

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

Е.П. Потанин, В.Ф. Федоров

ЭЛЕМЕНТЫ ГИДРОДИНАМИКИ

*Рекомендовано УМО «Ядерные физика и технологии»
в качестве учебного пособия
для студентов высших учебных заведений*

Москва 2012

УДК 532.1075.8
ББК 22.253.3я.7
П64

Потанин Е.П., Федоров В.Ф. Элементы гидродинамики: Учебное пособие. М.: НИЯУ МИФИ, 2012. – 56 с.

В данном пособии материал с использованием уравнения движения частицы жидкости. Как частные случаи получены основное уравнение гидростатики, уравнение Эйлера, уравнение Бернулли, а также решена задача для стационарного течения вязкой жидкости.

Качественно рассмотрены вращательные движения в цилиндрических сосудах, турбулентное течение, особенности вихревого движения, явление сильного взрыва, ударные волны при сверхзвуковом движении среды. Приведен пример количественного расчета ламинарного пограничного слоя на вращающемся диске.

Предназначено для студентов МИФИ, изучающих гидрогазодинамику, и может быть полезно преподавателям, читающим курсы, включающие элементы гидрогазодинамики.

Подготовлено в рамках Программы создания и развития НИЯУ МИФИ.

Рецензент д-р физ.-мат. наук, проф. В.Д. Борисевич

ISBN 978-5-7262-1670-6

© Национальный исследовательский
ядерный университет «МИФИ», 2012

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предметом изучения данного пособия является гидродинамика, т.е. движение жидкостей. Пособие может быть использовано как дополнение к курсу общей физики И.В. Савельева. Его цель – углубить знания по этому разделу. По уровню изложения и затрагиваемым вопросам пособие соответствует программе вузовского курса физики.

Как и при изучении движения материальных точек, за основу принято уравнение движения, т.е. 2-й закон Ньютона применительно к частице жидкости. Такой подход позволил связать воедино и более строго изложить весь программный материал. При этом упростились и стали более понятными и доступными для студентов младших курсов многие вопросы, такие, например, как критерии подобия, движение тел в жидкостях и газах и т.д.

Изложение проводится по принципу от общего к частному. Как частные случаи получены основное уравнение гидростатики, уравнение Эйлера, уравнение Бернулли, рассмотрены задача о стационарном течении вязкой жидкости в пространстве между двумя плоскостями и течение Пуазейля.

В пособии качественно рассмотрены вращательные движения жидкости, турбулентное течение, особенности вихревого движения, явление сильного взрыва, образование ударных волн и др. Многие из рассмотренных явлений ранее не затрагивались в пособиях по общей физике.

В начале пособия вводятся такие важнейшие понятия векторного анализа, такие, как поток и циркуляция, дивергенция и ротор. В этом разделе дано качественное рассмотрение поведения вращающейся жидкости в цилиндрическом сосуде.

В разделе, посвящённом пограничным слоям во вращающейся жидкости, исследован случай пограничного слоя на вращающемся в неподвижной среде диске в рамках нелинейных уравнений Навье–Стокса.

Изложение теории сопровождается разбором ряда задач и примеров. Задачи, тесно связанные с теоретическим материалом, являются его развитием, иллюстрацией и дополнением. Приводятся как примеры строгого решения уравнения движения, так и качественные оценки, столь необходимые на начальном этапе любого физического исследования.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Состояние движения жидкости можно задать, указав для каждой точки пространства, занятого жидкостью, вектор скорости \vec{v} частицы как функцию времени. Совокупность векторов $\vec{v}(t, \vec{r})$, заданных для всех точек пространства, характеризует *поле вектора скорости*. Если вектор скорости в каждой точке пространства остается постоянным, то течение называется *стационарным*, или установившимся. При стационарном течении поле скоростей зависит только от координат: $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r})$. Будем рассматривать в основном *несжимаемую жидкость*, полагая плотность ее ρ всюду одинаковой и постоянной.

Под *частицей жидкости* будем понимать физически бесконечно малый выделенный для рассмотрения объем жидкости dV . Частица жидкости является аналогом материальной точки. Физически бесконечно малый объем означает, что он мал по сравнению с размером области течения, но велик по сравнению с межмолекулярным расстоянием.

В данный момент времени каждая частица жидкости имеет определенную скорость $\vec{v}(\vec{r}, t)$. Мысленно проведем в жидкости плавную линию так, чтобы в каждой ее точке мгновенная скорость частиц в один и тот же момент времени t была направлена по касательной к линии. Назовем *ее линией тока*. Очевидно, что таких линий можно провести в жидкости бесконечно много. Условимся проводить их с такой густотой, чтобы число линий ΔN , пронизывающих площадку ΔS , ориентированную перпендикулярно течению, было пропорционально (численно равно) величине скорости движения частиц (рис. 1.1). Таким образом, движение жидкости можно изобразить при помощи линий тока. В случае стационарного движения картина линий тока не меняется со временем, и линии тока совпадают с траекториями частиц.

Трубкой тока называется часть жидкости, ограниченная линиями тока. Сечение трубки тока выбирают достаточно малым, чтобы по всему сечению скорость движения частиц была одинаковой. Очевидно, что частицы жидкости при своем движении не пересекают боковую поверхность трубки тока.

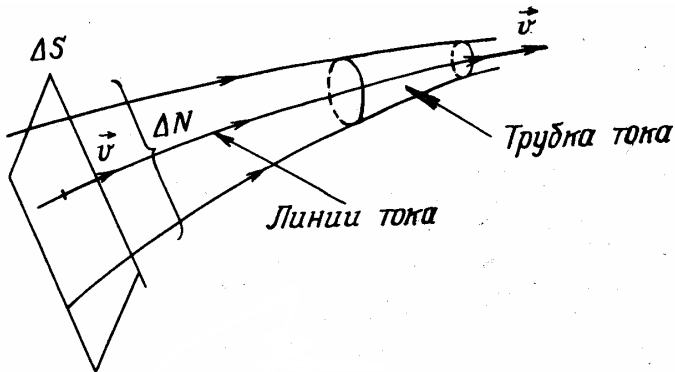


Рис. 1.1. Линии тока

Контрольные вопросы и задания

1. Дать определение частицы жидкости.
2. Дать определение линии тока.
3. Что такое *трубка тока*?
4. Описать характер движения частиц жидкости внутри трубки тока.

2. ПОТОК ЖИДКОСТИ. УРАВНЕНИЕ НЕРАЗРЫВНОСТИ

Пусть течение жидкости задано полем скоростей $\vec{v}(\vec{r})$. Выделим часть трубки тока между сечениями S_1 и S_2 (рис. 2.1). Скорости течения жидкости в этих сечениях соответственно равны v_1 и v_2 . Масса жидкости, протекающая за время dt через любое поперечное сечение S трубки, определяется выражением

$$dm = \rho v S dt ,$$

где ρ – плотность жидкости.

В случае стационарного течения масса dm будет одной и той же для всех сечений трубки тока.

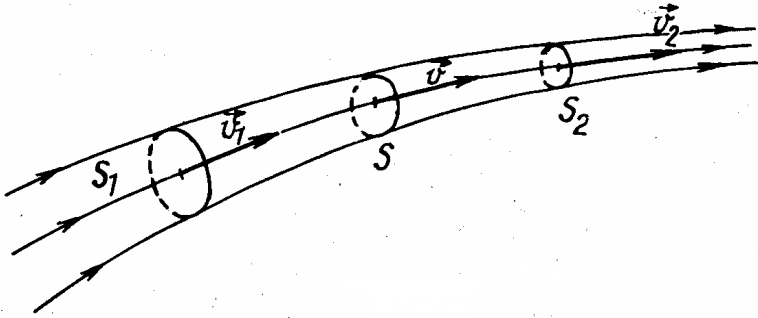


Рис. 2.1. Трубка тока

Для сечений S_1 и S_2 с учетом закона сохранения массы и стационарности течения можно записать

$$\rho_1 v_1 S_1 = \rho_2 v_2 S_2. \quad (2.1)$$

Если жидкость несжимаемая, то $\rho_1 = \rho_2$ и соотношение (2.1) упрощается к виду

$$v_1 S_1 = v_2 S_2. \quad (2.2)$$

Таким образом, для несжимаемой жидкости в любом сечении одной и той же трубки тока величина $vS = \text{const}$. Этот результат представляет *уравнение неразрывности струи* для трубки тока.

Произведение vS есть количество жидкости (объем жидкости), протекающей через сечение S за единицу времени, и называется *потоком жидкости* (или объемным расходом) через сечение S

$$\Phi_v = \frac{dV}{dt} = \frac{Svdt}{dt} = vS. \quad (2.3)$$

Таким образом, в случае стационарного течения несжимаемой жидкости поток жидкости через любое сечение трубки тока постоянен.

Из рис. 2.1 видно, что поток через поверхность S имеет наглядный геометрический смысл: поток численно равен числу линий, пересекающих сечение S трубки тока.

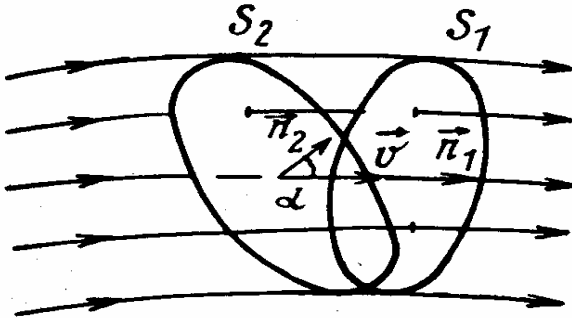


Рис.2.2. Определение потоков через сечения

Поверхность S , через которую определяется поток жидкости, в общем случае может быть произвольной. Из рис.2.2. видно, что потоки через сечения S_1 и S_2 трубки тока одинаковы, так как одинаково число линий тока, пересекающих площадки S_1 и S_2 , причем площадка S_1 ориентирована перпендикулярно скорости жидкости \vec{v} (нормаль к площадке \vec{n} сонаправлена с \vec{v}), а во втором случае нормаль к площадке образует угол α по отношению к вектору \vec{v} . Таким образом, в общем случае

$$\Phi_v = vS \cos \alpha = \vec{v}\vec{n}S = v_n S. \quad (2.4)$$

Очевидно, что поток жидкости через боковую поверхность трубки тока равен нулю, так как при течении жидкость не может пересекать боковую поверхность трубки тока.

Сечения S_1 , S_2 и боковая поверхность трубки тока образуют замкнутую поверхность.

Из соотношения (2.4) следует, что поток является алгебраической величиной: знак потока зависит от выбора положительного направления нормали к поверхности.

В случае замкнутой поверхности за положительное направление выбирается направление наружу, т.е. положительной считается внешняя нормаль. Далее, если в пределах поверхности S скорость жидкости не одинакова, то чтобы найти поток (т.е. объем жидкости, перетекающий через поверхность S в единицу времени), следует поверхность S разбить на элементарные участки dS , в пределах которых скорость постоянна. В этом случае элементарный поток через dS равен $d\Phi_v = v_n dS$. Полный поток через поверхность S определяется путем суммирования, т.е. интегрирования по всей поверхности:

$$\Phi_v = \int_S v_n dS \quad (2.5)$$

Из рис. 2.2 видно, что в случае несжимаемой жидкости поток через любую замкнутую поверхность равен нулю:

$$\Phi_v = \oint_S v_n dS = 0 \quad (2.6)$$

Выражение (2.6) представляет более общую интегральную формулировку уравнения неразрывности для несжимаемой жидкости. Символ \oint означает интегрирование по замкнутой поверхности.

