ y' = -2x - 6y + 13z, \\ z' = -x - 4y + 8z; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x' = 2x - y + 2z, \\ y' = x + 2z, \\ z' = -2x + y - z. \end{cases}$

Вариант 9:

а) $\begin{cases} x' = 4x - 2y, \\ y' = -2x + 5y - 2z, \\ z' = -2y + 6z; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x' = x - 3y + 4z, \\ y' = 4x - 7y - 8z, \\ z' = 6x - 7y + 7z; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x' = x + y, \\ y' = -x + 2y + z, \\ z' = x + z. \end{cases}$

Вариант 10:

а) $\begin{cases} x' = 3x + 4z, \\ y' = 7y - 4z, \\ z' = 4x - 4y + 5z; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x' = 7x - 12y + 6z, \\ y' = 10x - 19y + 10z, \\ z' = 12x - 24y + 13z; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x' = -3x + 2y + 2z, \\ y' = -3x - y + z, \\ z' = -x + 2y. \end{cases}$

Вариант 11:

а) $\begin{cases} x' = x - 2y - 2z, \\ y' = -2x, \\ z' = -2x + 2z; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x' = 4x + y + 3z, \\ y' = 2x + 3y + 3z, \\ z' = -2x - y - z; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x' = -y + z, \\ y' = z, \\ z' = -x + z. \end{cases}$

Вариант 12:

а) $\begin{cases} x' = 2x - 2y - 2z, \\ y' = -2y + 3y, \\ z' = -2x + z; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x' = 4x - 5y + 2z, \\ y' = 5x - 7y + 3z, \\ z' = 6x - 9y + 4z; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x' = 2y + z, \\ y' = -2x + 3z, \\ z' = -x - 3y. \end{cases}$

Вариант 13:

а) $\begin{cases} x' = 4x - 2y + 2z, \\ y' = -2x + 5y, \\ z' = 2x + 3z; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x' = x - 3y + 3z, \\ y' = -2x - 6y + 13z, \\ z' = -x - 4y + 8z; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x' = 2x + 5y - 6z, \\ y' = 4x + 6y - 9z, \\ z' = 3x + 6y - 8z. \end{cases}$

Вариант 14:

а) $\begin{cases} x' = 6x - 2z, \\ y' = 4y - 2z, \\ z' = -2x - 2y + 5z; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x' = -2x + y + 2z, \\ y' = x - y, \\ z' = 3x - y - z; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x' = -y + z, \\ y' = z, \\ z' = -x + z. \end{cases}$

Вариант 15:

а) $\begin{cases} x' = 5x + 4y - 4z, \\ y' = 4x + 3y, \\ z' = -4x + 7z; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x' = y - z, \\ y' = x - z, \\ z' = 2x + 2y - 3z; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x' = 21x - 8y - 19z, \\ y' = 18x - 7y - 15z, \\ z' = 16x - 6y - 15z. \end{cases}$

Вариант 16:

а) $\begin{cases} x' = x - 2y - 2z, \\ y' = -2x + 2y, \\ z' = -2x; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x' = 4x + 2y - 2z, \\ y' = x + 3y - z, \\ z' = 3x + 3y - z; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x' = -x - 2y + 2z, \\ y' = -2x - y + 2z, \\ z' = -3x - 2y + 3z. \end{cases}$

Вариант 17:

а) $\begin{cases} x' = 5x - 2y, \\ y' = -2x + 6y + 2z, \\ z' = 2y + 7z; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x' = -6x - 2y + 13z, \\ y' = -3x + y + 3z, \\ z' = -4x - y + 8z; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x' = -3x + 2y + 2z, \\ y' = -3x - y + z, \\ z' = -x + 2y. \end{cases}$

Вариант 18:

а) $\begin{cases} x' = 2x - 10y + 2z, \\ y' = -10x + 5y + 8z, \\ z' = 2x + 8y + 11z; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x' = 8x - 4y - z, \\ y' = 13x - 6y - 2z, \\ z' = 3x - 3y + z; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x' = 3x - 3y + z, \\ y' = 3x - 2y + 2z, \\ z' = -x + 2y. \end{cases}$

Вариант 19:

а) $\begin{cases} x' = x - 3y + z, \\ y' = -3x + y - z, \\ z' = x - y + 5z; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x' = x - y + z, \\ y' = x + y - z, \\ z' = -y + 2z; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x' = -y + z, \\ y' = z, \\ z' = -x + z. \end{cases}$

Вариант 20:

а) $\begin{cases} x' = 7x + 2z, \\ y' = 5y - 2z, \\ z' = 2x - 2y + 6z; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x' = 4x - y, \\ y' = 3x - y - z, \\ z' = x + z; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x' = 4x + y + 3z, \\ y' = -x + y, \\ z' = -y + z. \end{cases}$

Вариант 21:

а) $\begin{cases} x' = x - 2y + 2z, \\ y' = x + 4y - 2z, \\ z' = x + 5y - 3z; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x' = 4x + 3y + z, \\ y' = -x + y, \\ z' = -y + z; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x' = -2x - y + z, \\ y' = -2y + z, \\ z' = -x - z. \end{cases}$

Вариант 22:

а) $\begin{cases} x' = 6x - 2y + 2z, \\ y' = -2x + 5y, \\ z' = 2x + 7z; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x' = y + 2z, \\ y' = x + 2z, \\ z' = -x - y - 3z; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x' = x - 2y - z, \\ y' = y + z, \\ z' = x - z. \end{cases}$

Вариант 23:

а) $\begin{cases} x' = x - 3y - z, \\ y' = -3x + y + z, \\ z' = -x + y + 5z; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x' = -7x + 4y + 8z, \\ y' = -3x + y + 4z, \\ z' = -7x + 6y + 7z; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x' = 5x - 4y + 2z, \\ y' = 5y + z, \\ z' = -2x + 7z. \end{cases}$

Вариант 24:

