МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

В. Д. Михайлов

ТФКП

Практикум

Рекомендовано к изданию
УМО «Ядерные физика и технологии»

Москва 2013

УДК 517.5
ББК 22.16
М69

Михайлов В.Д. **ТФКП. Практикум.** М.: НИЯУ МИФИ, 2013. – 244 с.

Данное учебное пособие предназначено для практических занятий и содержит решения большого количества задач по стандартному семестровому курсу «Теория функций комплексной переменной». Этим решениям предпосылаются основные положения теории и необходимые пояснения. Состоит из 16-ти тем-занятий, охватывающих данный курс в соответствии с учебным планом и программой.

Пособие предназначено для студентов, изучающих курс «Теория функций комплексной переменной».

Подготовлено в рамках Программы создания и развития НИЯУ МИФИ.

Рецензенты: канд. физ.-мат. наук *Р.Р. Акопян,*
канд. физ.-мат. наук *И.В. Попов*

ISBN 978-5-7262-1850-2

Редактор *Е.Н. Кочубей*

Подписано в печать 15.11.2013. Формат 60x84 1/16.
Уч.-изд. л. 15,25. Печ. л. 15,25. Тираж 100 экз.
Изд. № 1/14. Заказ № 29

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ».
115409, Москва, Каширское ш., 31.

ООО «Полиграфический комплекс «Курчатовский».
144000, Московская обл., г. Электросталь, ул. Красная, д.42

Содержание

Предисловие ... 4
1. Комплексные числа ... 5
2. Функции комплексной переменной ... 17
3. Аналитические функции. Условия Коши–Римана ... 29
4. Геометрический смысл модуля и аргумента производной аналитической функции. Простейшие конформные отображения ... 43
5. Конформные отображения ... 53
6. Интеграл по комплексной переменной. Интегральная формула Коши ... 69
7. Числовые и функциональные ряды. Степенные ряды. Ряд Тейлора ... 90
8. Ряд Лорана ... 103
9. Изолированные особые точки однозначных аналитических функций ... 125
10. Вычеты ... 141
11. Вычисление контурных интегралов с помощью вычетов. Вычисление интегралов от некоторых функций действительной переменной ... 157
12. Вычисление несобственных интегралов ... 171
13. Интегрирование многозначных функций ... 181
14. Операционное исчисление. Основные свойства ... 214
15. Применение операционного исчисления к решению обыкновенных дифференциальных уравнений ... 229
16. Операционное исчисление. Решение интегральных и интегро-дифференциальных уравнений, вычисление несобственных интегралов с параметром операционным методом ... 238

Список рекомендуемой литературы ... 244

ПРЕДИСЛОВИЕ

Пособие предназначено главным образом для студентов, изучающих в техническом вузе математический курс «Теория функций комплексной переменной» (ТФКП), как правило, в течение семестра, а также для преподавателей, ведущих практические занятия по этому курсу. Оно может быть использовано также изучающими курс самостоятельно.

Пособие состоит из шестнадцати глав, охватывающих весь изучаемый курс в соответствии с действующими учебным планом и учебной программой по ТФКП, утверждёнными в НИЯУ МИФИ.

Представлены разделы: комплексные числа и действия над ними; функции комплексной переменной; определение и свойства аналитических функций; конформные отображения, осуществляемые аналитическими функциями; интегралы по комплексной переменной; теория вычетов; ряды Лорана и различные приложения теории, в частности, к вычислению несобственных интегралов и другие вопросы.

Значительное место отведено операционному исчислению и его применениям, в том числе решению дифференциальных уравнений, интегральных уравнений и вычислению несобственных интегралов.

Материал изложен на уровне современных требований и отвечает задачам фундаментальной математической подготовки специалистов физико-математических и технических направлений.

Пособие сочетает в себе функции частично учебника (в кратком изложении), когда в каждой главе содержится теоретическая часть, а также и главным образом практикума по решению задач по всем разделам курса с решениями, указаниями и методическими рекомендациями по работе над конкретными разделами.

В задачу автора входило сделать изложение максимально доступным и в то же время достаточно строгим. В каждом разделе дан набор задач различной сложности, что удобно как для начального изучения курса, так и для углубления полученных ранее сведений из базового курса.

Кроме того, в некоторых разделах приводятся задачи, выходящие за рамки общепринятой программы (в частности, в главе о многозначных функциях, в главе, посвященной конформным отображениям, и некоторых других). Их можно рассматривать как необязательные, если изучение курса строго ограничено стандартной программой.

1. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Комплексным числом z называется пара действительных чисел (x, y), взятых в определенном порядке. Число x, стоящее на первом месте, называется действительной (реальной) частью комплексного числа (пишется: $x = \operatorname{Re} z$), число y, стоящее на втором месте, – мнимой частью комплексного числа (пишется: $y = \operatorname{Im} z$).

Множество комплексных чисел определяется заданием операций сложения и умножения. Число $z = (x, y)$ называется суммой двух комплексных чисел $z_1 = (x_1, y_1)$ и $z_2 = (x_2, y_2)$, если $x = x_1 + x_2$, $y = y_1 + y_2$.

Произведением чисел z_1 и z_2 называется такое комплексное число $z = (x, y)$, у которого $x = x_1x_2 - y_1y_2$, $y = x_1y_2 + x_2y_1$.

Вычитание и деление комплексных чисел определяются как действия, обратные сложению и умножению. Так, $z = z_1 - z_2$, если $z_1 = z + z_2$, и $z = \dfrac{z_1}{z_2}$ $(z_2 \neq 0)$, если $z \cdot z_2 = z_1$. (Равенство чисел $z_1 = z_2$ означает, что $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$.)

Действительные числа рассматриваются как частный случай комплексных, у которых мнимая часть $y = 0$, т.е. они имеют вид $(x, 0)$. Числа вида $(0, y)$ называются чисто мнимыми (или просто мнимыми). Числа (0,0), (1,0) и (0,1) называют нулем, единицей и мнимой единицей, соответственно. Из определения следует, что известные из арифметики свойства сложения и умножения для действительных чисел сохраняются и для чисел комплексных. Вводится также понятие комплексного числа $\bar{z}$, называемого сопряженным данному комплексному числу $z = (x, y)$, по правилу: $\bar{z} = (x, -y)$. Произведение $z\bar{z} = (x, y)(x, -y) = x^2 + y^2$ и называется квадратом модуля числа z. Отсюда модуль числа z: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ (арифметическое значение корня из действительного, неотрицательного числа $x^2 + y^2$). Число (0,1) (мнимая единица) получило специальное обозначение $(0,1) = i$, что позволило записывать всякое комплексное число в удобной так называемой алгебраической форме: $z = x + iy$, так как

$$z = (x, y) = (x,0) + (0, y) = (x,0) + y(0,1) = x + iy \ .$$

Такая запись комплексного числа в виде алгебраического двучлена позволяет производить действия над комплексными числами, как над алгебраическими двучленами, с учетом того, что

$$i^2 = (0,1)(0,1) = (0\cdot 0 - 1\cdot 1,\ 0\cdot 1 + 1\cdot 0) = (-1,\ 0) = -1 \ .$$

Например:

$$z_1 z_2 = (x_{1,} y_1)(x_{2,} y_2) = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) =$$

$$= x_1x_2 + ix_1y_2 + iy_1x_2 + i^2 y_1y_2 = x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1) \ .$$

Алгебраическая форма комплексного числа позволяет производить деление домножением числителя и знаменателя на число, комплексно сопряженное знаменателю, т.е.:

$$z = (x, y) = \frac{z_1}{z_2} = \frac{(x_{1,} y_1)}{(x_{2,} y_2)} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2}\,\frac{x_2 - iy_2}{x_2 - iy_2} =$$

$$= \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + i(y_1x_2 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2},$$

т.е. $x = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$, $y = \dfrac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$.

На плоскости с декартовыми прямоугольными координатами точки (x, y) можно рассматривать точки плоскости, как геометрические изображения комплексных чисел. В этом случае плоскость называют комплексной плоскостью, ось $0x$ – действительной ее осью, ось $0y$ – мнимой осью. Из определения сложения и равенства комплексных чисел следует, что и радиус-вектор, проведенный из начала координат в точку плоскости, изображающую комплексное число, также можно рассматривать как геометрический образ комплексного числа. Поэтому сложить (или вычесть) комплексное число можно сложив (или вычтя) соответствующие векторы по правилам сложения векторов (правило треугольника или правило параллелограмма, известные из геометрии). В таком случае модуль разности двух комплексных чисел $|z_1 - z_2|$ есть не что иное, как расстояние между точками z_1 и z_2 комплексной плоскости. Введя полярные координаты $\rho = \sqrt{(x^2 + y^2)}$, φ – угол вектора с осью $0x$, т.е. $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \end{cases}$ получим тригонометрическую форму записи комплексного числа $z = x + iy = \rho\cos\varphi + i\rho\sin\varphi = \rho\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)$.

Положительные значения φ отсчитываются против часовой стрелки, отрицательные – по часовой стрелке. Угол φ, называемый аргументом комплексного числа, определен с точность до $2\pi k$. Для однозначности этого понятия бывает удобно выделить так называемое главное значение аргумента, заключенное в любом промежутке углов вида $\varphi_0 \le \varphi < \varphi_0 + 2\pi$. Чаще всего в качестве φ_0 принимается 0 или $-\pi$.

В дальнейшем мы будем брать в качестве главного такое значение аргумента φ (пишется: $\varphi = \arg z$), которое удовлетворяет неравенствам $-\pi < \arg z \le \pi$. Следовательно, в качестве аргумента комплексного числа (пишется: $\operatorname{Arg} z$) можно брать любое значение, связанное с главным соотношением $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k$ (k = 0, ±1, ±2, ...). Отметим, что для числа $z = 0$ значение аргумента не определено. Так как

$$z_1 z_2 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\,\sin\varphi_1)\rho_2(\cos\varphi_2 + i\,\sin\varphi_2) =$$
$$= \rho_1\rho_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\,\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

(т.е. при перемножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются) и, следовательно,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\,\sin(\varphi_1 - \varphi_2)),$$

а также $z^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$ (формула Муавра).

Введем обозначение $\cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}$. Оно позволяет использовать величину $e^{i\varphi}$ как алгебраическую экспоненту, что приводит к еще одной форме записи комплексного числа – показательной:

$$z=\rho\left(\cos\varphi+i\sin\varphi\right)=\rho e^{i\varphi}.$$

В этом виде перемножение комплексных чисел записывается так:

$$z_1z_2=\rho_1e^{i\varphi_1}\rho_2e^{i\varphi_2}=\rho_1\rho_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}.$$

Определим действие извлечения корня n-й степени (n – натуральное число, $n>1$) из комплексного числа точно так же, как это делается в алгебре действительных чисел, т.е. комплексное число $w=\sqrt[n]{z}$, если $w^n=z$.

Пусть $w=r\left(\cos\psi+i\sin\psi\right)$. По формуле Муавра:

$$r^n\left(\cos n\psi+i\sin n\psi\right)=\rho\left(\cos(\varphi+2\pi k)+i\sin(\varphi+2\pi k)\right),$$

откуда $r=\sqrt[n]{\rho}$ (арифметическое значение корня),

$$\psi=\frac{\varphi}{n}+\frac{2\pi k}{n}\ \left(k=0,\pm1,\ ...\right).$$

Таким образом, различных корней n-й степени из числа $z=\rho\left(\cos\varphi+i\sin\varphi\right)$ ровно n, и они вычисляются по формуле

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)\text{при } k=0,1,...,n-1.$$

Имея один и тот же модуль, они располагаются на комплексной плоскости в вершинах правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса $\sqrt[n]{\rho}$.

Пример 1.1. Доказать, пользуясь определением комплексного числа, что $\frac{1}{i}=-i$. Произвести также это деление, пользуясь понятием комплексно сопряженного числа.

Решение.

$$\frac{1}{i}=\frac{(1,0)}{(0,1)}=\left(x,y\right)\Rightarrow\left(0,1\right)\left(x,y\right)=\left(1,0\right)\Rightarrow\begin{cases}0\cdot x-1\cdot y=1\\1\cdot x+0\cdot y=0\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}y=-1\\x=0\end{cases}\Rightarrow\frac{1}{i}=\left(0,-1\right)=-i$$

или

$$\frac{1}{i}=\frac{1\left(-i\right)}{i\left(-i\right)}=\frac{-i}{1}=-i.$$

Пример 1.2. Вычислить: $\left(\dfrac{i^{123}-2}{1+i^{2013}}\right)^3$.

Решение. Так как $i^{4n}=1$, $i^{4n+1}=i$, $i^{4n+2}=i^2=-1$, $i^{4n+3}=i^3=-i$, $i^{123}=i^{120}i^3=-i$, $i^{2013}=i^{2012}i^1=i$, то

$$\frac{i^{123}-2}{1+i^{2013}}=\frac{-i-2}{1+i}=\frac{(-i-2)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{-3+i}{2},$$

$$\left(\frac{-3+i}{2}\right)^3=\frac{(-3+i)^3}{8}=\frac{-27+27i+9-i}{8}=\frac{-9}{4}+\frac{13}{4}i.$$

Пример 1.3. Выполнить действия:

$$\left(\frac{i^{97}-2(1-i)}{i^{27}+(1-i)^3}+\frac{1-i}{i^9-i^6(1-i)+i(1-i)^2}\right):\frac{-1-2i}{i^3-i(1-i)^2}+$$

$$+\frac{2(1-i)^2}{i^3-1+i+i(1-i)^2+(1-i)^3}-\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{21}$$

Ответ. $1+i$.

Пример 1.4. Для данных комплексных чисел z указать Rez, Imz, $|z|$, $\arg z$ и записать число в тригонометрической и показательной формах, а также изобразить это число на комплексной плоскости: 1) $z=3$; 2) $z=-1$; 3) $z=i$; 4) $z=-2i$; 5) $z=1+i$; 6) $z=-1+i$; 7) $z=-1-i$; 8) $z=1-i$; 9) $z=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-i\dfrac{1}{2}$; 10) $z=-1+i\sqrt{3}$; 11) $z=1-2i$; 12) $z=-2-3i$; 13) $z=\sin\dfrac{\pi}{3}+i\cos\dfrac{\pi}{3}$; 14) $z=\cos\dfrac{17\pi}{6}+i\sin\dfrac{5\pi}{3}$; 15) $z=1-\sin\alpha+i\cos\alpha$; 16) $z=\operatorname{ctg}\alpha+i$ ($\alpha\neq\pi k$, $k=0,\pm1,\ldots$).

Решение.

1) $z=3$; $\operatorname{Re}z=3$; $\operatorname{Im}z=0$;

$|z|=3$; $\arg z=0$;

$z=3(\cos 0+i\sin 0)=3e^{i0}$

(рис. 1.1).

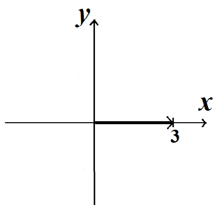


Рис. 1.1

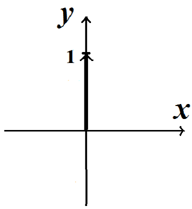


Рис. 1.2

3) $z = i$; $\operatorname{Re} z = 0$; $\operatorname{Im} z = 1$;

$|z| = 1$; $\arg z = \dfrac{\pi}{2}$; $z = \cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}$;

$z = e^{i\frac{\pi}{2}}$ (рис. 1.2).

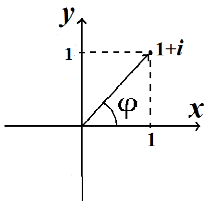


Рис. 1.3

5) $z = 1 + i$; $\operatorname{Re} z = 1$; $\operatorname{Im} z = 1$;

$|z| = \sqrt{2}$; $\arg z = \dfrac{\pi}{4}$;

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right);$$

$z = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ (рис. 1.3).

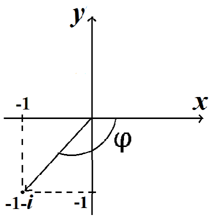


Рис. 1.4

7) $z = -1 - i$; $\operatorname{Re} z = -1$; $\operatorname{Im} z = -1$;

$|z| = \sqrt{2}$; $\arg z = \dfrac{-3\pi}{4}$;

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{-3\pi}{4} + i\sin\frac{-3\pi}{4}\right);$$

$z = \sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}$ (рис. 1.4).

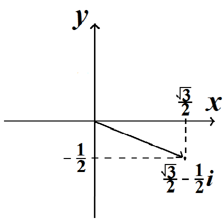


Рис. 1.5

9) $z = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - i\dfrac{1}{2}$; $\operatorname{Re} z = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

$\operatorname{Im} z = -\dfrac{1}{2}$; $|z| = 1$; $\arg z = -\dfrac{\pi}{6}$;

$z = \cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$; $z = e^{-i\frac{\pi}{6}}$

(рис. 1.5).

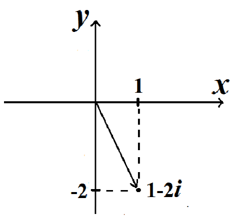


Рис. 1.6

11) $z = 1 - 2i$; $\operatorname{Re} z = 1$; $\operatorname{Im} z = -2$;

$|z| = \sqrt{5}$; $\arg z = -\operatorname{arctg}2$;

$z = \sqrt{5}(\cos(-\operatorname{arctg}2) + i\sin(-\operatorname{arctg}2))$;

$z = \sqrt{5}e^{-i\operatorname{arctg}2}$ (рис. 1.6).

13) $z=\sin\frac{\pi}{3}-i\cos\frac{\pi}{3}$; $\operatorname{Re} z=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$;

$\operatorname{Im} z=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$; $|z|=1$; $\arg z=-\frac{\pi}{6}$;

$z=\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$; $z=e^{-i\frac{\pi}{6}}$ (рис. 1.7).

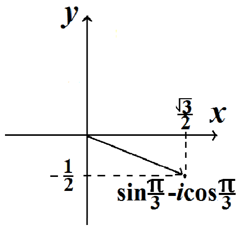


Рис. 1.7

15) $z=1-\sin\alpha+i\cos\alpha$; $\operatorname{Re} z=1-\sin\alpha$; $\operatorname{Im} z=\cos\alpha$;

$|z|=\sqrt{2}\sqrt{1-\sin\alpha}$; $\arg z=\operatorname{arctg}\frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}$, $\left(\alpha\neq\frac{\pi}{2}+2\pi k, k=0,\pm 1..\right)$,

при $\alpha=\frac{\pi}{2}+2\pi k$ $\arg z$ не определен.

$$z=\sqrt{2(1-\sin\alpha)}\left(\cos(\operatorname{arctg}\frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha})+i\sin(\operatorname{arctg}\frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha})\right);$$

$$z=\sqrt{2(1-\sin\alpha)}e^{i\operatorname{arctg}\frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}}.$$

16) $z=\operatorname{ctg}\alpha+i$; $(\alpha\neq\pi k)$; $\operatorname{Re} z=\operatorname{ctg}\alpha$; $\operatorname{Im} z=1$;

$|z|=\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}=\frac{1}{|\sin\alpha|}$; $\arg z=\alpha+\pi n$;

$\left(-\frac{\alpha}{\pi}\leq n\leq 1-\frac{\alpha}{\pi}\right)$ $(n=0,\pm 1,\ldots)$,

$$z=\frac{1}{|\sin\alpha|}\cdot\left(\cos(\alpha+\pi n)+i\sin(\alpha+\pi n)\right)=\frac{1}{|\sin\alpha|}\cdot e^{i(\alpha+\pi n)}.$$

Пример 1.5. Решить уравнения:

1) $z^2+2z+2=0$; 2) $z^2+4z+5=0$; 3) $z^2+(2-2i)z+4-2i=0$;

4) $6z^2-(5+i)z+3+i=0$; 5) $5z^5-4z^4+3z^3-3z^2+4z-5=0$;

6) $z^3-9z^2+27z-26=0$;

Решение.

1) $z^2+2z+2=0$; по формуле корней квадратного уравнения:

$$z_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{-2\pm\sqrt{4-8}}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{-4}}{2}=-1\pm i\,.$$

3) $z^2+(2-2i)z+4-2i=0$;

$$D=(2-2i)^2-4(4-2i)=4(1-i)^2-16+8i=-8i-16+8i=-16\,;$$

$$z_{1,2}=\frac{-2+2i\pm\sqrt{-16}}{2}=-1+i\pm 2i; z_1=-1-i; z_2=-1+3i\,.$$

5) $5z^5-4z^4+3z^3-3z^2+4z-5=0$ очевидно $z_1=1$.

Делим левую часть на двучлен $z-1$. Получаем

$$5z^4+z^3+4z^2+z+5=0\,.$$

Сгруппируем по парам:

$$5\left(z^4+1\right)+\left(z^3+z\right)+4z^2=0\,.$$

Разделим обе части на z^2:

$$5\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)+\left(z+\frac{1}{z}\right)+4=0\,.$$

Сделаем замену $z+\frac{1}{z}=t$, при этом $z^2+\frac{1}{z^2}=t^2-2$. Далее:

$$5t^2+t-6=0\,;\quad t_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+120}}{10}=\frac{-1\pm 11}{10};\quad t_1=\frac{-6}{5};\quad t_2=1\,.$$

Найдем z:

$$z+\frac{1}{z}=-\frac{6}{5};\quad 5z^2+6z+5=0\,;$$

$$z_{2,3}=\frac{-3\pm\sqrt{9-25}}{5}=\frac{-3\pm\sqrt{-16}}{5}=\frac{-3\pm 4i}{5};\quad z+\frac{1}{z}=1\,;$$

$$z^2-z+1=0\,;\quad z_{4,5}=\frac{1\pm\sqrt{1-4}}{2}=\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ: $z_1=1;\quad z_{2,3}=\frac{-3}{5}\pm\frac{4}{5}i;\quad z_{4,5}=\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}.$

Пример 1.6. Извлечь корень из комплексного числа (найти различные значения корня): 1) $\sqrt{3+4i}$; 2) $\sqrt{-3-4i}$; 3) $\sqrt[6]{64}$; 4) $\sqrt[8]{1}$; 5) $\sqrt[3]{-2+2i}$; 6) $\sqrt[5]{-4+3i}$.

Решение.

2) $\sqrt{-3-4i}$. Запишем подкоренное выражение в тригонометрической (или в показательной) форме:

$$-3-4i = 5\left(\cos(\operatorname{arctg}\frac{4}{3}-\pi) + i\sin(\operatorname{arctg}\frac{4}{3}-\pi)\right).$$

Извлечем корень, предварительно прибавив к аргументу период $2\pi k$: $\sqrt{-3-4i} = \sqrt{5}\left(\cos\dfrac{\operatorname{arctg}\frac{4}{3}-\pi+2\pi k}{2} + i\sin\dfrac{\operatorname{arctg}\frac{4}{3}-\pi+2\pi k}{2}\right)$,

($k = 0, 1$). Вычислим один из двух корней, например, при $k = 0$ (второй корень будет отличаться от первого знаком).

При $k = 0$

$$\sqrt{-3-4i} = \sqrt{5}\left(\cos\frac{\operatorname{arctg}\frac{4}{3}-\pi}{2} + i\sin\frac{\operatorname{arctg}\frac{4}{3}-\pi}{2}\right).$$

По формуле тригонометрии $\cos\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}$, где в нашем случае $\alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{4}{3}-\pi$, вычислив сначала

$$\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = -\frac{1}{\sqrt{1+\frac{16}{9}}} = -\frac{3}{5},$$

получим

$$\sqrt{-3-4i} = \sqrt{5}\left(-\sqrt{\frac{1-\frac{3}{5}}{2}} + i\sqrt{\frac{1+\frac{3}{5}}{2}}\right) = -1+2i.$$

Ответ: $\pm(-1+2i)$.

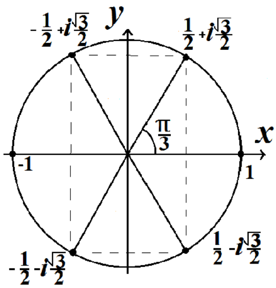


Рис. 1.8

3) $\sqrt[6]{64}=2\sqrt[6]{1}$. Вычислим шесть значений корня шестой степени из единицы, пользуясь геометрическим изображением корней на комплексной плоскости. Один корень очевиден – это число 1. Все шесть корней находятся в вершинах правильного шестиугольника, вписанного в окружность единичного радиуса с центром в начале координат, и отстоят друг от друга на угол $\pi/3$ (рис. 1.8). Осталось домножить каждый из полученных корней на 2.

Ответ: $\sqrt[6]{64}=\{2;\ 1+i\sqrt{3};\ -1+i\sqrt{3};\ -2;\ -1-i\sqrt{3};\ 1-i\sqrt{3}\}$.

5) $\sqrt[3]{-2+2i};\quad 2+2i=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)=$

$$=2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}+2\pi k\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}+2\pi k\right)\right),\quad (k=0,1,2);$$

при $k=0$

$$\sqrt[3]{-2+2i}=\sqrt[3]{2\sqrt{2}}\left(\cos\frac{3\pi}{4\cdot 3}+i\sin\frac{3\pi}{4\cdot 3}\right)=\underbrace{\sqrt[6]{8}}_{\substack{\text{арифм.}\\ \text{значен.}\\ \text{корня}}}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=$$

$$=\sqrt[6]{8}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=1+i\ ,$$

при $k=1$

$$\sqrt[3]{-2+2i}=\sqrt[3]{2\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{4}+2\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{3\pi}{4}+2\pi}{3}\right)=$$

$$=\sqrt[3]{2\sqrt{2}}\left(\cos\frac{11\pi}{12}+i\sin\frac{11\pi}{12}\right)=\sqrt[3]{2\sqrt{2}}\left(-\cos\frac{\pi}{12}+\sin\frac{\pi}{12}\right)=$$

$$=\sqrt[3]{2\sqrt{2}}\left(-\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{6}}{2}}+i\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{2}}\right)=\sqrt[3]{2\sqrt{2}}\left(-\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}+i\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt[6]{8}}\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}+i\sqrt{2-\sqrt{3}}\right),$$

при $k=2$

$$\sqrt[3]{-2+2i}=\sqrt[3]{2\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{4}+4\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{3\pi}{4}+4\pi}{3}\right)=$$

$$=\sqrt[3]{2\sqrt{2}}\left(\cos\frac{19\pi}{12}+i\sin\frac{19\pi}{12}\right)=\sqrt[3]{2\sqrt{2}}\left(\sin\frac{\pi}{12}-i\cos\frac{\pi}{12}\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt[6]{8}}\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}-i\sqrt{2+\sqrt{3}}\right).$$

Пример 1.7. Выяснить геометрический смысл указанных соотношений.

1) [3], № 1.24: $|z-2|+|z+2|=5$. Так как $|z_1-z_2|$ есть расстояние между точками z_1 и z_2 комплексной плоскости, то соотношение $|z-2|+|z+2|=5$ изображает геометрическое место точек z, сумма расстояний от которых до двух фиксированных точек 2 и -2, есть величина постоянная, равная в данном случае 5, то это, по определению, есть эллипс с фокусами в точках (–2,0) и (2,0) на действительной оси с действительной полуосью, равной 2,5.

2) [3], № 1.25: $|z-2|-|z+2|>3$;

3) [3], № 1.26: $|z-z_1|=|z-z_2|$ – геометрическое место точек, расстояния от которых до двух фиксированных точек z_1 и z_2 равны, есть прямая, проходящая через середину отрезка, соединяющего точки z_1 и z_2, и перпендикулярная к этому отрезку.

4) [3], № 1.27: $\operatorname{Re} z\ge C$; $\operatorname{Im} z<C$;

5) [3], № 1.28: $0<\operatorname{Re} iz<1$. Так как $z=x+iy$, то $iz=ix-y$ и $\operatorname{Re} iz=-y$. Соотношение: $0<-y<1\Leftrightarrow -1<y<0$ определяет горизонтальную полосу;

6) [3], № 1.29: $\alpha<\arg z<\beta$; $\alpha<\arg(z-z_0)<\beta$ $(-\pi<\alpha<\beta\le\pi)$.

7) [3], № 1.30: $|z|=\operatorname{Re} z+1$.

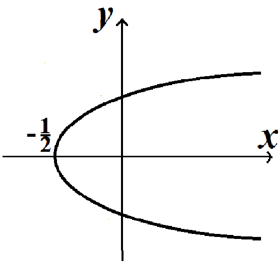


Рис. 1.9

Так как $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, а $\operatorname{Re} z = x$, то $\sqrt{x^2 + y^2} = x + 1$; $x^2 + y^2 = (x+1)^2$; $y^2 = 2x + 1$ – парабола (рис. 1.9).

8) [3], № 1.31: $\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z < 1$;

9) [3], № 1.32: $\operatorname{Im}\dfrac{z - z_1}{z - z_2} = 0$;

$$\operatorname{Re}\frac{z - z_1}{z - z_2} = 0.$$

10) [3], № 1.34;
11) [3], № 1.35.

Рекомендуемый перечень задач для решения в аудитории:
1.1; 1.2; 1.4 (нечетные); 1.5 (нечетные); 1.6 (2; 3; 5);
1.7 ([3], № 1.24; 1.26; 1.28; 1.29; 1.30; 1.34).

Резерв: 1.4 (12; 14; 16); 1.5 (6); [3], № 1.35.

Для самостоятельной работы дома:
1.3; 1.4 (2; 4; 6; 8; 10); 1.5 (2; 4); 1.6 (1; 4; 6);
1.7 ([3], № 1.25; 1.27; 1.31).

2. ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Степенная функция $w = z^n$, $n \in N$. Определена на всей комплексной плоскости и однозначна всюду.

Однолистна, например, в каждом из n углов с вершиной в начале координат: $\varphi_0 < \arg z < \varphi_0 + \frac{2\pi}{n}$. Однолистной в некоторой области называется такая функция $w = f(z)$, что любым двум различным значениям $z_1 \neq z_2$ из этой области отвечают различные значения функции. Под областью понимается связное открытое множество. Однозначная и однолистная в некоторой области функция осуществляет взаимно однозначное отображение этой области на область ее значений. Обратная степенной функция $w = \sqrt[n]{z}$ – функция многозначная, т.к. каждому значению $z\,(z \neq 0)$ отвечает n различных значений функции (см. п. 1):

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right),\ (k = 0, 1, \ldots, n-1)\,.$$

При обходе точки $z = 0$ по замкнутой кривой, содержащей внутри себя эту точку, в сколь угодно малой окрестности этой точки возвращение в исходную точку приводит к изменению значения функции. Так, если взять определенное значение функции в точке $z_0 \neq 0$, отвечающее некоторому определенному значению k_0, то после обхода точки $z = 0$ против часовой стрелки значение функции станет таким, как в этой же точке, но при $k = k_0 + 1$. Точка $z = 0$ является для этой функции точкой ветвления.

Еще одной точкой ветвления этой функции является бесконечно удаленная точка. Вообще, точкой ветвления назовем точку, при обходе которой по замкнутой кривой, содержащей эту точку внутри себя и находящейся в сколь угодно малой окрестности этой точки, функция по возвращении в исходную точку меняет свое значение. В области, где указанный обход любой точки не приводит к изменению значения функции, можно из данной многозначной функции выделить однозначную функцию (однозначную ветвь), взяв в некоторой точке одно конкретное значение многозначной функции, а значения ее в других точках области получить путем непрерывного продолжения. Так, функция $w=\sqrt[n]{z}$ является n-значной.

Во всякой области, в которой невозможен обход точек ветвления, можно выделить из этой функции n различных однозначных функций, беря в некоторой точке области последовательно n различных значений функции и продолжая функцию по непрерывности на все другие точки области. Например, взяв в качестве области, допускающей разделение ветвей, всю плоскость за вычетом точек действительной положительной полуоси (плоскость с «разрезом»), получим n независимых различных однозначных функций:

$$w_k=\sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right),\ k=0,1,\ldots,\ n-1\,.$$

Возможны и другие варианты разделения этой функции на однозначные ветви. Отметим, что для некоторых функций одного лишь выбора значения многозначной функции в точке бывает не достаточно для разделения ветвей (может потребоваться задание еще и производной в этой точке, понятие производной см. далее).

Показательная функция (экспонента) $w=e^z$. До строгого определения (см. степенные ряды) за определение этой функции возьмем формулу Эйлера $e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi$ и будем считать, что

$$e^z=e^{x+iy}=e^x\left(\cos y+i\sin y\right).$$

Функция определена на всей комплексной плоскости и всюду однозначна. Вся плоскость может быть разделена на области (полосы) однолистности прямыми, параллельными действительной оси, ширина полос 2π. Обратная ей функция

$$w=\operatorname{Ln}z=\ln|z|+i\varphi+i2\pi k\quad\left(k=0,\pm1,\pm2,\ldots\right)$$

бесконечнозначна. У функции $\operatorname{Ln}z$ две точки ветвления $z=0$ и $z=\infty$. Соединив их разрезом, получим область, в которой возможно разделение ветвей. Если разрезом служит действительная положительная полуось, то ветви различаются значением числа k.

Точки действительной положительной полуоси, для которых значение аргумента считается равным нулю, называются точками «верхнего берега» разреза. При обходе начала координат от точки верхнего берега к этой же точке получим для нее значение аргумента, равное 2π. Так полученные точки будем называть точками «нижнего берега» разреза.

Определим функции

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},\ \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2},\ \operatorname{ch} z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2},\ \operatorname{sh} z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2},$$

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z},\ \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z},\quad \operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z},\quad \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}.$$

Будем рассматривать также и им обратные (многозначные) функции.

Пример 2.1 ([3], № 1.61). Найти модули и главные значения аргументов комплексных чисел: 1) e^{2+i}, 2) e^{-3-4i}, 3) $e^{i\varphi}\left(a > 0, |\varphi| \le \pi\right)$.

Решение.

1) $e^{2+i} = e^2 e^i = e^2\left(\cos 1 + i\sin 1\right) \Rightarrow |z| = e^2$, $\arg z = 1$;

2) $e^{-3-4i} = e^{-3}e^{-4i} = e^{-3}\left(\cos(-4) + i\sin(-4)\right) =$

$= e^{-3}\left(\cos(-4+2\pi) + i\sin(-4+2\pi)\right) \Rightarrow |z| = e^{-3}$, $\arg z = 2\pi - 4$;

3) $-ae^{i\varphi} = a(-1)e^{i\varphi} = ae^{i\pi}e^{i\varphi} = a\left(\cos(\pi+\varphi) + i\sin(\pi+\varphi)\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow |z| = a$, $\arg z = \pi + \varphi$ (при $\varphi \in [-\pi; 0]$) и $\arg z = \varphi - \pi$ (при $\varphi \in (0;\pi]$).

Пример 2.2 ([3], № 1.66). Доказать, что:
1) $\sin iz = i\operatorname{sh} z$; 2) $\cos iz = \operatorname{ch} z$; 3) $\operatorname{tg} iz = i\operatorname{th} z$; 4) $\operatorname{ctg} iz = -i\operatorname{cth} z$.

Решение.

1) по формуле Эйлера:

$$\sin iz = \frac{e^{i\cdot iz} - e^{-i\cdot iz}}{2i} = \frac{e^{-z} - e^{z}}{2i} = i\frac{e^{z} - e^{-z}}{2} = i\operatorname{sh} z;$$

3) $\operatorname{tg} iz = \dfrac{\sin iz}{\cos iz} = \dfrac{i\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z} = i\operatorname{th} z$.

Пример 2.3 ([3], № 1.67). Найти $\operatorname{Re} w$, $\operatorname{Im} w$ и $|w|$ для функций:
1) $\sin z$; 2) $\cos z$; 3) $\operatorname{tg} z$; 4) $\operatorname{sh} z$; 5) $\operatorname{ch} z$; 6) $\operatorname{th} z$.

Решение.

1) $w = \sin z$; $u + i\upsilon = \sin(x+iy) = \sin x \cos iy + \cos x \sin iy =$

$$= \sin x \ \operatorname{ch} y + i \cos x \ \operatorname{sh} y \Rightarrow u = \operatorname{Re} w = \sin x \ \operatorname{ch} y;$$

$$\upsilon = \operatorname{Im} w = \cos x \ \operatorname{sh} y;$$

$$|w| = \sqrt{u^2 + \upsilon^2} = \sqrt{\sin^2 x \ \operatorname{ch}^2 y + \cos^2 x \ \operatorname{sh}^2 y} =$$

$$= \sqrt{\sin^2 x \ \operatorname{ch}^2 y + \left(1 - \sin^2 x\right) \operatorname{sh}^2 y} =$$

$$= \sqrt{\sin^2 x \ \operatorname{ch}^2 y + \operatorname{sh}^2 y - \sin^2 x \ \operatorname{sh}^2 y} =$$

$$= \sqrt{\operatorname{sh}^2 y + \sin^2 x \left(\operatorname{ch}^2 y - \operatorname{sh}^2 y\right)} = \sqrt{\operatorname{sh}^2 y + \sin^2 x}$$

(так как $\operatorname{ch}^2 y - \operatorname{sh}^2 y = 1$);

$$w = \operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{\sin x \ \operatorname{ch} y + i \cos x \ \operatorname{sh} y}{\cos x \ \operatorname{ch} y - i \sin x \ \operatorname{sh} y} =$$

$$= \frac{\left(\sin x \ \operatorname{ch} y + i \cos x \ \operatorname{sh} y\right)\left(\cos x \ \operatorname{ch} y + i \sin x \ \operatorname{sh} y\right)}{\cos^2 x \ \operatorname{ch}^2 y + \sin^2 x \ \operatorname{sh}^2 y} =$$

$$= \frac{\sin x \ \operatorname{ch} y \cos x \ \operatorname{ch} y - \cos x \ \operatorname{sh} y \sin x \ \operatorname{sh} y}{\cos^2 x + \operatorname{sh}^2 y} +$$

$$+ \frac{i\left(\sin x \ \operatorname{ch} y \sin x \ \operatorname{sh} y + \cos x \ \operatorname{sh} y \cos x \ \operatorname{ch} y\right)}{\cos^2 x + \operatorname{sh}^2 y} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\sin 2x \ \operatorname{ch}^2 y - \frac{1}{2}\sin 2x \ \operatorname{sh}^2 y + i\left(\frac{1}{2}\operatorname{sh} 2y \ \sin^2 x + \frac{1}{2}\operatorname{sh} 2y \ \cos^2 x\right)}{\frac{1+\cos 2x}{2} + \frac{\operatorname{ch} 2y - 1}{2}} =$$

$$= \frac{\sin 2x + i \operatorname{sh} 2y}{\cos 2x + \operatorname{ch} 2y} \Rightarrow \operatorname{Re} w = \frac{\sin 2x}{\cos 2x + \operatorname{ch} 2y};$$

$$\operatorname{Im} w = \frac{\operatorname{sh} 2y}{\cos 2x + \operatorname{ch} 2y}; \quad |w| = \sqrt{u^2 + \upsilon^2} = \frac{\sqrt{\sin^2 2x + \operatorname{sh}^2 2y}}{\cos 2x + \operatorname{ch} 2y}.$$

Пример 2.4 ([3], № 1.68). Найти действительные и мнимые части значений функций:

1) $\cos(2+i)$; 2) $\sin 2i$; 3) $\mathrm{tg}(2-i)$; 4) $\mathrm{ctg}\left(\dfrac{\pi}{4}-i\ln 2\right)$.

Решение.

1) $w=\cos(2+i)=\cos 2\cos i-\sin 2\sin i=\cos 2\ \mathrm{ch}1-i\sin 2\ \mathrm{sh}\,1\Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{Re} w=\cos 2\ \mathrm{ch}\,1;\ \ \operatorname{Im} w=-\sin 2\ \mathrm{sh}\,1$.

$$4)\qquad \mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-i\ln 2\right)=\frac{\mathrm{ctg}\dfrac{\pi}{4}\mathrm{ctg} i\ln 2+1}{\mathrm{ctg} i\ln 2-\mathrm{ctg}\dfrac{\pi}{4}}=\frac{\mathrm{ctg} i\ln 2+1}{\mathrm{ctg} i\ln 2-1}=$$

$$=\frac{-i\mathrm{cth}\ln 2+1}{-i\mathrm{cth}\ln 2-1}=\frac{-1+i\,\mathrm{cth}\ln 2}{1+i\,\mathrm{cth}\ln 2}=\frac{-1+\mathrm{cth}^2\ln 2+2i\mathrm{cth}\ln 2}{1+\mathrm{cth}^2\ln 2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{Re} w=\frac{-1+\mathrm{cth}^2\ln 2}{1+\mathrm{cth}^2\ln 2};$$

$$\mathrm{cth}\ln 2=\frac{2+\dfrac{1}{2}}{2-\dfrac{1}{2}}=\frac{5}{3};\qquad \operatorname{Re} w=\frac{-1+\dfrac{25}{9}}{1+\dfrac{25}{9}}=\frac{16}{34}=\frac{8}{17};$$

$$\operatorname{Im} w=\frac{2\mathrm{cth}\ln 2}{1+\mathrm{cth}^2\ln 2}=\frac{2\cdot\dfrac{5}{3}}{1+\dfrac{25}{9}}=\frac{10\cdot 9}{3\cdot 34}=\frac{15}{17}.$$

Пример 2.5 ([3], № 1.71). Вычислить: 1) $\mathrm{Ln}4$, $\mathrm{Ln}(-1)$, $\ln(-1)$; 2) $\mathrm{Ln}i$, $\ln i$; 3) $\mathrm{Ln}\dfrac{1\pm i}{\sqrt{2}}$; 4) $\mathrm{Ln}(2-3i)$, $\mathrm{Ln}(2+3i)$.

Решение.

1) Так как $\mathrm{Ln}z=\ln|z|+i\varphi+i2\pi k$ $(k=0,\pm1,\ldots)$, то $\mathrm{Ln}4=\ln 4+2\pi ki$; $\mathrm{Ln}(-1)=i\pi+2\pi ki$; $\ln(-1)=i\pi$.

$$3)\ \mathrm{Ln}\frac{1\pm i}{\sqrt{2}}=\ln\left|\frac{1\pm i}{\sqrt{2}}\right|\pm i\frac{\pi}{4}+i2\pi k=\ln 1\pm i\frac{\pi}{4}+i2\pi k=\pm i\frac{\pi}{4}+2\pi ki.$$

Пример 2.6 ([3], № 1.73). Первоначальное значение Im $f(z)$ при $z=2$ принято равным 0. Точка z делает один полный оборот против часовой стрелки по окружности с центром в точке $z = 0$ и возвращается в точку $z = 2$. Считая, что $f(z)$ изменяется непрерывно при движении точки z, указать значение Im $f(z)$ после данного оборота, если:
1) $f(z)=2\operatorname{Ln} z$; 2) $f(z)=\operatorname{Ln}\dfrac{1}{z}$; 3) $f(z)=\operatorname{Ln} z-\operatorname{Ln}(z+1)$;
4) $f(z)=\operatorname{Ln}(z+1)+\operatorname{Ln} z$.

Решение. 1) $f(z)=2\operatorname{Ln} z$; так как $\operatorname{Ln} z=\ln|z|+i\varphi+i2\pi k$, то $\operatorname{Ln}2=\ln 2+i\cdot 0+i2\pi k$. По условию

$$\operatorname{Im} f(2)=0 \Rightarrow\ k=0 \Rightarrow \operatorname{Im} f(z)=\operatorname{Im}(2\operatorname{Ln} z)=2(\varphi+2\pi k)=2\varphi \Rightarrow$$

после оборота $\operatorname{Im} f(z)=4\pi$.

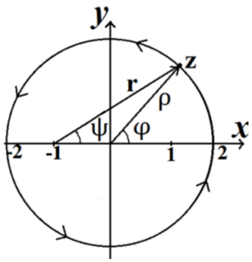


Рис. 2.1

3) $f(z)=\operatorname{Ln} z-\operatorname{Ln}(z+1)$. Пусть $z=\rho e^{i\varphi}$; $z+1=re^{i\psi}$ (рис. 2.1).

$\operatorname{Im} f(z)=i(\varphi-\psi)+i2\pi k-i2\pi n$;

$\operatorname{Im} f(2)=i(0-0)+i2\pi(k-n)=0 \Rightarrow$

$k-n=0$, т.е. $\operatorname{Im} f(z)=i(\varphi-\psi)$.

После оборота $\varphi \Rightarrow \varphi+2\pi$; $\psi \Rightarrow \psi+2\pi$.

Следовательно, $\operatorname{Im} f(2)=0$.

Пример 2.7 ([3], № 1.43). Первоначальное значение $\operatorname{Arg} f(z)$ при $z=2$ принято равным 0. Точка z делает один полный оборот против часовой стрелки по окружности с центром в точке $z = 0$ и возвращается в точку $z = 2$. Считая, что $f(z)$ изменяется непрерывно при движении точки z, указать значение Im $f(z)$ после данного оборота, если: 1) $f(z)=\sqrt{z-1}$; 2) $f(z)=\sqrt[3]{z-1}$; 3) $f(z)=\sqrt{z^2-1}$; 4) $f(z)=\sqrt{z^2+2z-3}$; 5) $f(z)=\sqrt{\dfrac{z-1}{z+1}}$.

Решение.

1) $f(z)=\sqrt{z-1}=\sqrt{\rho_1}e^{\frac{\varphi_1+2\pi k}{2}}$, $k=0,1$; $\rho_1=|z-1|$, $\varphi_1=\arg(z-1)$ (рис. 2.2).

$\operatorname{Arg} f(z)=\dfrac{\varphi_1+2\pi k}{2}$, в точке $z=2 \quad \varphi_1=0$,

$\operatorname{Arg} f(2)=\pi k=0 \Rightarrow\ k=0 \Rightarrow \operatorname{Arg} f(z)=\dfrac{\varphi_1}{2}$.

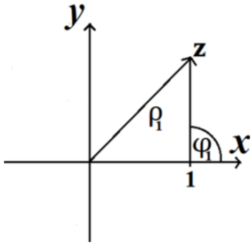


Рис. 2.2

После оборота φ_1 приобретает приращение $2\pi \Rightarrow$ после оборота $\operatorname{Arg} f(z)=\pi$.

2) $f(z)=\sqrt[3]{z-1}=\sqrt[3]{|z-1|}e^{i\frac{\varphi_1+2\pi k}{3}}\ (k=0,1,2)$;

$\operatorname{Arg} f(z)=\dfrac{\varphi_1+2\pi k}{3}$; в точке $z=2 \quad \varphi_1=0 \quad \Rightarrow \dfrac{2\pi k}{3}=0 \Rightarrow\ k=0 \Rightarrow$ $\operatorname{Arg} f(z)=\dfrac{\varphi_1}{3}$. После оборота в 2π $\operatorname{Arg} f(2)=\dfrac{2\pi}{3}$.

3) $f(z)=\sqrt{z^2-1}=\sqrt{(z-1)(z+1)}$.

Обозначим $\quad z-1=\rho_1 e^{i\varphi_1}$; $\qquad z+1=\rho_2 e^{i\varphi_2}$ (рис. 2.3). Тогда

$$\operatorname{Arg} f(z)=\frac{\varphi_1+\varphi_2+2\pi k}{2}\ (k=0,1).$$

В точке $z=2 \quad \varphi_1=0$,

$$\varphi_2=0 \Rightarrow\ \operatorname{Arg} f(2)=\frac{2\pi k}{2}=0 \Rightarrow\ k=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{Arg} f(z)=\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}.$$

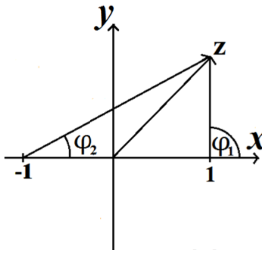


Рис. 2.3

После оборота каждый аргумент увеличивается на 2π. Отсюда $\operatorname{Arg} f(2)=\dfrac{4\pi}{2}=2\pi$.

Пример 2.8 ([3], № 1.74). Найти все значения следующих степеней: 1) $1^{\sqrt{2}}$; $\quad$ 2) $(-2)^{\sqrt{2}}$; $\quad$ 3) 2^i; $\quad$ 4) 1^{-i}; $\quad$ 5) i^i; 6) $\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{1+i}$;

7) $(3-4i)^{1+i}$; $\quad$ 8) $(-3+4i)^{1+i}$.

Решение. Взяв за определение степени выражение $a^{\alpha}=e^{\alpha \operatorname{Ln} a}$, получим:

1) $1^{\sqrt{2}}=e^{\sqrt{2}\operatorname{Ln}1}=e^{\sqrt{2}\,2\pi k i}=\cos\left(2\pi\sqrt{2}k\right)+i\sin\left(2\pi\sqrt{2}k\right),\ \ k=0,\pm1,\ldots$

2) $(-2)^{\sqrt{2}}=e^{\sqrt{2}\operatorname{Ln}(-2)}=e^{\sqrt{2}(\ln 2+i\pi+i2\pi k)}=$

$$=e^{\sqrt{2}\ln 2}\left(\cos\sqrt{2}\pi(2k+1)+i\sin\sqrt{2}\pi(2k+1)\right).$$

5) $i^i=e^{i\operatorname{Ln}i}=e^{i\left(\ln 1+i\frac{\pi}{2}+i2\pi k\right)}=e^{\frac{-\pi}{2}-2\pi k}$ (или $e^{\frac{-\pi}{2}+2\pi k}$, что то же самое).

7) $(3-4i)^{1+i}=e^{(1+i)\operatorname{Ln}(3-4i)}=e^{(1+i)\left(\ln 5-i\operatorname{arctg}\frac{4}{3}+2i\pi k\right)}=$

$$=e^{\ln 5+\operatorname{arctg}\frac{4}{3}+2\pi k}\cdot e^{i\left(\ln 5-\operatorname{arctg}\frac{4}{3}+2\pi k\right)}=$$

$$=5e^{\operatorname{arctg}\frac{4}{3}+2\pi k}\left(\cos\left(\ln 5-\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)+i\sin\left(\ln 5-\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)\right)\ (k=0,\pm1,\ldots).$$

Пример 2.9. Выяснить, допускают ли данные функции выделение однозначных ветвей в окрестности данной точки:

1) $\sqrt[n]{z},\ z_0=0,\ z_0=\infty$; 2) $\sqrt{z^2-1},\ z_0=0,\ z_0=1,\ z_0=-1$;

3) $\sqrt{\dfrac{z}{(z-1)(z-2)}},\ z_0=\infty$; 4) $\sqrt[3]{(z-1)(z-2)(z-3)},\ z_0=\infty$;

5) $\sqrt{1+\sqrt{z}},\ z_0=1$; 6) $\sqrt{z+\sqrt{z^2-1}},\ z_0=1$;

7) $\operatorname{Ln}\left[(z-1)(z-2)\right],\ z_0=\infty$; 8) $\operatorname{Ln}\dfrac{(z-1)(z-2)}{(z-3)(z-4)},\ z_0=\infty$;

Решение.

1) $w=\sqrt[n]{z}$, $z_0=0$ и $z_0=\infty$ являются точками ветвления этой функции, поэтому разделение ветвей в окрестности данных точек невозможно.

2) $w=\sqrt{z^2-1}$; $z_0=0$ – не точка ветвления, разделение ветвей возможно, точки $z_0=\pm1$ – точки ветвления, в окрестности этих точек разделение ветвей невозможно.

3) $w=\sqrt{\dfrac{z}{(z-1)(z-2)}}$ (рис. 2.4). Обозначим $z=\rho e^{i\varphi}$; $z-1=\rho_1 e^{i\varphi_1}$; $z-2=\rho_2 e^{i\varphi_2}$.

При обходе точки $z_0 = \infty$, каждый из аргументов φ, φ_1, φ_2 изменяется на 2π. Поэтому

$$\operatorname{Arg} w = \frac{\varphi - \varphi_1 - \varphi_2 + 2\pi k}{2} \quad (k = 0,1)$$

изменится на $-\dfrac{\pi}{2}$ и, следовательно, значение функции изменится. Поэтому разделение ветвей в окрестности точки $z_0 = \infty$ невозможно.

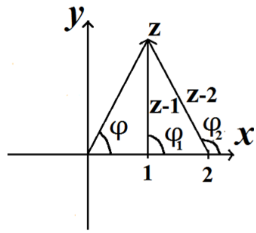


Рис. 2.4

5) $w = \sqrt{1+\sqrt{z}}$, $z_0 = 1$. Точка $z_0 = 1$ является точкой ветвления той ветви функции $\sqrt{1+\sqrt{z}}$, для которой $\sqrt{1} = -1$. Для этой ветви разделение невозможно. Для ветви функции, для которой $\sqrt{1} = 1$ точка $z_0 = 1$ не является точкой ветвления внешнего корня. Разделение на 2 ветви возможно.

Пример 2.10. Показать, что данные функции допускают в указанной области выделение однозначной ветви, для которой $f(z_0) = w_0$. Найти значение этой ветви в указанных точках:

1) $w = \sqrt{\dfrac{z+1}{z-1}}$; область – плоскость с разрезом $\{-1 \le x \le 1; y = 0\}$, $z_0 = 2$, $w_0 = \sqrt{3}$. Найти $f(\infty)$.

2) $w = \sqrt[3]{(z+1)z^2}$, область – плоскость с разрезом $\{-1 \le x \le 0;$ $y = 0\}$, $z_0 = 1$, $w_0 = \dfrac{\sqrt[3]{2}}{2} \cdot (-1 + i\sqrt{3})$. Найти $f(-i)$.

3) $w = \operatorname{Ln}(z^2 - 1)$, область – плоскость с разрезами $\{x = -1; y \ge 0\}$ и $\{x \ge 1; y = 0\}$; $z_0 = i$; $w_0 = \ln 2 + i\pi$. Найти $f(2)$ на нижнем берегу разреза.

4) $w = \operatorname{Ln}\dfrac{z+1}{z-1}$, область – плоскость с разрезом $\{x \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty);\ y = 0\}$; $z_0 = -2$ на верхнем берегу разреза; $w_0 = -\ln 3 - 2\pi$. Найти $f(2)$ на нижнем берегу разреза.

Решение.

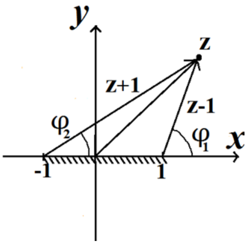


Рис. 2.5

1) $f(z)=\sqrt{\dfrac{z+1}{z-1}}$. Точки ветвления ± 1. Они соединены разрезом. Поэтому ветви разделяются. Обозначим $z-1=\rho_1 e_1^{\varphi}$, $z+1=\rho_2 e^{i\varphi_2}$ (рис. 2.5), тогда

$$\sqrt{\frac{z+1}{z-1}}=\sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}}e^{i\frac{\varphi_2-\varphi_1+2\pi k}{2}} \quad (k=0,1).$$

В точке $z_0=2$ $\rho_1=1$, $\rho_2=3$; $\varphi_1=0$; $\varphi_2=0$. Поэтому

$$f(2)=\sqrt{3}e^{i\frac{2\pi k}{2}}=\sqrt{3}\Rightarrow\ k=0\Rightarrow\ f(z)=\sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}}e^{i\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}};$$

на бесконечности $\lim\dfrac{\rho_2}{\rho_1}=1$; $\varphi_1\approx\varphi_2\approx 0$.

Ответ: $f(\infty)=1$.

2) $f(z)=\sqrt[3]{(z+1)z^2}$. Точки ветвления $z=0$ и $z=-1$. Они соединены разрезом. Поэтому разделение ветвей возможно.

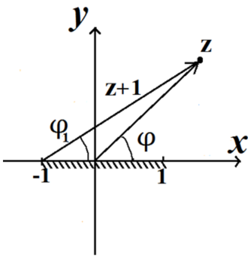


Рис. 2.6

Обозначим $z=\rho e^{i\varphi}$, $z+1=\rho_1 e^{i\varphi_1}$;

$$f(z)=\sqrt[3]{\rho^2\rho_1}e^{i\frac{\varphi_1+2\varphi+2\pi k}{3}} \quad (k=0,1,2) \text{ (рис. 2.6).}$$

В точке $z_0=1$ $\rho=1$; $\rho_1=2$;

$$\varphi_1=\varphi=0\Rightarrow\ f(1)=\sqrt[3]{2}e^{i\frac{2}{3}\pi k}=$$

$$\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{2\pi}{3}k+i\sin\frac{2\pi}{3}k\right)=\frac{\sqrt[3]{2}}{2}\left(-1+i\sqrt{3}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow k=1\Rightarrow\ f(z)=\sqrt[3]{\rho^2\rho_1}e^{i\frac{\varphi_1+2\varphi+2\pi}{3}}.$$

В точке $z=-i$ $\rho=1$, $\rho_2=\sqrt{2}$, $\varphi=-\dfrac{\pi}{2}$; $\varphi_1=-\dfrac{\pi}{4}$;

$$f(-i)=\sqrt[3]{2}e^{i\frac{-\frac{5\pi}{4}+2\pi}{3}}=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt[3]{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{2}}(1+i).$$

3) $w=\mathrm{Ln}(z^2-1)$. Точки ветвления $z=\pm1$ и $z=\infty$. Они соединены разрезом (рис. 2.7) Разделение ветвей возможно.

Обозначим $z-1=\rho_1 e^{i\varphi_1}$; $z+1=\rho_2 e^{i\varphi_2}$;

$w=\ln\rho_1\rho_2+i\varphi_1+i\varphi_2+i2\pi k$ $\left(k=0,\pm1...\right)$.

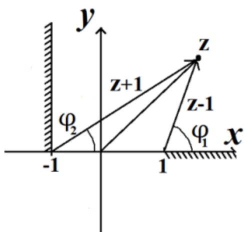


Рис. 2.7

В точке $z_0=i$: $\rho_1=\rho_2=\sqrt{2}$; $\varphi_1=\dfrac{3\pi}{4}$,

$\varphi_2=\dfrac{\pi}{4}\Rightarrow f\left(i\right)=\ln 2+i\pi+i2\pi k=\ln 2+i\pi\Rightarrow$

$\Rightarrow k=0\Rightarrow f\left(z\right)=\ln\rho_1\rho_2+i\varphi_1+i\varphi_2$.

В точке $z=2$ на нижнем берегу разреза $\rho_1=1$; $\rho_2=3$; $\varphi_1=2\pi$; $\varphi_2=0\Rightarrow$ $f\left(2\right)=\ln 3+2\pi i$.

4) $w=\mathrm{Ln}\dfrac{z+1}{z-1}$. *Ответ*: $\ln 3-4\pi i$.

Пример 2.11.

[3] № 1.116. Для отображения $w=z^2$:

1) найти образы линий $x=C$, $y=C$, $x=y$, $|z|=R$, $\arg z=\alpha$ и выяснить, какие из них преобразуются взаимно однозначно;

2) найти прообразы линий $u=C$, $\upsilon=C$.

[3] № 1.117. Для отображения $w=\dfrac{1}{z}$:

1) найти образы линий $x=C$, $y=C$, $x=y$, $|z|=R$, $\arg z=\alpha$, $|z-1|=1$ и выяснить, какие из них преобразуются взаимно однозначно;

2) найти прообразы линий $u=C$, $\upsilon=C$.

Решение.

[3] № 1.116. 1) $w=z^2=\left(x+iy\right)^2=x^2+2ixy-y^2$; $u=x^2-y^2$; $\upsilon=2xy$, $x=C\Rightarrow$ $u=C^2-y^2$; $\upsilon=2Cy\Rightarrow$ $u=C^2-\dfrac{\upsilon^2}{4C^2}$ – парабола при $C\neq0$, если $C=0$, то $\upsilon=0$; $u=-y^2$ – отрицательная действительная полуось в плоскости w. Отображение является взаимно

однозначным, так как две различные точки линии $x = C$ отображаются в две различные точки параболы-образа этой линии; $y = C$; $u = x^2 - C^2$, $\upsilon = 2xC$; $u = \dfrac{\upsilon^2}{4C} - C^2$ – парабола при $C \neq 0$; при $C = 0$ – отрицательная действительная полуось (взаимно однозначное отображение при $C \neq 0$); $x = y$; $u = 0$; $\upsilon = 2x^2$ мнимая положительная полуось. Отображение не взаимно однозначно. $|z| = R$ – окружность. Отображается в $w = R^2 e^{2i\varphi}$ (где $z = Re^{i\varphi}$) в окружность радиуса R^2, проходимую дважды (отображение не взаимно однозначно); $\arg z = \alpha$ (луч) – отображается в луч $w = 2\alpha$ (отображение взаимно однозначно).

[3] № 1.117. 2) Находим прообразы линий (на z-плоскости) $u = C$, $\upsilon = C$. Так как $u = x^2 - y^2$, $\upsilon = 2xy$, то линия $u = C$ имеет прообразом линию $x^2 - y^2 = C$ – гипербола; при $C = 0$ – прямые $x - y = 0$, $x + y = 0$. Линия $\upsilon = C$ имеет прообразом линии: $2xy = C$ – гипербола $y = \dfrac{C}{2x}$; при $C = 0$ – пара прямых $x = 0$, $y = 0$.

Рекомендуемый перечень задач для решения в аудитории:
2.1 ([3], № 1.61 (1,2)); 2.2 ([3], № 1.66 (1,3));
2.3 ([3], № 1.67 (1,3)); 2.4 ([3], № 1.68 (1));
2.5 ([3], № 1.71 (1,3)); 2.6 ([3], № 1.73 (1));
2.7 ([3], № 1.43 (1,3)), 2.8 ([3], № 1.74 (1,5));
2.9 (1,2,5); 2.10 (1,3); 2.11 ([3], № 1.116 (частично)).
Резерв:
2.1 ([3], №1.61 (3)); 2.2 ([3], № 1.66 (4)); 2.3 ([3], № 1.67 (4,6));
2.5 ([3], № 1.71 (4)); 2.6 ([3], № 1.73 (2,3)); 2.7 ([3], № 1.43 (2,4,5));
2.9 (3, 6), 2.10 (4).
Для самостоятельной работы дома:
2.1 ([3], № 1.61 (e^{2-3i}, e^{3+4i})); 2.2 ([3], № 1.66 (2));
2.3 ([3], № 1.67 (2)); 2.4 ([3], № 1.68 (2)); 2.5 ([3], № 1.71 (2));
2.6 ([3], № 1.73(2)); 2.8 ([3], № 1.74 (4)); 2.9 (3); 2.10 (2);
2.11 ([3], № 1.117).

3. АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ. УСЛОВИЯ КОШИ–РИМАНА

Определение производной. Пусть в некоторой окрестности точки z комплексной плоскости определена функция $w = f(z)$. Производной $w'(z) = f'(z)$ называется предел отношения $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{\Delta w}{\Delta z}$, где Δz – приращение независимой комплексной переменной, не выводящее ее из указанной окрестности, а Δw – приращение функции, вызванное этим приращением Δz. По определению предела производная не зависит от направления Δz. Если приращение $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ происходит вдоль действительной оси x, т.е. $\Delta y = 0$, то производная приобретает вид

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x},$$

где $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial v}{\partial x}$ – частные производные функций двух действительных переменных $u(x, y)$, $v(x, y)$, являющихся, соответственно, действительной и мнимой частями функции

$$w(z) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Если приращение Δz осуществляется вдоль оси y, то есть $\Delta x = 0$; $\Delta z = i\Delta y$, то производная приобретает вид

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{i\Delta y} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Отсюда следуют необходимые условия существования производной $w'(z)$ (условия Коши–Римана):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{3.1}$$

В случае непрерывности частных производных эти условия становятся и достаточными для существования производной $w'(z)$. Функция $w = f(z)$, имеющая в каждой точке области непрерывную производную, называется аналитической в этой области[1]. При наличии непрерывных вторых частных производных из условий Коши–Римана следует, что действительная $u(x, y)$ и мнимая $\upsilon(x, y)$ части функции $w = f(z)$ удовлетворяют уравнению Лапласа и являются, поэтому гармоническими функциями. Условия Коши-Римана позволяют по заданной действительной $u(x, y)$ части найти с точностью до постоянного слагаемого мнимую $\upsilon(x, y)$ часть аналитической функции (и, соответственно, наоборот).

Пример 3.1 ([3], № 1.131). Проверить выполнение условий Коши–Римана для функций z^n, e^z, $\cos z$, $\mathrm{Ln} z$ и доказать, что

$$\left(z^n\right)' = nz^{n-1},\ \left(e^z\right)' = e^z,\ (\cos z)' = -\sin z,\ (\mathrm{Ln}\, z)' = \frac{1}{z}.$$

Решение. Рассмотрим функцию $w = z^n$. Возьмем z в тригонометрической форме: $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Тогда

$$z^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi),$$

т.е. $u = \rho^n \cos n\varphi$; $\upsilon = \rho^n \sin n\varphi$. Вычислим $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial \upsilon}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$, $\dfrac{\partial \upsilon}{\partial y}$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x} = n\rho^{n-1}\cos n\varphi\frac{\partial \rho}{\partial x} - n\rho^n \sin n\varphi\frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

Из определения полярных координат $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \end{cases}$ дифференцируя оба уравнения по x, получим

$$1 = \frac{\partial \rho}{\partial x}\cos\varphi - \rho\sin\varphi\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad 0 = \frac{\partial \rho}{\partial x}\sin\varphi + \rho\cos\varphi\frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

Откуда

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -\rho\sin\varphi \\ 0 & \rho\cos\varphi \end{vmatrix}}{\rho\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right)} = \frac{\rho\cos\varphi}{\rho} = \cos\varphi,$$

---

[1] Мы пользуемся определением, данным в [1].