Уравнение (2.6), по существу, выражает закон сохранения массы несжимаемой жидкости и отсутствие источников (или стоков) жидкости в объеме V , ограниченном поверхностью S .

Таким образом, в общем случае поток жидкости через замкнутую поверхность характеризует мощность источников (или стоков) жидкости.

Частное от деления потока Φ_v жидкости на величину объема, из которого она вытекает, дает среднюю удельную мощность источников, заключенных в объеме V . В пределе при стремлении V к нулю (т.е. при стягивании объема V к точке) определяется истинная удельная мощность источников в точке, которая называется *дивергенцией вектора скорости* \vec{v} :

$$\operatorname{div} \vec{v} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\Phi_v}{V} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint_S v_n dS \quad (2.7)$$

Из определения (2.7) следует, что дивергенция есть скалярная функция координат, определяющих положения точек в пространстве. Определение (2.7) является самым общим, не зависящим от вида координатной системы.

В декартовой системе координат дивергенция \vec{v} определяется своими частными производными от проекций скорости:

$$\operatorname{div}\vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (2.8)$$

и кратко записывается с помощью оператора «набла»

$$\nabla = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}, \quad (2.9)$$

в символической форме: $\operatorname{div}\vec{v} = \nabla\vec{v}$, т.е. является скалярным произведением дифференциального векторного оператора «набла» на вектор скорости \vec{v} .

С учетом (2.7)–(2.9) уравнение неразрывности несжимаемой жидкости (2.6) в дифференциальной форме приобретает вид

$$\nabla\vec{v} = 0. \quad (2.10)$$

Уравнение (2.10) характеризует отсутствие стоков или источников в поле скоростей несжимаемой жидкости.

Контрольные вопросы и задания

1. Написать уравнение неразрывности струи.
2. Дать определение дивергенции вектора скорости $\nabla\vec{V}$.
3. Чему равна дивергенция однородного поля скорости?
4. Как математически сформулировать уравнение неразрывности в случае несжимаемой жидкости?

3. УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ ЧАСТИЦЫ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Постановка задачи. Для анализа сил, действующих на частицу жидкости, рассмотрим следующий опыт. В жидкость погружены две параллельные друг другу пластины, размеры которых l существенно превосходят расстояние между ними d . Нижняя пластина

покоится, а верхняя перемещается со скоростью \vec{v}_0 , оставаясь параллельной нижней. Пусть в направлении движения имеется и перепад давления.

Введем в рассмотрение декартову систему координат с осью x в направлении движения (рис. 3.1). Будем считать, что отсутствуют причины, вызывающие компоненты скоростей v_y и v_z .

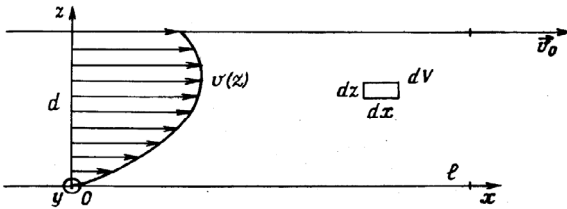


Рис. 3.1. Профиль скорости течения Куэтта

В этом случае наблюдается слоистое плоское течение, причем вектор скорости каждой частицы жидкости параллелен \vec{v}_0 . Линиями тока являются параллельные прямые. Скорость частиц изменяется в направлении оси z , перпендикулярной пластинам. На рис. 3.1 показана характерная зависимость $v_x(z)$ в случае уменьшения давления вдоль оси x .

Получим выражения для сил, действующих на частицу жидкости, имеющую форму параллелепипеда с объемом $dV = dx dy dz$ и запишем уравнение движения частицы.

Сила давления. Так как давление уменьшается в направлении движения – вдоль оси x , то результирующая сила давления равна разности сил давления, приложенных к торцам параллелепипеда площадью $dS_{\perp} = dy dz$ (рис. 3.2):

$$d\vec{F} = (p(x) - p(x + dx))\vec{e}_x dS_{\perp} = -\frac{dp}{dx}\vec{e}_x dx dS_{\perp} = -\nabla p dV.$$

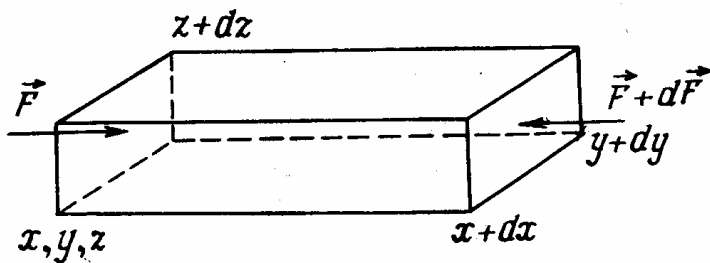


Рис. 3.2. К расчету сил давления

В общем случае произвольного движения результирующая сила давления определяется разностью сил давления, приложенных к противоположным граням параллелепипеда объема dV , и равна

$$d\vec{F} = \left(-\frac{\partial p}{\partial x} \vec{e}_x - \frac{\partial p}{\partial y} \vec{e}_y - \frac{\partial p}{\partial z} \vec{e}_z \right) dV = -\nabla p dV. \quad (3.1)$$

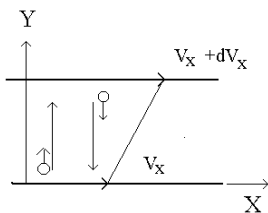


Рис. 3.3. Вязкость в потоке при наличии градиента скорости

Сила внутреннего трения.

Опыт показывает, что если перепад давления равен нулю, то в случае стационарного движения скорость частиц жидкости вдоль оси z изменяется по линейному закону. Она в силу прилипания среды вблизи нижней пластины равна нулю, а вблизи верхней — скорости v_0 .

Это означает, что в поперечном направлении от слоя к слою за единицу времени передается импульс и, следовательно, между слоями жидкости действуют силы, называемые *силами внутреннего трения*, или силами вязкости. Можно следующим образом объяснить появление сил вязкого трения $F_{\text{тр}}$ в газовом потоке с градиентом скорости.

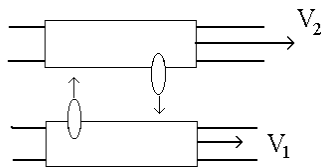


Рис. 3.4. Аналогия процесса возникновения сил вязкого трения между слоями

Мысленно разделим движение молекул среды на среднее направленное вдоль оси x и тепловое хаотическое. Рассмотрим два ближайших соприкасающихся слоя газа (нижний и верхний рис.3.3), имеющих различные средние продольные скорости V_x и $V_x + dV_x$ соответственно. Молекулы газа переходя в результате своего теплового движения из одного слоя, например нижнего, в верхний (характеризующейся большей средней направленной скоростью), в результате соударений с молекулами верхнего слоя получают продольный импульс, что вызывает торможение верхнего слоя.

И наоборот, молекулы верхнего слоя, переходя в нижний и теряя в результате столкновений свой направленный продольный импульс, ускоряют нижний слой. Существует наглядная механическая аналогия этого процесса (рис. 3.4). Представим себе два железнодорожного состава с открытыми платформами,двигающихся по соседним колеям в одном направлении с различными скоростями V_1 и V_2 .

Пусть на платформах стоят парами люди и кидают мешки с песком с платформ одного состава на другой. При падении мешка с платформы, имеющей меньшую скорость движения, на соседнюю, имеющую большую скорость, имеет место торможение быстро движущейся платформы в силу закона сохранения импульса. Аналогично мешки, прилетающие с быстро движущейся платформы, передавая свой избыток импульса, будут дополнительно ускорять медленно движущую-

ся платформу. Таким образом, между платформами действуют «силы» торможения, аналогичные силам вязкого трения между соседними слоями газовой среды. Опытным путем установлено, что

$$F_{\text{тр}} = \eta S \left| \frac{dv}{dz} \right|,$$

где η — коэффициент динамической вязкости; S — площадь слоя, на который действует сила $F_{\text{тр}}$; $\frac{dv}{dz}$ — скорость изменения скорости жидкости в направлении z .

Определим результирующую силу трения, действующую на частицу жидкости объема dV . Она равна разности сил, приложенных к слоям с координатами $z + dz$ и z (к противоположным граням параллелепипеда площади $dS_{\text{II}} = dxdy$) (рис. 3.5):

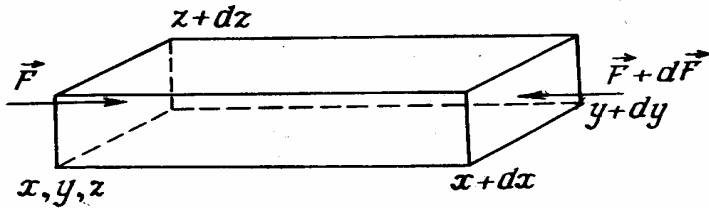


Рис. 3.5. К расчету силы вязкого трения

$$d\vec{F}_{\text{тр}} = \left(\eta dS_{\text{II}} \frac{d\vec{v}}{dz} (z + dz) - \eta dS_{\text{II}} \frac{d\vec{v}}{dz} (z) \right) = \eta \frac{d^2 \vec{v}}{dz^2} dz dS_{\text{II}} = \eta \frac{d^2 \vec{v}}{dz^2} dV.$$

В общем случае скорость направлена не вдоль оси x . Кроме того, она изменяется не только вдоль оси z , но и вдоль других осей. Поэтому $\frac{d^2}{dz^2}$ заменяется на оператор Лапласа $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$:

$$d\vec{F}_{\text{тр}} = \eta \Delta \vec{v} dV. \quad (3.2)$$

Сила тяжести. Если жидкость находится в поле тяжести, то необходимо в балансе сил, действующих на частицу жидкости, учитывать и силу тяжести:

$$d\vec{F}_g = dm\vec{g} = \rho\vec{g}dV, \quad (3.3)$$

где ρ - плотность жидкости; \vec{g} – ускорение свободного падения.

В общем случае дополнительно к рассмотренным силам учитываются силы инерции и другие внешние силы, например кулоновские силы и силы Ампера, если рассматривается движение электропроводящей жидкости.

Уравнение движения частицы несжимаемой жидкости. Полученные соотношения для сил позволяют записать уравнение движения частицы несжимаемой жидкости. По второму закону Ньютона

$$m\vec{w} = \sum_i \vec{F}_i. \quad (3.4)$$

В данном случае уравнение (3.4) с учетом (3.1)–(3.3) применительно к частице жидкости объема dV имеет вид

$$\rho dV \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla p dV + \eta \Delta \vec{v} dV + \rho \vec{g} dV. \quad (3.5)$$

Или, поделив обе части (3.5) на dV , имеем окончательно

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla p + \eta \Delta \vec{v} + \rho \vec{g}. \quad (3.6)$$

Уравнение (3.6) называется *уравнением Навье-Стокса* для несжимаемой жидкости в поле сил тяжести и является основным в гидродинамике несжимаемой жидкости.

Заметим, что в общем случае выражение для ускорения частицы $\frac{d\vec{v}}{dt}$ можно преобразовать к виду

$$\frac{d\vec{v}}{dt}(t, x(t), y(t), z(t)) = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} \frac{dz}{dt} =$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z}) \vec{v} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla) \vec{v}. \quad (3.7)$$

В соотношении (3.7) выражение в скобках представляет скалярное произведение скорости на оператор «набла» (2.9). Частная производная от скорости по времени $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ относится к данной точке пространства, а полная производная $\frac{d\vec{v}}{dt}$ – к данной частице жидкости.