а) $\begin{cases} x' = x + 2y + z, \\ y' = 2x - 5y + 2z, \\ z' = x + 2y + z; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x' = 7x - 7y + 6z, \\ y' = 8x - 7y + 4z, \\ z' = 4x - 3y + z; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x' = 4x + 2y + 2z, \\ y' = -2x + y, \\ z' = 3y + 4z. \end{cases}$

Вариант 25:

а) $\begin{cases} x' = -3x + 4y - 2z, \\ y' = x + z, \\ z' = 6x - 6y + 5z; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x' = -x + y - 2z, \\ y' = 4x + y, \\ z' = 2x + y - z; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x' = 2x + y + z, \\ y' = 5y + 3z, \\ z' = -4x + 5z. \end{cases}$

7. Неоднородные системы обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и специальной правой частью

Неоднородная система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами – это система вида

$$\vec{y}'(x) = A\vec{y}(x) + \vec{f}(x), \tag{7.1}$$

где $A = [a_{ij}]$ – заданная квадратная числовая матрица порядка n, а $\vec{f}(x)$ – заданная матрица-столбец, элементами которой являются функции $f_k(x)$, $k = 1, 2, ..., n$.

Для системы (7.1) справедлива следующая теорема.

Теорема 7.1. Общее решение $\vec{y}_{\text{он}}(x)$ неоднородной линейной системы (7.1) равно сумме общего решения $\vec{y}_{oo}(x)$ соответствующей однородной системы (6.1) и любого частного решения $\vec{y}_{чн}(x)$ данной неоднородной системы.

Рассмотрим систему (7.1), у которой $\vec{f}(x)$ имеет «специальный» вид, а именно:

$$\vec{f}(x) = (\vec{P}_m(x)\cos\beta x + \vec{Q}_l(x)\sin\beta x)e^{\alpha x}, \tag{7.2}$$

где $\vec{P}_m(x)$ – многочлен m-й степени с векторными коэффициентами, т.е. $\vec{P}_m(x) = \vec{\gamma}_0 x^m + \vec{\gamma}_1 x^{m-1} + ... + \vec{\gamma}_{m-1}x + \vec{\gamma}_m$, а $\vec{\gamma}_0, \vec{\gamma}_1, ..., \vec{\gamma}_m$ – заданные числовые вектор-столбцы высоты n; $\vec{Q}_l(x)$ – многочлен l-й степени того же вида.

Правая часть $\vec{f}(x)$ вида (7.2) называется векторным квазимногочленом.

Для нахождения частного решения $\vec{y}_{он}$ неоднородной системы (7.1), правая часть которой $\vec{f}(x)$ является векторным квазимногочленом, справедливо утверждение.

Утверждение 7.1. Частное решение $\vec{y}_{чн}(x)$ системы (7.1), правая часть которой $\vec{f}(x)$ имеет вид (7.2), может быть найдено в виде

$$\vec{y}_{чн}(x) = (\vec{P}_{n_1+r}(x)\cos\beta x + \vec{Q}_{n_1+r}(x)\sin\beta x)e^{\alpha x}, \tag{7.3}$$

где $n_1 = \max(m; l)$, $r = 0$, если число $\lambda_0 = \alpha + i\beta$ не является собственным значением матрицы A, и r равно алгебраической кратности λ_0, если λ_0 является собственным значением матрицы A; $\vec{P}_{n_1+r}(x)$ и $\vec{Q}_{n_1+r}(x)$ – неизвестные многочлены с векторными коэффициентами степени $n_1 + r$, коэффициенты которых находятся методом неопределенных коэффициентов.

Для систем (7.1) так же, как и для линейного уравнения (2.5) n-го порядка, справедлив принцип суперпозиции (см. утверждение 2.2), который позволяет распространить предложенный выше метод построения частного решения неоднородной системы (7.1) с постоянными коэффициентами на случай, когда правая часть $\vec{f}(x)$ является суммой нескольких разных квазимногочленов (т.е. квазимногочленов, у которых суммы $\alpha + i\beta$ не совпадают).

Утверждение 7.2 (принцип суперпозиции). Пусть дан оператор $L\vec{y} = \vec{y}' - A\vec{y}$, где A – квадратная матрица порядка n, и пусть задано уравнение $L\vec{y} = \vec{f}$, где $\vec{f} = \vec{f}_1 + \vec{f}_2 + \ldots + \vec{f}_k$. Тогда если $\vec{y}_i$ – решение уравнения $L\vec{y}_i = \vec{f}_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$, то $\vec{y} = \vec{y}_1 + \vec{y}_2 + \ldots + \vec{y}_k$ есть решение уравнения $L\vec{y} = \vec{f} = \vec{f}_1 + \vec{f}_2 + \ldots + \vec{f}_k$.

Пример 7.1. Найти общее решение неоднородной системы

$$\begin{cases} y_1' = y_2 - 5\cos x; \\ y_2' = 2y_1 + y_2. \end{cases} \tag{7.4}$$

Решение. Найдем общее решение соответствующей однородной системы:

$$\begin{cases} y_1' = y_2; \\ y_2' = 2y_1 + y_2. \end{cases} \tag{7.5}$$

Характеристическое уравнение данной системы

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 2 = 0$$

имеет корни $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$. Найдем собственные векторы $\vec{h}_1$ и $\vec{h}_2$, отвечающие собственным значениям λ_1 и λ_2 соответственно. Координаты векторов $\vec{h}_1$ и $\vec{h}_2$ находятся, соответственно, из систем:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{11} \\ h_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \qquad \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{12} \\ h_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Очевидно, что в качестве $\vec{h}_1$ и $\vec{h}_2$ можно взять векторы

$$\vec{h}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}; \qquad \vec{h}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Тогда общее решение однородной системы (7.5) имеет вид

$$\vec{y}_{\text{оо}} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}_{\text{о.о}} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-x} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{2x}.$$