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\begin{vmatrix} \cos\varphi & 1 \\ \sin\varphi & 0 \end{vmatrix}}{\rho} = -\frac{\sin\varphi}{\rho}.$$

Таким образом,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = n\rho^{n-1}\cos n\varphi\cos\varphi - n\rho^{n}\sin n\varphi\left(-\frac{\sin\varphi}{\rho}\right) =$$

$$= n\rho^{n-1}\left(\cos n\varphi\cos\varphi + \sin n\varphi\sin\varphi\right) = n\rho^{n-1}\cos\left(n-1\right)\varphi.$$

Далее:

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial y} = n\rho^{n-1}\frac{\partial \rho}{\partial y}\sin n\varphi + n\rho^{n}\cos n\varphi\frac{\partial \varphi}{\partial y};$$

$$\begin{cases} 0 = \dfrac{\partial \rho}{\partial y}\cos\varphi - \rho\sin\varphi\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}, \\ 1 = \dfrac{\partial \rho}{\partial y}\sin\varphi + \rho\cos\varphi\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -\rho\sin\varphi \\ 1 & \rho\cos\varphi \end{vmatrix}}{\rho} = \sin\varphi;$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\begin{vmatrix} \cos\varphi & 0 \\ \sin\varphi & 1 \end{vmatrix}}{\rho} = \frac{\cos\varphi}{\rho},$$

откуда

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial y} = n\rho^{n-1}\cdot\sin n\varphi\sin\varphi + n\rho^{n}\cos n\varphi\frac{\cos\varphi}{\rho} = n\rho^{n-1}\cos\left(n-1\right)\varphi.$$

Таким образом, $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial \upsilon}{\partial y}$.

Аналогично проверяется условие $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial \upsilon}{\partial x}$.

Ввиду непрерывности частных производных производную $w'(z)$ можно вычислить, например, по формуле $w'\left(z\right) = \dfrac{\partial u}{\partial x} + i\dfrac{\partial \upsilon}{\partial x}$.

Подсчитав, что $\dfrac{\partial \upsilon}{\partial x} = n\rho^{n-1}\sin\left(n-1\right)\varphi$, получим:

$$(z^{n})' = n\rho^{n-1}\cos(n-1)\varphi + in\rho^{n-1}\sin(n-1)\varphi = nz^{n-1},$$

что и требовалось доказать.

Производную легко получить и непосредственно, пользуясь определением:

$$(z^n)' = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z+\Delta z)^n - z^n}{\Delta z} =$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{z^n + nz^{n-1}\Delta z + \cdots - z^n}{\Delta z} = nz^{n-1}.$$

Рассмотрим функцию $w = e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$; $u(x,y) = e^x \cos y$; $\upsilon(x,y) = e^x \sin y$.

Условия Коши–Римана выполняются, так как

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y = \frac{\partial \upsilon}{\partial y} = e^x \cos y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y = -\frac{\partial \upsilon}{\partial x} = -e^x \sin y.$$

Следовательно,

$$(e^z)' = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial \upsilon}{\partial x} = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^z.$$

Рассмотрим функцию $w = \operatorname{Ln} z = \ln\rho + i\varphi + i2\pi k$.

$$u(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}; \quad \upsilon(x,y) = \varphi + 2\pi k;$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{\cos\varphi}{\rho}; \quad \frac{\partial \upsilon}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\cos\varphi}{\rho} \text{ (см. выше).}$$

Аналогично:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{x^2+y^2} = \frac{\sin\varphi}{\rho}; \quad \frac{\partial \upsilon}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\sin\varphi}{\rho}.$$

Условия Коши–Римана выполнены:

$$(\operatorname{Ln} z)' = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial \upsilon}{\partial x} = \frac{\cos\varphi}{\rho} - i\frac{\sin\varphi}{\rho} = \frac{\rho\cos\varphi}{\rho^2} - i\frac{\rho\sin\varphi}{\rho^2} =$$

$$= \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{1}{z}.$$

Эту производную можно было вычислить по правилу производной для обратной функции. Действительно, если $w = w(z)$, то обратная функция $z = z^{-1}(w)$ имеет производную:

$$w'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\Delta w\to 0}\frac{1}{\dfrac{\Delta z}{\Delta w}}=\frac{1}{\left(z^{-1}(w)\right)'};$$

так как $w=\operatorname{Ln} z$, если $z=e^{w}$, то

$$(\operatorname{Ln} z)'=\frac{1}{\left(e^{w}\right)'}=\frac{1}{e^{w}}=\frac{1}{z}.$$

Пример 3.2 ([3], № 1.132). Найти постоянные a, b, c, при которых функция $f(z)$ будет аналитической:

1) $f(z)=x+ay+i(bx+cy)$;

2) $f(z)=\cos x(\operatorname{ch}y+a\operatorname{sh}y)+i\sin x(\operatorname{ch}y+b\operatorname{sh}y)$.

Решение.

1) $w=f(z)=u+iv=x+ay+i(bx+cy)$; $\dfrac{\partial u}{\partial x}=1$, $\dfrac{\partial v}{\partial y}=c\Rightarrow c=1$,

$$\frac{\partial u}{\partial y}=a,\quad \frac{\partial v}{\partial x}=b\Rightarrow a=-b.$$

Ответ: $c=1$, $a=-b$.

2) $f(z)=u+iv$, $u=\cos x(\operatorname{ch}y+a\operatorname{sh}y)$;

$$v=\sin x(\operatorname{ch}y+b\operatorname{sh}y);\quad \frac{\partial u}{\partial x}=-\sin x(\operatorname{ch}y+a\operatorname{sh}y);$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\sin x(\operatorname{sh}y+b\operatorname{ch}y)\Rightarrow\ a=-1;\ b=-1.$$

При этом $\dfrac{\partial u}{\partial y}=\cos x(\operatorname{sh}y-\operatorname{ch}y)$; $\dfrac{\partial v}{\partial x}=\cos x(\operatorname{ch}y-\operatorname{sh}y)$, т.е.

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Пример 3.3 ([3], № 1.133). Найти области, в которых функция $f(z)=\left|x^2-y^2\right|+2i|xy|$ будет аналитической.

Решение. Рассмотрим два случая: 1) $xy>0$; 2) $xy<0$.

В первом случае: а) $x^2-y^2>0$; б) $x^2-y^2<0$ (I и III четверти на рис. 3.1):

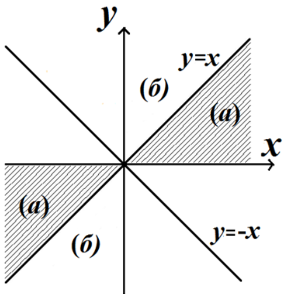


Рис. 3.1

а) $u = x^2 - y^2$; $\upsilon = 2xy$; $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x$;

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial y} = 2x \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \upsilon}{\partial y};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2y; \quad \frac{\partial \upsilon}{\partial x} = 2y \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial \upsilon}{\partial x}.$$

Условия Коши–Римана выполняются.

б) $u = y^2 - x^2$; $\upsilon = 2xy$; $\dfrac{\partial u}{\partial x} = -2x$.

Условия Коши–Римана не выполняются.

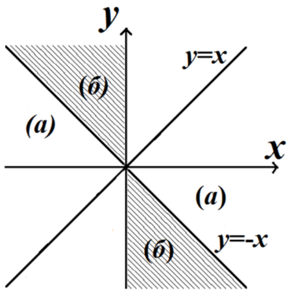


Рис. 3.2

Во втором случае: а) $x^2 - y^2 > 0$, б) $x^2 - y^2 < 0$ (II-я и IV-я четверти на рис. 3.2):

а) $u = x^2 - y^2$; $\upsilon = -2xy$; $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x$; $\dfrac{\partial \upsilon}{\partial y} = -2x$, условия не выполняются.

б) $u = y^2 - x^2$; $\upsilon = -2xy$; $\dfrac{\partial u}{\partial x} = -2x$; $\dfrac{\partial \upsilon}{\partial y} = -2x$; $\dfrac{\partial u}{\partial y} = 2y$; $\dfrac{\partial \upsilon}{\partial x} = -2y$, т.е. условия Коши–Римана выполняются.

Таким образом, функция аналитическая в областях:

$$\arg z \in \left(-\pi; -\frac{3\pi}{4}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{4}\right) \cup \left(0; \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}\right).$$

Пример 3.4 ([3], № 1.135). Пусть $z = \rho^{i\varphi}$, $w = f(z) = u(\rho, \varphi) + i\upsilon(\rho, \varphi)$. Записать уравнения Коши–Римана в полярных координатах.

Решение. Так как $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \end{cases}$ то

$$\frac{\partial u}{\partial \rho}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \rho}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \rho}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\varphi+\frac{\partial u}{\partial y}\sin\varphi,$$

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial \varphi}=\frac{\partial \upsilon}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \varphi}+\frac{\partial \upsilon}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \varphi}=\frac{\partial \upsilon}{\partial x}\left(-\rho\sin\varphi\right)+\frac{\partial \upsilon}{\partial y}\rho\cos\varphi .$$

Применяя условия Коши–Римана в переменных $\left(x, y\right)$, получим

$$\frac{\partial u}{\partial \rho}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\varphi+\frac{\partial u}{\partial y}\sin\varphi;$$

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial \varphi}=\frac{\partial u}{\partial x}\rho\cos\varphi-\frac{\partial u}{\partial y}\rho\sin\varphi \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial \rho}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial \upsilon}{\partial \varphi}.$$

Аналогично:

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \varphi}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \varphi}=\frac{\partial u}{\partial x}\left(-\rho\sin\varphi\right)+\frac{\partial u}{\partial y}\rho\cos\varphi,$$

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial \rho}=\frac{\partial \upsilon}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \rho}+\frac{\partial \upsilon}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \rho}=\frac{\partial \upsilon}{\partial x}\cos\varphi+\frac{\partial \upsilon}{\partial y}\sin\varphi .$$

По условиям Коши–Римана в переменных (x, y):

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial \varphi}&=-\frac{\partial u}{\partial x}\rho\sin\varphi+\frac{\partial \upsilon}{\partial y}\rho\cos\varphi,\\ \frac{\partial \upsilon}{\partial \rho}&=-\frac{\partial u}{\partial y}\cos\varphi+\frac{\partial u}{\partial x}\sin\varphi\end{aligned}\right. \Rightarrow \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \varphi}=-\frac{\partial \upsilon}{\partial \rho}.$$

Таким образом, условия Коши–Римана в полярных координатах имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial \rho}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial \upsilon}{\partial \varphi}, \qquad \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \varphi}=-\frac{\partial \upsilon}{\partial \rho}. \tag{3.2}$$

Пример 3.5 ([3], № 1.139). Доказать, что для функции $f(z)=\sqrt{|xy|}$ в точке $z=0$ выполняются условия Коши–Римана, но производная не существует.

Решение. Для функции $f\left(z\right)=\sqrt{|xy|}$: $u\left(x, y\right)=\sqrt{|xy|}$; $\upsilon=0$; $\frac{\partial \upsilon}{\partial x}=\frac{\partial \upsilon}{\partial y}=0$ всюду; $\frac{\partial u}{\partial x}$ в точке $z=0$ вычисляется как предел:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{\substack{x=0\\y=0}} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(0+\Delta x,0)-u(0,0)}{\Delta x};$$

так как $u(0+\Delta x,0)=0$ и $u(0,0)=0$, то $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{\substack{x=0\\y=0}}=0$.

Аналогично:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{\substack{x=0\\y=0}} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{u(0+\Delta y,0)-u(0,0)}{\Delta y}=0.$$

Таким образом, в этой точке условия Коши–Римана выполняются. Найдем производную в точке $z=0$, вычисляя предел по лучу $\Delta y = k\Delta x$. Тогда

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{\Delta x^2 k}}{\Delta x(1+ik)},$$

откуда видно, что этот предел зависит от *k*, т.е. производной не существует.

Пример № 3.6 ([3], № 1.156). Будут ли гармоническими функции $|f(z)|$, $\arg f(z)$, $\ln|f(z)|$, если $f(z)$ – аналитическая функция?

Решение. Рассмотрим функцию:

$$w=|f(z)|=\sqrt{u^2+\upsilon^2}=U+iV,$$

где $U=\sqrt{u^2+\upsilon^2}=\operatorname{Re} w$, $V\equiv 0=\operatorname{Im} w$;

$$\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{\partial V}{\partial y}\equiv 0; \quad \frac{\partial U}{\partial x}=\frac{u}{\sqrt{u^2+\upsilon^2}}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\upsilon}{\sqrt{u^2+\upsilon^2}}\cdot\frac{\partial \upsilon}{\partial x};$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}=\frac{\sqrt{u^2+\upsilon^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{u^2}{\sqrt{u^2+\upsilon^2}}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}}{u^2+\upsilon^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+$$

$$+\frac{u}{\sqrt{u^2+\upsilon^2}}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\sqrt{u^2+\upsilon^2}\cdot\frac{\partial \upsilon}{\partial x}-\frac{\upsilon^2}{\sqrt{u^2+\upsilon^2}}\cdot\frac{\partial \upsilon}{\partial x}}{u^2+\upsilon^2}+\frac{\upsilon}{\sqrt{u^2+\upsilon^2}}\cdot\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x^2}=$$

$$=\frac{v^2}{\sqrt{u^2+v^2}\cdot\left(u^2+v^2\right)}\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\frac{u^2}{\sqrt{u^2+v^2}\left(u^2+v^2\right)}\cdot\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+$$

$$+\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.$$

Аналогично

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=\frac{v^2}{\sqrt{u^2+v^2}\left(u^2+v^2\right)}\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\frac{u^2}{\sqrt{u^2+v^2}\left(u^2+v^2\right)}\cdot\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+$$

$$+\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial y^2};$$

$$\Delta U=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=\frac{v^2}{\left(u^2+v^2\right)^{\frac{3}{2}}}\cdot\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]+$$

$$+\frac{u^2}{\left(u^2+v^2\right)^{\frac{3}{2}}}\cdot\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right]+\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}\cdot\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+$$

$$+\frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}\cdot\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)=\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]\cdot\frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}\neq 0;$$

Таким образом, функция $|f(z)|$ не является гармонической.

Рассмотрим функцию $\arg f(z)$, где $f(z)=u(x,y)+i\upsilon(x,y)$; $\arg f(z)=\operatorname{arctg}\frac{v}{u}+\text{const}$.

$$\frac{\partial(\arg f(z))}{\partial x}=\frac{1}{1+\frac{v^2}{u^2}}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\cdot\left(\frac{v}{u}\right)=\frac{u^2}{u^2+v^2}\cdot\frac{u\frac{\partial v}{\partial x}-v\frac{\partial u}{\partial x}}{u^2}=\frac{u\frac{\partial v}{\partial x}-v\frac{\partial u}{\partial x}}{u^2+v^2};$$

$$\frac{\partial^2(\arg f(z))}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{u\frac{\partial v}{\partial x}-v\frac{\partial u}{\partial x}}{u^2+v^2}\right]=$$

$$=\frac{\left(u^2+\upsilon^2\right)\left[\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial \upsilon}{\partial x}+u\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x^2}-\frac{\partial \upsilon}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}-\upsilon\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right]-\left(u\frac{\partial \upsilon}{\partial x}-\upsilon\frac{\partial u}{\partial x}\right)\cdot\left(2u\frac{\partial u}{\partial x}+2\upsilon\frac{\partial \upsilon}{\partial y}\right)}{\left(u^2+\upsilon^2\right)^2}=$$

$$=\frac{\left(u^2+\upsilon^2\right)\left[u\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x^2}-\upsilon\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right]-2\left(u\frac{\partial \upsilon}{\partial x}-\upsilon\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+\upsilon\frac{\partial \upsilon}{\partial x}\right)}{(u^2+\upsilon^2)^2};$$

Аналогично

$$\frac{\partial^2(\arg f(z))}{\partial y^2}=\frac{\left(u^2+\upsilon^2\right)\left[u\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial y^2}-\upsilon\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right]-2\left(u\frac{\partial \upsilon}{\partial y}-\upsilon\frac{\partial u}{\partial y}\right)\left(u\frac{\partial u}{\partial y}+\upsilon\frac{\partial \upsilon}{\partial y}\right)}{\left(u^2+\upsilon^2\right)^2};$$

$$\Delta\arg f(z)=\frac{\partial^2(\arg f(z))}{\partial x^2}+\frac{\partial^2(\arg f(z))}{\partial y^2}=$$

$$=\frac{u\left(\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial y^2}\right)}{u^2+\upsilon^2}-\frac{\upsilon\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)}{u^2+\upsilon^2}-\frac{2}{\left(u^2+\upsilon^2\right)^2}\times$$

$$\times\left[\left(u\frac{\partial \upsilon}{\partial x}-\upsilon\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+\upsilon\frac{\partial \upsilon}{\partial x}\right)+\left(u\frac{\partial \upsilon}{\partial y}-\upsilon\frac{\partial u}{\partial y}\right)\left(u\frac{\partial u}{\partial y}+\upsilon\frac{\partial \upsilon}{\partial y}\right)\right]=$$

$$=-\frac{2}{\left(u^2+\upsilon^2\right)^2}\cdot\left[\left(-u\frac{\partial u}{\partial y}-\upsilon\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(u\frac{\partial u}{\partial x}-\upsilon\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\left(u\frac{\partial u}{\partial x}-\upsilon\frac{\partial u}{\partial y}\right)\left(u\frac{\partial u}{\partial y}+\upsilon\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right]$$

(так как u, υ – гармонические функции, потому $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$, $\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial y^2}=0$, кроме того, во втором слагаемом в силу условий Коши–Римана мы заменили $\frac{\partial \upsilon}{\partial x}$ на $-\frac{\partial u}{\partial y}$ и $\frac{\partial \upsilon}{\partial y}$ на $\frac{\partial u}{\partial x}$).

Далее:

$$\Delta(\arg f(z)) = -\frac{2}{\left(u^2+v^2\right)}\cdot\left[-u^2\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+uv\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2-uv\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\right.$$

$$\left.+v^2\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+u^2\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+uv\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2-uv\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2-v^2\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\right]=0.$$

Таким образом, функция $\arg f(z)$ является гармонической (при условии аналитичности функции $f(z)$).

Можно было бы сделать этот пример и иначе, но для этого предварительно докажем еще одну форму записи условий Коши–Римана, а именно: если функция $w=f(x,y)$ записана в виде $w=R(x,y)\cdot e^{i\Phi(x,y)}$, где $R(x,y)=|w|$, а $\Phi(x,y)=\arg w$, то условия Коши–Римана можно записать в виде:

$$\frac{\partial R}{\partial x}=R\frac{\partial \Phi}{\partial y},\qquad \frac{\partial R}{\partial y}=-R\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \tag{3.3}$$

Действительно:

$$w=u(x,y)+iv(x,y)=R(x,y)e^{i\Phi(x,y)}=R\cos\Phi+iR\sin\Phi,$$

т.е.

$$u(x,y)=R(x,y)\cos\Phi(x,y),\quad v(x,y)=R(x,y)\sin\Phi(x,y).$$

Используя условия Коши–Римана $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$, получим

$$\begin{cases}\dfrac{\partial R}{\partial x}\cos\Phi-R\sin\Phi\cdot\dfrac{\partial \Phi}{\partial x}=\dfrac{\partial R}{\partial y}\sin\Phi+R\cos\Phi\dfrac{\partial \Phi}{\partial y},\\[2ex] \dfrac{\partial R}{\partial y}\cos\Phi-R\sin\Phi\cdot\dfrac{\partial \Phi}{\partial y}=-\dfrac{\partial R}{\partial x}\sin\Phi-R\cos\Phi\dfrac{\partial \Phi}{\partial x}.\end{cases}$$

Умножим первое уравнение на $\cos\Phi$, а второе – на $\sin\Phi$ и сложим:

$$\frac{\partial R}{\partial x}=R\frac{\partial \Phi}{\partial y}.$$

Второе условие получим, умножив первое уравнение на $\sin\Phi$, а второе – на $\cos\Phi$:

$$\frac{\partial R}{\partial y} = -R\frac{\partial \Phi}{\partial x}.$$

Пользуясь уравнениями (3.3), докажем полученные ранее результаты относительно гармоничности функций $\arg f(z)$, $\left|f(z)\right|$, $\ln\left|f(z)\right|$. Так как $\arg f(z) = \Phi\left(x, y\right)$ в принятых здесь обозначениях, то дифференцируя первое из равенств (3.3) по y, а второе – по x и вычитая их, получим:

$$\frac{\partial R}{\partial y}\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial y} + R\cdot\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial R}{\partial x}\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial x} + R\cdot\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 0.$$

В силу (3.3) первое и третье слагаемые уничтожаются, что приводит к уравнению $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0$, из которого следует гармоничность функции $\Phi(x,y)$.

Аналогично для функции $|f\left(x, y\right)| = R\left(x, y\right)$ продифференцируем первое из уравнений (3.3) по x, а второе – по y и сложим:

$$\frac{\partial^2 R}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial y^2} = \frac{\partial R}{\partial x}\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial y} + R\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial R}{\partial y}\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial x} - R\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y};$$

$$\Delta R = \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial y^2} = \frac{\partial R}{\partial y}\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial R}{\partial x}\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial y}.$$

В силу (3.3) правая часть приобретает вид:

$$-R\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 - R\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 = -R\left(\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2\right) \neq 0,$$

следовательно, $\Delta R \neq 0$ и функция $\left|f\left(x, y\right)\right|$ не является гармонической.

И, наконец, для функции $\ln\left|f\left(x, y\right)\right|$ получим

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\ln\left|f\left(x, y\right)\right|\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\ln R(x, y)\right) = \frac{1}{R}\cdot\frac{\partial R}{\partial x},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\ln\left|f\left(x, y\right)\right|\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\ln R(x, y)\right) = \frac{1}{R}\cdot\frac{\partial R}{\partial y}.$$

Дифференцируя еще раз первое из этих равенств по x, а второе по y и складывая, получим:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\ln\left|f\left(x,y\right)\right|\right)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\ln\left|f\left(x,y\right)\right|\right)=\Delta\left(\ln\left|f\left(x,y\right)\right|\right)=$$

$$=-\frac{1}{R^2}\left(\frac{\partial R}{\partial x}\right)^2+\frac{1}{R}\frac{\partial^2 R}{\partial x^2}-\frac{1}{R^2}\left(\frac{\partial R}{\partial y}\right)^2+\frac{1}{R}\frac{\partial^2 R}{\partial y^2}.$$

Опять-таки в силу (3.3) запишем это равенство в виде

$$\Delta\left(\ln\left|f(x,y)\right|\right)=-\frac{1}{R^2}R^2\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2+\frac{1}{R}\left(\frac{\partial^2 R}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 R}{\partial y^2}\right)-\frac{1}{R^2}R^2\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2.$$

Соотношение

$$\frac{\partial^2 R}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 R}{\partial y^2}=R\cdot\left(\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2\right)$$

непосредственно вытекает из условий Коши–Римана (3.3). Откуда и получим $\Delta\left(\ln\left|f(x,y)\right|\right)=0$, что означает гармоничность функции $\ln\left|f(x,y)\right|$.

Пример № 3.7 ([3], № 1.165). Найти аналитическую функцию $f(z)=u+i\upsilon$ по заданной её действительной части $u=x^2-y^2+5x+y-\dfrac{y}{x^2+y^2}$.

Решение. $\dfrac{\partial u}{\partial x}=2x+5+\dfrac{2yx}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\dfrac{\partial \upsilon}{\partial y}$ (по условию Коши–Римана) $\Rightarrow$ $\upsilon=\displaystyle\int\frac{\partial \upsilon}{\partial y}dy+C(x)=2xy+5y-\frac{x}{x^2+y^2}+C(x)$.

В то же время,

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}\Rightarrow\ 2y-\frac{x^2+y^2-x\cdot 2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}+C'(x)=$$

$$= 2y - 1 + \frac{x^2 + y^2 - 2y^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2} \Rightarrow C'(x) = -1;$$

$$C(x) = -x + \text{const}.$$

Таким образом,

$$f(z) = u + iv = x^2 - y^2 + 5x + y - \frac{y^2}{x^2 + y^2} +$$

$$+i\left(2xy + 5y - \frac{x}{x^2 + y^2} - x + \text{const}\right) = z^2 + 5z - iz - \frac{i}{z} + Ci$$

(C – произвольная действительная постоянная).

Рекомендуемый перечень задач для решения в аудитории:
3.1 ([3], № 1.131 (z^n, e^z)); 3.2 ([3], № 1.132 (1)); 3.4 ([3], № 1.135);
3.5 ([3], № 1.139); 3.7 ([3], № 1.165).
Резерв:
3.1 ($\operatorname{Ln} z$); 3.3 ([3], № 1.133); 3.6 ([3], № 1.156, частично),
[3], № 1.137, № 1.166.
Для самостоятельной работы дома:
3.1 ([3], № 1.131 ($\cos z$)); 3.2 ([3], № 1.132 (2));
[3], № 1.138, № 1.167.

4. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ МОДУЛЯ И АРГУМЕНТА ПРОИЗВОДНОЙ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ. ПРОСТЕЙШИЕ КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

Из определения производной функции $w = f(z)$

$$w' = f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \left(\left| \frac{\Delta w}{\Delta z} \right| \cdot e^{i \arg \frac{\Delta w}{\Delta z}} \right) =$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \left(\left| \frac{\Delta w}{\Delta z} \right| \cdot e^{i(\arg \Delta w - \arg \Delta z)} \right)$$

получаем, что модуль производной $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \left| \frac{\Delta w}{\Delta z} \right| = k$ есть коэффициент сжатия–растяжения, производимого функцией $w = f(z)$ в точке z, а аргумент производной $\arg f'(z) = \lim\limits_{\Delta z \to 0} (\arg \Delta w - \arg \Delta z)$ – угол поворота любого направления, задаваемого вектором Δz, исходящим из точки z, при отображении его в направлении вектора Δw в плоскости w (рис. 4.1, 4.2).

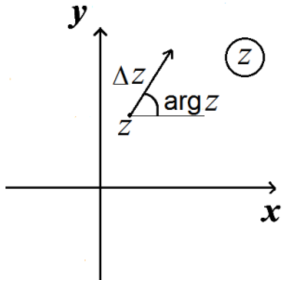


Рис. 4.1

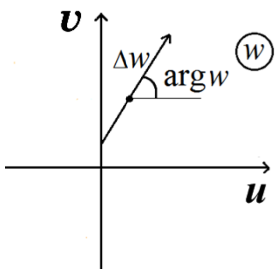


Рис. 4.2

Если производная функции $f(z)$ в точке z существует и отлична от нуля, то отображение, осуществляемое ею, взаимно однозначно и характеризуется сохранением углов (включая их направление) и постоянством растяжений по всем направлениям, исходящим из этой точки. В этом случае отображение $w = f(z)$ называется конформным.

Пример 4.1 ([3], № 1.187). Отображение совершается с помощью функций $w = z^2$ и $w = z^3$. Найти угол поворота θ направления, выходящего из точки z_0, и коэффициент растяжения k в этой точке: $z_0 = 1$.

Решение. Для функции $w = z^2$ производная $w' = 2z \Rightarrow$ $\theta = \arg 2 = 0$; $k = |w'| = 2$; для функции $w = z^3$ производная $w' = 3z^2 \Rightarrow$ в точке $z_0 = 1$ $\theta = \arg 3 = 0$; $k = |w'| = 3$.

4) $z_0 = -3 + 4i$; для функции $w = z^2$; $w' = 2z$.

В точке $z_0 = -3 + 4i$ $w' = -6 + 8i$ и $\theta = \arg w' = \pi - \operatorname{arctg}\dfrac{4}{3}$; $k = |w'| = \sqrt{36 + 64} = 10$; для функции $w = z^3$; $w' = 3z^2$.

В точке $z_0 = -3 + 4i$

$$w' = 3(-3 + 4i)^2 = 3(9 - 24i - 16) = -21 - 72i$$

и

$$\theta = \arg w' = -\pi + \operatorname{arctg}\frac{72}{21} = -\pi + \operatorname{arctg}\frac{24}{7};$$

$$k = |w'| = \sqrt{21^2 + 72^2} = 75.$$

Пример 4.2 ([3], № 1.188). Какая часть плоскости сжимается, а какая растягивается, если отображение осуществляется функцией:

1) $w = z^2$; 2) $w = z^2 + 2z$; 3) $w = \dfrac{1}{z}$; 4) $w = e^z$.

Решение.

1) $w' = 2z$; растяжение при $k = |w'| > 1$; $\left|z^2\right| > 1$; $|z| > 1$ – внешность единичного круга с центром в начале координат; сжатие – внутри этого круга;

2) $w = z^2 + 2z$; $w' = 2z + 2$; сжатие в точках $2|z + 1| < 1$ – внутренность круга с центром в точке $z_0 = -1$ радиуса $\dfrac{1}{2}$; растяжение – вне этого круга;

3) $w=\frac{1}{z}$; $w'=-\frac{1}{z^2}$; сжатие при $\frac{1}{\left|z^2\right|}<1$; $\frac{1}{|z|}<1$; $|z|>1$ – внешность единичного круга с центром в начале координат. Растяжение – вне этого круга;

4) $w=e^z$; $w'=e^z=e^x\cdot e^{iy}$; $k=|w'|=e^x$. Сжатие в области $e^x<1$; то есть в полуплоскости $x<0$; растяжение в полуплоскости $x>0$.

Пример 4.3 ([3], № 1.189). Область G отображается с помощью функции $w=f(z)$ конформно на область G'.

1.Указать формулы для вычисления площади S области G' и длины L дуги, на которую отображается некоторая дуга l, принадлежащая области G.

2. Найти длину L спирали, на которую с помощью функции $w=e^z$ отображается отрезок $y=x$; $0\le x\le 2\pi$.

Решение.

1. Пусть $w=f(z)=u(x,y)+i\upsilon(x,y)$, что соответствует переходу от плоскости двух действительных переменных (x,y) к плоскости двух действительных переменных (u,υ), где u и υ заданные функции переменных x и y. Конформность отображения предполагает его взаимоднозначность, при которой площадь

$$S=\iint\limits_{G'}dud\upsilon=\iint\limits_{G}\left|\frac{D(u,\upsilon)}{D(x,y)}\right|\,dxdy,$$

где $\frac{D(u,\upsilon)}{D(x,y)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x}&\frac{\partial \upsilon}{\partial x}\\ \frac{\partial u}{\partial y}&\frac{\partial \upsilon}{\partial y}\end{vmatrix}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial \upsilon}{\partial y}-\frac{\partial \upsilon}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}$ – якобиан преобразования при переходе от переменных (x,y) к переменным (u,υ). Так как отображение конформно, то функция $w=f(z)$ аналитична, и выполняются условия Коши–Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial \upsilon}{\partial y};\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial \upsilon}{\partial x},$$

откуда получаем

$$S=\iint\limits_G\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \upsilon}{\partial x}\right)^2\right]\ dxdy=\iint\limits_G\left|f'(z)\right|^2dxdy\,.$$

Аналогично вычисляется длина дуги l, заданной параметрически, например: $x=x(t)$, $y=y(t)$, $l=\int\limits_\alpha^\beta\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,dt$.

При переходе к переменным $u=u(x,y)$, $\upsilon=\upsilon(x,y)$:

$$L=\int\limits_\alpha^\beta\sqrt{u'(t)^2+\upsilon'(t)^2}\,dt=$$

$$=\int\limits_\alpha^\beta\sqrt{\left[\frac{\partial u}{\partial x}\cdot x'(t)+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot y'(t)\right]^2+\left[\frac{\partial \upsilon}{\partial x}\cdot x'(t)+\frac{\partial \upsilon}{\partial y}\cdot y'(t)\right]^2}\,dt=$$

$$=\int\limits_\alpha^\beta\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2x'(t)^2+2\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}x'(t)\cdot y'(t)+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\cdot y'(t)^2+}$$

$$\overline{+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\cdot x'(t)^2-2\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}x'(t)y'(t)+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2y'(t)^2}dt=$$

$$=\int\limits_\alpha^\beta\sqrt{\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \upsilon}{\partial x}\right)^2\right]x'(t)^2+\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \upsilon}{\partial x}\right)^2\right]y'(t)^2}\,dt=$$

$$=\int\limits_\alpha^\beta\left|f'(z)\right|\cdot\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,dt\,.$$

2. Так как отрезок целиком лежит в полосе однолистности функции, то применима формула для L, полученная выше:

$$f'(z)=e^z=e^x\cdot e^{iy}\,;\ \left|f'(z)\right|=e^x\,.$$

Примем за параметр переменную x. Тогда

$$x'=1\,;\ y'=1\ \Rightarrow\ L=\int\limits_0^{2\pi}e^x\cdot\sqrt{2}dx=\sqrt{2}(e^{2\pi}-1)\,,$$

$y = x$ отображается в спираль (рис. 4.3): $\rho = e^x$; $\varphi = y \Rightarrow \rho = e^{\varphi}$ (логарифмическая спираль).

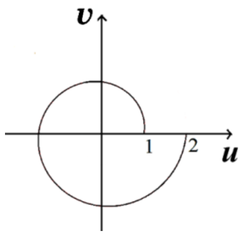


Рис. 4.3

Пример 4.4 ([3], № 1.191). Найти площадь области, на которую с помощью функции e^z отображается прямоугольник $1 \le x \le 2;\ 0 \le y \le 4$ (рис. 4.4).

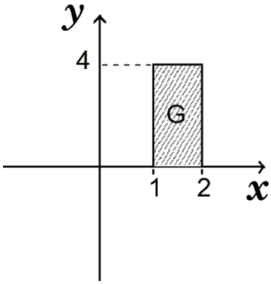


Рис. 4.4

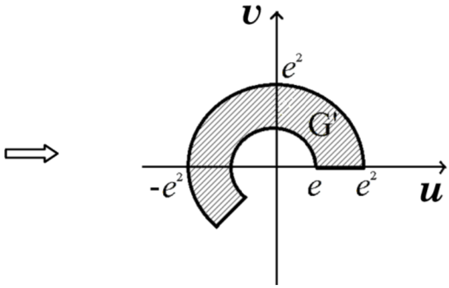


Рис. 4.5

Решение. $w = u + iv = e^z = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y) \Rightarrow$ $u = e^x \cos y$; $v = e^x \sin y$.

Граница прямоугольника отображается в границу области в плоскости w:

1) $\{y = 0, 1 \le x \le 2\} \Rightarrow \left\{v = 0; 1 \le ue^2\right\}$;

2) $\{x = 2, 0 \le y \le 4\} \Rightarrow \left\{u = e^2 \cos y; v = e^2 \sin y\right\} \Rightarrow$ $u^2 + v^2 = e^4$ – окружность;

3) $\{y = 4; 1 \le x \le 2\}$ – отрезок луча $\dfrac{u}{v} = \operatorname{ctg} 4$;

4) $\{x = 1; 0 \le y \le 4\}$; $u = e \cos y$; $v = e \sin y$; $u^2 + v^2 = e^2$, окружность радиуса e (рис. 4.5).

Искомая площадь равна

$$S = \iint\limits_{G'} du dv = \iint\limits_{G} |f'(z)|^2 dxdy = \iint\limits_{G} e^{2x} dxdy =$$

$$=\int_{1}^{2}\int_{0}^{4} e^{2x}dydx = 4\cdot\int_{1}^{2} e^{2x}dx = 4\cdot\frac{1}{2}e^{2x}\Big|_{1}^{2} = 2\left(e^{4}-e^{2}\right).$$

Пример 4.5 ([3], № 2.1). Найти целую линейную функцию (т.е. функцию вида $w = az + b$, где a и b комплексные постоянные), отображающую треугольник с вершинами в точках 0, 1, i на подобный ему треугольник с вершинами 0, 2, $1+i$ (рис. 4.6 и 4.7).

Решение. В соответствии с геометрическим смыслом преобразования, осуществляемого линейной функцией, точка $z = 0$ (вершина прямого угла треугольника в плоскости z) переходит в точку $w = 1+i$ (вершина прямого угла образа этого треугольника в плоскости w): $1+i = a\cdot 0 + b \Rightarrow b = 1+i$.

Вершина $z = i$ переходит в вершину $w = 2 \Rightarrow 2 = a\cdot i + 1 + i$; $ai = 1 - i$; $a = -i - 1 \Rightarrow w = (1+i)(1-z)$.

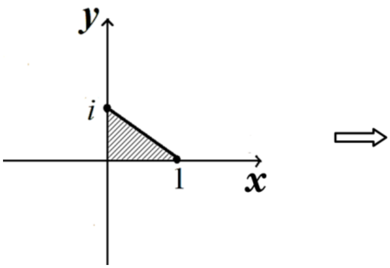


Рис. 4.6

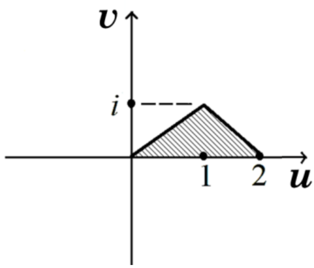


Рис. 4.7

Пример 4.6 ([3], № 2.6). Найти целую линейную функцию $w(z)$, отображающую полосу, заключенную между прямыми $x = a$ и $x = a + h$ на полосу $0 < u < 1$ при указанной нормировке: $w(a) = 0$.

Решение. В силу принципа соответствия границ при конформном отображении, граница исходной области переходит в границу отображения этой области. Чтобы внутренность исходной области переходила во внутренность отображения, дается условие, в данном случае $w(a) = 0$.

Общий вид целой линейной функции $w = cz + d$. Пусть прямая $x = a$ переходит в прямую $u = 0$, тогда $i\upsilon = c(a + iy) + d$.

Прямая $x = a + h$ переходит в прямую $u = 1$, тогда

$$1 + i\upsilon = c\,(a + h + iy) + d \;\Rightarrow\; 1 = ch \Rightarrow c = \frac{1}{h} \Rightarrow w = \frac{1}{h} \cdot z + d\ .$$

Используем условие $w\,(a) = 0$:

$$0 = \frac{1}{h}a + d \Rightarrow d = -\frac{a}{h} \Rightarrow w = \frac{1}{h}\left(z - a\right).$$

Пример 4.7 ([3], № 2.7)**.** Найти целую линейную функцию, отображающую круг $|z| < 1$ на круг $|w - w_0| < R$ так, чтобы центры кругов соответствовали друг другу и горизонтальный диаметр переходил в диаметр, образующий с направлением действительной оси угол α.

Решение. По смыслу линейного преобразования, изменим диаметр круга с 1 на R преобразованием $w_1 = Rze^{i\alpha}$, сохранив центр круга в начале координат и повернув горизонтальный диаметр на угол α против часовой стрелки. Затем осуществим преобразование параллельного переноса так, чтобы центр круга $z = 0$ перешел в центр круга $w = w_0$: $w_2 = w_1 + w_0$. Окончательно: $w = e^{i\alpha}Rz + w_0$.

Пример 4.8 ([3], № 2.8). Для функции $w = \dfrac{1}{z}$ найти образы следующих линий: 1) семейства окружностей $x^2 + y^2 = ax$; 3) пучка параллельных прямых $y = x + b$; 6) параболы $y = x^2$.

Решение.

1) Найдем образ семейства окружностей $x^2 + y^2 = ax$:

$$w = \frac{1}{z} = \frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x - iy}{ax} = \frac{1}{a} - \frac{iy}{ax}\ .$$

Так как точка $z = 0$ принадлежит всем окружностям семейства, а она переходит в точку $w = \infty$, то все окружности этого семейства переходят в прямые, параллельные мнимой оси в плоскости w, то есть $u = \dfrac{1}{a}$ (сама мнимая ось не входит в это семейство).

3) Найдем образ пучка параллельных прямых $y = x + b$:

$$w=\frac{1}{x+i(x+b)}=\frac{x-i(x+b)}{x^2+(x+b)^2};$$

$$u=\frac{x}{x^2+(x+b)^2};\ \upsilon=-\frac{x+b}{x^2+(x+b)^2}\Rightarrow$$

$$u^2+\upsilon^2=\frac{x^2}{\left[x^2+(x+b)^2\right]^2}+\frac{(x+b)^2}{\left[x^2+(x+b)^2\right]^2},$$

$$u^2+\upsilon^2=\frac{1}{x^2+(x+b)^2};$$

в то же время

$$u+\upsilon=-\frac{b}{x^2+(x+b)^2}\Rightarrow u^2+\upsilon^2=-\frac{u+\upsilon}{b}$$

или

$$\left(u+\frac{1}{2b}\right)^2+\left(\upsilon+\frac{1}{2b}\right)^2=\frac{1}{2b^2}$$

– семейство окружностей с центром в точке $u=-\frac{1}{2b}$, $\upsilon=-\frac{1}{2b}$ радиуса $\frac{1}{\sqrt{2}\cdot b}\,(b\neq 0)$. При $b=0$ прямая $y=x$ переходит в прямую $\upsilon=-u$.

6) Найдем образ параболы $y=x^2$:

$$w=\frac{1}{z}=\frac{1}{x+ix^2}=\frac{x-ix^2}{x^2+x^4};\ u=\frac{x}{x^2+x^4}=\frac{1}{x(1+x^2)};$$

$$\upsilon=-\frac{x^2}{x^2+x^4}=-\frac{1}{1+x^2}\Rightarrow u^2=\frac{1}{x^2(1+x^2)^2}=-\frac{\upsilon^3}{1+\upsilon}.$$

Пример 4.9 ([3], № 2.11). Во что преобразуется первая четверть плоскости z при отображении, осуществляемом дробно-линейной функцией $w=\frac{z-i}{z+i}$.

Решение. По свойствам дробно-линейной функции ни одна точка первой четверти и ее границы не переходит в точку $w=\infty$ (так как в точку $w=\infty$ переходит только точка $z=-i$, не принадлежащая первой четверти). Следовательно, обе границы области $\left(\{x=0;\, 0<y<1\}\right)$ и $\{y=0;\, 0<x<\infty\}$ переходят в окружности, а сама область – в ограниченную этими окружностями конечную область плоскости *w*.

По принципу соответствия границ граница $\{y=0;\, 0\le x\le +\infty\}$ переходит в часть окружности:

$$u+iv=\frac{x-i}{x+i}=\frac{(x-i)^2}{x^2+1}=\frac{x^2-1}{x^2+1}-\frac{2ix}{x^2+1};$$

$$u=\frac{x^2-1}{x^2+1};\; v=-\frac{2x}{x^2+1}\Rightarrow u^2+v^2=1,$$

причем $0\to -1$, $1\to -i$; $\infty\to 1$, то есть в нижнюю полуплоскость.

Вторая часть границы $\{x=0;\, 0<y<+\infty\}$ переходит в отрезок действительной оси $\{v=0;\, 0\le u\le 1\}$. Таким образом, первая четверть переходит в нижний полукруг $\left\{u^2+v^2<1;\, v<0\right\}$.

Пример 4.10 ([3], № 2.20). Найти дробно-линейную функцию, переводящую точки $-1,\ 0,\ 1$ соответственно, в точки 1, *i*, –1, и выяснить, во что при этом отображении переходит верхняя полуплоскость.

Решение. Запишем дробно-линейную функцию в виде, содержащем 3 подлежащих определению параметра: $w=\lambda\cdot\dfrac{z-\alpha}{z-\beta}$. Используем заданные условия, из которых получим $1=\lambda\cdot\dfrac{-1-\alpha}{-1-\beta}$; $i=\lambda\cdot\dfrac{-\alpha}{-\beta}$; $-1=\lambda\cdot\dfrac{1-\alpha}{1-\beta}$. Решаем эту систему:

$$\begin{cases}\beta+1=\lambda(1+\alpha),\\ i\beta=\lambda\alpha,\\ -1+\beta=\lambda(1-\alpha)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2\beta=2\lambda,\\ i\beta=\lambda\alpha\end{cases}\Rightarrow i\beta=\beta\alpha\Rightarrow\alpha=i,$$

$$\frac{\beta+1}{\beta-1}=\frac{1+i}{1-i}\Rightarrow\beta=-i\,;\ \lambda=-i\Rightarrow w=-i\cdot\frac{z-i}{z+i}\,.$$

Во что эта функция переводит верхнюю полуплоскость?

Граница $y=0$ переходит в границу

$$w=-i\cdot\frac{x-i}{x+i}=\frac{-1-ix}{x+i}=\frac{(-1-ix)(x-i)}{x^2+1}=\frac{-2x-i(x^2-1)}{x^2+1}\,;$$

$$u=-\frac{2x}{x^2+1}\,;\ v=\frac{1-x^2}{x^2+1}\Rightarrow\quad u^2+v^2=\frac{4x^2+(1-x^2)^2}{(x^2+1)^2}=1\,;$$

– это уравнение единичной окружности с центром в начале координат. А так как некоторая точка верхней полуплоскости, например $z=i$, переходит в точку внутри окружности (в данном случае $i\to 0$), то получаем ответ: верхняя полуплоскость отображается в единичный круг $|w|<1$.

Рекомендуемый перечень задач для решения в аудитории:

4.1 ([3], № 1.187 (1,4)); 4.2 ([3], № 1.188 (1,3));

4.3 ([3], № 1.189, № 1.190); 4.5 ([3], № 2.1); 4.6 ([3], № 2.6 (1));

4.7 ([3], № 2.7); 4.8 ([3], № 2.8 (1,3)); 4.9 ([3], № 2.11).

Резерв:

[3], № 1.188 (5), № 1.191; 2.8 (4, 6).

Для самостоятельной работы дома:

4.1 ([3], № 1.187 (3)); 4.2 ([3], № 1.188 (2,4));

4.8 ([3], № 2.8 (2)); [3], № 2.14 (1).

5. КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ[1]

Определение конформного отображения дано во вступительной части к теме 4.

Основные принципы конформного отображения

Принцип взаимно однозначного соответствия. Необходимым и достаточным условием конформности отображения, осуществляемого однозначной аналитической в некоторой области функцией, является однолистность этой функции в данной области. (Однолистность функции в области означает, что в любых двух различных точках этой области функция принимает различные значения.)

На практике применение этого принципа сводится в основном к необходимости проверять на однолистность используемую в каждом конкретном случае отображающую функцию.

Принцип соответствия границ. Если однозначная аналитическая в некоторой области D, ограниченной контуром γ, функция, непрерывная в области D с границей, взаимно однозначно отображает границу γ на некоторый контур Г, с сохранением направления обхода, то и область D конформно отображается этой функцией на область внутри контура Г.

На практике это позволяет для отображения одной области на другую отобразить лишь границу, что обеспечивает конформное отображение всей области.

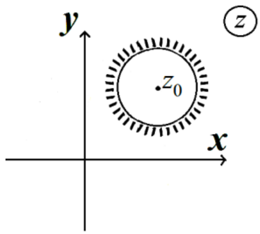
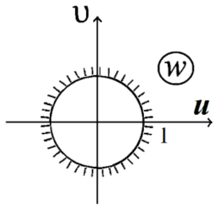
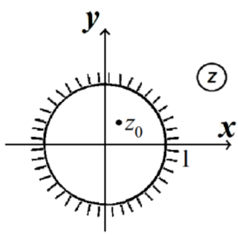
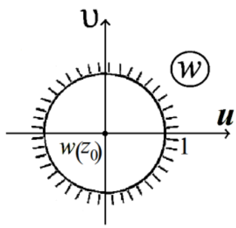
Принцип симметрии. Если одна из двух симметричных относительно отрезка прямой областей (отрезок является их общей границей) конформно отображается аналитической в ней функцией, непрерывной, в области с границей на некоторую область, граница которой содержит отрезок прямой (этот отрезок – отображение выше упомянутого отрезка), то и вторая, симметричная первой область конформно отображается на симметричную относительно образа отрезка область, единственной аналитической функцией, являющейся аналитическим продолжением функции, заданной на первой из симметричных областей на вторую через прямолинейный участок их общей границы.

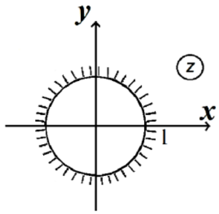
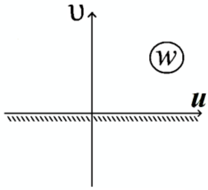
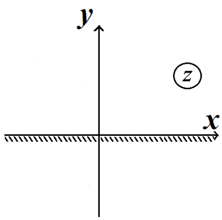
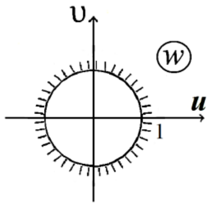
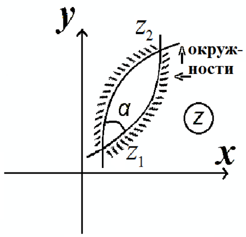
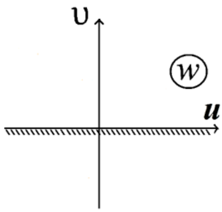
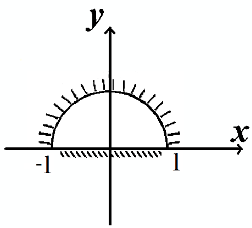
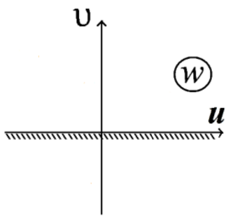
---

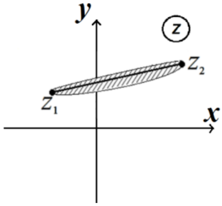
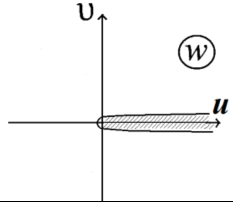
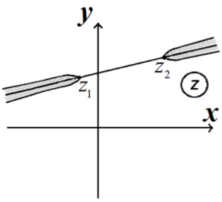
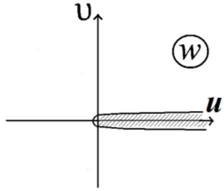
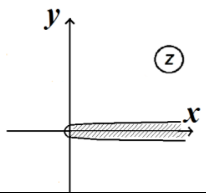
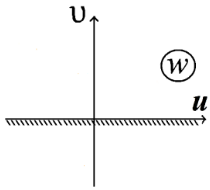
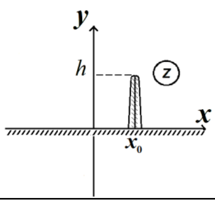
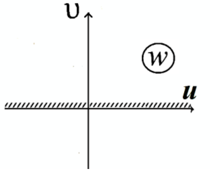
[1] При недостатке часов это занятие можно рассматривать как факультативное.

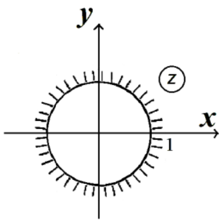
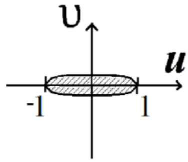
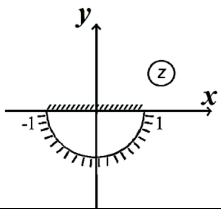
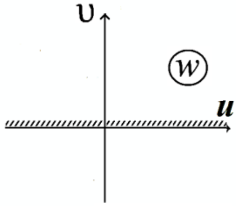
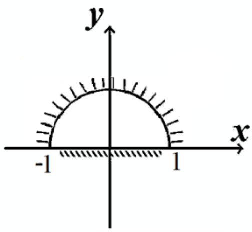
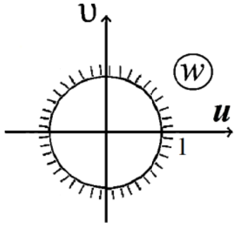
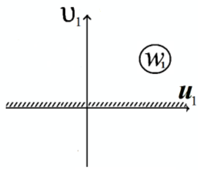
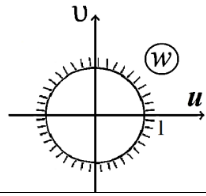
Иначе говоря, при конформном отображении симметричные в указанном смысле области отображаются в симметричные.

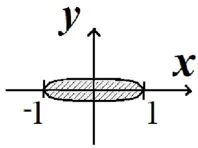
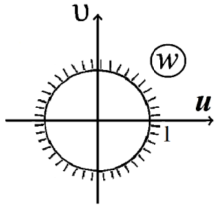
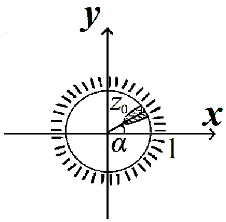
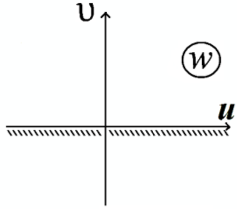
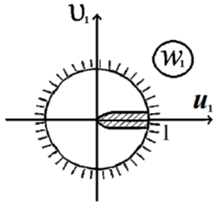
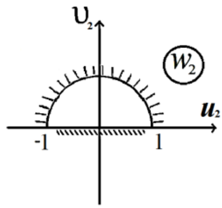
Таблица некоторых часто встречающихся конформных отображений

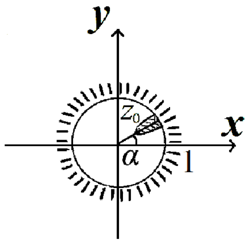
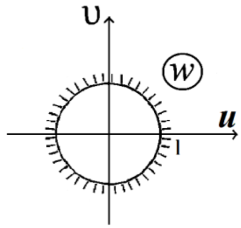
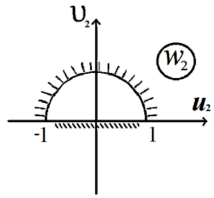
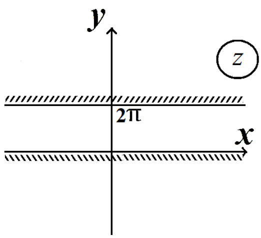
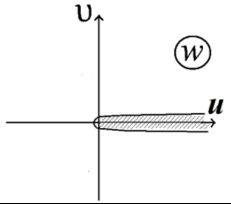
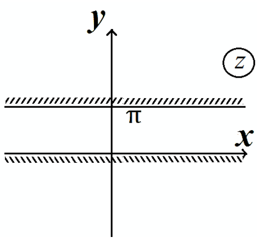
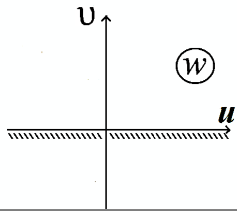
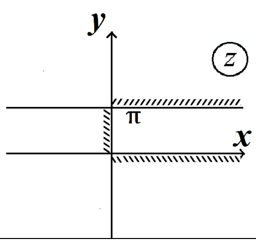
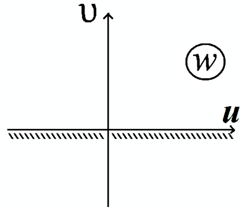
Отображаемая область (или множество)	Образ отображения	Отображающая функция $w = f(z)$
Круг $\lvert z - z_0 \rvert < R$ 	Единичный круг с центром в начале координат $\lvert w \rvert < 1$ 	Целая линейная функция $$w = \frac{e^{i\alpha}}{R} \cdot (z - z_0)$$ (α – произвольное действительное число)
Окружности в обобщенном смысле (включая прямые как окружности бесконечного радиуса). Симметричные относительно окружности или прямой точки	Окружности в обобщенном смысле Симметричные относительно образа точки	Дробно-линейная функция $$w = \lambda \cdot \frac{z - \alpha}{z - \beta}$$
Единичный круг $\lvert z \rvert < 1$ 	Единичный круг $\lvert w \rvert < 1$ с переходом внутренней точки z_0 в центр круга 	$$w = e^{i\alpha} \cdot \frac{z - z_0}{z \cdot \overline{z}_0 - 1}$$ (α – произвольное действительное число)

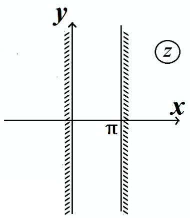
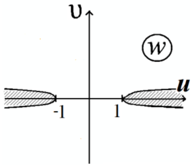
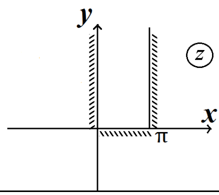
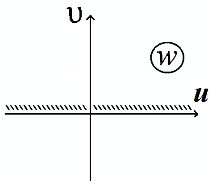
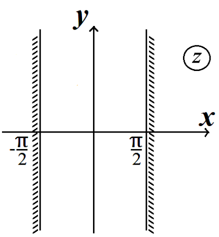
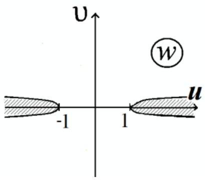
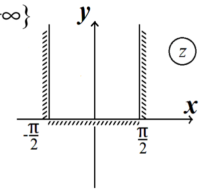
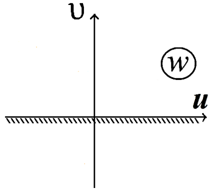
Отображаемая область (или множество)	Образ отображения	Отображающая функция $w = f(z)$
Единичный круг $\lvert z \rvert < 1$ 	Верхняя полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$ 	$w = i \cdot \dfrac{1-z}{1+z}$ (возможны и другие функции)
Верхняя полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ 	Единичный круг $\lvert w \rvert < 1$ 	$w = e^{i\alpha} \cdot \dfrac{z-\beta}{z-\overline{\beta}}$, $\operatorname{Im}\beta > 0$, α – любое действительное число
Двуугольник (“луночка”) 	Верхняя полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$ 	$w = e^{-i\frac{\alpha_0}{\alpha}} \left(\dfrac{z_1 - z}{z_2 - z} \right)^{\frac{\pi}{\alpha}}$ (α – некоторое действительное число, определяемое положением двуугольника)
Верхний полукруг $\lvert z \rvert < 1$, $\operatorname{Im} z > 0$ 	Верхняя полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$ 	$w = \left(\dfrac{1+z}{1-z} \right)^2$, а также функция Жуковского с минусом $w = -\dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z} \right)$

Отображаемая область (или множество)	Образ отображения	Отображающая функция $w = f(z)$
Плоскость за вычетом отрезка прямой, соединяющего точки z_1 и z_2 	Плоскость с разрезом по действительной положительной полуоси 	$w = \dfrac{z - z_1}{z_2 - z}$
Плоскость с разрезом по внешности отрезка прямой, соединяющего точки z_1 и z_2 	Плоскость с разрезом по действительной положительной полуоси 	$w = \dfrac{z_1 - z}{z_2 - z}$
Плоскость с разрезом по действительной положительной полуоси 	Верхняя полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$ 	$w = \sqrt{z}$
Верхняя полуплоскость с разрезом $z = x_0 + iy$ $(0 \le y \le h)$ 	Верхняя полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$ 	$w = \sqrt{(z - x_0)^2 + h^2}$

Отображаемая область (или множество)	Образ отображения	Отображающая функция $w = f(z)$
Единичный круг $\lvert z\rvert < 1$  (а также внешность этого круга)	Плоскость с разрезом по отрезку действительной оси $-1 \le u \le 1$ 	Функция Жуковского $w = \dfrac{1}{2}\cdot\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$
Нижний полукруг $\lvert z\rvert < 1$, $\operatorname{Im} z < 0$ 	Верхняя полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$ 	$w = \dfrac{1}{2}\cdot\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$
Полукруг $\lvert z\rvert < 1$, $\operatorname{Im} z > 0$ 	Круг $\lvert w\rvert < 1$ 	В два этапа: $w_1 = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$  $w_2 = -\dfrac{w_1 + i}{w_1 - i} = w$ 

Отображаемая область (или множество)	Образ отображения	Отображающая функция $w = f(z)$
Плоскость с разрезом по отрезку действительной оси $-1 \le x \le 1$ 	Единичный круг $\lvert w \rvert < 1$ 	Функция, обратная функции Жуковского $w = z + \sqrt{z^2 - 1}$ (вторая ветвь этой функции отображает во внешность этого круга)
Единичный круг $\lvert z \rvert < 1$ с разрезом по отрезку радиуса $\arg z = \alpha$; $\lvert z_0 \rvert \le \lvert z \rvert \le 1$ 	Верхняя полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$ 	В 3 этапа: $w_1 = e^{-i\alpha} \cdot \dfrac{z_0 - z}{z \cdot \bar{z}_0 - 1}$  $w_2 = \sqrt{w_1}$  $w = w_3 =$ $= -\dfrac{1}{2}\left(w_2 + \dfrac{1}{w_2} \right)$
Единичный круг $\lvert z \rvert < 1$ с разрезом по отрезку радиуса: $\arg z = \alpha$; $\lvert z_0 \rvert \le \lvert z \rvert \le 1$	Единичный круг $\lvert w \rvert < 1$	В 2 этапа: $w_1 = e^{-i\alpha} \cdot \dfrac{z - z}{z\bar{z}_0 - 1}$; $w_2 = \sqrt{w_1}$

Отображаемая область (или множество)	Образ отображения	Отображающая функция $w = f(z)$
		 (а далее см. преобразование полукруга в круг)
Полоса $0 < y < 2\pi$ 	Плоскость с разрезом по действительной положительной полуоси. 	$w = e^z$
Полоса $0 < y < \pi$ 	Верхняя полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$ 	$w = e^z$
Полуполоса $\{0 < x < +\infty,\ 0 < y < \pi\}$ 	Верхняя полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$ 	$w = \mathrm{ch} z$

Отображаемая область (или множество)	Образ отображения	Отображающая функция $w = f(z)$
Полоса $\{0 < x < \pi, -\infty < y < +\infty\}$ 	Плоскость с разрезом по действительной оси $\{u \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty);$ $\upsilon = 0\}$ 	$w = \cos z$
Верхняя полуполоса $\{0 < x < \pi; 0 < y < +\infty\}$ 	Нижняя полуплоскость $\operatorname{Im} w < 0$ 	$w = \cos z$
Полоса $\left\{-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2};\right.$ $\left.-\infty < y < +\infty\right\}$ 	Плоскость с разрезом по действительной оси $\{u \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty),$ $\upsilon = 0\}$ 	$w = \sin z$
Полуполоса $\left\{-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2};\right.$ $\left.0 < y < +\infty\right\}$ 	Верхняя полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$ 	$w = \sin z$

Пример 5.1. Определить: 1) на какую область отображает функция $w = z^2$ второй квадрант плоскости z $(x < 0,\ y > 0)$ (рис. 5.1); 2) на какую область отображает функция $w = \dfrac{z}{z-1}$ полукруг $|z| < 1$, $\operatorname{Im} z > 0$ (рис. 5.2); 3) [3], № 2.107 (9).

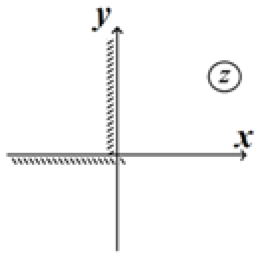


Рис. 5.1

Решение.

1) $w = z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$ (см. рис. 5.1). Пусть $w = u + i\upsilon$. Тогда $u = x^2 - y^2$; $\upsilon = 2xy$. По принципу соответствия границ верхняя мнимая полуось $\{x = 0;\, 0 \le y \le +\infty\}$ отображается следующим образом: $u = -y^2$; $\upsilon = 0$, то есть в отрицательную действительную полуось $\{-\infty < u \le 0;\, \upsilon = 0\}$.

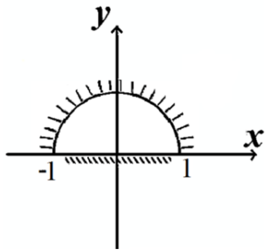


Рис. 5.2

Отрицательная действительная полуось $\{-\infty < x \le 0;\, y = 0\}$ отображается так: $u = x^2$, $\upsilon = 0$, то есть переходит в действительную положительную полуось. Так как направление обхода при конформном отображении сохраняется, то второй квадрант отображается в нижнюю полуплоскость (рис. 5.3) (можно этот факт установить и с помощью какой-либо пробной внутренней точки, взятой из отображаемой области, например:

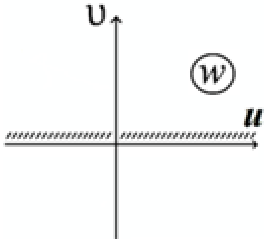


Рис. 5.3

$$z = -1 + i \to w = (-1+i)^2 = -2i\,.$$

2) Отрезок действительной оси $-1 \le x \le 1$ отображается в действительную полуось $-\infty < u \le \dfrac{1}{2}$ (так как $-1 \to \dfrac{1}{2}$, $0 \to 0$, $1 \to -\infty$).