В случае стационарного движения поле скоростей жидкости от времени явно не зависит $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r})$, и выражение для ускорения частицы упрощается:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = (\vec{v}, \nabla) \vec{v}. \quad (3.8)$$

Отметим далее, что в задачах о стационарном течении жидкости в прямолинейных каналах постоянного сечения скорость частиц жидкости не меняется вдоль канала, и ускорение, определяемое (3.8), равно нулю.

Контрольные вопросы и задания

1. Получить выражение для силы, действующей на единицу объема жидкости при наличии градиента давления.
2. Чем определяется сила вязкости, действующая между «трущимися» жидкими слоями?
3. Запишите выражение для полного ускорения частицы жидкости.
4. Что характеризует частная производная от вектора скорости по времени?

4. УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ В БЕЗРАЗМЕРНОЙ ФОРМЕ. КРИТЕРИИ ПОДОБИЯ

В общем случае решение уравнения Навье–Стокса представляет собой сложную задачу. Чтобы выделить существенные особенно-

сти каждой конкретной задачи, желательно найти основные параметры, которые характеризуют данную задачу. Эти параметры, представленные в безразмерной форме, известны как параметры подобия и определяют относительное влияние различных сил на течение.

Параметры подобия также полезны при анализе экспериментальных результатов. В экспериментальных исследованиях часто случается, что изучаемая модель отличается по размерам от действительного тела, а жидкость находится в условиях, отличных от условий реальной жидкости. Если мы хотим сравнить результаты испытаний с реальными условиями, то должны знать соотношение между условиями испытания и реальными условиями. Это соотношение зависит в основном от нескольких важных для данной задачи параметров. Если мы знаем эти параметры, то легко скорректируем экспериментальные результаты.

Имеются два метода нахождения этих важнейших параметров: один известен как анализ уравнения движения в безразмерной форме, или метод подобия, а другой — как анализ размерностей, или метод размерностей.

В данной работе в основном будем использовать первый метод. Безразмерные параметры мы получим из уравнения движения путем его преобразования к безразмерному виду. Вводим следующие безразмерные величины:

$$x^\bullet = \frac{x}{l}, y^\bullet = \frac{y}{l}, z^\bullet = \frac{z}{l}, \nabla^\bullet = l\nabla, t^\bullet = \frac{t}{t_0}, v^\bullet = \frac{v}{v_0},$$

$$\Delta^\bullet = l^2\Delta, p^\bullet = \frac{p}{\rho v_0^2}. \quad (4.1)$$

где индекс «•» обозначает безразмерные величины; индекс «0» относится к некоторым характерным величинам; l — размер области течения.

Подставляя (4.1) в уравнение (3.6), получим безразмерное уравнение движения

$$\frac{1}{S} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \frac{\vec{e}_g}{F} - \nabla p + \frac{1}{\text{Re}} \Delta \vec{v}. \quad (4.2)$$

Здесь $S = \frac{v_0 t_0}{l}$ – число Струхала (временной параметр), характеризующее масштаб времени в задачах по отношению к скорости течения и размеру области течения (для стационарного течения характерное время t_0 , а с ним и число Струхала, обращаются в бес-

конечность). $F = \frac{v_0^2}{\text{lg}}$ – число Фруда, характеризующее роль силы

тяжести в течениях; \vec{e}_g – единичный вектор в направлении силы тя-

жести, $\text{Re} = \frac{v_0 l \rho}{\eta} = \frac{v_0 l}{\nu}$ – число Рейнольдса; $\nu = \eta / \rho$ – кинематиче-

ская вязкость. Число Re является важнейшим параметром динамики вязкой жидкости. Если число Рейнольдса мало ($\text{Re} \ll 1$), то преобладают силы вязкости и влияние внутреннего трения имеет важное значение для всего поля течения. Когда число Рейнольдса велико, то влияние вязкости необходимо учитывать только в узкой области вблизи границы твердого тела. Эта область известна как область *пограничного слоя*. В случае $\text{Re} \gg 1$ за ее пределами влияние вязкости можно не учитывать. Если число Рейнольдса крайне велико, то течение становится турбулентным.

Наряду с введенными параметрами имеются и другие, получающиеся при анализе и обезразмеривании уравнений, выражающих законы сохранения массы и энергии. Например, в механике сжимаемых сред, в газодинамике, важнейшим является число Маха

$M = \frac{v_0}{C_{зв}}$ – отношение характерной скорости потока к скорости

звука. Число Маха является мерой сжимаемости газа, обусловленной высокой скоростью течения. При очень малых значениях числа Маха изменение плотности мало и газ можно рассматривать как несжимаемую жидкость. При $M < 1$ поток называют дозвуковым, а при $M > 1$ — сверхзвуковым. Поле течения дозвукового потока сильно отличается от поля течения сверхзвукового потока. Напри-

мер, ударные волны образуются только в сверхзвуковом поле течения.

Результат решения безразмерного уравнения (4.2) в стационарном случае является функцией безразмерных координат, чисел Фруда и Рейнольдса:

$$\frac{\vec{v}}{v_0} = \vec{v} \cdot \left(\frac{\vec{r}}{l}, \text{Re}, F \right).$$

Таким образом, задачи с одними и теми же безразмерными граничными условиями, с одинаковыми числами Фруда и Рейнольдса имеют одинаковые решения. Течения будут подобными, если они имеют одинаковые числа Рейнольдса и Фруда.

В случае больших чисел Фруда (на практике в основном реализуются именно такие течения) определяющую роль играет сила вязкости, и влияние силы тяжести незначительно. И *подобие будет иметь место при равенстве чисел Рейнольдса.*

В противоположном случае для подобия используется равенство чисел Фруда.

Задача. Для моделирования обтекания воздухом самолета, имеющего скорость v_0 , в аэродинамической трубе использована модель, уменьшенная в n раз. Определить требуемую скорость воздушного потока в аэродинамической трубе u .

Решение. Из условия подобия – равенства чисел Рейнольдса – при обтекании модели и самолета имеем

$$\text{Re} = \frac{v_0 l}{\nu} = \frac{ul}{\nu n},$$

отсюда $u = v_0 n$.

Контрольные вопросы и задания

1. Отношение каких сил характеризует число Рейнольдса?
2. Как определяется число Маха?
3. Сформулируйте условие подобия течений.
4. При каких условиях в уравнениях движения необходимо учитывать сжимаемость среды?

5. ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ ГИДРОСТАТИКИ

1. В случае покоящейся жидкости ($\vec{v} = 0$) уравнение движения (3.6) упрощается:

$$\nabla p = \rho \vec{g}. \quad (5.1)$$

Уравнение (5.1) называется *основным уравнением гидростатики*. Если ось z направить вдоль вектора \vec{g} , то, интегрируя соответствующую проекцию (5.1), приходим к зависимости:

$$p = p_0 + \rho g z, \quad (5.2)$$

где p_0 – давление жидкости на высоте $z = 0$; оно же – атмосферное давление, если начало координат соответствует свободной поверхности жидкости. По формуле (5.2) определяется давление жидкости на дно и стенки сосуда, а также на поверхность любого тела, погруженного в жидкость.

Задача. В жидкость плотности ρ погружен цилиндр высотой h и площадью основания S . Найти результирующую силу, действующую со стороны жидкости на тело.

Решение. Пусть давление жидкости на верхнее основание цилиндра равно p . Согласно (5.2) давление на дно цилиндра больше и равно $p + \rho gh$. Результирующая сила, действующая на тело со стороны жидкости, обусловлена разностью давлений на нижнее и верхнее основания цилиндра и равна

$$F_A = \rho g V_T, \quad (5.3)$$

где $V_T = Sh$ – объем тела, погруженного в жидкость. Таким образом, используя (5.1), мы получили *закон Архимеда*. Отметим, что сила, определяемая (5.3), не зависит от ориентации цилиндра относительно \vec{g} .

2. Если в условиях задачи можно пренебречь всеми внешними силами (включая и силу тяжести), то в случае покоящейся жидкости из уравнения (3.6) имеем

$$\nabla p = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial z} = 0. \quad (5.4)$$

Соотношение (5.4) выражает известный *закон Паскаля*. При отсутствии внешних сил в равновесии давление во всех точках жидкости одинаковое.

Контрольные вопросы и задания

1. Сформулируйте закон Архимеда.
2. Дайте математическую формулировку закона Паскаля.
3. Сформулируйте на основе представлений о силах, действующих на единицу объема жидкости, основной закон гидростатики.

6. ИДЕАЛЬНАЯ ЖИДКОСТЬ. УРАВНЕНИЕ ЭЙЛЕРА. УРАВНЕНИЕ БЕРНУЛЛИ

Уравнение Эйлера. Если по условию задачи число Рейнольдса велико ($Re \gg 1$), то в уравнении движения (3.6) можно пренебречь силами вязкости. Жидкость, в которой отсутствуют силы вязкости ($\eta = 0$), называют *идеальной*. Для идеальной жидкости уравнение движения (3.6) упрощается:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \vec{g} - \nabla p. \quad (6.1)$$

Уравнение (6.1) называется *уравнением Эйлера*. Приближение идеальной жидкости часто используется при решении задач.

Задача. Реактивный лайнер, длина салона которого $l = 50$ м, движется горизонтально с ускорением $w = 1$ м/с². Плотность воздуха в салоне равна $\rho = 1,2$ кг/м³. Определить разность давлений на уши пассажиров, сидящих в начале и в конце салона.

Решение. Направив ось x по направлению движения и учитывая, что относительно салона воздух покоится, из уравнения Эйлера

(6.1) имеем $\rho w_x = -\frac{dp}{dx}$. Отсюда $p(x) = p(0) - \rho w_x x$ и $p(l) - p(0) = -\rho w l = -0,06$ кПа. Таким образом, в конце салона (при $x = 0$) давление больше, чем в начале, на 0,06 кПа.

Уравнение Бернулли. Рассмотрим тонкую трубку тока несжимаемой идеальной жидкости. Частица жидкости за время dt перемещается вдоль трубки тока на $d\vec{r} = \vec{v}dt$ (рис. 6.1). Приращение кинетической энергии частицы жидкости при движении вдоль линии тока равно сумме работ сил давления и тяжести.

Умножив (6.1) скалярно на $d\vec{r}$, получим $\rho \frac{d\vec{v}}{dt} d\vec{r} = \rho \vec{g} d\vec{r} - \nabla p d\vec{r}$ или $d\left(\frac{\rho v^2}{2}\right) = d(\rho \vec{g} \vec{r}) - dp$ или, если при-

нять $\vec{g} = -g\vec{e}_z$, $d\left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho gz + p\right) = 0$, где z – вертикальная координата сечения, отсчитываемая от произвольного уровня.

Следовательно, вдоль трубки тока величина

$$\frac{\rho v^2}{2} + \rho gz + p = B = \text{const}. \quad (6.2)$$

Уравнение (6.2) называется *уравнением Бернулли*. Постоянная B называется постоянной Бернулли.

Отметим, что при выводе (6.2) мы неявно использовали условие стационарности течения. Только в случае стационарного течения траектория частицы совпадает с линией тока.

Таким образом, вдоль линии тока при стационарном течении идеальной жидкости величина

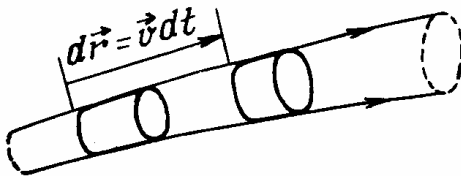


Рис. 6.1. Вывод уравнения Бернулли

$$\frac{\rho v^2}{2} + \rho gz + p$$

остается постоянной и равной B . Для практического применения уравнения Бернулли (6.2) представляют интерес случаи, когда постоянная Бернулли B одна и та же для всех линий тока, т.е. для все-

го потока жидкости. Отметим, что это происходит на таких линиях тока, которые начинаются или проходят через область, где все характеристики течения одинаковы.