Частное решение неоднородной системы (7.4) будем искать методом неопределенных коэффициентов. Правая часть $\vec{f}(x)$ системы (7.4) имеет вид

$$\vec{f}(x) = \begin{bmatrix} -5\cos x \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \end{bmatrix} \cos x,$$

т.е. является квазиполиномом ($n = 0$, $\alpha = 0$, $\beta = 1$), $\lambda_0 = \alpha + i\beta = i$ не является корнем характеристического уравнения, следовательно, $r = 0$. Тогда согласно утверждению 7.1 частное решение системы (7.4) следует искать в виде

$$\vec{y}_{\text{чн}} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}_{\text{чн}} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \cos x + \begin{pmatrix} M \\ N \end{pmatrix} \sin x.$$

Подставив это выражение в (7.4) и приравняв коэффициенты в полученных равенствах при $\cos x$ и $\sin x$, получим для определения коэффициентов систему

$$\begin{cases} -A = N; \\ M = B - 5; \\ -B = 2M + N; \\ N = 2A + B. \end{cases}$$

Отсюда следует, что $A = -1$, $B = 3$, $M = -2$, $N = 1$. Следовательно,

$$\vec{y}_{\text{чн}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \cos x + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \sin x.$$

Тогда общее решение системы (7.4) имеет вид

$$\vec{y}_{он} = c_1\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}e^{-x} + c_2\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}e^{2x} + \begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}\cos x + \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}\sin x.$$

Пример 7.2. Найти общее решение неоднородной системы

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - y_2 + 1; \\ y_2' = y_1 + 3y_2 + x + e^{2x}. \end{cases} \tag{7.6}$$

Решение. Общее решение соответствующей однородной системы согласно примеру 6.3 имеет вид

$$\vec{y}_{\text{о.о}} = \begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}_{\text{о.о}} = c_1\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}e^{2x} + c_2\begin{bmatrix}-1\\1+x\end{bmatrix}e^{2x}.$$

Чтобы найти общее решение системы (7.6), достаточно в силу теоремы 7.1 найти какое-нибудь частное решение системы (7.6). Будем искать частное решение неоднородной системы (7.6) методом неопределенных коэффициентов (методом Лагранжа). Поскольку в правой части системы (7.6) есть слагаемые вида (7.2) с показателем $\lambda_0 = 0 \neq 2$ и слагаемые вида (7.2) с показателем $\lambda_0 = 2$, то частное решение неоднородной системы будет состоять из двух частей:

$$\vec{y}_{\text{чн}} = \vec{y}_{\text{чн}}^{(1)} + \vec{y}_{\text{чн}}^{(2)},$$

где $\vec{y}_{\text{чн}}^{(1)}$ – частное решение системы

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - y_2 + 1; \\ y_2' = y_1 + 3y_2 + x, \end{cases} \tag{7.7}$$

а $\vec{y}_{\text{чн}}^{(2)}$ – частное решение системы

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - y_2; \\ y_2' = y_1 + 3y_2 + e^{2x}, \end{cases} \tag{7.8}$$

$\vec{y}_{\text{чн}}^{(1)}$ и $\vec{y}_{\text{чн}}^{(2)}$ ищем, соответственно, в виде (см. (7.3))

$$\vec{y}_{\text{чн}}^{(1)} = \vec{\gamma}_0 + \vec{\gamma}_1 x = \begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}C\\D\end{bmatrix}x;$$

$$\vec{y}_{\text{чн}}^{(2)} = (\vec{\gamma}_0 + \vec{\gamma}_1 x + \vec{\gamma}_2 x^2)e^{2x} = \left(\begin{bmatrix}K\\L\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}M\\N\end{bmatrix}x + \begin{bmatrix}F\\H\end{bmatrix}x^2\right)e^{2x}.$$

Подставив эти выражения $\vec{y}_{\text{чн}}^{(1)}$ и $\vec{y}_{\text{чн}}^{(2)}$, соответственно, в (7.7) и (7.8) и приравняв коэффициенты в полученных равенствах при x^0, x, x^2, получим: $A=-1$, $B=\frac{1}{4}$, $C=-\frac{1}{4}$, $D=-\frac{1}{4}$, $K=-1$, $L=0$, $M=1$, $N=0$, $F=-\frac{1}{2}$, $H=\frac{1}{2}$. Следовательно, общее решение системы (7.6) имеет вид

$$\vec{y}=c_1\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}e^{2x}+c_2\begin{bmatrix}-1\\1+x\end{bmatrix}e^{2x}+\begin{bmatrix}-1\\1/4\end{bmatrix}-\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}x+$$

$$+\left(\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}x+\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}x^2\right)e^{2x}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. $\begin{cases}x'+2x+4y=te^{2t},\\ y'+x-y=t^2.\end{cases}$

2. $\begin{cases}x'+2x-y=2te^{-t},\\ y'+3x-2y=e^t.\end{cases}$

3. $\begin{cases}x'=x+2y+t^2,\\ y'=2x+y+e^{3t}+1.\end{cases}$

4. $\begin{cases}x'=4y-2x+e^{2t},\\ y'=x+y+e^{-3t}.\end{cases}$

5. $\begin{cases}x'=3y-x+2t^2-1,\\ y'=x+y+3e^{-2t}.\end{cases}$

6. $\begin{cases}x'-x+2y=2t,\\ y'-x+y=t\cos t.\end{cases}$

7. $\begin{cases}x'=-y+t^2,\\ y'=2x+2y+e^t\sin t.\end{cases}$

8. $\begin{cases}x'+x-5y=t\cos 2t,\\ y'+x-y=2e^t.\end{cases}$

9. $\begin{cases}x'=2x-y+te^{3t},\\ y'=x+4y+t^2.\end{cases}$

10. $\begin{cases}x'-x-y=3e^{2t}\sin t,\\ y'+2x-y=2\cos t.\end{cases}$

11. $\begin{cases}x'+3x-2y=te^{-t},\\ y'+2x-y=\cos 2t.\end{cases}$

12. $\begin{cases}x'=3x-y+e^t\cos t,\\ y'=5x-y+\sin t.\end{cases}$

13. $\begin{cases}x'-5x-3y=te^{2t},\\ y'+3x+y=\cos 2t.\end{cases}$

14. $\begin{cases}x'+x+5y=t\sin 2t,\\ y'-x-y=e^{2t}.\end{cases}$

15. $\begin{cases} x' - x - y = te^t, \\ y' + x - y = e^t \cos t. \end{cases}$

16. $\begin{cases} x' = x + 5y + te^{2t}, \\ y' = x - 3y + \cos 4t. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x' - 4x + 5y = e^{2t} \cos t, \\ y' - x = t^2 + 1. \end{cases}$