Полуокружность $z = e^{i\varphi}$ $(0 \le \varphi \le \pi)$ преобразуется следующим образом:

$$w=\frac{e^{i\varphi}}{e^{i\varphi}-1}=\frac{e^{i\varphi}(e^{-i\varphi}-1)}{(e^{i\varphi}-1)(e^{-i\varphi}-1)}=\frac{1-e^{i\varphi}}{2-e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}=\frac{1-e^{i\varphi}}{2(1-\cos\varphi)}=$$

$$=\frac{1-\cos\varphi-i\sin\varphi}{2(1-\cos\varphi)}=\frac{1}{2}-\frac{i\sin\varphi}{2(1-\cos\varphi)}=$$

$$==\frac{1}{2}-\frac{i2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}{4\cos^2\frac{\varphi}{2}}==\frac{1}{2}-\frac{i\cdot\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{2}\,(0\le\varphi\le\pi)\Rightarrow u=\frac{1}{2},$$

$$-\infty<v\le 0\,.$$

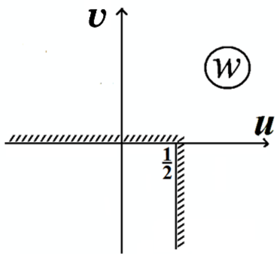


Рис. 5.4

Таким образом, полукруг отображается во внутренность прямого угла $\left\{u<\frac{1}{2};v<0\right\}$ (рис. 5.4).

3) На какую область функция Жуковского $w=\frac{1}{2}\cdot\left(z+\frac{1}{z}\right)$ отображает область $|z|>1$, $\operatorname{Im}z>0$ (рис. 5.5)? Часть действительной оси $x\in(-\infty;-1]\cup[1;+\infty)$ преобразуется следующим образом:

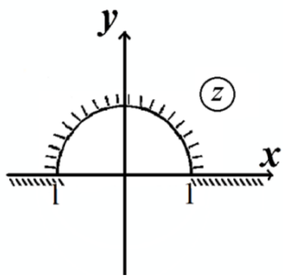


Рис. 5.5

$$w=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right);\quad u=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right),\quad v=0\,.$$

Когда x меняется от $-\infty$ до -1, переменная u также меняется от $-\infty$ до -1. Одинаково они меняются и когда $x\in[1;+\infty)$. Окружность $z=e^{i\varphi}$ отображается так: $w=\frac{1}{2}\left(e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}\right)=\cos\varphi$, то есть переходит в отрезок действительной оси $-1\le u\le 1$. Таким образом, данная область отображается в верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im}w>0$ (рис. 5.6).

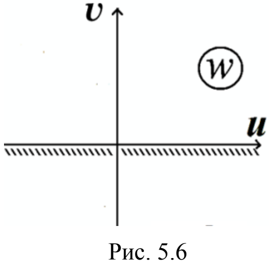


Рис. 5.6

Пример 5.2 ([3], № 2.30). Найти функцию, отображающую круг $|z| < 2$ на полуплоскость $\operatorname{Re} w > 0$ так, чтобы $w(0) = 1$, $\arg w'(0) = \dfrac{\pi}{2}$ (рис. 5.7 и 5.8).

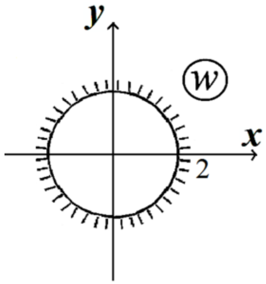


Рис. 5.7

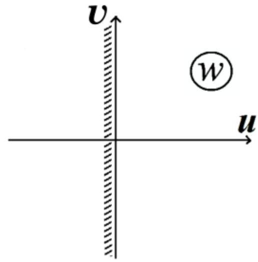


Рис. 5.8

Решение. Будем искать решение в виде дробно-линейной функции $w = \lambda \cdot \dfrac{z-\alpha}{z-\beta}$ (так как именно она может перевести окружность в прямую). Используем условие

$$w(0) = 1 \Rightarrow 1 = \lambda \cdot \frac{\alpha}{\beta} \Rightarrow \lambda = \frac{\beta}{\alpha}; \qquad w = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{z-\alpha}{z-\beta}.$$

Симметричная точке $z = 0$ относительно границы (т.е. окружности) точка $z = \infty$. Поэтому симметричная точке $w = 1$ относительно образа этой границы (то есть прямой $u = 0$) точка $w = -1$. Следовательно,

$$w(\infty) = -1 = \lim_{z \to \infty} \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{z-\alpha}{z-\beta} = \frac{\beta}{\alpha} \Rightarrow \alpha = -\beta.$$

Таким образом, $w = -\dfrac{z-\alpha}{z+\alpha}$.

Используем условие $w'(0) = \dfrac{\pi}{2}$: $w'(z) = -\dfrac{2\alpha}{(z+\alpha)^2}$; $w'(0) = -\dfrac{2}{\alpha}$.

Если $\alpha = |\alpha| e^{i\varphi_0}$, то $w'(0) = -2|\alpha| \cdot e^{-i\varphi_0}$ и $\arg w'(0) = \pi - \varphi_0 \Rightarrow$

$$\pi - \varphi_0 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \varphi_0 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = |\alpha| \cdot i \Rightarrow w(z) = -\frac{z - i|\alpha|}{z + i|\alpha|}.$$

Для нахождения $|\alpha|$ используем условие: граница переходит в границу. Следовательно, окружность $z = 2 \cdot e^{i\varphi}$ переходит в прямую $u = 0$. Итак,

$$u + iv = -\frac{2e^{i\varphi} - i|\alpha|}{2e^{i\varphi} + i|\alpha|} = \frac{\left(2e^{i\varphi} - i|\alpha|\right)\left(2e^{-i\varphi} - i|\alpha|\right)}{\left(2e^{i\varphi} + i|\alpha|\right)\left(2e^{-i\varphi} - i|\alpha|\right)} =$$

$$= -\frac{4 - |\alpha|^2 - i|\alpha| \cdot 2e^{-i\varphi} - i|\alpha| \cdot 2e^{i\varphi}}{\left|2e^{i\varphi} + i|\alpha|\right|^2} = -\frac{4 - |\alpha|^2 - 2i|\alpha| \cdot 2\cos\varphi}{\left|2e^{i\varphi} + i|\alpha|\right|^2} \Rightarrow$$

$$u = -\frac{4 - |\alpha|^2}{\left|2e^{i\varphi} + i|\alpha|\right|^2} = 0 \Rightarrow |\alpha| = 2.$$

Ответ: $w = -\dfrac{z - 2i}{z + 2i}$.

Пример 5.3 ([3], № 2.31). Отобразить круг $|z - 4i| < 2$ на полуплоскость $v > u$ так, чтобы центр круга перешел в точку -4, а точка окружности $2i$ – в начало координат (рис. 5.9 и 5.10).

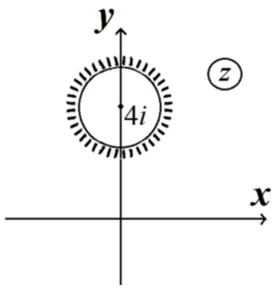


Рис. 5.9

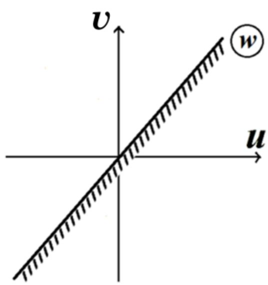


Рис. 5.10

Решение. Используем дробно-линейную функцию $w = \lambda \cdot \dfrac{z - \alpha}{z - \beta}$.

Так как точка $2i$ переходит в начало координат, то $w = \lambda \cdot \dfrac{z - 2i}{z - \beta}$.

Центр круга точка $z = 4i$ переходит в точку -4. Следовательно,

$$-4=\lambda\cdot\frac{4i-2i}{4i-\beta};\ -2(4i-\beta)=2i\lambda;\ -8i+2\beta=2i\lambda,$$

$$\lambda=-4-i\beta\Rightarrow w=-(4+i\beta)\cdot\frac{z-2i}{z-\beta}.$$

Для центра круга симметричной относительно окружности будет точка $z=\infty$. Она переходит в точку $w_0=-4i$, симметричную точке –4 относительно образа окружности, то есть относительно прямой $v=u$.

$$w(\infty)=-4i=\lim_{z\to\infty}\left[-(4+i\beta)\cdot\frac{z-2i}{z-\beta}\right]=-4-i\beta\Rightarrow\beta=4+4i\Rightarrow$$

$$\Rightarrow w=-4i\cdot\frac{z-2i}{z-4-4i}.$$

Пример 5.4 ([3], № 2.99). Отобразить на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w>0$ полуплоскость $\operatorname{Im} z>0$ с разрезом по отрезку $[0,ih]$, $h>0$ (рис. 5.11 и 5.12).

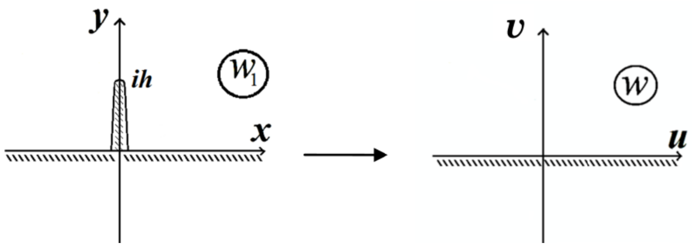


Рис. 5.11 Рис. 5.12

Делаем поэтапно: 1) $w_1=z^2$ (рис. 5.13); 2) $w_2=w_1+h^2$ (рис. 5.14); 3) $w=\sqrt{w_2}$ (рис. 5.15). Получаем ответ $w=\sqrt{z^2+h^2}$

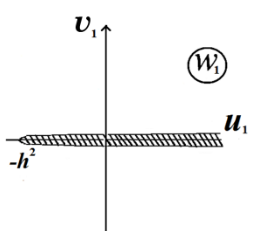


Рис. 5.13

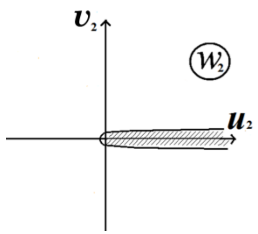


Рис. 5.14

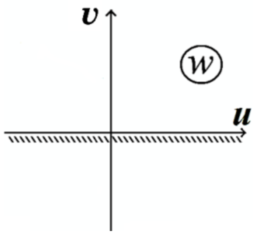


Рис. 5.15

Пример 5.5 ([3], № 2.101). Отобразить на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$ полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ с разрезом по дуге окружности $|z| = 1$ от точки $z = 1$ до точки $z = e^{i\alpha}$, где $0 < \alpha < \pi$ (рис. 5.16 и 5.17).

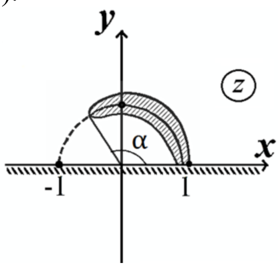


Рис. 5.16

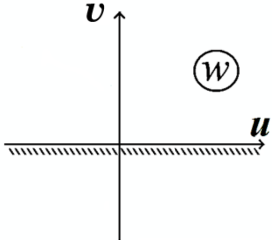


Рис. 5.17

Решение. Делаем поэтапно. Сначала применим дробно-линейную функцию $w_1 = \dfrac{z-1}{z+1}$, получим результат, показанный на рис. 5.18.

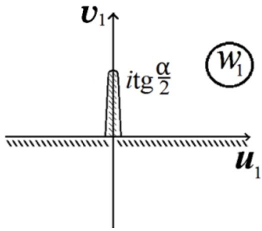


Рис. 5.18

Так как при этом преобразовании действительная ось переходит в действительную, верхняя полуплоскость переходит в верхнюю полуплоскость, единичная окружность $|z| = 1$ переходит в мнимую ось, точка $z = 1$ переходит в точку $w = 0$, точка $z = e^{i\alpha}$ переходит в точку

$$w = \frac{e^{i\alpha} - 1}{e^{i\alpha} + 1} = \frac{\left(e^{i\alpha} - 1\right)\left(e^{-i\alpha} + 1\right)}{\left(e^{i\alpha} + 1\right)\left(e^{-i\alpha} + 1\right)} = \frac{-e^{-i\alpha} + e^{i\alpha}}{2 + e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}} = \frac{2i\sin\alpha}{2 + 2\cos\alpha} =$$

$$= \frac{i2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}} = i\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

Далее: $w_2 = w_1^2$ (рис. 5.19), $w_3 = w_2 + \operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}$ (рис. 5.20), $w = \sqrt{w_3}$ (рис. 5.21). Окончательный ответ: $\sqrt{\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)^2 + \operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}$.

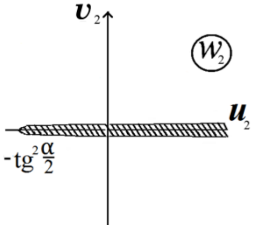


Рис. 5.19

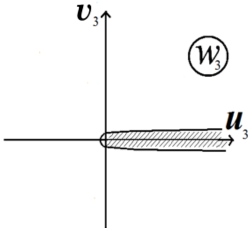


Рис. 5.20

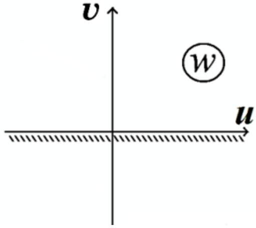


Рис. 5.21

Пример 5.6 ([3], № 2.118). Отобразить единичный круг $|z|<1$ с выкинутым отрезком $\left[(1-h)e^{i\alpha}, e^{i\alpha}\right]$ (рис. 5.22) на единичный круг $|w|<1$.

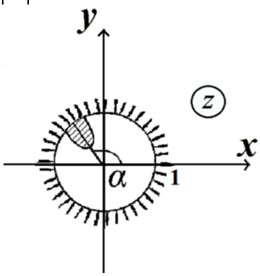


Рис. 5.22

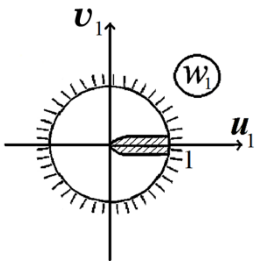


Рис. 5.23

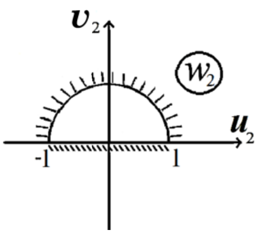


Рис. 5.24

Решение. Сначала получим единичный круг с разрезом по действительной оси $[0;1]$ (рис. 5.23):

$$w_1 = e^{-i\alpha} \cdot \frac{(1-h)e^{i\alpha} - z}{z(1-h)e^{-i\alpha} - 1}$$

(см. таблицу отображений).

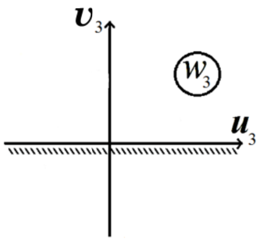


Рис. 5.25

Далее:

$w_2 = \sqrt{w_1}$ (рис. 5.24),

$w_3 = \dfrac{1}{2}\left(w_2 + \dfrac{1}{w_2}\right)$ (рис. 5.25),

$w_4 = w = -\dfrac{w_3 + i}{w_3 - i}$ (рис. 5.26).

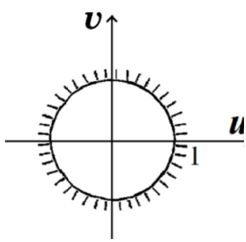


Рис. 5.26

Пример 5.7 ([3], № 2.166). Отобразить на верхнюю полуплоскость полуполосу $0 < x < \pi$, $y > 0$ с разрезом вдоль отрезка $x = \dfrac{\pi}{2}, 0 \le y \le h$ (рис. 5.27).

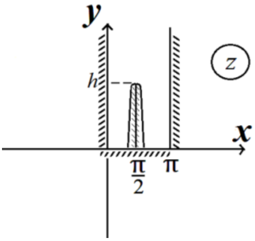


Рис. 5.27

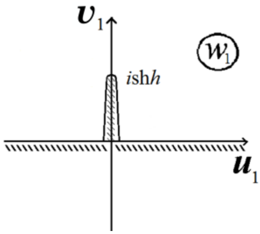


Рис. 5.28

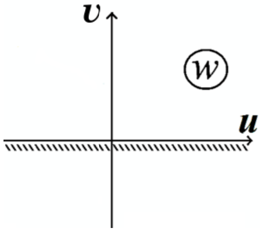


Рис. 5.29

Решение. Сначала $w_1 = -\cos z$ (рис. 5.28), далее по таблице изображений $w_2 = \sqrt{w_1^2 + \mathrm{sh}^2\, h}$ (рис. 5.29).

Рекомендуемый перечень задач для решения в аудитории:
5.1 (2, 3); 5.2 ([3], № 2.30); 5.4; 5.5;
[3] № 2.164; 5.7 ([3], № 2.166).
Резерв:
[3], № 2.97, № 2.117; 5.6 ([3], № 2.118).
Для самостоятельной работы дома:
5.1 (1); [3], № 2.100; 5.3 ([3], № 2.31);
[3] № 2.107 (8), № 2.167.

6. ИНТЕГРАЛ ПО КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ. ИНТЕГРАЛЬНАЯ ФОРМУЛА КОШИ

Пусть на комплексной плоскости z задана кривая γ, соединяющая точки A и B, и на этой кривой задана функция $w = f(z)$. Произведем разбиение кривой точками $A = z_0,\ z_1,\ z_2, \ldots,\ z_n = B$. Обозначим разность $z_{i+1} - z_i = \Delta z_i$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$. На кривой между соседними точками разбиения возьмем произвольно точки ξ_i и составим интегральную сумму

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta z_i .$$

Увеличивая число точек разбиения $n \to \infty$ так, чтобы характеристика разбиения $\lambda = \max\limits_{i=0,1\ldots,n-1} \left|\Delta z_i\right| \to 0$, получим предел интегральных сумм, который, если он существует, называется интегралом по комплексной переменной вдоль кривой γ: $\lim\limits_{\substack{\lambda \to 0 \\ n \to \infty}} \sigma = \int\limits_{\gamma} f(z)dz$.

Этот интеграл сводится к криволинейному интегралу второго рода от действительных функций двух действительных переменных x и y, где $z = x + iy$, вдоль кривой γ. Действительно, если $w = f\left(z\right) = u\left(x, y\right) + iv\left(x, y\right)$, а $dz = dx + idy$, то

$$\int\limits_{\gamma} f(z)dz = \int\limits_{\gamma} (u + iv)(dx + idy) = \int\limits_{\gamma} udx - vdy + i\int\limits_{\gamma} vdx + udy .$$

Если кривая γ замкнута, без самопересечений (будем называть ее контуром), а функция $f(z)$ аналитическая внутри γ и непрерывная в области с границей, то функции u и v непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка, при этом справедлива формула Грина

$$\int\limits_{\gamma} Pdx + Qdy = \iint\limits_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

(D – область с границей γ).

В нашем случае:

$$\int\limits_{\gamma} udx - \upsilon dy = \iint\limits_{D} \left(-\frac{\partial \upsilon}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dxdy \,,$$

$$\int\limits_{\gamma} \upsilon dx + udy = \iint\limits_{D} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial \upsilon}{\partial y} \right) dxdy \;.$$

Оба двойных интеграла по области D равны нулю в силу условий Коши–Римана. Таким образом, если контур γ ограничивает область аналитичности функции $f(z)$, то $\oint\limits_{\gamma} f(z)dz = 0$ (теорема Коши). Отметим, что теорема Коши справедлива и для многосвязной области, где γ – совокупная граница всей многосвязной области. Из теоремы Коши следует интегральная формула Коши:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} \,,$$

где контур γ охватывает область аналитичности функции $f(z)$, а точка z находится внутри него, $\zeta \in \gamma$. Действительно, рассматривая двусвязную область, ограниченную извне контуром γ, а изнутри окружностью $|\zeta - z| = \varepsilon$ с центром в точке z, по теореме Коши получим:

$$\int\limits_{\gamma} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} - \int\limits_{|\zeta - z| = \varepsilon} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} = 0$$

или

$$\int\limits_{\gamma} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} = \int\limits_{|\zeta - z| = \varepsilon} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} \,.$$

Обозначим $\zeta - z = \varepsilon e^{i\varphi}$, $d\zeta = i\varepsilon e^{i\varphi} d\varphi$. Интеграл справа будет равен

$$\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{f(z + \varepsilon e^{i\varphi}) i\varepsilon e^{i\varphi} d\varphi}{\varepsilon e^{i\varphi}} = i \int\limits_{0}^{2\pi} f(z + \varepsilon e^{i\varphi}) d\varphi = i f(z + \varepsilon e^{i\varphi^*}) 2\pi$$

(по теореме о среднем для интеграла).

Ввиду непрерывности функции $f(z)$, $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} f(z + \varepsilon e^{i\varphi^*}) = f(z)$, откуда и получаем формулу Коши, которая также справедлива для многосвязной области.

Пользуясь свойствами интегралов с параметром, можем дифференцировать формулу Коши любое число раз, беря справа производную по параметру под знаком интеграла. Получим:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}}.$$

В интеграле $\int_{A}^{B} f(z)dz$, если зафиксировать нижний предел интегрирования, а верхний взять равным переменной z, получим интеграл с переменным верхним пределом $\int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$, который является аналитической функцией z в случае выполнения условий: $f(z)$ непрерывна в некоторой односвязной области, а интеграл $\int_{\gamma} f(\zeta)d\zeta$ по любому контуру внутри области равен 0. При этом производная от этого интеграла по верхнему пределу так же, как и в случае действительных интегралов, оказывается равной подынтегральной функции

$$\left(\int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta\right)' = f(z).$$

Откуда следует, что функция $\Phi(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$ является первообразной для функции $f(z)$ и имеет место формула Ньютона–Лейбница

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = \Phi(z_2) - \Phi(z_1),$$

а сам интеграл в области аналитичности функции $f(z)$ не зависит от пути интегрирования.

Пример 6.1 ([3], № 3.2). Пусть C – простой замкнутый контур, ограничивающий область D, площадь которой равна S. Доказать равенства: 1) $\int_{C} xdz = iS$; 2) $\int_{C} ydz = -S$; 3) $\int_{C} \bar{z}dz = 2iS$.

Решение. 1) $\int\limits_C xdz = \int\limits_C xdx + i\int\limits_C xdy$. По формуле Грина: $\int\limits_C xdx = 0$; $\int\limits_C xdy = 1\cdot\iint\limits_D dxdy = S$; 2) и 3) делаются аналогично.

Пример 6.2 ([3], № 3.3). Вычислить интегралы $I_1 = \int xdz$, $I_2 = \int ydz$: 1) по радиусу-вектору точки $z = 2+i$; 2) по полуокружности $|z| = 1$, $0 \le \arg \le \pi$ (начало пути в точке $z = 1$); 3) по окружности $|z-a| = R$.

Решение.

1) Радиус-вектор $2+i$ соединяет начало координат с точкой $z = 2+i$. Уравнение прямой, проходящей через эти две точки, $y = \frac{1}{2}x$. Поэтому

$$dy = \frac{1}{2}dx;$$

$$I_1 = \int\limits_0^2 x\left(dx + i\frac{1}{2}dx\right) = \frac{1}{2}x^2\Big|_0^2 + i\frac{1}{4}x^2\Big|_0^2 = 2+i;$$

$$I_2 = \int ydz = \int\limits_0^2 \frac{1}{2}x\left(dx + \frac{i}{2}dx\right) = \frac{1}{4}x^2\Big|_0^2 + \frac{i}{8}x^2\Big|_0^2 = 1+\frac{i}{2}.$$

2) На окружности $|z| = 1$ $z = \rho e^{i\varphi} = e^{i\varphi}$; $dz = ie^{i\varphi}d\varphi$; $x = \cos\varphi$, $y = \sin\varphi$:

$$I_1 = \int\limits_0^\pi \cos\varphi\cdot ie^{i\varphi}d\varphi = i\int\limits_0^\pi \cos\varphi(\cos\varphi + i\sin\varphi)d\varphi =$$

$$= i\int\limits_0^\pi \cos^2\varphi d\varphi - \int\limits_0^\pi \cos\varphi\sin\varphi d\varphi = i\int\limits_0^\pi \frac{1+\cos 2\varphi}{2}d\varphi - \frac{1}{2}\int\limits_0^\pi \sin 2\varphi =$$

$$= \frac{i}{2}(\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi)\Big|_0^\pi + \frac{1}{4}\cos 2\varphi\Big|_0^\pi = \frac{i\pi}{2}.$$

I_2 вычисляется аналогично.

3) На окружности $|z-a| = R$ $z = a + Re^{i\varphi}$, $dz = Rie^{i\varphi}d\varphi$; $x = \mathrm{Re}\, a + R\cos\varphi$; $y = \mathrm{Im}\, a + R\sin\varphi$:

$$I_1 = \int xdz = \int_0^{2\pi} (Rea + R\cos\varphi)\cdot Rie^{i\varphi}d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} (Rea + R\cos\varphi) iR(\cos\varphi + i\sin\varphi)d\varphi =$$

$$= iR\int_0^{2\pi} (Rea\cdot\cos\varphi + R\cos^2\varphi + iRea\cdot\sin\varphi + iR\sin\varphi\cos\varphi)d\varphi =$$

$$= iR\left[Rea\cdot\sin\varphi + \frac{R}{2}(\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi) - iRea\cdot\cos\varphi - \frac{iR}{2}\cos 2\varphi \right]_0^{2\pi} =$$

$$= iR\frac{R}{2}\varphi\Big|_0^{2\pi} = i\pi R^2 .$$

Можно было получить этот же результат, воспользовавшись примером 3.2 (1), по которому $\int\limits_c xdz = iS$, где S – площадь круга $|z-a| \le R$, т.е. $S = \pi R^2$.

Интеграл I_2 вычисляется аналогично.

Пример 6.3 ([3], № 3.4). Вычислить интеграл $\int |z| dz$: 1) по радиус-вектору точки $z = 2 - i$; 2) по полуокружности $|z| = 1$, $0 \le \arg z \le \pi$ (начало пути в точке $z = 1$); 3) по полуокружности $|z| = 1$, $-\frac{\pi}{2} \le \arg z \le \frac{\pi}{2}$ (начало пути в точке $z = -i$); 4) по окружности $|z| = R$.

Решение.

1) В точках, лежащих на радиусе-векторе $2 - i$, переменные y и x связаны уравнением $y = -\frac{1}{2}x$, $dy = -\frac{1}{2}dx$,

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + \frac{1}{4}x^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}x ,$$

$$dz = dx + idy = dx - i\frac{1}{2}dx .$$

Искомый интеграл равен

$$\int |z| dz = \int_0^2 \frac{\sqrt{5}}{2} x \left(dx - \frac{i}{2} dx \right) = \frac{\sqrt{5}}{2} \left(1 - \frac{i}{2} \right) \int_0^2 x dx = \sqrt{5} \left(1 - \frac{i}{2} \right);$$

2) На окружности $|z| = 1$ $z = e^{i\varphi}$; $dz = ie^{i\varphi} d\varphi$. Искомый интеграл

$$\int |z| dz = \int_0^{\pi} ie^{i\varphi} d\varphi = e^{i\varphi} \Big|_0^{\pi} = e^{i\pi} - 1 = -2;$$

3) По полуокружности $|z| = 1$; $-\frac{\pi}{2} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2}$. Искомый интеграл

$$\int |z| dz = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} ie^{i\varphi} d\varphi = e^{i\varphi} \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = e^{i\frac{\pi}{2}} - e^{-i\frac{\pi}{2}} = 2i.$$

4) По окружности $|z| = R$, $z = Re^{i\varphi}$; $dz = Rie^{i\varphi} d\varphi$. Искомый интеграл $\int |z| dz = \int_0^{2\pi} R \cdot Rie^{i\varphi} d\varphi = R^2 i \cdot \frac{1}{i} e^{i\varphi} \Big|_0^{2\pi} = R^2 \left(e^{2\pi i} - 1 \right) = 0$.

Пример 6.4 ([3], № 3.5). Вычислить интеграл $\int\limits_c |z| \bar{z} dz$, где C – замкнутый контур, состоящий из верхней полуокружности $|z| = 1$ и отрезка $-1 \leq x \leq 1$, $y = 0$.

Решение. $\int\limits_c |z| \bar{z} dz = I_1 + I_2$, где I_1 – интеграл по верхней полуокружности, I_2 – интеграл по отрезку действительной оси.

На полуокружности: $|z| = 1$, $z = e^{i\varphi}$, $\bar{z} = e^{-i\varphi}$; $dz = ie^{i\varphi} d\varphi$, $I_1 = \int_0^{\pi} e^{-i\varphi} \cdot ie^{i\varphi} d\varphi = i \int_0^{\pi} d\varphi = i\pi$.

На действительной оси: $y = 0$, $|z| = |x|$; $z = x$; $\bar{z} = x$; $dz = dx$; $dy = 0$, $I_2 = \int_{-1}^{1} |x| x dx = 0$ (так как подынтегральная функция нечетная). Таким образом, $\int\limits_c |z| \bar{z} dz = i\pi$.

Пример 6.5 ([3], № 3.6). Вычислить $\int\limits_{c} \frac{z}{\bar{z}} dz$, где C – граница полукольца, изображённого на рис. 6.1.

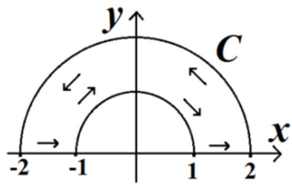


Рис. 6.1

Решение.

$$\int\limits_{c} \frac{z}{\bar{z}} dz = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 ,$$

где $I_1 = \int\limits_{-2}^{-1} \frac{z}{\bar{z}} dz$; $I_2 = \int\limits_{1}^{2} \frac{z}{\bar{z}} dz$; $I_3 = \int\limits_{\substack{\text{по малой}\\ \text{дуге}}} \frac{z}{\bar{z}} dz$; $I_4 = \int\limits_{\substack{\text{по большой}\\ \text{дуге}}} \frac{z}{\bar{z}} dz$.

На действительной оси $z = x$, $y = 0$; $\bar{z} = x$; $dz = dx$,

$$I_1 = \int\limits_{-2}^{-1} dx = x\Big|_{-2}^{-1} = 1; \quad I_2 = \int\limits_{1}^{2} dx = 1.$$

На малой полуокружности: $z = e^{i\varphi}$, $\bar{z} = e^{-i\varphi}$; $dz = ie^{i\varphi} d\varphi$,

$$I_3 = \int\limits_{\pi}^{0} \frac{e^{i\varphi}}{e^{-i\varphi}} ie^{i\varphi} d\varphi = i\int\limits_{\pi}^{0} e^{3i\varphi} d\varphi = \frac{1}{3} e^{3i\varphi}\Bigg|_{\pi}^{0} = \frac{1}{3}\left(1 - e^{3i\pi}\right) = \frac{2}{3}.$$

На большой полуокружности: $z = 2e^{i\varphi}$; $\bar{z} = 2e^{-i\varphi}$; $dz = 2ie^{i\varphi} d\varphi$;

$$I_4 = \int\limits_{0}^{\pi} \frac{2e^{i\varphi}}{2e^{-i\varphi}} \cdot 2ie^{i\varphi} d\varphi = 2i\int\limits_{0}^{\pi} e^{3i\varphi} d\varphi = \frac{2}{3} e^{3i\varphi}\Bigg|_{0}^{\pi} = \frac{2}{3}\left(e^{3i\pi} - 1\right) = -\frac{4}{3}.$$

Таким образом,

$$\int\limits_{c} \frac{z}{\bar{z}} dz = 1 + 1 + \frac{2}{3} - \frac{4}{3} = \frac{4}{3}.$$

Пример 6.6 ([3], № 3.7). Вычислить интеграл $\int\limits_{C} (z-a)^n dz$ (n – целое число): 1) по полуокружности $|z-a| = R$, $0 \le \arg(z-a) \le \pi$ (начало пути – в точке $z = a + R$); 2) по окружности $|z-a| = R$; 3) по периметру квадрата с центром в точке a и сторонами, параллельными осям координат.

Решение.

1) На полуокружности: $z = a + Re^{i\varphi}$; $z - a = Re^{i\varphi}$; $(z-a)^n = R^n e^{in\varphi}$; $dz = Rie^{i\varphi} d\varphi$;

$$\int_c (z-a)^n dz = \int_0^{\pi} R^n e^{in\varphi} \cdot Rie^{i\varphi} d\varphi = iR^{n+1} \int_0^{\pi} e^{i(n+1)\varphi} d\varphi =$$

$$= iR^{n+1} \cdot \frac{1}{i(n+1)} \cdot e^{i(n+1)\varphi} \Bigg|_0^{\pi} = \frac{R^{n+1}}{n+1}\left(e^{i(n+1)\pi} - 1\right) =$$

$$= \frac{R^{n+1}}{n+1}\left((-1)^{n+1} - 1\right) \ (n \neq -1).$$

Если $n = -1$, то интеграл имеет вид: $i\int_0^{\pi} d\varphi = i\pi$.

2) По окружности $|z-a| = R$:

$$\int_0^{2\pi} R^n e^{in\varphi} \cdot Rie^{i\varphi} d\varphi = \frac{1}{i(n+1)} \cdot e^{i(n+1)\varphi} \Bigg|_0^{2\pi} = 0 \quad (n \neq -1).$$

При $n = -1$ $\quad i\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi i$.

3) По периметру квадрата. Пусть длина стороны квадрата равна $2b$. Сделаем замену: $z - a = z' = x' + iy'$. Рассмотрим два интеграла: по нижнему основанию квадрата $I_1 = \int_{-b}^{b} (x' - ib)^n dx'$ и по верхнему $I_2 = \int_{b}^{-b} (x' + ib)^n dx'$. При $n \geq 0$ подынтегральное выражение состоит из четных и нечетных степеней x'. Интеграл от четных степеней в I_1 уничтожаются с такими же интегралами в I_2, а интегралы от нечетных степеней x' равны нулю в каждом интеграле, так как интеграл от нечетной функции в симметричных относительно нуля пределах равен 0. Следовательно, $I_1 + I_2 = 0$.

Если $n < -1$, то

$$\frac{1}{x - ib} = \frac{x + ib}{x^2 + b^2} \quad \text{и} \quad \frac{1}{x + ib} = \frac{x - ib}{x^2 + b^2}$$

и оба интеграла приобретут вид

$$I_1 = \int\limits_{-b}^{b} \frac{(x+ib)^{-n}}{(x^2+b^2)^{-n}}dx; \quad I_2 = -\int\limits_{-b}^{b} \frac{(x-ib)^{-n}}{(x^2+b^2)^{-n}}dx,$$

где $-n > 1$ и, следовательно, выше приведённые рассуждения остаются в силе, т.е. $I_1 + I_2 = 0$.

Если $n = -1$, то

$$\int\limits_c \frac{dz}{z-a} = \mathrm{Ln}(z-a)\Big|_{z_0}^{z_0+2\pi i} = \left[\mathrm{Ln}|z-a| + i\varphi + 2\pi ki\right]_{z_0}^{z_0+2\pi i} = 2\pi i,$$

так как первообразная для $\dfrac{1}{z-a}$ есть $\mathrm{Ln}(z-a)$, точка z_0 – произвольная точка контура интегрирования и при обходе всего контура и возвращении в ту же точку z_0 аргумент φ приобретёт приращение 2π, $\mathrm{Ln}|z-a|$ не изменится (как известно, функция $\mathrm{Ln}\, z = \ln|z| + i\varphi + 2\pi ki$). Те же рассуждения применяем и при вычислении интегралов по боковым сторонам квадрата.

На левой стороне

$$I_3 = \int\limits_{b}^{-b} (-b+iy')idy', \; I_4 = \int\limits_{-b}^{b} (b+iy')dy'.$$

Все интегралы от каждой из степеней y' обращаются сами по себе или в сумме $I_3 + I_4$ (в зависимости от четности степени) в нуль для $n \neq -1$. При $n = -1$ интеграл уже вычислен по всему контуру (см. выше).

Итак:

$$\int\limits_c (z-a)^n dz = 0 \text{ при } n \neq -1 \quad \text{и} \quad \int\limits_c \frac{dz}{z-a} = 2\pi i \text{ при } n = -1.$$

Пример 6.7. Вычислить интегралы: 1) $\int\limits_0^i z\sin z dz$; 2) $\int\limits_0^{-i} z\cos z dz$.

Решение.

1) Интеграл от аналитической функции не зависит от пути интегрирования и может быть вычислен по формуле Ньютона–Лейбница:

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = F(z_2) - F(z_1),$$

где $F(z)$ – первообразная. Вычисляем по частям:

$$\int z\sin z dz = -z\cos z + \sin z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^i z\sin z dz = \left[-z\cos z + \sin z\right]_0^i = -i\cos i + \sin i = -i\mathrm{ch}1 + i\mathrm{sh}1 =$$

$$= -i\frac{e^{-1}+e^{1}}{2} + i\frac{e^{1}-e^{-1}}{2} = -\frac{i}{e}\ .$$

2) Второй интеграл вычисляется аналогично. Получаем ответ:

$$1+\frac{1}{e}.$$

Интегралы от многозначных функций (начало пути интегрирования от точки, где задано значение функции, выделяющее ее однозначную ветвь).

Пример 6.8 ([3], № 3.8). Вычислить интеграл $\int \frac{dz}{\sqrt{z}}$:

1) по полуокружности $|z|=1$, $y \ge 0$; $\sqrt{1}=1$;

2) по полуокружности $|z|=1$, $y \ge 0$; $\sqrt{1}=-1$;

3) по полуокружности $|z|=1$, $y \le 0$; $\sqrt{1}=1$;

4) по окружности $|z|=1$, $\sqrt{1}=1$;

5) по окружности $|z|=1$, $\sqrt{-1}=i$.

Решение.

1) На окружности $|z|=1$ $z=e^{i\varphi}$; $dz = ie^{i\varphi}d\varphi$, $\sqrt{z}=\sqrt{|z|}\cdot e^{i\frac{\varphi+2\pi k}{2}}$ $(k=0,1)$ (по определению корня). Выбор ветви (k = 0 или k = 1) определяется условием $\sqrt{1}=1$. В точке z = 1 $|z|$ = 1; φ = 0 и $\sqrt{1}=e^{i\frac{2\pi k}{2}}=1 \Rightarrow k=0$. Следовательно, интегрируется ветвь

$$\sqrt{z}=\sqrt{|z|}\cdot e^{i\frac{\varphi}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \frac{dz}{\sqrt{z}} = \int_0^{\pi} \frac{ie^{i\varphi}d\varphi}{e^{i\frac{\varphi}{2}}} = i\int_0^{\pi} e^{i\frac{\varphi}{2}}d\varphi = i\frac{2}{i}e^{i\frac{\varphi}{2}}\Bigg|_0^{\pi} = 2\left(e^{i\frac{\pi}{2}} - 1\right) = 2(i-1).$$

2) Аналогично п. 1, начало интегрирования в точке $z_0 = 1$, и ветвь выделяется условием $\sqrt{1} = -1$. Поэтому $\sqrt{z} = \sqrt{|z|} \cdot e^{i\frac{\varphi+2\pi k}{2}}$; в точке $z = 1$ $|z| = 1$; $\varphi = 0$ $\Rightarrow \sqrt{1} = e^{i\frac{2\pi k}{2}} = -1 \Rightarrow k = 1$; надо брать ветвь

$$\sqrt{z} = \sqrt{|z|} \cdot e^{i\left(\frac{\varphi}{2}+\pi\right)} = \sqrt{|z|} \cdot e^{i\frac{\varphi}{2}} \cdot e^{i\pi} = -\sqrt{|z|} \cdot e^{i\frac{\varphi}{2}}.$$

Интеграл равен

$$\int \frac{dz}{\sqrt{z}} = \int_0^{\pi} \frac{ie^{i\varphi}d\varphi}{-e^{i\frac{\varphi}{2}}} = -i\int_0^{\pi} e^{i\frac{\varphi}{2}}d\varphi = -i\frac{2}{i}e^{i\frac{\varphi}{2}}\Bigg|_0^{\pi} = -2\left(e^{i\frac{\pi}{2}} - 1\right) = 2\left(1-i\right).$$

4) По окружности $|z| = 1$, $\sqrt{1} = 1$; $\sqrt{z} = \sqrt{|z|} \cdot e^{i\frac{\varphi+2\pi k}{2}}$, $\sqrt{1} = e^{\frac{i2\pi k}{2}} = 1 \Rightarrow k = 0$. Ветвь $\sqrt{z} = \sqrt{|z|}e^{i\frac{\varphi}{2}}$,

$$\int_C \frac{dz}{\sqrt{z}} = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{i\varphi}d\varphi}{e^{i\frac{\varphi}{2}}} = i\int_0^{2\pi} e^{i\frac{\varphi}{2}}d\varphi = 2 \cdot e^{i\frac{\varphi}{2}}\Bigg|_0^{2\pi} = 2\left(e^{i\pi} - 1\right) = -4.$$

5) По окружности $|z| = 1$ $\sqrt{-1} = i$. В точке $z = -1$ $|z| = 1$, $\varphi = \pi$, $\sqrt{z} = \sqrt{|z|}e^{i\frac{\varphi+2\pi k}{2}}$, в точке $z = -1$ $\sqrt{-1} = e^{i\frac{\pi+2\pi k}{2}} = e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot e^{i\pi k} = i \Rightarrow k = 0$.

Интегрируется ветвь $\sqrt{z} = \sqrt{|z|} \cdot e^{i\frac{\varphi}{2}}$ от точки $z = -1$ по полной окружности с возвращением в эту же точку. При этом $|z|$, не изменится, а аргумент φ изменится на 2π, т.е.

$$\int_C \frac{dz}{\sqrt{z}} = \int_{\pi}^{3\pi} \frac{ie^{i\varphi}d\varphi}{e^{i\frac{\varphi}{2}}} = i\int_{\pi}^{3\pi} e^{i\frac{\varphi}{2}}d\varphi = 2 \cdot e^{i\frac{\varphi}{2}}\Bigg|_{\pi}^{3\pi} = 2\left(e^{i\frac{3\pi}{2}} - e^{i\frac{\pi}{2}}\right) =$$

$$= 2\left(-i-i\right) = -4i.$$

Пример 6.9 ([3], № 3.9). Вычислить $\int\limits_C \operatorname{Ln} z dz$, где:

1) C – единичная окружность $|z|=1$, $\operatorname{Ln} 1 = 0$;

2) C – единичная окружность $|z|=1$, $\operatorname{Ln} i = \frac{\pi i}{2}$;

3) C – окружность $|z|=R$, $\operatorname{Ln} R = \ln R$;

4) C –окружность $|z|=R$, $\operatorname{Ln} R = \ln R = \ln R + 2\pi i$.

Решение.

1) $\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i\varphi + 2\pi k i$ (k – целое число). Так как $|z|=1$, то $\ln|z|=0$; в точке $z=1$ $\varphi = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \operatorname{Ln} 1 = 2\pi k i = 0 \Rightarrow k = 0;\ \operatorname{Ln} z = i\varphi;\ dz = ie^{i\varphi}d\varphi$$

$$\int\limits_C \operatorname{Ln} z dz = \int\limits_0^{2\pi} i\varphi i e^{i\varphi} d\varphi = -\left[\frac{1}{i}\varphi e^{i\varphi}\Big|_0^{2\pi} - \int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{i} e^{i\varphi} d\varphi\right] =$$

$$= -\left[\frac{2\pi}{i} + e^{i\varphi}\Big|_0^{2\pi}\right] = -[-2\pi i + 0] = 2\pi i.$$

2) $\operatorname{Ln} i = \frac{\pi i}{2}$. В точке $z = i$ $|z|=1$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ и

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i\varphi + 2\pi k i = i\frac{\pi}{2} + 2\pi k i = i\frac{\pi}{2} \Rightarrow k = 0.$$

Интегрируется ветвь $\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i\varphi$:

$$\int\limits_C \operatorname{Ln} z dz = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}+2\pi} i\varphi i e^{i\varphi} d\varphi = -\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}+2\pi} \varphi e^{i\varphi} d\varphi = -\left[\frac{1}{i}\varphi e^{i\varphi} + e^{i\varphi}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}+2\pi} =$$

$$= -\left[\frac{1}{i}\cdot\frac{5\pi}{2}\cdot e^{i\frac{5\pi}{2}} + e^{i\frac{5\pi}{2}} - \frac{1}{i}\cdot\frac{\pi}{2}e^{i\frac{\pi}{2}} - e^{i\frac{\pi}{2}}\right] = i\frac{5\pi}{2}\cdot i - i - i\cdot\frac{\pi}{2}\cdot i + i =$$

$$= -\frac{5\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = -2\pi.$$

4) $z = Re^{i\varphi}$, $dz = Rie^{i\varphi}d\varphi$; $\operatorname{Ln} R = \ln R + i0 + 2\pi ki = \ln R + 2\pi i \Rightarrow$ $k = 1$. Интегрируется ветвь: $\operatorname{Ln} z = \ln R + i\varphi + 2\pi i$:

$$\int\limits_C \operatorname{Ln} z dz = \int\limits_0^{2\pi} \left(\ln R + i\varphi + 2\pi i\right) Rie^{i\varphi} d\varphi =$$

$$= Ri\left[\ln R \cdot \frac{1}{i} e^{i\varphi}\Big|_0^{2\pi} + i\int\limits_0^{2\pi} \varphi e^{i\varphi} d\varphi + 2\pi i \int\limits_0^{2\pi} e^{i\varphi} d\varphi\right] =$$

$$= Ri\left[\frac{\ln R}{i} - \frac{\ln R}{i} + i\left(\frac{\varphi}{i} e^{i\varphi}\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{i}\int\limits_0^{2\pi} e^{i\varphi} d\varphi\right) + \frac{2\pi i}{i} \cdot e^{i\varphi}\Big|_0^{2\pi}\right] =$$

$$= Ri \cdot 2\pi - R\frac{1}{i} e^{i\varphi}\Big|_0^{2\pi} + 0 = 2\pi i R.$$

Пример 6.10. Вычислить интегралы:

1) $\int\limits_1^{-e^3} \operatorname{Ln} z dz$ в плоскости с разрезом по спирали $\rho = \varphi$ $\varphi \ge 0$ при условии $\operatorname{Ln} 1 = 2\pi i$;

2) $\int\limits_1^{27} \frac{dz}{\sqrt[3]{z}}$ в плоскости с разрезом по спирали $\rho = \varphi$ $\varphi \ge 0$ при условии $\sqrt[3]{1} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$;

3) $\int\limits_{\frac{1}{16}}^{2^{20}} \frac{dz}{\sqrt[4]{z}}$ в плоскости с разрезом по логарифмической спирали $\rho = e^{\varphi}$ $\left(-\infty < \varphi < +\infty\right)$ при условии $\sqrt[4]{-\frac{1}{16}} = -\frac{\sqrt{2}}{4}\left(1 - i\right)$.

Решение.

1) Выделим ветвь из условия (рис. 6.2). В точке $z = 1$ $|z| = 1$, $\ln|z| = 0$, $\varphi = 0 \Rightarrow \operatorname{Ln} 1 = 2\pi ki = 2\pi i \Rightarrow k = 1$. Интегрируем ветвь

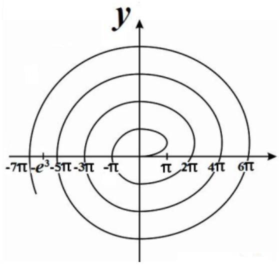


Рис. 6.2

$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i\varphi + 2\pi i$ по частям (так как выделенная в данной области ветвь – однозначная аналитическая функция):

$$\int \operatorname{Ln} z dz = z \operatorname{Ln} z - z .$$

По формуле Ньютона–Лейбница:

$$\int\limits_C \operatorname{Ln} z dz = \left[z \operatorname{Ln} z - z \right]_1^{-e^3} .$$

Учтем, что интегрируется ветвь $\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i\varphi + 2\pi i$.

В начальной и конечной точках интегрирования $z = 1$, $z = -e^3$, а $\operatorname{Ln} z$ соответственно – $\operatorname{Ln} 1 = 2\pi i$ и $\operatorname{Ln}(-e^3) = 3 + 5\pi i + 2\pi i =$ $= 3 + 7\pi i$. Следовательно,

$$\int\limits_C \operatorname{Ln} z dz = -e^3 \cdot (3 + 7\pi i) + e^3 - 2\pi i + 1 = 1 - 2e^3 - i\pi\left(2 + 7e^3\right).$$

2) По определению корня $\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{\rho} \cdot e^{i\frac{\varphi + 2\pi k}{3}}$ $(k = 0, 1, 2)$. Выделяем ветвь: в точке $z = 1$ $\rho = 1$; $\varphi = 0$,

$$\sqrt[3]{1} = e^{i\frac{2\pi k}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow k = 1,$$

так как

$$e^{i\frac{2\pi}{3}} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Интегрируется ветвь $\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{\rho} \cdot e^{i\frac{\varphi}{3}} \cdot e^{i\frac{2\pi}{3}}$. Так как в области с указанным разрезом выделенная ветвь представляет собой однозначную аналитическую функцию, то применима формула Ньютона–Лейбница. При этом в точке $z = 1$ $\rho = 1$, $\varphi = 0$, а в точке $z = 27$ $\rho = 27$, а угол φ при движении точки интегрирования от $z = 1$ до $z = 27$ по пути, определяемому разрезом, приобретает значение 8π. Таким образом,

$$\sqrt[3]{27} = 3e^{i\frac{8\pi}{3}} \cdot e^{i\frac{2\pi}{3}} = 3e^{i\frac{4\pi}{3}} = -3\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$\int_1^{27}\frac{dz}{\sqrt[3]{z}}=\frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{z}\right)^2\Big|_1^{27}=\frac{3}{2}\left[(-3)^2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right]=$$

$$=\frac{3}{2}\left[9-1+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right]=12+i\frac{15\sqrt{3}}{2}.$$

3) По определению корня $\sqrt[4]{z}=\sqrt[4]{\rho}\cdot e^{i\frac{\varphi+2\pi k}{4}}$ $(k=0,1,2,3)$. Ветвь выделяется условием $\sqrt[4]{-\frac{1}{16}}=\frac{\sqrt{2}}{4}(1-i)$. В точке $z=-\frac{1}{16}$

$$\rho=|z|=\frac{1}{16};\ \varphi=\pi,$$

$$\sqrt[4]{-\frac{1}{16}}=\frac{1}{2}\cdot e^{i\frac{\pi+2\pi k}{4}}=\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\cdot e^{i\frac{\pi k}{2}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\Rightarrow k=3,$$

так как при $k=3$

$$\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\cdot e^{\frac{3i\pi}{2}}=-\frac{1}{2}i\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}(1-i).$$

Таким образом, интегрируется ветвь $\sqrt[4]{z}=\sqrt[4]{\rho}\cdot e^{i\frac{\varphi}{4}}\cdot e^{\frac{3\pi}{2}i}$. Чтобы попасть из точки $z=\frac{1}{16}$, где $|z|=\frac{1}{16}$; $\varphi=0$; $\sqrt[4]{z}=-\frac{1}{2}i$, в точку $z=2^{20}$, угол φ должен совершить три оборота вокруг начала координат против часовой стрелки, т.е. будет $\varphi=6\pi$, и в этой точке

$$\sqrt[4]{2^{20}}=-32\cdot i\cdot e^{i\frac{6\pi}{4}}=-32ie^{\frac{3\pi}{2}i}=-32i\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)=-32.$$

Таким образом, по формуле Ньютона–Лейбница получаем

$$\int_{\frac{1}{16}}^{2^{20}}\frac{dz}{\sqrt[4]{z}}=\frac{4}{3}z^{\frac{3}{4}}\Bigg|_{\frac{1}{16}}^{2^{20}}=\frac{4}{3}\left[\left(\sqrt[4]{2^{20}}\right)^3-\left(\sqrt[4]{\frac{1}{16}}\right)^3\right]=\frac{4}{3}\cdot\left[(-32)^3-\left(-\frac{i}{2}\right)^3\right]=$$

$$= \frac{4}{3}\left[-32768 - \frac{i}{8}\right] = -\frac{131072}{3} - \frac{i}{6}.$$

Интегральная формула Коши.

Пример 6.11 ([3], № 3.27). Вычислить интеграл $\int\limits_C \frac{dz}{z^2+9}$, если:

1) точка $3i$ лежит внутри контура C, а точка $-3i$ – вне его;
2) точка $-3i$ лежит внутри контура C, а точка $3i$ – вне его;
3) точки $\pm 3i$ лежат внутри контура C.

Решение.

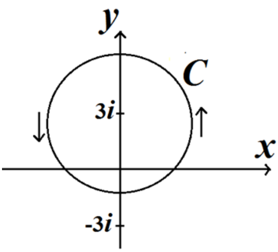


Рис. 6.3

1) Согласно интегральной формуле Коши (рис. 6.3):

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\cdot\oint\limits_C \frac{f(z)dz}{z-z_0},$$

где контур C охватывает точку z_0, а функция $f(z)$ – аналитическая внутри этого контура.

В интеграле $\oint\limits_C \frac{dz}{(z+3i)(z-3i)}$ точкой z_0 является точка $3i$, а $f(z) = \frac{1}{z+3i}$. Поэтому

$$\oint\limits_C \frac{dz}{(z+3i)(z-3i)} = 2\pi i f(3i) = 2\pi i\cdot\frac{1}{6i} = \frac{\pi}{3}.$$

2) В качестве точки z_0 теперь надо брать $-3i$, а $f(z) = \frac{1}{z-3i}$ (рис. 6.4). Тогда

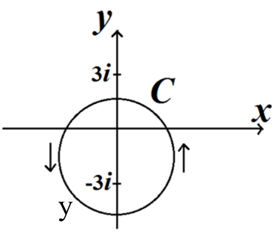


Рис. 6.4

$$\oint\limits_C \frac{dz}{(z-3i)(z+3i)} = 2\pi i\cdot f(-3i) =$$

$$= 2\pi i\cdot\frac{1}{-6i} = -\frac{\pi}{3}.$$

3) Исключим из области внутри контура C точки $3i$ и $-3i$, окружив их соответствен-

но контурами C_1 и C_2 (рис. 6.5). Тогда по теореме Коши для многосвязной области, внутри контура, состоящего из внешнего контура C, проходимого в положительном направлении (т.е. против часовой стрелки), и двух контуров C_1^- и C_2^-, проходимых в отрицательном направлении, функция $\dfrac{1}{z^2+9}$ аналитична, и интеграл по этому составному контуру равен 0, т.е

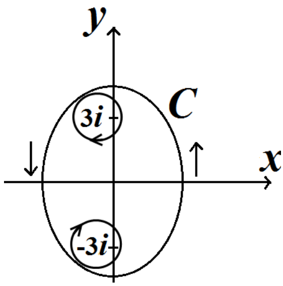


Рис. 6.5

$$\int_C \frac{\mathrm{d}z}{z^2+9} + \int_{C_1^-} \frac{\mathrm{d}z}{z^2+9} + \int_{C_2^-} \frac{\mathrm{d}z}{z^2+9} = 0 \Rightarrow$$

$$\int_C \frac{\mathrm{d}z}{z^2+9} = \int_{C_1} \frac{\mathrm{d}z}{z^2+9} + \int_{C_2} \frac{\mathrm{d}z}{z^2+9} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = 0.$$

Пример 6.12 ([3], № 3.28). Вычислить все возможные значения интеграла $\int_C \dfrac{dz}{z(z^2-1)}$ при различных положениях контура C. Предполагается, что контур C не проходит ни через одну из точек 0,1 и –1.

Решение. Если контур охватывает точку 0, то

$$\int_C \frac{dz}{z(z^2-1)} = 2\pi i \cdot f(0),$$

где $f(z) = \dfrac{1}{z^2-1}$ и $I = \displaystyle\int_C \frac{dz}{z(z^2-1)} = -2\pi i$

Если контур охватывает только точку –1, то $I = 2\pi i f(-1)$, где $f(z) = \dfrac{1}{z(z-1)}$ и $I = \pi i$. Если контур охватывает только точку 1, то $I = 2\pi i f(1)$, где $f(z) = \dfrac{1}{z(z+1)}$ и $I = \pi i$. Если контур охватывает только две из этих точек, то как показано в предыдущем примере, интеграл равен сумме соответствующих интегралов, и поэтому I может принимать значения $2\pi i$ и $-\pi i$. Если контур охватывает все 3 точки, то, соответственно, интеграл равен 0. Также он равен 0, если контур не охватывает ни одной из данных точек. Таким образом, все возможные значения интеграла сводятся к числам: $-2\pi i$, $-\pi i$, 0, πi, $2\pi i$.

Пример 6.13 ([3], № 3.30). Вычислить интеграл $\int\limits_{|z-a|=a} \frac{zdz}{z^4-1}$, $a>1$.

Решение. Знаменатель можно разложить на множители: $z^4-1=(z-1)(z+1)(z-i)(z+i)$. Контур – окружность радиуса $a>1$ с центром в точке a (рис. 6.6).

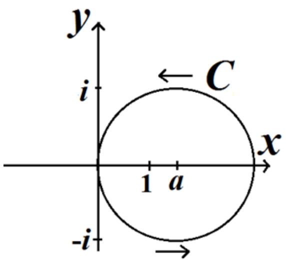


Рис. 6.6

Таким образом, внутри контура находится только точка $z = 1$. По интегральной формуле Коши

$$\int\limits_{|z-a|=a} \frac{zdz}{z^4-1} = 2\pi i f(1),$$

где $f(z)=\dfrac{z}{(z^2+1)(z+1)}\Bigg|_{z=1}=\dfrac{1}{4}\Rightarrow$ интеграл равен $\dfrac{\pi i}{2}$.

Пример 6.14 ([3], № 3.32). Вычислить интеграл $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{ze^z dz}{(z-a)^3}$, если точка a лежит внутри контура C.

Решение. Так как n-я производная интеграла Коши вычисляется по формуле

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}},$$

то, воспользовавшись этой формулой при $n = 2$, получим

$$\frac{2!}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(z)dz}{(z-a)^3}=f''(a),$$

где $f(z)=ze^z$. Вычислим эту производную:

$$f'(z) = ze^z + e^z;\ \ f''(z) = ze^z + 2e^z = e^z(z+2).$$

Искомый интеграл равен $e^a\left(1+\dfrac{a}{2}\right)$.

Пример 6.15 ([3], № 3.34). Функция $f(z)$ аналитическая в области, ограниченной простым замкнутым контуром *C*, содержащим внутри себя начало координат. Доказать, что при любом выборе ветви $\operatorname{Ln} z$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C f'(z)\operatorname{Ln} z dz = f(z_0) - f(0),$$

где z_0 – начальная точка интегрирования.

Решение. Выбрав в качестве начала интегрирования произвольную точку $z_0 \neq 0$ и интегрируя какую-либо ветвь логарифма: $\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i\varphi + i2\pi k$, воспользуемся формулой Ньютона–Лейбница. Учтем при этом, что при обходе начала координат и возвращении в исходную точку z_0 $\ln|z|$ возвратится к первоначальному значению, а $\arg \operatorname{Ln} z = \varphi$ приобретет приращение 2π, не изменит своего значения аналитическая функция $f(z)$. Первообразная

$$\int f'(z)\operatorname{Ln} z dz = f(z)\operatorname{Ln} z - \int \frac{f(z)}{z}dz.$$

Искомый интеграл равен

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C f'(z)\operatorname{Ln} z dz = f(z_0)[\ln|z_0| + i(\varphi_0 + 2\pi) + i2\pi k - \ln|z_0| -$$

$$-i\varphi_0 - i2\pi k] + \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z}dz = f(z_0) - f(0),$$

так как $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C \frac{f(z)dz}{z} = f(0)$ по формуле Коши.

Пример 6.16. Вычислить интегралы по замкнутому контуру, пользуясь интегральной формулой Коши:

1) $\displaystyle\int_C \frac{\sin\frac{\pi z}{4}dz}{z^2-1}$, где $C: x^2 + y^2 - 2x = 0;$

2) $\int\limits_C \frac{e^{\pi z}dz}{(z^2+1)^2}$, где $C: 4x^2+y^2-2y=0$.

Решение.

1) Запишем уравнение контура C в виде $(x-1)^2+y^2=1$ - окружность с центром в точке с координатами $x = 1$, $y = 0$ и радиусом 1. Интеграл можно представить в виде

$$\int\limits_C \frac{\sin\frac{\pi z}{4}dz}{(z+1)(z-1)} = \int\limits_C \frac{f(z)dz}{z-1},$$

где точка $z_0=1$ находится внутри контура, а $f(z)=\frac{\sin\frac{\pi z}{4}}{z+1}$ аналитическая внутри контура функция.

По формуле Коши:

$$\int\limits_C \frac{f(z)dz}{z-1} = 2\pi i f(1) = 2\pi i\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{\pi i\sqrt{2}}{2}.$$

2) Уравнение контура C запишем в виде $4x^2+(y-1)^2=1$ – эллипс, внутри которого находится точка $z_0=i$. Представим интеграл в виде

$$\int\limits_C \frac{e^{\pi z}dz}{(z+i)^2(z-i)^2} = \int\limits_C \frac{f(z)dz}{(z-i)^2},$$

где $f(z)=\frac{e^{\pi z}}{(z+i)^2}$.

По формуле Коши (один раз продифференцированной)

$$\int\limits_C \frac{f(z)dz}{(z-i)^2} = 2\pi i f'(i),$$

$$f'(z)=\frac{(z+i)^2\pi e^{\pi z}-e^{\pi z}2(z+i)}{(z+i)^4}=\frac{e^{\pi z}(\pi(z+i)-2)}{(z+i)^3};$$

$$f'(i)=\frac{e^{\pi i}(2i\pi-2)}{(2i)^3}=\frac{1-i\pi}{-4i}=\frac{\pi}{4}+\frac{i}{4}.$$

Таким образом, искомый интеграл равен $\frac{\pi}{2}(i\pi - 1)$.

Рекомендуемый перечень задач для решения в аудитории:
6.1 ([3], № 3.2 (1)); 6.2 ([3], № 3.3 (вычислить интеграл I_1));
6.3 ([3], № 3.4 (1, 2)); 6.7 (1); 6.8 ([3], № 3.8 (1, 4));
6.9 ([3], № 3.9 (1)); 6.10 (1); 6.11 ([3], № 3.27); 6.13 ([3], № 3.30);
6.14 ([3], № 3.32); 6.16 (1).
Резерв:
6.4 ([3], № 3.5); 6.5 ([3], № 3.6); 6.6 ([3], № 3.7); 6.10 (3);
6.15 ([3], № 3.34).
Для самостоятельной работы дома:
6.1 ([3], № 3.2 (3)); 6.2 ([3], № 3.3 (вычислить интеграл I_2));
6.3 ([3], № 3.4 (3, 4)); 6.7 (2); 6.8 ([3], № 3.8 (2, 5));
6.9 ([3], № 3.9 (2, 3, 4)); 6.10 (2); [3], № 3.33; 6.16 (2).

7. ЧИСЛОВЫЕ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ. РЯД ТЕЙЛОРА

Ряд

$$a_1 + a_2 + ... + a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n ,$$

где $a_k = \alpha_k + i\beta_k$ – комплексные числа, называется комплексным числовым рядом. Ряд сходится тогда и только тогда, когда сходятся ряды из действительных и, соответственно, мнимых частей членов этого ряда, то есть действительные числовые ряды $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k$, что определяет сохранение основных свойств действительных числовых рядов применительно к рядам комплексным. Суммой ряда называется $\lim_{n\to\infty} S_n$, где частичная сумма ряда $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Если ряд из модулей $\sum_{k=1}^{\infty} | a_k |$ сходится, то сходится и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Обратное, вообще говоря, неверно. В случае сходимости ряда из модулей $\sum_{k=1}^{\infty} | a_k |$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ называется абсолютно сходящимся.

Абсолютная сходимость ряда определяется по признакам Даламбера и Коши. Соответственно, если $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = q < 1$, то ряд абсолютно сходится, если $q > 1$ – ряд расходится (признак Даламбера). Если $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{| a_n |} = q < 1$, то ряд сходится, если $q > 1$ – ряд расходится (признак Коши).

Необходимое условие сходимости ряда: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Если ряд из функций $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ сходится в каждой точке области, то он называется сходящимся в этой области.

