

Федеральное агентство по образованию Российской Федерации

МОСКОВСКИЙ ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)

А.С. Корсун Ю.А. Маслов О.В. Митрофанова

Гидродинамика ЯЭУ

Сборник задач и упражнений

*Рекомендовано УМО «Ядерные физика и технологии»
в качестве учебного пособия
для студентов высших учебных заведений*

Москва 2008

УДК 532.5(075) + 621039(075)
ББК 22.253.3я7
К-69

Корсун А.С., Маслов Ю.А., Митрофанова О.В. **Гидродинамика ЯЭУ**:
Сборник задач и упражнений. – М.: МИФИ, 2008. – 124 с.

Данное пособие предназначено для проведения семинарских, лабораторных занятий и самостоятельной работы студентов факультета «Ф», обучающихся по специальности «Ядерные реакторы и энергетические установки». Пособие может применяться для обслуживания курсов, посвященных вопросам гидродинамических расчетов элементов и узлов энергетических установок («Гидродинамика ЯЭУ», «Гидродинамические расчеты ФЭУ»), а также курсов, для которых полное знание о закономерностях движения жидкости и газа является необходимым условием для развития собственных теоретических построений («Теплообмен и гидродинамика», «Теория теплообмена», «Основы теплопереноса»).

Пособие подготовлено в рамках Инновационной образовательной программы.

Рецензент доц., канд. физ.-мат. наук Г. А. Сулаберидзе

ISBN 978-5-7262-0960-9

© *Московский инженерно-физический институт*
(*государственный университет*), 2008

Редактор *Е. Н. Кочубей*

Подписано в печать 26.09.2008. Формат 60×84 1/16.
Уч.-изд. л. 7,75. Печ. л. 7,75. Тираж 150 экз.
Изд. № 4/134. Заказ №

Московский инженерно-физический институт
(государственный университет). 115409, Москва, Каширское шоссе, 31

Типография издательства «Тривант».
г. Троицк Московской области

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	4
1. ДВИЖЕНИЕ НЕВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ	
Основные положения	5
Контрольные вопросы.....	8
Задачи и упражнения	8
2. ЛАМИНАРНОЕ ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ В ТРУБАХ И КАНАЛАХ	
Основные положения	12
Контрольные вопросы	19
Задачи и упражнения	20
3. МЕТОДЫ РАЗМЕРНОСТЕЙ И ПОДОБИЯ	
Основные положения.....	26
Контрольные вопросы	50
Задачи и упражнения	51
4. ТУРБУЛЕНТНОЕ ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ В КАНАЛАХ ЯЭУ	
Основные положения	41
Контрольные вопросы	59
Задачи и упражнения	51
5. ГИДРОДИНАМИКА ПОРИСТЫХ СТРУКТУР ЯЭУ	
Основные положения	56
Контрольные вопросы	63
Задачи и упражнения	63
ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ	
Движение невязкой жидкости	67
Ламинарное течение жидкости в трубах и каналах	81
Методы размерностей и подобия	100
Турбулентное течение жидкости в каналах ЯЭУ	108
Гидродинамика пористых структур ЯЭУ	112
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	124

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемое издание является учебным пособием для проведения семинарских, лабораторных занятий и самостоятельной работы студентов факультета «Ф», обучающихся по специальности «Ядерные реакторы и энергетические установки». Пособие предназначено для обслуживания курсов, посвященных вопросам гидродинамических расчетов элементов и узлов энергетических установок («Гидродинамика ЯЭУ», «Гидродинамические расчеты ФЭУ»), а также курсов, для которых полное знание о закономерностях движения жидкости и газа является необходимым условием для развития собственных теоретических построений («Теплообмен и гидродинамика», «Теория теплообмена», «Основы теплопереноса»).

Пособие включает краткие теоретические положения, основные расчетные соотношения и наборы задач, сгруппированные по разделам: «Движение невязкой жидкости», «Ламинарное течение жидкости в трубах и каналах», «Методы размерностей и подобия», «Турбулентное течение жидкости в каналах ЯЭУ», «Гидродинамика пористых структур ЯЭУ».

При подготовке материалов относительно традиционных разделов «Движение невязкой жидкости», «Ламинарное течение жидкости в трубах и каналах» внимание обращалось на строгость математической постановки и решения задач с целью развития у студентов навыков исследовательской работы.

Во вводной части раздела «Методы размерностей и подобия» на примерах подробно описаны процедуры приведения уравнений к безразмерному виду и определения критериев подобия соответствующей задачи. Подобный материал подробного освещения в учебной литературе не нашел.

Абсолютно новым для литературы подобного типа является раздел, посвященный использованию модели пористого тела применительно к расчету гидродинамики структур типа пучков стержней или труб, засыпок шаровых элементов. В пособии приводятся основные теоретические положения новой методики, примеры практического использования модели, учебные задачи. В отдельном разделе приводятся примеры решения задач и ответы ко всем задачам.

Пособие аналогов не имеет.

В подготовке пособия принимали участие А.С. Корсун (разделы 1–3, 5 и 6), О.В. Митрофанова (разделы 4 и 6), Ю.А. Маслов (раздел 6 и общее оформление).

1. ДВИЖЕНИЕ НЕВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Уравнения движения

Простейшей моделью жидкости является модель невязкой жидкости. В потоке невязкой жидкости существуют только нормальные напряжения сжатия, равные по величине давлению в жидкости. Касательные напряжения отсутствуют.

Уравнения движения невязкой жидкости включают:

- уравнение сохранения вещества (неразрывности)

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \operatorname{div} \rho \vec{u} = 0, \quad (1.1)$$

- уравнение сохранения импульса

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial \tau} + \rho (\vec{u} \nabla) \vec{u} = \rho \vec{P}_V - \operatorname{grad} p, \quad (1.2)$$

- уравнение состояния

$$\rho = \rho(p, T). \quad (1.3)$$

В случае движения сжимаемого газа в качестве уравнения состояния часто используется уравнение совершенного газа

$$p = \rho R T. \quad (1.3a)$$

У капельных жидкостей плотность слабо зависит от давления и определяется в основном температурой. В этом случае уравнение состояния имеет вид $\rho = \rho(T)$, или в линейном приближении

$$\rho = \rho_{\text{ж}} (1 - \beta(T - T_{\text{ж}})). \quad (1.3b)$$

Простейшая форма уравнения состояния

$$\rho = \text{const}. \quad (1.3b)$$

Последнее соотношение, замыкающее систему уравнений, описывающих движение невязкой жидкости – уравнение энергии (процесса). При описании процессов переноса энергии (и примеси) в невязкой жидкости могут быть использованы различные приближения. Однако наиболее логично полагать, что в невязкой жидко-

сти наряду с отсутствием диффузионного переноса импульса не переносится диффузионно и тепло, т.е. она обладает нулевыми теплопроводностью и коэффициентом диффузии, поскольку все эти процессы (трение, теплопроводность, диффузия) обусловлены одной причиной – молекулярным движением. В жидкости с нулевыми вязкостью, теплопроводностью, диффузией при отсутствии других источников тепловыделения (ядерные, химические реакции или т.п.) энтропия не растет и уравнением процесса будет

$$s = \text{const} . \quad (1.4)$$

Применительно к движению совершенного газа уравнение (1.4) можно записать в виде

$$p\rho^{-\gamma} = \text{const} . \quad (1.4a)$$

Интеграл Бернулли

Если объемные силы потенциальны, т.е.

$$\vec{P}_V = -\text{grad}\Pi_V \quad (1.5)$$

и жидкость баротропна ($\rho = \rho(p)$ и эта зависимость известна), уравнение (1.2) можно переписать в форме уравнения Громеки

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial \tau} - (\vec{u} \times \vec{\omega}) = -\text{grad} \left(\frac{u^2}{2} + \Pi_V + \Phi(p) \right), \quad (1.6)$$

где $\vec{\omega} \equiv \text{rot} \vec{u}$, $\Phi(p)$ – функция давления, равная

$$\Phi(p) = \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho(p)} . \quad (1.7)$$

Уравнение (1.6) при стационарном течении жидкости ($\frac{\partial \vec{u}}{\partial \tau} = 0$) имеет решение

$$\frac{u^2}{2} + \Pi_V + \Phi(p) = \text{const} \text{ вдоль } l, \quad (1.8)$$

которое называется интегралом Бернулли и представляет содержание одноименной теоремы: *в стационарном потоке баротропной жидкости сумма кинетической энергии единицы объема, потен-*

циала объемных сил и функции давления остается постоянной вдоль линии тока.

В безвихревом потоке жидкости ($\bar{\omega} \equiv \text{rot } \bar{u} = 0$) константа в (1.8) одинакова для всех линий тока, т.е. сумма (1.8) одинакова в любой точке объема жидкости.

Потенциальное течение

Если поток безвихревой ($\bar{\omega} \equiv \text{rot } \bar{u} = 0$ во всем объеме жидкости), то можно ввести скалярный потенциал скорости $\varphi(x, y, z, \tau)$, такой что

$$\bar{u} = \text{grad } \varphi. \quad (1.9)$$

При этом решением уравнения (1.6) будет

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} + \frac{u^2}{2} + \Pi_V + \Phi(p) = F(\tau) \quad (1.10)$$

во всем объеме.

Стационарное потенциальное течение несжимаемой ($\rho = \text{const}$) жидкости в поле сил тяжести ($\Pi_V = gz$) описывается системой уравнений

$$\begin{aligned} \nabla^2 \varphi &= 0, \\ \bar{u} &= \text{grad } \varphi, \\ \frac{u^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} &= \text{const}. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Плоское течение. Функция тока

Для плоского течения несжимаемой жидкости ($u_x(x, y)$, $u_y(x, y)$) можно ввести функцию тока $\Psi(x, y)$, такую, что кривые $\Psi(x, y) = \text{const}$ совпадают с линиями тока. Компоненты скорости движения жидкости связаны с функцией тока соотношениями

$$u_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad u_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}. \quad (1.12)$$

При этом автоматически выполняется уравнение неразрывности

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0. \quad (1.13)$$

В безвихревом плоском потоке функция тока $\Psi(x, y)$, как и потенциал скорости $\varphi(x, y, z, \tau)$, является гармонической функцией, т.е. удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0. \quad (1.14)$$

Функция тока и потенциал скорости являются сопряженными гармоническими функциями, т.е. семейства кривых равного потенциала $\varphi(x, y) = \text{const}$ и линий тока $\Psi(x, y) = \text{const}$ взаимно перпендикулярны. При этом комплексный потенциал $\Phi = \varphi(x, y) + i\Psi(x, y)$ является функцией комплексной координаты $z = x + iy$ и для решения задач плоского обтекания тел безвихревым потоком можно использовать аппарат теории функций комплексного переменного.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что такое вязкая жидкость? Какое практическое использование находит такая модель жидкости?
2. Какими уравнениями описывается движение вязкой жидкости?
3. Запишите уравнение Бернулли.
4. Как ставится задача для безвихревых стационарных потоков вязкой несжимаемой жидкости?
5. Что такое потенциальное течение? Когда оно имеет место?
6. Как функция тока связана с компонентами скорости движения жидкости?

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1.1. Определить распределение давлений по высоте в покоящейся атмосфере, полагая плотность воздуха постоянной $\rho = \rho_0$. Давление вблизи поверхности земли p_0 .

1.2. Определить распределение давлений и плотностей воздуха в покоящейся изотермической атмосфере. Воздух рассматривать как совершенный газ. У поверхности земли давление p_0 и плотность воздуха ρ_0 .

1.3. Определить давление торможения потока несжимаемой жидкости, скорость которой вдали от препятствия u_0 , давление p_0 , плотность ρ_0 .

1.4. Определить параметры торможения потока совершенного газа, который вдали от препятствия имеет скорость u_0 , давление p_0 , плотность ρ_0 , температуру T_0 . Поток считать изэнтропным.

1.5. Получить расчетное соотношение для определения скорости потока несжимаемой жидкости с помощью трубки Пито, схема которой показана на рис. 1.1.

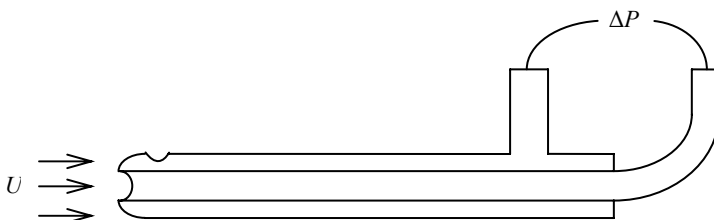


Рис. 1.1

1.6. Получить расчетную формулу для определения скорости потока несжимаемой жидкости с помощью трубки Вентури, схема которой показана на рис. 1.2.

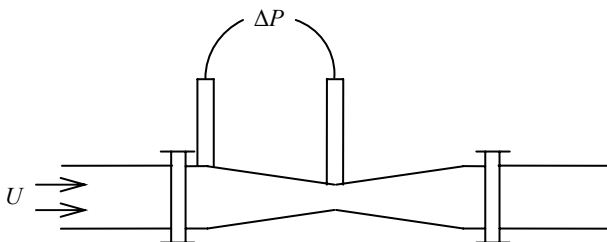


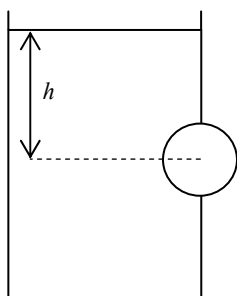
Рис. 1.2

1.7. Получить расчетное соотношение для определения скорости потока несжимаемой жидкости с помощью трубки Пито расположенной в трубке Вентури.

1.8. Определить результирующие объемных и поверхностных сил, а также суммарную силу, действующую на тело, расположенное в сосуде с жидкостью на глубине h от поверхности. Тело имеет форму куба со стороной l . Плотность материала тела ρ_t , жидкости $\rho_{ж}$. Плотность объемных сил g .

1.9. Решить задачу 1.8 для тела произвольной формы объемом V .

1.10. Определить силу, действующую на шар радиуса r_0 , закрепленный на горизонтальной оси в круглом отверстии в стенке



плоского сосуда, заполненного жидкостью (рис. 1.3.). Расстояние от оси шара до поверхности жидкости в сосуде h , внешнее давление p_0 . Плотность жидкости $\rho_{ж}$, масса шара m_t . Плотность объемных сил g . Трения нет. Будет ли шар вращаться вокруг оси? [1]

Рис. 1.3

1.11. Для задачи 1.10 определить условия, при выполнении которых в случае потери закрепления шар будет вытолкнут жидкостью в горизонтальном направлении.

1.12. В неограниченном объеме несжимаемой невязкой жидкости по известному закону $R(\tau)$ расширяется сфера. Определить поле скоростей и давлений в жидкости, обусловленное расширением сферы. Определить давление на поверхности сферы. На бесконечности давление p_0 и жидкость неподвижна.

1.13. В неограниченном объеме жидкости с давлением p_0 образовалась газовая полость радиусом r_0 с начальным давлением p_n , причем $p_n > p_0$. Исследовать поведение газовой сферы и окружающей жидкости, предполагая, что изменение давления газа в полости происходит по адиабатическому закону [1].

1.14. Определить распределение скоростей и давлений при поперечном обтекании безвихревым потоком невязкой несжимаемой жидкости неограниченного цилиндра. Вдали от цилиндра скорость

жидкости u_0 , давление p_0 , плотность жидкости ρ . Определить результирующую силу, действующую на цилиндр.

1.15. Определить потенциал поля скорости $\varphi(x, y, z)$ прямолинейного поступательного потока со скоростью u_0 в направлении единичного вектора \vec{n} .

1.16. Определить потенциал поля скорости $\varphi(x, y)$ и функцию тока $\Psi(x, y)$ плоского прямолинейного поступательного потока со скоростью u_0 в направлении единичного вектора \vec{n} .