Хотя, как правило, реальные течения не являются стационарными, а жидкость - не идеальна, уравнение Бернулли широко используется при проведении оценочных гидродинамических расчетов.

Задача. Определить время τ , за которое из цилиндрического сосуда через малое отверстие на дне выльется вся жидкость, если в начальный момент ($t = 0$) сосуд высотой H доверху наполнен. Площадь основания цилиндра S . Площадь отверстия s .

Решение. Выделим в жидкости трубку тока, имеющую сечениями с одного конца открытую поверхность жидкости в сосуде, а с другой стороны - поверхность отверстия, через которое жидкость вытекает. Давления в обоих сечениях одинаковы и равны атмосферному. Если считать скорость жидкости в пределах выделенного сечения одинаковой, из соотношений (6.1) – уравнения Бернулли и (2.2) – уравнения неразрывности имеем

$$\rho gh + \frac{\rho v_0^2}{2} = \frac{\rho v^2}{2}, \quad (6.3)$$

$$v_0 S = v s, \quad (6.4)$$

где h – высота открытой поверхности жидкости над отверстием;

$v_0 = -\frac{dh}{dt}$ – скорость опускания свободной поверхности жидкости;

v – скорость истечения из отверстия.

Отсюда для скорости истечения жидкости из отверстия, расположенного на глубине h под открытой поверхностью, находим

$$v = \sqrt{2gh(1 + s^2 / S^2)}. \quad (6.5)$$

Если сечение отверстия много меньше сечения сосуда ($\frac{s}{S} \ll 1$), то соотношение (6.5) упрощается:

$$v = \sqrt{2gh} . \quad (6.6)$$

Формула (6.6) – известная **формула Торричелли**. С учетом (6.4) и (6.6) скорость $v_0 = -\frac{dh}{dt} = \frac{s}{S} \sqrt{2gh}$; отсюда, разделяя переменные и интегрируя

$$\frac{S}{s\sqrt{2g}} \int_0^H \frac{dh}{\sqrt{h}} = \int_0^\tau dt ,$$

имеем

$$\tau = \frac{S}{s} \sqrt{\frac{2H}{g}} .$$

Контрольные вопросы и задания

1. Сформулируйте уравнение Бернулли. Какие приближения сделаны при его выводе?
2. Какой закон механики лежит в основе формулы Торричелли?
3. Какой член в уравнении Бернулли соответствует работе сил давления?
4. Можно ли с помощью уравнения Бернулли изучать вязкие движения сплошной среды?

7. СТАЦИОНАРНОЕ ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ. ЗАДАЧА ПУАЗЕЙЛЯ

1. Стационарное течение несжимаемой жидкости между параллельными движущимися друг относительно друга пластинами. Постановка этой задачи описана в п. 3. Дополнительно запишем граничные условия:

$$\begin{aligned} v(0) &= 0; \\ v(d) &= v_0; \\ p(0) &= p(l) = \text{const} . \end{aligned} \quad (7.1)$$

Для стационарного случая число Струхала $S \rightarrow \infty$ и вследствие малости влияния поля сил тяжести ($F \rightarrow \infty$) уравнение движения (3.6) упрощается к виду

$$\nabla p = \eta \Delta \vec{v}. \quad (7.2)$$

Уравнение (7.2) в декартовой системе координат запишется в форме

$$\frac{dp}{dx} = \eta \frac{d^2 v}{dx^2}. \quad (7.3)$$

Граничные условия (7.1) позволяют получить единственное решение уравнения (7.3). С учетом условий (7.1), интегрируя (7.3), имеем

$$\frac{dp}{dx} = 0, \quad \frac{dv}{dz} = C_1, \quad v = C_1 z + C_2, \quad C_2 = 0, \quad v = \frac{v_0}{d} z. \quad (7.4)$$

Таким образом, в полном соответствии с опытом из уравнения движения (3.6) следует, что в случае стационарного движения в отсутствие градиента давления скорость жидкости в направлении z поперек пластин изменяется по линейному закону (7.4).

2. Рассмотрим более сложный случай течения. Пусть дополнительно приложен и градиент давления в направлении движения. Вместо граничных условий (7.1) имеем

$$v(0) = 0; \quad v(d) = v_0; \quad p(0) = p_1; \quad p(l) = p_2. \quad (7.5)$$

Так как в левой части уравнения (7.3) стоит функция, зависящая от x , а в правой части – функция, зависящая от z , то уравнение (7.3) распадается на два:

$$\frac{dp}{dx} = C, \quad (7.6)$$

$$\eta \frac{dv}{dz^2} = C. \quad (7.7)$$

Интегрируя (7.6) и (7.7) с учетом граничных условий (7.5), исключая постоянную C , имеем

$$\begin{aligned} p(x) &= p_1 - \frac{p_1 - p_2}{l} x, \\ v(z) &= -\frac{(p_1 - p_2)}{2\eta l} (z^2 - zd) + \frac{v_0 z}{d}. \end{aligned} \quad (7.8)$$

Отметим, что при $p_1 = p_2$ приходим к предыдущему случаю. Однако если $p_1 \neq p_2$, согласно (7.8) в направлении z скорость изменяется по параболическому закону, причем максимум скорости достигается при

$$z_m = \frac{d}{2} + \frac{v_0 \eta l}{d(p_1 - p_2)}, \quad (7.9)$$

а максимальное значение скорости

$$v_m = \frac{v_0}{2} + \frac{(p_1 - p_2)d^2}{8\eta l} + \frac{v_0^2 \eta l}{2d^2(p_1 - p_2)}. \quad (7.10)$$

Из соотношений (7.9) и (7.10) следует, что в случае неподвижных пластин ($v_0 = 0$) и при наличии градиента давления максимальное значение скорости

$$v_m = \frac{(p_1 - p_2)d^2}{8\eta l}, \quad (7.11)$$

и достигается оно при $z_m = \frac{d}{2}$.

3. Течение жидкости в круглой трубке. Задача Пуазейля.
 Уравнение (7.2) в цилиндрической системе координат (r, φ, z) имеет вид

$$\frac{dp}{dz} = \eta \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right). \quad (7.12)$$

Скорость жидкости вблизи стенок трубы равна нулю. Движение жидкости возникает при наличии градиента давления. Граничные условия к (7.12) примут вид

$$p(0) = p_1; p(l) = p_2; v(R) = 0, \quad (7.13)$$

где l — длина трубы; R — радиус.

Как и в предыдущем случае, уравнение (7.12) разбивается на два:

$$\frac{dp}{dz} = C; \quad (7.14)$$

$$\eta \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right) = C. \quad (7.15)$$

Решение (7.14), (7.15) с учетом (7.13) имеет вид

$$p = p_1 - \frac{p_1 - p_2}{l} z;$$

$$v(r) = \frac{(p_1 - p_2)}{4\eta l} (R^2 - r^2).$$

Как и следовало ожидать (см. (7.11)), скорость достигает максимума на оси трубы при $r = 0$:

$$v_m = \frac{(p_1 - p_2)R^2}{4\eta l}.$$

Поток жидкости (или объемный расход), т.е. объем жидкости, протекающий через поперечное сечение трубы в единицу времени:

$$Q = \int v(r) dS = 2\pi \int_0^R \frac{(p_1 - p_2)R^2}{4\eta l} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) r dr = (p_1 - p_2) \frac{\pi R^4}{8\eta l}. \quad (7.16)$$

Формула (7.16) называется *формулой Пуазейля*. При выводе формулы Пуазейля проведено разбиение поперечного сечения трубы на элементарные кольца сечением $dS = 2\pi r dr$. Согласно формуле Пуазейля поток жидкости пропорционален градиенту давления, четвертой степени радиуса трубы и обратно пропорционален динамической вязкости жидкости.

При гидравлическом способе описания движения используются параметры, осредненные по сечению канала.

Средняя по сечению трубы скорость равна половине максимальной скорости

$$\langle v \rangle = \frac{Q}{S} = \frac{(p_1 - p_2)R^2}{8\eta l} = \frac{v_m}{2}. \quad (7.17)$$

Сопротивлением участка трубы длины l называют величину

$$F = (p_1 - p_2)S = \psi \frac{l}{R} S \frac{\rho \langle v \rangle^2}{2},$$

где $\psi = \frac{(p_1 - p_2)l}{\rho \langle v \rangle^2 / 2R}$ – коэффициент сопротивления трубы.

С учетом (7.17) для коэффициента сопротивления трубы получаем обратно пропорциональную зависимость от числа Рейнольдса Re :

$$\psi = \frac{16\eta}{\rho R \langle v \rangle} = \frac{16}{Re}.$$

Контрольные вопросы и задания

1. От каких параметров зависит объемный расход жидкости в круглой трубе?
2. Напишите формулу Пуазейля.
3. С действием каких сил связано сопротивление изогнутой трубы?

8. ЛАМИНАРНОЕ И ТУРБУЛЕНТНОЕ ТЕЧЕНИЯ

Как показано в п. 7, решение уравнения движения (7.2) при заданных граничных условиях имеет единственное решение. Течение, описываемое уравнениями (7.4) и (7.8), является детерминированным, регулярным. Жидкость течет по трубе параллельным потоком. Такое слоистое течение называется *ламинарным*, отличительной особенностью которого является его устойчивость по отношению к малым возмущениям, возникающим по многим причинам, например вследствие шероховатости стенок трубы и т.д. При достаточно малых числах Рейнольдса благодаря силам внутреннего трения (вязкости), эти возмущения быстро затухают.

Однако, как показывает опыт, при увеличении скорости движения и достижении определенного критического значения числа Re характер течения существенно меняется. Течение теряет устойчивость. Малые первоначально возмущения не затухают, а наоборот, усиливаясь, охватывают всё большие и большие области течения. Возникает нерегулярное нестационарное хаотическое беспорядочное течение, в котором движение частицы складывается из движения вдоль трубы с некоторой усредненной скоростью и беспорядочных пульсаций или колебаний (и вращений) с пульсационной составляющей скорости, изменяющейся в пространстве и времени. В результате слоистость движения нарушается. Частицы интенсивно перемешиваются. Такое движение называется *турбулентным*. Значение числа Рейнольдса, при котором наступает турбулентный режим течения, называется критическим.

Таким образом, при турбулентном движении скорость, давление и другие величины в каждой точке претерпевают нерегулярные пульсирующие изменения около некоторых средних значений. Турбулентное движение является недетерминированным и рассматривается с использованием статистических методов.

На рис. 8.1 приведена построенная по экспериментальным данным зависимость коэффициента сопротивления трубы от числа

Рейнольдса. Функция $\psi(Re)$ имеет две ветви, одна из которых соответствует ламинарному режиму течения (см. (7.18)), а другая – турбулентному. Вблизи критического значения числа Рейнольдса имеется некоторая переходная область. Для круглых цилиндрических труб $Re_{\text{крит}} = 1000 \div 1300$.

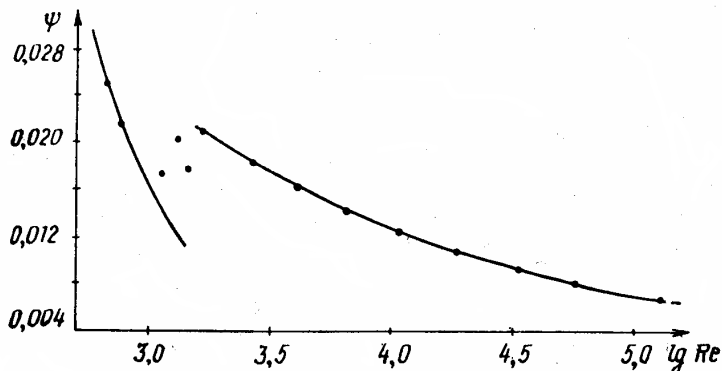


Рис. 8.1. Зависимость коэффициента сопротивления от числа Рейнольдса

В момент перехода течения в турбулентный режим коэффициент сопротивления резко возрастает.