Функциональный ряд называется равномерно сходящимся в некоторой области его сходимости, если $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N(\varepsilon) : \forall n > N(\varepsilon)$ и для всех z из данной области выполняется неравенство $| S(z) - S_n(z) | < \varepsilon$, где $S(z)$ – сумма ряда.

Достаточный признак равномерной сходимости функционального ряда (признак Вейерштрасса): если для всех $n > n_0$ $|u_n(z)| \le a_n$ для всех z из некоторой области, где $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – сходящийся числовой ряд, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ сходится в этой области равномерно. Имеют место и другие свойства равномерно сходящихся рядов, известные из теории рядов с действительными функциями действительной переменной.

Степенным рядом называется ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$, где z_0 – некоторое фиксированное комплексное число, z – комплексная переменная, c_n – комплексные числа (коэффициенты степенного ряда).

Степенной ряд сходится в своем круге сходимости $|z - z_0| < R$, где R – радиус сходимости степенного ряда, который вычисляется по формуле Коши–Адамара:

$$R = \frac{1}{\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}}.$$

Степенной ряд в любом круге радиуса, меньшего радиуса его круга сходимости, сходится абсолютно и равномерно к аналитической функции. Обратно: аналитическая в некотором круге $|z - z_0| < R$ функция $f(z)$ единственным образом представляется в этом круге степенным рядом

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n,$$

называемым рядом Тейлора этой функции.

Приведем некоторые степенные ряды, служащие определением соответствующих функций – их сумм как аналитических продолжений сумм соответствующих действительных рядов с действительной оси на всю комплексную область:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z; \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin z; \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{2n!} = \cos z,$$

(радиусы сходимости этих рядов $R = \infty$);

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha+n-1)}{n!}z^n=(1+z)^{\alpha}\quad (R=1);$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}z^n=\ln(z+1)\qquad (R=1).$$

Особо выделим частный случай

$$\sum_{n=0}^{\infty}z^n=\frac{1}{1-z}\quad (R=1).$$

Пример 7.1 ([3], № 1.95). Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(2i)^n}$.

Решение. Выясним наличие абсолютной сходимости, например, по признаку Даламбера: $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)2^n}{2^{n+1}n}=\frac{1}{2}<1$. Ряд сходится и притом абсолютно.

Пример 7.2 ([3], № 1.96). Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(in)^n}$.

Решение. По признаку Даламбера

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!n^n}{(n+1)^{n+1}n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{1}{e},$$

так как $e\approx 2,7$, то $\frac{1}{e}<1$. Ряд сходится абсолютно.

Пример 7.3 ([3], № 1.97). Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}e^{in}$.

Решение. Так как $e^{in}=\cos n+i\sin n$, а ряды $\sum_{n=1}^{\infty}\cos n$ и $\sum_{n=1}^{\infty}\sin n$ расходятся, то расходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}e^{in}$.

Пример 7.4 ([3], № 1.100). Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{in}}{n^2}$.

Решение. Так как $\left|\dfrac{e^{in}}{n^2}\right| = \dfrac{1}{n^2}$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ сходится, то исходный ряд сходится абсолютно.

Пример 7.5 ([3], № 1.103). Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos in}{2^n}$.

Решение.

$$\cos in = \mathrm{ch} n = \frac{e^n + e^{-n}}{2}; \ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos in}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{e^n}{2^{n+1}} + \frac{e^{-n}}{2^{n+1}}\right).$$

Ряд представляет собой сумму двух рядов. Первый расходится, так как не выполняется необходимое условие сходимости

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{e}{2}\right)^n \neq 0 \ \left(\frac{e}{2} > 1\right);$$

второй сходится по признаку Коши

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{e^{-n}}{2^{n+1}}} = \frac{e^{-1}}{2} < 1.$$

Поэтому ряд из суммы этих двух рядов расходится.

Пример 7.6 ([3], № 1.104). Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n\sin in}{3^n}$

Решение.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sin in}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{in\mathrm{sh} n}{3^n} = i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(e^n - e^{-n})}{2\cdot 3^n}.$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{ne^n}{3^n}$ сходится по признаку Коши:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}\left(\frac{e}{3}\right) = \frac{e}{3} < 1 \ (\text{так как } \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1).$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{ne^{-n}}{3^n}$ также сходится, так как

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}\,\frac{e^{-1}}{3} = \frac{e^{-1}}{3} < 1.$$

Таким образом, исходный ряд сходится абсолютно.

В следующих примерах определить радиусы сходимости степенных рядов.

Пример 7.7 ([3], № 3.40).

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}.$$

Решение. По формуле Коши–Адамара

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Пример 7.8 ([3], № 3.41).

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Решение. $R = \lim\limits_{n\to\infty} |\frac{c_n}{c_n + 1}| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim\limits_{n\to\infty}(n+1) = \infty.$

Пример 7.9 ([3], № 3.42).

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^n z^n.$$

Решение. $R = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^n}} = 0.$

Пример 7.10 ([3], № 3.44).

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n.$$

Решение.

$$R = \lim_{n\to\infty} |\frac{c_n}{c_n + 1}| = \lim_{n\to\infty} \frac{n!(n+1)^{n+1}}{n^n (n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Пример 7.11 ([3], № 3.45).

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^{n!} = 1 + z + z^2 + z^6 + .. .$$

Решение. Воспользуемся более общей формулой Коши–Адамара $R = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}$ (верхний предел). Для получения верхнего предела надо взять ту подпоследовательность, у которой предел существует и наибольший. В данном случае, надо брать подпоследовательность с номерами 0,1,2,3, … $n!$… , все члены которой равны 1 и, следовательно,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}=1\,.$$

Аналогично решаются [3] № 3.46, 3.47, 3.48.

Пример 7.12 ([3], № 3.49).

$$\sum_{n=1}^{\infty}\cos in\cdot z^n$$

Решение. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cos in\cdot z^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathrm{ch}n\cdot z^n=\frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(e^n+e^{-n})z^n$.

Сумма двух рядов. Радиус сходимости первого ряда $R_1=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{e^n}}=\frac{1}{e}$, радиус сходимости второго $R_2=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{e^{-n}}}=e$. Пересечением этих множеств будет круг с меньшим радиусом сходимости, то есть $R=\frac{1}{e}$.

Данные функции разложить в ряд Тейлора в окрестности $z_0=0$ и найти радиус сходимости.

Пример 7.13 ([3], № 3.67).

$$f(z)=\mathrm{ch}\,z\,.$$

Решение. $\mathrm{ch}z=\frac{e^z+e^{-z}}{2}$. Пользуясь разложением экспоненты $e^z=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$, получим

$$\mathrm{ch}\,z=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-z)^n}{n!}\right)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(1+(-1)^n)z^n\,.$$

Остаются только слагаемые с четными номерами $n=2k$:

$$\mathrm{ch}z=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k)!}2z^{2k}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2k}}{2k!}.$$

Далее находим радиус сходимости

$$R=\lim_{k\to\infty}|\frac{c_k}{c_k+1}|=\lim_{k\to\infty}\frac{(2k+2)!}{2k!}=\lim_{k\to\infty}(2k+2)=\infty\,.$$

Пример 7.14 ([3], № 3.69). Разложить $f(z)=\sin^2 z$.

Решение. $\sin^2 z=\frac{1}{2}(1-\cos 2z)$. Используем разложение косинуса:

$$\cos z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{2n!}\Rightarrow \cos 2z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2z)^{2n}}{(2n)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n} z^{2n}}{(2n)!}.$$

Искомое разложение

$$\sin^2 z=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n} z^{2n}}{(2n)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^{2n-1}z^{2n}}{(2n)!};\ \ R=\infty.$$

Пример 7.15 ([3], № 3.71). Разложить $f(z)=(a+z)^{\alpha}\,(a^{\alpha}=e^{\alpha\ln a})$.

Решение. $(a+z)^{\alpha}=a^{\alpha}\left(1+\frac{z}{a}\right)^{\alpha}$. Воспользуемся разложением

$$(1+z)^{\alpha}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)..(\alpha-n+1)}{n!}\cdot z^n\quad (R=1),$$

$$a^{\alpha}(1+\frac{z}{a})^{\alpha}=e^{\alpha\ln a}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)..(\alpha-n+1)}{n!}\left(\frac{z}{a}\right)^n=a^{\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}\left(\frac{z}{a}\right)^n,$$

где $\binom{\alpha}{n}=\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!};\ \ R=|a|$.

Пример 7.16 ([3], № 3.72). Разложить

$$f(z)=\sqrt{z+i},\ \ (\sqrt{i}=\frac{1+i}{\sqrt{2}}).$$

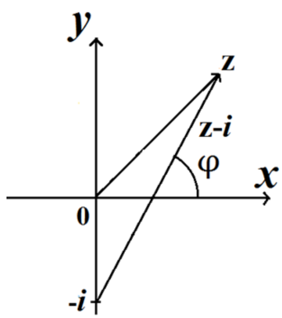


Рис. 7.1

Решение. В данной двузначной функции выделяется однозначная аналитическая ветвь условием $f(0)=\sqrt{i}=\frac{1+i}{\sqrt{2}}$.

Обозначив $z+i=re^{i\varphi}$, получим

$$\sqrt{z+i}=\sqrt{r}e^{\frac{i\varphi+2\pi ki}{2}}\quad (k=0,1).$$

В точке $z=0$ (рис. 7.1) $r=1$; $\varphi=\frac{\pi}{2}$,

$$f(0)=e^{i\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{2}}=e^{i\frac{\pi}{4}}e^{i\pi k}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)e^{i\pi k}=\frac{1+i}{\sqrt{2}}\Rightarrow k=0\,.$$

Следовательно, разлагается ветвь: $\sqrt{z+i}=\sqrt{r}e^{i\frac{\varphi}{2}}$, которая в точке $z = 0$ как раз принимает значение $\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$.

Пользуясь разложением

$$(1+z)^{\alpha}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}z^{n}\,,$$

полагая

$$\sqrt{z+i}=\sqrt{i}\sqrt{1+\frac{z}{i}}=\sqrt{i}\left(1+\frac{z}{i}\right)^{\frac{1}{2}},$$

получим

$$\sqrt{z+i}=\frac{1+i}{\sqrt{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)..\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}\left(\frac{z}{i}\right)^{n}=$$

$$=\frac{1+i}{\sqrt{2}}(1+\frac{1}{2}\frac{z}{i}+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdot ...\cdot(2n-3)}{2\cdot 4\cdot ...\cdot 2n}\left(\frac{z}{i}\right)^{n};\ R=1.$$

Пример 7.17 ([3], № 3.74). Разложить $f(z)=\dfrac{z}{z^{2}-4z+13}$.

Решение. Разложим знаменатель на множители

$$z^{2}-4z+13=(z-2-3i)(z-2+3i)\,,$$

а $f(z)$ – на элементарные дроби:

$$\frac{z}{z^{2}-4z+13}=\frac{A}{z-2-3i}+\frac{B}{z-2+3i}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow z=A(z-2+3i)+B(z-2+3i)\,.$$

Полагая в этом тождестве последовательно $z=2+3i$, затем $z=2-3i$, получим:

$$A=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}i\,,\ B=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}i\ \Rightarrow\frac{z}{z^{2}-4z+13}=\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}i}{z-2-3i}+\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}i}{z-2+3i}=$$

$$=\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}i}{-(2+3i)\left(1-\frac{z}{2+3i}\right)}+\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}i}{-(2-3i)\left(1-\frac{z}{2-3i}\right)}=$$

$$=\frac{i}{6}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2+3i}}-\frac{i}{6}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2-3i}}.$$

Далее воспользуемся разложением

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n \quad (R=1).$$

Отсюда

$$\frac{1}{1-\frac{z}{2+3i}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(2+3i)^n} \quad \text{и} \quad \frac{1}{1-\frac{z}{2-3i}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(2-3i)^n}.$$

Получаем

$$\frac{z}{z^2-4z+13}=\frac{i}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z^n}{(2+3i)^n}-\frac{z^n}{(2-3i)^n}\right)=$$

$$=\frac{i}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2-3i)^n-(2+3i)^n}{13^n}z^n, \quad R=\sqrt{13}.$$

Пример 7.18 ([3], № 3.75). Разложить $f(z)=\frac{z^2}{(z+1)^2}$.

Решение. Представим функцию $f(z)$ в виде:

$$\frac{z^2}{(z+1)^2}=\frac{(z+1-1)^2}{(z+1)^2}=\frac{(z+1)^2-2(z+1)+1}{(z+1)^2}=1-\frac{2}{z+1}+\frac{1}{(z+1)^2}=$$

$$=1-2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n-\frac{d}{dz}\cdot\frac{1}{z+1}=1-2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n-\frac{d}{dz}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n\right)=$$

$$=1-2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n nz^{n-1}=1-2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}(n+1)z^n=$$

$$=-2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n z^n+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(n+1)z^n=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n(n-1)z^n, \quad R=1.$$

Пример 7.19 ([3], № 3.83). Разложить функцию $f(z)=\dfrac{z}{z^2-2z+5}$ по степеням $(z-1)$ и найти радиус сходимости.

Решение. Преобразуем данную функцию:

$$f(z)=\frac{z}{z^2-2z+5}=\frac{z-1+1}{(z-1)^2+4}=\frac{z-1}{(z-1)^2+4}+\frac{1}{(z-1)^2+4}=$$

$$=(z-1)\frac{1}{(z-1)^2+4}+\frac{1}{(z-1)^2+4};$$

$$\frac{1}{(z-1)^2+4}=\frac{1}{4\left(1+\dfrac{(z-1)^2}{4}\right)}.$$

Для этого последнего выражения используем разложение

$$\frac{1}{1+z}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n \quad \text{или} \quad \frac{1}{1+\dfrac{(z-1)^2}{4}}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-1)^{2n}}{4^n}.$$

Получим

$$f(z)=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-1)^{2n+1}}{4^n}+\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-1)^{2n}}{4^n}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^{n+1}}[(z-1)^{2n+1}+(z-1)^{2n}],\ R=2.$$

Пример 7.20 ([3], № 3.88). Найти первые пять членов разложения в ряд по степеням z функции $f(z)=e^{z\sin z}$.

Решение. Воспользуемся разложениями $e^z=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^n}{n!}$ и $\sin z=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, тогда

$$e^{z\sin z}=1+z\sin z+\frac{1}{2}(z\sin z)^2+\frac{1}{6}(z\sin z)^3+\ldots=$$

$$=1+z(z-\frac{z^3}{6}+\frac{z^5}{120}-\frac{z^7}{720}+\ldots)+\frac{z^2}{2}(z-\frac{z^3}{6}+\frac{z^5}{120}-\frac{z^7}{720}+\ldots)^2+$$

$$+\frac{z^3}{6}(z-\frac{z^3}{6}+\frac{z^5}{120}-\frac{z^7}{720}+...)^3+\frac{z^4}{24}(z-\frac{z^3}{6}+\frac{z^5}{120}-\frac{z^7}{720}+...)^4+...=$$

$$=1+z^2+(-\frac{1}{6}+\frac{1}{2})z^4+(\frac{1}{120}-\frac{1}{6}+\frac{1}{6})z^6+$$

$$+(-\frac{1}{120}+\frac{1}{72}+\frac{1}{120}-\frac{1}{12}+\frac{1}{24})z^8+...=$$

$$=1+z^2+\frac{1}{3}z^4+\frac{1}{120}z^6-\frac{1}{36}z^8+...$$

Пример 7.21 ([3], № 3.94). Пользуясь умножением рядов разложить в ряд по степени z функцию $f(z)=[\ln(1-z)]^2$.

Решение. Воспользуемся разложением $\ln(1-z)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$ $(R=1)$

:

$$[\ln(1-z)]^2=(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n})^2=$$

$$=(z+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}+\frac{z^4}{4}+\frac{z^5}{5}+...)\cdot(z+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}+\frac{z^4}{4}+\frac{z^5}{5}+...)=$$

$$=z^2+(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})z^3+(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3})z^4+(\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{4})z^5+...=$$

$$=2\cdot\left[\frac{z^2}{2}+(1+\frac{1}{2})\frac{z^3}{3}+(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3})\frac{z^4}{4}+...+(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n-1})\frac{z^n}{n}+...\right].$$

Пример 7.22 ([3], № 3.98). Пользуясь подстановкой ряда в ряд разложить в ряд по степеням z функцию $f(z)=e^{\frac{z}{1-z}}$.

Решение. Воспользуемся разложениями

$$e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!},\qquad \frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n.$$

Тогда

$$e^{\frac{z}{1-z}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(1-z)^n}\cdot\frac{1}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot z^n\left(\frac{1}{1-z}\right)^n=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\sum_{k=0}^{\infty}z^{k+1}\right)^{n}=1+(z+z^{2}+z^{3}+\ldots+z^{k}+\ldots)+$$

$$+\frac{1}{2!}(z+z^{2}+z^{3}+\ldots+z^{k}+\ldots)^{2}+\frac{1}{3!}(z+z^{2}+z^{3}+\ldots+z^{k}+\ldots)^{3}+$$

$$+\frac{1}{4!}(z+z^{2}+z^{3}+\ldots+z^{k}+\ldots)^{4}+\ldots=$$

$$=1+z+z^{2}(1+\frac{1}{2!})+z^{3}(1+\frac{2}{2!}+\frac{1}{3!})+z^{4}(1+\frac{3}{2!}+\frac{3}{3!}+\frac{1}{4!})+\ldots$$

$$\ldots+z^{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}C_{n-1}^{k-1}+\ldots=1+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}C_{n-1}^{k-1}\right]\cdot z^{n}.$$

Другой способ:

$$e^{\frac{z}{1-z}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n}}{n!(1-z)^{n}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n}}{n!}\cdot\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left(\frac{1}{1-z}\right)\frac{1}{(n-1)!}=$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n}}{n!(n-1)!}\cdot\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left(\sum_{k=0}^{\infty}z^{k}\right)=$$

$$=1+\sum_{n=1}^{k+1}\frac{z^{n}}{n!(n-1)!}\cdot\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left(\sum_{k=0}^{\infty}z^{k}\right)=1+\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{k+1}\frac{z^{n}}{n!(n-1)!}\cdot\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}(z^{k})=$$

$$=1+\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{k+1}\frac{z^{n}}{n!(n-1)!}k(k-1)\ldots(k-n+2)z^{k-n+1}=$$

$$=1+\sum_{k=0}^{\infty}z^{k+1}\sum_{n=1}^{k+1}\frac{k(k-1)\ldots(k-n+2)}{n!(n-1)!}=$$

$$=1+\sum_{k=0}^{\infty}z^{k+1}\left(\sum_{n=1}^{k+1}\frac{C_{k}^{n-1}}{n!}\right)=1+\sum_{\substack{k=1\\ \text{замена}\\ k+1\to k}}^{\infty}z^{k}\left(\sum_{n=1}^{k}\frac{C_{k-1}^{n-1}}{n!}\right)=1+\sum_{n=1}^{\infty}z^{n}C_{n},$$

где $C_{n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{C_{n-1}^{k-1}}{k!}$.

Рекомендуемый перечень задач для решения в аудитории:
7.1 ([3], № 1.95); 7.2 ([3], № 1.96); 7.5 ([3], № 1.103),
7.7 ([3], № 3.40); 7.8 ([3], № 3.41); 7.9 ([3], № 3.42);
7.10 ([3], № 3.44); 7.11 ([3], № 3.45); 7.13 ([3], № 3.67);
7.14 ([3], № 3.69); 7.16 ([3], № 3.72); 7.18 ([3], № 3.75);
7.19 ([3], № 3.83).

Резерв:
7.3 ([3], № 1.97); [3], № 3.47, 3.49, 3.71, 3.84, 3.88, 3.94.

Для самостоятельной работы дома:
7.4 ([3], № 1.100); 7.6 ([3], 1.104); [3] № 3.43, 3.46, 3.48, 3.68;
7.17 ([3], № 3.74); [3], № 3.82.

8. РЯД ЛОРАНА

Рядом Лорана называется функциональный ряд вида

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \cdot (z - z_0)^n ,$$

где z – комплексная переменная, z_0 – фиксированное комплексное число, а c_n – комплексные числа, постоянные, называемые коэффициентами ряда. Обратим внимание на отличие ряда Лорана от степенного ряда. Как известно, последний имеет вид $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n \cdot (z - z_0)^n$ и, следовательно, отличается от ряда Лорана отсутствием в нем членов $(z - z_0)^n$ с отрицательными показателями n. Отсюда следует, что степенной ряд является частным случаем ряда Лорана.

Ряд Лорана состоит из главной части $\left(\sum\limits_{n=-\infty}^{n=-1} c_n \cdot (z - z_0)^n \right)$ и правильной части $\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n \cdot (z - z_0)^n \right)$. Так как правильная часть представляет собой степенной ряд, областью сходимости которого, как известно, является круг с центром в точке z_0 (обозначим его радиус сходимости R_1), а главная часть преобразуется заменой $\zeta = \dfrac{1}{z - z_0}$ к степенному ряду $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} c_{-n} \zeta^n$, который сходится в круге сходимости $|\zeta| < l$ или вне круга $|z - z_0| > \dfrac{1}{l} = R_2$, то ряд Лорана сходится в кольце $R_2 < |z - z_0| < R_1$ с центром в точке z_0. В кольце сходимости ряд Лорана сходится к аналитической в этом кольце функции $f(z)$. Имеет место и обратное утверждение: аналитическая в кольце функция единственным образом представляется в нем рядом Лорана:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n ,$$

причем коэффициенты этого представления имеют вид

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma}\frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}}, \tag{8.1}$$

где γ – простой замкнутый контур, целиком лежащий в кольце $R_1 < |z - z_0| < R_2$ и охватывающий точку z_0. Направление обхода – против часовой стрелки. В частности, коэффициент c_{-1} имеет вид

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma} f(z)dz.$$

Если внутренний радиус кольца $R_1 = 0$, то говорят о разложении функции $f(z)$ в ряд Лорана в точке z_0 (или в окрестности точки z_0). Разложение функции в ряд Лорана в окрестности бесконечности $(|z| > R)$ производится, по определению, путем замены $z = \frac{1}{\zeta}$ и разложением функции $f(z) = f\left(\frac{1}{\zeta}\right) \equiv \varphi(\zeta)$ в точке $\zeta = 0.$

Из теоремы Лорана следует, что если функция $f(z)$ аналитична во всей комплексной плоскости, кроме изолированных особых точек $z_1,\ z_2, ..., z_n$ $(|z_1| < |z_2| < ... < |z_n|)$, то она имеет различные разложения в ряд Лорана по степеням z: в окрестности $z_0 = 0$ с радиусом $R = |z_1|$, в кольцах $|z_i| < |z| < |z_{i+1}|$, с центром в $z_0 = 0$ $(i = 1, 2, ..., n-1)$, в окрестности бесконечности $(|z| > |z_n|)$.

Пример 8.1 ([3], № 4.3). Разложить в ряд Лорана по степеням z функцию $f(z) = \dfrac{1}{z(1-z)}$.

Решение. Поскольку функция аналитична всюду, кроме точек $z_1 = 0$ и $z_2 = 1$, то таких разложений будет два: а) в окрестности точки $z = 0$ $(0 < |z| < 1)$; б) в окрестности бесконечности: $(|z| > 1)$.

Чтобы найти коэффициенты c_n этих разложений, мы не будем пользоваться формулой (8.1), а поступим проще. Представим функцию $f(z)$ в виде суммы элементарных дробей

$$\frac{1}{z(1-z)}=\frac{1}{1-z}+\frac{1}{z}.$$

В случае а): первое слагаемое есть функция, аналитическая в окрестности $z=0$, поэтому в этой окрестности она единственным образом разлагается в степенной ряд (ряд Тейлора):

$$f\left(z\right)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\left(z-z_0\right)^n,$$

где коэффициенты ряда Тейлора

$$c_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

В данном случае

$$\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+\ldots+z^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}z^n. \tag{8.2}$$

Таким образом, искомое разложение $f\left(z\right)$ в ряд Лорана приобретает вид

$$\frac{1}{z\left(1-z\right)}=\underbrace{\frac{1}{z}}_{\substack{\text{главная}\\ \text{часть}}}+\underbrace{1+z+z^2+\ldots+z^n+}_{\text{правильная часть}}\ldots$$

Разложение справедливо в области $0<\left|z\right|<1$ (проколотая окрестность точки $z=0)$.

В случае б): разложение в окрестности бесконечности. По определению надо сделать замену $z=\dfrac{1}{\zeta}$:

$$f(z)=\frac{1}{z(1-z)}=\frac{1}{\frac{1}{\zeta}\left(1-\frac{1}{\zeta}\right)}=\frac{\zeta^2}{\zeta-1}=\zeta^2\cdot\frac{1}{1-\zeta}$$

и разлагать полученную функцию по переменной ζ в точке $\zeta_0=0$. А это разложение нам уже известно (8.2):

$$\frac{1}{1-\zeta}=1+\zeta+\zeta^2+\ldots+\zeta^n+\ldots\text{ , т.е. } f\left(\frac{1}{\zeta}\right)=$$

$$= -\zeta^2(1+\zeta+\zeta^2+\ldots+\zeta^n+\ldots) = \sum_{n=2}^{\infty}\zeta^n = \underbrace{-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{z^n}}_{\text{правильная часть}} .$$

Обратим внимание, что для ряда Лорана в бесконечности названия главной и правильной частей меняются местами. Разложение справедливо в области $|\zeta|<1$ или $|z|>1$. Теперь произведем разложение заданной функции в ряд Лорана по степеням $z-1$, т.е. в окрестности точки $z_0=1$:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-1)^n .$$

Для этого опять воспользуемся представлением функции элементарными дробями:

$$f(z) = \frac{1}{z(1-z)} = \frac{1}{z} + \frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z}.$$

Второе слагаемое запишем в виде

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z-1+1} = \frac{1}{1+(z-1)} .$$

Обозначив $z-1=-t$, получим $\frac{1}{z}=\frac{1}{1-t}$. При $z=1$, $t=0$. Следовательно, воспользуемся опять разложением (8.2) функции $\frac{1}{1-t}$ в нуле:

$$\frac{1}{1-t} = 1+t+t^2+\ldots+t^n+\ldots$$

или

$$\frac{1}{z} = 1-\left(z-1\right)+(z-1)^2-(z-1)^3+\ldots+(-1)^n(z-1)^n+\ldots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n.$$

Окончательно, искомое разложение $f(z)$ по степеням $z-1$ имеет вид

$$f(z)=\frac{1}{z(1-z)}=\underbrace{-\frac{1}{z-1}}_{\text{главная часть}}+\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n}_{\text{правильная часть}}.$$

Разложение справедливо в области $0<|z-1|<1$ (кольцо с центром в точке $z_0 = 1$, внутренним радиусом $R_1 = 0$ и внешним радиусом $R_2 = 1$, иначе говоря, проколотая окрестность точки $z_0 = 1$).

Пример 8.2. Найти все разложения в ряд Лорана функции $f(z)=\dfrac{z^2+1}{z(z^2+z-2)}$ по степеням z.

Решение. Так как требуется разложить функцию по степеням z, то искомые разложения должны иметь вид $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n$, т.е. $z_0 = 0$. Это будут разложения в кольцах с центром в точке $z_0 = 0$. Функция $f(z)$ аналитична всюду, кроме точек $z_1 = 0$, $z_2 = 1$, $z_3 = -2$ (так как корни квадратного трехчлена z^2+z-2 по теореме Виета равны 1 и –2, и его можно разложить на множители $z^2+z-2=(z-1)(z+2)$. Поэтому она имеет три кольца аналитичности с центром в точке $z = 0$: а) $0<|z|<1$, б) $1<|z|<2$, в) $|z|>2$.

Разложения в них получим, как и в предыдущем примере, представив вначале $f(z)$ в виде суммы элементарных дробей:

$$f(z)=\frac{z^2+1}{z(z-1)(z+2)}=\frac{A}{z}+\frac{B}{z-1}+\frac{C}{z+2}.$$

Коэффициенты A, B и C найдем, приведя правую часть к общему знаменателю и приравняв числители слева и справа:

$$z^2+1=A(z-1)(z+2)+Bz(z+2)+Cz(z-1).$$

Можно затем приравнять коэффициенты слева и справа при одинаковых степенях z, а можно воспользоваться следующим приемом (он хорошо работает при отсутствии комплексных корней у знаменателя) : положим слева и справа $z = 0$:

$1 = A\cdot(-2) \Rightarrow A = -\frac{1}{2}$; затем положим $z = 1$:

$2 = B\cdot 3 \Rightarrow B = \frac{2}{3}$; и, наконец, $z = -2$:

$5 = C\cdot(-2)\cdot(-3) \Rightarrow C = \frac{5}{6}$; т.е. имеем:

$$f(z) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{z-1} + \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{z+2}\ . \tag{8.3}$$

В случае а): первое слагаемое есть уже готовая степень z. Во втором слагаемом $\frac{1}{1-z}$ представим в виде разложения (8.2) по степеням z, которое действительно в окрестности $z = 0$, т.е.

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \ldots + z^n + \ldots$$

Третье слагаемое представим в виде

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{2\cdot\left(1+\frac{z}{2}\right)}$$

и, положив $\frac{z}{2} = -t$, опять воспользуемся разложением (8.2), т.е.

$$\frac{1}{1+\frac{z}{2}} = \frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + \ldots + t^n + \ldots = 1 - \frac{z}{2} + \left(\frac{z}{2}\right)^2 - \ldots + (-1)^n\cdot\left(\frac{z}{2}\right)^n + \ldots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z}{2}\right)^n .$$

Итак:

$$f(z) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z} - \frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty} z^n + \frac{5}{12}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z}{2}\right)^n =$$

$$= \underbrace{-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z}}_{\text{главная часть}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\left[-\frac{2}{3} + \frac{5}{12}\cdot\frac{(-1)^n}{2^n}\right]\cdot z^n}_{\text{правильная часть}}.$$

Разложение справедливо в области $0<|z|<1$ (т.е. в проколотой окрестности точки $z=0$).

В случае б): в кольце $1<|z|<2$ второе слагаемое представим в виде

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{z-1}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{z\left(1-\frac{1}{z}\right)}.$$

Обозначив $\frac{1}{z}=t$, опять можем применить разложение (8.2) (так как теперь $1<|z|$ и, следовательно, $|t|<1$):

$$\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=\frac{1}{1-t}=1+t+t^2+\ldots+t^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}t^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n}.$$

Следовательно, $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{z-1}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n}=\frac{2}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}$.

Третье слагаемое в (8.3) представляем так же, как в случае а), т.е. $|z|<2$. Поэтому

$$\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{z+2}=\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{z}{2}}=\frac{5}{12}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z}{2}\right)^n.$$

Искомое разложение теперь имеет вид:

$$f(z)=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z}+\frac{2}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}+\frac{5}{12}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\left(\frac{z}{2}\right)^n=$$

$$=\underbrace{\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{z}+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\ldots+\frac{1}{z^n}+\ldots\right)}_{\text{главная часть}}+\underbrace{\frac{5}{12}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\left(\frac{z}{2}\right)^n}_{\text{правильная часть}}.$$

В случае в) : $|z|>2$ (в окрестности бесконечно удаленной точки). Для того чтобы воспользоваться разложением (8.2), теперь и во втором, и в третьем слагаемых представления (8.3) надо в знаменателе за скобку вынести множитель *z*, т.е.

$$\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z\left(1-\frac{1}{z}\right)}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n},$$

$$\frac{1}{z+2}=\frac{1}{z\left(1+\frac{2}{z}\right)}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1+\frac{2}{z}}=\frac{1}{z}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2}{z}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2^n}{z^{n+1}}.$$

Искомое разложение в этом случае имеет вид:

$$f(z)=\frac{z^2+1}{z(z^2+z-2)}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z}+\frac{2}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}+\frac{5}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2^n}{z^{n+1}}=$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z}+\frac{2}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}+\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{z}+\frac{5}{6}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot 2^{n-1}}{z^n}=$$

$$=\frac{1}{z}+\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{2}{3}+\frac{5}{6}\cdot(-1)^{n-1}\cdot 2^{n-1}\right]\cdot\frac{1}{z^n}.$$

Пример 8.3 ([3], № 4.4). Функцию $f(z)=\frac{1}{(z-a)(z-b)}$ $\left(0<|a|<|b|\right)$ разложить в ряд Лорана в окрестности точек $z=0$, $z=a$, $z=\infty$ и в кольце $|a|<|z|<|b|$.

Решение. Представим функцию в виде суммы элементарных дробей:

$$\frac{1}{(z-a)(z-b)}=\frac{1}{(a-b)}\left(\frac{1}{z-a}-\frac{1}{z-b}\right).$$

Далее разложение производится как в предыдущих примерах.

Пример 8.4 ([3], № 4.1). Функцию $f(z)=\frac{1}{z-2}$ разложить в ряд Лорана в окрестности точек $z=0$ и $z=\infty$.

Решение. В окрестности нуля функция аналитична, поэтому единственным образом разлагается в степенной ряд (ряд Тейлора), что можно сделать, опять используя формулу (8.2):

$$\frac{1}{z-2}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}}=-\frac{1}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n.$$

Разложение справедливо при $\left|\frac{z}{2}\right| < 1$ или $|z| < 2.$

Поскольку разложение в ряд Лорана тоже единственно, то данное разложение будет также и лорановским в области $|z| < 2.$ (Ряд Тейлора и ряд Лорана совпадают.)

Разложение в точке $z = \infty.$ Введем $\zeta = \frac{1}{z}$:

$$f(z) = \frac{1}{z-2} = \frac{1}{\frac{1}{\zeta} - 2} = \frac{\zeta}{1-2\zeta}.$$

И эту функцию надо разложить по ζ в нуле. Обозначив $2\zeta = t$, опять используем представление (8.2):

$$\frac{1}{1-2\zeta} = \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} (2\zeta)^n$$

Отсюда

$$\frac{\zeta}{1\text{-}2\zeta} = \zeta \cdot \frac{1}{1\text{-}2\zeta} = \zeta \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (2\zeta)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \zeta^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^{n+1}}$$

Разложение справедливо в области $|2\zeta| < 1$ или $|z| > 2.$

Пример 8.5. Для функций e^z, $\sin z$, $\cos z$ получить разложение в ряд Лорана в окрестности $z = \infty.$

Решение. Так как эти функции аналитичны во всех конечных точках комплексной плоскости, то лорановское разложение их в любой точке будет совпадать с тейлоровским разложением. Поэтому напишем известные разложения этих функций в ряд Тейлора в точке $z_0 = 0$:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}; \ \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}; \ \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}.$$

Разложения эти справедливы во всей комплексной плоскости. Поэтому в силу единственности разложения в ряд Лорана это же будут и разложения этих функций в ряд Лорана в бесконечности.

Пример 8.6. Разложить функцию $e^{\frac{1}{z}}$ в ряд Лорана в нуле.

Решение. Разложим вначале эту функцию в ряд Лорана в точке $z=\infty$. Для этого введем $\zeta=\frac{1}{z}$ и разложим функцию $e^{\frac{1}{z}}=e^{\zeta}$ по ζ в нуле (см. пример 8.5):

$$e^{\frac{1}{z}}=e^{\zeta}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\zeta^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!z^n}\ .$$

А поскольку между нулем и бесконечностью данная функция всюду аналитична, т.е. окрестности аналитичности в нуле и в бесконечности совпадают, то данное разложение будет одновременно и разложением в ряд Лорана в нуле. Оно справедливо в области $0<|z|<\infty$. Аналогично получаются разложения в нуле функций $\sin\frac{1}{z}$ и $\cos\frac{1}{z}$.

Пример 8.7 ([3], № 4.6). Функцию $f(z)=\frac{1}{(z^2+1)^2}$ разложить в ряд Лорана в окрестности точек $z=i$ и $z=\infty$.

Решение. Разложение в окрестности точки i должно, по определению, иметь вид

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n(z-i)^n.$$

Попробуем опять путем предварительных преобразований свести задачу к использованию разложения (8.2), которое, напомним, имеет вид

$$\frac{1}{1-t}=\sum_{n=0}^{\infty}t^n$$

и справедливо при $|t|<1$, из которого легко получается разложение функции $\frac{1}{(1-t)^2}$ Действительно, так как при $|t|<1$ лорановское разложение (8.2) совпадает с разложением тейлоровским, а последнее можно дифференцировать почленно (при этом область сходимости остается той же), то

$$\frac{1}{(1-t)^2}=\left(\frac{1}{1-t}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}nt^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)t^n\ . \qquad (8.4)$$

Воспользовавшись этим представлением, запишем $\frac{1}{(z+1)^2}$ в виде

$$\frac{1}{(z+i)^2}=-\left(\frac{1}{z+i}\right)',$$

$$\frac{1}{z-i+2i}=\frac{1}{2i}\cdot\frac{1}{1+\frac{z-i}{2i}}=\frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-i)^n}{(2i)^n}$$

по формуле (8.2). Следовательно,

$$\frac{1}{(z+i)^2}=-\left(\frac{1}{z+i}\right)'=-\frac{1}{2i}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-i)^n}{(2i)^n}\right)'=$$

$$=-\frac{1}{2i}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n\cdot(z-i)^{n-1}}{2^n\cdot i^n}=-\frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(n+1)(z-i)^n}{(2i)^{n+1}}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)(z-i)^n}{(2i)^{n+2}}.$$

Разложение справедливо при $\left|\frac{z-i}{2i}\right|<1,$ т.е. при $|z-i|<2.$

Далее:

$$f(z)=\frac{1}{\left(z^2+1\right)^2}=\frac{1}{(z-i)^2(z+i)^2}=\frac{1}{(z-i)^2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)(z-i)^n}{(2i)^{n+2}}$$

или, если выделить отдельно два первых слагаемых (при n = 0 и n = 1):

$$f(z)=-\frac{1}{4(z-i)^2}-\frac{i}{4(z-i)}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)(z-i)^{n-2}}{(2i)^{n+2}},$$

или, переобозначив под знаком суммы $n-2\to n$:

$$f(z)=-\frac{1}{4(z-i)^2}-\frac{i}{4(z-i)}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(n+3)(z-i)^n}{2^{n+1}\cdot i^n}$$

$(0<|z-i|<2)$.

Разложение в точке $z=\infty$. Как требует определение, вводим переменную

$$\zeta=\frac{1}{z}:\quad f(z)=\frac{1}{(z^2+1)^2}=\frac{1}{\left(\frac{1}{\zeta^2}+1\right)^2}=\frac{\zeta^4}{(1+\zeta^2)^2}=\varphi(\zeta)$$

и функцию $\varphi(\zeta)$ разлагаем в точке $\zeta=0$. Обозначив $\zeta^2=-t$ и воспользовавшись разложением (8.4), получим:

$$\frac{1}{(1+\zeta^2)^2}=\frac{1}{(1-t)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)t^n=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(-1)^n\zeta^{2n}.$$

Следовательно,

$$\varphi(\zeta)=\frac{\zeta^4}{(1+\zeta^2)^2}=\zeta^4\frac{1}{(1+\zeta^2)^2}=\zeta^4\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(-1)^n\zeta^{2n}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)\zeta^{2n+4}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)\frac{1}{z^{2n+4}}.$$

Разложение справедливо при $|z|>1$.

Пример 8.8. Разложить функцию $f(z)=\cos\frac{1}{z-1}$ в ряд Лорана в окрестности точки $z=1$.

Решение. Проведя замену $\frac{1}{z-1}=t$, получим

$$f(z)=\cos\frac{1}{z-1}=\cos t=\varphi(t),$$

причем $\varphi(t)$ требуется разложить в точке $t=\infty$. Как мы уже знаем (см. пример 8.5), разложения $\cos t$ в бесконечности и в нуле совпадают:

$$\cos t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!(z-1)^{2n}}=f(z).$$

Разложение справедливо при $|t|<\infty$ или $|z-1|>0$.

Пример 8.9 ([3], № 4.11). Разложить функцию $f(z)=\cos\dfrac{z^2-4z}{(z-2)^2}$ в ряд Лорана в окрестности точки $z = 2$.

Решение. Преобразуем функцию следующим образом:

$$\cos\frac{z^2-4z}{(z-2)^2}=\cos\frac{z^2-4z+4-4}{(z-2)^2}=\cos\frac{(z-2)^2-4}{(z-2)^2}=\cos\left[1-\frac{4}{(z-2)^2}\right]=$$

$$=\cos 1\cdot\cos\frac{4}{(z-2)^2}+\sin 1\cdot\sin\frac{4}{(z-2)^2}.$$

Далее, введя переменную $t=\dfrac{4}{(z-2)^2}$, придем к необходимости разлагать функцию по t в окрестности $t=\infty$:

$$f(z)=\cos\frac{z^2-4z}{(z-2)^2}=\cos 1\cdot\cos t+\sin 1\cdot\sin t.$$

Эти разложения известны:

$$\cos t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot t^{2n}}{(2n)!};\;\; \sin t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot t^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Следовательно,

$$f(z)=\cos 1\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\cdot\left[\frac{4}{(z-2)^2}\right]^{2n}+\sin 1\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\cdot\left[\frac{4}{(z-2)^2}\right]^{2n+1}.$$

Оба слагаемых можно объединить под одним знаком суммы, если в первой сумме выделить член с $n = 0$, а во второй переобозначить $n\to n-1$:

$$f(z)=\cos 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 4^{2n}}{(2n)!(z-2)^{4n}}\cdot\cos 1+\sin 1\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot 4^{2n-1}}{(2n-1)!(z-2)^{4n-2}}=$$

$$=\cos 1+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n\cdot 4^{2n}\cdot\cos 1}{(2n)!(z-2)^{4n}}+\frac{(-1)^{n-1}\cdot 4^{2n-1}\cdot\sin 1}{(2n-1)!(z-2)^{4n-2}}\right]$$

при $0<|z-2|<\infty.$

Пример 8.10 ([3], № 4.15). Разложить в точках $z_0 = 1$ и $z_0 = \infty$ функцию $\sin\dfrac{z}{1-z}$.

Решение. В точке $z_0 = 1$ решается аналогично примеру 8.9. Получим

$$f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin\left(1+\dfrac{n\pi}{2}\right)}{n!(z-1)^n}.$$

Для разложения в бесконечности, как всегда, делается замена $\zeta = \dfrac{1}{z}$. В этом случае

$$f(z) = \sin\frac{z}{1-z} = \sin\frac{\frac{1}{\zeta}}{1-\frac{1}{\zeta}} = \sin\frac{1}{\zeta - 1}.$$

Эту функцию надо разложить в ряд Лорана (Тейлора) в точке $\zeta = 0$, что делается по формуле $\varphi(\zeta) = \sum\limits_{n=0}^{n} \dfrac{\varphi^{(n)}(0)}{n!}\cdot\zeta^n$. Получим:

$$-\sin 1 - \frac{\cos 1}{z} + \frac{\sin 1 - 2\cos 1}{2!z^2} + \frac{6\sin 1 - 5\cos 1}{3!z^2} + \ldots$$

Пример 8.11 ([3], № 4.16). Разложить в ряд Лорана в окрестности точки $z = 0$ и в кольце $\pi < |z| < 2\pi$ функцию $f(z) = \operatorname{ctg} z$.

Решение. Функция $f(z)$ аналитична в концентрических кольцах с центром в точке $z_0 = 0$ $\pi k < |z| < \pi(k+1)$.

а) Разложение в нуле: $\operatorname{ctg} z = \dfrac{\cos z}{\sin z}$. Поскольку в окрестности нуля $\sin z \sim z$, $\cos z \sim 1$, то $\operatorname{ctg} z = \dfrac{1}{z} + o\left(\dfrac{1}{z}\right)$. Следовательно, лорановское разложение $\operatorname{ctg} z$ начинается с члена, содержащего z в минус первой степени, т.е. имеет вид

$$\operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{1}{z} + a_1 z + a_3 z^3 + \ldots$$

(только нечетные степени, так как $\operatorname{ctg} z$ – нечетная функция). Откуда

$$\cos z = \sin z\left(\frac{1}{z} + a_1 z + a_3 z^3 + \ldots\right).$$

Используем известные разложения $\cos z$ и $\sin z$ в нуле, а затем найдем коэффициенты a_i, приравнивая слева и справа коэффициенты при одинаковых степенях z:

$$1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \ldots = \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \ldots\right)\left(\frac{1}{z} + a_1 z + a_3 z^3 + \ldots\right)$$

при $z^2 : -\frac{1}{2!} = a_1 - \frac{1}{3!} \Rightarrow a_1 = \frac{1}{3!} - \frac{1}{2!} = -\frac{1}{3}$,

при $z^4 : -\frac{1}{4!} = a_3 - a_1 \cdot \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} \Rightarrow a_3 = \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{3!} a_1 = -\frac{1}{45}$,

при z^6 :

$$-\frac{1}{6} = a_5 - a_3 \cdot \frac{1}{3!} + a_1 \cdot \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} \Rightarrow a_5 = \frac{1}{7!} - \frac{1}{6!} + \frac{1}{3!} a_3 - \frac{1}{5!} a_1 = -\frac{2}{945}$$

и т.д.,

при z^{2n} :

$$(-1)^n \cdot \frac{1}{(2n)!} = a_{2n-1} - a_{2n-3} \cdot \frac{1}{3!} + a_{2n-5} \cdot \frac{1}{5!} + \ldots + a_1 \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}.$$

Обычно эти коэффициенты записывают с помощью чисел Бернулли B_n : $a_{2n-1} = \frac{2^{2n} B_n}{(2n)!}$. Разложение справедливо при $0 < |z| < \pi$.

б) Разложение в кольце $\pi < |z| < 2\pi$ $\quad \operatorname{ctg} z = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n$. Коэффициенты c_n вычислим по формуле:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma} \frac{f(z)dz}{z^{n+1}} = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma} \frac{\operatorname{ctg} z}{z^{n+1}} dz .$$

Контур γ охватывает точку 0 и проходит внутри заданного кольца. При этом внутри контура находятся три точки, в которых подынтегральная функция не аналитична: $-\pi$; 0 ; π. Из теоремы

Коши для составного контура (окружим эти точки контурами малого радиуса $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$) следует, что

$$\oint\limits_{\gamma} \frac{\operatorname{ctg} z}{z^{n+1}} dz = \oint\limits_{\gamma_1} + \oint\limits_{\gamma_2} + \oint\limits_{\gamma_3}.$$

Интеграл по контуру γ_2, охватывающему точку 0, есть не что иное, как коэффициент a_n разложения $\operatorname{ctg} z$ в нуле, вычисленный выше: $a_{-1} = +1$, $a_{-n} = 0$ ($n = 2,3,...$); $a_{2k} = 0$ ($k = 0,1,2,...$), $a_{2k-1} = (-1)^k \cdot 2^{2k} \cdot B_{2k} \cdot \dfrac{1}{(2k)!}$ $(k = 1, 2...)$.

Вычислим интегралы по контурам γ_1 (охватывает точку $-\pi$) и γ_3 (охватывает точку π), используя интегральную формулу Коши

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma} \frac{f(z)dz}{z - z_0},$$

где $f(z)$ аналитична внутри γ. Для этого под интегралом умножим и разделим подынтегральную функцию на $z + \pi$ (для γ_1) и на $z - \pi$ (для γ_3):

$$\oint\limits_{\gamma_1} = \oint\limits_{\gamma_1} \frac{\operatorname{ctg} z \cdot (z+\pi)}{z^{n+1}(z+\pi)} dz$$

Доопределим функцию $\operatorname{ctg} z \cdot (z+\pi)$ в точке $z = -\pi$ ее пределом в точке $-\pi$, т.е. единицей. Тогда по формуле Коши

$$\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma_1} \frac{f(z)dz}{z+\pi} = f(-\pi) = \frac{1}{(-\pi)^{n+1}}.$$

Аналогично

$$\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma_3} \frac{\operatorname{ctg} z \cdot (z-\pi)}{z^{n+1} \cdot (z-\pi)} dz = \frac{1}{\pi^{n+1}}.$$

Отсюда видно, что при четных n эти два слагаемых уничтожаются. Остаются только нечетные n, т.е.

$$c_{2k+1} = \frac{2}{\pi^{2k+2}}, \quad k = -2, -3, ...$$

$$c_{2k+1} = \frac{2}{\pi^{2k+2}} + a_{2k+1}, \quad k = -1, 0, 1, 2, ...$$

где a_{2k+1} – коэффициенты разложения ctg$z$ в нуле, полученные выше. Окончательно имеем

$$\operatorname{ctg} z = \frac{3}{z} + 2 \cdot \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\pi^{2k-2}}{z^{2k-1}} + \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{2}{\pi^{2k+2}} + a_{2k+1} \right] \cdot z^{2k+1}$$

или, переобозначив индекс суммирования в первой сумме $k \to k+1$, а во второй $k \to k-1$, получим

$$\operatorname{ctg} z = \frac{3}{z} + 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\pi^{2k}}{z^{2k+1}} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{2}{\pi^{2k}} + \frac{(-1)^k 2^{2k} B_{2k}}{(2k)!} \right] \cdot z^{2k-1}.$$

Разложение справедливо в кольце $\pi < |z| < 2\pi$.

Пример 8.12 ([3], № 4.19). Выяснить, допускают ли указанные функции разложение в ряд Лорана в окрестности данной точки:

1) $\cos\frac{1}{z}$, $z = 0$; 2) $\cos\frac{1}{z}$, $z = \infty$; 4) $\operatorname{ctg} z$, $z = \infty$;

6) $\dfrac{z^2}{\sin\frac{1}{z}}$, $z = 0$; 7) $\dfrac{z}{\sin z - 3}$, $z = \infty$.

Решение. В соответствии с теоремой Лорана в ряд Лорана в окрестности некоторой точки может быть разложена функция, аналитическая всюду в этой окрестности, за исключением, может быть, самой этой точки. Следовательно, во всех указанных случаях нам надлежит проверить, существует ли вокруг данной точки окрестность, в которой функция аналитична.

1) Функция $\cos z$ аналитична во всей комплексной плоскости. Поэтому функция $\cos\frac{1}{z}$ аналитична также во всей комплексной плоскости, кроме точки $z = 0$. Поэтому существует проколотая окрестность точки $z = 0$ (т.е. окрестность за вычетом самой точки $z = 0$), в которой функция аналитична и, следовательно, допускает разложение в ряд Лорана. Ответ: да.

2) Эта же функция, но $z = \infty$. Ответ: да, ввиду аналитичности функции в окрестности $z = \infty$.

4) ctg$z$, $z = \infty$. $\operatorname{ctg} z = \dfrac{\cos z}{\sin z}$. Знаменатель обращается в нуль в точках $z = k\pi$ ($k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$). Следовательно, при достаточно

большом k точки $k\pi$, где функция не аналитична, попадают в любую окрестность бесконечности. Поэтому не существует такой окрестности точки $z = \infty$, в которой функция $\operatorname{ctg} z$ была бы аналитической. Ответ: нет, не допускает.

6) $\dfrac{z^2}{\sin\dfrac{1}{z}}$, $z = 0$. Выясним, в каких точках знаменатель обращается в нуль: $\sin\dfrac{1}{z} = 0 \Rightarrow \dfrac{1}{z} = k\pi$, $z = \dfrac{1}{k\pi}$ $\left(k = \pm 1, \pm 2\ldots\right)$.

В этих точках функция не аналитична, и при $k \to \infty$ эти точки попадают в любую окрестность точки $z = 0$. Поэтому вокруг точки $z = 0$ нет окрестности аналитичности рассматриваемой функции и, следовательно, разложить в ряд Лорана эту функцию в точке $z = 0$ нельзя.

7) $\dfrac{z}{\sin z - 3}$, $z = \infty$. Опять выясним, в каких точках знаменатель обращается в нуль: $\sin z - 3 = 0, \sin z = 3$. (Обратим внимание, что для комплексных z синус может равняться любому числу, в частности, и большему единицы, например, 3). Запишем $\sin z$ по формуле Эйлера:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 3 \Rightarrow e^{iz} - e^{-iz} - 6i = 0.$$

Умножим это уравнение на e^{iz}: $e^{2iz} - 6ie^{iz} - 1 = 0$. Поучилось квадратное уравнение относительно e^{iz}. Решаем его:

$$e^{iz} = 3i + \sqrt{-8} = \left(3 \pm 2\sqrt{2}\right)i.$$

Отсюда

$$iz = \mathrm{Ln}\left[(3 \pm 2\sqrt{2})i\right] \qquad \text{или} \qquad z = -i\mathrm{Ln}\left[(3 \pm 2\sqrt{2})i\right].$$

Известно, что

$$\mathrm{Ln}\, z = \ln|z| + i\varphi + i2k\pi \ (k = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots),$$

где φ – аргумент числа z, т.е. в нашем случае

$$z = -i\left[\ln(3 \pm 2\sqrt{2}) + i\frac{\pi}{2} + i2k\pi\right] = \frac{\pi}{2} + 2k\pi - i\ln(3 \pm 2\sqrt{2}),$$

откуда видно, что эти точки неаналитичности рассматриваемой функции при $k \to \infty$ попадают в любую окрестность точки $z = \infty$ и, следовательно, не существует окрестности аналитичности этой точки, поэтому функция в ряд Лорана в ней разложена быть не может.

Пример 8.13 ([3], № 4.20). Выяснить, имеют ли указанные многозначные функции однозначные ветви, допускающие разложение в ряд Лорана (в частности, в ряд Тейлора) в окрестности данной точки:

1) $\sqrt{z}$, $z = 0$; 2) $\sqrt{z(z-1)}$, $z = \infty$; 3) $\sqrt{\dfrac{z}{(z-1)(z-2)}}$, $z = \infty$;

4) $\sqrt[3]{(z-1)(z-2)(z-3)}$, $z = \infty$; 5) $\sqrt[4]{z(z-1)^2}$, $z = \infty$;

6) $\sqrt{1+\sqrt{z}}$, $z = 1$; 7) $\sqrt{1+\sqrt{z}}$, $z = 0$; 8) $\sqrt{z+\sqrt{z^2-1}}$, $z = \infty$;

9) $\sqrt{z+\sqrt{z^2-1}}$, $z = 1$; 10) $\sqrt{1+\sqrt[3]{\dfrac{z}{z+1}}}$, $z = \infty$;

11) $\mathrm{Ln}\,[(z-1)(z-2)]$, $z = \infty$; 12) $\mathrm{Ln}\,\dfrac{(z-\alpha)(z-\beta)}{(z-\gamma)(z-\delta)}$, $z = \infty$;

13) $\mathrm{Arc}\sin z$, $z = 0$; 14) $\mathrm{Arctg}(1+z)$, $z = 0$;

15) $\mathrm{Arsh}(i+z)$, $z = 0$;

16) $\sqrt{\dfrac{\pi}{2} - \mathrm{Arc}\sin z}$, $z = 1$; 17) $\sqrt{\dfrac{\pi}{4} - \mathrm{Arc}\sin z}$, $z = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение.

1) $f(z) = \sqrt{z}$, $z = 0$. Функция в окрестности точки $z = 0$ не имеет однозначных ветвей, допускающих разложение в ряд Лорана в окрестности этой точки, так как точка $z = 0$ является точкой ветвления функции. По определению корня $\sqrt{z} = \sqrt{\rho} e^{i\frac{\varphi + 2\pi k}{2}}$ $(k = 0,1)$. При обходе точкой z начала координат и возвращении в исходную точку аргумент φ приобретает приращение 2π, значение функции переходит с одной ветви на другую и, следовательно, ветви многозначной функции в окрестности точки $z = 0$ не разделяются, а поэтому не могут быть разложены в ряд Лорана.

2) $f(z)=\sqrt{z(z-1)}$, $z=\infty$. В окрестности точки $z=\infty$ ветви разделяются, и каждая может быть разложена в ряд Лорана, так как $z=\infty$ не является точкой ветвления данной функции. Действительно, пусть $z=\rho e^{i\varphi}$, $z-1=\rho_1 e^{i\varphi_1}$; по определению корня $\sqrt{z(z-1)}=\sqrt{\rho\rho_1}e^{i\frac{\varphi+\varphi_1+2\pi k}{2}}$ ($k=0,\ 1$). При обходе точки $z=\infty$ по окружности достаточно большого радиуса аргументы φ и φ_1 приобретают приращение каждый -2π, аргумент самой функции приобретает приращение $\dfrac{-4\pi}{2}=-2\pi$, т.е. функция не меняется.

3) $f(z)=\sqrt{\dfrac{z}{(z-1)(z-2)}}$, $z=\infty$. Ветвей, допускающих разложение в ряд Лорана, нет, так как точка $z=\infty$ является точкой ветвления: если $z=\rho e^{i\varphi}$, $z-1=\rho_1 e^{i\varphi_1}$, $z-2=\rho_2 e^{i\varphi_2}$, то

$$\sqrt{\frac{z}{(z-1)(z-2)}}=\sqrt{\frac{\rho}{\rho_1\rho_2}}e^{i\frac{\varphi-\varphi_1-\varphi_2+2\pi k}{2}} \quad (k=0,\ 1).$$

При обходе бесконечности аргументы φ, φ_1, φ_2 приобретают приращение -2π каждый. В результате аргумент функции приобретает приращение $\dfrac{\varphi-\varphi_1-\varphi_2}{2}=\dfrac{-2\pi+2\pi+2\pi}{2}=\pi$, т.е. происходит переход с одной ветви на другую.

4) $f(z)=\sqrt[3]{(z-1)(z-2)(z-3)}$, $z=\infty$. Так как $z=\infty$ не является точкой ветвления, то функция в окрестности точки $z=\infty$ разделяется на три ветви – однозначные аналитические функции, допускающие разложение в ряд Лорана.

5) $f(z)=\sqrt[4]{z(z-1)^2}$, $z=\infty$. Нет разделяющихся ветвей, так как $z=\infty$ – точка ветвления.

6) $f(z)=\sqrt{1+\sqrt{z}}$, $z=1$. Внутренний корень $\sqrt{z}$ в точке $z=1$ может принимать два значения 1 или –1. Для той ветви внутреннего корня, для которой $\sqrt{1}=1$, точки $z=1$ не является точкой ветвления внешнего корня, а следовательно, и всей функции $f(z)$. По-

этому эта ветвь допускает разложение в ряд Лорана обеих ветвей внешнего корня в окрестности точки $z = 1$.

7) $f(z)=\sqrt{1+\sqrt{z}}$, $z = 0$. Для внутреннего корня $\sqrt{z}$ точка $z = 0$ является точкой ветвления и, следовательно, точкой ветвления функции $f(z)$. Поэтому разделение ветвей невозможно и разложение в ряд Лорана невозможно.

8) $f(z)=\sqrt{z+\sqrt{z^2-1}}$, $z = \infty$. Точка $z = \infty$ не является точкой ветвления внутреннего корня $\sqrt{z^2-1}$, но является точкой ветвления для внешнего корня. Поэтому разделение ветвей и разложение в ряд Лорана невозможно.

9) $f(z)=\sqrt{z+\sqrt{z^2-1}}$, $z = 1$. Точка $z = 1$ является точкой ветвления для внутреннего корня, а так же точкой ветвления самой функции $f(z)$. Поэтому разделение ветвей и разложение в ряд Лорана невозможно.

10) $f(z)=\sqrt{1+\sqrt[3]{\dfrac{z}{z+1}}}$, $z = \infty$. Точка $z = \infty$ не является точкой ветвления внутреннего корня и всей функции $f(z)$ в целом. Поэтому разделение на 6 одозначных аналитических функций в окрестности точки $z = \infty$ возможно, а следовательно, возможно и их разложение в ряд Лорана в окрестности этой точки;

11) $f(z)=\mathrm{Ln}\,[(z-1)(z-2)]$, $z = \infty$. Точка $z = \infty$ является точкой ветвления функции $f(z)$; поэтому выделение ветвей, допускающих разложение в ряд Лорана в окрестности этой точки невозможно. Действительно, пусть $z-1=\rho_1 e^{i\varphi_1}$, $z-2=\rho_2 e^{i\varphi_2}$. Тогда $f(z)=\ln\rho_1+\ln\rho_2+i\varphi_1+i\varphi_2+i2\pi k \quad (k=0,\pm1,\pm2,...)$. При обходе точкой z бесконечно удаленной точки аргументы φ_1 и φ_2 приобретают приращение -2π каждый, вся функция приобретает приращение аргумента -4π и, следовательно, значение функции переходит с ее ветви с номером k, на ветвь с номером $k-2$.

12) $f(z)=\mathrm{Ln}\,\dfrac{(z-\alpha)(z-\beta)}{(z-\gamma)(z-\delta)}$, $z = \infty$. Разделение функции на однозначные аналитические ветви возможно, так как точка $z = \infty$ не яв-

ляется точкой ветвления. Каждая ветвь допускает разложение в ряд Лорана.

13) $f(z)=\operatorname{Arc}\sin z$, $z = 0$. Так как $\operatorname{Arc}\sin z=-i\operatorname{Ln} i(z+\sqrt{z^2-1})$, то точка $z = 0$ является точкой ветвления этой функции, разделение ветвей и разложение в ряд Лорана невозможно.

14) $f(z)=\operatorname{Arctg}(1+z)$, $z = 0$. Все ветви допускают разложение в ряд Лорана в окрестности точки $z = 0$, так как эта точка не является точкой ветвления функции.

15) $f(z)=\operatorname{Arsh}(i+z)$, $z = 0$. Разделение ветвей и разложение их в ряд Лорана возможно, так как точка $z = 0$ не является точкой ветвления.

16) $f(z)=\sqrt{\frac{\pi}{2}-\operatorname{Arc}\sin z}$, $z = 1$. Допускают разложение в ряд Лорана все ветви, кроме тех, для которых $\operatorname{Arc}\sin 1=\frac{\pi}{2}$, так как для ветви внутренней функции Arcsin$z$, для которой $\operatorname{Arc}\sin 1=\frac{\pi}{2}$, точка $z = 1$ является точкой ветвления корня.

17) $f(z)=\sqrt{\frac{\pi}{4}-\operatorname{Arc}\sin z}$, $z=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Разделение ветвей и разложение их в ряд Лорана возможно для всех ветвей функции $f(z)$, кроме тех, для которых $\operatorname{Arc}\sin\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}$.

Рекомендуемый перечень задач для решения в аудитории:
8.1 ([3], № 4.3); 8.2; 8.4 ([3], № 4.1); 8.5; 8.6; 8.7 ([3], № 4.6); 8.8; 8.12 ([3], № 4.19 (1, 2, 4, 6, 7)); 8.13 ([3], № 4.20 (1,2,3)).
Резерв:
8.9 ([3], № 4.11); 8.10 ([3], № 4.15); 8.11 ([3], № 4.16);
8.13 ([3], № 4.20 (6–17)).
Для самостоятельной работы дома:
8.3 ([3], №4.4); [3], № 4.2, 4.9, 4.10, 4.12, 4.19 (3, 5), 4.20 (4, 5).

9. ИЗОЛИРОВАННЫЕ ОСОБЫЕ ТОЧКИ ОДНОЗНАЧНЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

В названии темы мы хотим указать, что, в частности, точки ветвления многозначных функций рассматриваться не будут. Изолированные особые точки аналитических функций делятся на три типа (табл. 9.1) в зависимости от существования и характера предела в них, либо по виду ряда Лорана функции в окрестности этой точки (такое разложение всегда возможно, так как ввиду изолированности особой точки у нее, по определению, существует проколотая окрестность аналитичности).

Таблица 9.1

Тип особой точки	Наличие предела	Вид ряда Лорана
Устранимая особая точка	Существует конечный предел	Ряд Лорана имеет только правильную часть
Полюс	Существует бесконечный предел	В главной части конечное число членов
Существенно особая точка	Нет предела, ни конечного, ни бесконечного	Главная часть ряда Лорана содержит бесконечное число членов

Замечания.

1. Данная классификация применима как к конечным точкам комплексной плоскости, так и к точке $z = \infty$. Напомним только, что в случае разложения функции в ряд Лорана в окрестности конечной точки главной частью называется совокупность членов ряда с отрицательными степенями величины $z - z_0$, а правильной – с неотрицательными. В случае же бесконечно удаленной точки главная часть – это члены с положительными степенями z, а правильная – с неположительными.

2. Особая точка типа "полюс" характеризуется еще и порядком полюса. Порядок полюса равен наибольшему по модулю показателю степени z или $z - z_0$ среди членов главной части (см. пример 8.2):

$$f(z) = \frac{z^2+1}{z(z-1)(z+2)}.$$

Разложение в ряд Лорана имеет вид (в точке $z_0 = 0$):

$$f(z) \quad \underbrace{-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z}}_{\text{главная часть}} \quad + \sum_{n=0}^{\infty}\left[-\frac{2}{3}+\frac{5}{12}\cdot\frac{(-1)^n}{2^n}\right]\cdot z^n.$$

Главная часть содержит один член. Причем показатель степени этого члена $\frac{1}{z}$ равен 1. Поэтому точка $z = 0$ для указанной функции является полюсом первого порядка. По этим же соображениям для функции $f(z) = z^2$ точка $z = \infty$ является полюсом второго порядка. Если функция $f(z)$ представима в виде отношения $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{\left(z - z_0\right)^k}$, где $\varphi\left(z\right)$ в точке z_0 не обращается ни в нуль, ни в бесконечность, то точка z_0 является для функции $f(z)$ полюсом k-го порядка, т.е. в этом случае можно для определения порядка полюса и не прибегать к разложению функции в ряд Лорана.