1.17. Построить потенциал поля скорости $\varphi(x, y, z)$ источника (стока) мощностью Q [$\text{м}^3/\text{с}$], действующего в начале координат. То же для источника в произвольной точке \vec{r}_0 .

1.18. Построить потенциал поля скорости $\varphi(x, y)$ и функцию тока $\Psi(x, y)$ линейного источника (стока) мощностью V [$\text{м}^2/\text{с}$], действующего в начале координат. То же для источника в произвольной точке \vec{r}_0 .

1.19. Построить потенциал поля скорости $\varphi(x, y)$ и функцию тока $\Psi(x, y)$ плоского потенциального вихря с циркуляцией Γ с центром в начале координат (плоский потенциальный вихрь – круговое движение жидкости, линии тока которого представляют окружности с центром в начале координат). То же для вихря с центром в произвольной точке \vec{r}_0 .

1.20. Комплексный потенциал плоского течения равен $\Phi = az$. Определить потенциал, функцию тока и поле скоростей течения.

1.21. Показать, что комплексный потенциал $\Phi(z) = u_\infty(z + r_0^2/z)$, представляющий сумму комплексных потенциалов потока со скоростью u_∞ и плоского диполя с моментом $M = 2\pi u_\infty r_0^2$, определяет поле скоростей в потоке, поперечно обтекающем цилиндр радиусом r_0 .

1.22. Показать, что комплексный потенциал $\Phi(z) = cz^n$, где c и n – действительные числа и $n > 1$, описывает течение внутри угла равного π/n .

2. ДВИЖЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Уравнения движения

Уравнение импульсов для любой сплошной среды имеет вид

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial \tau} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \rho P_{Vi} + \frac{\partial P_{ji}}{\partial x_j}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.1)$$

где P_{Vi} – компоненты вектора плотности объемной силы, P_{ij} – компоненты тензора напряжений поверхностной силы, по повторяющемуся индексу проводится суммирование от 1 до 3.

Для ньютоновской жидкости напряжения в потоке равны

$$P_{ij} = -\left(p + \frac{2}{3} \mu \cdot \operatorname{div} \vec{u}\right) \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (2.2)$$

Уравнения импульсов (2.1), (2.2) вместе с уравнением сохранения вещества (1.1), уравнением состояния (1.3) и уравнением сохранения энергии (теплопереноса), которое имеет вид

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial \tau} + \rho c_p u_j \frac{\partial T}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \lambda \frac{\partial T}{\partial x_j} + q_V + \frac{\partial p}{\partial \tau} + u_j \frac{\partial p}{\partial x_j} + \mu D, \quad (2.3)$$

образуют замкнутую систему уравнений, описывающую движение вязкой (ньютоновской) жидкости. Последний член в (2.3) учитывает тепловыделение, обусловленное работой, совершаемой потоком против сил вязкого трения. Диссипативная функция D определяется полем скоростей движения жидкости

$$D = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} (\operatorname{div} \vec{u})^2. \quad (2.4)$$

Член q_V учитывает тепловыделение в потоке не связанное с движением жидкости.

Движение **жидкости с постоянными свойствами**, когда $\rho = \text{const}$ и $\mu = \text{const}$, описывается системой уравнений в векторном виде

$$\text{div } \vec{u} = 0, \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial \tau} + (\vec{u} \nabla) \vec{u} = \vec{P}_V - \frac{1}{\rho} \text{grad } p + \nu \nabla^2 \vec{u}, \quad (2.6)$$

или в полной записи в прямоугольной декартовой системе координат

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0, \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial \tau} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} = g_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right), \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial \tau} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} = g_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right), \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial \tau} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} = g_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right). \quad (2.10)$$

В качестве объемной силы в (2.8) – (2.10) записана сила тяжести.

В цилиндрической системе координат (r, φ, z) уравнения движения жидкости с постоянными физическими свойствами имеют вид

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0, \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u_r}{\partial \tau} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{u_\varphi^2}{r} = \\ & = g_r - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\nabla^2 u_r - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right), \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u_\varphi}{\partial \tau} + u_r \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + u_z \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} + \frac{u_r u_\varphi}{r} = \\ & = g_\varphi - \frac{1}{r\rho} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \nu \left(\nabla^2 u_\varphi - \frac{u_\varphi}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial r} \right), \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial \tau} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} = g_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \nabla^2 u_z, \quad (2.14)$$

$$\nabla^2 \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Те же уравнения в сферической системе координат (r , φ , ϑ)

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_r) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (u_\vartheta \sin \vartheta) = 0, \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_r}{\partial \tau} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r \sin \vartheta} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{u_\vartheta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \vartheta} - \frac{u_\varphi^2 + u_\vartheta^2}{r} = g_r - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \\ + \nu \left(\nabla^2 u_r - \frac{2u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\vartheta}{\partial \vartheta} - \frac{2}{r^2} u_\vartheta \operatorname{ctg} \vartheta - \frac{2}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right), \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \tau} + u_r \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r \sin \vartheta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_\vartheta}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \vartheta} + \frac{u_\varphi u_r}{r} + \frac{u_\varphi u_\vartheta \operatorname{ctg} \vartheta}{r} = \\ = g_\varphi - \frac{1}{r \rho \sin \vartheta} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \\ + \nu \left(\nabla^2 u_\varphi - \frac{u_\varphi}{r^2 \sin^2 \vartheta} + \frac{2}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{2 \cos \vartheta}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial u_\vartheta}{\partial \vartheta} \right), \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_\vartheta}{\partial \tau} + u_r \frac{\partial u_\vartheta}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r \sin \vartheta} \frac{\partial u_\vartheta}{\partial \varphi} + \frac{u_\vartheta}{r} \frac{\partial u_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{u_r u_\vartheta}{r} - \frac{u_\varphi^2 \operatorname{ctg} \vartheta}{r} = \\ = g_\vartheta - \frac{1}{r \rho} \frac{\partial p}{\partial \vartheta} + \\ + \nu \left(\nabla^2 u_\vartheta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_\vartheta}{r^2 \sin^2 \vartheta} - \frac{2 \cos \vartheta}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right), \end{aligned} \quad (2.18)$$

где обозначено

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

Внешнее обтекание тел. Ламинарный пограничный слой

Число Рейнольдса является мерой отношения конвективных сил инерции в потоке к силам вязкого трения. При малых значениях числа Рейнольдса, составленного по скорости набегающего потока и характерному размеру обтекаемого тела, реализуется **вязкостное (ползущее) течение** – движение жидкости, при котором конвективные силы инерции в потоке малы по сравнению с силами вязкого трения.

Опуская в (2.6) член $(\vec{u}\nabla)\vec{u}$, учитывающий конвективные силы инерции, для вязкостного течения имеем

$$\operatorname{div} \vec{u} = 0, \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial \tau} = \vec{P}_V - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \nu \nabla^2 \vec{u}. \quad (2.20)$$

Уравнения вязкостного течения линейны относительно скорости. Как следствие, сила, действующая на тело при обтекании его потоком жидкости, при малых значениях числа Рейнольдса оказывается пропорциональна скорости потока.

При больших значениях числа Рейнольдса конвективные силы инерции велики по сравнению с силами вязкого трения **везде, кроме области вблизи поверхности обтекаемого тела**. Из-за условия прилипания на стенке с ростом скорости набегающего потока увеличиваются и градиенты скорости на стенке, т.е. растут силы трения в пристенной области, оставаясь сравнимыми по величине с силами инерции.

Таким образом при больших значениях числа Рейнольдса поток можно разбить на две области: **пограничный слой** – пристенная область, в которой конвективные силы инерции и силы вязкого трения одинаковы по порядку величины и в которой сосредоточено основное изменение скорости, и **внешний поток** – область за пределами пограничного слоя, в которой силы вязкого трения не существенны и поле скоростей описывается уравнениями движения невязкой жидкости (1.1)–(1.3).

С увеличением скорости набегающего потока толщина пограничного слоя уменьшается обратно пропорционально корню из скорости. Тонкость пограничного слоя позволяет упростить уравнения, описывающие поле скоростей в пристенной области. Согласно Прандтлю система уравнений для течения в пограничном слое при обтекании плоской пластины ($y = 0$, $x > 0$) имеет вид

$$\frac{\partial \rho u_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho u_y}{\partial y} = 0, \quad (2.21)$$

$$\rho u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + \rho u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} = -\frac{dp}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \mu \frac{\partial u_x}{\partial y}. \quad (2.22)$$

Продольный градиент давления в потоке при этом определяется изменением скорости за пределами пограничного слоя

$$-\frac{dp}{dx} = \rho u_0 \frac{du_0}{dx}. \quad (2.23)$$

В отсутствии градиента давления решение системы (2.21), (2.22) дает для трения на стенке в зависимости от расстояния от передней кромки пластины

$$\tau_{cm}(x) = c_f(\text{Re}_x) \frac{\rho u_0^2}{2}, \quad (2.24)$$

где коэффициент трения равен

$$c_f(\text{Re}_x) = \frac{0,664}{\sqrt{\text{Re}_x}}, \quad \text{Re}_x = \frac{u_0 x}{\nu}. \quad (2.25)$$

Система уравнений (2.21), (2.22) описывает асимптотический пограничный слой. Если принять, что пограничный слой имеет конечную толщину $\delta(x)$ и продольная скорость изменяется автоматически, т.е.

$$\frac{u_x(x, y)}{u_0} = F\left(\frac{y}{\delta(x)}\right), \quad (2.26)$$

то для толщины пограничного слоя можно получить

$$\delta(x) = k_\delta \sqrt{\frac{\nu x}{u_0}}. \quad (2.27)$$

В частности, при аппроксимации поля скорости функцией $F(Y) = 2Y - 2Y^3 + Y^4$ коэффициент k_δ равен $k_\delta = 5,83$.

При обтекании тел произвольной формы неограниченным потоком жидкости сила лобового сопротивления может быть представлена в виде

$$F_{\text{лс}} = C_D(\text{Re}) \frac{\rho u_0^2}{2} S_M, \quad (2.28)$$

где u_0 – скорость набегающего потока, S_M – миделево сечение тела (площадь тела на «просвет» со стороны потока), $C_D(\text{Re})$ – коэффициент лобового сопротивления тела, зависящий от числа Рейнольдса, $\text{Re} = u_0 l / \nu$, l – характерный размер тела.

Зависимость коэффициента лобового сопротивления от числа Рейнольдса при обтекании шара приведена на рис. 2.1 и при поперечном обтекании цилиндра – на рис. 2.2.

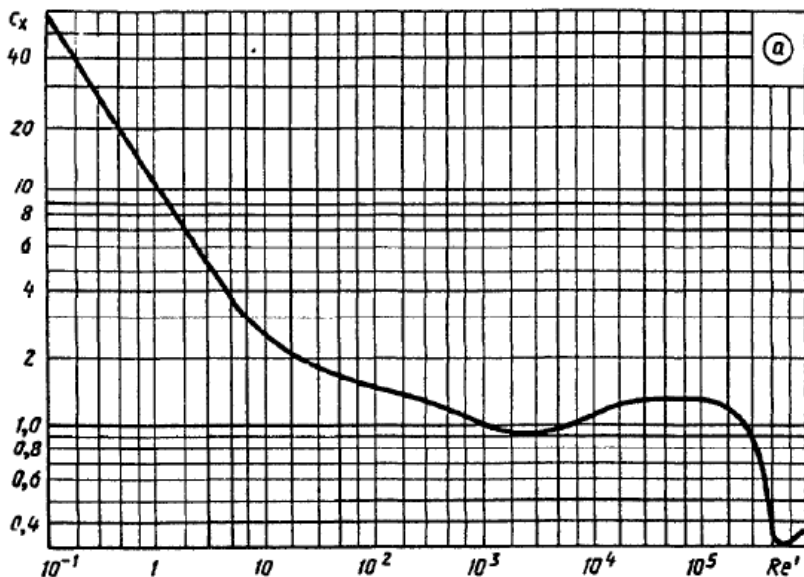


Рис. 2.1

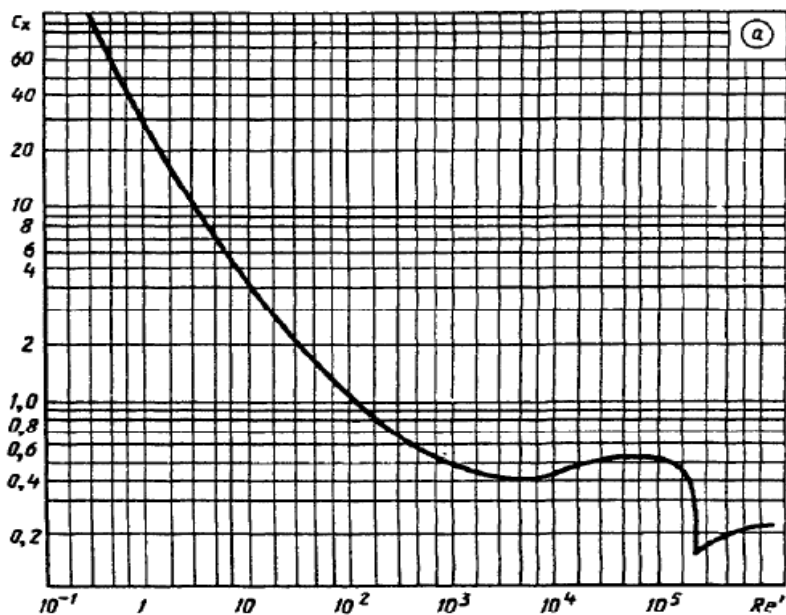


Рис. 2.2

Слоистые течения жидкости.

Ламинарное движение жидкости в трубах и каналах

Слоистыми течениями называют течения, в которых отлична от нуля только одна компонента скорости. Если это компонента u_z , т.е. $u_x = u_y = 0$, то из уравнения неразрывности для несжимаемой жидкости (1.1) следует $\frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$, а значит $u_z = u_z(x, y, \tau)$. В отсутствии массовых сил уравнения движения для слоистых течений имеют вид:

$$\rho \frac{\partial u_z}{\partial \tau} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \right), \quad (2.29)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0. \quad (2.30)$$

Частным случаем слоистого течения является стационарное, установившееся (т.е. вдали от входа) движение жидкости в прямых каналах произвольного поперечного сечения. При этом $\frac{\partial p}{\partial z} = \text{const} = -\frac{\Delta p}{l}$, где Δp – перепад давления на длине канала l . Уравнение описывающее распределение скорости $u_z(x, y)$ по сечению канала

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} = -\frac{\Delta p}{\mu l} \quad (2.31)$$

решается с условием прилипания на стенках канала $u_z|_{\Gamma} = 0$.

Перепад давления при движении жидкости в каналах связан со средней скоростью жидкости в канале u_0 и его длиной l формулой Дарси:

$$\Delta p = \left(\Psi_M + \lambda_{\text{тр}}(\text{Re}) \frac{l}{d_r} \right) \frac{\rho u_0^2}{2}. \quad (2.32)$$

В соотношении (2.32): $\lambda_{\text{тр}}(\text{Re})$ – коэффициент гидравлического сопротивления установившегося течения, зависящий от числа Рейнольдса $\text{Re} = \frac{u_0 d_r}{\nu}$, Ψ_M – коэффициент местных сопротивлений, учитывающий отличие распределение скорости в канале от установившегося, обусловленное различными причинами (вход в канал, поворот, шайба, вентиль и т.п.), d_r – гидравлический диаметр канала, $d_r = 4S/\Pi$, где S – площадь проходного сечения канала, Π – смоченный периметр.

При ламинарном течении жидкости в каналах $\lambda_{\text{тр}} = A/\text{Re}$, где коэффициент A зависит от формы поперечного сечения канала.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Как напряжения в потоке вязкой жидкости связаны с полем скорости?
2. Что такое вязкостное течение? Приведите пример.