18. $\begin{cases} x' - x - y = t\cos t, \\ y' + 2x + y = 2e^t. \end{cases}$

19. $\begin{cases} x' + 4x + 2y = te^{-t}, \\ y' - 6x - 2y = e^{-t} \cos(t\sqrt{3}). \end{cases}$

20. $\begin{cases} x' = 2x - 4y + te^{3t}, \\ y' = -x - y + 2e^{-2t}. \end{cases}$

21. $\begin{cases} x' - 2x - y = te^{3t} - 2\sin 3t, \\ y' + x - 4y = 2e^{3t}. \end{cases}$

22. $\begin{cases} x' = 2x - 4y + te^{3t}, \\ y' = -x - y + 2e^{-2t}. \end{cases}$

23. $\begin{cases} x' = x + 5y + t\cos 2t, \\ y' = -x - y + e^{2t}. \end{cases}$

24. $\begin{cases} x' + 5x + 3y = te^{-2t}, \\ y' - 3x - y = \sin 2t. \end{cases}$

25. $\begin{cases} x' - 3x + y = t\cos t, \\ y' - 4x + y = 2te^t. \end{cases}$

8. Решение неоднородных систем обыкновенных дифференциальных уравнений методом вариации постоянных

Рассмотрим неоднородную систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\vec{y}'(x) = A\vec{y}(x) + \vec{f}(x), \tag{8.1}$$

где $A = [a_{ij}]$ – заданная квадратная числовая матрица порядка n, а $\vec{f}(x)$ – заданная матрица-столбец, элементами которой являются функции $f_k(x)$, $k = 1, 2,..., n$.

В седьмой теме был рассмотрен вопрос, как найти общее решение системы (8.1) в случае, когда правая часть $\vec{f}(x)$ имеет специальный вид (7.2) (векторный квазиполином). Здесь обсудим случай, когда $\vec{f}(x)$ является произвольной вектор-функцией.

Пусть $\vec{y}_1(x),\ \vec{y}_2(x), ..., \vec{y}_n(x)$ – ФСР однородной системы

$$\vec{y}'(x) = A\vec{y}(x), \tag{8.2}$$

отвечающей неоднородной системе (8.1). Тогда общее решение системы (8.2) имеет вид

$$\vec{y}_{\text{о.о}}(x) = c_1\vec{y}_1(x) + c_2\vec{y}_2(x) + ... + c_n\vec{y}_n(x), \tag{8.3}$$

где c_1, c_2, ..., c_n – произвольные вещественные постоянные.

Фундаментальной матрицей системы (8.2) называется матрица $Y(x)$, столбцами которой являются решения ФСР $\vec{y}_1(x),\ \vec{y}_2(x), ...,$ $\vec{y}_n(x)$ системы (8.2), т.е. матрица $Y(x)$ имеет вид

$$Y(x) = \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} & \cdots & y_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{n1} & y_{n2} & y_{n3} & \cdots & y_{nn} \end{vmatrix}.$$

Справедливы следующие *свойства фундаментальной матрицы:*

1) $\det Y(x) \neq 0$ для любого $x \in \langle a, b \rangle$;

2) для любого $x \in \langle a, b \rangle$ существует обратная матрица $Y^{-1}(x)$;

3) фундаментальная матрица $Y(x)$ удовлетворяет уравнению (8.2), т.е. $Y'(x) = AY(x)$;

4) общее решение системы (8.2), т.е. равенства (8.3), с помощью фундаментальной матрицы $Y(x)$ можно записать в виде

$$\vec{y}_{\text{оо}}(x) = Y(x)\vec{c}\,, \tag{8.4}$$

где $\vec{c}$ – произвольный постоянный действительный вектор-столбец высоты n.

Для нахождения общего решения неоднородной системы (8.1) используется метод *вариации постоянных*. Он заключается в следующем. Если известно общее решение $\vec{y}_{\text{о.о}}(x)$ однородного уравнения (8.2), записанное в виде (8.4), то общее решение неоднородного уравнения (8.1) $\vec{y}_{\text{он}}(x)$ будем искать в виде

$$\vec{y}_{\text{он}} = Y(x)\vec{c}(x)\,, \tag{8.5}$$

где $\vec{c}(x)$ – неизвестная вектор-функция. Для ее нахождения подставим $\vec{y}_{\text{он}}$ из (8.5) в уравнение (8.1). Тогда получим

$$Y'(x)\vec{c}(x) + Y(x)\vec{c}\,'(x) = AY(x)\vec{c}(x) + \vec{f}(x)\,.$$

Учитывая, что фундаментальная матрица $Y(x)$ является решением однородной системы (8.1), получим

$$Y(x)\vec{c}\,'(x) = \vec{f}(x)\,, \tag{8.6}$$

Из (8.6) находим $\vec{c}(x) = \int\limits_{x_0}^{x} Y^{-1}(t)\vec{f}(t)dt + \vec{c}_0$, где $\vec{c}_0$ – постоянный вектор, $x_0 \in < a; b >$.