Рассмотрим примеры, в которых требуется найти особые точки заданных функций и определить их характер.

Пример 9.1 ([3], № 4.23).

$$f(z) = \frac{1}{z - z^3}.$$

Решение. Функцию представим в виде $f(z) = \dfrac{1}{z\left(1 - z\right)\left(1 + z\right)}$, откуда, в соответствии с замечанием, сделанным выше, можно сделать вывод, что точки $z = 0,\ 1$ и -1 являются каждая полюсом первого порядка.

Пример 9.2 ([3], № 4.25).

$$f(z) = \frac{z^5}{\left(1 - z\right)^2}.$$

Решение. Точка $z = 1$ – полюс второго порядка. В этом примере, однако, и бесконечно удаленная точка является особой. Так как предел $\lim\limits_{z\to\infty} \dfrac{z^5}{\left(1 - z\right)^2} = \infty,$ то это полюс. Отметим, что если функция может быть представлена при $z \to \infty$ в виде $f(z) = z^n \varphi(z)$, $\lim\limits_{z \to \infty} \varphi(z) = a \neq 0$, то ∞ – полюс n-го порядка. В нашем случае

$$f(z) = \frac{z^5}{(1-z)^2} = z^3 \varphi(z),$$

где $\varphi(z) = \dfrac{z^2}{(1-z)^2}$ и $\lim\limits_{z \to \infty} \varphi(z) = 1$. Поэтому на бесконечности мы имеем полюс третьего порядка.

Пример 9.3. Доказать что функции e^z и e^{-z} в качестве особой точки имеют только $z = \infty$.

Решение. Это – существенно особая точка, в чем можно убедиться, пользуясь обоими критериями: пределом в этой точке и разложением в ряд Лорана. Действительно, например, функция $f(z) = e^z$ не имеет при $z \to \infty$ ни конечного, ни бесконечного пределов, так как если находить этот предел вдоль действительной оси $(z = x)$ при $x \to +\infty$, то $f(z) \to +\infty$, если же $x \to -\infty$, то $f(z) \to 0$. Уже это доказывает отсутствие предела при $z \to \infty$, так как по определению предел не должен зависеть от направления подхода.

Для наглядности можно рассмотреть и наличие предела, когда $z \to \infty$ вдоль мнимой оси, где $z = iy$. Тогда $e^z = e^{iy} = \cos y + i \sin y$ (формула Эйлера) и при $y \to \infty$ ни $\cos y$, ни $\sin y$ не имеют предела.

Все это дословно относится и к функции e^{-z}. Знак минус перед z не влияет на вывод об отсутствии предела. Распространенная ошибка: e^{-z} записывают как $\dfrac{1}{e^z}$ и ошибочно полагают, что при $z \to \infty$ функция $\dfrac{1}{e^z} \to 0$. Обратим внимание, что ряд Лорана функции e^z в бесконечности имеет вид $e^z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{n!}$, т.е. главная часть содержит бесконечно много членов. Из приведенных рассуждений сразу же вытекает, что в примере № 4.27 из [3], где $f(z)=\dfrac{e^z}{1+z^2}$, наличие в знаменателе выражения $1+z^2$ не влияет на вывод о характере особенности в точке $z=\infty.$ Это – опять существенно особая точка, так как если $z\to\infty$ по действительной оси $(z=x)$, то $f(z)=\dfrac{e^x}{1+x^2}\to+\infty$ при $x\to+\infty$ и $f(z)=\dfrac{e^x}{1+x^2}\to 0$ при $x\to-\infty,$ т.е. предела нет.

Кроме $z=\infty,$ здесь есть еще две особые точки, которые найдем, приравняв знаменатель нулю: $1+z^2=0$ или $z^2=-1, z_{1,2}=\pm i,$ т.е. $1+z^2=(z-i)(z+i)$ и функция может быть записана в виде

$$f(z)=\frac{e^z}{(z+i)(z-i)}.$$

Каждый множитель в знаменателе стоит в первой степени. Поэтому точка $z=i$ – полюс первого порядка и точка $z=-i$ - также полюс первого порядка. Аналогично в примере № 4.28 из [3] функция $f(z)=\dfrac{z^2+1}{e^z}$ имеет только одну особую точку: $z=\infty$ – это существенно особая точка.

Пример 9.4 ([3] № 4.30).

$$f(z)=\frac{1}{e^z-1}-\frac{1}{z}.$$

Решение. Функция представляет собой сумму двух слагаемых, из которых второе имеет только одну особую точку $z=0$ – это полюс первого порядка, но и первое слагаемое в точке $z=0$ имеет полюс первого порядка (так как $e^z-1\underset{z\to0}{\sim}z$). Так как эти слагаемые вычитаются друг из друга, то мы имеем в точке $z=0$ неопределенность типа $"\infty-\infty"$, которую раскроем по правилу Лопиталя:

$$f(z)=\frac{1}{e^z-1}-\frac{1}{z}=\frac{z-e^z+1}{\left(e^z-1\right)\cdot z};$$

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{\left(z - e^z + 1\right)'}{\left[\left(e^z - 1\right)z\right]'} =$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{1 - e^z}{e^z + ze^z - 1} = \lim_{z\to 0} \frac{\left(1 - e^z\right)'}{\left(e^z + ze^z - 1\right)'} = \lim_{z\to 0} \frac{-e^z}{e^z + e^z + ze^z} = -\frac{1}{2}.$$

Таким образом, у функции $f(z)$ в точке $z = 0$ имеется конечный предел, равный $-\frac{1}{2}$. Следовательно, это устранимая особая точка.

У функции имеются и другие особые точки, которые найдем, приравняв нулю знаменатель в первом слагаемом: $e^z - 1 = 0$ или $e^z = 1$, откуда $z = \mathrm{Ln}\,1 = \ln 1 + i \cdot 0 + i2k\pi = 2k\pi i$ $(k = \pm 1, \pm 2 ...)$ (используем здесь формулу для логарифма $\mathrm{Ln} z = \ln |z| + i\varphi + 2k\pi i$). Так как функция в этих точках обращается в бесконечность, то это полюсы. Для определения их порядка воспользуемся легко доказываемым утверждением: если $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, где $\varphi(z)$ аналитична в окрестности точки z_0 и $\varphi(z_0) \neq 0$, а $\psi(z)$ имеет в точке z_0 нуль n-го порядка, то $f(z)$ имеет в точке z_0 полюс n-го порядка.

Так как функция $\psi(z) = e^z - 1$, стоящая в знаменателе, в точках $z = 2k\pi i$ имеет первую производную, отличную от нуля $(\psi' = e^{2k\pi i} = 1)$, то это является показателем того, что в этих точках она имеет нуль первого порядка.

Итак, для функции $f(z) = \frac{1}{e^z - 1} - \frac{1}{z}$ полюсами первого порядка являются точки $z = 2k\pi i$ ($k = \pm 1, \pm 2 ...$). Наличие слагаемого $-\frac{1}{z}$ не влияет на характер особых точек, так как в них $\frac{1}{z}$ особенности не имеет.

Обратим внимание на то, что эти полюсы первого порядка при $k \to \infty$ попадают в любую окрестность точки $z = \infty$. Поэтому последняя не является изолированной особой точкой (это точка накопления полюсов).

Пример 9.5 ([3], № 4.34).

$$f(z) = \operatorname{th} z .$$

Решение. Представим $f(z)$ в виде $\operatorname{th} z = \dfrac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}$. Знаменатель обращается в нуль в точках $z = \dfrac{\pi}{2}(2k+1)i \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2 ...)$. Производная знаменателя в этих точках отлична от нуля, т.е. эти точки являются для знаменателя нулями первого порядка, а следовательно, для функции $f(z)$ – полюсами первого порядка. Так как эти полюсы при $k \to \infty$ попадают в любую окрестность точки $z = \infty$, то последняя не является изолированной особой точкой (точка накопления полюсов).

Пример 9.6 ([3], № 4.35).

$$f(z) = e^{-\frac{1}{z^2}} .$$

Решение. Экспонента в конечной части плоскости не имеет особых точек, а у функции $-\dfrac{1}{z^2}$ имеет особенность только в точке $z = 0$. Поэтому сложная функция $e^{-\frac{1}{z^2}}$ должна быть проверена на наличие особенности только в точках $z = 0$ и $z = \infty$. В точке $z = 0$ показатель экспоненты обращается в бесконечность, а в этом случае, как мы видели (см. пример 9.3), экспонента не имеет предела ни конечного, ни бесконечного. Следовательно, для функции $f(z) = e^{-\frac{1}{z^2}}$ точка $z = 0$ является существенно особой точкой. При $z \to \infty$ $\dfrac{1}{z^2} \to 0$ и $e^{-\frac{1}{z^2}} \to 1$, т.е. точка $z = \infty$ является устранимой особой точкой.

Пример 9.7 ([3], № 4.36).

$$f(z)=ze^{\frac{1}{z}}.$$

Решение. Особые точки: $z=0$ и $z=\infty$. Точка $z=0$ – существенно особая, так как при $z\to 0$ у функции нет предела (при $z=x$ $xe^{\frac{1}{x}}\to +\infty$, при $x\to 0+0$ и $xe^{\frac{1}{x}}\to -\infty$ при $x\to 0-0$). Это можно установить и по виду ряда Лорана в точке $z_0=0$:

$$f(z)=z\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!z^n}=\underbrace{z+1}_{\substack{\text{правильная}\\ \text{часть}}}+\underbrace{\frac{1}{2z}+\ldots}_{\text{главная часть}},$$

в котором главная часть содержит бесконечно много членов, что по определению и является признаком существенно особой точки.

Исследуем точку $z=\infty$. Предел сомножителя $e^{\frac{1}{z}}$ равен 1, т.е. $f(z)=z\varphi(z)$, где $\varphi(z)\underset{z\to\infty}{\longrightarrow}1$. Следовательно (см. пример 9.2), это – полюс первого порядка. Этот вывод можно сделать, и рассматривая ряд Лорана в бесконечности. Так как у функции $f(z)=ze^{\frac{1}{z}}$ между нулем и бесконечностью никаких особых точек нет, т.е. окрестность бесконечности совпадает с окрестностью нуля, и поэтому разложение в ряд Лорана в бесконечности имеет тот же вид, что и в нуле, т.е.

$$f(z)=z\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!z^n}=\underbrace{z}_{\substack{\text{главная}\\ \text{часть}}}+\underbrace{1+\frac{1}{2z}+\ldots}_{\text{правильная часть}},$$

но правильная часть и главная поменялись местами, причем теперь главная часть содержит один член – z в первой степени.

Пример 9.8 ([3], № 4.44).

$$f(z)=\frac{\operatorname{ctg} z}{z^2}.$$

Решение. Так как $f(z)=\dfrac{\operatorname{ctg} z}{z^2}=\dfrac{\cos z}{z^2\sin z}$, то особые точки $z=\pi k$ ($k=0,\pm1,\pm2\ldots$).

Рассмотрим отдельно точку $z=0$. Так как $\sin z \underset{z\to 0}{\sim} z$, то знаменатель имеет в этой точке нуль третьего порядка (числитель равен 1). Следовательно, для функции $f(z)$ точка $z=0$ является полюсом третьего порядка. Остальные точки $z=k\pi$ ($k=\pm1,\pm2...$) – полюсы первого порядка, так как первая производная функции $z^2\sin z$, стоящей в знаменателе, в этих точках отлична от нуля. Точка $z=\infty$ не является изолированной особой точкой (точка накопления полюсов).

Пример 9.9 ([3], № 4.47).

$$f(z)=\frac{1}{\sin z-\sin\alpha}=\frac{1}{2\sin\frac{z-\alpha}{2}\cos\frac{z+\alpha}{2}}.$$

Решение. Знаменатель обращается в нуль в точках $z=2\pi k+\alpha$ (так как $\frac{z-\alpha}{2}=\pi k$, $k=0,\pm1,\pm2...$) и в точках $z=\pi(2k+1)-\alpha$ (так как $\frac{z+\alpha}{2}=\frac{\pi}{2}(2k+1)$, $k=0,\pm1,\pm2...$). В этих точках производная знаменателя ($\cos z$) не обращается в нуль при условии, что $2k\pi+\alpha\neq\pi n+\frac{\pi}{2}$, т.е. $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi\underbrace{(n+2k)}_{m}$ $(m=0,\pm1,\pm2...)$. То же условие на "α" получается и для точек $z=\pi(2k+1)-\alpha$, так как $\pi(2k+1)-\alpha\neq\pi n+\frac{\pi}{2}\Rightarrow\alpha\neq\pi(2k+1-n)-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi m$.

При этом условии все эти точки являются полюсами первого порядка. Если же $\alpha=\frac{\pi}{2}+\pi m$, то первая производная в указанных точках обращается в нуль, но не обращается в нуль вторая производная, что означает наличие в этих точках для знаменателя нуля второго порядка, а для самой функции $f(z)=\frac{1}{\sin z-\sin\alpha}$ – полюса второго порядка. Точка $z=\infty$ – предельная для полюсов.

Пример 9.10 ([3], № 4.49).

$$f(z)=\sin\frac{1}{1-z}.$$

Решение. Функция $\sin z$ в конечной части плоскости не имеет особенности, а на бесконечности имеет существенно особую точку. Поэтому для функции $\sin\frac{1}{1-z}$ точка $z=1$ является существенно особой (при $z\to 1$ $\frac{1}{1-z}\to\infty$). При $z\to\infty$ $\frac{1}{1-z}\to 0$ и $\sin\frac{1}{1-z}\to 0$, т.е. на бесконечности у функции $\sin\frac{1}{1-z}$, конечный предел – устранимая особенность (иногда бесконечно удаленную точку в этом случае называют правильной точкой).

Пример 9.11 ([3], № 4.50).

$$f(z)=\frac{z^7}{(z^2-4)^2\cos\frac{1}{z-2}}.$$

Решение. Найдем особые точки, приравняв нулю знаменатель $(z^2-4)^2\cos\frac{1}{z-2}=0$. Особые точки $z=\pm 2$, а также из условия $\cos\frac{1}{z-2}=0$ получим $\frac{1}{z-2}=\frac{\pi}{2}+\pi k$ ($k=0,\pm 1,\pm 2...$) или $z_k=\frac{1}{\frac{\pi}{2}+\pi k}+2$. Производная $\cos\frac{1}{z-2}$ в этих точках в нуль не обращается, поэтому точки z_k являются полюсами первого порядка. При $k\to\infty$ эти точки попадают в как угодно малую окрестность точки $z=2$. Поэтому последняя не является изолированной особой точкой (точка накопления полюсов). Точка $z=-2$ является полюсом второго порядка, так как функция $f(z)$ имеет вид $f(z)=\frac{\varphi(z)}{(z+2)^2}$, где $\varphi(z)=\frac{z^7}{(z-2)^2\cos\frac{1}{z-2}}$ – аналитическая в точке $z=-2$ функция и $\varphi(-2)\neq 0$.

Остается рассмотреть точку $z=\infty$. Функция $f(z)$ представима в виде $f(z)=z^3\varphi(z)$, где $\varphi(z)=\dfrac{z^4}{(z^2-4)^2\cos\dfrac{1}{z-2}}$, $\varphi(z)\to 1$ при $z\to\infty$. Отсюда следует, что $z=\infty$ – это полюс третьего порядка.

Пример 9.12 ([3], № 4.51).

$$f(z)=\operatorname{ctg}\frac{1}{z}.$$

Решение. Приравняем нулю знаменатель: $\sin\dfrac{1}{z}=0\Rightarrow\dfrac{1}{z}=k\pi$ $(k=\pm1,\pm2...)$ или $z_k=\dfrac{1}{k\pi}$ – полюсы первого порядка. При $k\to\infty$ эти полюсы попадают в как угодно малую окрестность точки $z=0$. Поэтому эта точка не является изолированной особой точкой (точка накопления полюсов). Исследуем точку $z=\infty$. При $z\to\infty$ $\sin\dfrac{1}{z}\sim\dfrac{1}{z}$. Поэтому $f(z)$ может быть представлена в виде $f(z)=z\cdot\varphi(z)$, где $\varphi(z)=\dfrac{\cos\frac{1}{z}}{z\sin\frac{1}{z}}\to 1$ при $z\to\infty$. Следовательно, $z=\infty$ – полюс первого порядка.

Пример 9.13 ([3], № 4.53).

$$f(z)=\sin\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}.$$

Решение. Функция представляет собой сумму двух функций, из которых первая имеет одну особую точку $z=0$ (существенно особая точка), и вторая $\dfrac{1}{z^2}$ имеет одну особую точку $z=0$ (полюс второго порядка). Следовательно, для функции $f(z)$ точка $z=0$ является существенно особой точкой (так как если одно слагаемое не имеет предела, а второе имеет любой предел, в том числе бесконечный, то сумма не имеет предела). Аналогичный результат получим, используя критерий ряда Лорана: так как ряд Лорана функции $\sin\frac{1}{z}$ в главной части содержит бесконечное число членов, а $\frac{1}{z^2}$ – конечное – всего один, то сумма содержит бесконечное число членов). Бесконечно удаленная точка для функции $f(z)$ является правильной (устранимой особой точкой), так как $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=0$.

Пример 9.14 ([3], № 4.55).

$$f(z)=e^{\operatorname{ctg}\frac{1}{z}}.$$

Решение. Функция e^z аналитична во всех точках комплексной плоскости, а функция $\operatorname{ctg}\frac{1}{z}$ (см. пример 9.12) имеет полюсы первого порядка в точках $z_k=\frac{1}{k\pi}$ ($k=\pm1,\pm2\ldots$). Поэтому сложная функция $f(z)=e^{\operatorname{ctg}\frac{1}{z}}$ имеет особенность в этих точках, но для нее – это существенно особые точки, так как, как мы это уже видели ранее (см. пример 9.3), когда показатель экспоненты стремится к бесконечности, то сама экспонента не имеет предела ни конечного, ни бесконечного. При $k\to\infty$ точки $z_k=\frac{1}{k\pi}$ попадают в сколь угодно малую окрестность точки $z=0$. Поэтому последняя не является изолированной особой точкой (предельная для существенно особых точек). Точка $z=\infty$, как было установлено выше, является полюсом для $\operatorname{ctg}\frac{1}{z}$, т.е. показатель экспоненты в этой точке обращается в бесконечность. Следовательно, для функции $f(z)=e^{\operatorname{ctg}\frac{1}{z}}$ точка $z=\infty$ является существенно особой.

Пример 9.15 ([3], № 4.57). $f(z)=\sin\left(\dfrac{1}{\sin\frac{1}{z}}\right)$.

Решение. $f(z)$ – сложная функция, в которой внешняя функция $\sin z$ аналитична во всех точках комплексной плоскости. Поэтому особые точки будут определяться внутренней функцией $\dfrac{1}{\sin\frac{1}{z}}$, особенности которой совпадают с особенностями функции $\operatorname{ctg}\dfrac{1}{z}$, рассмотренной в примере 9.12. Т.е. у функции $\dfrac{1}{\sin\frac{1}{z}}$ особые точки $z_k = \dfrac{1}{k\pi}$ $(k = \pm 1, \pm 2 \ldots)$ – полюсы первого порядка, в этих точках функция $\dfrac{1}{\sin\frac{1}{z}}$ обращается в бесконечность. Отсюда следует отсутствие предела для исходной функции $f(z) = \sin\left(\dfrac{1}{\sin\frac{1}{z}}\right)$, так как для $\sin z$ справедливы те же рассуждения, что и для экспоненты об отсутствии предела, когда выражение под знаком синуса обращается в бесконечность (достаточно представить синус по формуле Эйлера через разность экспонент: $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$). Следовательно, для функции $f(z)$ точки $z_k = \dfrac{1}{k\pi}$ являются существенно особыми точками, а точка $z = 0$ – точка накопления существенно особых точек.

Осталось исследовать $z = \infty$. Так как при $z \to \infty$ $\sin\dfrac{1}{z} \sim \dfrac{1}{z}$, то $f(z) = \sin\left(\dfrac{1}{\sin\frac{1}{z}}\right) \underset{z\to\infty}{\sim} \sin z$, а для $\sin z$ точка $z = \infty$ является существенно особой. Следовательно, она является таковой и для функции $f(z)$. Окончательный получаем: $z=\dfrac{1}{k\pi}$, $(k=\pm1,\pm2...)$ – существенно особые точки; $z=0$ – точка, предельная для существенно особых точек, $z=\infty$ – существенно особая точка.

Пример 9.16 ([3], № 4.59–4.68). Исследовать поведение каждой из однозначных ветвей заданной многозначной функции в указанных точках (определить, является ли точка правильной для соответствующей ветви или особой, в последнем случае указать характер особенности).

Решение.

№ 4.59. $f(z)=\dfrac{z}{1+\sqrt{z-3}}$, $z = 4$. Домножим числитель и знаменатель на $1-\sqrt{z-3}$: $f(z)=\dfrac{z(1-\sqrt{z-3})}{4-z}$. Из этого выражения видно, что для той ветви функции, для которой $\sqrt{1}=1$ точка $z = 4$ является правильной, а для ветви $\sqrt{1}=-1$ эта точка является полюсом первого порядка.

№ 4.60. $f(z)=\dfrac{1}{\sqrt{z}+\sqrt[3]{z}}$, $z = 1$. Преобразуем функцию к виду

$$\frac{1}{\sqrt{z}+\sqrt[3]{z}}=\frac{1}{\sqrt[3]{z}(1+\sqrt[6]{z})}=\frac{1}{\sqrt[3]{z}}\frac{1-\sqrt[6]{z}}{1-\sqrt[3]{z}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt[3]{z}}\frac{(1-\sqrt[6]{z})(1+\sqrt[3]{z}+\sqrt[3]{z^2})}{(1-\sqrt[3]{z})(1+\sqrt[3]{z}+\sqrt[3]{z^2})}=\frac{1}{\sqrt[3]{z}}\frac{(1-\sqrt[6]{z})(1+\sqrt[3]{z}+\sqrt[3]{z^2})}{1-z},$$

откуда видно, что для той ветви функции $f(z)$, для которой $\sqrt{1}=-1$ и $\sqrt[3]{1}=1$ точка $z = 1$ является полюсом первого порядка. Для остальных ветвей эта точка правильная.

№ 4.61. $f(z)=\dfrac{2z+3}{1+z-2\sqrt{z}}$, $z = 1$. Преобразуем функцию $f(z)$ к виду

$$f(z)=\frac{2z+3}{1+z-2\sqrt{z}}=\frac{(2z+3)(1+z+2\sqrt{z})}{(1+z-2\sqrt{z})(1+z+2\sqrt{z})}=$$

$$=\frac{(2z+3)(1+z+2\sqrt{z})}{(1+z)^2-4z}=\frac{(2z+3)(1+z+2\sqrt{z})}{(1-z)^2},$$

откуда видно, что для той ветви, для которой $\sqrt{1}=1$, точка z = 1 является полюсом второго порядка, а для ветви, для которой $\sqrt{1}=-1$ эта точка правильная.

№ 4.62. $f(z)=\cos\dfrac{1}{1+\sqrt{z}}$, z = 1. Записав функцию в виде $f(z)=\cos\dfrac{1-\sqrt{z}}{1-z}$, находим, что для той ветви функции, для которой $\sqrt{1}=1$, точка z = 1 является правильной, а для которой $\sqrt{1}=-1$ эта точка является существенно особой.

№ 4.63. $f(z)=\dfrac{1}{(2+\sqrt{z})\sin(2-\sqrt{z})}$, z = 4. Для той ветви функции, для которой $\sqrt{4}=2$, знаменатель обращается в нуль только за счет синуса, а производная $(\sin(2-\sqrt{z}))'=\dfrac{-\cos(2-\sqrt{z})}{2\sqrt{z}}$ в точке z = 4 в ноль не обращается. Поэтому точка z = 4 – полюс первого порядка. Для той ветви функции, для которой $\sqrt{4}=-2$, $\sin(2-\sqrt{z})$ в ноль не обращается, но обращается в 0 множитель в знаменателе $2+\sqrt{z}$, а так как $\dfrac{1}{2+\sqrt{z}}=\dfrac{2-\sqrt{z}}{4-z}$, то для этой ветви точка z = 4 также является полюсом первого порядка.

№ 4.64. $f(z)=\operatorname{ctg}\dfrac{1}{1+\sqrt{z}}$, $z=(1+\dfrac{1}{\pi k})^2$, где $k=\pm1,\pm2,...$, и $z=1$.

Для той ветви функции, для которой $\sqrt{1}=1$, точка z = 1 является правильной, так же как и точка $z=(1+\dfrac{1}{\pi k})^2$. Для той ветви, для которой $\sqrt{1}=-1$, точка z = 1 является точкой, предельной для полюсов, так как $\operatorname{ctg}\dfrac{1}{1+\sqrt{z}}$ имеет для этой ветви особые точки

$\sin\dfrac{1}{1+\sqrt{z}}=0 \Rightarrow \dfrac{1}{1+\sqrt{z}}=\pi k \Rightarrow z=(1+\dfrac{1}{\pi k})^2$, $k=\pm1,\pm2,...,$ и точки $z=(1+\dfrac{1}{\pi k})^2$ – полюсы первого порядка для этой ветви.

№ 4.65. $f(z)=\dfrac{1}{\sin(1+\sqrt{\dfrac{z}{z-2}})}$, $z=\dfrac{2(1+\pi k)^2}{(1+\pi k)^2-1}$, где $k=\pm1$, $\pm2,...,$ и $z=\infty$. Для нахождения особых точек приравняем знаменатель нулю: $\sin(1+\sqrt{\dfrac{z}{z-2}})=0 \Rightarrow 1+\sqrt{\dfrac{z}{z-2}}=\pi k$.

Для той ветви, для которой $\sqrt{1}=1$ точка $z=\infty$ – правильная точка, а для ветви $\sqrt{1}=-1$ – полюс 1-го порядка. Точки $z=\dfrac{2(1+\pi k)^2}{(1+\pi k)^2-1}$ – для первой ветви правильные, а для второй – полюсы первого порядка, так как в любой точке $z_k=\dfrac{2(1+\pi k)^2}{(1+\pi k)^2-1}$ выражение под знаком синуса равно

$$1+\sqrt{\frac{z}{z-2}}=1+\sqrt{\frac{\dfrac{2(1+\pi k)^2}{(1+\pi k)^2-1}}{\dfrac{2(1+\pi k)^2}{(1+\pi k)^2-1}-2}}=1+\sqrt{(1+\pi k)^2}=1\pm(1+\pi k)$$

(для первой ветви знак плюс, для второй – минус).

№ 4.66. $f(z)=\sin\dfrac{1}{1+\sqrt{\dfrac{z}{z-2}}}$, $z=\infty$. Рассуждая, как и в предыдущем примере, приходим к выводу, что для той ветви, для которой $\sqrt{1}=1$, $z=\infty$ - правильная точка, а для которой $\sqrt{1}=-1$ – существенно особая.

№ 4.67. 1) $\dfrac{1}{\sin\dfrac{\operatorname{Ln} z}{2i}}$, $z=1$; 2) $\dfrac{1}{\sin\dfrac{\operatorname{Ln} z}{4i}}$, $z=1$.

1) Так как $\mathrm{Ln}z = \ln|z| + i\varphi + 2\pi ki$, то $\mathrm{Ln}\,1 = 2\pi ki \Rightarrow \sin\dfrac{\mathrm{Ln}\,1}{2i} =$ $= \sin\dfrac{2\pi ki}{2i} = \sin\pi k = 0$, для всех ветвей. Производная знаменателя в этой точке отлична от нуля. Поэтому точка $z = 1$ – полюс первого порядка для всех ветвей.

2) Рассуждая, как в предыдущем примере, получим, что $\sin\dfrac{\mathrm{Ln}\,1}{4i} = \sin\dfrac{\pi k}{2} = 0$ для k четных. Поэтому для этих ветвей точка $z = 1$ – полюс первого порядка. Для k нечетных – правильная точка.

№ 4.68. $f(z) = \sin(\mathrm{ctg}\dfrac{\mathrm{Ln}\,z}{4i})$, $z = 1$. В точке $z = 1$ $\mathrm{Ln}\,1 = 2\pi ki$; $\mathrm{ctg}\dfrac{2\pi ki}{4i} = \mathrm{ctg}\dfrac{\pi k}{2} \Rightarrow$ при четном k котангенс обращается в ∞ и для этих k $\sin$ в бесконечности имеет существенно особую точку. При нечетных k точка $z = 1$ правильная.

Рекомендуемый перечень задач для решения в аудитории:
9.1, 9.2, 9.3, 9.4, 9.6, 9.7, 9.8, 9.10, 9.12, 9.13,
[3] № 4.38, 4.39, 4.40, 4.45.

Резерв:
9.5; 9.9; 9.11; 9.14 ([3], № 4.33, 4.54).

Для самостоятельной работы дома:
[3] № 4.24 , 4.26, 4.29, 4.31, 4.32, 4.37, 4.41, 4.42, 4.43, 4.52.

Дополнительные (на усмотрение преподавателя):
[3] № 4.46, 4.48, 4.56, 4.58.

10. ВЫЧЕТЫ

Вычетом аналитической функции $f(z)$ в изолированной особой точке z_0 называется число $\mathrm{res}\left[f(z), z_0\right] = \dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma} f(z)dz$, γ – простой замкнутый контур, охватывающий особую точку z_0 и целиком находящийся в проколотой окрестности аналитичности точки z_0. Направление обхода контура происходит так, что точка z_0 остается слева, т.е. для конечной точки z_0 – это обход против часовой стрелки, для $z_0 = \infty$ – по часовой стрелке. Показывается, что вычет равен коэффициенту c_{-1} в ряде Лорана в этой точке (соответственно, $-c_{-1}$ для точки $z = \infty$). В случае полюса n-го порядка вычет может вычисляться по формуле:

$$\mathrm{res}[f(z), z_0] = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [f(z)(z - z_0)^n], \tag{10.1}$$

которая справедлива и для полюса первого порядка. В этом случае она имеет вид

$$\mathrm{res}[f(z), z_0] = \lim_{z \to z_0} f(z)(z - z_0). \tag{10.2}$$

Если точка z_0 – полюс первого порядка, и функция $f(z)$ представима в виде отношения двух аналитических функций $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, причем $\varphi(z_0) \neq 0$, а для функции $\psi(z)$ точка z_0 является нулем первого порядка, то

$$\mathrm{res}[f(z), z_0] = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}. \tag{10.3}$$

Таким образом, для полюса первого порядка имеем три формулы (не считая определения) для вычисления вычета: (10.2), (10.3), а также c_{-1}; для полюса n-го порядка – две: (10.1) и c_{-1}; для существенно особой точки – одну: $\mathrm{res}[f(z), z_0] = c_{-1}$. Повторим, что вычет для бесконечно удаленной точки равен $-c_{-1}$.

Из сказанного следует, что в случае устранимой особой точки вычет всегда равен нулю, если только это не бесконечно удаленная точка. В случае $z=\infty$, даже если это правильная точка, вычет может быть и не равен нулю. Например:

$$f(z)=\frac{1}{z}, \qquad \operatorname{res}[f(z),\infty]=-1 .$$

Основная теорема о вычетах. Если $f(z)$ аналитична в замкнутой области за исключением конечного числа изолированных особых точек z_k ($k=1,2...N$), лежащих внутри области, то

$$\int\limits_{\gamma} f(z)dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{N} res[f(z),z_k],$$

где γ – полная граница области, проходимая в положительном направлении. Из теоремы, в частности, следует, что сумма всех вычетов в полной комплексной плоскости, включая $z=\infty$, равна нулю.

В следующих примерах найти вычеты данных функций во всех изолированных особых точках и в бесконечности.

Пример 10.1 ([3], № 4.79).

$$f(z)=\frac{1}{z^3-z^5}=\frac{1}{z^3(1-z)(1+z)} .$$

Решение. Особые точки: $z=0$ – полюс третьего порядка, $z=1$ и $z=-1$ – полюсы первого порядка. Отсюда

$$\operatorname{res}[f(z),1]=\lim_{z\to 1} f(z)(z-1)=\lim_{z\to 1}\left[-\frac{1}{z^3(1+z)}\right]=-\frac{1}{2}$$

или по формуле $\frac{\varphi}{\psi'}$ (10.3) (удобно за $\psi(z)$ принять функцию $1-z$, тогда $\psi'=1$, а $\varphi(z)=\frac{1}{z^3(1+z)}$ и $\varphi(1)=\frac{1}{2}$):

$$\operatorname{res}[f(z),1]=\frac{\varphi(1)}{\psi'(1)}=-\frac{1}{2} .$$

Вычет в $z_0=-1$ вычисляется аналогично:

$$\operatorname{res}[f(z),-1]=\lim_{z\to-1}f(z)(z+1)=\lim_{z\to-1}\frac{1}{z^3(1-z)}=-\frac{1}{2}.$$

Вычет в точке $z_0=0$ (см. формулу (10.1)):

$$\operatorname{res}[f(z),0]=\frac{1}{2!}\lim_{z\to0}\frac{d^2}{dz^2}[f(z)z^3]=\frac{1}{2}\lim_{z\to0}\frac{d^2}{dz^2}\frac{1}{1-z^2}=1.$$

Так как сумма всех вычетов, включая $z=\infty$, равна нулю, то вычет в бесконечности равен нулю.

Можно было поступить и иначе, вычислив сначала вычеты в точках $z=\pm1$ (так как в них – простые полюсы) и $z=\infty$, а затем по теореме о сумме вычетов получить отсюда вычет в нуле, что избавило бы нас от необходимости считать вторую производную.

Вычет же в точке $z=\infty$ легко усматривается из вида функции: выделяя главный член при $z\to\infty$, имеем

$$f(z)=\frac{1}{z^3}+0\left(\frac{1}{z^3}\right),$$

т.е. разложение в ряд Лорана в бесконечности начинается с члена $\frac{1}{z^3}$, далее идут более высокие степени $\frac{1}{z}$. Отсюда

$$\operatorname{res}[f(z),\infty]=-c_{-1}=0.$$

Пример 10.2 ([3], № 4.81).

$$f(z)=\frac{z^{2n}}{(1+z)^n}.$$

Решение. Функция имеет единственную особую точку в конечной части комплексной плоскости $z=-1$ – полюс n-го порядка. Применяя формулу (10.1), получим

$$\operatorname{res}[f(z),-1]=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to-1}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[\frac{z^{2n}}{(1+z)^n}(1+z)^n\right]=$$

$$=\frac{2n(2n-1)...(n+2)}{(n-1)!}(-1)^{n+1}.$$

Вычет на бесконечности ранен вычету в точке –1, взятому с противоположным знаком.

Пример 10.3 ([3], № 4.83).

$$f(z)=\frac{z^2+z-1}{z^2(z-1)}.$$

Решение. Функцию запишем в виде $f(z)=\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z^2}$.

Найдем вычет в нуле (полюс второго порядка). Для первого слагаемого эта точка не является особой, поэтому вычет равен нулю, а для второго слагаемого $\left(\frac{1}{z^2}\right)$ сама функция и есть ее разложение в ряд Лорана, где содержится только один член $\frac{1}{z^2}$, т.е. $c_{-1}=0$.

Так как по определению вычета вычет от суммы функций равен сумме вычетов, то в итоге $\operatorname{res}[f(z),0]=0$.

Вычет в точке $z=1$ (полюс первого порядка) вычисляется просто:

$$\operatorname{res}[f(z),1]=\lim_{z\to 1}\frac{z^2+z-1}{z^2}=1.$$

По теореме о сумме вычетов, вычет в бесконечности равен –1.

Можно было и непосредственно вычислить вычет в точке $z=\infty$, выделив опять главный член при $z\to\infty$:

$$f(z)=\frac{1}{z}\varphi(z)\text{, где }\varphi(z)=\frac{z^2+z-1}{z(z-1)}\to 1\text{, при }z\to\infty.$$

Следовательно, $f(z)=\frac{1}{z}+0\left(\frac{1}{z}\right)$. Таким образом, ряд Лорана в бесконечности начинается с члена $\frac{1}{z}$, т.е. $c_{-1}=1$ и

$$\operatorname{res}[f(z),\infty]=-c_{-1}=-1.$$

Пример 10.4 ([3], № 4.84).

$$f(z)=\frac{\sin 2z}{(z+1)^3}.$$

Решение. В конечной части плоскости единственная особая точка $z=-1$ – полюс третьего порядка. Вычет считается по формуле (10.1):

$$\operatorname{res}[f(z),-1]=\frac{1}{2!}\lim_{z\to-1}(\sin 2z)''=\frac{1}{2}\lim_{z\to-1}(-4\sin 2z)=2\sin 2.$$

Вычет в бесконечности (существенно особая точка) равен $-2\sin 2$.

Пример 10.5 ([3], № 4.87).

$$f(z)=\frac{1}{\sin z}.$$

Решение. Особые точки $z_k=k\pi \quad (k=0,\pm1,\pm2...)$ – полюсы первого порядка. Вычет вычислим по формуле $\dfrac{\varphi}{\psi'}$ (10.3), где $\varphi(z)=1$, а $\psi(z)=\sin z$. Отсюда

$$\operatorname{res}[f(z),k\pi]=\frac{\varphi(k\pi)}{\psi'(k\pi)}=\frac{1}{\cos k\pi}=(-1)^k;$$

$z=\infty$ не является изолированной особой точкой (точка накопления полюсов), поэтому понятие вычета к ней неприменимо.

Пример 10.6 ([3], № 4.88).

$$f(z)=\operatorname{ctg}^2 z.$$

Решение. Знаменатель обращается в нуль в точках $z_k=k\pi$. В этих точках первая производная знаменателя обращается в нуль, а вторая – отлична от нуля. Следовательно, в этих точках – полюсы второго порядка. В частности, в точке $z=0$ вычет равен нулю, так как функция четная, поэтому ее разложение в ряд Лорана в нуле содержит только четные степени z, поэтому $c_{-1}=0$. Следовательно, вычет равен нулю и в любой другой точке $z_k=k\pi$ ($k=\pm1,\pm2...$), так как $\operatorname{ctg}(z-k\pi)=\operatorname{ctg}z$. Вычет в бесконечности не определен, так как $z=\infty$ – точка, предельная для полюсов.

Пример 10.7 ([3], № 4.90 (2)).

$$f(z)=z^3\cos\frac{1}{z-2}.$$

Решение. $z = 2$ – существенно особая точка. Вычет находится как c_{-1} в разложении в ряд Лорана в этой точке. Разложение косинуса известно:

$$\cos\frac{1}{z-2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!(z-2)^{2n}}.$$

Чтобы получить разложение функции $f(z)$, представим z^3 в виде

$$z^3 = [(z-2)+2]^3 = (z-2)^3 + 6(z-2)^2 + 12(z-2) + 8.$$

Получаем разложение $f(z)$ в ряд Лорана в точке $z = 2$:

$$f(z) = [(z-2)^3 + 6(z-2)^2 + 12(z-2) + 8]\times$$

$$\times\left[1 - \frac{1}{2!(z-2)^2} + \frac{1}{4!(z-2)^4} - \ldots\right].$$

Перемножая квадратные скобки, соберем члены вида $\dfrac{c_{-1}}{z-2}$:

$$c_{-1} = -\frac{12}{2!} + \frac{1}{4!} = -\frac{143}{24}.$$

Вычет на бесконечности равен $\dfrac{143}{24}$.

Пример 10.8. ([3], № 4.91).

$$f(z) = e^{z+\frac{1}{z}}.$$

Решение. Особые точки $z = 0$ и $z = \infty$ (существенно особые точки). Разложение в ряд Лорана в нуле совпадает с разложением в бесконечности:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n,$$

где $c_n = c_{-n} = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{k!(n+k)!}$, т.е.

$$\mathrm{res}[f(z),0] = -\mathrm{res}[f(z),\infty] = c_{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!(1+k)!}.$$

Пример 10.9 ([3], № 4.92).

$$f(z)=\sin z\cdot\sin\frac{1}{z}.$$

Решение. Особые точки: $z=0$ и $z=\infty$ (существенно особые точки). Функция $f(z)$ – четная, поэтому ряд Лорана в нуле содержит только четные степени z и, следовательно, $c_{-1}=0$. Поэтому $\operatorname{res}[f(z),0]=-\operatorname{res}[f(z),\infty]=0$.

Пример 10.10 ([3], № 4.94).

$$f(z)=\cos\frac{z^2+4z-1}{z+3}.$$

Решение. В конечной части плоскости имеется только одна особая точка $z=-3$ – существенно особая точка. Вычет найдем как c_{-1} в ряде Лорана. Разложение $f(z)$ в ряд Лорана в точке $z=-3$:

$$f(z)=\cos\frac{z^2+4z-1}{z+3}=\cos\frac{z^2+6z-2z+9-10}{z+3}=$$

$$=\cos\frac{(z+3)^2-2(z+3)-4}{z+3}=\cos\left[(z+3)-2-\frac{4}{z+3}\right]=$$

$$=\cos[(z+3)-2]\cos\frac{4}{z+3}+\sin[(z+3)-2]\sin\frac{4}{z+3}=$$

$$=[\cos 2\cdot\cos(z+3)+\sin 2\cdot\sin(z+3)]\cos\frac{4}{z+3}+$$

$$+[\cos 2\cdot\sin(z+3)-\sin 2\cdot\cos(z+3)]\cdot\sin\frac{4}{z+3}.$$

Так как $\cos(z+3)$ и $\cos\dfrac{4}{z+3}$ разлагаются только по четным степеням $z+3$, а $\sin(z+3)$ и $\sin\dfrac{4}{z+3}$ – только по нечетным, то вклад в c_{-1} дадут только слагаемые $\sin 2\cdot\sin(z+3)\cdot\cos\dfrac{4}{z+3}$ и $-\sin 2\cdot\cos(z+3)\cdot\sin\dfrac{4}{z+3}$. Их разложения имеют вид:

$$\sin 2\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z+3)^{2n+1}}{(2n+1)!}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 4^{2n}}{(2n)!(z+3)^{2n}},$$

$$-\sin 2\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z+3)^{2n}}{(2n)!}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 4^{2n+1}}{(2n+1)!(z+3)^{2n+1}}$$

соответственно. В первом слагаемом в первой сумме изменим индекс суммирования $n\to n-1$, а во второй сумме первого слагаемого опустим член разложения с $n=0$, так как он не дает вклада в c_{-1}, т.е. первое слагаемое запишется в виде:

$$\sin 2\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(z+3)^{2n-1}}{(2n-1)!}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 4^{2n}}{(2n)!(z+3)^{2n}},$$

откуда видим, что коэффициент при $\dfrac{1}{z+3}$ равен

$$-\sin 2\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^{2n}}{(2n-1)!(2n)!}.$$

Во втором слагаемом непосредственно видно, что коэффициент при $\dfrac{1}{z+3}$ равен $-\sin 2\cdot\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{4^{2n+1}}{(2n)!(2n+1)!}$. Итак,

$$\operatorname{res}[f(z),-3]=-\operatorname{res}[f(z),\infty]=$$

$$=-\sin 2\cdot\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^{2n}}{(2n-1)!(2n)!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^{2n+1}}{(2n)!(2n+1)!}\right]=$$

$$=-2\sin 2\left[2+\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^{2n}(2n^2+n+2)}{(2n)!(2n+1)!}\right].$$

Пример 10.11 ([3], № 4.95).

$$f(z)=\frac{1}{z(1-e^{-hz})}\quad (h\neq 0).$$

Решение. Особые точки найдем, приравняв нулю знаменатель $1-e^{-hz}=0$ или

$$e^{-hz}=1\Rightarrow -hz=\operatorname{Ln}1=\ln 1+i\cdot 0+i2k\pi=i2k\pi\Rightarrow z_k=\frac{2k\pi i}{h}$$

$(k = \pm 1, \pm 2...)$ (минус не пишем, так как k принимает как положительные, так и отрицательные значения). Это полюсы первого порядка, потому что в них первая производная функции $1 - e^{-hz}$ не равна нулю (она равна $he^{-hz_k} = he^{2k\pi i} = h$). Вычет в этих точках вычислим по формуле $\frac{\varphi}{\psi'}$ (10.3), приняв за $\varphi(z)$ функцию $\frac{1}{z}$, а за $\psi(z)$ функцию $1 - e^{-hz}$. В результате получим:

$$\operatorname{res}[f(z), z_k] \underset{(k \neq 0)}{=} \frac{\varphi(z_k)}{\psi'(z_k)} = \frac{h}{2k\pi ih} = \frac{1}{2k\pi i} \quad (k = \pm 1, \pm 2...).$$

Отдельно рассмотрим точку $z = 0$. В ней знаменатель имеет нуль второго порядка (так как при $z \to 0$ $1 - e^{-hz} \sim hz$ и $z(1 - e^{-hz}) \sim hz^2$). Вычет вычислим по формуле (10.1):

$$\operatorname{res}[f(z), 0] = \lim_{z \to 0} \frac{d}{dz}[f(z) \cdot z^2] = \lim_{z \to 0} \frac{d}{dz} \frac{z}{1 - e^{-hz}} = \frac{1}{2}.$$

Вычет в бесконечности не определен.

Пример 10.12 ([3], № 4.96).

$$f(z) = z^n \sin \frac{1}{z}.$$

Решение. $z = 0$ – существенно особая точка, $z = \infty$ – полюс порядка $n - 1$ (при $n > 1$, так как $\sin \frac{1}{z} \underset{z \to \infty}{\sim} \frac{1}{z}$). При $n < 0$ вычет равен нулю, так как в ряде Лорана нет члена $\frac{1}{z}$ в первой степени.

При $n > 0$ нечетном функция $f(z)$ четная. Следовательно, в ряде Лорана в нуле $c_1 = 0$ и $\operatorname{res}[f(z), 0] = -\operatorname{res}[f(z), \infty] = 0$.

Если $n = 0$ или $n > 0$ и n – нечетное, то ряд Лорана в нуле имеет вид

$$f(z) = z^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)! z^{2k+1}},$$

т.е.

$$c_{-1}=\frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{(n+1)!}=\operatorname{res}[f(z),0]=-\operatorname{res}[f(z),\infty]\,.$$

Пример 10.13 ([3], № 4.97).

$$f(z)=\frac{1}{\sin\frac{1}{z}}.$$

Решение. $\sin\frac{1}{z}=0$ в точках $z_k=\frac{1}{k\pi}$ $(k=\pm1,\pm2...)$. В этих точках функция имеет полюс первого порядка. Поэтому

$$\operatorname{res}[f(z),z_k]=\frac{\varphi(z_k)}{\psi'(z_k)}=\frac{1}{\cos\frac{1}{z_k}\left(-\frac{1}{z_k^2}\right)}=-\frac{1}{k^2\pi^2\cos k\pi}=\frac{(-1)^{k+1}}{k^2\pi^2}\,.$$

Пример 10.14 ([3], № 4.98).

$$f(z)=\frac{\sqrt{z}}{\sin\sqrt{z}}\,.$$

Решение. z = 0 – устранимая особая точка (так как существует предел, равный 1). Вычет ранен нулю.

Точки $z_k=k^2\pi^2$ $(k=1,2...)$ – полюсы первого порядка. Отсюда

$$\operatorname{res}[f(z),z_k]=\frac{\varphi(z_k)}{\psi'(z_k)}=\frac{\sqrt{z_k}}{\cos\sqrt{z_k}\,\frac{1}{2\sqrt{z_k}}}=\frac{2z_k}{\cos\sqrt{z_k}}=$$

$$=\frac{2k^2\pi^2}{\cos k\pi}=(-1)^k\,2k^2\pi^2.$$

Пример 10.15 ([3], № 4.99).

$$f(z)=\frac{\operatorname{tg} z}{z^n}\ \ (n \text{ – натуральное число}).$$

Решение. Так как $\frac{\operatorname{tg} z}{z^n}=\frac{\sin z}{\cos z\cdot z^n}$ и $\sin z \underset{z\to0}{\sim} z$, то точка $z=0$ – полюс порядка $n-1$ (за исключением $n=1$, когда $z=0$ – устранимая особая точка и вычет равен нулю). При нечетном n функция $\frac{\operatorname{tg} z}{z^n}$ четная, поэтому в ряде Лорана в нуле $c_{-1}=0$ и $\operatorname{res}[f(z),0]=0$. При четном n вычет вычисляем как c_{-1} в ряде Лорана. Возьмем известное разложение $\operatorname{tg} z$ в нуле:

$$\operatorname{tg} z = z+\frac{1}{3}z^3+\ldots+\frac{2^{2k}(2^{2k}-1)B_k}{(2k)!}z^{2k-1}+\ldots$$

(B_k – числа Бернулли). После деления на z^n находим, что

$$c_{-1}=\frac{2^n(2^n-1)B_{\frac{n}{2}}}{n!}.$$

Кроме того, знаменатель функции $f(z)=\frac{\operatorname{tg} z}{z^n}$ обращается в нуль в точках $z_k=\frac{\pi}{2}+\pi k$ $(k=0,\pm1,\pm2\ldots)$. В этих точках функция имеет полюс первого порядка. Вычет найдем по формуле $\frac{\varphi}{\psi'}$ (10.3), приняв за $\varphi(z)$ функцию $\frac{\sin z}{z^n}$ и за $\psi(z)$ функцию $\cos z$:

$$\operatorname{res}\left[f(z),z_k\right]=\frac{\varphi(z_k)}{\psi'(z_k)}=-\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)}{\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)^n\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)}=-\frac{1}{\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)^n}.$$

Пример 10.16 ([3] № 4.100–4.107). Найти вычеты каждой из однозначных ветвей соответствующих многозначных функций относительно указанных точек.

Решение.

№ 4.100. $f(z)=\frac{\sqrt{z}}{1-z}$ относительно точки $z=1$. Так как точка $z=1$ полюс первого порядка, то найдем вычет по формуле $\operatorname{res}[f(z),z_0]=\frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}$: $\operatorname{res}[\frac{\sqrt{z}}{1-z},1]=\pm1$.

№ 4.101. $f(z)=\dfrac{1}{\sqrt{2-z}+1}$ относительно точки $z=1$. Представим функцию $f(z)$ в виде:

$$f(z)=\frac{1}{\sqrt{2-z}+1}=\frac{\sqrt{2-z}-1}{(\sqrt{2-z}+1)(\sqrt{2-z}-1)}=\frac{\sqrt{2-z}-1}{2-z-1}=\frac{\sqrt{2-z}-1}{1-z},$$

$z=1$ – полюс первого порядка для той ветви, для которой $\sqrt{1}=-1$, для этой ветви

$$\operatorname{res}[f(z),1]=\lim_{z\to 1} f(z)(z-1)=[1-\sqrt{2-z}]_{z=1}=2\ .$$

Для другой ветви точка $z=1$ не является особой и вычет в ней равен 0.

№ 4.102. $f(z)=\dfrac{z^a}{1-\sqrt{z}}$, $(z^a=e^{a\operatorname{Ln} z})$ относительно точки $z=1$.

Запишем функцию в виде:

$$f(z)=\frac{e^{a(\ln|z|+i\varphi+i2\pi k)}(1+\sqrt{z})}{(1-\sqrt{z})(1+\sqrt{z})}=\frac{(1+\sqrt{z})e^{a(\ln|z|+i\varphi+i2\pi k)}}{1-z}\ .$$

Для ветвей, у которых $\sqrt{1}=1$, точка $z=1$ – полюс первого порядка и вычет равен $(-2)\cdot 1^a=-2$, если a – целое число; если a – нецелое число, то вычет равен $(-2)\cdot 1^a$, где 1^a имеет различные значения для различных ветвей логарифма $(\operatorname{Ln} 1)$. Для остальных ветвей точка $z=1$ не является особой, и вычет в ней равен 0.

№ 4.103. $f(z)=\sqrt{(z-a)(z-b)}$ относительно точки $z=\infty$. Точка $z=\infty$ является изолированной особой точкой – полюсом первого порядка. Разложение в ряд Лорана в бесконечности получим, заменив $z=\dfrac{1}{\zeta}$ и разложив функцию в точке $\zeta=0$:

$$f(z)=f(\frac{1}{\zeta})=\sqrt{(\frac{1}{\zeta}-a)(\frac{1}{\zeta}-b)}=\frac{1}{\zeta}\sqrt{(1-a\zeta)(1-b\zeta)}=$$

$$=\pm\frac{1}{\zeta}[1-\frac{1}{2}(a+b)\zeta+\frac{ab}{2}\zeta^2-\frac{1}{8}(a+b)^2\zeta^2+\ldots]=$$

$$= \pm[z - \frac{a+b}{2} + (\frac{ab}{2} - \frac{(a+b)^2}{8})\frac{1}{z} + \ldots]$$

Отсюда

$$\operatorname{res}[f(z), \infty] = -c_{-1} = \pm\frac{(a-b)^2}{8}.$$

№ 4.104.

1) $\operatorname{Ln}\frac{z-\alpha}{z-\beta}$ относительно точки $z=\infty$. Точка $z=\infty$ является правильной для этой функции. Разложение в ряд Лорана в этой точке имеет вид

$$\operatorname{Ln}\frac{z-\alpha}{z-\beta} = \operatorname{Ln}\frac{\frac{1}{\zeta}-\alpha}{\frac{1}{\zeta}-\beta} = 2\pi ki + (\beta-\alpha)\zeta + \mathrm{o}(\zeta) = 2\pi ki + \frac{\beta-\alpha}{z} + \mathrm{o}(\frac{1}{z}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{res}[f(z), \infty] = -c_1 = \alpha - \beta$$

для всех ветвей функции.

2) $f(z) = e^z\operatorname{Ln}\frac{z-\alpha}{z-\beta}$ относительно точки $z=\infty$. Точка $z=\infty$ – существенно особая точка функции $f(z)$. Разложим функцию в точке $z=\infty$ в ряд Лорана, сделав замену $z=\frac{1}{\zeta}$ и разлагая полученную функцию по ζ в нуле:

$$f(z) = f(\frac{1}{\zeta}) = e^{\frac{1}{\zeta}}\operatorname{Ln}\frac{1-\alpha\zeta}{1-\beta\zeta} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!\zeta^n}[-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\alpha\zeta)^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\beta\zeta)^n}{n} + 2\pi ki] =$$

$$= -\left(1 + \frac{1}{\zeta} + \frac{1}{2!\zeta^2} + \frac{1}{3!\zeta^3} + \ldots + \frac{1}{n!\zeta^n} + \ldots\right)\times$$

$$\times\left[2\pi ki + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha\zeta)^{n+1}}{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\beta\zeta)^{n+1}}{n+1}\right];$$

c_{-1} – коэффициент при $z^{-1}=\zeta$, т.е. коэффициент при ζ. Он, очевидно, равен коэффициенту, который получается от перемножения члена $\dfrac{1}{n!\zeta^n}$ из первой скобки на член $\dfrac{(\alpha\zeta)^{n+1}}{n+1}-\dfrac{(\beta\zeta)^{n+1}}{n+1}$ из второй скобки. Таким образом,

$$\operatorname{res}\left[f(z),\infty\right]=-c_{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)!}-\frac{\beta^{n+1}}{(n+1)!}\right)=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\alpha^n}{n!}-\frac{\beta^n}{n!}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha^n}{n!}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\beta^n}{n!}=e^{\alpha}-1-\left(e^{\beta}-1\right)=e^{\alpha}-e^{\beta}.$$

№ 4.105.

1) $f(z)=\mathrm{Ln}z\cdot\sin\dfrac{1}{z-1}$ относительно точки z = 1. Разложим функцию $f(z)$ в ряд Лорана в точке z = 1:

$$f(z)=\mathrm{Ln}\left(1+(z-1)\right)\cdot\sin\frac{1}{z-1}=$$

$$=\left[2\pi ki+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(z-1)^n}{n}\right]\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!(z-1)^{2n+1}}.$$

Коэффициент c_{-1} берется от членов, полученных перемножением членов степени $2n$ из первой суммы и членов степени $2n$ + 1 (в знаменателе) из второй суммы. Учитывая, что многозначная функция $\mathrm{Ln}\,z$ в своем разложении имеет нулевой член $2\pi ki$, получаем

$$\operatorname{res}\left[f(z),1\right]=2\pi ki+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n(2n+1)!}.$$

2) $f(z)=\mathrm{Ln}\,z\cdot\cos\dfrac{1}{z-1}$. Делается аналогично.

№ 4.106.

$f(z)=\dfrac{\mathrm{Arctg}z}{z}$ относительно точек $z=0$ и $z=\infty$. В точке $z=0$ для ветви, у которой $\mathrm{Arctg}0=0$, вычет равен 0, так как точка $z=0$ – устранимая особая точка. Для остальных ветвей точка $z=0$ – полюс первого порядка и вычет равен $\pi k \ (k = \pm 1, \pm 2...)$. Таким образом, можно сказать, что для всех ветвей вычет равен $\pi k \ (k = \pm 1, \pm 2...)$. В точке $z = \infty$: так как $\lim\limits_{z\to\infty} \mathrm{Arctg} z = \frac{\pi}{2} + \pi k$, то разложение в ряд Лорана в бесконечности имеет вид:

$$\frac{\mathrm{Arctg} z}{z} = \frac{\frac{\pi}{2} + \pi k}{z} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{z}\right) \Rightarrow c_{-1} = \frac{\pi(2k+1)}{2}$$

и

$$\mathrm{res}\left[f(z), \infty\right] = -\frac{(2k+1)\pi}{2}.$$

№ 4.107.

$f(z) = z^n \cdot \mathrm{Ln}\frac{z-\alpha}{z-\beta}$ (n – целое число) относительно точек $z = 0$ и $z = \infty$ (при вычислении вычета относительно точки $z = 0$ предполагается, что $\alpha \neq 0,\ \beta \neq 0$).

В точке $z = 0$, так как разложение логарифма не содержит отрицательных степеней z, то вычет равен нулю при всех $n \geq 0$. При $n = -1$, $\mathrm{res}\left[f(z), 0\right] = \mathrm{Ln}\frac{\alpha}{\beta}$. Если $n < -1$, то разложение в нуле выглядит так:

$$f(z) = \frac{1}{z^{-n}}\left(\mathrm{Ln}(\alpha) - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{z}{\alpha}\right)^k - \mathrm{Ln}\beta + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{z}{\beta}\right)^k\right)$$

и c_{-1} получим, если в суммах брать только члены с

$$k = -n-1 \Rightarrow \mathrm{res}\left[f(z), 0\right] = c_{-1} = \frac{\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}}{n+1}.$$

В точке $z = \infty$

$$f(z) = z^n\left[2\pi k i - \sum_{m=0}^{\infty}\frac{\alpha^{m+1}}{(m+1)\cdot z^{m+1}} + \sum_{m=0}^{\infty}\frac{\beta^{m+1}}{(m+1)\cdot z^{m+1}}\right]$$

(см. № 4.104 (2)). При $n \le -2$ в разложении отсутствует член вида $\frac{c_{-1}}{z}$, поэтому вычет равен 0. При $n = -1$

$$\operatorname{res}\left[f(z), \infty\right] = -2\pi k i$$

и при $n \ge 0$

$$\operatorname{res}\left[f(z), \infty\right] = -c_{-1} = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{n+1}.$$

Рекомендуемый перечень задач для решения в аудитории:
[3], № 4.79, 4.81 , 4.83, 4.84 , 4.87, 4.88, 4.90 (2), 4.95 .
Резерв:
[3], № 4.91, 4.94, 4.96, 4.97, 4.98, 4.99.
Для самостоятельной работы дома:
[3], № 4.80, 4.82, 4.85, 4.86, 4.90 (1), 4.92 (1), 4.93.

11. ВЫЧИСЛЕНИЕ КОНТУРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ С ПОМОЩЬЮ ВЫЧЕТОВ. ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ ОТ НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Здесь рассматриваются два типа задач: вычисление интегралов по замкнутому контуру в комплексной плоскости с помощью основной теоремы о вычетах (см. предыдущую тему) и вычисление некоторых действительных определенных интегралов с помощью перехода к комплексной переменной.

Вычисление интегралов по замкнутому контуру

По основной теореме о вычетах

$$\oint_{\gamma} f(z)dz = 2\pi i\sum_{k} \operatorname{res}\left[f(z), z_k\right],$$

где z_k – изолированные особые точки, находящиеся внутри контура γ, проходимого в положительном направлении.

В следующих примерах необходимо вычислить интеграл по заданному замкнутому контуру.

Пример 11.1 ([3], № 4.115). $\int\limits_{C} \dfrac{dz}{z^4+1}$, где C – окружность $x^2 + y^2 = 2x$.

Решение. Найдем особые точки подынтегральной функции, приравняв нулю знаменатель: $z^4+1=0$, $z^4=-1$, $z=\sqrt[4]{-1}$.

Таких корней четвертой степени, как известно, четыре. Они находятся по формуле

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \cdot e^{i\cdot\frac{\varphi+2\pi k}{n}} \qquad (k = 0,1,2,...,n–1). \tag{11.1}$$

В нашем случае $z=-1$, $|z|=1$, $\varphi=\pi$, $n=4$. Поэтому

$$\sqrt[4]{-1} = e^{\frac{i\pi(2k+1)}{4}} \qquad (k = 0,1,2,3).$$

При $k=0$ имеем одно из четырех значений корня:

$$z_0 = e^{i\cdot\frac{\pi}{4}} = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)\,.$$

Поскольку все корни располагаются на одной окружности радиусом $\sqrt[n]{|z|}$ (в нашем случае радиус равен 1) с центром в начале координат и отстоят друг от друга на угол $\dfrac{2\pi}{n}$ (в нашем случае на угол $\dfrac{\pi}{2}$), то остальные три значения корня могут быть сразу получены из геометрических соображений без вычислений:

$$z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i),\ z_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i),\ z_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i).$$

Контур C представляет собой окружность $(x-1)^2 + y^2 = 1$ с центром в точке $(1,0)$ и радиусом $R = 1$. Поэтому внутри контура находятся только две точки: z_0 и z_3. В этих точках функция имеет полюс первого порядка. Вычислим вычеты в точках z_k по формуле $\dfrac{\varphi}{\psi'}$ (10.3):

$$\operatorname{res}[f(z), z_k] = \frac{\varphi(z_k)}{\psi'(z_k)} = \frac{1}{4z_k^3} = \frac{1}{4z_k^3}\cdot\frac{z_k}{z_k} = \frac{z_k}{4z_k^4} = -\frac{1}{4}z_k$$

(так как $z_k^4 = -1$),

$$\int\limits_C f(z)dz = 2\pi i\sum \operatorname{res} = 2\pi i\left\{\operatorname{res}[f(z), z_0] + \operatorname{res}[f(z), z_3]\right\} =$$

$$= 2\pi i\left(-\frac{1}{4}\right)(z_0 + z_3) = -\frac{\pi i}{2}\cdot\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i) + \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)\right] = -\frac{\pi i}{\sqrt{2}}\,.$$

Пример 11.2 ([3] № 4.117). $\displaystyle\int\limits_C \frac{dz}{(z-3)(z^5-1)}$, где C – окружность $|z| = 2$.

Решение. Особые точки: $z = 3$ – полюс первого порядка и пять точек z_k, равных корню пятой степени из единицы.

Пользуясь тем, что сумма вычетов во всей комплексной плоскости и в бесконечности равна нулю, можно сосчитать вычеты в точках, находящихся вне контура *C*. Интеграл будет равен

$$\int_C f(z)dz = -2\pi i \cdot \sum \mathrm{res} \quad \text{(во внешних точках).}$$

Вне контура находятся точки $z = 3$ и $z = \infty$:

$$\mathrm{res}\left[f(z), 3\right] = \lim_{z \to 3} f(z) \cdot (z-3) = \frac{1}{3^5 - 1} = \frac{1}{242};$$

Вычет в точке $z = \infty$ равен нулю, так как, выделив главную часть функции $f(z)$ при $z \to \infty$, получим

$$f(z) = \frac{1}{z^6} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{z^6}\right),$$

т.е. ряд Лорана в бесконечности начинается с шестой степени $\frac{1}{z}$, поэтому $c_{-1} = 0$. Окончательно

$$\int_C \frac{dz}{(z-3)(z^5-1)} = -\frac{\pi i}{121}.$$

Пример 11.3 ([3], № 4.118). $\int_C \frac{z^3 dz}{2z^4 + 1}$, где C – окружность $|z| = 1$.