3. Как можно упростить задачу, если при обтекании сферы потоком жидкости оказалось, что число Рейнольдса мало (велико)?

4. Что такое пограничный слой? Когда можно говорить о существовании пограничного слоя?

5. В пограничном слое силы инерции и силы вязкости одинаковы по порядку величины. А за его пределами?

6. Как толщина пограничного слоя на плоской пластине зависит от расстояния от передней кромки пластины?

7. Как касательное напряжение на стенке при продольном обтекании пластины потоком жидкости зависит от расстояния от передней кромки?

8. Как коэффициент гидравлического сопротивления зависит от числа Рейнольдса при ламинарном течении жидкости в трубах?

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

2.1. Определить поле скоростей и давлений при вязкостном обтекании неограниченным потоком жидкости шара радиусом r_0 . Вдали от шара скорость жидкости u_0 и давление p_∞ . Определить силу, действующую на шар, и коэффициент лобового сопротивления шара.

2.2. Определить скорость падения водяных капель в воздухе вблизи поверхности земли. Диаметр капель принять 0,01, 0,03, 0,10 и 0,30 мм. То же для градин диаметром 3 и 6 мм.

2.3. Определить установившуюся скорость движения капель расплава свинца в жидком натрии под действием сил тяжести. Капли расплава свинца принять в виде шариков диаметром 4 мм. Плотность свинца 10500 кг/м^3 , натрия 830 кг/м^3 , динамическая вязкость натрия $2,9 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$.

2.4. Оценить коэффициент динамической вязкости глицерина с плотностью 1250 кг/м^3 , если стальной шарик диаметром 3 мм, опущенный в сосуд с глицерином, достиг дна сосуда через $8,0 \pm 0,2$ с. Высота уровня глицерина в сосуде 300 мм.

2.5. Оценить скорость свободного падения парашютиста. Руки, ноги, туловище моделировать как отрезки цилиндров.

2.6. Оценить скорость всплытия пузырей пара в водяном теплоносителе, который находится под давлением 16 МПа. Диаметр пузырей принять равным 5 мм.

2.7. Определить толщину пограничного слоя на расстоянии $l = 3$ м от кромки плоской пластины, которая омывается потоком воздуха со скоростью $u_0 = 1,5$ м/с. Коэффициент кинематической вязкости воздуха $\nu = 15 \cdot 10^{-6}$ м²/с ($p = 1$ атм, $t = 18$ °С).

2.8. Используя результаты теории ламинарного пограничного слоя определить силу трения действующую на пластину, если она движется в воде со скоростью $u_0 = 1,0$ м/с. Длина пластины $l = 0,4$ м, ширина $b = 1,0$ м. Коэффициент кинематической вязкости воды $\nu = 1,0 \cdot 10^{-6}$ м²/с, ($t = 20$ °С).

2.9. Определить смещение линий тока $\delta_*(x)$ за пределами ламинарного пограничного слоя при продольном обтекании потоком несжимаемой жидкости плоской пластины (рис. 2.3).

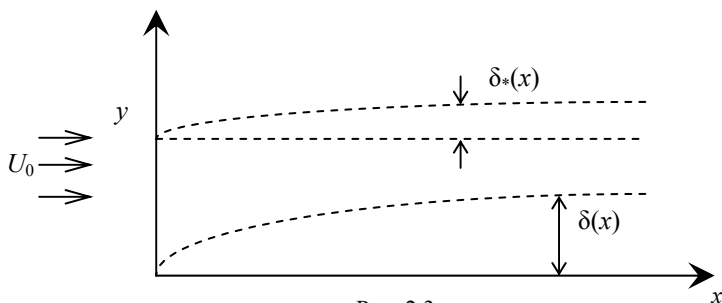


Рис. 2.3

2.10. В соответствии с условиями задачи 2.8 обтекаются две параллельно расположенные пластины, расстояние между которыми $h_0 = 50$ мм. Оценить усилие, прижимающее пластины друг к другу.

2.11. Определить силу, действующую на единицу длины цилиндра диаметром $d = 12$ мм, который поперечно обтекается потоком воздуха при нормальных условиях. Скорость движения воздуха $u_0 = 33,3$ м/с.

2.12. Оценить дополнительный расход бензина автомобилем, движущимся со скоростью 100 км/ч, связанный с установкой на крыше автомобиля багажника. Конструкция багажника такова, что сопротивление его обусловлено в основном поперечным обтеканием потоком воздуха трубок диаметром 12 мм суммарной длиной около 13 м. Средняя скорость обтекания трубок выше скорости автомобиля на 20%. Теплотворная способность топлива 44 МДж/кг, коэффициент полезного действия двигателя принять равным 30%.

2.13. Определить толщину пограничного слоя в лобовой точке цилиндра диаметром $d = 10$ мм омываемого поперечным потоком жидкости при $Re_d = 10^4$. При решении полагать, что соотношение (2.27) справедливо и для пограничных слоев, развивающихся в условиях не нулевых градиентов давления, когда скорость на границе пограничного слоя изменяется $u_0(x)$.

2.14. Определить распределение скоростей и напряжений при стационарном безнапорном движении несжимаемой жидкости между двумя плоскими пластинами, из которых одна покоится, а вторая движется в своей плоскости со скоростью u_0 . Расстояние между пластинами h .

2.15. Решить задачу 2.14 при условии отличного от нуля градиента давления. Проанализировать влияние градиента давления на поле скорости.

2.16. Определить нестационарное поле скоростей несжимаемой жидкости в пространстве над плоской неограниченной пластиной, которая в момент $\tau = 0$ приведена в движение в своей плоскости со скоростью u_0 .

2.17. Определить не зависящее от начальных условий поле скоростей несжимаемой жидкости в пространстве над плоской неограниченной пластиной, которая движется в своей плоскости по закону $u = u_0 \cdot \cos \omega t$.

2.18. В неограниченном объеме вязкой несжимаемой жидкости вращается полый цилиндр радиуса r_0 . Угловая скорость вращения цилиндра ω постоянна. Определить стационарное распределение скоростей и давлений внутри цилиндра и вне него. Вдали от ци-

линдра жидкость покоится при давлении p_0 . При $r = r_0$ давление внутри и вне цилиндра принять одинаковым. Показать, что найденное стационарное поле скоростей в области вне цилиндра не достижимо.

2.19. Определить распределение скоростей в потоке жидкости между двумя коаксиальными цилиндрами радиусами r_1 , r_2 , если наружный цилиндр неподвижен, а внутренний вращается с постоянной угловой скоростью ω . Найти момент сил, приложенный к единице длины внутреннего цилиндра.

2.20. В зазоре между двумя цилиндрами радиусами r_1 и r_2 находится жидкость. Один из цилиндров неподвижен, а второй движется вдоль оси со скоростью u_0 . Определить поле скоростей в потоке. Для протаскивания какого цилиндра (внешнего или внутреннего) необходимо приложить большее усилие.

2.21. Определить распределение скоростей и коэффициент гидравлического сопротивления при ламинарном установившемся течении жидкости в плоской щели шириной $2h$. Найти отношение максимальной скорости к средней по сечению.

2.22. Определить распределение скоростей и коэффициент гидравлического сопротивления при ламинарном установившемся течении жидкости в кольцевой трубе с радиусами r_1 , r_2 .

2.23. Определить распределение скоростей и коэффициент гидравлического сопротивления при ламинарном установившемся течении жидкости в трубе с поперечным сечением в виде эллипса с отношением полуосей $a/b = n$. Найти отношение максимальной скорости к средней по сечению.

2.24. Определить распределение скоростей и коэффициент гидравлического сопротивления при ламинарном установившемся течении жидкости в трубе с поперечным сечением в виде равностороннего треугольника. Найти отношение максимальной скорости к средней по сечению.

2.25. Определить установившееся поле скоростей в пленке жидкости стекающей по гладкой вертикальной стенке. Найти зависимость толщины пленки и средней скорости движения жидкости от расхода жидкости на единицу ширины пленки V_1 м²/с. Режим тече-

ния жидкости в пленке – ламинарный. Трением жидкости о воздух пренебречь.

2.26. Вода вытекает из вертикально поставленной трубки и стекает по ее наружной поверхности. Определить толщину стекающей пленки. Наружный диаметр трубки 20 мм, расход воды 22,6 л/ч.

2.27. Поршень диаметром $D = 100$ мм и длиной $l = 100$ мм имеющий для перепуска жидкости цилиндрическое отверстие диаметром $d = 5$ мм перемещается с постоянной скоростью $u_0 = 0,4$ м/с (рис. 2.4). Определить усилие F необходимое для перемещения поршня, если цилиндр заполнен минеральным маслом МС-20 ($\mu = 1,0$ кг/м·с, $\rho = 892,5$ кг/м³).

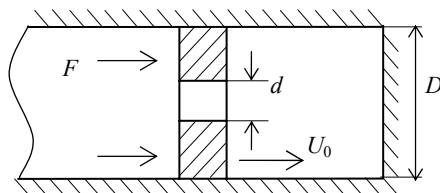


Рис. 2.4

2.28. Жидкость вытекает из цилиндра через тонкий длинный капилляр (рис. 2.5). Определить коэффициент кинематической вязкости жидкости, если известно, что уровень жидкости в сосуде понизился вдвое за время $\Delta\tau = 8$ мин. Диаметр сосуда $D = 60$ мм, диаметр трубки $d = 2$ мм, длина трубки $l = 200$ мм. Начальная высота уровня жидкости в сосуде $H = 0,32$ м. Указания: режим течения принять ламинарным, сопротивлением входа и начального участка пренебречь. Проверить допустимость принятых предположений.

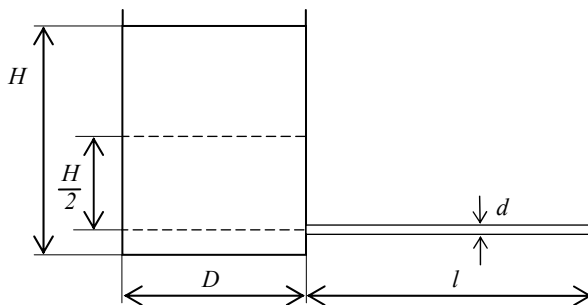


Рис. 2.5

2.29. В тонком слое между двумя круглыми дисками находится вязкая жидкость (рис. 2.6). Один диск неподвижен, на другой действует постоянная прижимающая сила F . Определить, как с течением времени изменяется расстояние между дисками $h(\tau)$. Радиус дисков r_0 , начальное расстояние между дисками h_0 ($h_0 \ll r_0$). Течение считать вязкостным.

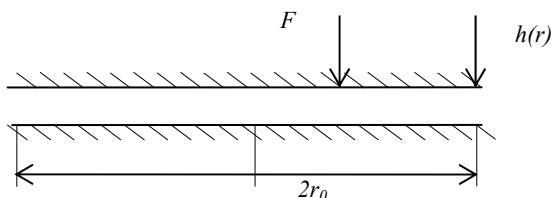


Рис. 2.6

2.30. Вязкая жидкость, нанесенная на гладкую вертикальную поверхность высотой l , стекает с нее под действием сил тяжести. Определить распределение толщины пленки по высоте поверхности в зависимости от времени $\delta(x, \tau)$, предполагая автомодельный характер распределения толщины пленки по координате при изменении времени.

2.31. В бесконечном цилиндре радиусом r_0 покоится вязкая несжимаемая жидкость. В момент времени $\tau = 0$ цилиндр начинает вращаться относительно собственной оси с постоянной угловой скоростью ω . Определить нестационарное поле скоростей в жидкости $u_\varphi(r, \tau)$.

2.32. В неограниченном объеме жидкости покоится стержень радиусом r_0 бесконечной длины. В момент времени $\tau = 0$ стержень начинает вращаться относительно собственной оси с постоянной угловой скоростью ω . Определить нестационарное поле скоростей в жидкости $u_\varphi(r, \tau)$.

3. МЕТОДЫ РАЗМЕРНОСТЕЙ И ПОДОБИЯ

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Размерные физические величины – величины, численное значение которых зависит от масштаба единиц измерения величин положенных в основу системы единиц измерения (СИ).

Безразмерные физические величины не зависят от масштабов измерения основных величин.

Размерность (формула размерности) физической величины отражает связь данной величины с величинами, принятыми за основные, и устанавливается на основе законов и определений.

В СИ за основные величины и их единицы приняты: длина – метр (м); масса – килограмм (кг); время – секунда (с); сила тока – ампер (А); термодинамическая температура – кельвин (К); сила света – кандела (кд).

Так, например, по определению скорость есть отношение длины к времени $u = l/\tau$. Соответственно размерность скорости $[u] = L/T$, где L и T – размерности длины и времени или просто $[u] = \text{м/с}$. В соответствии с законом Ньютона сила есть произведение массы на ускорение $F = m \cdot a$, поэтому размерность силы $[F] = MLT^{-2}$ или $[F] = \text{кг} \cdot \text{м/с}^2$.

Размерность (формула размерности) произвольной физической величины a может быть представлена в виде произведения размерностей основных величин в каких-то степенях, в частности в механике

$$[a] = L^\alpha M^\beta T^\gamma = \text{м}^\alpha \text{кг}^\beta \text{с}^\gamma. \quad (3.1)$$

Физические величины, участвующие в описании процессов переноса в средах с переменной температурой, могут содержать в формуле размерности (3.1) размерность температуры, т.е. кельвин в какой-то степени.

Однородные по размерности величины имеют одинаковый физический смысл и одинаковую единицу измерения (размерность).

Симплекс s – простейшая безразмерная величина, равная отношению двух однородных по размерности величин. Примеры симплексов: безразмерные координаты $X = x/\delta_x$, $R = r/r_0$; число Маха – отношение скорости движения к скорости звука в среде $M = u/a$; критерий Кнудсена – отношение микромасштаба к макромасштабу $Kn = l/L$. Безразмерной является величина геометрического угла, которая представляет собой отношение длины дуги к радиусу. Градус, град, радиан не «размерности» угла, а наименования углов определенного размера, а именно - одна девятая, одна сотая и $\frac{2}{\pi}$ части прямого угла соответственно.

Комплекс π – безразмерная степенная комбинация размерных величин. Примеры: число Био $Bi = \frac{\alpha l}{\lambda}$, число Фурье $Fo = \frac{a \tau}{\delta^2}$, критерий Рейнольдса $Re = \frac{u l}{\nu}$ и т.п. В общем виде комплекс представим как

$$\pi = a_1^{n_1} a_2^{n_2} \dots a_m^{n_m}, \quad (3.2)$$

где a_1, a_2, \dots, a_m – размерные величины, n_1, n_2, \dots, n_m – показатели степени.

Явления в природе, очевидно, не зависят от выбора масштабов основных величин (как, впрочем, и от выбора самой системы). Этому же свойству должны отвечать и уравнения, описывающие процессы. Оно будет выполнено, если уравнения можно привести к безразмерному виду. Безразмерная форма уравнений является наиболее естественной. Если уравнение нельзя привести безразмерному виду, оно не правильное.

Количество безразмерных величин, которые получаются при приведении уравнения к безразмерному виду, определяет π -теорема. Для формулировки её введем понятие величин с независимыми единицами измерения, а именно **независимые единицы измерения** не могут быть выражены одна через другие.

π -Теорема. Если уравнение

$$f(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0 \quad (3.3)$$

может быть приведено к безразмерному виду и содержит n самостоятельно входящих в уравнение размерных величин, l групп однородных по размерности величин ($l \leq n$), в том числе k групп однородных по размерности величин с независимыми единицами измерения ($k < l$), то после приведения к безразмерному виду уравнение будет содержать всего $n - k$ безразмерных величин, в том числе $n - l$ симплексов и $l - k$ комплексов:

$$F(s_1, s_2, \dots, s_{n-l}, \pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{l-k}) = 0. \quad (3.4)$$

При этом можно получить $C_n^k - (n - l)$ формально эквивалентных видов безразмерного уравнения.