При турбулентном течении резко изменяется и профиль средней по времени скорости по сечению трубы. Средняя скорость благодаря перемешиванию и обмену импульсом частиц поперек трубы оказывается почти постоянной по всему сечению трубы и только в узком слое около стенок, вследствие прилипания, резко падает до нуля.

Контрольные вопросы и задания

1. Что такое ламинарное течение?
2. Чем характеризуется турбулентное течение?
3. Что такое критическое число Рейнольдса?
4. Как физически истолковать возникновение турбулентности в движущейся жидкости?

9. ВИХРЕВОЕ ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Поле скоростей. Течение жидкости подразделяется на потенциальное и вихревое. Рассмотрим поле скоростей жидкости $\vec{v}(\vec{r})$ в фиксированный момент времени. Возьмем в жидкости произвольный замкнутый контур Γ и на нем установим положительное направление обхода (рис. 9.1). Пусть $\vec{\tau}$ – единичный вектор касательной, а $d\vec{l}$ – элемент длины контура, проведенный в положительном направлении. Интеграл

$$C = \oint_{\Gamma} \vec{v} d\vec{l} = \oint_{\Gamma} v_{\tau} dl, \quad (9.1)$$

где v_{τ} – проекция вектора скорости на направление $\vec{\tau}$, называемая **циркуляцией** вектора скорости по контуру Γ . (Напомним, что в случае действия на частицу стационарных потенциальных сил, работа, совершаемая над частицей силами поля, на замкнутом пути равна нулю.) Этот результат также можно записать через интеграл по замкнутому контуру: $\oint \vec{F} d\vec{l} = 0$.

Если циркуляция скорости по любому замкнутому контуру равна нулю, то течение жидкости называется *потенциальным*, в противном случае – *вихревым*. Приведем примеры вихревого движения. Предположим, что в покоящуюся однородную вязкую жидкость неограниченного объема мы поместили круглый цилиндр радиусом r . Приведем цилиндр во вращение с угловой скоростью $\vec{\omega}$. Благодаря силам внутреннего трения окружающая цилиндр жидкость придет в слоистое движение с замкнутыми круговыми линиями тока. Представим теперь, что вместо твердого цилиндра вращается с той же угловой скоростью $\vec{\omega}$ цилиндрический столб жидкости. Очевидно, что при такой замене твердого цилиндра жидким движение жидко-

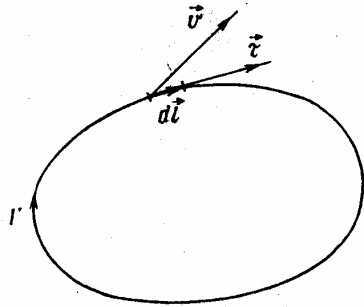


Рис. 9.1. Определение циркуляции вектора скорости по контуру

сти вне цилиндра сохраняет свой вид. Столб жидкости (газа), вращающийся как твердое тело, то есть так, что все его частицы имеют одну и ту же угловую скорость, называют *вихрем*.

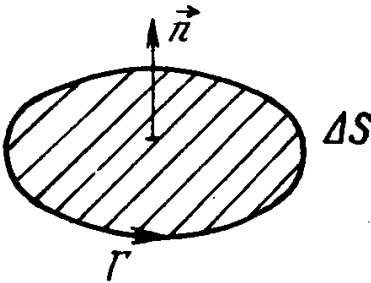


Рис. 9.2. Определение ротора скорости

Циркуляция скорости по окружности радиусом r во вращающемся столбе в этом случае равна $C = 2\pi v = 2\pi r^2 \omega$. Отношение циркуляции C к площади ΔS равно

$$\frac{C}{\Delta S} = \frac{2\pi r^2 \omega}{\pi r^2} = 2\omega \quad \text{и не}$$

зависит от радиуса r . В общем случае угловая

скорость вращения зависит от радиуса r , и вместо отношения $\frac{C}{\Delta S}$

берут его предел при $\Delta S \rightarrow 0$.

Этот предел равен удвоенному значению угловой скорости и называется также вихрем, или ротором скорости \vec{v} , точнее — проекцией ротора на направление, перпендикулярное к плоскости контура: $\text{rot} \vec{v} = 2\vec{\omega}$.

Для произвольного течения ротор скорости \vec{v} определяется своими проекциями на произвольное направление следующим образом. Берется произвольный бесконечно малый контур Γ с площадью ΔS и внешней нормалью, связанной с направлением обхода по контуру по правилу правого винта (рис. 9.2). Проекция вектора $\text{rot} \vec{v}$ на направление нормали определяется соотношением

$$(\text{rot} v)_n = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{v} d\vec{l}}{\Delta S}. \quad (9.2)$$

Перебирая возможные направления \vec{n} , можно выделить ту ориентацию площадки ΔS , при которой проекция $(\text{rot} \vec{v})_n$ будет максимальной. Максимальное значение (9.2) определяет модуль вектора $\text{rot} \vec{v}$, а направление положительной нормали \vec{n} , при которой

достигается максимум, дает направление вектора $\text{rot}\vec{v}$. Определенные $\text{rot}\vec{v}$ по (9.2) является общим и не зависит от выбора системы координат. В декартовой системе координат $\text{rot}\vec{v}$ выражается через определитель

$$\text{rot}\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = [\nabla, \vec{v}] \quad (9.3)$$

или

$$\text{rot}\vec{v} = \vec{e}_x \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) + \vec{e}_y \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) + \vec{e}_z \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right).$$

Циркуляция вектора скорости определяет интенсивность вихревого движения. Очевидно, что течения с отличным от нуля ротором скорости – вихревые.

Задача. Определить характер течения (потенциальное или вихревое) в задаче о течении жидкости между параллельными пластинами.

Решение. Вычислим $\text{rot}\vec{v}$, используя полученное в п. 7 выражение для скорости (см. формулу (7.8)):

$$\text{rot}\vec{v} = \vec{e}_y \frac{dv_x}{dz} = \left(-\frac{(p_1 - p_2)z}{\eta l} + \frac{p_1 - p_2}{2\eta l} + \frac{v_0}{d} \right) \vec{e}_y \neq 0.$$

Таким образом, ламинарное течение вязкой жидкости в каналах является вихревым, т.е. содержащим вращения.

Распределение давления. Рассмотрим сначала распределение давления внутри вихря. Так как любая частица жидкости в вихре движется по окружности, то на нее действует направленная к центру сила, обусловленная градиентом давления. Следовательно, давление жидкости в вихре увеличивается по мере удаления от оси

вихря. Вихревым является также течение, в котором окружная скорость $V_\phi \approx A/r$, где A – постоянная. Эффекты сильного понижения давления у оси вихря наблюдаются в природе. Характерным примером являются смерчи. Под влиянием сильных разрежений в центре смерчей возникают течения, засасывающие пыль, воду и другие тела. Известны случаи, когда проходящий смерч срывал листья с деревьев, засасывал воду вместе с мелкими рыбами и уносил все предметы на большие расстояния.

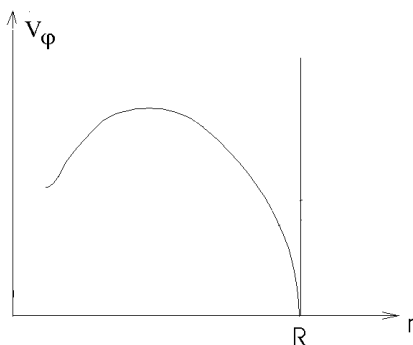


Рис. 9.3. Характерное распределение окружной компоненты скорости жидкости по радиусу стакана

Образование воронкообразного углубления на поверхности воды в ванне (над отверстием стока) объясняется появлением вихря и связанного с ним понижения давления.

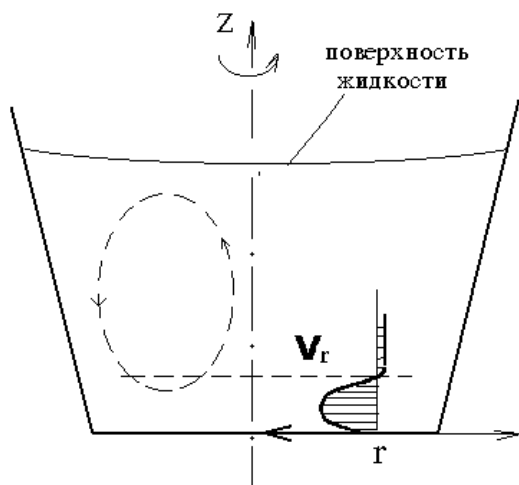


Рис. 9.4. Профиль радиальной компоненты скорости жидкости в пограничном слое у дна

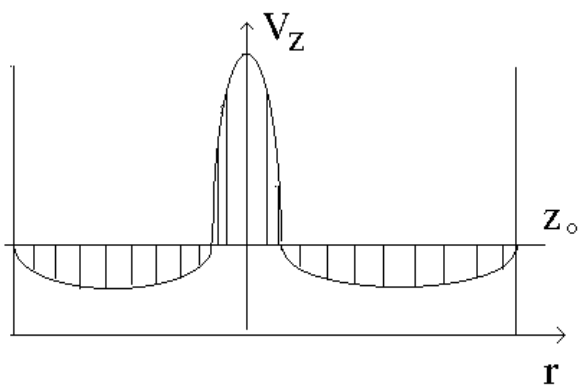


Рис. 9.5. Распределение осевой компоненты скорости жидкости в стакане

Очевидно, что в идеальной жидкости возникший каким-то образом вихрь существовал бы вечно, в вихревом движении участвовали бы одни и те же частицы. В реальной жидкости благодаря силам вязкости в вихревое движение вовлекаются все новые и новые частицы; вихрь диффундирует из области, где он образовался, в окружающее пространство, при этом кинетическая энергия вихря рассеивается (переходит в тепло, т.е. в энергию хаотического движения).

Рассмотрим подробнее несколько вихревых движений жидкости с различным распределением окружной компоненты скорости по радиусу r . Так, например, если жидкость помещена в закрытый прямой круговой цилиндр, вращающийся вокруг своей вертикальной оси с постоянной угловой скоростью ω , когда торцы жестко связаны с цилиндром, распределение окружной скорости подчиняется обычному закону вращения твердого тела:

$$V_{\phi} = \omega r .$$

В этой ситуации никаких дополнительных к вращательному движению течений не возникает. Ситуация изменяется, если один из торцов затормозить. Помимо окружного движения, характеризующегося компонентой скорости среды V_{ϕ} , возникают так называемые циркуляционные компоненты скорости V_r и V_z . В частности, подобный случай реализуется в механической циркуляционной центрифуге, предназначенной для разделения различных компонентов по массам в центробежном поле сил. В чем причина возникновения циркуляционных потоков?