Решение. Внутрь контура попадают четыре точки $z_k = \sqrt[4]{-\frac{1}{2}}$. Удобнее считать интеграл по внешним точкам. Это всего одна точка $z = \infty$. Выделяя главную часть подынтегральной функции при $z = \infty$, получим

$$\frac{z^3}{2z^4 + 1} \underset{z \to \infty}{=} \frac{1}{2z} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{z}\right),$$

тем самым найдем коэффициент c_{-1} в разложении функции в ряд Лорана в бесконечности: $c_{-1} = \frac{1}{2}$. Следовательно, $\mathrm{res}\left[f(z), \infty\right] = -\frac{1}{2}$.

$$\int_C \frac{z^3 dz}{2z^4 + 1} = -2\pi i \cdot \mathrm{res}\left[f(z), \infty\right] = \pi i.$$

Пример 11.4 ([3], № 4.121). $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \sin^2\frac{1}{z}dz$, где C – окружность $|z| = r$.

Решение. В конечной части плоскости подынтегральная функция имеет лишь одну особую точку $z = 0$ (существенно особая точка). Поэтому независимо от величины радиуса r внутрь контура попадает только эта точка. Так как функция $\sin^2\frac{1}{z}$ четная, то ее разложение в ряд Лорана в нуле содержит только четные степени $\frac{1}{z}$. Поэтому $c_{-1} = 0$, и искомый интеграл равен нулю.

Пример 11.5 ([3], № 4.122). $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C z^n e^{\frac{2}{z}}dz$, где n – целое число, а C – окружность $|z| = r$.

Решение. Внутри контура одна особая точка $z = 0$ (существенно особая). Разложим подынтегральную функцию в ряд Лорана в этой точке:

$$f(z) = z^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(\frac{2}{z}\right)^k,$$

отсюда

$$c_{-1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$$

(если $n \geq -1$) и

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_c z^n e^{\frac{2}{z}}dz = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}.$$

При $n < -1$ $c_{-1} = 0$ и интеграл равен нулю.

Пример 11.6 ([3], № 4.123). Вычислить интеграл

$$I = \int\limits_{|z|=3} \left(1 + z + z^2\right)\left(e^{\frac{1}{z}} + e^{\frac{1}{z-1}} + e^{\frac{1}{z-2}}\right)dz.$$

Решение. В силу линейных свойств интеграла:

$$I=\int\limits_{|z|=3}\left(1+z+z^2\right)e^{\frac{1}{z}}dz+\int\limits_{|z|=3}\left(1+z+z^2\right)e^{\frac{1}{z-1}}dz+$$

$$+\int\limits_{|z|=3}\left(1+z+z^2\right)e^{\frac{1}{z-2}}dz=I_1+I_2+I_3.$$

Сосчитаем эти три интеграла. Подынтегральная функция в интеграле I_1 имеет одну особую точку внутри контура интегрирования $z=0$ (существенно особая точка). Разложим функцию в ряд Лорана в этой точке:

$$f(z)=\left(1+z+z^2\right)e^{\frac{1}{z}}=\left(1+z+z^2\right)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{z}\right)^n=$$

$$=\left(1+z+z^2\right)\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2z^2}+\frac{1}{3!z^3}+\ldots\right).$$

Соберем все коэффициенты при $\frac{1}{z}$:

$$c_{-1}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3!}=\frac{5}{3}.$$

Таким образом, $I_1=2\pi i\cdot\frac{5}{3}$.

Аналогично поступим, вычисляя интеграл I_2, подынтегральная функция в котором содержит также одну особую точку $z=1$. Предварительно многочлен $1+z+z^2$ представим в виде многочлена по степеням $z-1$:

$$1+z+z^2=1+(z-1)+1+\left[(z-1)+1\right]^2=(z-1)^2+3(z-1)+3.$$

Разложение в ряд Лорана в точке $z=1$ будет иметь вид:

$$f(z)=\left(1+z+z^2\right)e^{\frac{1}{z-1}}=\left[(z-1)^2+3(z-1)+3\right]\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{(z-1)^n}=$$

$$=\left[(z-1)^2+3(z-1)+3\right]\cdot\left[1+\frac{1}{z-1}+\frac{1}{2(z-1)^2}+\frac{1}{3!(z-1)^3}+\ldots\right].$$

Опять соберем коэффициенты при $\dfrac{1}{z-1}$, чтобы получить c_{-1}:

$$\operatorname{res}[f(z),1] = c_{-1} = 3 + \frac{3}{2} + \frac{1}{3!} = \frac{14}{3}.$$

Следовательно $I_2 = 2\pi i \cdot \dfrac{14}{3}$. Действуя таким же образом, найдем, что интеграл $I_3 = 2\pi i \cdot \dfrac{29}{3}$. Окончательно получим

$$I = 2\pi i\left(\frac{5}{3} + \frac{14}{3} + \frac{29}{3}\right) = 32\pi i.$$

Пример 11.7 ([3], № 4.127). $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C \frac{dz}{\sqrt{z^2+z+1}}$, где C – окружность $|z| = r \neq 1$.

Решение. Функция $f(z) = \dfrac{1}{\sqrt{z^2+z+1}}$ – двузначная. Однако в окрестности точки $z = 0$ она допускает разделение на две независимые однозначные аналитические ветви, отличающиеся знаком, так как точка $z = 0$ не является точкой ветвления этой функции. Особыми точками функции являются ее точки ветвления, которые найдем, приравняв подкоренное выражение нулю:

$$z^2 + z + 1 = 0 \Rightarrow z_{1,2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

Оба корня по модулю равны единице. Поэтому, если радиус контура интегрирования $r < 1$, то внутри контура особых точек нет, и интеграл от каждой из двух ветвей равен 0. Если $r > 1$, то вне контура особых точек нет, но вычет в бесконечно удаленной точке не равен нулю, так как при $z \to \infty$

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{z^2+z+1}} \sim \pm\frac{1}{z},$$

$$\operatorname{res}[f(z),\infty] = -c_{-1} = \pm 1.$$

Как известно, контурный интеграл, вычисляемый по внешним точкам, равен

$$-2\pi i\sum_k \operatorname{res}\left[f(z), z_k\right],$$

где z_k – особые точки вне контура. В данном случае (при $r>1$)

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{dz}{\sqrt{z^2+z+1}}=\pm 1.$$

Пример 11.8 ([3], № 4.128). $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C \frac{dz}{\left(z^4+1\right)\sqrt{z^2+1}}\left(\sqrt{1}=1\right)$, где C – парабола $y^2=x$, обходимая в сторону возрастания y.

Решение. Контур C можно рассматривать как замкнутый, проходящий через бесконечно удаленную точку, в которой ветви параболы замыкаются (рис. 11.1). Бесконечность – правильная точка для обеих ветвей подынтегральной функции. Найдем особые точки, попадающие внутрь контура, приравняв нулю многочлен z^4+1. Получим две точки внутри контура $z_1=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ и $z_2=\dfrac{\sqrt{2}}{2}-i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ – полюсы первого порядка. Вычеты вычислим по формуле $\dfrac{\varphi}{\psi'}$, приняв за φ функцию $\dfrac{1}{\sqrt{z^2+1}}$, а за ψ функцию

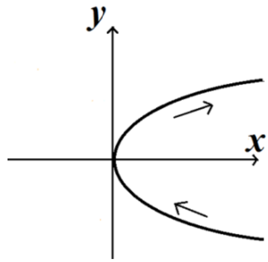


Рис. 11.1

$$z^4+1;$$

$$\operatorname{res}\left[f(z), z_{1,2}\right]=\frac{1}{4z_{1,2}^3\cdot\sqrt{z_{1,2}^2+1}}=\frac{1}{4}\cdot\frac{z_{1,2}}{z_{1,2}^4\cdot\sqrt{z_{1,2}^2+1}},$$

где $z_{1,2}^4=-1$. Обозначим $z+i=\rho_1 e^{i\varphi_1}$, $z-i=\rho_2 e^{i\varphi_2}$. По определению корня

$$\sqrt{z^2+1}=\sqrt{(z+i)(z-i)}=\sqrt{\rho_1\rho_2}\,e^{i\frac{\varphi_1+\varphi_2+2\pi k}{2}}\quad (k=0,1).$$

Так как для выбора одной ветви из двух дано условие $\sqrt{1}=1$, то есть $\sqrt{z^2+1}\Big|_{z=0}=1$, то при $z=0$ $z+i=\rho_1 e^{i\varphi_1}$ имеем

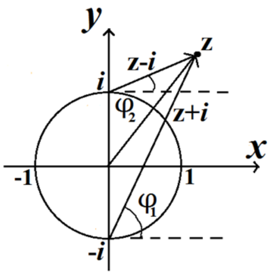


Рис. 11.2

$$\rho_1 = 1;\ \varphi_1 = \frac{\pi}{2},\quad z - i = \rho_2 e^{i\varphi_2},$$

$$\rho_2 = 1;\ \varphi_2 = -\frac{\pi}{2},\ \sqrt{z^2+1} = e^{i\pi k} = 1 \Rightarrow k = 0$$

(рис. 11.2).

Следовательно, мы должны рассматривать ветвь корня, задаваемую выражением

$$\sqrt{z^2+1} = \sqrt{\rho_1\rho_2}\cdot e^{i\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}}.$$

Вычислим значение этой ветви в точке $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$. Вектор

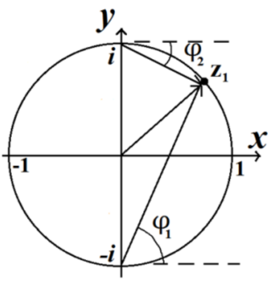


Рис. 11.3

$z + i$ имеет в этой точке модуль

$$\rho_1^2 = 1 + 1 - 2\cos\frac{3\pi}{4} = 2 + \frac{2\sqrt{2}}{2} = 2 + \sqrt{2},$$

$$\rho_1 = \sqrt{2+\sqrt{2}},$$

его аргумент $\varphi_1 = \frac{3\pi}{8}$ (рис. 11.3), вектор $z - i$ имеет в этой точке модуль

$$\rho_2^2 = 1 + 1 - 2\cos\frac{\pi}{4} = 2 - \sqrt{2},\quad \rho_2 = \sqrt{2-\sqrt{2}},$$

его аргумент $\varphi_2 = -\frac{\pi}{8}$. Получаем, что

$$\sqrt{z_1^2+1} = \sqrt{\rho_1\rho_2}\cdot e^{i\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}} = \sqrt[4]{\left(2-\sqrt{2}\right)\left(2+\sqrt{2}\right)}\cdot e^{i\frac{\pi}{8}} = \sqrt[4]{2}\cdot e^{i\frac{\pi}{8}}.$$

Аналогично рассматривается точка $z = z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$. Ввиду симметрии этих двух точек относительно оси x сразу получаем, что $\sqrt{z_2^2+1} = \sqrt[4]{2}\cdot e^{-i\frac{\pi}{8}}$. Для суммы вычетов получим значение:

$$-\frac{1}{4}\left(\frac{z_1}{\sqrt{z_1^2+1}} + \frac{z_2}{\sqrt{z_2^2+1}}\right) = -\frac{1}{4}\left(\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt[4]{2}\cdot e^{i\frac{\pi}{8}}} + \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt[4]{2}\cdot e^{-i\frac{\pi}{8}}}\right) =$$

$$=-\frac{1}{4\sqrt[4]{2}}\left(e^{i\frac{\pi}{8}}+e^{-i\frac{\pi}{8}}\right)=-\frac{1}{4\sqrt[4]{2}}\cdot 2\cos\frac{\pi}{8}=-\frac{1}{2\sqrt[4]{2}}\cdot\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}}=$$

$$=-\frac{1}{2\sqrt[4]{2}\sqrt{2}}\cdot\sqrt{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}=-\frac{1}{2\sqrt[4]{2}\cdot 2}\sqrt{2+\sqrt{2}}=-\frac{1}{4}\sqrt{1+\sqrt{2}}\,.$$

Так как по условию обход контура происходит по часовой стрелке (т.е. в отрицательном направлении), то надо взять полученный результат с противоположным знаком:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{dz}{\left(z^4+1\right)\sqrt{z^2+1}}=-\left[\operatorname{res}\left[f(z),z_1\right]+\operatorname{res}\left[f(z),z_2\right]\right]=\frac{1}{4}\sqrt{1+\sqrt{2}}.$$

Пример 11.9 ([3], № 4.129). $\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{dz}{a^z\sin\pi z}$ $\left(a^z=e^{z\ln a}\right)$, где $a>0$, а C – проходимая снизу вверх прямая $x=\alpha,\ 0<\alpha<1$.

Решение. Рассмотрим контур γ, представленный на рис. 11.4. Внутри контура функция $f(z)=\frac{1}{a^z\sin\pi z}$ имеет единственную особую точку z = 1 – полюс первого порядка. Вычет в этой точке вычислим по формуле $\frac{\varphi}{\psi'}$. Полагая $\varphi(z)=\frac{1}{a^z}$, $\psi(z)=\sin\pi z$, $\psi'(z)=\pi\cos\pi z$,

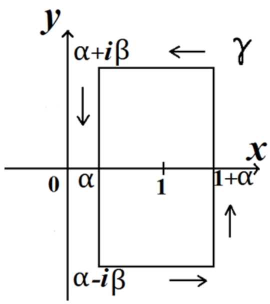


Рис. 11.4

$$\operatorname{res}\left[f(z),1\right]=\frac{\varphi(1)}{\psi'(1)}=\frac{-1}{a\pi}.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{dz}{a^z\sin\pi z}=-\frac{1}{a\pi}.$$

С другой стороны, этот интеграл равен сумме четырех интегралов по четырем сторонам прямоугольника, образующего контур γ. Рассмотрим каждый из них. Интеграл по нижнему горизонтальному отрезку $z = x - i\beta$ равен $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_{\alpha}^{1+\alpha}\dfrac{dx}{e^{(x-i\beta)\ln a}\cdot\sin\pi(x-i\beta)}$. Оценим его значение по модулю при $\beta \to +\infty$:

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\alpha}^{1+\alpha}\frac{dx}{e^{(x-i\beta)\ln a}\cdot(\sin\pi x\cdot\cos\pi i\beta - \cos\pi x\sin\pi i\beta)}\right| \le$$

$$\le \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\alpha}^{1+\alpha}\frac{dx}{e^{x\ln a}\cdot\sqrt{\sin^2\pi x\cdot \mathrm{ch}^2\pi\beta + \cos^2\pi x\cdot \mathrm{sh}^2\pi\beta}} \Rightarrow 0,$$

так как под корнем в знаменателе экспоненциально растущая с ростом β функция. Аналогично оценивается интеграл по верхнему горизонтальному отрезку. Рассмотрим интегралы по вертикальным прямым. Обозначим вычисляемый интеграл:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C}\frac{dz}{a^z\sin\pi z} = I.$$

Интеграл по левой вертикальной прямой (где $z = \alpha + iy$) равен

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\beta}^{-\beta}\frac{idy}{e^{(\alpha+iy)\ln a}\cdot\sin\pi(\alpha+iy)} \underset{\beta\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{+\infty}^{-\infty}\frac{idy}{e^{(\alpha+iy)\ln a}\cdot\sin(\pi\alpha+\pi iy)} = -I;$$

интеграл по правой вертикальной прямой $(z = 1 + \alpha + iy)$ равен

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\beta}^{\beta}\frac{idy}{e^{\ln a}e^{(\alpha+iy)\ln a}\cdot\sin\pi(1+\alpha+iy)} =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i\cdot e^{\ln a}}\int\limits_{-\beta}^{\beta}\frac{idy}{e^{(\alpha+iy)\ln a}\cdot\sin(\pi\alpha+\pi iy)} \underset{\text{при } \beta\to+\infty}{\longrightarrow} -\frac{I}{a}.$$

Получаем равенство

$$-I - \frac{I}{a} = -\frac{1}{a\pi} \Rightarrow I = \frac{1}{\pi(a+1)}.$$

Пример 11.10 ([3], № 4.130). $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_{C}\dfrac{e^z dz}{\cos z}$, где контур интегрирования C указан на рис. 11.5.

Решение. Контур C сделаем замкнутым, проведя через точку $z = n$ (n – целое отрицательное число) вертикальный отрезок. Можно показать, что интеграл по этому отрезку при $n \to -\infty$ стремится к нулю, потому что при $n \to -\infty$

$$\left| \int_{-a}^{a} \frac{e^{n+iy} \cdot i dy}{\cos(n+iy)} \right| \le$$

$$\le e^n \int_{-a}^{a} \frac{dy}{\sqrt{\cos^2 n \cdot \operatorname{ch}^2 y + \sin^2 n \cdot \operatorname{sh}^2 y}} \to 0.$$

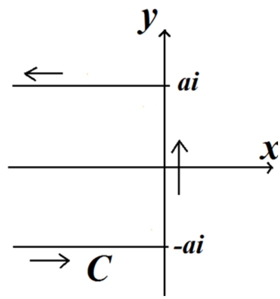


Рис. 11.5

Тогда интеграл равен сумме вычетов в изолированных особых точках подынтегральной функции. Это будут точки

$$\cos z = 0 \Rightarrow z_k = \frac{\pi}{2} + \pi k \quad (k = -1, -2, \ldots),$$

$$\operatorname{res}[f(z), z_k] = \frac{e^{\frac{\pi}{2}+\pi k}}{-\sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right)} = \frac{e^{\frac{\pi}{2}+\pi k}}{-\cos \pi k} = (-1)^{k+1} \cdot e^{\frac{\pi}{2}+\pi k}$$

$$(k = -1, -2, \ldots),$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^z dz}{\cos z} = -\sum_{k=-1}^{-\infty} (-1)^k \cdot e^{\frac{\pi}{2}+\pi k} = -e^{\frac{\pi}{2}} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\pi k} \cdot (-1)^k .$$

Под знаком суммы стоит бесконечно убывающая геометрическая прогрессия со знаменателем $q = -e^{-\pi}$ и первым членом $a_1 = -e^{-\pi}$. По формуле суммы прогрессии $S = \frac{a_1}{1-q}$ получим, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot e^{-\pi k} = \frac{-e^{-\pi}}{1+e^{-\pi}} = -\frac{1}{1+e^{\pi}} .$$

Таким образом,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^z dz}{\cos z} = -e^{\frac{\pi}{2}} \cdot \left(-\frac{1}{1+e^{\pi}} \right) = \frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{1+e^{\pi}} .$$

Вычисление определенных интегралов

Интегралы типа $\int_0^{2\pi} \boldsymbol{R(\sin\varphi, \cos\varphi)d\varphi}$, где $R(\sin\varphi,\ \cos\varphi)$ – рациональная функция переменных $\sin\varphi,\ \cos\varphi$, вычисляются переходом к комплексной переменной $z = e^{i\varphi}$ и интегрированием в комплексной плоскости по контуру $|z| = 1$ (см. п.11.1).

Пример 11.11 ([3], № 4.131).

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a + \cos\varphi} \qquad (a > 1)\,.$$

Решение. Вводим комплексную переменную $z = e^{i\varphi}$, $dz = ie^{i\varphi}d\varphi$, откуда $d\varphi = \dfrac{dz}{iz}$. По формуле Эйлера

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} = \frac{z + z^{-1}}{2}\,,$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a + \cos\varphi} = \int\limits_{|z|=1} \frac{dz}{iz\left(a + \dfrac{z + z^{-1}}{2}\right)} = \frac{2}{i}\int\limits_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 + 2az + 1}\,.$$

Знаменатель подынтегральной функции обращается в нуль в точках $z_{1,2} = -a \pm \sqrt{a^2 - 1}$. При $a > 1$ из этих двух точек только точка $z_1 = -a + \sqrt{a^2 - 1}$ попадает внутрь контура интегрирования $|z| = 1$ (единичная окружность с центром в начале координат), так как, по теореме Виета, произведение $z_1 z_2 = 1$ (т.е. если один корень внутри единичной окружности, то другой – вне ее). В этой точке функция имеет полюс первого порядка, так как квадратный трехчлен разлагается на множители $z^2 + 2az + 1 = (z - z_1)(z - z_2)$. Для вычисления интеграла найдем вычет в точке $z_1 = -a + \sqrt{a^2 - 1}$ по формуле (10.2):

$$\operatorname{res}[f(z), z_1] = \lim_{z \to z_1} \frac{1}{(z - z_1)(z - z_2)} \cdot (z - z_1) =$$

$$=\frac{1}{z_1-z_2}=\frac{1}{-a+\sqrt{a^2-1}-(-a-\sqrt{a^2-1})}=\frac{1}{2\sqrt{a^2-1}}.$$

Искомый интеграл равен:

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{a+\cos\varphi}=2\pi i\cdot\frac{2}{i}\cdot\frac{1}{2\sqrt{a^2-1}}=\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}.$$

Пример 11.12 ([3], № 4.134). $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{1-2a\cos\varphi+a^2}$ (a – комплексное число и $a\neq\pm1$).

Решение. Как и в предыдущем примере, введем комплексную переменную $z=e^{i\varphi}$:

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{1-2a\cos\varphi+a^2}=\int_{|z|=1}\frac{dz}{iz\left(1-2a\cdot\dfrac{z+z^{-1}}{2}+a^2\right)}=-\frac{1}{ia}\int_{|z|=1}\frac{dz}{z^2-\dfrac{1+a^2}{a}z+1}.$$

Корни квадратного трехчлена, стоящего в знаменателе:

$$z_{1,2}=\frac{a^2+1}{2a}\pm\frac{a^2-1}{2a};\ z_1=a;\ z_2=\frac{1}{a}.$$

При $|a|<1$ внутри контура интегрирования находится точка z_1, а z_2 – вне контура. Вычет в точке z_1 (полюс первого порядка) равен

$$\operatorname{res}[f(z),z_1]=\lim_{z\to z_1}f(z)\cdot(z-z_1)=\lim_{z\to z_1}\frac{(z-z_1)}{(z-z_1)(z-z_2)}=$$

$$=\frac{1}{(z_1-z_2)}=\frac{1}{a-\dfrac{1}{a}}=\frac{a}{a^2-1}.$$

Поэтому искомый интеграл равен

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{1-2a\cos\varphi+a^2}=-\frac{1}{ia}\int_{|z|=1}\frac{dz}{(z-z_1)(z-z_2)}=$$

$$=-\frac{1}{ia}\cdot2\pi i\frac{a}{a^2-1}=\frac{2\pi}{1-a^2}.$$

В случае, если $|a|>1$, внутрь контура попадает точка $z_2=\frac{1}{a}$:

$$\operatorname{res}\left[f(z),z_2\right]=\lim_{z\to z_2}\frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)}(z-z_2)=\frac{1}{z_2-z_1}=\frac{1}{\frac{1}{a}-a}=\frac{a}{1-a^2}.$$

Интеграл равен $\frac{2\pi}{a^2-1}$. Если же $a=\pm1$, то

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{1-2a\cos\varphi+a^2}=\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{2(1\pm\cos\varphi)}$$

и подынтегральная функция имеет в точке $\varphi=0$ (или $\varphi=\pi$ соответственно) особенность типа $\frac{1}{\varphi^2}$, т.е. интеграл не существует даже в смысле главного значения. Наконец, если $|a|=1$, но $a\neq\pm1$, т.е. $a=e^{i\alpha}(\alpha\neq 0,\pi,2\pi)$, то

$$-\frac{1}{ia}\int_{|z|=1}\frac{dz}{(z-z_1)(z-z_2)}=-\frac{1}{a}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\varphi}d\varphi}{\left(e^{i\varphi}-e^{i\alpha}\right)\left(e^{i\varphi}-e^{-i\alpha}\right)}=$$

$$=-\frac{1}{a}\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{\left(1-e^{i(\alpha-\varphi)}\right)\left(e^{i\varphi}-e^{-i\alpha}\right)}.$$

В точках $\varphi=\pm\alpha$ подынтегральная функция имеет особенность типа $\frac{1}{\varphi-\alpha}$, т.е. главное значение интеграла существует (оно в этом случае равно нулю).

Рекомендуемый перечень задач для решения в аудитории:
[3], № 4.115, 4.117, 4.120, 4.121, 4.122, 4.131.
Резерв:
[3], № 4.123, 4.128, 4.129, 4.130, 4.134.
Для самостоятельной работы дома:
[3], № 4.118, 4.119, 4.124, 4.132.
На усмотрение преподавателя: [3], № 4.127, 4.133.

12. ВЫЧИСЛЕНИЕ НЕСОБСТВЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Рассмотрим интегралы вида $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$. Если функция $f(x)$, заданная на всей действительной оси, может быть аналитически продолжена на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ и ее аналитическое продолжение, функция $f(z)$, удовлетворяет следующим условиям: $f(z)$ аналитична всюду в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$, за исключением конечного числа изолированных особых точек; существуют такие положительные числа *R, M* и δ, что для всех точек верхней полуплоскости, удовлетворяющих условию $|z| > R$, имеет место оценка

$$|f(z)| < \frac{M}{|z|^{1+\delta}}, \tag{12.1}$$

Тогда несобственный интеграл первого рода $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ существует и равен:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} \operatorname{res}[f(z), z_k], \tag{12.2}$$

где z_k – особые точки функции $f(z)$ в верхней полуплоскости.

В следующих примерах вычислить интегралы по бесконечному промежутку.

Пример 12.1 ([3], № 4.140).

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{xdx}{(x^2+4x+13)^2}.$$

Решение. Обратим внимание на то, что данный интеграл легко вычисляется и без применения методов ТФКП, а именно: выделив в скобках в знаменателе полный квадрат и сделав замену переменной $(x+2)^2 = t$, получим

$$\int\limits_{+\infty}^{-\infty} \frac{xdx}{(x^2+4x+13)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t+9} - 2\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+4x+13)^2} =$$

$$=\frac{1}{2}\ln(x^2+4x+13)\Big|_{-\infty}^{+\infty}-2\int\limits_{(t=x+2)}\frac{dt}{(t^2+9)^2}=$$

$$=-\frac{t}{9(t^2+9)}-\frac{1}{27}\operatorname{arctg}\frac{t}{3}=-\frac{x+2}{9(x^2+4x+13)}\Big|_{-\infty}^{+\infty}-\frac{1}{27}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{3}\Big|_{-\infty}^{+\infty}=$$

$$=-\frac{\pi}{27}.$$

Получим этот результат с помощью вычетов (формула (12.2)). Указанная формула применима, так как подынтегральная функция удовлетворяет всем перечисленным выше условиям. Найдем ее особые точки, приравняв нулю знаменатель

$$z^2+4z+13=0\Rightarrow z_{1,2}=-2\pm\sqrt{4-13}=-2\pm 3i.$$

В верхней полуплоскости находится одна из этих точек $z_1=-2+3i$ (полюс второго порядка).

$$\operatorname{res}[f(z),z_1]=\lim_{z\to z_1}\frac{d}{dz}[f(z)(z-z_1)^2]=\lim_{z\to z_1}\frac{d}{dz}[\frac{z}{(z-z_2)^2}]=$$

$$=\frac{z_1+z_2}{(z_2-z_1)^3}=\frac{-4}{(-6i)^3}=-\frac{1}{54i}.$$

Откуда

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=2\pi i\cdot\operatorname{res}[f(z),z_1]=-\frac{\pi}{27}.$$

Пример 12.2 ([3], № 4.142). $\int\limits_0^\infty\frac{dx}{(x^2+1)^n}$ (n – натуральное число).

Решение. Так как подынтегральная функция четная, то

$$\int\limits_0^\infty\frac{dx}{(x^2+1)^n}=\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^n}.$$

Убедившись в применимости формулы (12.2), имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^n}=2\pi i\cdot\operatorname{res}[f(z),i],$$

где $f(z)=\dfrac{1}{(z^2+1)^n}$ – аналитическое продолжение подынтегральной функции на верхнюю полуплоскость, а точка i – единственная особая точка этой функции в верхней полуплоскости (полюс n-го порядка). Тогда

$$\operatorname{res}[f(z),i]=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to i}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}[f(z)(z-i)^n]=\frac{1}{(n-1)!}\lim\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\times$$

$$\times\left[\frac{1}{(z-i)^n(z+i)^n}\cdot(z-i)^n\right]=\frac{1}{(n-1)!}\cdot\left.\frac{(-1)^{n-1}n(n+1)...(2n-2)}{(z+i)^{2n-1}}\right|_{z=i}=$$

$$=\frac{(-1)^{n-1}n(n+1)...(2n-2)}{(n-1)!2^{2n-1}i^{2n-1}}=\frac{n(n+1)...(2n-2)}{2^{2n-1}i(n-1)!}\qquad(n>1),$$

$$\int_0^\infty\frac{dx}{(x^2+1)^n}=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty\frac{dx}{(x^2+1)^n}=\frac{\pi n(n+1)...(2n-2)}{2^{2n-1}(n-1)!}=$$

$$=\frac{1\cdot3\cdot5...(2n-3)}{2\cdot4\cdot6...(2n-2)}\cdot\frac{\pi}{2}\qquad(n>1)$$

(так как $2^{n-1}\cdot(n-1)!=(2n-2)!!=2\cdot4\cdot6\cdot8...2n-2$). При $n=1$

$$\int_0^\infty\frac{dx}{x^2+1}=\frac{\pi}{2}.$$

Пример 12.3 ([3], № 4.144).

$$\int_0^\infty\frac{x^2+1}{x^4+1}dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2+1}{x^4+1}dx.$$

Решение. Корни знаменателя подынтегральной функции $z=\sqrt[4]{-1}=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1\pm i)$. Из четырех корней два: $z_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$ и $z_2=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(-1+i)$ (полюсы первого порядка) находятся в верхней полуплоскости:

$$\operatorname{res}[f(z),z_k]=\left.\frac{\varphi}{\psi'}\right|_{z=z_k}=\frac{z_k^2+1}{4z_k^2}=-\frac{1}{4}(z_k^2+1)z_k\ ;$$

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{x^2+1}{x^4+1}dx=\frac{1}{2}2\pi i\{\operatorname{res}[f(z),z_1]+\operatorname{res}[f(z),z_2]\}=$$

$$=-\frac{\pi i}{4\sqrt{2}}[(1+i)^2+(-1+i)(1-i)]=\frac{\pi}{\sqrt{2}}\ .$$

Вычисление интегралов вида $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{iax}f(x)dx$ основывается на применении леммы Жордана: если функция $f(x)$, заданная на всей действительной оси, может быть продолжена на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} z>0$, и ее аналитическое продолжение $f(z)$ имеет в верхней полуплоскости лишь конечное число изолированных особых точек, равномерно относительно $\arg z$ $(0\le\arg z\le\pi)$ стремится к нулю при $|z|\to\infty$, тогда при $a>0$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{iax}f(x)dx=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{res}[e^{iaz}f(z),z_k]\,, \qquad (12.3)$$

где z_k – особые точки функции $f(z)$ в верхней полуплоскости.

Если к тому же функция $f(z)$ имеет полюсы первого порядка на действительной оси, то интеграл существует в смысле главного значения и равен

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{iax}f(x)dx=$$
$$=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{res}[e^{iaz}f(z),z_k]+\pi i\sum_{m=1}^{N}\operatorname{res}[e^{iaz}f(z),z_m], \qquad (12.4)$$

где z_k $(k=1,2,...,n)$ – особые точки в верхней полуплоскости, z_m ($m=1,2,...,N$) – особые точки на действительной оси. Интегралы типа

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\sin ax\,f(x)dx \text{ и } \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\cos ax\,f(x)dx\,,$$

где $f(x)$ удовлетворяет перечисленным требованиям, сводятся к предыдущим, так как

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin ax\, f(x)dx = \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iax} f(x)dx,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos ax\, f(x)dx = \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iax} f(x)dx.$$

В следующих примерах вычислить интегралы.

Пример 12.4 ([3], № 4.149).

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\cos x dx}{x^2-2x+10} \text{ и } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin x dx}{x^2-2x+10}.$$

Решение. Представим данные интегралы в виде

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\cos x dx}{x^2-2x+10} = \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{ix} dx}{x^2-2x+10},$$

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin x dx}{x^2-2x+10} = \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{ix} dx}{x^2-2x+10}.$$

Рассмотрим $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{ix} dx}{x^2-2x+10}$. Условия леммы Жордана выполнены. Особые точки функции $\dfrac{ze^{iz}}{z^2-2z+10}$ – полюсы первого порядка: $z_{1,2} = 1 \pm 3i$. Одна из них $z_1 = 1+3i$ лежит в верхней полуплоскости.

Согласно формуле (12.3)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{ix} dx}{x^2-2x+10} = 2\pi i \operatorname{res}[\frac{ze^{iz}}{z^2-2z+10}, z_1] = \frac{2\pi i(1+3i)e^{i(1+3i)}}{2(1+3i)-2} =$$

$$= \frac{2\pi i(1+3i)e^{-3}e^{i}}{2+6i-2} = \frac{2\pi}{6} e^{-3}(1+3i)(\cos 1 + i\sin 1) =$$

$$= \frac{\pi e^{-3}}{3}[\cos 1 - 3\sin 1 + i(\sin 1 + 3\cos 1)].$$

Здесь мы применили формулу Эйлера $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$. Отсюда получаем искомые интегралы:

$$I_1 = \mathrm{Re}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{ix}dx}{x^2-2x+10} = \frac{\pi e^{-3}}{3}(\cos 1 - 3\sin 1);$$

$$I_2 = \mathrm{Im}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{ix}dx}{x^2-2x+10} = \frac{\pi e^{-3}}{3}(\sin 1 + 3\cos 1).$$

Пример 12.5 ([3], № 4.151). $\int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{x^2+b^2}dx$ (a и b – положительные числа).

Решение. Так как подынтегральная функция четная, то

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{x^2+b^2}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ax}{x^2+b^2}dx = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iax}dx}{x^2+b^2}.$$

В верхней полуплоскости одна особая точка $z_0 = ib$ (полюс первого порядка):

$$\mathrm{res}[f(z), z_0] = \left.\frac{e^{iaz}}{2z}\right|_{z=ib} = \frac{e^{-ab}}{2bi};$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iax}dx}{x^2+b^2} = 2\pi i\,\mathrm{res}[f(z), z_0] = \frac{\pi}{b}e^{-ab} = \mathrm{Re}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iax}dx}{x^2+b^2}.$$

Поэтому искомый интеграл

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{x^2+b^2}dx = \frac{\pi}{2b}e^{-ab}.$$

Пример 12.6 ([3], № 4.154). $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itx}}{x}dx$.

Решение. У функции $\frac{e^{itz}}{z}$ в верхней полуплоскости особых точек нет, на действительной оси – одна особая точка $z_0 = 0$ – полюс первого порядка. Согласно формуле (12.4) при $t > 0$ имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itx}}{x} dx = \pi i \operatorname{res}\left[\frac{e^{itz}}{z}, z_0\right] = \pi i$$

(так как вычет равен 1). При $t < 0$ сделаем замену $t \to -t$. Тогда

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itx}}{x} dx = \int\limits_{+\infty}^{-\infty} \frac{e^{-itx}}{x} dx = -\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i|t|x}}{x} dx = -\pi i .$$

(Можно и сразу использовать лемму Жордана применительно к нижней полуплоскости.)

Наконец, при $t = 0$ получаем $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x}$. Подынтегральная функция нечетная, и поэтому главное значение интеграла равно нулю.

Пример 12.7 ([3], № 4.156).

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x dx}{(x^2+4)(x-1)} = \operatorname{Im} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix} dx}{(x^2+4)(x-1)}.$$

Решение. Функция $\frac{e^{iz}}{(z^2+4)(z-1)}$ имеет в верхней полуплоскости полюс первого порядка в точке $z = 2i$ и на действительной оси полюс первого порядка в точке $z = 1$.

$$\operatorname{res}[f(z), 2i] = \left.\frac{\varphi}{\psi'}\right|_{z=2i} = \frac{e^{-2}}{2 \cdot 2i(2i-1)} =$$

$$= \frac{e^{-2}(-2i-1)}{4i(2i-1)(-2i-1)} = \frac{(-2i-1)e^{-2}}{20i}$$

(здесь в качестве $\varphi(z)$ мы взяли функцию $\frac{e^{iz}}{z-1}$, а в качестве $\psi(z)$ функцию z^2+4);

$$\operatorname{res}[f(z), 1] = \lim_{z \to 1} f(z)(z-1) = \lim_{z \to 1} \frac{e^{iz}}{z^2+4} = \frac{e^i}{5} = \frac{\cos 1 + i \sin 1}{5};$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x dx}{(x^2+4)(x-1)} = \operatorname{Im} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix} dx}{(x^2+4)(x-1)} = \operatorname{Im}\{2\pi i \operatorname{res}[f(z), 2i] +$$

$$+\pi i\operatorname{res}[f(z),1]\} = \operatorname{Im}\left[2\pi i\frac{e^{-2}(-2i-1)}{20i} + \pi i\frac{\cos 1 + i\sin 1}{5}\right] =$$

$$= -\frac{\pi e^{-2}}{5} + \frac{\pi\cos 1}{5} = \frac{\pi}{5}(\cos 1 - e^{-2}) .$$

Пример 12.8 ([3], № 4.157).

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos tx dx}{1+x^3} = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos|t|x}{1+x^3}dx = \operatorname{Re}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i|t|x}}{1+x^3}dx .$$

Решение. Особые точки функции $\frac{e^{i|t|z}}{1+z^3}$: $z_1 = -1$ – на действительной оси (полюс первого порядка). Далее $z^2 - z + 1 = 0 \Rightarrow$ $z_{2,3} = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Из двух точек одна $z_2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ находится в верхней полуплоскости (полюс первого порядка):

$$\operatorname{res}\left[\frac{e^{i|t|z}}{1+z^3}, z_1\right] = \frac{\varphi}{\psi'}\bigg|_{z_1=-1} = \frac{e^{-i|t|}}{3};$$

$$\operatorname{res}\left[\frac{e^{i|t|z}}{1+z^3}, z_2\right] = \frac{e^{i|t|\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}}{3\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{4e^{-\frac{|t|\sqrt{3}}{2}}e^{\frac{i|t|}{2}}}{3(-2+2\sqrt{3}i)} =$$

$$= \frac{2e^{-\frac{|t|\sqrt{3}}{2}}\left(\cos\frac{|t|}{2} + i\sin\frac{|t|}{2}\right)}{3(-1+i\sqrt{3})} = \frac{2e^{-\frac{|t|\sqrt{3}}{2}}\left(\cos\frac{|t|}{2} + i\sin\frac{|t|}{2}\right)(-1-i\sqrt{3})}{3\cdot 4} .$$

Таким образом,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos tx}{1+x^3}dx = \operatorname{Re}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i|t|x}dx}{1+x^3} = \operatorname{Re}(2\pi i\operatorname{res}\big|_{z_2} + \pi i\operatorname{res}\big|_{z_1}) =$$

$$= \operatorname{Re}[\frac{\pi i}{3}e^{-\frac{|t|\sqrt{3}}{2}}(\cos\frac{|t|}{2} + i\sin\frac{|t|}{2})(-1-i\sqrt{3}) + \frac{\pi i}{3}(\cos|t| - i\sin|t|)] =$$

$$=\frac{\pi}{3}e^{-\frac{|t|\sqrt{3}}{2}}(\sin\frac{|t|}{2}+\sqrt{3}\cos\frac{t}{2})+\frac{\pi}{3}\sin|t|.$$

Пример 12.9 ([3], № 4.160).

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin ax dx}{x(x^2+b^2)}\quad (a>0, b>0).$$

Решение. Так как подынтегральная функция четная, то

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin ax dx}{x(x^2+b^2)}=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin ax dx}{x(x^2+b^2)}=\frac{1}{2}\operatorname{Im}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{iax}dx}{x(x^2+b^2)}.$$

Далее

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{iax}dx}{x(x^2+b^2)}=2\pi i\operatorname{res}\left[\frac{e^{iaz}}{z(z^2+b^2)}, ib\right]+\pi i\operatorname{res}\left[\frac{e^{iaz}}{z(z^2+b^2)}, 0\right]=$$

$$=2\pi i\frac{e^{-ab}}{ib\cdot 2ib}+\pi i\cdot\frac{1}{b^2}=-\frac{\pi e^{-ab}}{b^2}i+\frac{\pi i}{b^2},$$

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin ax dx}{x(x^2+b^2)}=\frac{1}{2}\operatorname{Im}\left(-\frac{\pi e^{-ab}}{b^2}i+\frac{\pi i}{b^2}\right)=\frac{\pi}{2b^2}\left(1-e^{-ab}\right).$$

Пример 12.10 ([3], № 4.162).

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos 2ax-\cos 2bx}{x^2}dx.$$

Решение.

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos 2ax-\cos 2bx}{x^2}dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos 2ax-\cos 2bx}{x^2}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\operatorname{Re}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i2ax}-e^{i2bx}}{x^2}dx=\frac{1}{2}\operatorname{Re}\left\{\pi i\operatorname{res}\left[\frac{e^{i2az}-e^{i2bz}}{z^2}, 0\right]\right\}=$$

$$=\frac{1}{2}\operatorname{Re}\left[\pi i\cdot\lim_{z\to 0}\left(\frac{e^{i2az}-e^{i2bz}}{z^2}z\right)\right]=\frac{1}{2}\operatorname{Re}\left[\pi i\left(i2a-i2b\right)\right]=\pi(b-a).$$

Пример 12.11 ([3], № 4.164).

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\sin^3 x}{x^3} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^3 x}{x^3} dx .$$

Решение. Воспользуемся тригонометрической формулой

$$\sin^3 x = \frac{1}{4}\left(3\sin x - \sin 3x\right) .$$

Тогда

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^3 x}{x^3} dx = \frac{1}{8} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{3\sin x - \sin 3x}{x^3} dx = \frac{1}{8} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{3e^{ix} - e^{i3x}}{x^3} dx =$$

$$= \frac{1}{8} \operatorname{Im}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{3e^{ix} - e^{i3x} - 2}{x^3} dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{x^3} dx \right] = \frac{1}{8} \operatorname{Im}\left\{ \pi i \operatorname{res}\left[\frac{3e^{iz} - e^{i3z} - 2}{z^3}, 0 \right] \right\} =$$

$$= \frac{1}{8} \operatorname{Im}\left(\pi i \lim_{z \to 0} \frac{3e^{iz} - e^{i3z} - 2}{z^2} \right) = \frac{1}{8} \operatorname{Im}\left(\pi i \cdot 3\right) = \frac{3}{8}\pi$$

(предел можно взять, например, по правилу Лопиталя), $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{x^3} dx = 0$

– главное значение интеграла.

Рекомендуемый перечень задач для решения в аудитории:
[3] № 4.149, 4.151, 4.154, 4.156, 4.157, 4.160, 4.162.
Резерв:
[3] № 4.140, 4.142, 4.163, 4.164.
Для самостоятельной работы дома:
[3] № 4.143, 4.144, 4.150, 4.152, 4.155, 4.158, 4.159.
На усмотрение преподавателя:
[3] № 4.141, 4.161, 4.163.

13. ИНТЕГРИРОВАНИЕ МНОГОЗНАЧНЫХ ФУНКЦИЙ[1]

При вычислении интегралов от многозначных функций необходимо убедиться, что в области, охватываемой контуром интегрирования, возможно выделение однозначных аналитических ветвей подынтегральной функции. Далее выделяется и интегрируется та ветвь этой функции, которая является аналитическим продолжением с действительной оси.

В следующих примерах вычислить интегралы.

Пример 13.1 ([3], № 4.165).

$$\int_0^\infty x^{p-1}\cos ax dx \ \left(a>0;\ 0<p<1\right) \text{ и } \int_0^\infty x^{p-1}\sin ax dx \ \left(a>0;\ -1<p<1\right).$$

Решение. Воспользуемся интегралом: $\int\limits_C z^{p-1}\cdot e^{-az}$, где C – контур, изображенный на рис. 13.1. У многозначной функции $z^{p-1}=e^{(p-1)\mathrm{Ln}z}$ выделим однозначную ветвь, являющуюся аналитическим продолжением с действительной оси функции $x^{p-1}\cdot e^{-ax}$:

$$z^{p-1}\cdot e^{-az}=e^{(p-1)\mathrm{Ln}z}\cdot e^{-az}=$$
$$=e^{(p-1)\left(\ln|z|+i\varphi+i2\pi k\right)}\cdot e^{-az}$$
$$\left(k=0,\pm1,\pm2...\right).$$

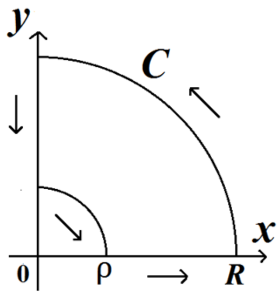


Рис. 13.1

На действительной положительной полуоси $z=x>0$, $\ln|z|=\ln x$, $\varphi=0$, откуда следует, что интегрировать надо ветвь при $k=0$: $e^{(p-1)\ln z}\cdot e^{-az}$. Точки ветвления функции $z^{p-1}\cdot e^{-az}$ – это $z=0$ и $z=\infty$, что позволяет внутри данного контура выделить эту ветвь и использовать для ее интегрирования основную теорему теории вычетов:

$$\int\limits_C f(z)dz=2\pi i\sum_k \mathrm{res}\left[f(z),z_k\right],$$

[1] При недостатке часов это занятие можно рассматривать как факультативное.

где z_k – изолированные особые точки функции $f(z)$, находящиеся внутри контура C. Так как внутри контура в нашем случае таких точек нет, то интеграл равен 0.

Рассмотрим этот интеграл как сумму интегралов по составным частям контура. Интеграл по отрезку действительной оси $(z = x;$ $dz = dx)$:

$$I_1 = \int_{\rho}^{R} x^{p-1} e^{-ax} dx .$$

При $\rho \to 0$ и $R \to \infty$ этот интеграл превращается в несобственный интеграл

$$\int_{0}^{\infty} x^{p-1} e^{-ax} dx .$$

Интеграл по мнимой положительной полуоси $\left(z = iy; dz = idy\right)$

$$I_2 = \int_{R}^{\rho} e^{(p-1)\ln(iy)} \cdot e^{-aiy} idy = i\int_{R}^{\rho} e^{(p-1)\left(\ln y + i\frac{\pi}{2}\right)} \cdot e^{-aiy} dy =$$

$$= ie^{i\frac{\pi}{2}(p-1)} \int_{R}^{\rho} y^{p-1} \cdot e^{-iay} dy = i \cdot e^{-i\frac{\pi}{2}} \cdot e^{i\frac{\pi}{2}p} \int_{R}^{\rho} y^{p-1} \left(\cos ay - i\sin ay\right) dy =$$

$$= e^{i\frac{\pi}{2}p} \int_{\rho}^{R} y^{p-1} \left(\cos ay - i\sin ay\right) dy .$$

Обозначим стоящие здесь интегралы при $\rho \to 0$ и $R \to \infty$:

$$\int_{0}^{\infty} y^{p-1} \cos ay dy = \int_{0}^{\infty} x^{p-1} \cos ax dx = J_1 ,$$

$$\int_{0}^{\infty} y^{p-1} \sin ay dy = \int_{0}^{\infty} x^{p-1} \sin ax dx = J_2 .$$

Докажем, что интегралы по малой и большой дугам при $\rho \to 0$ и $R \to \infty$ обращаются в ноль (на малой дуге $z = \rho e^{i\varphi}$, на большой дуге $z = \mathrm{R}e^{i\varphi}$).

$$\left| \int_{C_\rho} z^{p-1} \cdot e^{-az} dz \right| = \left| \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \left(\rho e^{i\varphi}\right)^{p-1} \cdot e^{-a\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)} \cdot \rho i e^{i\varphi} d\varphi \right| \le$$

$$\le \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^{p-1} e^{-a\rho\cos\varphi} \cdot \rho d\varphi \le \rho^p \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \to 0$$

при $\rho \to 0$, так как $0 < p < 1$. Интеграл по большой дуге

$$\left| \int_{C_R} z^{p-1} \cdot e^{-az} dz \right| = \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(Re^{i\varphi} \right)^{p-1} \cdot e^{-aR(\cos\varphi + i\sin\varphi)} \cdot Rie^{i\varphi} d\varphi \right| \le$$

$$\le R^p \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-aR\cos\varphi} \cdot d\varphi \le R^p \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-aR\left(1-\frac{2\varphi}{\pi}\right)} d\varphi = R^p \cdot e^{-aR} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\frac{aR2\varphi}{\pi}} d\varphi \to 0$$

(так как $\cos\varphi \ge 1 - \dfrac{2\varphi}{\pi}$) при $R \to \infty$ (за счет экспоненты).

Сумма интегралов по всем четырем частям контура равна нулю, поэтому получаем равенство

$$\int_0^{\infty} x^{p-1} \cdot e^{-ax} dx - e^{i\frac{\pi}{2}p} \int_0^{\infty} y^{p-1} \left(\cos ay - i\sin ay \right) dy = 0\,;$$

здесь $e^{i\frac{\pi}{2}p} = \cos\dfrac{\pi}{2}p + i\sin\dfrac{\pi}{2}p$; первый интеграл заменой $ax = t$ сводится к гамма-функции Эйлера:

$$\int_0^{\infty} \frac{t^{p-1}}{a^{p-1}} \cdot e^{-t} \cdot \frac{dt}{a} = \frac{\Gamma(p)}{a^p},$$

$$\frac{\Gamma(p)}{a^p} - \left(\cos\frac{\pi}{2}p + i\sin\frac{\pi}{2}p \right) \cdot \left(J_1 - iJ_2 \right) = 0\,.$$

Приравнивая нулю отдельно действительную и мнимую части выражения, стоящего в левой части, получаем

$$\begin{cases} \dfrac{\Gamma(p)}{a^p} - \cos\dfrac{\pi}{2}p \cdot J_1 - \sin\dfrac{\pi}{2}p \cdot J_2 = 0, \\ \qquad -\sin\dfrac{\pi}{2}p \cdot J_1 + \cos\dfrac{\pi}{2}p \cdot J_2 = 0. \end{cases}$$

Из этой системы получаем

$$J_1 = \frac{\Gamma(p)\cdot\cos\frac{\pi}{2}p}{a^p}; \qquad J_2 = \frac{\Gamma(p)\cdot\sin\frac{\pi}{2}p}{a^p}.$$

Второй интеграл сходится в более широких пределах по p: $p\in(-1;1)$, так как подынтегральная функция в интеграле $\int\limits_0^\infty x^{p-1}\sin axdx$ в нуле эквивалентна $x^{p-1}ax = ax^p$, что обеспечивает сходимость интеграла на нижнем пределе при $p>-1$.

Пример 13.2 ([3], № 4.166).

$$\int\limits_0^\infty \cos x^p dx \quad (p>1).$$

Решение. Заменой $x^p = t$ сводится к интегралу J_1 предыдущего примера.

Пример 13.3 ([3], № 4.167).

Решение. Аналогично примеру 13.2.

Пример 13.4 ([3], № 4.168). $\int\limits_0^\infty \frac{\sin x^p}{x^p}dx$, $p>\frac{1}{2}$.

Решение. Аналогично предыдущим примерам. Применим свойство гамма-функции

$$\Gamma(x) = (x-1)\cdot\Gamma(x-1).$$

При $p=1$

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2},$$

вычислялся ранее как интеграл от однозначной функции по лемме Жордана (см. (12.3)):

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \frac{1}{2}\operatorname{Im}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}}{x}dx = \frac{1}{2}\operatorname{Im}\left(\pi i\operatorname{res}\left[\frac{e^{iz}}{z},0\right]\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Пример 13.5 ([3], № 4.170). $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{x^p(x+1)}$ $(0<p<1)$.

Решение. Выберем контур интегрирования C, как показано на рис. 13.2. Точку $z = 0$ как точку ветвления обходим контуром радиуса ρ. Внутри контура у подынтегральной функции одна особая точка $z = -1$ (полюс первого порядка). Интегрируется та ветвь функции z^p, которая является аналитическим продолжением функции x^p с положительной действительной полуоси (по рисунку с верхнего берега разреза, где аргумент равен 0, на нижнем берегу этого же разреза аргумент равен 2π):

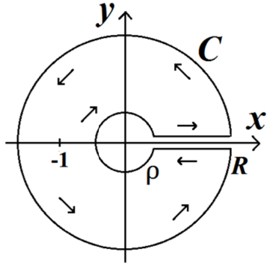


Рис. 13.2

$$\int_C \frac{dz}{z^p(z+1)} = 2\pi i \cdot \operatorname{res}[f(z), -1] = \frac{2\pi i}{(-1)^p} = \frac{2\pi i}{e^{p\ln(-1)}} = \frac{2\pi i}{e^{pi\pi}} = 2\pi i e^{-i\pi p}.$$

Этот же интеграл по составным частям контура: интегралы по большой и малой окружностям обращаются в 0 при $\rho \to 0$ и $R \to \infty$:

$$\left| \int_{C_\rho} \frac{dz}{z^p(z+1)} \right| = \left| \int_{2\pi}^{0} \frac{i\rho e^{i\varphi} d\varphi}{\left(\rho e^{i\varphi}\right)^p \cdot \left(\rho e^{i\varphi} + 1\right)} \right| \le \frac{1}{\rho^{p-1}} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\left|\rho e^{i\varphi} + 1\right|} \underset{\text{при } \rho \to 0}{\longrightarrow} 0,$$

$$\left| \int_{C_R} \frac{dz}{z^p(z+1)} \right| = \left| \int_0^{2\pi} \frac{iRe^{i\varphi} d\varphi}{\left(Re^{i\varphi}\right)^p \cdot \left(Re^{i\varphi} + 1\right)} \right| \le \frac{1}{R^{p-1}} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{R-1} \underset{\text{при } R \to \infty}{\longrightarrow} 0.$$

Интеграл по верхнему берегу разреза (искомый интеграл):

$$\int_\rho^R \frac{dx}{x^p(x+1)} \underset{\substack{R\to\infty \\ \rho\to 0}}{\longrightarrow} \int_0^\infty \frac{dx}{x^p(x+1)} = J.$$

Интеграл по нижнему берегу разреза, где $z^p = e^{p(\ln x + 2\pi i)} = x^p \cdot e^{2\pi i p}$,

$$\int_R^\rho \frac{dx}{x^p \cdot e^{2\pi i p} \cdot (x+1)} = e^{-2\pi i p} \int_R^\rho \frac{dx}{x^p \cdot (x+1)} \underset{\substack{R\to\infty \\ \rho\to 0}}{\longrightarrow} -e^{-2\pi i p} \int_0^\infty \frac{dx}{x^p \cdot (x+1)}.$$

Складывая интегралы по частям контура и приравнивая их сумму значению, полученному с помощью вычетов, получим

$$J - e^{-2\pi i p} \cdot J = 2\pi i e^{-i\pi p},$$

$$J=\frac{2\pi ie^{-i\pi p}}{1-e^{-2\pi ip}}=\frac{2\pi ie^{-i\pi p}\left(1-e^{2\pi ip}\right)}{\left(1-e^{-2\pi ip}\right)\left(1-e^{2\pi ip}\right)}=\frac{2\pi i\left(e^{-i\pi p}-e^{i\pi p}\right)}{2-e^{-2\pi ip}-e^{2\pi ip}}=$$

$$=\frac{-2\pi i\cdot 2i\sin\pi p}{2-2\cos 2\pi p}=\frac{2\pi\sin\pi p}{2\sin^2\pi p}=\frac{\pi}{\sin\pi p}.$$

Пример 13.6 ([3], № 4.172). $\int\limits_0^\infty\frac{x^p dx}{1+x^2}\ \left(-1<p<1\right)$.

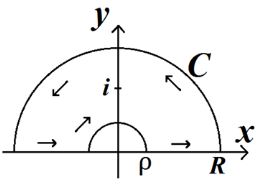


Рис. 13.3

Решение. Выберем контур C, показанный на рис. 13.3, и выделим однозначную ветвь функции $z^p=e^{p\mathrm{Ln}z}=e^{p\left(\ln|z|+i\varphi+i2\pi k\right)}$, взяв $k=0$, что соответствует аналитическому продолжению функции x^p с действительной положительной полуоси. Внутрь контура попадает одна особая точка подынтегральной функции $z=i$ – полис первого порядка.

$$\int\limits_C\frac{z^p dz}{1+z^2}=2\pi i\cdot\mathrm{res}\left[f(z),i\right]=2\pi i\cdot\frac{i^p}{2i}=$$

$$=\pi e^{p\ln i}=\pi e^{pi\frac{\pi}{2}}.$$

Покажем, что интегралы по малой и большой полуокружностям обращаются в ноль при $\rho\to 0$ и $R\to\infty$.

На малой полуокружности $z=\rho e^{i\varphi}$, $dz=\rho ie^{i\varphi}d\varphi$:

$$\left|\int\limits_{C_\rho}\frac{\left(\rho e^{i\varphi}\right)^p\cdot\rho ie^{i\varphi}d\varphi}{1+\rho^2e^{2i\varphi}}\right|\le\rho^{p+1}\int\limits_0^\pi\frac{d\varphi}{1+\rho^2e^{2i\varphi}}\to 0$$

при $\rho\to 0$, так как $\left(-1<p<1\right)$;

$$\left|\int\limits_{C_R}\frac{\left(Re^{i\varphi}\right)^p\cdot Rie^{i\varphi}d\varphi}{1+R^2e^{2i\varphi}}\right|\le\frac{R^{p+1}}{R^2}\int\limits_0^\pi d\varphi=\pi R^{p-1}\to 0$$

при $R\to\infty$. Интегралы по промежуткам действительной оси

$$\int\limits_\rho^R\frac{x^p dx}{1+x^2}\to J=\int\limits_0^\infty\frac{x^p dx}{1+x^2};\quad \int\limits_{-R}^{-\rho}\frac{e^{p\left(\ln|x|+i\pi\right)}dx}{1+x^2}\to e^{i\pi p}\int\limits_0^\infty\frac{x^p dx}{1+x^2}=e^{i\pi p}\cdot J.$$

Приравняем интегралы, полученные непосредственно и с помощью вычетов:

$$J + e^{i\pi p} \cdot J = \pi e^{i\frac{\pi}{2}p};$$

$$J = \frac{\pi e^{i\frac{\pi}{2}p}}{1+e^{i\pi p}} = \frac{\pi e^{i\frac{\pi}{2}p}\left(1+e^{-i\pi p}\right)}{\left(1+e^{i\pi p}\right)\left(1+e^{-i\pi p}\right)} = \frac{\pi\left(e^{i\frac{\pi}{2}p}+e^{-i\frac{\pi}{2}p}\right)}{2+e^{i\pi p}+e^{-i\pi p}} = \frac{\pi 2\cos\frac{\pi}{2}p}{2+\cos\pi p} =$$

$$= \frac{\pi\cos\frac{\pi}{2}p}{2\cos^2\frac{\pi}{2}p} = \frac{\pi}{2\cos\frac{\pi}{2}p}.$$

Пример 13.7 ([3], № 4.176). Вычислить главное значение интеграла $\int\limits_0^\infty \frac{xdx}{x^4-1}$.

Решение. Воспользуемся утверждением (см. [3], № 4.175), полезным и для решения других примеров: если рациональная функция $f(z)$ имеет на положительной части действительной оси полюсы лишь первого порядка $\beta_1,\ \beta_2, \ldots,\ \beta_m$, а среди других ее особых точек $\alpha_1,\ \alpha_2, \ldots,\ \alpha_n$ нет равной нулю и

$$\lim_{z\to 0}\left[z^{p+1}\cdot f(z)\right] = \lim_{z\to\infty}\left[z^{p+1}\cdot f(z)\right] = 0,$$

то, если p – целое число,

$$\int\limits_0^\infty x^p f(x)dx = -\sum_{k=1}^{n}\operatorname{res}\left[z^p \operatorname{Ln} z\cdot f(z)\right]_{z=\alpha_k} -$$

$$-\sum_{k=1}^{m}\beta_k^p\left(\ln\beta_k + \pi i\right)\cdot\operatorname{res}\left[f(z)\right]_{z=\beta_k}.$$

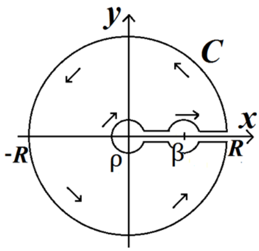


Рис. 13.4

Действительно, взяв контур, представленный на рис. 13.4, и рассмотрев вспомогательный интеграл $\int\limits_C z^p \operatorname{Ln} z\cdot f(z)dz$, получим

$$\int\limits_C z^p \operatorname{Ln} z\cdot f(z)dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{res}\left[z^p \operatorname{Ln} z\cdot f(z)\right]_{z=\alpha_k}$$

(для краткости записи на рисунке взята одна точка $\beta_k = \beta$). Рассматривая это же интеграл как состоящий из суммы интегралов по составным частям контура, получим:

интеграл по дуге большой окружности радиуса R, на которой $z = Re^{i\varphi}, \quad \mathrm{Ln}\, z = \ln R + i\varphi, \qquad dz = Rie^{i\varphi}d\varphi$:

$$\left|\int_{C_R} z^p \mathrm{Ln}\, z \cdot f(z)\, dz\right| \leq \int_0^{2\pi} R^p \cdot \left|\ln R + i\varphi\right| \cdot f\left(Re^{i\varphi}\right) \cdot R d\varphi \to 0$$

при $R \to \infty$;

интеграл по дуге малой окружности радиуса ρ с центром в начале координат:

$$\left|\int_{C_\rho} z^p \mathrm{Ln}\, z \cdot f(z)\, dz\right| \leq \int_0^{2\pi} \rho^p \left|\ln \rho + i\varphi\right| f\left(\rho e^{i\varphi}\right) \rho d\varphi \to 0$$

при $\rho \to 0$.

Интеграл по верхнему берегу разреза, где $\arg z = 0$, равен

$$\int_0^{+\infty} x^p \ln x \cdot f(x)\, dx,$$

интеграл по нижнему берегу разреза, где $\arg z = 2\pi$, равен

$$\int_{+\infty}^0 x^p \left(\ln x + 2\pi i\right) f(x)\, dx$$

и, следовательно, сумма этих интегралов равна

$$2\pi i \int_{+\infty}^0 x^p \cdot f(x)\, dx.$$

Осталось вычислить интегралы по верхней и нижней дугам окружности радиуса ρ с центром в точке β. Так как по условию β – полюс первого порядка, то $f(z)$ в окрестности этой точки представима в виде

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi'(\beta) \cdot (z - z_0) + o(z - z_0)}.$$

Интеграл по верхней дуге равен

$$\int\limits_{C_{\text{верх}}} z^p\left(\ln|z|+i\arg z\right)f(z)\,dz =$$

$$=\underbrace{(z^*)^p\left(\ln|z^*|+i\arg z^*\right)}_{\text{(по теореме о среднем)}}\int\limits_{C_{\text{верх}}} f(z)\,dz \underset{z^*\to\beta}{\longrightarrow}$$

$$\underset{z^*\to\beta}{\longrightarrow}\beta^p\ln\beta\cdot\lim_{z^*\to\beta}\int\limits_{C_{\text{верх}}}\frac{\varphi(z)\,dz}{\psi'(\beta)\cdot(z-z_0)+\mathrm{o}(z-z_0)}=$$

$$=-\beta^p\ln\beta\cdot\pi i\cdot\operatorname{res}\left[f(z)\right]_{z=\beta}.$$

Интеграл по нижней дуге равен

$$\int\limits_{C_{\text{ниж}}} z^p\left(\ln|z|+i\arg z\right)f(z)\,dz =$$

$$=\underbrace{(z^{**})^p\left(\ln|z^{**}|+i\arg z^{**}\right)}_{\text{(по теореме о среднем)}}\int\limits_{C_{\text{ниж}}} f(z)\,dz \underset{z^{**}\to\beta}{\longrightarrow}$$

$$\underset{z^{**}\to\beta}{\longrightarrow}\beta^p\left(\ln\beta+2\pi i\right)\cdot\pi i\cdot\operatorname{res}\left[f(z)\right]_{z=\beta}.$$

Из этих соотношений и получаем заявленную формулу. В нашем примере:

$$p=1;\quad f(x)=\frac{1}{x^4-1};\quad \beta=1.$$

Далее: $\operatorname{res}\left[f(z),1\right]=\dfrac{\varphi}{\psi'}=\dfrac{1}{4}$. Особые точки внутри контура: $\alpha_1=i,\ \alpha_2=-i,\ \alpha_3=-1$ – полюсы первого порядка. Вычеты в них:

$$\operatorname{res}\left[z\ln z\,f(z)\right]_{z=i}=\frac{\varphi}{\psi'}=\frac{i\left(\ln 1+i\dfrac{\pi}{2}\right)}{4i^3}=-\frac{i\pi}{8},$$

$$\operatorname{res}\left[z\ln z\,f(z)\right]_{z=-i}=\frac{\varphi}{\psi'}=\frac{-i\left(\ln 1+\dfrac{3\pi}{2}i\right)}{4(-i)^3}=-\frac{3\pi}{8}i,$$

$$\operatorname{res}\left[z\ln z\,f(z)\right]_{z=-1}=\frac{\varphi}{\psi'}=\frac{-1\left(\ln 1+i\pi\right)}{4(-1)^3}=\frac{i\pi}{4},$$

$$\sum \operatorname{res}\left[f(z)\right] = -\frac{i\pi}{4}.$$

Подставляя в указанную формулу, получим:

$$\int_0^{\infty} \frac{xdx}{x^4-1} = \frac{i\pi}{4} - \frac{i\pi}{4} = 0.$$

Для сравнения вычислим главное значение интеграла непосредственно:

$$\text{V.P.} \int_0^{\infty} \frac{xdx}{x^4-1} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_0^{1-\varepsilon} \frac{xdx}{x^4-1} + \int_{1+\varepsilon}^{\infty} \frac{xdx}{x^4-1}\right] =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{1}{2}\int_0^{(1-\varepsilon)^2} \frac{dt}{t^2-1} + \int_{(1+\varepsilon)^2}^{\infty} \frac{dt}{t^2-1}\right] =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\left(-\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|\right)\Bigg|_0^{(1-\varepsilon)^2} - \left(\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|\right)\Bigg|_{(1+\varepsilon)^2}^{\infty}\right] =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\ln\left|\frac{1-(1-\varepsilon)^2}{1+(1-\varepsilon)^2}\cdot\frac{1+(1+\varepsilon)^2}{1-(1+\varepsilon)^2}\right| = \lim_{\varepsilon\to 0}\ln\left|\frac{\left(2\varepsilon-\varepsilon^2\right)\left(2+2\varepsilon+\varepsilon^2\right)}{\left(2-2\varepsilon+\varepsilon^2\right)\left(-2\varepsilon-\varepsilon^2\right)}\right| =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\ln\left|\frac{(2-\varepsilon)\left(2+2\varepsilon+\varepsilon^2\right)}{\left(2-2\varepsilon+\varepsilon^2\right)(2+\varepsilon)}\right| = 0.$$

Пример 13.8 ([3], № 4.177). Вычислить главное значение интеграла $\int_0^{\infty} \frac{x^2dx}{x^4-1}$.