Если уравнение (3.3), кроме размерных величин, содержало и некоторые безразмерные величины, то они остаются в уравнении и после приведении его к безразмерному виду (3.4).

Рассмотрим два способа приведения уравнений к безразмерному виду: метод анализа размерностей и метод преобразования масштабов. Рассмотрение проведем на конкретных примерах, процедуру приведения к безразмерному виду распишем по шагам.

Приведение к безразмерному виду. Метод анализа размерностей

Рассмотрим следующую задачу. Перепад давления на трубе Δp при движении в ней жидкости зависит от средней скорости жидкости u_0 , диаметра d и длины l трубы, плотности жидкости ρ и её коэффициента кинематической вязкости ν .

$$\Delta p = f(u_0, d, l, \rho, \nu). \quad (3.5)$$

Необходимо привести уравнение к безразмерному виду.

Шаг 1. Выпишем все размерные величины, вошедшие в уравнение, с их размерностями

$$\begin{aligned} [\Delta p] &= \frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{с}^2}, & [u_0] &= \frac{\text{м}}{\text{с}}, \\ [d] &= \text{м}, & [l] &= \text{м}, \\ [\rho] &= \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, & [\nu] &= \frac{\text{м}^2}{\text{с}}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Шаг 2. Определим n , l , k и количество безразмерных величин в соответствии с π -теоремой.

Количество самостоятельно входящих в уравнение размерных величин n определяем, сосчитав количество позиций в (3.6):

$$n = 6.$$

Диаметр d и длина l трубы однородные по размерности величины и входят в одну группу. Размерности остальных величин различны, поэтому в четырех группах однородных по размерности величин находится по одной величине и в одной – две величины. Всего групп однородных по размерности величин l получается пять:

$$l = 5.$$

Из пяти различных размерностей m , $\frac{m}{c}$, $\frac{m^2}{c}$, $\frac{kg}{m^3}$ и $\frac{kg}{m \cdot c^2}$ (соответствующих числу групп однородных по размерности величин l) необходимо определить число независимых размерностей, т.е. не выражающихся одна через другие. Независимыми размерностями являются, например, m , $\frac{m}{c}$, $\frac{kg}{m^3}$. Остальные выражаются через них, действительно:

$$\frac{m^2}{c} = \frac{m}{c} \cdot m, \quad \frac{kg}{m \cdot c^2} = \frac{kg}{m^3} \cdot \left(\frac{m}{c}\right)^2. \quad (3.7)$$

Можно выбрать другие комбинации независимых размерностей, через которые выражаются остальные, например: m , $\frac{m^2}{c}$, $\frac{kg}{m^3}$ или

$\frac{m}{c}$, $\frac{m^2}{c}$, $\frac{kg}{m \cdot c^2}$. Важно, что во всех случаях для данной задачи их три. Таким образом, количество групп однородных по размерности величин с независимыми единицами измерения k равно трем:

$$k = 3.$$

Определили n , l , k и, в соответствии с π -теоремой, после приведения к безразмерному виду в уравнении будет $(n - k = 3)$ три безразмерных величины, в том числе один симплекс $(n - l = 1)$ и два комплекса $(l - k = 2)$.

Шаг 3. Выберем три независимые единицы измерения (в соответствии с числом k) и изменим их масштаб. Пусть это будут: m , $\frac{m}{c}$ и $\frac{кг}{м^3}$. Перейдем от выбранных единиц к новым, соответственно в A_l , A_u и A_p раз меньшим

$$m \rightarrow \frac{m}{A_l}, \quad \frac{m}{c} \rightarrow \frac{m/c}{A_u}, \quad \frac{кг}{м^3} \rightarrow \frac{кг/м^3}{A_p}. \quad (3.8)$$

В новых единицах численные значения величин изменятся. Если, например, $A_l = 100$, то это значит, что вместо метров мы переходим к новой единице – сантиметр и численное значение длины трубы l и диаметра d увеличатся в 100 раз и будут $100l$ и $100d$. Аналогично, соответственно, в A_u и A_p раз увеличатся численные значения скорости и плотности и составят $u_0 A_u$ и ρA_p . Чтобы определить, как изменятся численные значения кинематической вязкости ν и перепада давления Δp нужно выразить их размерности через размерности величин, единицы измерения которых мы изменили (3.8). С учетом (3.7) их новые значения будут $\nu A_u A_l$ и $\Delta p A_p A_u^2$. Таким образом после изменения масштаба единиц (3.8) уравнение (3.5) принимает вид

$$\Delta p A_p A_u^2 = f(u_0 A_u, d A_l, l A_l, \rho A_p, \nu A_u A_l). \quad (3.9)$$

Шаг 4. Так как уравнение должно иметь вид инвариантный по отношению к изменению масштаба единиц измерения физических величин, то значения коэффициентов в A_l , A_u и A_p могут быть выбраны произвольными. Выберем коэффициенты так, чтобы три члена (в соответствии со значением числа k) в (3.9) имели фиксированное численное значение, например равны единице:

$$u_0 A_u = 1, \quad d A_l = 1, \quad \rho A_p = 1. \quad (3.10)$$

Шаг 5. Из соотношений (3.10) находим значения коэффициентов $A_u = 1/u_0$, $A_l = 1/d$, $A_p = 1/\rho$ и, подставляя их в (3.9), получаем уравнение в безразмерном виде

$$\frac{\Delta p}{\rho u_0^2} = f\left(1, 1, \frac{l}{d}, 1, \frac{\nu}{u_0 d}\right), \quad (3.11)$$

или

$$\frac{\Delta p}{\rho u_0^2} = F\left(\frac{l}{d}, \text{Re}\right). \quad (3.12)$$

Неоднозначность формы уравнения в безразмерном виде, о которой говорится в π -теореме, связана с тем, что на шагах 3 и 4 можно выбрать для дальнейшего различные тройки величин. Например, на шаге 4 зафиксируем в отличие от (3.10) такую тройку величин

$$\Delta p A_p A_u^2 = 1, \quad d A_l = 1, \quad v A_u A_l = 1. \quad (3.13)$$

Из (3.13) находим коэффициенты $A_l = \frac{1}{d}$, $A_u = \frac{d}{v}$, $A_p = \frac{v^2}{\Delta p d^2}$

и, подставляя их в (3.9), получим

$$1 = f\left(\frac{u_0 d}{v}, 1, \frac{l}{d}, \frac{\rho v^2}{\Delta p d^2}\right). \quad (3.14)$$

Разрешая (3.14) относительно члена содержащего перепад давления, имеем

$$\frac{\Delta p d^2}{\rho v^2} = f_1\left(\frac{l}{d}, \text{Re}\right). \quad (3.15)$$

Уравнение (3.15) отличается от (3.12), но ему эквивалентно, так как от (3.15) можно перейти к (3.12) и наоборот. Действительно, поделив правую и левую части соотношения (3.15) на квадрат числа Рейнольдса, получим (3.12)

$$\frac{\Delta p}{\rho u_0^2} = \frac{1}{\text{Re}^2} f_1\left(\frac{l}{d}, \text{Re}\right) = F\left(\frac{l}{d}, \text{Re}\right). \quad (3.16)$$

Частный случай $n - k = 1$. Согласно π -теореме после приведения к безразмерному виду уравнение содержит одну безразмерную величину $F(\pi) = 0$ и имеет решение

$$\pi = \text{const}. \quad (3.17)$$

Из (3.2) и (3.17) следует, что в данном случае искомая величина с точностью до константы может быть представлена в виде произведения остальных величин в каких-то степенях

$$a_1 = C a_2^\alpha a_3^\beta \cdots a_{n-1}^\delta. \quad (3.18)$$

Пример. Период колебаний маятника зависит от длины маятника и ускорения свободного падения $T = f(g, l)$. Определить вид зависимости.

Так как $n - k = 1$, то $T = C g^\alpha l^\beta$. Для определения показателей степени перепишем последнее уравнение в размерностях $c = \left(\frac{M}{c^2}\right)^\alpha \cdot m^\beta$. Приравняем показатели степени при размерностях основных величин справа и слева. У метра: $0 = \alpha + \beta$; у секунды: $1 = -2\alpha$. Решая систему, находим $\alpha = -0,5$, $\beta = 0,5$ и $T = C\sqrt{l/g}$.

Векторные единицы длины. Увеличение количества независимых единиц измерения приводит к увеличению k и, согласно π -теореме, к уменьшению количества безразмерных величин, т.е. аргументов неизвестных функций, после приведения уравнения к безразмерному виду. Хантли [3] предложил при анализе размерностей физических величин использовать различные единицы измерения для определения расстояний по различным направлениям. Например, вместо одного метра ввести три условно различные единицы M_x, M_y, M_z . Использование векторных единиц длины требует привлечения дополнительных физических соображений при установлении формулы размерности конкретной физической величины. Этим объясняется физически более полный результат, содержащийся в безразмерном уравнении.

Приведение к безразмерному виду. Метод преобразования масштабов

В отличие от метода анализа размерностей, который применим к уравнениям самого общего вида (типа списка величин), для применения метода преобразования масштабов необходимо иметь математическое описание процесса в виде уравнений: дифференциальных, интегральных, алгебраических или других.

Процедуру приведения к безразмерному виду рассмотрим на примере.

Задание. Получить выражение для перепада давления при ламинарном движении несжимаемой жидкости в плоском канале шириной $2h$ и длиной l .

Решение. Система уравнений, описывающая распределение скоростей и давлений в данном случае, имеет вид (параболическое приближение):

$$\begin{aligned} u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2}, \\ u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} &= 0, \end{aligned} \quad (3.19)$$

с условиями однозначности

$$\begin{aligned} \text{при } y = \pm h, 0 \leq z \leq l \quad u_y = u_z = 0 \\ \text{при } z = 0, -h \leq y \leq h \quad u_z = u_0. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Процедуру преобразования уравнений распишем по шагам.

Шаг 1. Выпишем аргументы и искомые переменные, вошедшие в описание задачи

$$y, z, u_y, u_z, p. \quad (3.21)$$

Шаг 2. Выпишем масштабы, вошедшие в описание задачи. Масштабами являются постоянные величины, однородные по размерности с переменными, характеризующие их величину. Масштабы следует искать в условиях однозначности.

$$h, l, u_0. \quad (3.22)$$

Для некоторых переменных масштабы могут отсутствовать.

Шаг 3. Составим безразмерные величины, как отношение переменной к соответствующему масштабу

$$Y = \frac{y}{h}, \quad Z = \frac{z}{l}, \quad U_y = \frac{u_y}{u}, \quad U_z = \frac{u_z}{u_0}. \quad (3.23)$$

Шаг 4. Из последних соотношений (3.23) выразим переменные

$$y = Y h, \quad z = Z l, \quad u_y = U_y u_0, \quad u_z = U_z u_0 \quad (3.24)$$

и подставим (3.24) в уравнения (3.19), (3.20). Получим

$$\begin{aligned} \frac{u_0^2}{h} U_y \frac{\partial U_z}{\partial Y} + \frac{u_0^2}{l} U_z \frac{\partial U_z}{\partial Z} &= -\frac{1}{\rho l} \frac{\partial p}{\partial Z} + \frac{\nu u_0}{h^2} \frac{\partial^2 U_z}{\partial Y^2}, \\ \frac{u_0^2}{h} U_y \frac{\partial U_y}{\partial Y} + \frac{u_0^2}{l} U_z \frac{\partial U_y}{\partial Z} &= -\frac{1}{\rho h} \frac{\partial p}{\partial Y} + \frac{\nu u_0}{h^2} \frac{\partial^2 U_y}{\partial Y^2}, \\ \frac{u_0}{h} \frac{\partial U_y}{\partial Y} + \frac{u_0}{l} \frac{\partial U_z}{\partial Z} &= 0, \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned} \text{при } Yh = \pm h, \quad 0 \leq Zl \leq l \quad u_0 U_y = u_0 U_z = 0, \\ \text{при } Zl = 0, \quad -h \leq Yh \leq h \quad u_0 U_z = u_0. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Члены в уравнениях (3.25) и (3.26) имеют, в основном, следующую структуру: член, образованный из безразмерных величин, и множитель при нем, составленный из масштабов и параметров, который называется масштабным множителем.

Шаг 5. Для получения задачи в безразмерном виде в пределах каждого уравнения поделим все члены на один из масштабных множителей. В первых двух уравнениях (3.25) это пусть, например, u_0^2/h в третьем u_0/h :

$$\begin{aligned} U_y \frac{\partial U_z}{\partial Y} + \frac{h}{l} U_z \frac{\partial U_z}{\partial Z} &= -\frac{h}{l} \frac{\partial P}{\partial Z} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 U_z}{\partial Y^2}, \\ U_y \frac{\partial U_y}{\partial Y} + \frac{h}{l} U_z \frac{\partial U_y}{\partial Z} &= -\frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 U_y}{\partial Y^2}, \\ \frac{\partial U_y}{\partial Y} + \frac{h}{l} \frac{\partial U_z}{\partial Z} &= 0, \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned} \text{при } Y = \pm 1, \quad 0 \leq Z \leq 1 \quad U_y = U_z = 0, \\ \text{при } Z = 0, \quad -1 \leq Y \leq 1 \quad U_z = 1. \end{aligned} \quad (3.28)$$

В безразмерной системе уравнений (3.27) образовалось безразмерное давление в виде $P = \frac{p}{\rho u_0^2}$, хотя масштаб для давления в

исходной задаче отсутствовал, и появилось два безразмерных параметра: число Рейнольдса $Re = \frac{u_0 h}{\nu}$ и отношение $\frac{h}{l}$.

На этом собственно приведение уравнений к безразмерному виду заканчивается. Дальнейшее связано с получением конкретного результата, сформулированного в задании.

Из (3.27) и (3.28) следует, что неизвестные безразмерные компоненты скорости U_y , U_z и безразмерное давление P являются функциями следующих величин

$$\begin{aligned}U_y &= f_1(Y, Z, Re, h/l), \\U_z &= f_2(Y, Z, Re, h/l), \\P &= f_3(Y, Z, Re, h/l).\end{aligned}\tag{3.29}$$

Соответственно, среднее по ширине канала давление зависит от

$$\bar{P} = f_4(Z, Re, h/l),\tag{3.30}$$

а искомый перепад давления

$$\Delta \bar{P} \equiv \frac{\Delta \bar{p}}{\rho u_0^2} = f_4(0, Re, h/l) - f_4(1, Re, h/l) = F(Re, h/l).\tag{3.31}$$

Подобие физических процессов

Если два физических процесса α и β подобны, то выполняются два условия:

- 1) оба процесса качественно одинаковы;
- 1) сходственные величины процессов связаны преобразованием подобия.

Качественно одинаковые процессы имеют одинаковую физическую природу и одинаковое математическое описание, которое совпадает во всем, кроме численных значений входящих в описание размерных величин.

Преобразованием подобия называется линейная однородная функция, связывающая сходственные величины процессов

$$\varphi_\alpha = C_\varphi \cdot \varphi_\beta. \quad (3.32)$$

Сходственные величины φ_α и φ_β имеют одинаковый физический смысл, одинаковую единицу измерения и характеризуют процессы в сходственных точках пространства и в сходственные моменты времени.

Сходственные точки пространства имеют координаты, связанные преобразованием подобия:

$$\vec{X}_\alpha = C_x \cdot \vec{X}_\beta. \quad (3.33)$$

Последнее соотношение означает, что объемы, в которых протекают процессы, должны быть геометрически подобны, т.е. геометрическое подобие является составной частью подобия физических процессов.