Подставляя найденное выражение для $\vec{c}(x)$ в (8.5), получим выражение для общего решения неоднородной системы (8.1) в матричном виде

$$\vec{y}_{\text{он}} = Y(x)\left[\int\limits_{x_0}^{x} Y^{-1}(t)\vec{f}(t)dt + \vec{c}_0\right]. \tag{8.7}$$

На практике редко пользуются формулой (8.7), а поступают следующим образом. Из равенства (8.6) имеем

$$\begin{cases} y_{11}c_1'(x) + y_{12}c_2'(x) + \ldots + y_{1n}c_n'(x) = f_1; \\ y_{21}c_1'(x) + y_{22}c_2'(x) + \ldots + y_{2n}c_n'(x) = f_2; \\ \ldots; \\ y_{n1}c_1'(x) + y_{n2}c_2'(x) + \ldots + y_{nn}c_n'(x) = f_n. \end{cases} \tag{8.8}$$

Это – линейная система относительно $c_1'(x), c_2'(x), ..., c_n'(x)$. Определитель этой системы $\Delta(x) = \det[\vec{y}_1, \vec{y}_2, ..., \vec{y}_n]$ является определителем фундаментальной матрицы однородной системы (8.2). Следовательно, согласно свойству фундаментальной матрицы он не обращается в нуль ни в одной точке промежутка <*a*, *b*>. Это означает, что согласно теореме Крамера система (8.8) имеет единственное решение, которое может быть найдено по формулам:

$$c_k'(x) = \frac{\Delta_k(x)}{\Delta(x)}, \tag{8.9}$$

где $k = 1, 2, ..., n$; $\Delta_k(x)$ – определитель, полученный из определителя $\Delta(x)$ заменой k-го столбца $\vec{y}_k(x)$ на столбец $\vec{f}(x)$, т.е.

$$\Delta_k x = \det[\vec{y}_1, \vec{y}_2, ..., \vec{y}_{k-1}, \vec{f}(x), \vec{y}_{k+1}, ..., \vec{y}_n].$$

Интегрируя (8.9), находим функции $c_1(x), c_2(x), ..., c_n(x)$:

$$c_k(x) = \int \frac{\Delta_k(x)}{\Delta(x)} dx,$$

подставив которые в (8.5), получим $\vec{y}_{он}(x)$.

Пример 8.1. Найти общее решение неоднородной системы

$$\vec{y}'(x) = A\vec{y}(x) + \vec{f}(x), \tag{8.10}$$

где $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad \vec{f}(x) = \begin{bmatrix} e^{3x} \\ x \\ \sin x \end{bmatrix}.$

Решение. Для нахождения общего решения неоднородной системы (8.10) воспользуемся методом вариации постоянных. ФСР соответствующей однородной системы уравнений являются вектор-функции (см. пример 6.1):

$$\vec{y}_1(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^x, \quad \vec{y}_2(x) = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} e^{2x}, \quad \vec{y}_3(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} e^{5x}.$$

Тогда фундаментальная матрица системы запишется в виде

$$Y(x)=\begin{bmatrix} e^{x} & -e^{2x} & e^{5x} \\ e^{x} & 2e^{2x} & e^{5x} \\ -e^{x} & 3e^{2x} & 3e^{5x} \end{bmatrix}.$$

Без труда находим, что

$$Y^{-1}(x)=\frac{1}{12}\begin{bmatrix} 3e^{-x} & 6e^{-x} & -3e^{-x} \\ -4e^{-2x} & 4e^{-2x} & 0 \\ 5e^{-5x} & -2e^{-5x} & 3e^{-5x} \end{bmatrix},$$

$$Y^{-1}(x)\vec{f}(x)=\frac{1}{12}\begin{bmatrix} 3e^{2x}+6xe^{-x}-3\sin xe^{-x} \\ -4e^{x}+4xe^{-2x} \\ 5e^{-2x}-2xe^{-5x}+3\sin xe^{-5x} \end{bmatrix},$$

$$\int Y^{-1}(x)\vec{f}(x)dx=$$

$$=\frac{1}{12}\begin{bmatrix} 3xe^{2x}+\frac{3}{2}(\sin x+\cos x)e^{-x} \\ -4e^{x}-2xe^{-2x}-e^{-2x} \\ -\frac{5}{2}e^{-2x}+\frac{2}{5}xe^{-5x}+\frac{2}{25}e^{-5x}-\left(\frac{15\sin x+3\cos x)}{26}\right)e^{-5x} \end{bmatrix}+\vec{c}_1.$$

Подставив последнее выражение в формулу (8.7), получим общее решение системы:

$$\begin{bmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ y_3(x) \end{bmatrix}=\frac{1}{12}\begin{bmatrix} \left(3x-\frac{5}{2}\right)e^{3x}+4e^{x}+\frac{6(2\sin x+3\cos x)}{13}+\frac{12}{5}x+\frac{27}{25} \\ \left(3x-\frac{5}{2}\right)e^{3x}-8e^{x}+\frac{6(2\sin x+3\cos x)}{13}-\frac{18}{5}x-\frac{48}{25} \\ -3\left(x+\frac{5}{2}\right)e^{3x}-12e^{x}-\frac{6(7\sin x+4\cos x)}{13}-\frac{24}{5}x-\frac{69}{25} \end{bmatrix}+$$

$$+c_1\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}e^{x}+c_2\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}e^{2x}+c_3\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}e^{5x}.$$

Пример 8.2. Найти общее решение неоднородной системы

$$\vec{y}'(x) = A\vec{y}(x) + \vec{f}(x), \qquad (8.11)$$

где $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $\vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$, $\vec{f}(x) = \begin{bmatrix} \mathrm{tg}^2 x - 1 \\ \mathrm{tg}\, x \end{bmatrix}$.