Решение. $$\int_0^{\infty} \frac{x^2dx}{x^4-1} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2dx}{x^4-1} =$$

$$= \frac{1}{2}\Big[2\pi i \operatorname{res}\left[f(z), i\right] + \pi i \operatorname{res}\left[f(z), -1\right] + \pi i \operatorname{res}\left[f(z), 1\right]\Big],$$

где $f(z) = \frac{z^2}{z^4-1}$.

Во всех этих точках функция $f(z)$ имеет полюс первого порядка, и вычет можно вычислить по формуле φ/ψ':

$$\int_0^\infty \frac{x^2dx}{x^4-1} = \frac{1}{2}\left[2\pi i \cdot \frac{z^2}{4z^3}\Bigg|_{z=i} + \pi i \cdot \frac{z^2}{4z^3}\Bigg|_{z=-1} + \pi i \cdot \frac{z^2}{4z^3}\Bigg|_{z=1}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi i}{4} + \frac{\pi i}{4}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Пример 13.9 ([3], № 4.178). Вычислить главное значение интеграла $\int_0^\infty \frac{x^p dx}{1-x}$; $(-1 < p < 0)$.

Решение. Рассмотрим $\int_C \frac{z^p dz}{1-z}$ по контуру C, представленному на рис. 13.5. Внутри контура функция аналитическая. Поэтому интеграл по всему контуру C равен 0. В то же время его можно расписать как состоящим из интегралов по составным частям контура. Интегралы по малой дуге радиуса ρ_1 с центром в начале координат и по большой дуге радиуса R при стремлении $\rho_1 \to 0$ и $R \to \infty$, соответственно, как легко показывается, обращаются в 0 (см. пример 13.6 и др.).

Интеграл по верхней полуокружности радиуса ρ_2 с центром в точке $z = 1$ при стремлении $\rho_2 \to 0$ равен $-\pi i \cdot \operatorname{res}[f(z),1]$, так как точка $z = 1$ – полюс первого порядка, то

$$-\pi i \cdot \operatorname{res}[f(z),1] = -\pi i \frac{z^p}{-1}\Bigg|_{z=1} = \pi i.$$

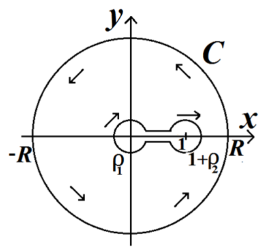


Рис. 13.5

Интеграл по нижней полуокружности равен $\pi i e^{2\pi i p}$. Множитель $e^{2i\pi p}$ появляется из-за перехода на другую ветвь функции z^p при переходе с верхнего берега разреза на нижний. Главное значение интеграла по верхнему берегу действительной положительной полуоси равно вычисляемому интегралу:

$$J = \int_0^\infty \frac{x^p dx}{1-x}.$$

Интеграл по нижнему берегу действительной положительной полуоси дает

$$\int_{\infty}^{0}\frac{e^{p(\ln x+i\pi)}dx}{1-x}=e^{2i\pi p}\int_{\infty}^{0}\frac{x^p dx}{1-x}=-e^{2i\pi p}\int_{0}^{\infty}\frac{x^p dx}{1-x}=-e^{2i\pi p}\cdot J\ .$$

Таким образом, получаем:

$$J-e^{2i\pi p}\cdot J+\pi i\left(1+e^{2i\pi p}\right)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow J=\frac{-\pi i\left(1+e^{2i\pi p}\right)}{1-e^{2i\pi p}}=\frac{-\pi i\left(1+e^{2i\pi p}\right)\left(1-e^{-2i\pi p}\right)}{\left(1-e^{2i\pi p}\right)\left(1-e^{-2i\pi p}\right)}=$$

$$=\frac{-\pi i\left(e^{2i\pi p}-e^{-2i\pi p}\right)}{2-\left(e^{2i\pi p}+e^{-2i\pi p}\right)}=-\frac{\pi i\cdot 2i\sin 2\pi p}{2-2\cos 2\pi p}=\frac{2\pi\sin 2\pi p}{2\cdot 2\sin^2\pi p}=\pi\operatorname{ctg}\pi p\ .$$

Пример 13.10 ([3], № 4.179). Вычислить главное значение интеграла $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{px}dx}{1-e^x}\quad (0<p<1)$.

Решение. Сводится к предыдущему примеру заменой $e^x=t$.

Пример 13.11 ([3], № 4.180). Вычислить интеграл

$$J=\int_0^1\frac{x^{1-p}(1-x)^p}{(1+x)^3}dx\ ;\ \ (-1<p<2).$$

Решение. Рассмотрим интеграл $\int\limits_C\frac{z^{1-p}(1-z)^p}{(1+z)^3}dz$, где C – контур, представленный на рис. 13.6. Выделим в подынтегральной функции интегрируемую ветвь, являющуюся аналитическим продолжением с действительной оси (ее верхнего берега) функции $x^{1-p}(1-x)^p$.

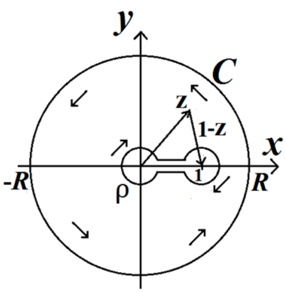


Рис. 13.6

По определению $z^{1-p}=e^{(1-p)\mathrm{Ln}z}$ и $(1-z)^p=e^{p\mathrm{Ln}(1-z)}$, $\quad z^{1-p}=e^{(1-p)(\ln|x|+i\varphi+2\pi ki)}$.

На действительной оси $|z|=x$; $\varphi=0$ и $z^{1-p}=e^{(1-p)(\ln x+2\pi ki)}=e^{(1-p)\ln x}=x^{1-p}$ при $k=0$.

Таким образом, интегрируем ветвь

$$z^{1-p}=e^{(1-p)(\ln|z|+i\varphi)}.$$

Аналогично, $\left(1-z\right)^{p}=e^{p\mathrm{Ln}(1-z)}=e^{p\left(\ln\left|1-z\right|+i\arg(1-z)+2\pi ki\right)}$.

На действительной оси $\ln\left|1-z\right|=\ln\left|1-x\right|$, $\arg\left(1-z\right)=0$ (при $0<z<1$) $\Rightarrow k=0$.

Интегрируем ветвь $\left(1-z\right)^{p}=e^{p\left(\ln\left|1-z\right|+i\arg(1-z)\right)}$. Внутри контура у подынтегральной функции есть одна особая точка $z=-1$ – полюс третьего порядка. Вычислим вычет в этой точке:

$$\mathrm{res}\left[f(z),-1\right]=\frac{1}{2!}\lim_{z\to-1}\frac{d^2}{dz^2}\left[f(z)\cdot\left(1+z\right)^3\right]=\frac{1}{2!}\lim_{z\to-1}\frac{d^2}{dz^2}\left(z^{1-p}\left(1-z\right)^p\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{z\to-1}[-p\left(1-p\right)\cdot z^{-1-p}\left(1-z\right)^p-\left(1-p\right)pz^{-p}\left(1-z\right)^{p-1}-$$

$$-\left(1-p\right)pz^{-p}\left(1-z\right)^{p-1}+p\left(p-1\right)z^{1-p}\left(1-z\right)^{p-2}].$$

Здесь для выделения ветвей

$$z^{1-p}\Big|_{z=-1}=e^{i(1-p)\pi},\qquad \left(1-z\right)^p\Big|_{z=-1}=e^{p(\ln 2)}=2^p$$

(так как $\arg\left(1-z\right)$ остался равным 0). Следовательно:

$$\mathrm{res}\left[f(z),-1\right]=\frac{1}{2}[-p\left(1-p\right)e^{i(1-p)\pi}\cdot 2^p+\left(1-p\right)pe^{i(1-p)\pi}\cdot 2^{p-1}+$$

$$+\left(1-p\right)pe^{i(1-p)\pi}\cdot 2^{p-1}+p\left(p-1\right)e^{i(1-p)\pi}\cdot 2^{p-2}]=\frac{1}{2}[p^2-p+$$

$$+\frac{\left(1-p\right)p}{2}+\frac{\left(1-p\right)p}{2}+\frac{p\left(p-1\right)}{4}]=e^{i\pi(1-p)}\cdot 2^{p-1}\cdot\left(\frac{p^2}{4}-\frac{p}{4}\right)=$$

$$=\frac{1}{8}e^{i\pi(1-p)}\cdot 2^p\cdot p\left(p-1\right).$$

Вычислим интегралы по составным частям контура. По верхнему берегу разреза $\int\limits_0^1\frac{x^{1-p}\left(1-x\right)^p}{\left(1+x\right)^3}dx=J$ (искомый). На нижнем берегу $z^{1-p}=e^{(1-p)(\ln x)}=x^{1-p}$; $\left(1-z\right)^p=e^{p\left(\ln\left|1-x\right|-2\pi i\right)}=e^{-2p\pi i}\left(1-x\right)^p$. Поэтому интеграл по нижнему берегу разреза равен

$$\int_1^0 \frac{x^{1-p}\cdot(1-x)^p\cdot e^{-2p\pi i}}{(1+x)^3}dx=-\int_0^1 \frac{x^{1-p}\cdot(1-x)^p\cdot e^{-2p\pi i}}{(1+x)^3}dx=-e^{-2p\pi i}\cdot J\ .$$

Оценим интегралы по окружностям. Интеграл по малой окружности радиуса ρ с центром в начале координат, где $z=\rho e^{i\varphi}$:

$$\left|\int_{C_\rho}\frac{z^{1-p}\cdot(1-z)^p}{(1+z)^3}dz\right|\le\int_0^{2\pi}\frac{\rho^{1-p}\left|1-\rho e^{i\varphi}\right|^p}{\left|1+\rho e^{i\varphi}\right|^3}\rho d\varphi=\int_0^{2\pi}\frac{\rho^{2-p}\left|1-\rho e^{i\varphi}\right|^p}{\left|1+\rho e^{i\varphi}\right|^3}d\varphi\to 0$$

при $\rho\to 0$, так как $p<2$. Интеграл по малой окружности радиуса ρ с центром в точке $z=1$, где $1-z=\rho e^{i\varphi}$; $dz=-\rho i e^{i\varphi}d\varphi; z=1-\rho e^{i\varphi}$:

$$\left|\int_{C_{\rho'}}\frac{z^{1-p}\cdot(1-z)^p}{(1+z)^3}dz\right|\le\int_0^{2\pi}\frac{\left|\left(1-\rho e^{i\varphi}\right)^{1-p}\right|\rho^p}{\left|2-\rho e^{i\varphi}\right|^3}\rho d\varphi=$$

$$=\rho^{p+1}\int_0^{2\pi}\frac{\left|1-\rho e^{i\varphi}\right|^{1-p}}{\left|2-\rho e^{i\varphi}\right|^3}d\varphi\to 0,$$

так как $p>-1$. Интеграл по большой окружности радиуса R, где $z=Re^{i\varphi}$:

$$\left|\int_{C_R}\frac{z^{1-p}\cdot(1-z)^p}{(1+z)^3}dz\right|\le\int_0^{2\pi}\frac{R^{1-p}\left|1-Re^{i\varphi}\right|^p}{\left|1+Re^{i\varphi}\right|^3}Rd\varphi\le\frac{1}{R}\cdot\text{const}\to 0$$

при $R\to\infty$. Таким образом, имеем

$$J-e^{-2i\pi p}\cdot J=\frac{2\pi i}{8}e^{i(1-p)\pi}\cdot 2^p p(p-1);$$

$$J=\frac{\pi i}{4}\cdot\frac{e^{i\pi}\cdot e^{-ip\pi}\cdot 2^p p(p-1)}{1-e^{-2\pi p i}}=$$

$$=-\frac{\pi i}{4}2^p p(p-1)\cdot\frac{e^{-i\pi p}\left(1-e^{2\pi p i}\right)}{\left(1-e^{-2\pi p i}\right)\left(1-e^{2\pi p i}\right)}=$$

$$=-\frac{\pi i}{4}2^p p(p-1)\cdot\frac{e^{-\pi p i}-e^{\pi p i}}{2-\left(e^{2\pi p i}+e^{-2\pi p i}\right)}=$$

$$=-\frac{\pi i}{4}2^p p(p-1)\cdot\frac{-2i\sin\pi p}{2-2\cos 2\pi p}=-\frac{\pi i}{4}2^p p(p-1)\cdot\left(-\frac{i}{2\sin\pi p}\right)=$$

$$=\frac{\pi}{8}\cdot\frac{p(1-p)2^p}{\sin\pi p}.$$

Пример 13.12 ([3], № 4.181). Вычислить интеграл

$$\int_0^1\frac{x^{1-p}(1-x)^p}{1+x^2}dx\ ;\ \ (-1<p<2).$$

Решение. Рассмотрим интеграл по тому же контуру *C*, что и в примере 13.11. Ветвящиеся функции те же самые, поэтому воспользуемся некоторыми результатами этого примера. Внутри контура C теперь две особые точки $\pm i$ с полюсом первого порядка в них. Вычеты вычислим по формуле $\frac{\varphi}{\psi'}$, где $\varphi(z)=z^{1-p}(1-z)^p$; $\psi(z)=1+z^2$. Ветви выделены те же, что и в примере 13.11. В точке $z=i$:

$$z^{1-p}\Big|_{z=i}=e^{(1-p)\cdot i\frac{\pi}{2}}=e^{i\frac{\pi}{2}}\cdot e^{-i\frac{\pi}{2}p}=ie^{-i\frac{\pi}{2}p};$$

$$(1-z)^p\Big|_{z=i}=e^{p\left(\ln\sqrt{2}-i\frac{\pi}{4}\right)}=2^{\frac{p}{2}}e^{-i\frac{\pi}{4}p};$$

$$\operatorname{res}[f(z),i]=\frac{ie^{-i\frac{\pi}{2}p}\cdot 2^{\frac{p}{2}}\cdot e^{-i\frac{\pi}{4}p}}{2i}=2^{\frac{p}{2}-1}\cdot e^{-i\frac{3\pi}{4}p}.$$

В точке $z=-i$

$$z^{1-p}\Big|_{z=-i}=e^{(1-p)\cdot i\frac{3\pi}{2}}=-ie^{-i\frac{3\pi}{2}p};$$

$$(1-z)^p\Big|_{z=-i}=e^{p\left(\ln\sqrt{2}+i\frac{\pi}{4}\right)}=2^{\frac{p}{2}}e^{i\frac{\pi}{4}p};$$

$$\operatorname{res}[f(z),-i]=\frac{-ie^{-i\frac{3\pi}{2}p}\cdot 2^{\frac{p}{2}}\cdot e^{i\frac{\pi}{4}p}}{-2i}=2^{\frac{p}{2}-1}\cdot e^{-i\frac{5\pi}{4}p}.$$

Интеграл по всему составному контуру равен:

$$2\pi i\left(2^{\frac{p}{2}-1}\cdot e^{-i\frac{5\pi}{4}p}+2^{\frac{p}{2}-1}\cdot e^{-i\frac{3\pi}{4}p}\right)=\pi i\cdot 2^{\frac{p}{2}}\left(e^{-i\frac{5\pi}{4}p}+e^{-i\frac{3\pi}{4}p}\right).$$

Вычислим интегралы по составным частям контура. Интеграл по верхнему берегу разреза равен J (искомый), по нижнему берегу $-e^{-2\pi pi}\cdot J$ (см. пример 13.11). Интегралы по малым окружностям обращаются в ноль при стремлении радиусов к нулю. Остается вычислить интеграл по большой окружности, который в данном случае в нуль не обращается (недостаточная степень убывания модуля подынтегральной функции при $R\to\infty$):

$$\int\limits_{C_R}\frac{z^{1-p}\cdot(1-z)^p}{1+z^2}dz=-2\pi i\,\mathrm{res}\left[f(z),\infty\right].$$

В точке $z=\infty$ $f(z)$ имеет разложение в ряд Лорана, начинающееся с члена $\frac{c_{-1}}{z}$, так как главный член имеет вид $\frac{(-1)^p}{z}$. Для вычисления $(-1)^p$ возьмем произвольную, удаленную от начала координат точку, например, на действительной положительной полуоси. Тогда

$$z^{1-p}=x^{1-p};$$

$$(1-z)^p=e^{p\mathrm{Ln}(1-z)}=e^{p\left(\ln|1-x|-i\pi\right)}=e^{-i\pi p}\cdot|1-x|^p$$

(пользуемся выделенной ранее ветвью). Таким образом, при $x\to+\infty$

$$\frac{z^{1-p}\cdot(1-z)^p}{1+z^2}\sim\frac{x^{1-p}\cdot(x-1)^p\,e^{-i\pi p}}{1+x^2}\sim\frac{e^{-i\pi p}}{x}$$

или

$$\frac{z^{1-p}\cdot(1-z)^p}{1+z^2}\sim\frac{e^{-i\pi p}}{z}$$

(для любых $z\to\infty$, так как $z=\infty$ правильная точка подынтегральной функции). Следовательно,

$$\mathrm{res}\left[f(z),\infty\right]=-c_{-1}=-e^{-i\pi p}.$$

Интеграл по большой окружности, таким образом, равен

$$-2\pi i\,\mathrm{res}\left[f(z),\infty\right]=2\pi i e^{-i\pi p}.$$

Приравняем интеграл, вычисленный по составным частям контура, интегралу, вычисленному с помощью вычетов:

$$J\left(1-e^{-2i\pi p}\right)+2\pi i e^{-i\pi p}=\pi i\cdot 2^{\frac{p}{2}}\left(e^{-i\frac{5\pi}{4}p}+e^{-i\frac{3\pi}{4}p}\right)$$

$$J=\frac{\pi i\cdot 2^{\frac{p}{2}}\left(e^{-i\frac{5\pi}{4}p}+e^{-i\frac{3\pi}{4}p}\right)-2\pi i e^{-i\pi p}}{1-e^{-2i\pi p}}=$$

$$=\frac{\pi i\cdot\left[2^{\frac{p}{2}}\left(e^{-i\frac{5\pi}{4}p}+e^{-i\frac{3\pi}{4}p}\right)-2e^{-i\pi p}\right]\left(1-e^{2i\pi p}\right)}{\left(1-e^{-2i\pi p}\right)\left(1-e^{2i\pi p}\right)}=$$

$$=\frac{\pi i\cdot\left[2^{\frac{p}{2}}\left(e^{-i\frac{5\pi}{4}p}+e^{-i\frac{3\pi}{4}p}\right)-2e^{-i\pi p}-2^{\frac{p}{2}}\left(e^{i\frac{5\pi}{4}p}+e^{i\frac{3\pi}{4}p}\right)+2e^{i\pi p}\right]}{2-2\cos 2\pi p}=$$

$$=\frac{\pi i[2^{\frac{p}{2}}(e^{-\frac{5\pi pi}{4}}-e^{\frac{5\pi pi}{4}})+2^{\frac{p}{2}}(e^{-\frac{3\pi pi}{4}}-e^{\frac{3\pi pi}{4}})+2(e^{i\pi p}-e^{-i\pi p})]}{2(1-\cos 2\pi p)}=$$

$$=\frac{\pi i[-2^{\frac{p}{2}}\cdot 2i\sin\frac{5\pi pi}{4}-2^{\frac{p}{2}}\cdot 2i\sin\frac{3\pi pi}{4}+4i\sin\pi p]}{2\cdot 2\sin^2\pi p}=$$

$$=\frac{\pi i[4i\sin\pi p-2i\cdot 2^{\frac{p}{2}}(\sin\frac{5\pi pi}{4}+\sin\frac{3\pi pi}{4})]}{4\sin^2\pi p}=$$

$$=\frac{-\pi(2\sin\pi p-2^{\frac{p}{2}}\cdot 2\sin\pi p\cos\frac{\pi p}{4})}{2\sin^2\pi p}=\frac{\pi(2^{\frac{p}{2}}\cdot\cos\frac{\pi p}{4}-1)}{\sin\pi p}.$$

Пример 13.13 ([3], № 4.183). Вычислить интеграл

$$\int_0^1 \left(\frac{x}{1-x}\right)^p \cdot \frac{dx}{x+a} \quad (-1<p<1;\ a>0).$$

Решение. Рассмотрим интеграл $\int\limits_C \left(\frac{z}{1-z}\right)^p \cdot \frac{dz}{z+a}$ по контуру C, представленному на рисунке 13.7. Составной контур C ограничивает двусвязную область извне окружностью с центром в начале координат достаточно большого радиуса R и изнутри окружностями малого радиуса ρ с центром в начале координат и с центром в точке $z=1$ (точки ветвления подынтегральной функции), соединенными между собой верхним и нижним берегами разреза по действительной оси $\rho < x < 1-\rho$. Ветвь, как обычно, выделяем условием аналитического продолжения подынтегральной функции с верхнего берега разреза $(0<x<1)$. Функция $z^p = e^{p\,\mathrm{Ln}z} = e^{p(\ln|z|+i\arg z+i2\pi k)}$. На верхнем берегу разреза $|z|=x$; $\arg z=0$ и $x^p = e^{p(\ln x+i2\pi k)} \Rightarrow k=0$; следовательно, интегрируется ветвь $z^p = e^{p(\ln|z|+i\arg z)}$.

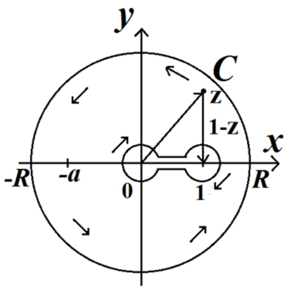


Рис. 13.7

Аналогично функция $(1-z)^p = e^{p(\ln|1-z|+i\arg(1-z)+i2\pi k)}$ на верхнем берегу равна $(1-x)^p = e^{p(\ln(1-x)+i\cdot 0+i2\pi k)} \Rightarrow k=0$. Интегрируется ветвь $(1-z)^p = e^{p(\ln|1-z|+i\arg(1-z))}$. Внутри контура выделенная однозначная аналитическая ветвь имеет одну особую точку $z=-a$ (полюс первого порядка). Вычислим вычет в этой точке по формуле φ/ψ', где $\varphi(z)=\left(\frac{z}{1-z}\right)^p$, $\psi(z)=z+a$. В точке $z=-a$ функция

$$z^p = e^{p(\ln|z|+i\arg z)}\Big|_{z=-a} = e^{p(\ln a+i\pi)} = a^p\cdot e^{i\pi p},$$

а функция

$$(1-z)^p = e^{p(\ln|1-z|+i\arg(1-z))}\Big|_{z=-a} = e^{p(\ln(1+a)+i\cdot 0)} = (1+a)^p.$$

Интеграл равен

$$\int_C \left(\frac{z}{1-z}\right)^p \cdot \frac{dz}{z+a} = 2\pi i \cdot \operatorname{res}[f(z),-a] = 2\pi i \cdot \frac{a^p e^{i\pi p}}{(1+a)^p}.$$

Вычислим этот же интеграл по составным частям контура C. Покажем, что интегралы по малым окружностям обращаются в 0 при $\rho \to 0$. На окружности с центром в начале координат $z = \rho e^{i\varphi}$; $dz = \rho i e^{i\varphi} d\varphi$,

$$\left| \int_{C_\rho} \frac{(\rho e^{i\varphi})^p}{(1-\rho e^{i\varphi})^p} \cdot \frac{\rho i e^{i\varphi} d\varphi}{\rho e^{i\varphi}+a} \right| \le \int_0^{2\pi} \frac{\rho^p \cdot \rho d\varphi}{\left|1-\rho e^{i\varphi}\right|^p \cdot \left|\rho e^{i\varphi}+a\right|} = \rho^{p+1} \cdot \mathrm{const} \to 0$$

при $\rho \to 0$, так как $p > -1$.

Аналогично оценивается интеграл по малой окружности с центром в точке $z = 1$. Вычислим интеграл по большой окружности, на которой $z = R \cdot e^{i\varphi}$,

$$\int_C \left(\frac{z}{1-z}\right)^p \cdot \frac{dz}{z+a} = -2\pi i \cdot \operatorname{res}[f(z),\infty].$$

Функция на бесконечности имеет правильную точку, ее предел в бесконечности равен 0 по любому направлению. Для простоты рассмотрим предел по действительной положительной полуоси:

$$f(z) = \left(\frac{z}{1-z}\right)^p \cdot \frac{1}{z+a}\Bigg|_{z=x} = \frac{x^p}{(x-1)^p \cdot e^{-i\pi p}} \cdot \frac{1}{x+a} \underset{x\to\infty}{\sim} e^{i\pi p} \cdot \frac{1}{x}.$$

То есть главный член функции имеет вид $\dfrac{e^{i\pi p}}{z} \Rightarrow c_{-1} = e^{i\pi p}$ и интеграл равен

$$-2\pi i \cdot (-c_{-1}) = 2\pi i e^{i\pi p}.$$

Интеграл по верхнему берегу есть искомый интеграл J. Осталось рассмотреть интеграл по нижнему берегу разреза. Здесь

$$z^p = x^p; \quad (1-z)^p = e^{p(\ln|1-z|-2i\pi)} = e^{-2\pi p i} \cdot (1-x)^p.$$

Таким образом, интеграл по нижнему берегу при $\rho \to 0$ равен

$$e^{2\pi p i} \cdot \int_1^0 \left(\frac{x}{1-x}\right)^p \cdot \frac{dx}{x+a} = -e^{2\pi p i} \cdot J .$$

Приравняв интегралы, вычисленные разными способами, получим:

$$J - e^{2\pi pi} \cdot J + 2\pi i e^{i\pi p} = 2\pi i \cdot \frac{a^p}{(1+a)^p} \cdot e^{i\pi p} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow J = \frac{2\pi i[(\frac{a}{1+a})^p - 1] \cdot e^{i\pi p}}{1 - e^{2\pi pi}} = \frac{2\pi i \cdot e^{i\pi p} \cdot [(\frac{a}{1+a})^p - 1] \cdot (1 - e^{-2\pi pi})}{(1 - e^{2\pi pi})(1 - e^{-2\pi pi})} =$$

$$= \frac{2\pi i[(\frac{a}{1+a})^p - 1] \cdot 2i \sin \pi p}{2 - 2\cos 2\pi p} = \frac{[1 - (\frac{a}{1+a})^p] \cdot 2\pi \cdot \sin \pi p}{1 - \cos 2\pi p} =$$

$$= 2\pi \cdot [1 - (\frac{a}{1+a})^p] \frac{\sin \pi p}{2\sin^2 \pi p} = \pi \cdot \frac{[1 - (\frac{a}{1+a})^p]}{\sin \pi p}.$$

Пример 13.14 ([3], № 4.184). Вычислить интеграл

$$\int_0^1 (\frac{x}{1-x})^p \cdot \frac{dx}{(x+a)^2} \quad (-1 < p < 1,\ a > 0).$$

Решение. Рассмотрим этот интеграл по контуру C, как и в примере 13.13, только интеграл по большой окружности при $R \to \infty$ обращается в 0 (более высокая степень убывания функции на бесконечности, чем первая).

Точка $z = -a$ теперь будет полюсом не первого, а второго порядка. Вычет в точке $z = -a$ вычисляем по формуле

$$\operatorname{res}[f(z), -a] = \lim_{z \to -a} \frac{d}{dz} (\frac{z}{1-z})^p = p(\frac{z}{1-z})^{p-1} \cdot \frac{1}{(1-z)^2} \bigg|_{z=-a} =$$

$$= -pe^{\pi pi} \frac{a^{p-1}}{(a+1)^{p+1}}.$$

Интеграл равен

$$2\pi i \cdot \operatorname{res}[f(z), -a] = -2\pi i p e^{\pi pi} \cdot \frac{a^{p-1}}{(a+1)^{p+1}}.$$

Интегралы по большой и малой окружностям в пределе обращаются в 0, а интеграл по нижнему берегу разреза равен $-e^{2\pi pi} \cdot J$ (см. предыдущий пример). Получаем равенство:

$$J - e^{2\pi pi} \cdot J = -2\pi i p e^{\pi pi} \cdot \frac{a^{p-1}}{(a+1)^{p+1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow J = -\frac{a^{p-1}}{(a+1)^{p+1}} \cdot \frac{2\pi p i e^{\pi pi}}{1 - e^{2\pi pi}} = -\frac{a^{p-1}}{(a+1)^{p+1}} \cdot \frac{2\pi p i \cdot 2i \sin \pi p}{4 \sin^2 \pi p} =$$

$$= \frac{a^{p-1}}{(a+1)^{p+1}} \cdot \frac{\pi p}{\sin \pi p}.$$

Пример 13.15 ([3], № 4.185). Вычислить интеграл

$$\int_{-1}^{1} \frac{(1+x)^{1-p}(1-x)^p}{1+x^2} dx \quad (-1 < p < 2).$$

Решение. Рассмотрим интеграл $\int\limits_C \frac{(1+z)^{1-p}(1-z)^p}{1+z^2} dz$, где контур C представлен на рис. 13.8. Выделим ветви, являющиеся аналитическим продолжением подынтегральной функции с верхнего берега разреза.

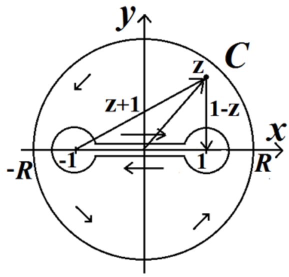


Рис. 13.8

Как видно из рисунка, на верхнем берегу разреза $\arg(1+z) = 0$, $\arg(1-z) = 0$,

$$(1+z)^{1-p} = e^{(1-p)\mathrm{Ln}(1+z)} = e^{(1-p)(\ln|1+z| + i\arg(1+z) + i2\pi k)}\Big|_{z=x} = (1+x)^{1-p} \Rightarrow k = 0,$$

выделенная ветвь имеет вид

$$(1+z)^{1-p} = e^{(1-p)(\ln|1+z| + i\arg(1+z))};$$

$$(1-z)^p = e^{p\mathrm{Ln}(1-z)} = e^{p(\ln|1-z| + i\arg(1-z) + i2\pi k)}\Big|_{z=x} = (1-x)^p \Rightarrow k = 0,$$

выделенная ветвь

$$(1-z)^p = e^{p(\ln|1-z| + i\arg(1-z))}.$$

Внутри контура интегрирования подынтегральная функция имеет две особые точки $z = \pm i$ – полюсы первого порядка. Вычислим вычеты в них.

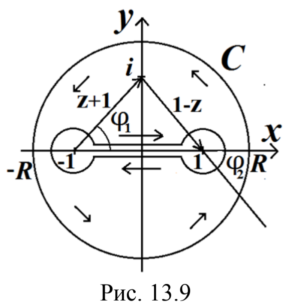


Рис. 13.9

В точке $z = i$ $|z+1| = \sqrt{2}$ (рис 13.9):

$$|1-z| = \sqrt{2};$$

$$\arg(z+1)=\varphi_1=\frac{\pi}{4}, \qquad \arg(1-z)=\varphi_2=-\frac{\pi}{4};$$

$$(1+z)^{1-p}\Big|_{z=i}=e^{(1-p)(\ln\sqrt{2}+i\frac{\pi}{4})}, \qquad (1-z)^{p}\Big|_{z=i}=e^{p(\ln\sqrt{2}-i\frac{\pi}{4})},$$

$$\operatorname{res}[f(z),i]=\frac{\varphi}{\psi'}=\frac{(1+z)^{1-p}(1-z)^{p}}{2z}\Bigg|_{z=i}=$$

$$=\frac{e^{(1-p)(\ln\sqrt{2}+i\frac{\pi}{4})}\cdot e^{p(\ln\sqrt{2}-i\frac{\pi}{4})}}{2i}=\frac{2^{\frac{1-p}{2}}\cdot e^{i\frac{\pi}{4}(1-p)}\cdot 2^{\frac{p}{2}}\cdot e^{-i\frac{\pi}{4}p}}{2i}=\frac{2^{\frac{1}{2}}\cdot e^{i\frac{\pi}{4}}\cdot e^{-i\frac{\pi}{2}p}}{2i}.$$

В точке $z=-i$

$$|z+1|=|1-z|=\sqrt{2}; \quad \varphi_1=-\frac{\pi}{4}, \quad \varphi_2=-\frac{7\pi}{4};$$

$$(1+z)^{1-p}\Big|_{z=-i}=e^{(1-p)(\ln\sqrt{2}-i\frac{\pi}{4})}, \qquad (1-z)^{p}\Big|_{z=-i}=e^{p(\ln\sqrt{2}-i\frac{7\pi}{4})}.$$

$$\operatorname{res}[f(z),-i]=\frac{\varphi}{\psi'}=\frac{(1+z)^{1-p}(1-z)^{p}}{2z}\Bigg|_{z=-i}=\frac{e^{(1-p)(\ln\sqrt{2}-i\frac{\pi}{4})}\cdot e^{p(\ln\sqrt{2}-i\frac{7\pi}{4})}}{-2i}=$$

$$=\frac{2^{\frac{1-p}{2}}\cdot e^{-i\frac{\pi}{4}(1-p)}\cdot 2^{\frac{p}{2}}\cdot e^{-i\frac{7\pi}{4}p}}{-2i}=\frac{2^{\frac{1}{2}}\cdot e^{-i\frac{\pi}{4}}\cdot e^{-i\frac{3\pi}{2}p}}{-2i}.$$

Интеграл равен

$$2\pi i\sum_{k=1,2}\operatorname{res}[f(z),z_k]=2\pi i[\frac{2^{\frac{1}{2}}\cdot e^{i\frac{\pi}{4}}\cdot e^{-i\frac{\pi}{2}p}}{2i}-\frac{2^{\frac{1}{2}}\cdot e^{-i\frac{\pi}{4}}\cdot e^{-i\frac{3\pi}{2}p}}{2i}]=$$

$$=\pi\sqrt{2}(e^{i\frac{\pi}{4}-i\frac{\pi p}{2}}-e^{-i\frac{\pi}{4}-i\frac{3\pi p}{2}}).$$

Покажем, что интегралы по малым окружностям при стремлении их радиуса ρ к нулю, обращаются в 0. Рассмотрим интеграл по окружности с центром в точке $z=-1$. Обозначим $z+1=\rho_1 e^{i\varphi_1}$; $z=-1+\rho_1 e^{i\varphi_1}$; $dz=\rho_1 i e^{i\varphi_1}d\varphi_1$:

$$\left|\int_{C_\rho}\frac{(1+z)^{1-p}(1-z)^{p}}{1+z^2}dz\right|\le\int_0^{2\pi}\frac{\rho_1^{\,1-p}\cdot\left|2-\rho_1 e^{i\varphi_1}\right|^{p}}{\left|1+\rho_1^{\,2}e^{i2\varphi_1}\right|}\cdot\rho_1 d\varphi_1=$$

$$=\rho_1^{\,2-p}\int\limits_0^{2\pi}\frac{\left|2-\rho_1 e^{i\varphi_1}\right|^p}{\left|1+\rho_1^2 e^{i2\varphi_1}\right|}d\varphi_1\to 0,$$

при $\rho_1\to 0$, так как $p<2$.

Аналогично доказывается обращение в 0 интеграла по малой окружности с центром в точке $z=1$.

Вычислим интеграл по большой окружности радиуса *R*:

$$\int\limits_{C_R}\frac{(1+z)^{1-p}(1-z)^p}{1+z^2}dz=-2\pi i\cdot\operatorname{res}[f(z),\infty].$$

Выделим главный член подынтегральной функции $f(z)$ при $z\to\infty$. Так как $z=\infty$ есть правильная точка этой функции, то можно рассмотреть поведение этой функции при $z\to\infty$, например, на действительной положительной полуоси. Здесь (см. рис. 13.8)

$$(1+z)^{1-p}=e^{(1-p)(\ln|1+z|+i\varphi_1)}\Big|_{\substack{z=x\\ \varphi_1=0}}=(1+x)^{1-p};$$

$$(1-z)^p=e^{p(\ln|1-z|+i\varphi_2)}\Big|_{\substack{z=x\\ \varphi_2=-\pi}}=(x-1)^p e^{-i\pi p}.$$

Таким образом, при $z\to\infty$ главный член подынтегральной функции имеет вид

$$f(z)=\frac{(1+z)^{1-p}(1-z)^p}{1+z^2}\underset{z\to\infty}{\sim}\frac{e^{-i\pi p}}{z}\Rightarrow$$

разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана в точке $z=\infty$ начинается с члена $\dfrac{e^{-i\pi p}}{z}\Rightarrow c_{-1}=e^{-i\pi p}$ и

$$\int\limits_{C_R}\frac{(1+z)^{1-p}(1-z)^p}{1+z^2}dz=-2\pi i\cdot(-c_{-1})=2\pi i e^{-i\pi p}.$$

Интеграл по верхнему берегу разреза есть искомый интеграл *J*.

Найдем интеграл по нижнему берегу разреза: $|1+z|=1+x$; $\arg(1+z)=0$; $|1-z|=1-x$; $\arg(1-z)=-2\pi$ (см. рис. 13.8); $(1+z)^{1-p}=(1+x)^{1-p}$; $(1-z)^p=(1-x)^p e^{-2\pi p i}$ и, следовательно, интеграл по нижнему берегу равен

$$\int_{1}^{-1} \frac{(1+x)^{1-p}(1-x)^p e^{-2\pi p i}}{1+x^2} dx = -e^{-2\pi p i} \cdot J .$$

Приравнивая интегралы, вычисленные обоими способами, получим

$$J - e^{-2\pi p i} \cdot J + 2\pi i e^{-i\pi p} = \sqrt{2}\pi (e^{i\frac{\pi}{4} - i\frac{\pi p}{2}} - e^{-i\frac{\pi}{4} - i\frac{3\pi p}{2}}),$$

$$J = \frac{\sqrt{2}\pi (e^{i\frac{\pi}{4} - i\frac{\pi p}{2}} - e^{-i\frac{\pi}{4} - i\frac{3\pi p}{2}}) - 2\pi i e^{-i\pi p}}{1 - e^{-2\pi p i}} =$$

$$= \frac{[\sqrt{2}\pi (e^{i\frac{\pi}{4} - i\frac{\pi p}{2}} - e^{-i\frac{\pi}{4} - i\frac{3\pi p}{2}}) - 2\pi i e^{-i\pi p}] \cdot (1 - e^{2\pi p i})}{(1 - e^{-2\pi p i})(1 - e^{2\pi p i})} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}\pi (e^{i\frac{\pi}{4} - i\frac{\pi p}{2}} - e^{-i\frac{\pi}{4} - i\frac{3\pi p}{2}} - e^{i\frac{\pi}{4} + i\frac{3\pi p}{2}} + e^{-i\frac{\pi}{4} + i\frac{\pi p}{2}}) + 2\pi i (e^{\pi p i} - e^{-\pi p i})}{2 - 2\cos 2\pi p} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}\pi \left[2\cos(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi p}{2}) - 2\cos(\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi p}{2}) \right] + 2\pi i \cdot 2i \sin \pi p}{4 \sin^2 \pi p} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}\pi \sin(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi p}{2}) \sin \pi p - \pi \sin \pi p}{\sin^2 \pi p} = \pi \frac{\sqrt{2} \sin(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi p}{2}) - 1}{\sin \pi p} =$$

$$= \frac{\pi}{\sin \pi p} [\sqrt{2} (\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \frac{\pi p}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \frac{\pi p}{2}) - 1] =$$

$$= \frac{\pi}{\sin \pi p} (\sin \frac{\pi p}{2} + \cos \frac{\pi p}{2} - 1).$$

Пример 13.16 ([3], № 4.186). Вычислить интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)\sqrt[3]{x^2(1-x)}}$.

Решение. Рассмотрим $\int_C \frac{dz}{(z+1)\sqrt[3]{z^2(1-z)}}$, где контур C представлен на рис. 13.10.

Точки ветвления подынтегральной функции $z = 0$ и $z = 1$. Они удалены внутренним контуром. Поэтому разделение функции $\sqrt[3]{z^2(1-z)}$ на однозначные аналитические функции в рассматриваемой области (внутри контура интегрирования C) возможно. Выделим ветвь, являющуюся аналитическим продолжением с действительной оси (с верхнего берега разреза).

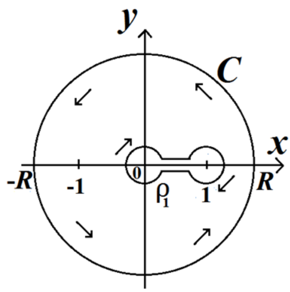


Рис. 13.10

Пусть $z = |z|e^{i\arg z} = \rho_1 e^{i\varphi_1}$; $1 - z = \rho_2 e^{i\varphi_2}$. Тогда

$$\sqrt[3]{z^2(1-z)} = \sqrt[3]{\rho_1{}^2\rho_2}\, e^{i\frac{2\varphi_1+\varphi_2+2\pi k}{3}}$$

$(k = 0,1,2)$ (по определению корня). На верхнем берегу разреза:

$$\varphi_1 = 0,\ \ \varphi_2 = 0,\ \ \rho_1 = x,$$

$$\rho_2 = 1 - x \Rightarrow \sqrt[3]{x^2(1-x)}e^{i\frac{2\pi k}{3}} = \sqrt[3]{x^2(1-x)} \Rightarrow k = 0\,.$$

Интегрируется ветвь $\sqrt[3]{z^2(1-z)} = \sqrt[3]{\rho_1{}^2\rho_2}\, e^{i\frac{2\varphi_1+\varphi_2}{3}}$.

Внутри контура C подынтегральная функция имеет одну особую точку $z = -1$ – полюс первого порядка. Вычислим вычет в этой точке. В ней $\rho_1 = 1,\ \varphi_1 = \pi,\ \rho_2 = 2,\ \varphi_2 = 0$. Следовательно,

$$\sqrt[3]{z^2(1-z)}\Big|_{z=-1} = \sqrt[3]{2}\cdot e^{i\frac{2\pi}{3}},$$

$$\operatorname{res}[f(z),-1] = \lim_{z\to-1} f(z)\cdot(z+1) = \frac{1}{\sqrt[3]{z^2(1-z)}}\Bigg|_{z=-1} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\cdot e^{-i\frac{2\pi}{3}}\,.$$

Интеграл равен

$$\int\limits_C \frac{dz}{(z+1)\sqrt[3]{z^2(1-z)}} = 2\pi i\cdot \operatorname{res}[f(z),-1] = \frac{2\pi i}{\sqrt[3]{2}}\cdot e^{-i\frac{2\pi}{3}}.$$

Вычислим интеграл по составным частям контура C. Покажем, что интегралы по малым окружностям радиуса ρ и по большой окружности радиуса R стремятся к нулю при $\rho \to 0$ и $R \to \infty$, соответственно. По окружности с центром в $z = 0$:

$$\left|\int_{C_\rho}\frac{dz}{(z+1)\sqrt[3]{z^2(1-z)}}\right|\le\int_0^{2\pi}\left|\frac{i\rho e^{i\varphi}d\varphi}{(\rho e^{i\varphi}+1)\cdot\sqrt[3]{\rho^2e^{2i\varphi}(1-\rho e^{i\varphi})}}\right|=$$

$$=\rho^{\frac{1}{3}}\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{\left|\rho e^{i\varphi}+1\right|\cdot\left|\sqrt[3]{e^{2i\varphi}(1-\rho e^{i\varphi})}\right|}\to 0$$

при $\rho\to 0$. По малой окружности радиуса ρ с центром в точке $z = 1$ обозначим $1-z=\rho e^{i\varphi}$, $z=1-\rho e^{i\varphi}$, $dz=-\rho ie^{i\varphi}d\varphi$:

$$\left|\int_{C_\rho}\frac{dz}{(z+1)\sqrt[3]{z^2(1-z)}}\right|\le\int_0^{2\pi}\left|\frac{\rho d\varphi}{(2-\rho e^{i\varphi})\cdot\sqrt[3]{\rho e^{i\varphi}(1-\rho e^{i\varphi})^2}}\right|=$$

$$=\rho^{\frac{2}{3}}\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{\left|2-\rho e^{i\varphi}\right|\cdot\left|\sqrt[3]{e^{i\varphi}(1-\rho e^{i\varphi})^2e^{i\varphi}}\right|}\to 0$$

при $\rho\to 0$. Интеграл по большой окружности, на которой $z=\mathrm{Re}^{i\varphi}$, $dz=Rie^{i\varphi}d\varphi$:

$$\left|\int_{C_R}\frac{dz}{(z+1)\sqrt[3]{z^2(1-z)}}\right|\le\int_0^{2\pi}\left|\frac{Rie^{i\varphi}d\varphi}{(R\cdot e^{i\varphi}+1)\cdot\sqrt[3]{R^2e^{2i\varphi}(1-R\cdot e^{i\varphi})}}\right|=$$

$$=\frac{1}{R}\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{\left|e^{i\varphi}+R^{-1}\right|\cdot\left|\sqrt[3]{e^{2i\varphi}(R^{-1}-e^{i\varphi})}\right|}\to 0$$

при $R\to\infty$. Интеграл по верхнему берегу разреза есть искомый интеграл *J*.

Найдем интеграл по нижнему берегу разреза. Здесь: $|z|=x$, $|1-z|=1-x$, $\arg z=\varphi_1=2\pi$, $\arg(1-z)=\varphi_2=0$, $\sqrt[3]{z^2(1-z)}=\sqrt[3]{x^2(1-x)}\cdot e^{i\frac{4\pi}{3}}\Rightarrow$ интеграл по нижнему берегу равен

$$\int_1^0\frac{dx\cdot e^{-i\frac{4\pi}{3}}}{(x+1)\sqrt[3]{x^2(1-x)}}=-e^{-i\frac{4\pi}{3}}\int_0^1\frac{dx}{(x+1)\sqrt[3]{x^2(1-x)}}=-e^{-i\frac{4\pi}{3}}\cdot J\ .$$

Приравнивая интеграл, вычисленный через вычет, интегралу по составным частям контура, получим

$$J - e^{-i\frac{4\pi}{3}} \cdot J = \frac{2\pi i}{\sqrt[3]{2}} \cdot e^{-i\frac{2\pi}{3}};$$

$$J = \frac{2\pi i}{\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{e^{-i\frac{2\pi}{3}}}{1 - e^{-i\frac{4\pi}{3}}} = \frac{2\pi i e^{-i\frac{2\pi}{3}}(1 - e^{i\frac{4\pi}{3}})}{\sqrt[3]{2}(1 - e^{-i\frac{4\pi}{3}})(1 - e^{i\frac{4\pi}{3}})} = \frac{2\pi i(e^{-i\frac{2\pi}{3}} - e^{i\frac{2\pi}{3}})}{\sqrt[3]{2}(2 - 2\cos\frac{4\pi}{3})} =$$

$$= \frac{-2\pi i \cdot 2i \sin\frac{2\pi}{3}}{\sqrt[3]{2} \cdot 2 \cdot 2\sin^2\frac{2\pi}{3}} = \frac{\pi\sqrt[3]{4}}{\sqrt{3}}.$$

Пример 13.17 ([3], № 4.190). Вычислить интеграл $\int\limits_0^\infty \frac{\ln x dx}{x^2 + a^2}$, $(a > 0)$.

Решение. Рассмотрим $\int\limits_C \frac{\ln z dz}{z^2 + a^2}$, где контур C представлен на рис. 13.11. Интегрируется ветвь логарифма $\mathrm{Ln} z = \ln|z| + i\varphi \quad (k = 0)$. Внутри контура C одна особая точка $z = ia$ – полюс первого порядка. Вычет равен

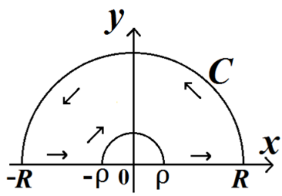


Рис. 13.11

$$\mathrm{res}[f(z), ia] = \frac{\ln ia}{2ia} = \frac{\ln a + i\frac{\pi}{2}}{2ia}.$$

Интеграл равен

$$\int\limits_C \frac{\ln z dz}{z^2 + a^2} = 2\pi i \frac{\ln a + i\frac{\pi}{2}}{2ia} = \frac{\pi}{a}\left(\ln a + i\frac{\pi}{2}\right).$$

Вычислим интегралы по составным частям контура C. Интегралы по малой радиуса ρ и большой радиуса R окружностям обращаются в 0 при $\rho \to 0$ и $R \to \infty$ соответственно. Оценим интеграл по малой полуокружности, где $z = \rho e^{i\varphi}$, $\ln z = \ln\rho + i\varphi$:

$$\left|\int_{C_\rho}\frac{\ln z dz}{z^2+a^2}\right| \le \int_{\pi}^{0}\left|\frac{(\ln\rho+i\varphi)\rho i e^{i\varphi}d\varphi}{\rho^2e^{2i\varphi}+a^2}\right| = \int_{0}^{\pi}\frac{|\ln\rho+i\varphi|\rho d\varphi}{\left|\rho^2e^{2i\varphi}+a^2\right|} \sim$$

$$\sim \rho\ln\rho\int_0^{\pi}\left|\frac{d\varphi}{\rho^2e^{2i\varphi}+a^2}\right| \to 0$$

при $\rho \to 0$, так как $\lim\limits_{\rho\to 0}\rho\ln\rho = 0$.

Интеграл по большой полуокружности при $z = R\cdot e^{i\varphi}$:

$$\left|\int_{C_R}\frac{\ln z dz}{z^2+a^2}\right| \le \int_{\pi}^{0}\left|\frac{(\ln R+i\varphi)Rd\varphi}{R^2e^{2i\varphi}+a^2}\right| \sim \frac{R\ln R}{R^2}\int_0^{\pi}\left|\frac{d\varphi}{e^{2i\varphi}+a^2R^{-2}}\right| \to 0$$

при $R \to \infty$, так как $\lim\limits_{R\to\infty}\dfrac{\ln R}{R} = 0$.

Интеграл по положительной действительной полуоси при $\rho \to 0$ и $R \to \infty$ даст искомый интеграл J. Интеграл по отрицательной действительной полуоси:

$$\ln z = \ln|x| + i\pi,\quad \int_{-\infty}^{0}\frac{(\ln|x|+i\pi)dx}{x^2+a^2} = \int_0^{\infty}\frac{(\ln x+i\pi)dx}{x^2+a^2}.$$

Приравниваем интегралы, вычисленные обоими способами:

$$J + J + \int_0^{\infty}\frac{i\pi dx}{x^2+a^2} = \frac{\pi}{a}\ln a + \frac{\pi}{a}\cdot i\frac{\pi}{2}.$$

Приравниваем действительные части слева и справа:

$$2J = \frac{\pi}{a}\ln a,\quad J = \frac{\pi\ln a}{2a}.$$

Пример 13.18 ([3], № 4.191). Вычислить интеграл $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\ln^2 x dx}{x^2+a^2}$, $(a>0)$.

Решение. Рассмотрим $\displaystyle\int_C\frac{\ln^2 z dz}{z^2+a^2}$, контур C тот же, что и в примере 13.17. Выделяется та же ветвь логарифма $\ln z = \ln|z| + i\arg z$. Внутри контура точка $z = ia$ – полюс первого порядка.

$$\int_C \frac{\ln^2 z dz}{z^2+a^2} = 2\pi i \cdot \operatorname{res}[f(z), ia] = \frac{2\pi i\left(\ln a + i\dfrac{\pi}{2}\right)^2}{2ia} =$$

$$= \frac{\pi}{a}\left(\ln^2 a + \pi i \ln a - \frac{\pi^2}{4}\right).$$

Интегралы по составным частям контура C. Аналогично предыдущему примеру показывается, что интегралы по малой полуокружности радиуса ρ и по большой полуокружности радиуса R обращаются в 0 при $\rho \to 0$ и $R \to \infty$ соответственно.

Интеграл по отрицательной действительной полуоси

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{(\ln|x| + i\pi)^2 dx}{x^2+a^2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{\ln^2|x| dx}{x^2+a^2} + 2\pi i \int_{-\infty}^{0} \frac{\ln|x| dx}{x^2+a^2} - \pi^2 \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{x^2+a^2} =$$

$$= \int_{0}^{\infty} \frac{\ln^2 x dx}{x^2+a^2} + 2\pi i \int_{-\infty}^{0} \frac{\ln|x| dx}{x^2+a^2} - \pi^2 \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{x^2+a^2}.$$

Приравниваем интеграл, вычисленный через вычет, интегралам по составным частям контура:

$$2J + 2\pi i \int_{-\infty}^{0} \frac{\ln|x| dx}{x^2+a^2} - \pi^2 \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{\pi}{a}\left(\ln^2 a + \pi i \ln a - \frac{\pi^2}{4}\right).$$

Приравниваем действительные части слева и справа, имея в виду, что

$$-\pi^2 \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{x^2+a^2} = -\frac{\pi^3}{2a}, \quad J = \frac{\pi}{2a}\ln^2 a + \frac{\pi^3}{8a}.$$

Пример 13.19 ([3], № 4.192). Вычислить интеграл $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\ln x dx}{\sqrt{x}(x^2+a^2)^2}$.

Решение. Рассмотрим $\displaystyle\int_C \frac{\ln z dz}{\sqrt{z}(z^2+a^2)^2}$, где контур C представлен на рис. 13.12. Выделяем ветвь, как обычно, аналитическим продолжением с действительной оси $(x > 0)$:

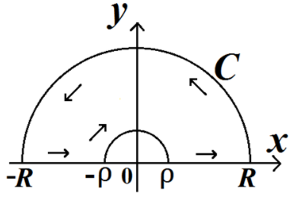


Рис. 13.12

$$\mathrm{Ln} z = \ln|z| + i\arg z + i2\pi k.$$

На положительной действительной полуоси

$$|z| = x,\ \ \arg z = 0,\ \ \operatorname{Ln} z\big|_{z=x>0} = \ln x + i2\pi k = \ln x \Rightarrow k = 0\,.$$

Ветвь $\ln z = \ln|z| + i\varphi$; $\sqrt{z} = \sqrt{|z|}e^{i\frac{\varphi+2\pi k}{2}}$ $(k = 0,1)$.

На действительной положительной полуоси

$$|z| = x,\ \ \varphi = 0,\ \ \sqrt{z}\Big|_{z=x>0} = \sqrt{x}\cdot e^{i\pi k} = \sqrt{x} \Rightarrow k = 0\,.$$

Ветвь $\sqrt{z} = \sqrt{\rho}e^{\frac{i\varphi}{2}}$.

Окружностью радиуса ρ с центром в начале координат выводим точку ветвления $z = 0$ из внутренности контура интегрирования, поэтому выделение однозначной ветви возможно.

Внутри контура одна особая точка подынтегральной функции $z = ia$ $(a > 0)$ – полюс второго порядка:

$$\operatorname{res}[f(z), ia] = \lim_{z\to ia}\frac{d}{dz}\frac{\ln z}{\sqrt{z}(z+ia)^2} = \left.\frac{z + ia - \ln z\left(\frac{1}{2}ia + \frac{5}{2}z\right)}{z\sqrt{z}(z+ia)^3}\right|_{z=ia} =$$

$$= \frac{2ia - 3ia\left(\ln a + i\frac{\pi}{2}\right)}{ia\sqrt{a}e^{i\frac{\pi}{4}}(2ia)^3} = \frac{2 - 3\ln a - i\frac{3\pi}{2}}{\sqrt{a}e^{i\frac{\pi}{4}}8i^3a^3} = ie^{-i\frac{\pi}{4}}\frac{2 - 3\ln a - i\frac{3\pi}{2}}{8a^3\sqrt{a}}\,.$$

Интеграл по контуру C равен

$$-2\pi e^{-i\frac{\pi}{4}}\frac{2 - 3\ln a - i\frac{3\pi}{2}}{8a^3\sqrt{a}} = \frac{-\pi e^{-i\frac{\pi}{4}}}{4a^3\sqrt{a}}\left(2 - 3\ln a - i\frac{3\pi}{2}\right).$$

Вычислим интегралы по составным частям контура C.

Интеграл по действительной положительной полуоси при $\rho \to 0$ и при $R \to \infty$ превращается в искомый интеграл J. Интеграл по отрицательной действительной полуоси равен

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{(\ln|x| + i\pi)dx}{\sqrt{|x|}e^{i\frac{\pi}{2}}(x^2+a^2)^2} = \int_{0}^{\infty}\frac{(\ln x + i\pi)dx}{i\sqrt{x}(x^2+a^2)^2} = -i\cdot J + \pi\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}(x^2+a^2)^2}.$$

Интегралы по малой полуокружности при $\rho \to 0$ и по большой полуокружности при $R \to \infty$ обращаются в 0 (показывается, как в предыдущих примерах). Получаем

$$J - i\cdot J + \pi\int_0^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}(x^2+a^2)^2} = \frac{-\pi e^{-i\frac{\pi}{4}}}{4a^3\sqrt{a}}\left(2-3\ln a + i\frac{3\pi}{2}\right).$$

Приравниваем мнимые части слева и справа:

$$-J = \frac{-\pi}{4a^3\sqrt{a}}[\cos\frac{\pi}{4}\cdot\frac{3\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{4}\cdot(2-3\ln a)];$$

$$J = \frac{\pi}{4a^3\sqrt{a}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{3\pi}{2}-2+3\ln a\right) = \frac{\pi}{2a^3\sqrt{2a}}\left(\frac{3}{2}\ln a - 1 + \frac{3\pi}{4}\right).$$

Пример 13.20 ([3], № 4.202). Вычислить интеграл $\int_0^{\infty}\frac{\sin ax}{\text{sh}x}dx.$

Решение. Рассмотрим интеграл $\int_C \frac{e^{aiz}dz}{\text{sh}z}$, где контур C указан на рис. 13.13. Внутри контура одна особая точка $z = \pi i$ – полюс первого порядка. Вычислим вычет в ней по формуле $\frac{\varphi}{\psi'}$, где $\varphi(z) = e^{iaz}$, $\psi(z) = \text{sh}z$:

$$\text{res}[f(z),\pi i] = \frac{e^{-a\pi}}{\text{ch}\pi i} = \frac{e^{-a\pi}}{\cos\pi} = -e^{-a\pi}.$$

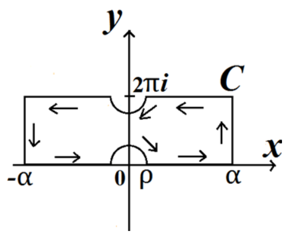


Рис. 13.13

Интеграл равен

$$2\pi i\cdot\text{res}[f(z),\pi i] = -2\pi i e^{-a\pi}.$$

Вычислим интегралы по составным частям контура C. Интеграл по малой полуокружности радиуса ρ с центром в начале координат

$$\int_{C_\rho}\frac{e^{aiz}dz}{\text{sh}z} = -\pi i\,\text{res}[f(z),0] = -\pi i$$

(см. вычисление интегралов с особенностями на действительной оси). Аналогично вычисляется интеграл по малой полуокружности с центром в точке $2\pi i$ (также полюс первого порядка).

$$\int\limits_{C_{\rho'}} \frac{e^{aiz}dz}{\operatorname{sh} z} = -\pi i \operatorname{res}[f(z), 2\pi i] = -\pi i e^{-2\pi a}.$$

Интеграл по действительной оси

$$\int\limits_{-\alpha}^{-\rho} \frac{e^{iax}dx}{\operatorname{sh} x} + \int\limits_{\rho}^{\alpha} \frac{e^{iax}dx}{\operatorname{sh} x} \underset{\substack{\rho \to 0 \\ \alpha \to \infty}}{\longrightarrow} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iax}dx}{\operatorname{sh} x}.$$

Интеграл по горизонтальной прямой $z = x + 2\pi i$ в пределе при $\rho \to 0$, $\alpha \to \infty$ равен

$$\int\limits_{+\infty}^{-\infty} \frac{e^{ia(x+2\pi i)}dx}{\operatorname{sh}(x + 2\pi i)} = -e^{-2\pi a} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iax}}{\operatorname{sh} x} dx.$$

Оценим интегралы по вертикальным отрезкам: $z = \pm\alpha + iy$, $0 \le y \le 2\pi$,

$$\left| \int\limits_{0}^{2\pi} \frac{e^{ia(\alpha+iy)} idy}{\operatorname{sh}(\alpha + iy)} \right| \le \int\limits_{0}^{2\pi} \frac{e^{-ay}dy}{|\operatorname{sh}(\alpha + iy)|} \to 0$$

при $\alpha \to \infty$.

Аналогично, по левому вертикальному отрезку интеграл стремится к нулю. В результате имеем равенство

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iax}dx}{\operatorname{sh} x} - e^{-2\pi a} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iax}dx}{\operatorname{sh} x} - \pi i - \pi i e^{-2\pi a} = -2\pi i e^{-\pi a}.$$

Приравняем мнимые части слева и справа:

$$(1 - e^{-2\pi a}) \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin ax \cdot dx}{\operatorname{sh} x} - \pi - \pi e^{-2\pi a} = -2\pi e^{-a\pi} \Rightarrow$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin ax \cdot dx}{\operatorname{sh} x} = \frac{-2\pi e^{-a\pi} + \pi e^{-2a\pi} + \pi}{1 - e^{-2a\pi}} = \frac{\pi(1 - e^{-a\pi})^2}{(1 - e^{-a\pi})(1 + e^{-a\pi})} =$$

$$= \frac{\pi(1 - e^{-a\pi})}{1 + e^{-a\pi}} = \pi \cdot \operatorname{th} \frac{a\pi}{2} \Rightarrow \int\limits_{0}^{\infty} \frac{\sin ax \cdot dx}{\operatorname{sh} x} = \frac{\pi}{2} \operatorname{th} \frac{a\pi}{2}.$$

Рекомендуемый перечень задач для решения в аудитории:
13.1 ([3], № 4.165); 13.2 ([3], № 4.166); 13.5 ([3], № 4.170);
13.8 ([3], № 4.177); 13.12 ([3], № 4.181); 13.17 ([3], № 4.190);
13.19 ([3], № 4.192).
Резерв:
13.4 ([3], № 4.168); 13.7 ([3], № 4.176); 13.13 ([3], № 4.183),
13.14 ([3], № 4.184); 13.15 ([3], № 4.185); 13.20 ([3], № 4.202).
Для самостоятельной работы дома:
13.3 ([3], № 4.167); 13.6 ([3], № 4.172); 13.9 ([3], № 4.178),
13.11 ([3], № 4.180); 13.18 ([3], № 4.191).
На усмотрение преподавателя:
13.10 ([3], № 4.179); 13.16 ([3], № 4.186).

14. ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Рассмотрим интегральное преобразование Лапласа, его свойства и применения, то есть раздел математики, который обычно называют операционным исчислением.