Сходственные моменты времени также пропорциональны друг другу:

$$\tau_\alpha = C_\tau \cdot \tau_\beta. \quad (3.34)$$

Коэффициенты C_φ , C_x , C_τ – константы подобия, величины безразмерные и положительные, показывающие, во сколько раз нужно изменить параметры одного процесса, чтобы получить параметры другого. Если все $C_i = 1$, то процессы тождественны.

Констант подобия столько, сколько групп однородных по размерности величин, т.е. l . Но только k констант подобия могут быть при моделировании процесса выбраны произвольно. Остальные $l - k$ констант определяются условиями подобия процессов.

Как следствие из подобия процессов можно получить результат, составляющий содержание **прямой теоремы метода подобия**:

Если процессы подобны друг другу, то характеризующие их безразмерные числа должны быть одинаковы.

Прямую теорему метода подобия можно рассматривать как другую формулировку подобия процессов.

Безразмерные числа, характеризующие конкретный процесс, делится на числа (число) подобия и критерии подобия.

Число подобия – это безразмерное число, содержащее искомую величину.

Критериями подобия называют безразмерные числа, составленные из наперед заданных величин и параметров.

Для моделирования процессов особенно важна **обратная теорема метода подобия**, определяющая условия подобия процессов:

Для того чтобы процессы были подобны друг другу достаточно, чтобы они были качественно одинаковы, а их одноименные критерии подобия численно равны.

Требование равенства критериев подобия для модели и натуре и определяют условия, которым должны удовлетворять константы подобия (3.32)–(3.34). Так, из равенства чисел Рейнольдса для процессов следует

$$\frac{C_u C_x}{C_v} = 1.$$

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что такое размерная и безразмерная величина?
2. Запишите размерность величин \bar{u} , p , v .
3. Сформулируйте π -теорему.
4. Какой вывод следует сделать, если для уравнения оказалось $n - k = 0$? Почему?
5. Какова связь между величинами уравнений, если для него $n - k = 1$?
6. Что такое число подобия, критерий подобия? Как определить критерии подобия для конкретной задачи?
7. Сформулируйте прямую теорему метода подобия.
8. Сформулируйте обратную теорему метода подобия.
9. Как организуется исследование процесса на модели?

ЗАДАЧИ И УРАЖНЕНИЯ

3.1. При стационарном движении жидкости в прямых длинных трубах перепад давления на единице длины трубы $\Delta p/l$ зависит от средней скорости движения жидкости u_0 , диаметра трубы d , плотности жидкости ρ и коэффициента динамической вязкости μ . Оп-

ределить вид функциональной зависимости перепада давления от перечисленных параметров.

3.2. Из анализа уравнений Навье–Стокса для случая стационарного обтекания неограниченным потоком жидкости шара следует, что сила F , действующая на шар со стороны потока, зависит от средней скорости движения жидкости u_0 , диаметра шара d , плотности жидкости ρ и коэффициента динамической вязкости μ . Определить вид функциональной зависимости перепада давления от перечисленных параметров.

3.3. Решить задачу 3.2 для случая малых значений числа Рейнольдса, когда реализуется вязкостный режим обтекания шара. При вязкостном режиме течения силы инерции малы по сравнению с силами вязкого трения и их можно опустить. При этом плотность выпадает из числа параметров определяющих силу сопротивления.

3.4. Тонкий диск радиусом r_0 вращается вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью ω в неограниченном объеме вязкой несжимаемой жидкости, плотность которой ρ и коэффициент динамической вязкости μ . Определить вид структурной зависимости для момента силы M , приложенного к диску, предполагая, что процесс длится достаточно долго и момент от времени уже не зависит.

3.5. При турбулентном движении жидкости распределение скорости в пристенной области постоянного касательного напряжения τ_{ct} описывается универсальной зависимостью расстояния от стенки $u = f(y, \tau_{ct}, \rho, \nu)$. Привести уравнение к безразмерному виду.

3.6. В неограниченном объеме вязкой несжимаемой жидкости покоится тонкая плоская пластина. В момент $\tau = 0$ она начинает двигаться в своей плоскости с постоянной скоростью u . Можно ли дифференциальное уравнение в частных производных, описывающее нестационарное поле скорости в жидкости, привести к уравнению в полных производных?

3.7. Между двумя плоскими параллельными пластинами расположенными на некотором расстоянии друг от друга покоится вязкая несжимаемая жидкость. В момент $\tau = 0$ одна из пластин начинает двигаться с постоянной скоростью u_0 . Можно ли дифференци-

альное уравнение в частных производных, описывающее нестационарное поле скорости в жидкости, привести к уравнению в полных производных?

3.8. Период колебаний ареометра Никольсена (рис. 3.1), выведенного из состояния равновесия, зависит от массы ареометра, площади его поперечного сечения, плотности жидкости и ускорения свободного падения $T = f(m, s, \rho, g)$. Определить вид функциональной зависимости периода T от перечисленных параметров.

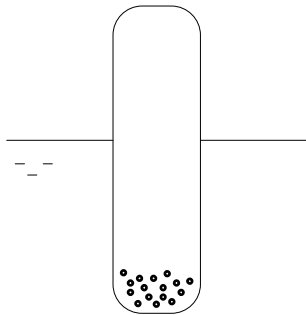


Рис. 3.1

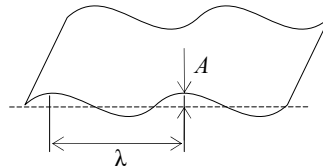


Рис. 3.2

3.9. Полная энергия волны единичной ширины (рис. 3.2) зависит от плотности жидкости, ускорения свободного падения, амплитуды и длины волны колебаний $E = f(\rho, g, A, \lambda)$. Привести соотношение к безразмерному виду.

3.10. Основными факторами, влияющими на скорость распространения ударной волны при атомном взрыве в воздухе, являются энергия, выделившаяся при атомном взрыве E , и начальная плотность среды ρ . Определить вид зависимости радиуса фронта ударной волны от времени, принимая, что $r = f(E, \rho, \tau)$.

3.11. При переливе воды через гребень плотины (рис. 3.3) вязкость жидкости «не успевает» оказать влияния на процесс истечения и расход жидкости на единицу ширины потока M определяется только плотностью жидкости ρ , ускорением свободного падения g и превышением уровня жидкости над гребнем плотины h , т.е. $M = f(\rho, g, h)$. Определить вид функциональной зависимости.

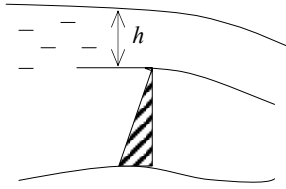


Рис. 3.3

3.12. Отрывной диаметр пузыря пара при кипении жидкости на плоской горизонтальной поверхности нагрева D зависит от разности плотностей жидкости и пара ($\rho' - \rho''$), ускорения свободного падения g , краевого угла смачивания θ и коэффициента поверхностного натяжения σ . Определить вид функциональной зависимости D от перечисленных параметров.

3.13. Из анализа уравнений, описывающих ламинарное стекание пленки жидкости по гладкой вертикальной поверхности, следует, что толщина пленки δ определяется расходом жидкости на единицу ширины пленки V , динамической вязкостью жидкости μ и ее удельным весом ρg . Определить вид функциональной зависимости.

3.14. Решить задачу 3.8 используя векторные единицы длины.

3.15. Решить задачу 3.9 используя векторные единицы длины.

3.16. Определить критерии подобия для поля скорости и трения на стенке при обтекании в продольном направлении стационарным ламинарным потоком несжимаемой жидкости полуограниченной неподвижной пластины. Вдали от пластины скорость жидкости u_∞ .

3.17. Решить задачу 3.16 для больших значений числа Рейнольдса, когда поле скорости описывается уравнениями ламинарного пограничного слоя. При решении использовать векторные единицы длины.

4. ТУРБУЛЕНТНОЕ ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ В КАНАЛАХ ЯЭУ

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Турбулентное движение жидкости предполагает наличие неупорядоченности течения, в котором различные величины претерпевают хаотическое изменение по времени и пространственным координатам и при этом могут быть выделены статистически точные их средние значения.

Турбулентное движение можно считать суперпозицией вихрей с различными размерами и завихренностью, имеющими определенные верхний и нижний пределы.

При турбулентном режиме течения мгновенные значения гидродинамических параметров (компонент скорости, давления, температуры и др.), могут быть представлены в виде суммы осредненной во времени величины и её пульсационной составляющей. Например, полная мгновенная скорость потока определяется в виде разложения: $\vec{u} = \bar{\vec{u}} + \vec{u}'$, где \vec{u} – мгновенное значение скорости; $\bar{\vec{u}}$ – её среднее значение; \vec{u}' – пульсационная составляющая скорости.

Предполагается, что поле мгновенных скоростей и давлений при турбулентном движении описывается уравнениями Навье–Стокса. Уравнения для средних значений скоростей и давлений в турбулентных потоках получаются путем осреднения уравнений Навье–Стокса по времени и носят название дифференциальных уравнений Рейнольдса средних скоростей и давлений. Для несжимаемой жидкости они имеют вид

$$\frac{\partial \bar{\rho} \bar{u}_i}{\partial \tau} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{u}_i \bar{u}_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \overline{\rho u_i' u_j'} \right), \quad (4.1)$$

где $-\overline{\rho u_i' u_j'}$ – компоненты тензора турбулентных напряжений (или напряжений Рейнольдса). Диагональные члены (при $i = j$) являются нормальными турбулентными напряжениями и характеризуют

турбулентное давление, недиагональные члены (при $i = j$) – турбулентные касательные напряжения.

Вид выражений (4.1) подразумевает суммирование по повторяющемуся индексу и используется для записи сразу трех проекций дифференциальных уравнений.

Уравнение неразрывности для турбулентного потока несжимаемой жидкости имеет вид:

$$\frac{\partial \overline{\rho u_j}}{\partial x_j} = 0. \quad (4.2)$$

Из-за появления членов $-\overline{\rho u_i u_j}$, учитывающих дополнительный перенос импульса за счет турбулентных пульсаций, система уравнений (4.1)–(4.2) является разомкнутой.

Для замыкания системы уравнений движения (4.1) и неразрывности (4.2) используются различные полуэмпирические модели, наиболее известной из которых является модель Прандтля.

Согласно этой модели выражения для турбулентных касательных напряжений P_{xy}^T при прямолинейном течении жидкости в направлении оси x имеют вид:

$$P_{xy}^T = -\overline{\rho u_i u_j} = \overline{\rho l' u_y} \frac{d\overline{u}_x}{dy}. \quad (4.3)$$

В соответствии с гипотезой Ж. Буссинеска (1877 г.) по аналогии с молекулярным вязким напряжением $\mu = \rho V l$, (μ – коэффициент молекулярной динамической вязкости, ρ – плотность, V – среднеквадратичная скорость молекул, l – средняя длина свободного пробега) в формуле (4.3) можно выделить турбулентную вязкость:

$$\mu_t = \overline{\rho u_y l'}. \quad (4.4)$$

Использование предположения о равенстве по порядку величины поперечной и продольной пульсаций скорости $\left(\left| u_y' \right| \approx \left| u_x' \right| \approx \left| l' \frac{d\overline{u}_x}{dy} \right| \right)$ приводит к следующему выражению для компонент турбулентных касательных напряжений:

$$P_{xy}^T \approx \overline{\rho l'^2} \left| \frac{d\bar{u}_x}{dy} \right| \cdot \frac{d\bar{u}_x}{dy} = \rho l^2 \left| \frac{d\bar{u}_x}{dy} \right| \cdot \frac{d\bar{u}_x}{dy}, \quad (4.5)$$

где величину $l = \sqrt{l'^2}$ принято называть *длиной пути перемешивания* (*длиной пути смешения Прандтля*); l характеризует локальные свойства турбулентного потока и может рассматриваться как пространственный масштаб турбулентности.

Прандтль предположил, что длина пути перемешивания возрастает линейно по мере удаления от стенки:

$$l = \chi \cdot y, \quad (4.6)$$

что и было подтверждено экспериментально в опытах Никурадзе и других авторов. По данным измерений константа турбулентности $\chi = 0,4$.

Для плоского прямолинейного течения жидкости выражение для турбулентной вязкости имеет вид:

$$\mu_t = \rho l^2 \left| \frac{d\bar{u}_x}{dy} \right|. \quad (4.7)$$

В случае обтекания плоскости прямолинейным потоком, направленным вдоль оси x , система дифференциальных уравнений Рейнольдса (4.1) сводится к уравнению:

$$-\frac{\partial \bar{P}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{d\bar{u}_x}{dy} - \overline{\rho u_i' u_j'} \right) = 0, \quad (4.8)$$

которое описывает распределение осредненной скорости.

В безградиентном потоке (при $\frac{\partial \bar{P}}{\partial x} = 0$) касательное напряжение не меняется по поперечной координате y и равно касательному напряжению на стенке:

$$\mu \frac{d\bar{u}_x}{dy} - \overline{\rho u_i' u_j'} = \tau_{cm} = \text{const}. \quad (4.9)$$

Из (4.9) следует, что в пристенной области потока распределение скорости зависит от $u_x = f(y, \nu, \tau_{cm}/\rho)$ или в безразмерном виде

$$\frac{\bar{u}_x}{u_*} = f\left(\frac{yu_*}{\nu}\right), \quad (4.10)$$

где $u_* = \sqrt{\tau_{cm}/\rho}$ – динамическая скорость или скорость трения на стенке.

Вводя универсальные координаты: $\varphi = \bar{u}_x/u_*$ – безразмерную скорость и $\eta = \frac{yu_*}{\nu}$ – безразмерное расстояние от стенки, получим, что при $\tau_{ct} = \text{const}$ в пристенной области распределение скоростей для различных τ_{ct} , ν описывается единой зависимостью, получившей название *универсального профиля скорости*:

$$\varphi = \varphi(\eta). \quad (4.11)$$

Вид функции $\varphi(\eta)$ меняется в зависимости от безразмерного расстояния до стенки η .

В модели Прандтля принимается простейшее допущение о полном отсутствии турбулентного переноса в узкой пристеночной области, где основную роль играют силы молекулярной вязкости. В этой области, называемой *вязким подслоем*, при $\eta < \eta_b$ имеет место линейное распределение скорости

$$\varphi = \eta. \quad (4.12)$$

По мере удаления от стенки в турбулентной зоне пристеночной области определяющими становятся турбулентные напряжения. В области развитой турбулентности при $\eta > \eta_t$ закон распределения скорости становится не зависящим от молекулярной вязкости, а распределение скорости описывается логарифмической зависимостью

$$\varphi = \frac{1}{\chi} \ln \eta + C. \quad (4.13)$$

Из экспериментов получено: $\eta_b \approx 5$, $\eta_t \approx 30$, $C = 5,5$, а для количественных расчетов наибольшую популярность приобрели:

- двухслойная модель Прандтля:

$$\begin{aligned} \varphi &= \eta; & \eta < 11,7, \\ \varphi &= 2,5 \ln \eta + 5,5; & \eta \geq 11,7, \end{aligned} \quad (4.14)$$

- трехслойная модель Кармана:

$\varphi = \eta$; $\eta < 5$ – вязкий подслой,

$\varphi = 4,92 \ln \eta + 3,06$; $5 \leq \eta \leq 30$ – промежуточный слой, (4.15)

$\varphi = 2,5 \ln \eta + 5,5$; $\eta > 30$ – турбулентное ядро.

В отличие от ламинарного турбулентный пограничный слой нарастает более энергично

$$\delta = 0,3x \frac{u_*}{u_0}. \quad (4.16)$$

Пристеночная область составляет всего 0,2 толщины турбулентного пограничного слоя, однако в ней порождается 75% всей пульсационной энергии и только 25% энергии турбулентных пульсаций возникает в остальных 0,8 толщины турбулентного пограничного слоя.