Для того чтобы понять это, целесообразнее сначала рассмотреть случай циркуляции в стакане с вращающейся смесью воды и чаинков, которую мы можем ежедневно наблюдать, сидя за столом. Все прекрасно помнят, что при вращении жидкости с помощью ложки (в этом случае радиальное распределение окружной скорости будет несколько отличаться от твердого вращения) чаинки вблизи дна стакана движутся к центру. Это на первый взгляд противоречит здравому смыслу, так как чаинки тяжелее воды и в центробежном поле сил должны были бы отбрасываться к периферии. Причина столь необычного поведения чаинков связана как раз с возникнове-

нием наложенного на вращательное движение циркуляционного потока жидкости, который вблизи дна стакана направлен к центру. Движение среды в пограничном слое на дне стакана обусловлено разностью давлений между приосевой и периферийной областями. Последняя связана с тем, что в основном объеме, где циркуляционные составляющие скорости малы и градиент давления уравновешивается центробежной силой, уравнение движения можно приближенно (вводя усредненные по радиусу величины) записать в виде

$$-\rho \frac{\overline{V_{\varphi}(r)^2}}{r} \cong -\frac{\Delta p}{\Delta r}, \quad (9.4)$$

где $V_{\varphi}(r)$ – распределение окружной скорости в основном объеме стакана, исключая достаточно тонкий пограничный слой у дна (рис. 9.4); Δp – перепад давления по радиусу, соответствующий силе, действующей на элементарный объем жидкости в направлении к оси; Δr – расстояние по радиусу между соответствующими точками. Отметим, что радиальный градиент давления направлен к периферии, а связанная с ним объемная сила – к центру, что отражается знаком минус в уравнении (9.4). Знак усреднения учитывает тот факт, что имеется радиальное распределение скорости, отличное от твердого вращения. В силу закона Паскаля распределение давления, описываемое (9.4), справедливо в каждом сечении вращающейся в стакане жидкости, в том числе и в пограничном слое (мы не будем учитывать в данном рассмотрении осевых изменений давления, связанных с полем тяжести, поскольку они одинаково действуют на различных радиусах и не будут оказывать заметного влияния на циркуляцию). Но в пограничном слое (очевидно, вследствие вязкого прилипания жидкости) окружная скорость незначительна и центробежные силы не способны полностью уравновесить перепад давления Δp . Этот перепад давления и вызывает движение жидкости к оси, уравновешиваясь наряду с центробежными, вязкими силами трения о дно, возникающими вследствие радиального потока среды к оси. На рис. 9.4 показано распределение радиальной компоненты скорости по высоте в пограничном слое на некотором радиусе. В левой половине рисунка пунктиром со

стрелками показано направление циркуляции в этой части стакана. На рис. 9.5 представлено распределение осевой скорости по радиусу в некотором сечении z . Теперь нетрудно понять направление циркуляционных потоков в механической центрифуге с верхним тормозящим вращение среды диском или любой другой неподвижной системой (например, цилиндрической палочкой, расположенной радиально). Поскольку диск тормозит вращение жидкости (это будет в случае, если угловая скорость диска ω_1 меньше угловой скорости вращения цилиндра ω_0) центробежная отбрасывающая сила в пограничном слое не будет полностью уравновешена радиальным градиентом давления и жидкость потечет к оси системы. На рис. 9.6 стрелками показано направление циркуляции во вращающемся цилиндре при наличии верхнего тормозящего диска. Такая циркуляция имеет важное значение при разделении компонентов смеси, поскольку способствует умножению поперечного радиального эффекта разделения смесей в осевом направлении. Нетрудно сообразить, что если тормозящими будут обе торцевые поверхности, то должны возникнуть два циркуляционных потока, симметричных относительно среднего сечения вращающегося цилиндра (рис. 9.7).

Задача. Жидкость вращают в стакане радиусом R с постоянной угловой скоростью $\bar{\omega}$. Определить глубину образующейся воронки. Вязкостью жидкости пренебречь.

Решение. Уравнение движения (3.6) в проекции на нормаль к траектории имеет вид

$$\rho\omega^2 r = \frac{dp}{dr},$$

где r – расстояние частицы жидкости от оси вращения. Интегрируя это уравнение, получаем зависимость

$$p(r) - p(0) = \frac{\rho\omega^2 r^2}{2}.$$

Следовательно, разность давлений на краю и в центре $(p(R) - p(0) = \frac{\rho\omega^2 r^2}{2})$ равна ρgh . Отсюда $h = \frac{\omega^2 R^2}{2g}$.

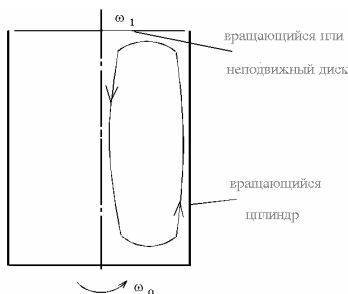


Рис. 9.6. Направление циркуляции жидкости во вращающемся цилиндре с верхним тормозящим диском

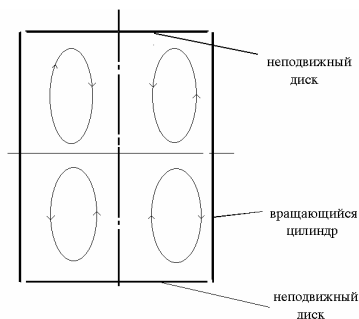


Рис. 9.7. Направление циркуляционных потоков во вращающейся жидкости с двумя тормозящими торцами

Контрольные вопросы и задания

1. Дать определение циркуляции вектора скорости по контуру.
2. Объясните причины возбуждения вторичных циркуляционных течений жидкости во вращающемся цилиндре при наличии неподвижной крышки.
3. Куда направлен и от чего зависит радиальный градиент давления во вращающемся цилиндре?
4. Куда направлен вторичный радиальный поток вблизи неподвижного дна стакана с чаем при вращении жидкости?

10. ПОГРАНИЧНЫЕ СЛОИ ВО ВРАЩАЮЩИХСЯ ПОТОКАХ

Вращающиеся потоки – обширная область гидрогазодинамики, возникшая из потребностей машиностроения и разделения изотопов. Первый шаг на пути изучения вращающихся потоков – исследование дозвуковых течений («несжимаемая жидкость»). При рассмотрении вращательных течений в замкнутых объемах важным является их взаимодействие с тормозящими поверхностями, вследствие которого возбуждаются вторичные циркуляционные течения. Выше мы качественно рассмотрели одну из разновидностей вращающегося потока, а именно: течение в ограниченном торцами и боковой поверхностью стакане (неподвижном цилиндре). Количественные результаты о величине циркуляционных потоков во вращающихся потоках можно получить на основании решения полной системы уравнений Навье–Стокса. При этом важнейший элемент такого исследования – решение уравнений пограничного слоя на граничных вращающихся или неподвижных поверхностях.

В качестве примера рассмотрим ламинарный пограничный слой на вращающемся с угловой скоростью ω_0 диске, когда среда над ним также вращается с постоянной угловой скоростью $\omega_1 < \omega_0$. Для осесимметричных стационарных движений вязкой среды без учета массовых сил система дифференциальных уравнений Навье–Стокса (3.6) в цилиндрической системе координат в проекциях на оси r , φ и z принимает вид

$$v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\varphi^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right) \quad (10.1)$$

$$v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} - \frac{v_r v_\varphi}{r} = \nu \left(\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r^2} + \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial z^2} \right) \quad (10.2)$$

$$v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right), \quad (10.3)$$

где v_r , v_ϕ и v_z – радиальная, тангенциальная (окружная) и осевая компоненты скорости, p – давление, $\nu = \frac{\eta}{\rho}$ - кинематическая вязкость, η - динамическая вязкость, ρ -плотность жидкости. В левой части уравнений (10.1)–(10.3) записаны так называемые инерционные члены, в правой - силы вязкости и силы, связанные с градиентом давления. К системе (10.1)-(10.3) добавим уравнение неразрывности

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \quad (10.4)$$

Метод пограничного слоя заключается в том, что градиент давления в основном потоке над диском, определяемый как

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho r \omega_1^2, \quad (10.5)$$

действует и в пограничном слое.

Воспользуемся предложенным впервые Н.А. Слезкиным приближенным методом расчета пограничного слоя на диске, заключающемся в частичном учете инерционных членов и использовании упрощенных условий на границе пограничного слоя . Ось z будем отсчитывать от поверхности диска. В качестве граничных условий примем

$$\begin{aligned} z=0: \quad v_r &= 0, \quad v_\phi = \omega_0 r, \quad v_z = 0; \\ z = \delta_0: \quad v_r &= 0, \quad v_\phi = \omega_1 r, \quad \frac{\partial v_\phi}{\partial z} = 0. \end{aligned} \quad (10.6)$$

Исходя из характера вращательного потока будем искать решение уравнений (10.1), (10.2) и (10.4) в виде

$$v_r = r f_1(z), \quad v_\phi = r f_2(z), \quad v_z = f_3(z). \quad (10.7)$$

Подставляя (10.7) в (10.1), (10.2) и (10.4), получим

$$f_1 f_2 + f_3 f_2' = \nu f_2'' ; \quad (10.8)$$

$$f_1^2 + f_2 f_1' - f_2^2 = -\omega_1^2 + \nu f_1'' ; \quad (10.9)$$

$$2f_1 + f_3' = 0. \quad (10.10)$$

Усредним стоящие в правых частях уравнений (10.8) и (10.9) нелинейные инерционных члены по толщине пограничного слоя δ_0

$$\nu A = \overline{(f_1^2 + f_3 f_1' - f_2^2)} = \frac{1}{\delta_0} \int_0^{\delta_0} (f_1^2 + f_3 f_1' - f_2^2) dz, \quad (11.11)$$

$$\nu B = \overline{(2f_1 f_2 + f_3 f_2')} = \frac{1}{\delta_0} \int_0^{\delta_0} (2f_1 f_2 + f_3 f_2') dz, \quad (10.12)$$

Тогда, решая дифференциальные уравнения $f_1''(z) = A_0$ и $f_2''(z) = B$ с соответствующими граничными условиями (10.6), где

введено обозначение $A_0 = A + \frac{\omega_1^2}{\nu}$, получим

$$f_1(z_1) = -\frac{A_0}{2} \delta_0^2 (z_1 - z_1^2) \quad (10.13)$$

$$f_2(z_1) = \omega_0 - (\omega_0 - \omega_1)(2z_1 - z_1^2) \quad (10.14)$$

$$f_3(z) = \frac{A_0 \delta_0^3}{6} (3z_1^2 - 2z_1^3), \quad (10.15)$$

где $z_1 = \frac{z}{\delta_0}$ – безразмерная координата.

Подставляя (10.13)–(10.15) в (10.11) – (10.12) и интегрируя, получим

$$A_0 = -\frac{60\nu(1-\theta)}{\delta_0^4(3+2\theta)},$$

$$A_0 = \frac{A_0^2\delta_0^4}{40\nu} - \frac{\omega_0^2}{\nu} \left(\frac{1}{5} + \frac{4}{15}\theta - \frac{7}{15}\theta^2 \right). \quad (10.16)$$

Решение системы (10.16) приводит к следующим выражениям для толщины пограничного слоя δ_0 и параметра A_0 :

$$\delta_0 = \sqrt{\frac{\nu}{\omega_0} \left(\frac{450(\theta+9)}{(3+2\theta)(3+7\theta)} \right)^{1/4}}, \quad (10.17)$$

$$A_0 = -\frac{2}{15} \frac{\omega_0^2}{\nu} \frac{(1-\theta)(3+7\theta)(3+2\theta)}{(9+\theta)}, \quad (10.18)$$

где $\theta = \frac{\omega_1}{\omega_0}$.