Интеграл Лапласа имеет вид

$$F(p)=\int_0^\infty e^{-pt}f(t)dt,$$

где функция действительного переменного $f(t)$ называется оригиналом, а $F(p)$ – функция комплексного переменного p называется её изображением по Лапласу. Соответствие между $f(t)$ и $F(p)$ будем изображать знаком $\doteqdot$. Функциями, которые могут быть оригиналом, являются не только действительные, но и комплекснозначные функции $f(t)$, отвечающие следующим требованиям:

1) $f(t)\equiv 0$ при $t<0$;

2) на каждом конечном промежутке оси t $f(t)$ имеет не более конечного числа разрывов первого рода;

3) $f(t)$ при $t\to+\infty$ имеет ограниченную степень роста, что значит: $\left|f(t)\right|\le Me^{at}$, где M и a – некоторые постоянные. При этом наименьшее из всех a называется показателем степени роста функции $f(t)$. Можно показать, что функция $F(p)$ – аналитическая в полуплоскости $\operatorname{Re} p>a$, где a – показатель степени роста функции $f(t)$.

Свойства изображений

1. Свойство линейности:

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f_i(t)\doteqdot\alpha_i F_i(p)\ \ (\alpha_i=\text{const},\ \ i=1,2...n).$$

2. $f(\alpha t)\doteqdot\dfrac{1}{\alpha}F(\dfrac{p}{\alpha}),\ \alpha=\text{const}>0$.

3. Теорема запаздывания:

$$f_\tau(t)=\begin{cases}0,\ \tau>t,\\ f\left(t-\tau\right),\ \tau\le t,\end{cases}\qquad f_\tau(t)\doteqdot e^{-p\tau}F(p).$$

4. $f^{(n)}(t)\doteqdot p^n\{F(p)-\dfrac{f(o)}{p}-...-\dfrac{f^{(n-1)}(o)}{p^n}\}$,

5. $\int\limits_0^t f(\tau)d\tau\doteqdot\dfrac{1}{p}F(p)$.

6. Изображение свертки:

$$\int\limits_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau=\int\limits_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau\doteqdot F_1(p)\cdot F_2(p).$$

7. $F^{(n)}(p)\doteqdot(-1)^n t^n f(t)$.

8. $\int\limits_p^\infty F(p)dp\doteqdot\dfrac{f(t)}{t}$.

9.Теорема смещения: $F(p+\lambda)\doteqdot e^{-\lambda t}f(t)$.

Изображения некоторых функций

1. $1\doteqdot\dfrac{1}{p}$; $\operatorname{Re}p>0$. Под единицей понимается единичная функция Хевисайда $\sigma_0(t)$: $\sigma_0(t)=\begin{cases}0,\text{если }\ t<0,\\ 1,\text{если }\ t\ge 0.\end{cases}$

Все функции в дальнейшем будем считать умноженными на эту единичную функцию.

2. $t^\nu\doteqdot\dfrac{\Gamma(\nu+1)}{p^{\nu+1}}$, $\nu>-1$, $\operatorname{Re}p>0$; $\Gamma(\nu)$ – гамма-функция.

3. При $\nu=n$ (n – целое) $t^n\doteqdot\dfrac{n!}{p^{n+1}}$, $\operatorname{Re}p>0$.

4. $e^{\alpha t}\doteqdot\dfrac{1}{p-\alpha}$, $\operatorname{Re}p>\operatorname{Re}\alpha$.

5. $\sin\omega t\doteqdot\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$, $\operatorname{Re}p>\left|\operatorname{Im}\omega\right|$;

6) $\cos\omega t \risingdotseq \dfrac{p}{p^2+\omega^2}$, $\operatorname{Re} p > |\operatorname{Im}\omega|$.

7) $\operatorname{sh}\lambda t \risingdotseq \dfrac{\lambda}{p^2-\lambda^2}$, $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re}\lambda$.

8) $\operatorname{ch}\lambda t \risingdotseq \dfrac{p}{p^2-\lambda^2}$, $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re}\lambda$.

Изображения других элементарных функций могут быть получены с помощью свойств из соответствующей таблицы.

Перейдем к определению оригинала по изображению, а также обратному преобразованию Лапласа (преобразованию Меллина).

Если $F(p)$, где $p = x + iy$ – аналитическая в области $\operatorname{Re} p > a$ функция, равномерно относительно $\arg p$ стремящаяся к нулю при $|p| \to \infty$, и для всех $\operatorname{Re} p > a$ сходится интеграл $\int\limits_{x-i\infty}^{x+i\infty} |F(p)|dy < M$, $x > a$, то $F(p)$ при $\operatorname{Re} p > a$ является изображением функции $f(t)$, которая определяется выражением

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt}F(p)dp.$$

Последний интеграл может вычисляться в комплексной плоскости p с помощью вычетов рассмотренными ранее методами. Частный случай: если $F(p)$ разлагается на бесконечности в ряд Лорана вида $F(p) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{c_n}{p^n}$, то оригиналом этой функции является функция $f(t) = 0$, если $t < 0$, и $f(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_{n+1}\dfrac{t^n}{n!}$, если $t \geq 0$.

Пример 14.1 ([4], № 3). Пользуясь теоремой подобия и таблицей изображений, найти изображения следующих функций: 1) e^{at}; 2) e^{-at}; 3) $\operatorname{sh} at$; 4) $\operatorname{ch} at$; 5) $\sin at$; 6) $\cos at$; 7) $\cos^2 t$; 8) $\sin\dfrac{t}{a}$.

Решение. 1) Считая известным изображение $e^t \risingdotseq \dfrac{1}{p-1}$, по теореме подобия ($f(\alpha t) \risingdotseq \dfrac{1}{\alpha}F\left(\dfrac{p}{\alpha}\right)$), получим

$$e^{at} \risingdotseq \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{\frac{p}{a}-1} = \frac{1}{p-a}.$$

3) $\operatorname{sh} t = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2} \Rightarrow \operatorname{sh} t \risingdotseq \dfrac{1}{p^2-1}$ и по теореме подобия

$$\operatorname{sh} at \risingdotseq \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{\left(\frac{p}{a}\right)^2-1} = \frac{a}{p^2-a^2}.$$

5) $\sin t = \dfrac{e^{it}-e^{-it}}{2i} \risingdotseq \dfrac{1}{2i}\cdot\left(\dfrac{1}{p-i}-\dfrac{1}{p+i}\right) = \dfrac{1}{p^2+1} \Rightarrow \sin at \risingdotseq$

$$\risingdotseq \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{\left(\frac{p}{a}\right)^2+1} = \frac{a}{p^2+a^2}.$$

7) $\cos^2 t = \dfrac{1+\cos 2t}{2} \risingdotseq \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{p}{p^2+4} = \dfrac{p^2+2}{p(p^2+4)}$.

Пример 14.2 ([4], № 5). Пользуясь теоремой смещения, найти изображения следующих функций:

1) $e^{ax}\sin bx$; 2) $\operatorname{ch} ax\cdot\cos ax$; 3) $\dfrac{1}{2}(\operatorname{ch} ax\cdot\sin ax + \operatorname{sh} ax\cdot\cos ax)$;

4) $\dfrac{1}{2}\operatorname{sh} ax\cdot\sin ax$; 5) $e^{-4x}\cdot\sin 3x\cdot\cos 2x$; 6) $\operatorname{sh} x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x$;

7) $\dfrac{e^{-ax}}{\sqrt{\pi x}}$; 8) $e^{(x+1)(2-x)}$.

Решение.

1) $e^{ax}\sin bx \risingdotseq \dfrac{b}{(p-a)^2+b^2}$ (непосредственно по точке смещения);

3) $\dfrac{1}{2}(\operatorname{ch} ax\cdot\sin ax + \operatorname{sh} ax\cdot\cos ax)$;

$$\operatorname{ch} ax\cdot\sin ax = \frac{e^{ax}+e^{-ax}}{2}\sin ax \risingdotseq \frac{1}{2}\left[\frac{a}{(p-a)^2+a^2} + \frac{a}{(p+a)^2+a^2}\right] =$$

$$=\frac{a}{2}\cdot\frac{p^2+2ap+2a^2+p^2-2ap+2a^2}{\left(p^2-2ap+2a^2\right)\cdot\left(p^2+2ap+2a^2\right)}=\frac{a}{2}\cdot\frac{2p^2+4a^2}{(p^2+2a^2)^2-4a^2p^2}=$$

$$=\frac{a(p^2+2a^2)}{p^4+4a^4}.$$

Аналогично:

$$\mathrm{sh}ax\cdot\cos ax=\frac{e^{ax}-e^{-ax}}{2}\cos ax \doteqdot \frac{1}{2}\left[\frac{p-a}{(p-a)^2+a^2}-\frac{p+a}{(p+a)^2+a^2}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{(p^2+2ap+2a^2)\cdot(p-a)-(p^2-2ap+2a^2)\cdot(p+a)}{\left(p^2-2ap+2a^2\right)\cdot\left(p^2+2ap+2a^2\right)}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2ap^2-4a^3}{(p^2+2a^2)^2-4a^2p^2}=\frac{a(p^2-2a^2)}{p^4+4a^4}.$$

И, следовательно,

$$\frac{1}{2}(\mathrm{ch}ax\cdot\sin ax+\mathrm{sh}ax\cdot\cos ax)\doteqdot$$

$$\doteqdot\frac{a(p^2+2a^2)}{2(p^4+4a^4)}+\frac{a(p^2-2a^2)}{2(p^4+4a^4)}=\frac{ap^2}{p^4+4a^4}.$$

5) $e^{-4x}\cdot\sin 3x\cdot\cos 2x$; используя формулу тригонометрии $\sin 3x\cdot\cos 2x=\frac{1}{2}\cdot(\sin 5x+\sin x)$, получим

$$e^{-4x}\cdot\sin 3x\cdot\cos 2x=\frac{1}{2}e^{-4x}\cdot(\sin 5x+\sin x)\doteqdot$$

$$\doteqdot\frac{1}{2}\left[\frac{5}{(p+4)^2+25}+\frac{1}{(p+4)^2+25}\right]=\frac{3}{(p+4)^2+25}.$$

7) $\frac{e^{-ax}}{\sqrt{\pi x}}$; воспользуемся таблицей изображений:

$$\frac{1}{\sqrt{x}}=x^{-\frac{1}{2}}\doteqdot\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{p^{\frac{1}{2}}}=\frac{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}{\sqrt{p}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{p}}\Rightarrow\frac{e^{ax}}{\sqrt{\pi x}}\doteqdot\frac{1}{2\sqrt{p+a}};$$

$$e^{-ax}\cdot f(x)\doteqdot F(p+a)\Rightarrow\frac{e^{-ax}}{\sqrt{\pi x}}\doteqdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{p+a}}.$$

Пример 14.3 ([4], №6). Пользуясь теоремой смещения и теоремой дифференцирования изображения, найти изображения следующих функций: 1) $x\cos bx$; 2) $x^2\sin bx$; 3) $x\cdot \mathrm{sh}ax\cdot \sin ax$; 4) $x\cdot \mathrm{ch}ax\cdot \cos ax$; 5) $xe^{-\frac{x}{2}}$; 6) x^2e^{3x}.

Решение.

1) $x\cos bx$. Так как $\cos bx \risingdotseq \dfrac{p}{p^2+b^2}$ и $F'(p)\risingdotseq -xf(x)$, то

$$x\cos bx \risingdotseq -\left(\frac{p}{p^2+b^2}\right)' = \frac{p^2-b^2}{(p^2+b^2)^2}.$$

3) $x\cdot \mathrm{sh}ax\cdot \sin ax = x\dfrac{e^{ax}-e^{-ax}}{2}\sin ax$, $\quad e^{ax}\sin ax \risingdotseq \dfrac{a}{(p-a)^2+a^2}$ (по теореме смещения),

$$xe^{ax}\sin ax \risingdotseq -\left(\frac{a}{(p-a)^2+a^2}\right)' = \frac{2a(p-a)}{((p-a)^2+a^2)^2},$$

$$xe^{-ax}\sin ax \risingdotseq \frac{2a(p-a)}{((p-a)^2+a^2)^2};$$

$$x\cdot \mathrm{sh}ax\cdot \sin ax \risingdotseq a\left[\frac{p-a}{(p^2-2pa+2a^2)^2}-\frac{p+a}{(p^2+2pa+2a^2)^2}\right]=$$

$$=\frac{2a^2(3p^4-4a^4)}{(p^4+4a^4)^2};$$

5) $xe^{-\frac{x}{2}} = 2\dfrac{x}{2}e^{-\frac{x}{2}}$; $xe^{-x}\risingdotseq -\left(\dfrac{1}{p+1}\right)' = \dfrac{1}{(p+1)^2} \Rightarrow$ по теореме подобия: $\dfrac{x}{2}e^{-\frac{x}{2}} \risingdotseq 2F\left(\dfrac{p}{\frac{1}{2}}\right) = \dfrac{2}{(2p+1)^2}$.

Пример 14.4 ([4], №7). Пользуясь теоремой запаздывания, найти изображения ($a > 0$, $b > 0$): 1) $e^{(x-a)}\cdot\sin(x-a)$; 2) $\cos(ax-b)$; 3) $f(ax-b)$; 4) $f(ax+b)$.

Решение.

1) $e^{(x-a)}\cdot\sin\left(x-a\right)=\sigma_0\left(x-a\right)e^{(x-a)}\cdot\sin\left(x-a\right)\doteqdot e^{-ap}\cdot\dfrac{1}{(p-a)^2+1}.$

3) $f\left(ax-b\right)=f[a\cdot(x\ -\dfrac{b}{a})]\doteqdot\dfrac{e^{-p\frac{b}{a}}}{a}\cdot F(\dfrac{p}{a}).$

Пример 14.5 ([4], № 8). Пользуясь теоремой интегрирования изображения, найти изображения функций:

1) $\dfrac{\sin x}{x}$; 2) $\dfrac{e^{-ax}\cdot\sin kx}{x}$; 3) $\dfrac{\cos bx-\cos ax}{x}$; 4) $\dfrac{1-e^{-ax}}{x\cdot e^{x}}$;

5) $\dfrac{\sin 7x\cdot\sin 3x}{x}$; 6) $\dfrac{e^{-ax}}{x}\cdot\sin^2 bx$; 7) $\dfrac{e^{-ax}-e^{bx}}{x}$; 8) $\dfrac{\sin^2 x}{x}$.

Решение.

1) $\dfrac{\sin x}{x}\doteqdot\int\limits_p^\infty\dfrac{1}{p^2+1}dp=\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}p=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{p}$.

2) $$\frac{e^{-ax}\cdot\sin kx}{x}\doteqdot\int\limits_p^\infty\frac{k}{(p+a)^2+k^2}dp=\operatorname{arctg}\frac{p+a}{k}\Big|_p^\infty=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{p+a}{k}=$$

$$=\ \operatorname{arctg}\frac{k}{p+a}.$$

3) $$\frac{\cos bx-\cos ax}{x}=\frac{\cos bx}{x}-\frac{\cos ax}{x}\doteqdot\int\limits_p^\infty\frac{pdp}{p^2+b^2}-\int\limits_p^\infty\frac{pdp}{p^2+a^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\ln(p^2+b^2)\ \Big|_p^\infty-\frac{1}{2}\ln(p^2+a^2)\ \Big|_p^\infty=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{p^2+b^2}{p^2+a^2}\right)\ \Big|_p^\infty=$$

$$=-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{p^2+b^2}{p^2+a^2}\right)=\ \ln\sqrt{\frac{p^2+a^2}{p^2+b^2}}.$$

5) $$\frac{\sin 7x\cdot\sin 3x}{x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\cos 4x-\cos 10x}{x}\doteqdot\frac{1}{2}\cdot[\frac{1}{2}\ln\left(p^2+16\right)-$$

$$-\frac{1}{2}\ln\left(p^2+100\right)]\ \Big|_p^\infty=\frac{1}{4}\ln\frac{p^2+100}{p^2+16}.$$

7) $\dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{x} \doteqdot \int\limits_{p}^{\infty}\dfrac{dp}{p-a}-\int\limits_{p}^{\infty}\dfrac{dp}{p-b}=\ln\left(\dfrac{p-a}{p-b}\right)\Bigg|_{p}^{\infty}=\ln\dfrac{p-b}{p-a}.$

Пример 14.6 ([4], № 12). Пользуясь теоремой обращения, найти оригиналы, соответствующие изображениям:

1) $\dfrac{1}{(p-1)(p-2)}$; 2) $\dfrac{1}{p^2(p+1)^3}$; 3) $\dfrac{1}{p(p^2+1)}$; 4) $\dfrac{p}{(p^2+1)(p^2+4)}$.

Решение.

2) $F(p)=\dfrac{1}{p^2(p+1)^3}$;

$$f(x)=\frac{1}{2\pi i}\cdot\int\limits_{x-i\infty}^{x+i\infty}e^{px}F(p)\,dp=\sum_{k=1,2}\mathrm{res}[e^{px}F(p),p_k]=$$

$$=\mathrm{res}\left[\frac{e^{px}}{p^2(p+1)^3},0\right]+\mathrm{res}\left[\frac{e^{px}}{p^2(p+1)^3},-1\right]=$$

$$=\frac{d}{dp}\cdot\frac{e^{px}}{(p+1)^3}\Bigg|_{p=0}+\frac{1}{2}\cdot\frac{d^2}{dp^2}\cdot\frac{e^{px}}{p^2}\Bigg|_{p=-1}=x-3+\frac{e^{-x}}{2}\cdot(x^2+4x+6).$$

4) $F(p)=\dfrac{p}{(p^2+1)(p^2+4)}$. Можно разложить на дроби:

$$\frac{p}{(p^2+1)(p^2+4)}=\frac{1}{3}\left(\frac{p}{p^2+1}-\frac{p}{p^2+4}\right)\doteqdot\frac{1}{3}\cos x-\frac{1}{3}\cos 2x.$$

Тот же результат можно получить с помощью вычетов:

$$F(p)=\frac{p}{(p^2+1)(p^2+4)}\doteqdot\sum\mathrm{res}[e^{px}\cdot F(p);\ p=\pm i;\pm 2i]\ =$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2e^{ix}}{(i^2+4)}+\frac{e^{-ix}}{2\cdot 3}-\frac{1}{3\cdot 2}2e^{2ix}-\frac{1}{3}\frac{e^{-2ix}}{2}=\frac{1}{3}\cos x-\frac{1}{3}\cos 2x.$$

Пример 14.7 ([4], № 13). Используя разложение дробей на простейшие, найти оригиналы:

1) $\dfrac{p^2+1}{p(p+1)(p+2)}$; 2) $\dfrac{p+1}{p^2(p-1)(p+2)}$; 3) $\dfrac{1}{(p-1)^2\cdot(p-2)^3}$;

4) $\dfrac{1}{(p+1)^3\cdot(p+3)}$; 5) $\dfrac{5p+3}{(p-1)\left(p^2+2p+5\right)}$; 6) $\dfrac{p^2+14}{\left(p^2+4\right)(p^2+9)}$.

Решение.

1) $$\frac{p^2+1}{p(p+1)(p+2)} = \frac{A}{p}+\frac{B}{p+1}+\frac{C}{p+2};$$

$$p^2+1 = A(p+1)(p+2) + Bp(p+2) + Cp(p+1) \Rightarrow A=\frac{1}{2};$$

$$B=-2;\; C=\frac{5}{2} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}-2e^{-x}+\frac{5}{2}e^{-2x}$$

(по таблице изображений).

3) $$\frac{1}{(p-1)^2\cdot(p-2)^3}=\frac{A}{(p-1)^2}+\frac{B}{p-1}+\frac{C}{(p-2)^3}+\frac{D}{(p-2)^2}+\frac{E}{p-2};$$

$$1=A(p-2)^3+B(p-1)(p-2)^3+C(p-1)^2+D(p-1)^2(p-2)+$$
$$+E(p-1)^2(p-2)^2.$$

Полагая $p = 1$, получим $A = -1$; полагая $p = 2$, получим $C = 1$.

Далее приравниваем показатели при одинаковых степенях p слева и справа:

при p^4: $0 = B+E$;

при p^3: $0 = A+B(-7) + D+E(-4-2)$.

Свободные члены:

$$1 = -8A+8B+C-2D+4E \Rightarrow \begin{cases} 0=B+E, \\ 1=-7B+D-6E, \\ -8=8B-2D+4E \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B=-3;\; D=-2;\; E=3.$$

Оригинал $f(x) = -xe^x - 3e^x+\dfrac{x^2e^{2x}}{2}-2xe^{2x}+3e^{2x}$.

5) $$\frac{5p+3}{(p-1)\left(p^2+2p+5\right)}=\frac{A}{p-1}+\frac{Bp+C}{p^2+2p+5};$$

$$5p+3=A\left(p^2+2p+5\right)+\left(Bp+C\right)\left(p-1\right)\Rightarrow$$

$$A=1,\; B=-1,\; C=2;$$

$$\frac{5p+3}{(p-1)\left(p^2+2p+5\right)}=\frac{1}{p-1}-\frac{p}{(p+1)^2+4}+\frac{2}{(p+1)^2+4}\doteqdot$$

$$\doteqdot e^x-e^{-x}\cos 2x+e^{-x}\sin 2x.$$

Пример 14.8 ([4] №14). Найти оригиналы:

1) $\dfrac{3p}{(p^2+1)^2}=-\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{1}{p^2+1}\right)'\doteqdot\dfrac{3}{2}\cdot\sin x$;

3) $\dfrac{p}{(p^2-a^2)^2}=-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{p^2-a^2}\right)'\doteqdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{a}\cdot\operatorname{sh}ax$;

5) $\dfrac{p^2-1}{(p^2+1)^2}=-\left(\dfrac{p}{p^2+1}\right)'\doteqdot x\cdot\cos x$.

Пример 14.9 ([4], № 15). Пользуясь теоремой умножения (теоремой о свертке), найти оригиналы:

2) $\dfrac{1}{(p+1)(p+2)^2}$; 4) $\dfrac{p^2}{\left(p^2+4\right)(p^2+9)}$; 6) $\dfrac{1}{p^2(p^2-1)}$.

Решение.

2) Так как $\dfrac{1}{p+1}\doteqdot e^{-x}$ и $\dfrac{1}{(p+2)^2}\doteqdot xe^{-2x}$, то по теореме о свертке

$$\int_0^x f_1(\tau)\cdot f_2(x-\tau)\cdot d\tau=F_1(p)\cdot F_2(p)$$

получим

$$\frac{1}{p+1}\cdot\frac{1}{(p+2)^2}\doteqdot\int_0^x \tau e^{-2\tau}\cdot e^{-(x-\tau)}d\tau=$$

$$=e^{-x}\cdot\int_0^x \tau\cdot e^{-\tau}d\tau=e^{-x}\left[-\tau e^{-x}\Big|_0^x+\int_0^x e^{-\tau}d\tau\right]=e^{-x}\cdot\left[-xe^{-x}-e^{-x}+1\right]=$$

$$=-xe^{-2x}-e^{-2x}+e^{-x}.$$

4) $\dfrac{p^2}{\left(p^2+4\right)(p^2+9)}=\dfrac{p}{(p^2+4)}\cdot\dfrac{p}{(p^2+9)}\doteqdot$

$$\risingdotseq \int_0^x \cos 3\tau \cdot \cos 2(x-\tau)\,d\tau = \frac{1}{2}\int_0^x \left[\cos(2x+\tau)+\cos(5\tau-2x)\right]d\tau =$$

$$= \left[\frac{1}{2}\sin(2x+\tau)+\frac{1}{10}\sin(5\tau-2x)\right]_0^x = \frac{1}{2}\sin 3x - \frac{1}{2}\sin 2x +$$

$$+\frac{1}{10}\sin 3x + \frac{1}{10}\sin 2x = \frac{3}{5}\sin 3x - \frac{2}{5}\sin 2x.$$

6) $\dfrac{1}{p^2(p^2-1)}$. Так как $\dfrac{1}{p^2} \risingdotseq x$, а $\dfrac{1}{p^2-1} \risingdotseq \operatorname{sh} x$, то

$$\frac{1}{p^2(p^2-1)} \risingdotseq \int_0^x \operatorname{sh}\tau \cdot (x-\tau)\,d\tau = (x-\tau)\cdot \operatorname{ch}\tau \Big|_0^x + \int_0^x \operatorname{ch}\tau \cdot d\tau = -x + \operatorname{sh} x\,.$$

Пример 14.10 ([4], № 36). 1) Пусть $\varphi(p) \risingdotseq f(x)$ и $\psi(p) \risingdotseq g(x)$. Показать, что если $f(x) = \begin{cases} 0\,, & 0 < x < a \\ g(x), & a < x < b, \\ 0, & x > b, \end{cases}$ то $\varphi(p) = e^{-ap}\psi_a(p) - e^{-bp}\psi_b(p)$, где $\psi_a(p)$ – изображение функции $g(x+a)$ и $a > 0$.

Решение. Воспользуемся теоремой запаздывания: если $f_\tau(x) = \begin{cases} 0, & (\tau > x) \\ f(x-\tau), & (\tau \le x) \end{cases}$, то $f_\tau(x) \risingdotseq e^{-p\tau}F(p)$, где $F(p)$ – изображение функции $f(x)$.

Представим функцию $f(x)$ с помощью единичной функции Хевисайда $\sigma_0(x)$:

$$f(x) = \sigma_0(x-a)\cdot g(x) - \sigma_0(x-b)\cdot g(x)\,.$$

Преобразуем это выражение с целью применения теоремы запаздывания:

$$f(x) = \sigma_0((x-a)\cdot g((x+a)-a) - \sigma_0(x-b)\cdot g((x+b)-b) \risingdotseq$$

$$\risingdotseq e^{-pa}\cdot\psi_a(p) - e^{-pb}\cdot\psi_b(p),$$

что и требовалось доказать.

Пример 14.11 ([4], № 37). Найти изображения функций:

$$4)\ f(x)=\begin{cases}0\,, & x<0,\\ \dfrac{b}{a}x+b, & 0<x<a,\\ 0\,, & x>a;\end{cases}\qquad 5)\ f(x)=\begin{cases}0\,, & x<0,\\ 1-\dfrac{1}{a}x, & 0<x<2a,\\ 0\,, & x>2a.\end{cases}$$

Решение. Представив функцию $f(x)$ в виде:

$$f(x)\ =\ \sigma_0(x)\cdot(\frac{b}{a}x+b)-\ \sigma_0(x-a)\cdot(\frac{b}{a}(x+a-a)+b),$$

по доказанному в предыдущем примере получим

$$f(x)\doteqdot\frac{b}{ap^2}+\frac{b}{p}-e^{-ap}\cdot(\frac{b}{ap^2}+\frac{2b}{p}).$$

(так как $\frac{b}{a}x+b\doteqdot\frac{a}{b}\cdot\frac{b^2}{p^2a^2}+\frac{b}{p}=\frac{b}{ap^2}+\frac{b}{p}$). Можно этот результат получить, используя непосредственно интеграл Лапласа.

5) Делается аналогично или непосредственно через интеграл Лапласа. Представив $f(x)$ в виде

$$f\left(x\right)\ =\sigma_0\left(x\right)\cdot(1-\frac{x}{a})-\sigma_0\left(x-2a\right)\cdot(1-\frac{x-2a+2a}{a})=$$

$$=\sigma_0(x)\cdot(1-\frac{x}{a})-\ \sigma_0(x-2a)\cdot(-1-\frac{x-2a}{a}),$$

получим

$$F(p)=\frac{1}{p}-\frac{1}{ap^2}-e^{-2ap}(-\frac{1}{p}-\frac{1}{ap^2}).$$

Пример 14.12 ([4] №36). 2) Доказать, что, если $f(x)$ – периодическая функция с периодом 2ω и $g\left(x\right)=\begin{cases}f\left(x\right), & 0<x<2\omega,\\ 0, & x>2\omega,\end{cases}$ то изображением функции $f(x)$ является функция $\varphi(p)\ =\dfrac{\psi(p)}{1-e^{-2\omega p}}$, где $\psi(p)\doteqdot g\left(x\right)$.

Доказательство. Так как

$$g\left(x\right)=\sigma_0(x)\cdot f(x)\ -\ \sigma_0(x-2\omega)\cdot f(x)\ =$$

$$= \sigma_0(x) \cdot f(x) - \sigma_0(x - 2\omega) \cdot f((x + 2\omega) - 2\omega),$$

то $\psi(p) = \varphi(p) - e^{-2\omega p} \cdot \varphi_{2\omega}(p)$, где $\varphi_{2\omega}(p) \risingdotseq f(x + 2\omega)$.

Так как для периодической функции $f(x + 2\omega) = f(x)$, то $\varphi_{2\omega}(p) = \varphi(p)$, отсюда следует равенство

$$\psi(p) = \varphi(p) - e^{-2\omega p} \cdot \varphi(p)$$

и далее

$$\varphi(p) = \frac{\psi(p)}{1 - e^{-2\omega p}}.$$

Что и требовалось доказать.

Пример 14.13 ([4] № 39 (2, 4)). Найти изображения периодических функций $y = f(x)$, заданных графиками.

Решение.

2) $y = f(x)$ (рис. 14.1). Требуется найти изображение $\varphi(p)$ функции $f(x)$, если найдем изображение $\psi(p)$ функции

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & 0 < x < 4a, \\ 0, & x > 4a. \end{cases}$$

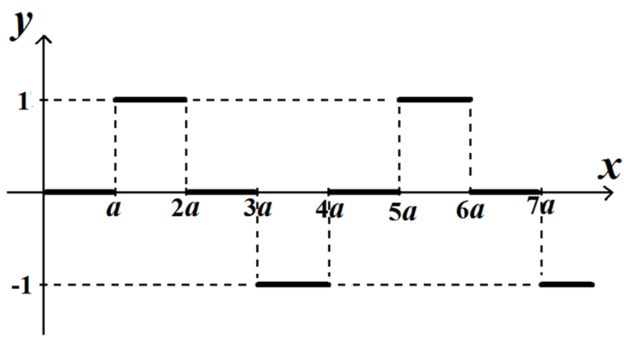


Рис. 14.1

Изображение

$$\psi(p) = \int_a^{2a} e^{-px} dx - \int_{3a}^{4a} e^{-px} dx = \frac{1}{p}(e^{-ap} - e^{-2ap} - e^{-3ap} - e^{-4ap}).$$

Искомое изображение периодической функции $f(x)$ по формуле предыдущего примера:

$$f(x) \risingdotseq \varphi(p) = \frac{\psi(p)}{1-e^{-4ap}} =$$

$$= \frac{1}{p} \cdot \frac{\left(e^{-ap} - e^{-3ap}\right) - (e^{-2ap} - e^{-4ap})}{(1-e^{-4ap})} =$$

$$= \frac{1}{p} \cdot \frac{e^{-2ap}\left(e^{ap} - e^{-ap}\right) - e^{-3ap}(e^{ap} - e^{-ap})}{e^{-2ap}(e^{2ap} - e^{-2ap})} =$$

$$= \frac{\left(e^{ap} - e^{-ap}\right)(e^{-2ap} - e^{-3ap})}{pe^{-2ap}\, 2\operatorname{sh} 2ap} =$$

$$= \frac{e^{-2ap}\, 2\operatorname{sh} ap \cdot (1-e^{-ap})}{pe^{-2ap}\, 4\operatorname{sh} ap \operatorname{ch} ap} = \frac{1-e^{-ap}}{2p \operatorname{ch} ap}.$$

4) $y = f(x)$ (рис 14.2). Требуется найти изображение $\varphi(p)$ периодической функции $f(x)$ с периодом $2a$.

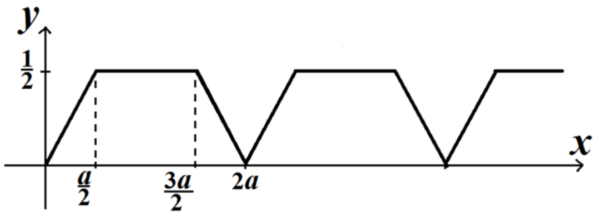


Рис. 14.2

Найдем сначала изображение $\psi(p)$ функции

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & 0 < x < 2a, \\ 0, & x > 2a \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{x}{a}, & 0 < x < \dfrac{a}{2}, \\ \dfrac{1}{2}, & \dfrac{a}{2} < x < \dfrac{3a}{2}, \\ -\dfrac{x}{a} + 2, & \dfrac{3a}{2} < x < 2a. \end{cases}$$

Непосредственным вычислением получаем:

$$\psi(p) = \int_0^{a/2} \frac{x}{a} \cdot e^{-px} dx + \frac{1}{2} \int_{a/2}^{3a/2} e^{-px} dx - \int_{3a/2}^{2a} (\frac{x}{a} - 2) e^{-px} dx =$$

$$=\left[-\frac{1}{p}e^{-px}\cdot\frac{x}{a}-\frac{1}{ap^2}e^{-px}\right]_0^{\frac{a}{2}}-\frac{1}{2}\frac{1}{p}e^{-px}\quad\Bigg|_{\frac{a}{2}}^{\frac{3a}{2}}+$$

$$+\left[\frac{1}{p}e^{-px}\cdot\frac{x}{a}+\frac{1}{ap^2}e^{-px}\right]_{\frac{3a}{2}}^{2a}-\frac{2}{p}e^{-px}\quad\Bigg|_{\frac{3a}{2}}^{2a}=$$

$$=\frac{-1}{2p}e^{-\frac{ap}{2}}-\frac{1}{ap^2}e^{-\frac{ap}{2}}+\frac{1}{ap^2}-\frac{1}{2p}e^{-\frac{3ap}{2}}+\frac{1}{2p}e^{-\frac{ap}{2}}+\frac{2}{p}e^{-2ap}+$$

$$+\frac{1}{ap^2}e^{-2ap}-\frac{3}{2p}e^{-3ap/2}-\frac{1}{ap^2}e^{-3ap/2}-\frac{2}{p}e^{-2ap}+\frac{2}{p}e^{-3ap/2}=$$

$$=\frac{1}{ap^2}(1-e^{-\frac{ap}{2}}+e^{-2ap}-e^{-3ap/2}),$$

$$\varphi(p)\ =\frac{\psi(p)}{1-e^{-2ap}}=\frac{\left(1-\ e^{-ap/2}\right)(1-e^{-3ap/2})}{ap^2(1-e^{-2ap})}.$$

Рекомендуемый перечень задач для решения в аудитории:
14.1 ([4], № 3 (2,4,6,8)); 14.2 ([4], № 5 (1,7)); 14.3 ([4], № 6 (1,5)); 14.4 ([4], № 7 (1,3)); 14.5 ([4], № 8 (1,5)); 14.6 ([4], № 12 (1,2)); 14.7 ([4], № 13 (1,5)); 14.8 ([4], № 14 (1)); 14.11 ([4], № 37 (4)).

Резерв:
14.2 (3,5), 14.3 (4), 14.4 (4), 14.7 (4), 14.9, 14.10, 14.12, 14.13.

Для самостоятельной работы дома:
14.1 ([4], № 3 (нечетные)); 14.2 ([4], № 5 (2,8)); 14.3 ([4], № 6 (2,6)); 14.4 ([4], №7 (2)); 14.5 ([4], №8 (2)); 14.6 ([4], № 12 (4));
14.7 ([4], № 13 (2)); 14.8 ([4], № 14 (3)); 14.11 ([4], № 37 (5)).

На дом, на усмотрение преподавателя:
14.5 ([4], № 8 (6,8)); 14.6 ([4], № 12 (2)); 14.7 ([4], № 13 (6)).

15. ПРИМЕНЕНИЕ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ К РЕШЕНИЮ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим задачу Коши для линейного дифференциального уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами.

$$a_0 y^{(n)}\left(x\right) + a_1 y^{(n-1)}\left(x\right) + ... + a_n y\left(x\right) = f(x)$$

$$y(0) = y_0;\ y'(0) = y_1;\ ...\ ;\ y^{(n-1)}(0) = y_{n-1}.$$

Заранее будем предполагать, что решение $y(x)$ может быть оригиналом для некоторой функции $Y(p)$ комплексного переменного p.

Также будем предполагать, что заданная правая часть уравнения – функция $f(x)$ – имеет своим изображением некоторую функцию $F(p)$. Поскольку данная задача Коши является линейной, ее решение является суммой решений двух задач: однородной (при $f(x) \equiv 0$) с данными начальными условиями, и неоднородной, у которой правая часть $f(x) \not\equiv 0$, а начальные условия все равны нулю. Рассмотрим вначале однородную задачу:

$$a_0 y^{(n)}\left(x\right) + a_1 y^{(n-1)}\left(x\right) + ... + a_n y\left(x\right) = 0\ ,$$

$$y(0) = y_0;\ y'(0) = y_1;\ ...\ ;\ y^{(n-1)}(0) = y_{n-1}.$$

Для решения этой задачи требуется найти фундаментальную систему решений, состоящую из n линейно независимых решений, каждое из которых $\psi_k(x)$ $(k = 0,1,2,...,n-1)$ удовлетворяет данному уравнению и имеет равными нулю все начальные данные, кроме одного ${\psi_k}^{(k)}\left(0\right) = 1$, а

$$\psi_k\left(0\right) = \psi'_k\left(0\right) = ... = {\psi_k}^{(k-1)}\left(0\right) = {\psi_k}^{(k+1)}\left(0\right) = ... = {\psi_k}^{(n-1)}\left(0\right) = 0.$$

Пусть изображением функции $\psi_k(x)$ будет функция $Y_k(p)$, которая может быть найдена операционным методом. Используя формулу для изображения производной любого порядка из таблицы свойств изображений, получим, умножив уравнение на e^{-px} и проинтегрировав по x от 0 до $+\infty$ (т.е. переходя к изображениям по Лапласу):

$$a_0 p^n\left[Y_k(p)-\frac{1}{p^{k+1}}\right]+a_1 p^{n-1}\left[Y_k(p)-\frac{1}{p^{k+1}}\right]+\ldots+a_{n-(k+1)}p^{k+1}\times$$
$$\times\left[Y_k(p)-\frac{1}{p^{k+1}}\right]+a_{n-k}p^k\cdot Y_k(p)+\ldots+a_n\cdot Y_k(p) \;=\; 0,$$

откуда

$$Y_k\left(p\right) \;=\; \frac{a_0 p^{n-(k+1)}+\; a_1 p^{n-1-(k+1)}+\ldots+\; a_{n-(k+1)}}{a_0 p^n+\; a_1 p^{n-1}+\ldots+\; a_n}.$$

По этому изображению, с помощью обратного преобразования (преобразования Меллина), которое можно свести к вычислению вычетов в особых точках функции $Y_k(p)$, т.е. в нулях её знаменателя, находим оригинал.

Таким образом, найдем всю фундаментальную систему, состоящую из функций $\psi_0\left(x\right)$, $\psi_1\left(x\right)$,..., $\psi_{n-1}\left(x\right)$. И решение исходной задачи Коши запишется в виде

$$y(x)=\sum_{k=0}^{n-1} y_k\cdot\psi_k(x),$$

где $\psi_k(x)$ – функции фундаментальной системы, а y_k – постоянные, являющиеся начальными данными в задаче Коши.

Пример 15.1 ([4], № 49 (3)). Решить задачу Коши:

$$y''+2y'+2y=0;\; y\left(0\right)=A;\;\; y'\left(0\right)=B.$$

Решение. Фундаментальная система состоит из двух решений: $y_0(x)$, для которого $y_0\left(0\right)=1; y_0'\left(0\right)=0$, и $y_1\left(x\right)$, для которого $y_1\left(0\right)=0;\quad y_1'\left(0\right)=1$. Найдем каждое из них операционным методом.

Для $y_0\left(x\right)$: $p^2\left[Y_0(p)-\dfrac{1}{p}\right]+2p\left[Y_0(p)-\dfrac{1}{p}\right]+2Y_0(p)=0;$

$$Y_0(p) \;=\; \frac{p+2}{p^2+2p+2} \;;\quad y_0(x)=e^x(\cos x-\sin x).$$

Для $y_1\left(x\right)$ $:p^2[Y_1(p)-\dfrac{1}{p^2}]+2p[Y_1(p)]+2Y_1(p)=0;$

$$Y_1(p) = \frac{1}{p^2+2p+2}\ ; \quad y_1(x) = e^{-x}\cdot\sin x.$$

Решение задачи Коши имеет вид:

$$y(x) = y_0\cdot y_0(x) + y_1\cdot y_1(x) = A\cdot e^{-x}(\cos x - \sin x) + B\cdot e^{-x}\cdot\sin x.$$

Перейдем к нахождению решения задачи Коши с ненулевой правой частью $f(x)$ и нулевыми начальными условиями, т.е.

$$a_0 y^{(n)}(x) + a_1 y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n y(x) = f(x)\ ;$$

$$y(0) = y'(0) = \ldots = y^{(n-1)}(0) = 0\ .$$

Умножив обе части уравнения на e^{-px} и проинтегрировав по x от 0 до $+\infty$, перейдем к изображениям:

$$(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n)\cdot Y(p) = F(p),$$

или

$$Y(p) = \frac{F(p)}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n},$$

из этого выражения для $Y(p)$ обратным преобразованием находим искомую функцию $y(x)$ (обычно это делается с помощью вычетов).

Пример 15.2 ([4], № 50 (1)). Решить задачу Коши

$$y'' + y = x^3 + 6x, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

Решение. Сразу переходя к изображениям, получим

$$p^2 Y(p) + Y(p) = \frac{6}{p^4} + \frac{6}{p^2}\ ;$$

$$Y(p) = 6\left[\frac{1}{p^4\left(p^2+1\right)} + \frac{1}{p^2\left(p^2+1\right)}\right] = \frac{6}{p^4}; \quad y(x) = x^3.$$

Возвращаясь к решению задачи Коши для однородного уравнения, выделим из фундаментальной системы решений $\psi_k(x)$ решение с номером $k = n-1$, т.е. у которого все начальные данные равны 0, кроме $\psi_{n-1}^{(n-1)}(0)$:

$$\psi_{n-1}(0) = \psi'_{n-1}(0) = \ldots = \psi_{n-1}^{(n-2)}(0) = 0; \quad \psi_{n-1}^{(n-1)}(0) = 1\ .$$

В соответствии с полученным выражением для $y_k(x)$ получаем

$$Y_{n-1}(p) \; = \frac{a_0}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n},$$

что позволяет решить задачу Коши для неоднородного уравнения, но с нулевыми начальными условиями с помощью этой функции $Y_{n-1}(p)$. Действительно, так как

$$Y(p) \; = \; \frac{F(p)}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n} = \frac{1}{a_0} \cdot F(p) \cdot Y_{n-1}(p),$$

то по теореме о свертке

$$y(x) = \frac{1}{a_0} \cdot \int_0^x f(\tau) \cdot y_{n-1}(x - \tau)\, d\tau,$$

Обычно, функцию $\psi_{n-1}(x)$ обозначают как $g(x)$ и называют функцией источника для уравнения

$$a_0 \cdot y^{(n)}(x) + a_1 \cdot y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n y(x) = 0.$$

Таким образом, решение задачи Коши для неоднородного уравнения с нулевыми начальными данными можно получить с помощью функции источника $g(x) \; = \psi_{n-1}(x)$ в виде интеграла

$$y(x) = \frac{1}{a_0} \int_0^x g(x - \tau) \cdot f(\tau)\, d\tau,$$

называемого интегралом Дюамеля.

Решим эту же задачу:

$$y'' + y = x^3 + 6x, \;\; y(0) = y'(0) = 0$$

с помощью функции источника. Найдем функцию источника $g(x)$, которая является решением задачи: $g'' + g = 0; \;\; g(0) = 0; \;\; g'(0) = 1.$

Её изображение

$$G(p) = \frac{1}{p^2 + 1} \doteqdot g(x) = \sin x.$$

Искомое решение

$$y(x) = \int_0^x (t^3 + 6t) \cdot \sin(x - t)\, dt = x^3.$$

Пример 15.3 ([4], №49 (8)). Решить задачу Коши

$$y'' + 4y = 2\cos 2x; \;\; y(0) = 0; \; y'(0) = 4.$$

Решение. Переходим к уравнению для изображений:

$$p^2\cdot[Y(p)-\frac{4}{p^2}]+4Y(p)=2\cdot\frac{p}{p^2+4};$$

$$Y(p)=\frac{2p}{(p^2+4)^2}+\frac{4}{p^2+4}=-\left(\frac{1}{p^2+4}\right)'+\frac{4}{p^2+4};$$

$$y(x)=\frac{1}{2}x\sin 2x+2\sin 2x.$$

Пример 15.4 ([4], №50 (7)). Решить задачу Коши

$$y''+9y=f(x);\ y(0)=y'(0)=0.$$

Решение. $p^2\cdot Y(p)+9Y(p)=F(p);\ \ Y(p)=\dfrac{F(p)}{p^2+9}$. По теореме о свертке получим

$$y(x)=\frac{1}{3}\int_0^x\sin 3\tau\cdot f(x-\tau)d\tau\ .$$

Пример 15.5 ([4], №50 (9)). Решить задачу Коши

$$y''+4y'+4y=f(x).$$

Решение. $p^2\cdot Y(p)+4p\cdot Y(p)+4Y(p)=F(p);\ \ Y(p)=\dfrac{F(p)}{(p+2)^2}$;

так как $\dfrac{1}{(p+2)^2}=-\left(\dfrac{1}{p+2}\right)'$, то

$$\frac{1}{(p+2)^2}\risingdotseq xe^{-2x}\ \Rightarrow\ y(x)=\int_0^x\tau e^{-2\tau}\cdot f(x-\tau)d\tau\ .$$

Пример 15.6 ([4], № 51 (2)). Найти общее решение уравнения

$$y'''-6y''+11y'-6y=12x^2e^{3x}-e^{2x}.$$

Решение. Найдем общее решение однородного уравнения:

$$y'''-6y''+11y'-6y=0.$$

Перейдем к изображениям:

$$p^3[Y(p)-\frac{C_1}{p}-\frac{C_2}{p^2}-\frac{C_3}{p^3}]-6p^2[Y(p)-\frac{C_1}{p}-\frac{C_2}{p^2}]+$$

$$+11p[Y(p)-\frac{C_1}{p}]-6Y(p)=0;$$

$$Y(p)=\frac{C_1p^2+\left(C_2-6C_1\right)p+C_3-6C_2+11C_1}{p^3-6p^2+11p-6}=$$

$$=\frac{C_1p^2+\left(C_2-6C_1\right)p+C_3-6C_2+11C_1}{\left(p-3\right)\left(p-2\right)(p-1)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_{\text{однор}}(x)\ =\frac{e^x}{2}\left(C_1+C_2-6C_1+C_3-6C_2+11C_1\right)-$$

$$-e^{2x}\left(4C_1+2C_2-12C_1+C_3-6C_2+11C_1\right)+$$

$$+\frac{e^{3x}}{2}\left(9C_1+3C_2-18C_1+C_3-6C_2+11C_1\right)\ =$$

$$=\frac{e^x}{2}\cdot(6C_1-5C_2+C_3)\ -e^{2x}(3C_1-4C_2+C_3)+\frac{e^{3x}}{2}(2C_1-3C_2+C_3)$$

или, переобозначив константы, находим

$$y_{\text{однор}}(x)\ =C_1e^x+C_2e^{2x}+C_3e^{3x}\ .$$

Частное решение неоднородного уравнения найдем, например, с помощью функции источника:

$$G(p)\ =\frac{1}{\left(p-3\right)\left(p-2\right)(p-1)};\quad g(x)\ =\frac{1}{2}e^x-e^{2x}+\frac{1}{2}e^{3x}.$$

Откуда

$$y_{\text{част.}}(x)\ =\int_0^x\left(12t^2e^{3t}-e^{2t}\right)\left(\frac{1}{2}e^{x-t}-e^{2(x-t)}+\frac{1}{2}e^{3(x-t)}\right)dt.$$

В результате интегрирования получим:

$$y_{\text{част}}(x)=xe^{2x}+(2x^3-9x^2+21x)e^{3x}.$$

Пример 15.7 ([4], № 52 (2)). Найти частное решение уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям:

$$y''+y'=f\left(x\right),\ \text{где}\ f\left(x\right)=\begin{cases}0\quad(0<x<a),\\1\quad(a<x<b),\\0\quad(x>b),\end{cases}\quad y\left(0\right)=0;\ y'\left(0\right)=2.$$

Решение. Запишем $f(x)$ через $\sigma_0(x)$:

$$f(x)=\sigma_0(x-a)-\sigma_0(x-b).$$

Далее (по теореме запаздывания)

$$F(p) = \frac{e^{ap}}{p} - \frac{e^{bp}}{p}.$$

Переходим к операторному уравнению:

$$p^2[Y(p) - \frac{2}{p^2}] + p\left[Y(p)\right] = \frac{e^{ap}-e^{bp}}{p},$$

$$Y(p) = \frac{e^{ap}-e^{bp}}{p^2(p+1)} + \frac{2}{p(p+1)} =$$

$$= (e^{ap}-e^{bp})\left(\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p}+\frac{1}{p+1}\right)+2\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p+1}\right);$$

$$y(x) = (x-a-1+e^{-(x-a)})\cdot\sigma_0(x-a)-$$
$$-(x-b-1+e^{-(x-b)})\cdot\sigma_0(x-b)+2-2e^{-x}.$$

Пример 15.8 ([4], № 53 (2)). Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} y'-2y-4z=\cos x, \\ z'+y+2z=\sin x \ , \end{cases} \quad y(0)=0; \ z(0)=0.$$

Решение. Переходим к операторным уравнениям:

$$\begin{cases} p\cdot Y(p)-2\cdot Y(p)-4Z(p)=\dfrac{p}{p^2+1}, \\ p\cdot Z(p)+Y(p)+2Z(p)=\dfrac{1}{p^2+1} \end{cases} \Rightarrow Z(p) = -\frac{2}{p^2(p^2+1)} =$$

$$= 2\cdot(\frac{1}{p^2+1}-\frac{1}{p^2}) \Rightarrow z(x)=2\sin x-2x.$$

Из второго уравнения исходной системы

$$y=\sin x - z' - 2z = \sin x - 2\cos x + 2 - 4\sin x + 4x =$$
$$= 2+4x-3\sin x-2\cos x.$$

Пример 15.9 ([4], № 54 (2)). Найти общее решение уравнения с переменными коэффициентами: $xy''-(1+x)y'+y=0$.

Решение. Пользуясь формулой для производной изображения из таблицы свойств изображений $[F'(p) \doteqdot -x\cdot f(x)]$, а также изображением производных:

$$y'(x) \doteqdot p\cdot[Y(p)-\frac{C_2}{p}],\ y''(x) \doteqdot p^2\cdot[Y(p)-\frac{C_2}{p}-\frac{C_1}{p^2}],$$

получим

$$-[p^2\cdot Y(p)-C_2\cdot p-C_1]'-p\cdot Y(p)+C_2+[p\cdot Y(p)-C_2]'+Y(p)=0;$$

$$-2p\cdot Y(p)-p^2\cdot Y'(p)+C_2-p\cdot Y(p)+C_2+Y(p)+p\cdot Y'(p)+Y(p)=0\ ;$$

$$Y'(p)\cdot(-p^2+p)+Y(p)\cdot(-3p+2)+2C_2=0;$$

$$Y'(p)+\frac{3p-2}{p^2-p}\cdot Y(p)=\frac{2C_2}{p^2-p}.$$

Это – линейное уравнение первого порядка. Решаем его обычными методами.

$$\frac{dY}{dp}=\frac{2-3p}{p^2-p}\cdot Y(p);\quad \frac{dY}{Y}=\frac{2-3p}{p^2-p}\cdot dp;\quad \frac{dY}{Y}=\left(-\frac{2}{p}-\frac{1}{p-1}\right)dp;$$

$$\ln Y=\ln\frac{1}{p^2}-\ln(p-1)+\ln C;\quad Y_{\text{однор}}(p)=\frac{C}{p^2(p-1)};$$

$$Y_{\text{част}}(p)=\frac{C(p)}{p^2(p-1)};\quad \frac{C'(p)}{p^2(p-1)}=\frac{2C_2}{p^2-p};\quad C'(p)=2C_2\cdot p;$$

$$C(p)\ =C_2\cdot p^2;\ Y_{\text{част}}(p)=\frac{C_2}{p-1};\ \ Y(p)=\frac{C}{p^2(p-1)}+\frac{C_2}{p-1};$$

$$y(x)=C\int_0^x te^{x-t}dt+C_2e^x=Ce^x[-te^{-t}-e^{-t}]\ \Big|_0^x+C_2e^x=$$

$$=Ce^x\cdot[-xe^{-x}-e^{-x}+1]+C_2e^x=-C(x+1)+e^x(C+C_2)$$

или, переобозначив постоянные:

$$y=C_1(x+1)+C_2\cdot e^x.$$

Рекомендуемый перечень задач для решения в аудитории:
15.1([4], № 49(3)); 15.2 ([4], № 50 (1)); 15.3 ([4], № 49 (8));
15.4 ([4], № 50 (7)); 15.7 ([4], № 52 (2)); 15.8 ([4], № 53 (2));
15.9 ([4], № 54 (2)).

Резерв:
15.5 ([4], № 50 (9)); 15.6 ([4], № 51 (2)).

Для самостоятельной работы дома:
15.1 ([4], № 49 (4)); [4], № 50 (2), 52 (3), 53 (3), 54 (3).

16. ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ. РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ И ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ВЫЧИСЛЕНИЕ НЕСОБСТВЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ С ПАРАМЕТРОМ ОПЕРАЦИОННЫМ МЕТОДОМ[1]

Исходя из предположения, что все фигурирующие в задачах этого раздела функции могут служить оригиналами в применяемых преобразованиях Лапласа, решим интегральные уравнения первого и второго рода типа Вольтерра.

Пример 16.1 ([4], № 108 (2)).

$$\sin^2 x = \int_0^x \sin(x-t)\,u(t)\,dt.$$

Решение. Совершим интегральное преобразование Лапласа обеих частей этого уравнения по переменной *x*, используя при этом теорему об изображении свертки:

$$\int_0^\tau f_1(\tau)\cdot f_2(x-\tau)d\tau \doteqdot F_1(p)\cdot F_2(p); \quad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2};$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\cdot\frac{p}{p^2+4} = \frac{1}{p^2+1}\cdot U(p),$$

где $U(p)$ – изображение искомой функции $u(x)$,

$$U(p) = \frac{2(p^2+1)}{p(p^2+4)} = \frac{A}{p} + \frac{Bp+C}{p^2+4};$$

откуда $A = \frac{1}{2}$; $B = \frac{3}{2}$; $C = 0$ и

$$U(p) = \frac{1}{2p} + \frac{\frac{3}{2}p}{p^2+4}; \qquad u(x) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\cos 2x.$$

Пример 16.2 ([4], № 108 (5)).

$$x^4 = \int_0^x \left(x^2 + 6xt - 7t^2\right)u(t)\,dt.$$

[1] При недостатке часов это занятие можно рассматривать как факультативное.

Решение. $\frac{4!}{p^5}=\frac{2}{p^3}U(p)-\frac{8}{p^2}U'(p)\Rightarrow U(p)=\frac{C}{p-\frac{1}{4}}+\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{p^2};$

$u(x)=\frac{4}{3}x+\frac{C}{x^{\frac{5}{4}}}.$

Пример 16.3 ([4], № 109 (2)).

$$u(x)=\sin 2x-\frac{8}{3}\int_0^x \mathrm{sh}3(x-t)u(t)dt.$$

Решение. Переходим к операторному уравнению:

$$U(p)=\frac{2}{p^2+4}-\frac{8}{3}\cdot\frac{3}{p^2-9}\cdot U(p)\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow U(p)=\frac{2(p^2-9)}{(p^2+4)(p^2-1)}=\frac{A}{p^2+4}+\frac{B}{p^2-1}=\Rightarrow$$

$$\Rightarrow A=\frac{26}{5};\ B=-\frac{16}{5};\ u(x)=\frac{13}{5}\sin 2x-\frac{16}{5}\mathrm{sh}\,x.$$

Пример 16.4 ([4], 110 (1)). Решить систему уравнений
$$\begin{cases} u(x)=f(x)+\int_0^x \sin(x-t)\upsilon(t)dt,\\ \upsilon(x)=g(x)-\int_0^x \mathrm{sh}(x-t)u(t)dt.\end{cases}$$
относительно неизвестных функций $u(x)$ и $\upsilon(x)$; $g(x)$ и $f(x)$ – данные функции.

Решение. $\begin{cases} U(p)=F(p)+\frac{1}{p^2+1}\cdot V(p),\\ V(p)=G(p)-\frac{1}{p^2-1}\cdot U(p)\end{cases}\Rightarrow$

$$\Rightarrow U(p)+\frac{U(p)}{(p^2+1)(p^2-1)}=F(p)+\frac{1}{p^2+1}\cdot G(p);$$

$$U(p)=\frac{p^4-1}{p^4}\cdot[F(p)+\frac{1}{p^2+1}G(p)]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow u(x) = f(x) - \frac{1}{3!}\int_0^x (x-t)^3 f(t)\,dt + \int_0^x (x-t)g(t)\,dt -$$

$$-\frac{1}{3!}\int_0^x (x-t)^3 g(t)\,dt.$$

Пример 16.5 ([4], № 100 (2)). Вычислить интеграл, найдя предварительно его изображение с помощью интеграла Лапласа:

$$\int_0^\infty \frac{t\sin xt}{a^2+t^2}\,dt \equiv J(x).$$

Решение. Обозначим изображение функции $J(x)$ через $I(p)$:

$$I(p) = \int_0^\infty \frac{t}{a^2+t^2}\cdot\frac{t}{p^2+t^2}\,dt =$$

$$=\int_0^\infty\left(-\frac{a^2}{\left(p^2-a^2\right)(a^2+t^2)}+\frac{p^2}{\left(p^2-a^2\right)(p^2+t^2)}\right)dt =$$

$$=\frac{-a}{p^2-a^2}\cdot\operatorname{arctg}\frac{t}{a}\Bigg|_0^\infty + \frac{p}{p^2-a^2}\cdot\operatorname{arctg}\frac{t}{a}\Bigg|_0^\infty =$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(\frac{p}{p^2-a^2}-\frac{a}{p^2-a^2}\right)=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{p+a};$$

$$J(x) = \frac{\pi}{2}\cdot e^{-ax}.$$

Пример 16.6 ([4], № 115 (2)). Решить интегро-дифференциальное уравнение, удовлетворяющее заданным начальным условиям:

$$y' - 2\int_0^x e^{x-t}\cdot y(t)\,dt = 0, y(0) = 1.$$

Решение. Переходим к изображениям по Лапласу:

$$p\cdot\left\{Y(p)-\frac{1}{p}\right\}-2\cdot\frac{1}{p-1}\cdot Y(p)=0;$$

$$Y(p)=\frac{p-1}{(p+1)(p-2)}=\frac{A}{p+1}+\frac{B}{p-2};$$

$$A=\frac{2}{3};\;\; B=\frac{1}{3};\;\; y(x)=\frac{2}{3}\cdot e^{-x}+\frac{1}{3}\cdot e^{2x}.$$

Пример 16.7 ([4], № 115 (7)). Решить интегро-дифференциальное уравнение, удовлетворяющее заданным начальным условиям:

$$y''+\int\limits_0^x \sin(x-t)\cdot[y''(t)+y(t)]dt = 2\cos x; \quad y(0)=y'(0)=0.$$

Решение. $p^2\cdot Y(p)\; +\dfrac{1}{p^2+1}\left[p^2\cdot Y(p)+Y(p)\right]=\dfrac{2p}{p^2+1}$;

$$Y(p)\;=\frac{2p}{(p^2+1)^2}=-(\frac{1}{p^2+1})'\Rightarrow\; y(x)\;=x\sin x.$$

Пример 16.8 ([4], № 115 (9)). Решить интегро-дифференциальное уравнение, удовлетворяющее заданным начальным условиям:

$$y''\; -y-4\int\limits_0^x (x-t)\cos(x-t)\,y(t)\,dt=0;\;\; y(0)=4;\;\; y'(0)=0.$$

Решение. Переходим к операторному уравнению:

$$p^2\{Y(p)-\frac{4}{p}\}-Y(p)\;+4\frac{1-p^2}{\left(1+p^2\right)^2}Y(p)=\;0;$$

$$Y(p)\;=\frac{4p(p^2+1)^2}{\left(p^2-1\right)^2(p^2+3)}=$$

$$=\frac{A}{(p-1)^2}+\frac{B}{p-1}+\frac{C}{(p+1)^2}+\frac{D}{p+1}+\frac{Ep+F}{p^2+3};$$

$$4p(p^2+1)^2=A(p+1)^2\cdot(p^2+3)+B(p-1)\cdot(p+1)^2\cdot(p^2+3)+$$
$$+C(p-1)^2\cdot(p^2+3)+D(p+1)\cdot(p-1)^2\cdot(p^2+3)+$$
$$+(Ep+F)\cdot(p^2-1)^2;$$

Положим в этом тождестве слева и справа $p=1$. Получим

$$16\;=16A\;\Rightarrow\; A=1.$$

Положим $p=-1$. Получим

$$-16=16C\;\Rightarrow\; C=-1.$$

Поскольку у многочлена, стоящего в знаменателе выражения $Y(p)$, больше действительных корней нет, прибегнем к другому методу для нахождения оставшихся коэффициентов. Приравняем слева и справа коэффициенты при одинаковых степенях p:

при p^5: $4 = B + D + E$;

при p^4: $0 = A - B + 2B + C + D - 2D + F$;

при p^1: $4 = 6A - 6B + 3B - 6C - 6D + 3D - 2F + E$;

при p^0: $0 = 3A - 3B + 3C + 3D + F$.

Получим систему

$$\begin{cases} B + D + E = 4, \\ B - D + F = 0, \\ 3B + 3D + 2F - E = 8, \\ 3B - 3D + F = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad F = 0;\ B = D = \frac{3}{2};\ E = 1.$$

Разложение функции $Y(p)$ на элементарные дроби приобрело вид

$$Y(p) = \frac{1}{(p-1)^2} + \frac{3}{2}\frac{1}{p-1} - \frac{1}{(p+1)^2} + \frac{3}{2}\frac{1}{p+1} + \frac{p}{p^2+3}.$$

Искомая функция:

$$y(x) = 2\operatorname{sh}x + 3\operatorname{ch}x + \cos\sqrt{3}x .$$

Пример 16.9 ([4], № 118 (4)). Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} y'' - z + \int_0^x (x-t)\cdot e^{x-t}\cdot z(t)\,dt = e^x, \ \ y(0) = 2; y'(0) = 0; \\ z'' - y' - z' + \int_0^x \cos(x-t)\cdot y(t)\,dt = 1 \ , \ \ z(0) = 1;\ z'(0) = -1; \end{cases}$$

Решение. Перейдем к операторным уравнениям:

$$\begin{cases} p^2\left\{Y(p) - \frac{2}{p}\right\} - Z(p) + \frac{1}{(p-1)^2} Z(p) = \frac{1}{p-1}, \\ p^2\left\{Z(p) - \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2}\right\} - p\left\{Y(p) - \frac{2}{p}\right\} - p\left\{Z(p) - \frac{1}{p}\right\} + \frac{p}{p^2+1} Y(p) = \frac{1}{p} \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} p^2Y(p)+\dfrac{2p-p^2}{(p-1)^2}Z(p)=\dfrac{2p^2-2p+1}{p-1}, \\ -\dfrac{p^3}{p^2+1}Y(p)+\left(p^2-p\right)Z(p)=\dfrac{p^2-4p+1}{p}. \end{cases}$$

Решив эту систему, получим

$$\begin{cases} Y(p)=\dfrac{2}{p}+\dfrac{2}{p^3}, \\ Z(p)=\dfrac{p-1}{p^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y(x)=x^2+2, \\ z(x)=1-x. \end{cases}$$

Список рекомендуемой литературы

1. Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексной переменной. М.: Наука, 2001, 2004.
2. Михайлов В.Д. Теория функций комплексного переменного. М.: МИФИ, 2002.
3. Волковыский Л.И., Лунц Г.Л., Араманович И.Г. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. М.: Физматлит, 2002.
4. Шелковников Ф.А., Такайшвили К.Г. Сборник упражнений по операционному исчислению. М.: Высшая школа, 1976.
5. Михайлов В.Д. Сборник заданий для самостоятельной работы по курсу «Теория функций комплексной переменной». М.: НИЯУ МИФИ, 2011.
6. Михайлов В.Д. Теория функций комплексной переменной: Сборник заданий для самостоятельной работы. М.: НИЯУ МИФИ, 2013.
7. Забоев А.И., Михайлов В.Д., Шолохов Н.В. Вычеты и их применение. М.: МИФИ, 1994.