Распределение скорости по толщине турбулентного пограничного слоя определяется с учетом поправки на перемежаемость как

$$\frac{\bar{u}_x}{u_*} = f\left(\frac{yu_*}{\nu}\right) + H \cdot f_1\left(\frac{y}{\delta}\right), \quad (4.17)$$

где $f\left(\frac{yu_*}{\nu}\right) = f(\eta)$ – универсальный профиль,

$$f_1 = 1 + \sin \frac{\pi}{2} \left(2 \frac{y}{\delta} - 1\right);$$

$H = 1,375$ – для пограничного слоя на плоской пластине.

Для расчета касательного напряжения на стенке используется зависимость:

$$\tau_{ст} = C_f (Re_x) \frac{\rho u_0^2}{2}, \quad (4.18)$$

где $C_f(Re_x)$ – коэффициент трения пограничного слоя, зависящий

от числа Рейнольдса $Re_x = \frac{u_0 x}{\nu}$.

Для турбулентного пограничного слоя используются зависимости:

$$C_f = 0,0576 \text{Re}_x^{-0,2}, \quad 5 \cdot 10^5 < \text{Re}_x < 10^7, \quad (4.19)$$

$$C_f = 0,0262 \text{Re}_x^{-1/7}, \quad \text{Re}_x < 10^9, \quad (4.20)$$

$$\delta = 0,3x \sqrt{\frac{C_f}{2}}. \quad (4.21)$$

Распределение скорости в круглом канале можно получить, зная касательное напряжение на стенке $\tau_{\text{ст}}$ и распределение турбулентной вязкости $\mu_t(y)$ ($y = R - r$ – расстояние от стенки; R, r – радиус канала и текущий радиус):

$$\bar{u}_x(y) = \int_0^y \frac{\tau_{\text{ст}}(1 - y/R)}{\mu + \mu_t(y)} dy. \quad (4.22)$$

В канале можно выделить 3 области:

- 1) вязкий подслой, где $\mu \gg \mu_t$,
- 2) переходную область, где $\mu \approx \mu_t$,
- 3) турбулентное ядро, где $\mu \ll \mu_t$.

Универсальный профиль скорости может быть использован в пристенной области для турбулентного течения, так как в области большого градиента скорости у стенки можно считать, что $\tau(y) \approx \tau_{\text{ст}} = \text{const}$, а в ядре потока профиль скорости меняется слабо.

Для расчета гидравлического сопротивления канала используетс я обобщенная формула Дарси

$$\Delta P = \left(\Psi_M + \lambda_{\text{тр}}(\text{Re}) \frac{l}{d} \right) \frac{\rho u_0^2}{2}, \quad (4.23)$$

где Ψ_M – коэффициент местных сопротивлений, $\Psi_{\text{тр}} \equiv \lambda_{\text{тр}}(\text{Re}) \frac{l}{d}$ – коэффициент сопротивления трения, $\lambda_{\text{тр}}(\text{Re})$ – коэффициент гидравлического сопротивления канала, зависящий от числа Рейнольдса:

$$\lambda_{\text{тр}} = 8 \frac{u_*^2}{u_0^2} = \frac{8\tau_{\text{ст}}}{\rho u_0^2}. \quad (4.24)$$

На практике для определения $\lambda_{\text{тр}}$ при движении жидкости в круглых трубах наиболее часто используют эмпирическую формулу Блазиуса:

$$\lambda_{\text{тр}}(\text{Re}) = \frac{0,316}{\text{Re}^{0,25}} \quad \text{при} \quad \text{Re} \leq 10^5 \quad (4.25)$$

и формулу Никурадзе:

$$\lambda_{\text{тр}}(\text{Re}) = 0,0032 + \frac{0,221}{\text{Re}^{0,237}} \quad \text{при} \quad 10^5 < \text{Re} < 10^8. \quad (4.26)$$

Для турбулентных режимов может быть также использована формула с учетом шероховатости стенок канала Δ :

$$\lambda_{\text{тр}}(\Delta, \text{Re}) = 0,11 \left(\frac{\Delta}{d} + \frac{0,68}{\text{Re}} \right)^{0,25}, \quad (4.27)$$

при $\Delta \rightarrow 0$

$$\lambda_{\text{тр}}(\text{Re}) \rightarrow \frac{0,316}{\text{Re}^{0,25}}.$$

В практике инженерных расчетов сопротивления при движении жидкости в каналах некруглого поперечного сечения часто используется «метод эквивалентной трубы». При этом расчет проводится по формулам для круглых труб (4.23), (4.25) – (4.27) с использованием в качестве характерного размера гидравлического диаметра канала $d_{\text{г}}$, равного

$$d_{\text{г}} = \frac{4F}{\Pi}, \quad (4.28)$$

где F – площадь поперечного сечения канала, Π – смоченный периметр.

К.Д. Воскресенский показал, что для применения «метода эквивалентной трубы» необходимо выполнение во всех точках периметра канала неравенств

$$\delta_u \ll \Delta n, \quad \delta_u \ll R, \quad (4.29)$$

где Δn – расстояние по нормали к периметру до пересечения с противоположной стороной периметра, R радиус кривизны периметра канала, δ_u – толщина пристенного слоя жидкости, в котором

сосредоточено основное изменение скорости. Для оценки толщины δ_u получено соотношение

$$\delta_u = \frac{8d_r}{\lambda_{тр}(Re) \cdot Re}. \quad (4.30)$$

«Метод эквивалентной трубы» неприменим для каналов, имеющих особенности в виде значительных угловых зон (плотные упаковки стержней и т.п.). Расчет течения жидкости в подобных каналах, а также в каналах с переменной площадью проходного сечения проводится путем решения непосредственно уравнений Рейнольдса, в которых для определения компонент тензора турбулентных напряжений используются модели турбулентности. Простейшей двухпараметрической моделью является $(k - \varepsilon)$ -модель турбулентности.

Двухпараметрическая диссипативная (k - ε)-модель турбулентности

Система уравнений для расчета турбулентных течений на основе диссипативной двухпараметрической $(k - \varepsilon)$ -модели турбулентности включает в себя уравнение неразрывности (4.31), уравнения Рейнольдса (4.32), уравнения для кинетической энергии турбулентных пульсаций k (4.33) и скорости ее диссипации ε (4.34) :

$$\frac{\partial \rho \bar{u}_j}{\partial x_j} = 0, \quad (4.31)$$

$$\frac{\partial \rho \bar{u}_i}{\partial \tau} + \frac{\partial \rho \bar{u}_i \bar{u}_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \overline{\rho u_i' u_j'} \right), \quad (4.32)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial k}{\partial \tau} + \bar{u}_j \frac{\partial k}{\partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} + \\ &+ \left[\mu_t \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} k \right] \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \rho \varepsilon, \end{aligned} \quad (4.33)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} + \bar{u}_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} + \\
+ C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} \left[\mu_t \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} k \right] \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - , & \quad (4.34) \\
- C_{\varepsilon 2} \frac{\rho \varepsilon^2}{k} + C_{\varepsilon 3} \nu \mu_t \left(\frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_k \partial x_j} \right)^2 . &
\end{aligned}$$

где $C_{\varepsilon 1}, C_{\varepsilon 2}, C_{\varepsilon 3}, \sigma_k, \sigma_\varepsilon$ – эмпирические коэффициенты, δ_{ij} – символ Кронекера.

В моделях турбулентные (рейнольдсовы) напряжения $-\overline{\rho u'_i u'_j}$ в уравнениях (4.32) связаны с полем скоростей деформаций осредненного потока посредством турбулентной вязкости μ_t соотношениями

$$-\overline{\rho u'_i u'_j} = \mu_t \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \rho \delta_{ij} k . \quad (4.35)$$

При этом используется гипотеза, что турбулентную вязкость μ_t можно представить в виде скаляра, величина которого определяется выражением:

$$\mu_t = C_\mu \rho \frac{k^2}{\varepsilon} , \quad (4.36)$$

где C_μ – эмпирический коэффициент.

Хотя в определении эмпирических замыкающих коэффициентов $C_\mu, C_{\varepsilon 1}, C_{\varepsilon 2}, C_{\varepsilon 3}, \sigma_k, \sigma_\varepsilon$, входящих в постановочные уравнения (4.28)–(4.33) различных диссипативных моделей турбулентности, существуют некоторые различия, здесь можно привести их типичный набор, полученный с введением пристеночных функций, учитывающих уменьшение масштаба турбулентности при приближении к стенке:

$$C_\mu = 0,09 \exp[-3,4/(1 + \text{Re}_t/50)^2], \quad C_{\varepsilon 1} = 1,44 ,$$

$$C_{\varepsilon 2} = 1,92(1 - 0,3 \exp(-\text{Re}_t^2)),$$

$$C_{\varepsilon 3} = 2,0, \quad \sigma_k = 1,0, \quad \sigma_\varepsilon = 1,3,$$

где $\text{Re}_t = k^2 / \nu \varepsilon$ – турбулентное число Рейнольдса.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Дифференциальные уравнения Рейнольдса. Как они получены?
2. Какой смысл имеют диагональные и недиагональные компоненты тензора турбулентных напряжений Рейнольдса?
3. Запишите универсальный профиль скорости. Какое он находит практическое применение?
4. Что такое u_* ?
5. Какие аппроксимации универсального профиля Вам известны?
6. Нарисуйте распределение скорости по радиусу трубы при ламинарном и турбулентном течении.
7. Как изменяется по радиусу трубы коэффициент турбулентной вязкости?
8. Как изменяется давление по длине трубы на участке стабилизированного течения при ламинарном режиме движения и турбулентном?
9. Как изменится перепад давления на участке трубы длиной l в области стабилизированного течения, если скорость увеличится вдвое? Режим течения а) ламинарный, б) турбулентный.
10. Нарисуйте зависимость коэффициента гидравлического сопротивления от числа Рейнольдса.
11. Как толщина вязкого подслоя зависит от числа Рейнольдса?
12. Чем определяется шероховатость трубы? Что означают понятия: гидравлически гладкая труба, абсолютно шероховатая труба?
13. При выполнении каких условий расчет сопротивления некруглого канала можно вести по формулам для круглых труб?

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

4.1. Через длинную круглую трубу прокачивается жидкость. Режим течения – ламинарный. Число Рейнольдса $Re = 50000$. Под действием возмущений поток потерял устойчивость и режим течения стал турбулентным. Определить:

а) во сколько раз возрастет мощность на прокачивание жидкости, если расход останется прежним;

б) как изменится расход жидкости через трубу, если напор ΔP остался прежним.

4.2. Как изменится расход жидкости через длинную круглую трубу, если ее длина уменьшится вдвое. Напор ΔP остался прежним. Режим течения развитый турбулентный.

4.3. Что выгоднее: прокачивать жидкость через две трубы или через одну с вдвое большим проходным сечением. Сравнить мощности необходимые для прокачивания теплоносителя.

4.4. При турбулентном движении жидкость в трубах $N_u = 0,023Re^{0,8}Pr^{0,4}$ ($\alpha \approx u^{0,8}$). Во сколько раз возросла мощность на прокачивание теплоносителя, если за счет увеличения скорости движения жидкости коэффициент теплоотдачи увеличился в два раза. Все прочие параметры остались неизменными.

4.5. Определить отношение максимальной скорости к средней по сечению при турбулентном течении жидкости в круглой трубе с гладкими стенками. Число Re равно 10^4 , 10^5 . (Указание: принять, что универсальный профиль описывает распределение скорости по сечению трубы вплоть до оси канала. Для коэффициента гидравлического сопротивления воспользоваться формулой Никурадзе в

$$\text{виде } \frac{1}{\sqrt{\lambda_{\text{тр}}}} = 2,0 \lg(Re \sqrt{\lambda_{\text{тр}}}) - 0,8 .)$$

4.6. Жидкость из резервуара (избыточное давление в котором ΔP) вытекает по двум длинным трубам с поперечными сечениями в виде круга и квадрата. Площадь поперечного сечения труб одинакова. Сравнить расходы через трубы (сопротивлением входа пренебречь).

4.7. Определить минимальное число Re, при котором расчет сопротивления при продольном обтекании пучка стержней с квадратной упаковкой с шагом $s/d = 1,2$ можно вести по формулам для круглых труб. (Указание: воспользоваться условием К.Д. Воскресенского применимости расчета по методу эквивалентной трубы)

4.8. Получить выражение для эквивалентного диаметра при обтекании потоком жидкости бесконечных треугольных и квадратных решеток стержней. Диаметр стержней d , шаг решетки s .

4.9. Определить эффективный коэффициент сопротивления Ψ системы из N параллельно включенных каналов. Каналы имеют различные площади проходного сечения F_i , гидравлические диаметры $d_{гi}$, длины l_i , коэффициенты местных сопротивлений ξ_i . Сопротивления каналов не зависят от числа Рейнольдса.

4.10. Определить эффективный коэффициент гидравлического сопротивления $\lambda_{тр}$ системы из N параллельно включенных каналов с различными площадями проходного сечения F_i и гидравлическими диаметрами $d_{гi}$. Каналы имеют одинаковую длину l , характеризуются одинаковым законом сопротивления $\lambda_{три} = 0,316 \cdot (u_i d_{гi} / \nu)^{-0,25}$, местные сопротивления отсутствуют.

4.11. Распределение скорости на входе в трубу будем считать близким к равномерному. При последующей перестройке профиля скорости импульс потока увеличивается, на что затрачивается дополнительный перепад давления $\Delta p_{уск}$. Рассчитать $\Delta p_{уск}$, используя для описания распределения скорости при турбулентном течении в трубе профиль скорости со скольжением

$$u_x(r) = u_0 \left\{ 1 + 3,48 \sqrt{\frac{\lambda_{тр}}{2}} \left(\frac{1}{2} - \frac{r^2}{r_0^2} \right) \right\}, \text{ где } u_0 - \text{средняя по сечению}$$

скорость.

4.12. Во сколько раз изменятся потери на трение при течении воды под давлением 16,0 МПа при средней расходной скорости течения 4 м/с и температуре 300 °С в трубе диаметром 1 см и длиной 10 м при шероховатости стенки $\Delta = 10$ мкм, если:

- а) давление снизится до 12 МПа;
- б) скорость прокачки увеличится в 2 раза;
- в) степень шероховатости увеличится на порядок за счет отложений?

4.13. При неизменном перепаде давления, соответствующем исходному условию предыдущей задачи, оценить, во сколько раз изменится скорость течения теплоносителя (воды под давлением), если:

- а) давление снизится с 16,0 МПа до 12,0 МПа;
- б) температура повысится с 300 °С до 330 °С?

4.14. Используя формулу Блазиуса для определения коэффициента гидравлического сопротивления $\lambda_{тр}$ при движении жидкости в гладкой цилиндрической трубе, найти градиент давления $\partial p / \partial l$, если известно, что труба имеет диаметр 150 мм, прокачивается по ней вода при $T = 293$ К с расходом 50 л/с.

4.15. Полый полуцилиндр при обтекании потоком, имеет коэффициент сопротивления $c_D = 1,3$; при обтекании в обратном направлении коэффициент сопротивления уменьшается вдвое. Определить лобовое сопротивление полуцилиндра длиной 0,5 м, радиусом 0,125 м, если он движется в воде со скоростью 15 км/ч при движении вогнутой стороной вперед и выпуклой.

4.16. По трубопроводу диаметром 150 мм перекачивается вода с расходом 60 л/с. На длине трубопровода $l = 24$ м был замерен с помощью ртутно-водяного манометра перепад давлений, который оказался равным 89 мм. Определить коэффициент сопротивления трубопровода Ψ и коэффициент гидравлического сопротивления $\lambda_{тр}$, предполагая, что отрезок трубопровода не включает никаких местных сопротивлений.