Решение. Найдем фундаментальную систему решений однородной системы $\vec{y}' = A\vec{y}$. Характеристическое уравнение $\det(A - \lambda E) = \lambda^2 + 1 = 0$ имеет корни $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$. Собственному значению $\lambda_1 = i$ отвечает собственный вектор $\vec{h}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$, а $\lambda_2 = -i$ – собственный вектор $\vec{h}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$. Тогда комплексная ФСР имеет вид

$$\vec{y}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} e^{ix}, \quad \vec{y}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} e^{-ix}.$$

Следовательно, вещественная ФСР имеет вид

$$\vec{u}(x) = \mathrm{Re}\,\vec{y}_1 = \begin{bmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{bmatrix}, \quad \vec{v}(x) = \mathrm{Im}\,\vec{y}_1 = \begin{bmatrix} \sin x \\ \cos x \end{bmatrix}.$$

Тогда общее решение однородной системы будет иметь вид

$$\vec{y}_{oo} = c_1 \begin{bmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} \sin x \\ \cos x \end{bmatrix}. \qquad (8.12)$$

Общее решение неоднородной системы (8.11) будем искать в виде

$$\vec{y}_{он} = c_1(x) \begin{bmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{bmatrix} + c_2(x) \begin{bmatrix} \sin x \\ \cos x \end{bmatrix}, \qquad (8.13)$$

где $c_1(x)$ и $c_2(x)$ – неизвестные функции, которые подберем так, чтобы при подстановке (8.13) в (8.11) получалось тождество по x. Подставив это выражение в (8.11), получим

$$c_1'(x) \begin{bmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{bmatrix} + c_2'(x) \begin{bmatrix} \sin x \\ \cos x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{tg}^2 x - 1 \\ \mathrm{tg} x \end{bmatrix}$$

или
$$\begin{cases} c_1' \cos x + c_2' \sin x = \mathrm{tg}^2 x - 1, \\ -c_1' \sin x + c_2' \cos x = \mathrm{tg} x. \end{cases}$$

Отсюда

$$c_1'(x)=\begin{vmatrix}\operatorname{tg}^2 x-1 & \sin x\\ \operatorname{tg}x & \cos x\end{vmatrix}=-\cos x,\quad c_1(x)=-\sin x+\tilde{c}_1,$$

$$c_2'(x)=\begin{vmatrix}\cos x & \operatorname{tg}^2 x-1\\ -\sin x & \operatorname{tg}x\end{vmatrix}=\frac{\sin^3 x}{\cos^2 x},\quad c_2(x)=\frac{1}{\cos x}+\cos x+\tilde{c}_2.$$

Частное решение можно получить, положив $\tilde{c}_1=\tilde{c}_2=0$. Тогда $\vec{y}_{\text{чн}}=\begin{bmatrix}\operatorname{tg} x\\ 2\end{bmatrix}$, а общее решение системы (8.11) будет иметь вид

$$\vec{y}_{он}=\begin{bmatrix}y_1(x)\\ y_2(x)\end{bmatrix}=c_1\begin{bmatrix}\cos x\\ -\sin x\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}\sin x\\ \cos x\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\operatorname{tg}x\\ 2\end{bmatrix}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. $\begin{cases}x'=x+y+\operatorname{ctg}(t);\\ y'=-2x-y+\sec(t).\end{cases}$

2. $\begin{cases}x'=x-y+\dfrac{1}{1+e^t};\\ y'=y-4x+\dfrac{1}{1+e^t}.\end{cases}$

3. $\begin{cases}x'=x+3y+\dfrac{1}{e^{2t}+1};\\ y'=x+y-\dfrac{2}{e^{2t}+1}.\end{cases}$

4. $\begin{cases}x'=x-2y+\operatorname{cosec}(t);\\ y'=x-y+\operatorname{tg}t.\end{cases}$

5. $\begin{cases}x'=y+\operatorname{th}(t);\\ y'=2x+y+\operatorname{cth}(t).\end{cases}$

6. $\begin{cases}x'=x-y+\sec(t);\\ y'=2x-y+\operatorname{cosec}(t).\end{cases}$

7. $\begin{cases}x'=2x-4y+\operatorname{tg}2t;\\ y'=2x-2y+\dfrac{1}{\sin 2t}.\end{cases}$

8. $\begin{cases}x'=4x+y+\dfrac{e^{3t}}{1+e^t};\\ y'=-2x+y-\dfrac{1}{1+e^t}.\end{cases}$

9. $\begin{cases}x'=2y-x+\dfrac{e^t}{t};\\ y'=3y-2x+\sqrt{t}\cdot e^t.\end{cases}$

10. $\begin{cases}x'=-2x+y+\dfrac{e^t}{t};\\ y'=-x+\dfrac{e^{-t}}{t+1}.\end{cases}$

11. $\begin{cases} x' = 2x - 2y + \dfrac{e^t}{\cos t}; \\ y' = x + \dfrac{e^{-t}}{\sin t}. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x' = 2x - y + \dfrac{e^{3t}}{t}; \\ y' = -2x + y - \dfrac{e^{-3t}}{t}. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x' = 2x - 3y + \operatorname{cosech}(t); \\ y' = x - 2y - \operatorname{sech}(t). \end{cases}$

14. $\begin{cases} x' = x - y + \sec 2t; \\ y' = 5x - y - \operatorname{ctg} 2t. \end{cases}$

15. $\begin{cases} x' = 2x - y + \dfrac{e^{2t}}{e^t + 1}; \\ y' = -x + 2y + \dfrac{e^{2t}}{e^t - 1}. \end{cases}$

16. $\begin{cases} x' = 3x - 2y + \dfrac{e^t}{1 + \sqrt{t}}; \\ y' = 2x - y + \dfrac{e^t}{\sqrt{t}}. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x' = 3x - 2y + e^t \operatorname{tg} 2t; \\ y' = 4x - y - \dfrac{e^t}{\sin 2t}. \end{cases}$

18. $\begin{cases} x' = 3x - y + \dfrac{e^t}{e^{2t} - 1}; \\ y' = 2x + 2y + \dfrac{1}{e^t + 1}. \end{cases}$

19. $\begin{cases} x' = -2x - 4y + \dfrac{t}{\sqrt{1 + t}}; \\ y' = x + 2y - \dfrac{2}{t}. \end{cases}$

20. $\begin{cases} x' = x + 2y + \dfrac{e^{-t}}{t^2 + 1}; \\ y' = -2x - 3y - \dfrac{e^{-t}}{t}. \end{cases}$