Используя полученное решение определим момент сил трения, действующих на одну сторону диска, вращающегося в неподвижной среде ($\theta = 0$). Положим радиус диска R . На кольцо шириной dr и радиусом r действует момент сопротивления

$$dM = 2\pi r^2 dr \tau_{z\varphi}, \quad (10.19)$$

где

$$\tau_{z\varphi} = \eta \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial z} \right)_{z=0} = -2\eta\omega_0 r / \delta_0. \quad (10.20)$$

Подставляя (10.20) в (10.19) и интегрируя от 0 до R , получим

$$M = -\frac{\pi\eta\omega_0 R^4}{\delta_0}. \quad (10.21)$$

Контрольные вопросы и задания

1. Напишите уравнение неразрывности для осесимметричного потока.
2. Как зависит сила трения, действующая на вращающийся в неподвижной среде диск, от толщины пограничного слоя?

3. В каком случае можно пренебрегать пограничными слоями на неподвижных и вращающихся дисках?

11. ДВИЖЕНИЕ ТЕЛ В ЖИДКОСТЯХ И ГАЗАХ. УДАРНЫЕ ВОЛНЫ

Течения, возникающие в жидкостях при движении тел, являются очень сложными. Однако использование для анализа уравнения движения (3.5) позволяет сделать некоторые важные качественные оценки. На тело, движущееся в жидкости, действуют те же силы, что и на частицу жидкости.

Важнейшим параметром, определяющим характер сил, действующих на тело со стороны жидкости, остается число Рейнольдса:

$$Re = \frac{v_0 l}{\nu}, \quad (11.1)$$

где v_0 – скорость тела; l – характерный размер тела; ν – кинематическая вязкость жидкости.

Лобовое сопротивление. Силу, действующую со стороны жидкости на тело, и направленную в сторону, противоположную направлению движения, называют *сопротивлением движения*, или *лобовым сопротивлением*.

При малых числах Рейнольдса $Re \ll 1$ в уравнении движения преобладает сила вязкости. Аналогично, лобовое сопротивление при малых $Re \ll 1$ является силой трения, которую называют *сопротивлением трения*. По порядку величины, согласно (3.2),

$$F_{\text{тр}} \approx \eta \frac{v_0}{l^2} V_T \approx \eta v_0 l, \quad (11.2)$$

где η – коэффициент динамической вязкости; l – характерный линейный размер тела; V_T – объем тела. Коэффициент пропорциональности в соотношении (11.2) зависит от формы тела. Например, для шара, если в качестве l принять радиус шара, коэффициент пропорциональности равен 6π , т.е.

$$F_{\text{тр}} = 6\pi\eta v_0 R. \quad (11.3)$$

Формула (11.3) получена английским физиком Стоксом и называется формулой Стокса.

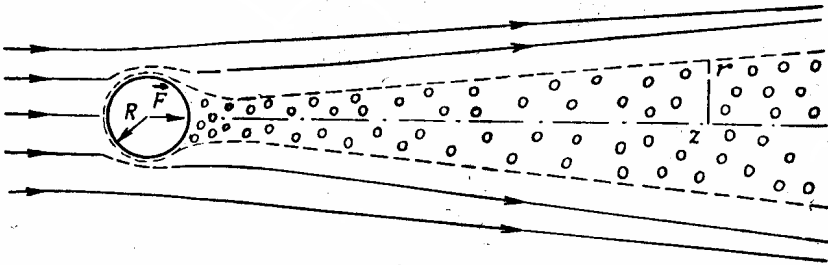


Рис. 11.1. Картина вихревого следа за обтекаемым телом

При больших числах Рейнольдса ($Re \gg 1$) в уравнении движения существенную роль играет сила давления. Аналогично, сопротивлением движения при больших Re является сопротивление давления.

В соответствии с (3.1) и (6.2) имеем оценку

$$F \approx |\nabla p| V_T \approx \frac{\rho v_0^2 V_T}{2l} \approx \frac{\rho v_0^2}{2} S_n, \quad (11.4)$$

где S_n — площадь поперечного (к направлению движения) сечения тела.

Коэффициент пропорциональности, называемый коэффициентом лобового сопротивления, сильно зависит от формы тела. Например, для шара он равен 0,24. Наименьшее значение он имеет для тела обтекаемой каплевидной формы (0,04).

Роль вязкости при больших числах Рейнольдса оказывается существенной в пределах тонкого слоя вблизи поверхности тела, где вследствие прилипания частиц жидкости к поверхности тела существует поперечный градиент скорости. Толщину слоя δ , называемого *пограничным*, можно оценить, приравняв по порядку величины силы вязкости и давления, действующие на частицу жидкости в

пограничном слое: $\frac{\eta v_0}{\delta^2} \approx \frac{\rho v_0^2}{l}$, отсюда получаем оценку

$$\delta \approx \sqrt{\eta l / \rho v_0}$$

или

$$\delta \approx \frac{l}{\sqrt{Re}}, \quad (11.5)$$

где l — продольный (в направлении движения) размер обтекаемого тела. Соотношение (11.5) получено Л. Прандтлем. Для шара радиусом $R \sim 5$ см, движущегося в воздухе со скоростью $v_0 \sim 30$ м/с, толщина пограничного слоя $\delta \approx 0,1$ мм. Поскольку в пограничном слое скорость меняется в направлении, перпендикулярном слою, движение в нем жидкости является вихревым. Как показывает опыт, за телом возникает **вихревой след**, обусловленный сносом вихрей течением с пограничного слоя (рис. 11.1). При больших числах Re течение в следе является турбулентным.

Так как в след попадают частицы из пограничного слоя, средняя скорость течения в следе меньше скорости набегающего потока v_0 . Поэтому согласно уравнению Бернулли возникает разность давлений на переднюю и заднюю части тела, которой объясняется наличие лобового сопротивления (11.4).

В случае хорошо обтекаемого тела ширина следа наименьшая, мало и лобовое сопротивление. В отсутствие следа течение всюду является потенциальным, а лобовое сопротивление давления равно нулю.

Задача. Оценить размер турбулентного следа r (см. рис. 11.1) на большом расстоянии z от обтекаемого тела, например, шара радиусом $R(z \gg R)$. Скорость набегающего потока (или скорость тела) v_0 .

Решение. Среднюю скорость жидкости в следе обозначим $\vec{v}_0 + \vec{v}$, где \vec{v} — пульсационная скорость и $v \ll v_0$. Используя уравнение Бернулли вблизи границы следа, получаем оценку

$$p + \frac{\rho}{2} (\vec{v}_0 + \vec{v})^2 \approx p_0 + \frac{\rho v_0^2}{2}, \quad \text{где } p_0 \text{ — давление в набегающем потоке.}$$

Сопротивление давления пропорционально разности давлений и поперечному сечению следа

$$F \approx (p - p_0)r^2 \approx \rho v v_0 r^2.$$

Так как течение в следе является вихревым, то поперечная (радиальная) скорость близка пульсационной скорости: $v_r \approx v$. Учитывая, что вблизи границы следа линии тока параллельны ей, составим отношение: $\frac{r}{z} \approx \frac{v_r}{v_0} \approx \frac{F}{\rho v_0^2 r^2}$. Отсюда для поперечного размера

следа r , получаем оценку $r \approx \left(\frac{Fz}{\rho v_0^2} \right)^{1/3}$. Подставляя для силы со-

противления согласно (11.4), имеем $r \approx z^{1/3} R^{2/3} \gg R$.

В случае турбулентного следа поперечный размер r зависит от скорости тела v_0 .

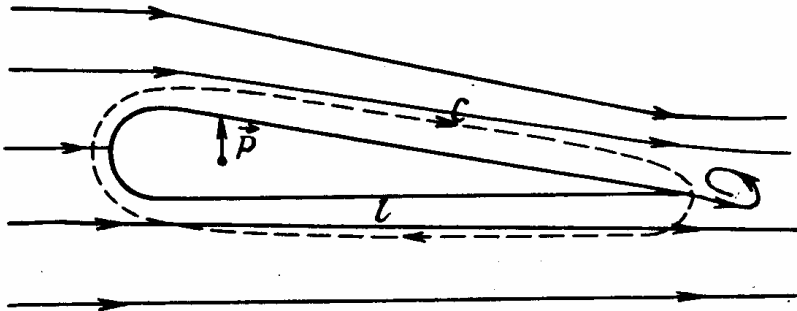


Рис. 11.2 Картина линий тока при обтекании крыла самолета

Подъемная сила. Как указывалось выше, при движении тела в жидкости на него действуют со стороны жидкости разные силы. Силу \vec{P} , действующую со стороны жидкости на тело и направленную перпендикулярно скорости движения тела, называют *подъемной*. Для возникновения подъемной силы необходимо, чтобы тело было несимметричным или несимметрично расположенным относительно направления движения.

На рис. 11.2 показана картина линий тока при обтекании крыла самолета. При несимметричном обтекании крыла за телом образуется вихревое движение с отличным от нуля моментом импульса.

Так как суммарный момент импульса системы «крыло + воздух» не может измениться, то вокруг тела возникает циркуляция скорости по часовой стрелке, накладывающаяся на основной поток. Из-за циркуляции скорость потока под крылом уменьшается, а над ним – увеличивается. Возникает подъемная сила, направленная вверх.

Задача. Оценить подъемную силу, отнесенную к единице длины тонкого крыла, если заданы циркуляция воздуха вокруг крыла C , скорость самолета v_0 и плотность воздуха ρ .

Решение. При стационарном обтекании ко внешнему потоку (вне пограничного слоя) применимо уравнение Бернулли:

$$p_{\text{п}} + \frac{\rho(\bar{v}_0 - \bar{v}'_{\text{п}})^2}{2} \approx p_{\text{н}} + \frac{\rho(\bar{v}_0 + \bar{v}'_{\text{п}})^2}{2},$$

где $p_{\text{п}}$ - давление под крылом, $p_{\text{н}}$ – давление над крылом, $v'_{\text{п}}$ и $v'_{\text{н}}$ – соответствующие скорости циркуляции. Из уравнения Бернулли следует, что давление под крылом $p_{\text{п}}$ вследствие циркуляции со скоростью v' возрастает, а над крылом $p_{\text{н}}$ — уменьшается. Учитывая, что скорость в циркуляционном движении существенно меньше, чем скорость основного потока ($v'_{\text{п}}, v'_{\text{н}} \ll v_0$) для подъемной силы, отнесенной к единице длины, имеем

$$P \approx (p_{\text{п}} - p_{\text{н}})l \approx \rho v_0 (v'_{\text{п}} + v'_{\text{н}})l.$$

Для тонкого крыла циркуляция

$$C = \oint \bar{v}' d\vec{l} \approx (v'_{\text{п}} + v'_{\text{н}})l \text{ и } P \approx C\rho v_0.$$

Формула $P \approx C\rho v_0$ для подъемной силы крыла получена русским ученым Н.Е. Жуковским. Им же найден оптимальный для крыла профиль (см. рис. 11.2), при котором отношение подъемной силы к лобовому сопротивлению наибольшее.

Особенности движения тел в газах. Ударные волны. Рассмотрим качественно особенности движения тел в газах, например в воздухе. В этом случае велико различие между дозвуковым ($M < 1$) и сверхзвуковым ($M > 1$) движениями.

Пока скорость тела значительно меньше скорости звука ($M \ll 1$), будем считать, что возмущения в среде, вызванные движением тела, распространяются мгновенно. Среда в этом случае можно рассматривать как несжимаемую. Движение тел в такой среде рассмотрено нами выше.

Если скорость тела приближается к скорости звука ($M \approx 1$), начинает играть преобладающую роль изменение плотности среды. Тело посылает вперед слабые возмущения, волны сжатия. Впереди тела создается уплотнение, распространяющееся в среде со скоростью звука и опережающее тело. В принципе, столь угодно далеко впереди тела есть слабые возмущения. В неограниченном пространстве воздух расходится в стороны и обтекает тело.