4.17. Определить потерю напора для потока воды при течении через резкое сужение от диаметра трубопровода $d_1 = 150$ мм до $d_2 = 100$ мм при расходе жидкости 1 м³/мин. Указание: коэффициент сопротивления сужения канала $\xi_{суж}$ определить по приближенной

формуле $\xi_{суж} = 0,5 \left(1 - \frac{d_2^2}{d_1^2} \right)$.

4.18. Вычислить потерю напора, вызванную внезапным расширением трубопровода от $d_1 = 200$ мм до $d_2 = 300$ мм, если по трубопроводу прокачивается $0,2$ м³/с воды при $T = 293$ К. На сколько уменьшится потеря напора, если участки трубы с размерами d_1 и d_2 соединить коническим диффузором с центральным углом раствора 60° ? Указание: потерю напора в диффузоре определить с учетом потерь на трение и расширение, т.е. $\Delta h_{\text{диф}} = \Delta h_{\text{тр}} + \Delta h_{\text{расш}}$, где

$$dh_{\text{тр}} \equiv \frac{dp}{\rho g} = \lambda_{\text{тр}} \frac{dl}{d_r} \frac{u^2}{2g}, \quad \Delta h_{\text{расш}} = \Psi_{\text{см}} \frac{(u_1 - u_2)^2}{2g}. \text{ Коэффициент смягчения удара } \Psi_{\text{см}} \text{ определить по приближенной формуле } \Psi_{\text{см}} = \sin \alpha,$$

а $\lambda_{\text{тр}} = 1/(1,8 \lg \text{Re} - 1,5)^2$.

4.19. По трубопроводу с диаметром 100 мм движется воздух со средней скоростью 100 м/с, давление в потоке при этом $6 \cdot 10^5$ Па, а температура 293 К. Определить режим течения, число Рейнольдса и число M потока в трубопроводе.

4.20. Определить отношение максимальной скорости к средней по сечению при движении жидкости в круглой трубе, если поле скоростей в поперечном сечении трубы при любом режиме течения задано уравнением $u = u_{\text{max}} [1 - (r/r_0)^n]$, где u_{max} – скорость на оси, показатель степени $n = 2, 4, 6, 8$.

4.21. Воздушный поток движется вдоль гладкой пластины со скоростью 5 м/с, давление потока при этом 760 мм рт. ст. и температура 288 К. Какой длины должна быть пластина, чтобы в конце ее пограничный слой был толщиной 3 мм, каким при этом будет режим течения в пограничном слое?

4.22. Считая, что переход течения в пограничном слое от ламинарного режима к турбулентному совершается при $\text{Re}_x = 3,2 \cdot 10^5$, определить, какая должна быть длина пластины, чтобы в конце ее было критическое число Рейнольдса, и какова при этом будет толщина пограничного слоя, если пластина обдувается потоком воздуха со скоростью 20 км/ч при стандартных условиях $T_0 = 288$ К и $p_0 = 760$ мм рт. ст.

4.23. Поток воздуха при нормальных условиях ($T_0 = 288$ К и $p_0 = 760$ мм рт. ст.) движется вдоль плоской стенки со скоростью

30 м/с. Определить толщину пограничного слоя и величину угловой скорости в пограничном слое (при $y = 0$ и $y = \delta$) на расстоянии $x = 50$ мм от начала стенки. Как изменится толщина пограничного слоя при $x = 200$ мм. Критическое число Рейнольдса принять равным $Re_{кр} \approx 5 \cdot 10^5$.

4.24. Определить подъемную силу, действующую на активную зону ректора типа ВВЭР. Размеры активной зоны: диаметр 3 м, высота 3 м. Средняя скорость теплоносителя через центральный канал 4 м/с, плотность теплоносителя 800 кг/м^3 , гидравлический диаметр каналов 14 мм, коэффициент гидравлического сопротивления 0,03, коэффициент местных сопротивлений 4,5.

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Модель пористого тела

В приближении модели пористого тела (модели сплошной среды, модели взаимопроникающих континуумов) рассмотрение проводится относительно плавно изменяющихся по объему активной зоны локально средних значений скоростей и температур теплоносителя. Средние значения любой относящейся к теплоносителю величины Ψ определяются как

$$\bar{\Psi} = \frac{1}{V_{\text{ж}}} \int_{V_{\text{ж}}} \Psi dV, \quad \langle \Psi \rangle = \frac{1}{V} \int_{V_{\text{ж}}} \Psi dV, \quad (5.1)$$

где V – представительный объем пористой структуры, $V_{\text{ж}}$ – часть объема V , занятая жидкостью. На рис. 5.1 представлена схема объема осреднения.

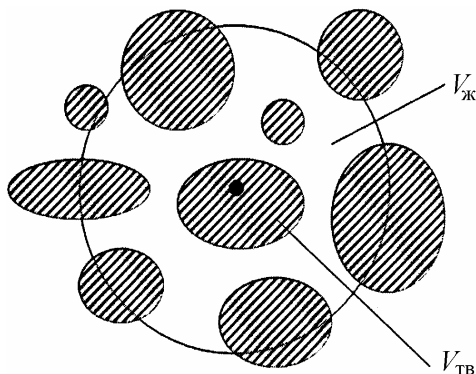


Рис. 5.1

Для хаотических пористых структур объем осреднения V должен иметь геометрические размеры, заметно превышающие характерные размеры пор и твердых компонентов структуры. Для регулярных пористых структур в качестве представительного объема

принимается объем, натянутый на векторы периодичности структуры.

Для квадратной решетки стержней – это квадрат со стороной, равной шагу стержней s (рис 5.2, а). (В направлении вдоль стержней длину вектора периодичности можно принять нулевой, и объем усреднения вырождается в площадь). Для треугольной решетки – ромб со стороной s и острым углом 60° или эквивалентный ему шестигранник (рис. 5.2, б).

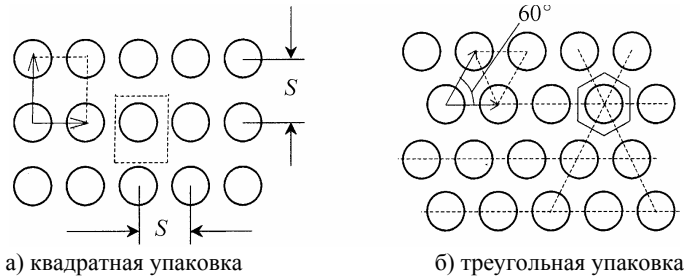


Рис. 5.2

В соответствии с (5.1) рассматриваются два типа средних значений – истинно-среднее значение $\overline{\Psi}$ и среднее по объему $\langle \Psi \rangle$, которые связаны между собой через значение пористости $\varepsilon \equiv V_{\text{ж}}/V$:

$$\overline{\Psi} = \langle \Psi \rangle / \varepsilon. \quad (5.2)$$

При описании процессов тепломассопереноса в качестве средних значений скорости, температуры, давления используются обычно истинно-средние значения, а для потоков тепла и импульса (напряжений) – средние по объему.

Средние значения величин относятся к точке, соответствующей центру объема V .

Средние значения параметров жидкости (5.1) определены во всех точках пористой структуры, безотносительно от того, находится ли точка отнесения в жидкости или в твердом теле, и изменяются непрерывно по всему объему пористой структуры. Уравнения, описывающие распределение средних значений по объему пористой структуры, получаются в результате применения к уравнениям для локальных параметров процедуры осреднения (5.1).

Уравнения движения в модели пористого тела

Уравнения для поля локальных скоростей и давлений в жидкости запишем в виде (для упрощения примем $\rho = \text{const}$)

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0, \quad (5.3)$$

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial x_j} \rho u_i u_j = \rho g_i + \frac{\partial}{\partial x_j} T_{ji}. \quad (5.4)$$

В уравнении (5.4) T_{ji} – компоненты тензора напряжений поверхностных сил, складывающиеся, если режим течения жидкости турбулентный, из молекулярных и турбулентных напряжений

$$T_{ij} = T_{ij}^{\text{лам}} + T_{ij}^{\text{тур}} = -p\delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \rho \overline{(u'_i u'_j)}^T. \quad (5.5)$$

Применим к (5.3) преобразование (5.1), а именно проинтегрируем по $V_{\text{ж}}$ и поделим на V :

$$\frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_j} + \frac{1}{V} \int_{S_{\text{жт}}} u_n dS = 0. \quad (5.6)$$

При получении (5.6) учтена основная теорема модели пористого тела, устанавливающая связь между средним значением производной и производной от среднего значения, в соответствии с которой

$$\langle \nabla \Psi \rangle = \nabla \langle \Psi \rangle + \frac{1}{V} \int_{S_{\text{жт}}} \vec{n} \cdot \Psi dS, \quad (5.7)$$

где $S_{\text{жт}}$ – площадь поверхности твердого тела внутри объема V , \vec{n} – внешний по отношению к жидкости единичный вектор нормальный к поверхности $S_{\text{жт}}$. Соотношение (5.7) справедливо для параметров Ψ характеризующих жидкость, которые могут быть скаляром, вектором или тензором.

Интеграл в (5.7) равен нулю, так как тело не пронизуемо. С учетом (5.2) вместо (5.6) имеем

$$\frac{\partial \overline{\epsilon u}_j}{\partial x_j} = 0. \quad (5.8)$$

Применение операции осреднения к уравнению (5.4) дает

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho \varepsilon \bar{u}_i}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial x_j} \langle \rho u_i u_j \rangle + \frac{1}{V} \int_{S_{\text{жт}}} \rho u_n u_i dS = \\ = \varepsilon \rho g_i + \frac{\partial}{\partial x_j} \langle T_{ji} \rangle + \frac{1}{V} \int_{S_{\text{жт}}} n_j T_{ji} dS. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Интеграл в левой части уравнения (5.9) равен нулю в силу условия прилипания жидкости на стенке, а в правой части представляет i -ю компоненту силы действующей на жидкость со стороны твердого тела в единице объема пористой структуры.

$$f_i = \frac{1}{V} \int_{S_{\text{жт}}} n_j T_{ji} dS. \quad (5.10)$$

Значение скорости в конкретной точке потока отличается от локально-среднего значения в той же точке, т.е.

$$u_i = \bar{u}_i + u_i^\vee, \quad (5.11)$$

где u^\vee – отклонение скорости или скорость отклонения.

С учетом (5.11) локально-средний по объему конвективный поток импульса равен

$$\langle \rho u_i u_j \rangle = \varepsilon \rho \bar{u}_i \bar{u}_j + \langle \rho u_i^\vee u_j^\vee \rangle, \quad (5.12)$$

где $\varepsilon \rho \bar{u}_i \bar{u}_j$ имеет смысл потока импульса за счет среднего движения, а член $\langle \rho u_i^\vee u_j^\vee \rangle$ определяет дополнительный перенос импульса скоростями отклонения.

С учетом (5.8) и (5.10) окончательно уравнения движения получаем в виде

$$\frac{\partial \rho \varepsilon \bar{u}_i}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial x_j} \varepsilon \rho \bar{u}_i \bar{u}_j = \varepsilon \rho g_i + f_i + \frac{\partial}{\partial x_j} T_{ij}^{\text{эф}}, \quad (5.13)$$

где $T_{ij}^{\text{эф}}$ – компоненты тензора эффективных напряжений, обусловленных молекулярной вязкостью, турбулентными пульсациями и переносом импульса за счет скоростей отклонения.

$$T_{ij}^{\text{эф}} = \left\langle -p \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right\rangle + \langle -\rho \overline{(u' u_j)'}^T \rangle - \langle \rho u_i^\vee u_j^\vee \rangle. \quad (5.12)$$

Для замыкания полученной системы уравнений (5.8) и (5.13), описывающей распределение средних скоростей по объему пористой структуры, необходимо определить объемную силу сопротивления f_i и тензор эффективных напряжений $T_{ij}^{\text{эф}}$, установив их связь с полем средних скоростей.

Замыкающие соотношения

Для анизотропных пористых сред, какими являются структуры типа пучков стержней или труб, сила сопротивления связана с истинно-средней скоростью жидкости соотношением (далее знак осреднения опускаем)

$$\vec{f} = -K \cdot \vec{u} \quad (5.13a)$$

или

$$f_i = -k_{ij}u_j. \quad (5.13b)$$

Предполагается, что тензор сопротивления обладает осевой симметрией. Главными осями анизотропии тензора являются направления вдоль (η) и поперек (ξ) стержней. Компоненты тензора сопротивления выражаются через главные компоненты соотношениями

$$k_{ij} = k_{\xi\xi}\delta_{ij} + (k_{\eta\eta} - k_{\xi\xi})n_i n_j, \quad (5.14)$$

где \vec{n} – единичный вектор, направленный вдоль оси стержней.

Согласно [4] главные компоненты тензора можно выразить через коэффициенты гидравлического сопротивления при чисто продольном ($\lambda_{\text{трз}}$) и чисто поперечном ($\lambda_{\text{трр}}$) обтекании стержневых сборок

$$k_{\eta\eta} = \lambda_{\text{трз}} \frac{\varepsilon \rho u}{2d_r}, \quad k_{\xi\xi} = \lambda_{\text{трр}} \frac{\varepsilon \rho u}{2d_r}. \quad (5.15)$$

Рекомендации по определению коэффициентов сопротивления $\lambda_{\text{трз}}$, $\lambda_{\text{трр}}$ приводятся в справочной литературе [5].

Согласно работе [6] тензор эффективных напряжений при обтекании потоком жидкости структур типа пучков стержней или труб можно представить в виде¹⁾

¹ Предполагается, что в потоке отсутствует внутреннее вращение и не действуют внутренние моменты сил, следовательно, тензор эффективных напряжений симметричен.

$$T_{ij}^{\text{эф}} = -\left(\varepsilon \cdot P + \frac{2}{3}\mu_1 \text{div} \vec{u} + \frac{4}{3}\mu_2 \frac{\partial u_n}{\partial n}\right) \cdot \delta_{ij} + \mu_1 \cdot \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) + \mu_2 \cdot \left[n_i n_k \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right) + n_k n_j \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)\right], \quad (5.16)$$

где \vec{n} , n_i – единичный вектор вдоль ориентации пучка стержней, его компоненты; ε – пористость структуры; P – эффективное давление в потоке жидкости:

$$P = p + (c_{\perp} \sin^2 \varphi + c_{\uparrow} \cos^2 \varphi) \rho u^2, \quad (5.17)$$

складывающееся из термодинамического давления p , турбулентного давления и давления за счет скоростей отклонения. Вклад последних в эффективное давление зависит от направления скорости (φ – угол между вектором скорости с осью пучка) и определяется коэффициентами давления при продольном c_{\uparrow} и поперечном c_{\perp} обтекании; μ_1 , μ_2 – коэффициенты, выражающиеся через «базовые» или «опорные» коэффициенты эффективной вязкости $\mu_{\uparrow\perp}$, $\mu_{\perp\uparrow}$ и $\mu_{\perp\perp}$:

$$\mu_1 = \mu_{\perp\perp} + (\mu_{\uparrow\perp} - \mu_{\perp\uparrow}) \cos^2 \varphi, \quad (5.18)$$

$$\mu_2 = \mu_{\perp\uparrow} - \mu_{\perp\perp}, \quad (5.19)$$

Коэффициент $\mu_{\uparrow\perp}$ описывает перенос продольного импульса в направлении поперек пучка, коэффициенты $\mu_{\perp\uparrow}$ и $\mu_{\perp\perp}$ перенос поперечного импульса в направлениях соответственно вдоль и поперек пучка. Схемы течений, определяющих «опорные» коэффициенты, показаны на рис. 5.3. Для условий опорных течений напряжения связаны с градиентами соответствующей скорости простейшими соотношениями вида $T_{ij} = \mu_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$, где μ_{ij} – опорный коэффициент вязкости.