21. $\begin{cases} x' = x + 2y + \sec t; \\ y' = -x - y - \dfrac{\cos^2 t}{\sin t}. \end{cases}$

22. $\begin{cases} x' = -x - 2y + \dfrac{e^{2t}}{e^t - 1}; \\ y' = 3x + 4y + \dfrac{e^t}{1 + e^t}. \end{cases}$

23. $\begin{cases} x' = 2x - 3y + \dfrac{2e^{2t}}{\sin 3t}; \\ y' = 3x + 2y + \dfrac{e^{2t} \cos 3t}{\sin 3t}. \end{cases}$

24. $\begin{cases} x' = 4x - y + \dfrac{e^{3t}}{\sqrt{1 + t^2}}; \\ y' = x + 2y - \dfrac{e^{3t}}{t}. \end{cases}$

25. $\begin{cases} x' = 2x - y - \dfrac{e^{2t} \sin t}{\cos t}; \\ y' = x + 2y + e^{2t} \operatorname{tg} t. \end{cases}$

9. Решение задачи Коши для систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Рассмотрим неоднородную систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\vec{y}'(x) = A\vec{y} + \vec{f}(x), \tag{9.1}$$

где $A = [a_{ij}]$ – заданная квадратная числовая матрица порядка n, а $\vec{f}(x)$ – заданная матрица-столбец, элементами которой являются функции $f_k(x)$, $f_k(x) \in C(<a,b>)$, $k = 1, 2, ..., n$.

Известно, что система (9.1) имеет бесконечное число решений. Общее решение системы (9.1) зависит от n постоянных c_1, c_2, ..., c_n (см. утверждение 6.2 и теорему 7.1).

Задача нахождения среди множества всех решений системы (9.1) решения, удовлетворяющего начальному условию

$$\vec{y}(x_0) = \vec{y}_0, \tag{9.2}$$

где $x_0 \in <a, b>$ – заданная точка, а $\vec{y}_0 \in \mathbb{R}^n$ – заданный вектор, называется задачей Коши.

Для задачи Коши

$$\begin{cases} \vec{y}'(x) = A(x)\vec{y}(x) + \vec{f}(x); \\ \vec{y}(x_0) = \vec{y}_0, \end{cases} \tag{9.1$'$}$$

где $A(x) = [a_{ij}(x)]$, $i, j = 1, 2, ..., n$, $a_{ij}(x) \in C(<a, b>)$, справедлива следующая теорема существования и единственности решения задачи Коши.

Теорема 9.1. Пусть $a_{ij}(x)$, $f_i(x) \in C\,(<a, b>)$. Тогда при любом начальном условии (9.2) задача Коши (9.1′) имеет и притом единственное решение $\vec{y}(x)$, определенное на всем промежутке $<a, b>$.

Для того чтобы из всех решений системы (9.1) выделить то, которое удовлетворяет начальному условию (9.2) (условию Коши), надо в общее решение системы (9.1), которое зависит от n произвольных постоянных c_1, c_2, ..., c_n, подставить начальное условие (9.2). В результате получим систему n уравнений с n неизвестными.

Из этой системы однозначно определяются неизвестные c_1, c_2, ..., c_n, а следовательно, и решение задачи Коши.

Пример 9.1. Найти решение системы

$$\begin{cases} \dot{x} = 5x - 3y + 2e^{3t}; \\ \dot{y} = x + y + 5e^{-t}, \end{cases} \tag{9.3}$$

удовлетворяющее условиям

$$x(0) = 2, y(0) = 1. \tag{9.4}$$

Решение. Найдем общее решение неоднородной системы (9.3). Для этого сначала найдем общее решение соответствующей однородной системы

$$\begin{cases} \dot{x} = 5x - 3y; \\ \dot{y} = x + y, \end{cases} \tag{9.5}$$

Характеристическое уравнение системы (9.5)

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -3 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$$

имеет корни $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 4$. Этим собственным значениям отвечают собственные векторы $\vec{h}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ и $\vec{h}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$. Тогда общее решение однородной системы (9.5) будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{oo} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} e^{4t}.$$

Общее решение неоднородной системы (9.3) будем искать методом вариации постоянных. Для этого общее решение неоднородной системы (9.3) будем искать в виде

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\text{о.н.}} = c_1(t) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t} + c_2(t) \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} e^{4t}, \tag{9.6}$$

где $c_1(t)$ и $c_2(t)$ – неизвестные функции. Чтобы их найти, подставим $x_{\text{о.н}}$ и $y_{\text{о.н}}$ из (9.6) в систему (9.3). В результате для нахождения $c_1(t)$ и $c_2(t)$ получим систему:

$$\begin{cases} c_1' e^{2t} + 3c_2' e^{4t} = 2e^{3t}; \\ c_1' e^{2t} + c_2' e^{4t} = 5e^{-t}. \end{cases}$$

Из этой системы находим $c_1' = -e^t + \frac{15}{2}e^{-3t}$; $c_2' = e^{-t} - \frac{5}{2}e^{-5t}$. Тогда $c_1(t) = -e^t - \frac{5}{2}e^{-3t} + \tilde{c}_1$, $c_2(t) = -e^t + \frac{1}{2}e^{-5t} + \tilde{c}_2$. Подставив эти значения в (9.6), получим выражение для общего решения неоднородной системы (9.3):

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{он} = \tilde{c}_1\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}e^{2t} + \tilde{c}_2\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}e^{4t} - 2\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}e^{3t} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}e^{-t}. \qquad (9.7)$$

Чтобы найти решение системы (9.3), удовлетворяющее условию (9.4), подставим в общее решение неоднородной системы (9.7) начальные условия (9.4). В результате для нахождения постоянных $\tilde{c}_1$ и $\tilde{c}_2$ получим систему $\begin{cases} \tilde{c}_1 + 3\tilde{c}_2 = 7; \\ \tilde{c}_1 + \tilde{c}_2 = 5. \end{cases}$ Из этой системы находим: $\tilde{c}_1 = 4$ и $\tilde{c}_2 = 1$. Следовательно, решение системы (9.3), удовлетворяющее условию (9.4), имеет вид