При сверхзвуковом движении воздух не успевает расходиться в стороны — его догоняют бегущие сзади волны сжатия. В результате впереди тела образуется скачок уплотнения (*головная ударная волна* — ГУВ). В скачке резко возрастают давление, плотность и температура. Ударная волна тем сильнее, чем быстрее движется тело. Еще одна ударная волна отделяется от задней кромки (рис. 11.3). Эта ударная волна называется *хвостовой* (ХУВ). Воздух, первоначально сжатый в головной ударной волне, расширяется до давления, меньшего, чем исходное. В хвостовой волне он возвращается к исходному давлению. Профиль давления p_ϕ , показанный на рис. 11.3, напоминает растянутую и вывернутую латинскую букву N и называется N -волной. Оба скачка в N -волне являются волнами сжатия и имеют на некотором расстоянии от тела вид конусов, вложенных друг в друга.

В ударной волне воздух уплотняется и нагревается. Например, при скорости тела $v_0 \approx 7$ км/с температура воздуха за фронтом ударной волны достигает значений порядка 10^4 К.

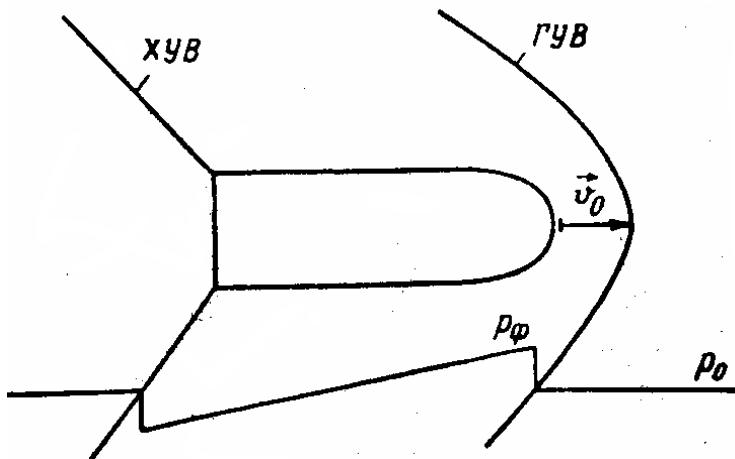


Рис. 11.3. Профиль давления в ударной волне

Обе эти ударные волны заметны на большом расстоянии от тела. Когда пролетают сверхзвуковые самолеты, то на расстояниях, больших 20 км, слышны громкие хлопки, обусловленные прохождением ударных волн.

Контрольные вопросы и задания

1. Что такое лобовое сопротивление?
2. Что такое вихревой след в жидкости?
3. Как объяснить возникновение ударных волн?
4. Что происходит со сплошной средой за фронтом ударной волны?

12. ЯВЛЕНИЕ СИЛЬНОГО ВЗРЫВА

Пусть в газе плотности ρ_0 , который считаем идеальным, в малом объеме в течение малого промежутка времени выделяется большая энергия E_0 . От места энергосвободения по газу распространяется сферическая ударная волна (УВ). Это явление называется сильным взрывом. При сильном взрыве плотность газа чрезвычайно резко падает от фронта УВ к центру. Практически вся масса газа, ранее заполнявшая сферу радиуса, равного радиусу фронта УВ r_ϕ , собирается в тонкий слой около поверхности фронта. Вследствие высокой плотности энергии температура за фронтом УВ достигает очень больших значений ($\approx 10^6 K$). Из-за интенсивного теплообмена излучением между частицами при высокой температуре (длина пробега излучения ($\lambda_R \approx T^m \rho^{-n}$, $m, n > 0$)) температура во всей области возмущения выравнивается. Таким образом, температура за фронтом УВ зависит только от времени и не зависит от расстояния до центра взрыва ($T(r, t) = T(t), r \leq r_\phi$). Такое движение называется *гомотермическим*.

Основные закономерности процесса сильного взрыва можно установить с помощью простого приближенного метода Г.Г. Черного.

Предположим, что масса газа, охваченного УВ, собрана в тонкий слой у поверхности фронта. Поскольку слой очень тонкий, скорость газа в нем почти одинакова и совпадает со скоростью фронта

волны $v_\phi = \frac{dr_\phi}{dt}$. Примем, что плотность в слое бесконечно велика,

толщина, соответственно, бесконечно мала, а масса газа конечна и равна массе газа M , первоначально находившейся в сфере

r_ϕ : $M = \rho_0 \frac{4}{3} \pi r_\phi^3$. Обозначим давление на внутренней стороне слоя

через p . Запишем второй закон Ньютона для массы газа M :

$$\frac{d}{dt}(Mv_\phi) = 4\pi r_\phi^2 p. \quad (12.1)$$

Сила давления, действующая извне, равна нулю, так как начальным давлением газа в явлении сильного взрыва можно пренебречь.

Дополнительно воспользуемся законом сохранения энергии. Кинетическая энергия газа $E_K = \frac{Mv_\Phi^2}{2}$. Внутренняя энергия сосредоточена в полости, ограниченной бесконечно тонким слоем, давление в котором равно давлению p , с объемной плотностью $\frac{p}{\gamma-1}$, где γ - показатель адиабаты. Таким образом, закон сохранения энергии имеет вид

$$E_0 = \frac{p}{\gamma-1} \frac{4}{3} \pi r_\Phi^3. \quad (12.2)$$

Заметив, что $\frac{d}{dt} = \frac{d}{dr_\Phi} \frac{dr_\Phi}{dt} = v_\Phi \frac{d}{dr_\Phi}$, уравнение (12.1) преобразуем к виду

$$\frac{v_\Phi \rho_0}{3} \frac{d}{dr_\Phi} (r_\Phi^3 v_\Phi) = r_\Phi^2 p. \quad (12.3)$$

Полагая с учетом гомотермичности течения, что

$$p = \alpha \rho_0 v_\Phi^2, \quad (12.4)$$

и представляя решение (12.3) в виде

$$v_\Phi = a r_\Phi^\beta \quad (12.5)$$

с учетом (12.3) получаем связь между введенными коэффициентами α и β :

$$\beta = 3(\alpha - 1). \quad (12.6)$$

Подставим выражения для p и v_Φ согласно (12.4) и (12.5) с учетом (12.6) в (12.2). Таким образом,

$$E_0 = \frac{4\pi}{3} \rho a^2 \left(\frac{\alpha}{\gamma-1} + \frac{1}{2} \right) r_\Phi^{6\alpha-3}$$

Поскольку энергия взрыва E_0 есть константа, показатель степени у переменной величины r_ϕ должен обратиться в нуль. Следовательно, $\alpha = 1/2$, $\beta = -3/2$.

Получающееся уравнение определяет постоянную a :

$$a = \left(\frac{3(\gamma-1)}{2\pi\lambda} \right)^{1/2} \left(\frac{E_0}{\rho_0} \right).$$

В результате из соотношения (12.5) имеем

$$\frac{dr_\phi}{dt} = v_\phi = ar_\phi^{-3/2}. \quad (12.7)$$

Интегрируя (12.7), получим окончательно

$$r_\phi = \left(\frac{5}{2} at \right)^{2/5} = \xi_0 \left(\frac{E_0}{\rho_0} \right)^{1/5} t^{2/5}. \quad (12.8)$$

Таким образом, основные закономерности сильного взрыва сводятся к следующему: радиус фронта волны возрастает со временем по закону $r_\phi \approx t^{2/5}$, а скорость фронта волны $v_\phi \approx r_\phi^{-3/2}$, давление газа на фронте волны $p_\phi \approx p \approx r_\phi^{-3}$. Полученные зависимости справедливы для стадии сильной УВ. С течением времени амплитуда УВ становится всё меньше и меньше, давление на фронте асимптотически приближается к начальному давлению газа p_0 . Соответственно уменьшаются сжатие газа во фронте волны и скорость ее распространения, которая асимптотически приближается к скорости звука $C_{зв}$. Закон распространения $r_\phi \approx t^{2/5}$ постепенно переходит в закон $r_\phi \approx C_{зв} t$. Когда давление в центральной области взрывной волны становится близким к атмосферному, расширение газа в этой области прекращается. Фронт УВ постепенно превращается в сферическую волну типа акустической, в которой за областью сжатия следует область разрежения, после чего газ приходит в равновесное состояние.

В заключение отметим, что соотношение (12.8) может быть выведено методом размерностей. Размерность длины r_ϕ можно получить из размерностей основных параметров задачи E_0, ρ_0 и времени t только в комбинации: $r_\phi \approx (E_0 / \rho_0)^{1/5} t^{2/5}$

Контрольные вопросы и задания

1. Опишите основные закономерности сильного взрыва?
2. Какое движение называется гомотермическим?

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Савельев И.В.* Курс общей физики. Т. I. М.: Наука, 1987.
2. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. Т. I. М.: Наука, 1989.
3. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986.
4. *Седов Л.И.* Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1989.
5. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1978.
6. *Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П.* Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Наука, 1966.
7. *Борисевич В.Д., Борман В.Д., Сулаберидзе Г.А., Тихомиров А.В., Токманцев В.И.* Физические основы разделения изотопов в газовой центрифуге. М.: МИФИ, 2005.
8. *Борисевич В.В., Левин Е.В., Наумочкин В.В.* //Атомная энергия. 1991. Т. 70. Вып. 1. С. 28.
9. *Айсен Э.М., Борисевич В.Д., Левин Е.В.*// Математическое моделирование. 1977. 9. № 4. С. 27.
10. *Коробейников В.П.* Задачи точечного взрыва в газах. М.: Наука, 1973.
11. *Компанеев А.С.* Законы физической статистики. М.: Наука, 1976.
12. *Гогин Л.В., Степанов Г.Ю.* Турбулентные отрывные течения. М.: Наука, 1979.
13. Турбулентность: принципы и применения / Под ред. У. Фройта, Т. Моулдена. М.: Мир, 1980.
14. *Федоров В.Ф.* О гомотермической ударной волне// ПМТФ. 1979. № 2.
15. *Федоров В.Ф.* О гомотермическом движении газа вблизи плотной среды // ПМТФ. 1987. № 1.
16. *Черный Г.Г.* Течение газа с большой сверхзвуковой скоростью. М.: Физматгиз, 1959.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	3
1. Основные понятия и определения	4
2. Поток жидкости. Уравнение неразрывности.....	5
3. Уравнение движения частицы несжимаемой жидкости.....	9
4. Уравнение движения в безразмерной форме.	
Критерии подобия.....	15
5. Основное уравнение гидростатики.....	19
6. Идеальная жидкость. Уравнение Эйлера.	
Уравнение Бернулли	20
7. Стационарное течение вязкой жидкости. Задача Пуазейля	23
8. Ламинарное и турбулентное течения	28
9. Вихревое течение вязкой жидкости	30
10. Пограничные слои во вращающихся потоках	39
11. Движение тел в жидкостях и газах	43
12. Явление сильного взрыва	50
Список использованной литературы.....	54

Евгений Петрович Потанин
Виталий Федорович Федоров

ЭЛЕМЕНТЫ ГИДРОДИНАМИКИ

Учебное пособие

Редактор Е.Г.Станкевич

Подписано в печать 15.11.2011. Формат 60x84 1/16

Печ. л. 3,5. Уч.-изд. л. 5,0. Тираж 100 экз.

Изд. № 2/50. Заказ № 31.

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ».
115409, Москва, Каширское ш., 31

ООО «Полиграфический комплекс «Курчатовский».
144000, Московская область, г. Электросталь, ул. Красная, д.42