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 4\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}e^{2t} + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}e^{4t} - 2\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}e^{3t} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}e^{-t}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. $\begin{cases} x' + 2x + 4y = 1 + 4t; \\ y' + x - y = \frac{3}{2}t^2, \end{cases}$ $\quad x(0) = 2, \quad y(0) = 3.$

2. $\begin{cases} x' + 2x - y = -e^{-2t}; \\ y' + 3x - 2y = 6e^{2t}, \end{cases}$ $\quad x(0) = -2, \quad y(0) = 3.$

3. $\begin{cases} x' - x - 2y = t^2; \\ y' - 2x - y = e^t, \end{cases}$ $\quad x(0) = 2, \quad y(0) = 4.$

4. $\begin{cases} 3x' + 2x + y = t; \\ x' + 2y' + 3y = 1, \end{cases}$ $\quad x(0) = 1, \quad y(0) = 2.$

5. $\begin{cases} x' = 3y - 2x; \\ y' = x + y + e^t, \end{cases}$ $x(0) = y(0) = 1.$

6. $\begin{cases} x' + 2y - y = e^t; \\ x' + y' + 2y = \sin t, \end{cases}$ $x(0) = 1, \quad y(0) = 2.$

7. $\begin{cases} x' + x - 3y = 1; \\ y' - x - y = e^{2t}, \end{cases}$ $x(0) = 1, \quad y(0) = 2.$

8. $\begin{cases} 3x' + 2x + y' = e^{2t}; \\ x' + 4y' + 3y = 1, \end{cases}$ $x(0) = y(0) = 1.$

9. $\begin{cases} x' - x - 2y = \sin t; \\ 2y' - 2x + y = t, \end{cases}$ $x(0) = 1, \quad y(0) = 2.$

10. $\begin{cases} x' = y + t; \\ y' = 2x + 2y + \sin t, \end{cases}$ $x(0) = y(0) = 1.$

11. $\begin{cases} x' - y' - 2x + y = 2t; \\ x' + 2y' + x = \cos t, \end{cases}$ $x(0) = 1, \quad y(0) = 0.$

12. $\begin{cases} x' + x - 8y = t^2; \\ y' - x - y = 2e^t, \end{cases}$ $x(0) = y(0) = 1.$

13. $\begin{cases} x' - 2x - y = 1 + t; \\ y' + x - 4y = t^2, \end{cases}$ $x(0) = 1, \quad y(0) = 2.$

14. $\begin{cases} x' - x - y = e^t; \\ y' + 2x - 4y = t^2 + 1, \end{cases}$ $x(0) = 1, \quad y(0) = -1.$

15. $\begin{cases} x' - x - 2y = t^2; \\ y' - 2x - y = e^t, \end{cases}$ $x(0) = 2, \quad y(0) = 4.$

16. $\begin{cases} x' - 3x + y = 1 - t; \\ y' + y - 4x = e^{2t}, \end{cases}$ $x(0) = -1, \quad y(0) = 1.$

17. $\begin{cases} x' - 5x - 3y = 2e^t; \\ y' + 3x + y = t^2, \end{cases}$ $x(0) = y(0) = 1.$

18. $\begin{cases} x' + x + 5y = \sin t; \\ y' - x - y = e^{2t}, \end{cases}$ $x(0) = 1, \quad y(0) = 2.$

19. $\begin{cases} x' - x + y = te^{t}; \\ y' + x - y = 1 + t^2, \end{cases}$ $x(0) = y(0) = 1.$

20. $\begin{cases} x' - x - 5y = e^{2t}; \\ y' - x + 3y = \cos t, \end{cases}$ $x(0) = 1, \quad y(0) = 2.$

21. $\begin{cases} x' - 4x + 5y = e^{2t} \cos t; \\ y' - x = t^2 + 1, \end{cases}$ $x(0) = 2, \quad y(0) = 1.$

22. $\begin{cases} x' - x - y = t \cos t; \\ y' + 2x + y = \sin t, \end{cases}$ $x(0) = 1, \quad y(0) = -1.$

23. $\begin{cases} x' + 4x + 2y = te^{-t}; \\ y' - 6x - 3y = e^{-t} \sin t, \end{cases}$ $x(0) = y(0) = 1.$

24. $\begin{cases} x' + 2x + 4y = te^{2t}; \\ y' + x - y = e^{-3t}, \end{cases}$ $x(0) = 1, \quad y(0) = 2.$

25. $\begin{cases} x' - 2x - y = te^{3t}; \\ y' + x - 4y = 2e^{3t}, \end{cases}$ $x(0) = -2, \quad y(0) = 1.$

Список литературы

1. Филиппов А.Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений. М., 2004.

2. Бухарова Т.И. и др. Курс лекций по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: НИЯУ МИФИ, 2011.

3. Сандаков Е.Б. Основы аналитической геометрии и линейной алгебры. М.: МИФИ, 2005.

4. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М., 2004.

5. Прилепко А.И., Сандаков Е.Б. Методические указания для преподавателей по теме «Системы дифференциальных уравнений и устойчивость их решений». М.: МИФИ, 1986.

Евгений Борисович Сандаков
Юрий Николаевич Гордеев

Методы решения
линейных дифференциальных уравнений
и систем с постоянными коэффициентами

Редактор М.В. Макарова

Подписано в печать 15.11.2013. Формат 60x84 $^{1}/_{16}$.
Уч.-изд.л. 4,0. Печ. л. 4,0. Тираж 410 экз. Изд. № 1/23. Заказ № 31.

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ».
115409, Москва, Каширское ш., 31.
ООО «Полиграфический комплекс «Курчатовский».
144000, Московская область, г. Электросталь, ул. Красная, д. 42.