Опорный коэффициент $\mu_{\perp\uparrow}$ выражается через коэффициент межканального обмена μ^{Γ} , который является одним из основных параметров поканальной методики расчета обтекания стержневых сборок

$$\frac{\mu_{\uparrow\perp}}{\mu} = \beta \mu^\Gamma d \operatorname{Re}, \quad (5.20)$$

где $\operatorname{Re} = ud_\Gamma/\nu$, μ – молекулярная динамическая вязкость, d – диаметр стержня, β – коэффициент равный, $\frac{\pi}{4}$ и $\frac{\pi}{8\sqrt{3}}$ для квадратных и треугольных упаковок стержней соответственно.

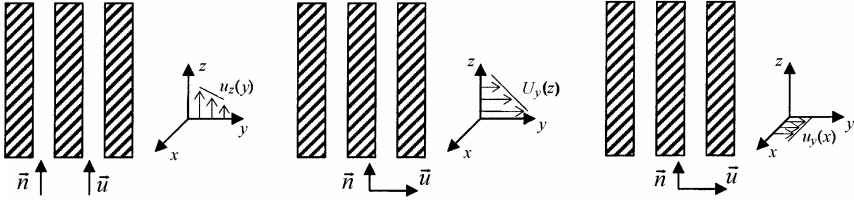


Рис. 5.3

Систематическая информация о коэффициентах $\mu_{\perp\uparrow}$ и $\mu_{\perp\perp}$ отсутствует. Можно полагать, что для них справедливы соотношения вида

$$\frac{\mu_{\perp i}}{\mu} = \Psi_i(s/d) \operatorname{Re}, \quad i = \perp, \uparrow. \quad (5.21)$$

Минимальные значения коэффициентов Ψ_i можно оценить величиной порядка 0,01.

При обтекании изотропных пористых структур, например засыпки шаров, тензор сопротивления в выражении для силы сопротивления (5.13) вырождается в скаляр, равный

$$k = \lambda_{\text{тр}} \frac{\varepsilon \rho u}{2d_\Gamma}, \quad (5.22)$$

где $\lambda_{\text{тр}}$ – коэффициент гидравлического сопротивления обтекания шаровой засыпки, а выражение для тензора напряжений принимает вид

$$T_{ij}^{\text{эф}} = -\left(\varepsilon \cdot P + \frac{2}{3} \mu_{\text{эф}} \operatorname{div} \vec{u} \right) \cdot \delta_{ij} + \mu_{\text{эф}} \cdot \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (5.23)$$

Эффективная вязкость в (5.23) $\mu_{\text{эф}} = C_\mu \mu$.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Как определяются средние величины в модели пористого тела?
2. Как связаны между собой истинно средние величины и средние по объему?
3. Что такое представительный объем?
4. Как связаны между собой среднее значение градиента какой-либо переменной с градиентом от её среднего значения в модели пористого тела?
5. Как определяется тензор сопротивления для пористых структур типа пучков стержней или труб?
6. Как определяется тензор сопротивления для пористых структур типа засыпки шаров?
7. Запишите уравнения движения жидкости в приближении модели пористого тела.
8. Что такое опорные коэффициенты эффективной вязкости?

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

5.1. Определить вид тензора сопротивления при обтекании структур типа пучков стержней или труб, если: 1) одинаковы между собой опорные коэффициенты вязкости характеризующие перенос поперечного импульса $\mu_{\perp\uparrow} = \mu_{\perp\perp} = \mu_{\perp}$; 2) одинаковы между собой все опорные коэффициенты вязкости $\mu_{\perp\uparrow} = \mu_{\perp\perp} = \mu_{\uparrow\perp} = \mu_{\text{эф}}$.

5.2. Полуограниченная изотропная пористая структура $y \geq 0$ обтекается потоком жидкости параллельно поверхности $y \geq 0$ в направлении оси x под действием постоянного градиента давления $\frac{\partial p}{\partial x} = \text{const}$. Найти установившееся распределение скорости $u_x(y)$,

если на поверхности задано условие $\left. \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{u_x}{l_c} \right) \right|_{y=0} = 0$, где l_c –

длина скольжения.

5.3. Широкий плоский канал высотой $2h$ заполнен структурой типа сборок стержней. Схема обтекания сборки в канале дана на рис. 5.4. Под действием постоянного градиента давления $\frac{\partial p}{\partial x} = \text{const}$ реализуется поперечное обтекание сборки потоком жидкости. Определить установившееся (вдали от входа) распределение скоростей по высоте канала $u_x(y)$, если на поверхностях $y = \pm h$ выполняются граничные условия: а) прилипания $u_x(y = \pm h) = 0$; б) абсолютного скольжения $\left. \frac{\partial u_x}{\partial y} \right|_{y=\pm h} = 0$.

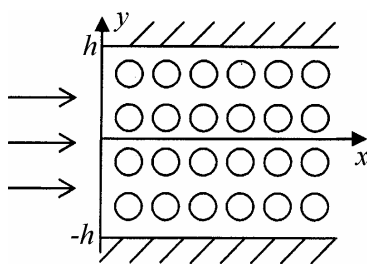


Рис. 5.4

5.4. Для условий задачи 5.3 определить отношение средних по площади поперечного сечения скоростей в каналах при выполнении на стенках граничного условия прилипания \bar{u}_1 и абсолютного скольжения \bar{u}_2 .

5.5. Получить соотношение для определения главной компоненты тензора сопротивления $k_{\xi\xi}$ (5.15) при обтекании квадратной решетки стержней как функцию истинно средней скорости и гидравлического сопротивления структуры, используя рекомендации работы [5] по расчету сопротивления при поперечном обтекании квадратных решеток стержней.

5.6. Получить соотношение для определения главной компоненты тензора сопротивления $k_{\xi\xi}$ (5.15) при обтекании треугольных решеток стержней как функцию истинно средней скорости и гидравлического сопротивления структуры, используя рекоменда-

ции работы [5] по расчету сопротивления при поперечном обтекании треугольных решеток стержней.

5.7. Плоский канал высотой h заполнен анизотропной пористой структурой, характеризующейся одним выделенным направлением \vec{n} . Структура расположена так, что угол между \vec{n} и осью канала равен φ .

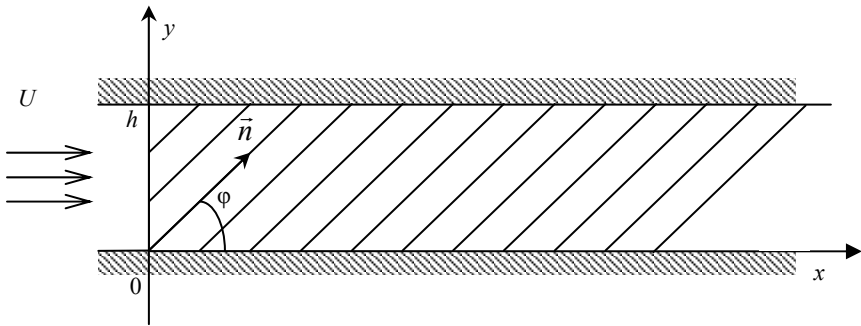


Рис. 5.5

Структура обтекается потоком жидкости с постоянным расходом на единицу ширины канала. Схема обтекания сборки в канале показана на рис. 5.5. Определить установившееся, т.е. за пределами начального участка, распределение скоростей и давлений по высоте канала. Тензор сопротивления для структуры принять в виде (5.16), (5.17). Считать, что опорные коэффициенты вязкости, характеризующие перенос поперечного импульса, одинаковы между собой $\mu_{\perp\uparrow} = \mu_{\perp\perp} = \mu_{\perp}$ и все опорные коэффициенты линейно зависят от скорости потока. Рассмотрение провести для двух вариантов граничного условия на поверхностях $y=0$ и $y=h$: а) при

условии скольжения потока $\left. \frac{\partial u_x}{\partial y} \right|_{y=0,h} = 0$, б) при условии прилипания

ния $u_x(y=0) = u_x(y=h) = 0$.

5.8. Для условий задачи 5.7 рассчитать отношение поперечного перепада давления к продольному на длине равной h как функцию

угла обтекания φ при различных граничных условиях на стенках канала.

5.9. Для условий задачи 5.7 сравните коэффициенты гидравлического сопротивления при обтекании структуры при различных граничных условиях на стенках канала в зависимости от угла обтекания φ .

5.10. В активной зоне (АЗ) высотой l , радиусом r_0 , составленной из стержневых тепловыделяющих элементов, действуют неравномерно распределенные по r источники тепловыделения $q_v(r) = \overline{q}_v \left(k_r - 2(k_r - 1) \frac{r^2}{r_0^2} \right)$. На вход в активную зону поступает

жидкость с температурой $t_{ж}$. Давление жидкости во входном и выходном коллекторах поддерживаются постоянными.

При постоянной плотности теплоносителя и отсутствии поперечного переноса тепла за счет эффективной теплопроводности структуры теплоноситель движется вдоль оси активной зоны с постоянной массовой скоростью

$$m_{z0} = \sqrt{\left(\frac{P_{вх} - P_{вых}}{l} - \rho_{ж} g \right) \frac{2\rho_{ж} d_{г}}{\lambda_{трz}}}, \text{ и}$$

температура теплоносителя изменяется в объеме АЗ по закону

$$\vartheta_0 \equiv t(r, z) - t_{ж} = \Delta t_0 \left(k_r - 2(k_r - 1) \frac{r^2}{r_0^2} \right) \frac{z}{l}.$$

Оценить возмущения, вносимые в поля скорости и температуры, обусловленные эффективной теплопроводностью структуры и действием сил плавучести при зависимости плотности от температуры по соотношению $\rho = \rho_{ж} [1 - \beta(t - t_{ж})] = \rho_{ж} - \rho_{ж} \beta \vartheta$. Остальные физические параметры жидкости полагать постоянными. Пористая структура характеризуется коэффициентами гидравлического сопротивления в направлениях вдоль и поперек стержней $\lambda_{трz}$ и $\lambda_{трr}$ соответственно. Рассмотрение провести в приближении теории малых возмущений.

ДВИЖЕНИЕ НЕВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

1.1. $p(z) = p_0 - \rho_0 g z$, z – координата от поверхности земли.

1.2. Из уравнения Эйлера для покоящейся жидкости $0 = \rho \vec{g} - \text{grad } p$ или $\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$, следует, что давление

изменяется только по координате от поверхности земли. Из уравнения состояния $p = \rho RT$ с учетом условия $T = \text{const}$ находим

$\rho = \rho_0 \frac{p}{p_0}$ и уравнение для определения $p(z)$ принимает

вид $\frac{dp}{p} = -\frac{\rho_0 g}{p_0} dz$. Решая его, получаем $p(z) = p_0 \exp\left(-\frac{\rho_0 g z}{p_0}\right)$,

$$\rho(z) = \rho_0 \exp\left(-\frac{\rho_0 g z}{p_0}\right).$$

1.3. $p_\tau = p_0 + \frac{\rho u_0^2}{2}$.

1.4. Для описания процесса используем уравнение состояния совершенного газа

$$p = \rho RT, \tag{1.4.1}$$

уравнение процесса (уравнение изоэнтропы)

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \text{const} = \frac{p_0}{\rho_0^\gamma}, \tag{1.4.2}$$

уравнение Бернулли

$$\frac{u^2}{2} + P(p) + gz = \text{const}. \tag{1.4.3}$$

Из (1.4.2) находим зависимость плотности от давления

$\rho(p) = \rho_0 (p/p_0)^{\frac{1}{\gamma}}$ и определяем вид функции давления

$$P(p) = \int \frac{dp}{\rho(p)} = \int \frac{dp}{\rho_0} \left(\frac{p_0}{p} \right)^{\frac{1}{\gamma}} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho_0} \left(\frac{p_0}{p} \right)^{\frac{1}{\gamma}} + C$$

или

$$P(p) = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} + C. \quad (1.4.4)$$

Приравнивая значения трехчлена Бернулли в набегающем потоке и в точке торможения потока, где скорость равна нулю, получим с учетом (1.4.4)

$$\frac{u_0^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_0}{\rho_0} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_T}{\rho_T}. \quad (1.4.5)$$

Так как $p/\rho = RT$ (1.4.1), то из (1.4.5) можно сразу получить выражение для температуры торможения

$$T_T = T_0 + \frac{\gamma-1}{2} \frac{u_0^2}{\gamma R}, \text{ или } \frac{T_T}{T_0} = 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2, \quad (1.4.6)$$

где $M \equiv u_0/a_0$ – число Маха, $a_0 \equiv \sqrt{\gamma RT_0}$ – скорость звука в газе при температуре T_0 . С помощью (1.4.1) и (1.4.2) не трудно определить остальные параметры торможения:

$$\frac{\rho_T}{\rho_0} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}, \quad \frac{p_T}{p_0} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}.$$

1.5. $u = \sqrt{2\Delta p/\rho}.$

1.6. $\Delta p = \frac{\rho u^2}{2} \left[\left(\frac{S_0}{S_{\min}} \right)^2 - 1 \right], \quad u = \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho \left((S_0/S_{\min})^2 - 1 \right)}}.$

1.7. $\Delta p = \frac{\rho u^2}{2} \left(\frac{S_0}{S_{\min}} \right)^2, \quad u = \frac{S_{\min}}{S_0} \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}}.$

1.8. Результирующая объемных сил в соответствии с определением равна произведению массы тела на ускорение свободного падения $F_V = \rho_T l^3 g$ и направлена вдоль \vec{g} , т.е. вниз. В покоящейся жидкости поверхностные силы действуют по нормали к поверхно-

сти, направлены внутрь тела и равны давлению в жидкости. Поэтому силы, действующие на противоположные точки на боковых гранях куба, равны между собой, противоположно направлены и их сумма равна нулю. При этом равна нулю равнодействующая поверхностных сил, действующих на все боковые грани куба. Давление на нижней и верхней гранях куба различно. Результирующая сил, действующих на нижнюю и верхнюю грани, а следовательно, и всех поверхностных сил, будет равна $F_S = (p(h+l) - p(h))l^2$. Давление на нижней грани больше чем на верхней, т.е. F_S направлена вверх. Разница давлений жидкости равна $p(h+l) - p(h) = \rho_{ж}gl$ и, следовательно, $F_S = \rho_{ж}gl^3$. Суммарная сила, действующая на куб, $F = (\rho_{т} - \rho_{ж})gl^3$ и направлена вниз.

1.9. Результирующая объемных сил в соответствии с определением равна $F_V = \rho_{т}Vg$ и направлена вдоль \vec{g} , т.е. вниз.

Результирующую поверхностных сил, действующих на тело произвольной формы, которое погружено в покоящуюся жидкость, найдем, следуя работе [2]. Сила, действующая на элементарную площадку $d\sigma$, выбранную на поверхности Σ тела (рис. 01), определяется выражением

$$d\vec{F}_S = -p(z) \cdot \vec{n} \cdot d\sigma, \quad (1.9.1)$$

где \vec{n} – направление внешней нормали к площадке, $p(z)$ – давление в жидкости на уровне площадки.

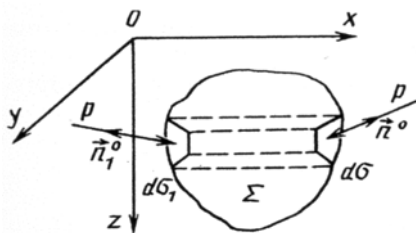


Рис. 01

Суммарная сила может быть найдена интегрированием (1.9.1) по поверхности тела. Проекции этой силы на оси координат равны

$$F_{Sx} = -\iint_{\Sigma} p(z)n_x d\sigma, \quad F_{Sy} = -\iint_{\Sigma} p(z)n_y d\sigma, \\ F_{Sz} = -\iint_{\Sigma} p(z)n_z d\sigma. \quad (1.9.2)$$

В соотношениях (1.9.2) n_x , n_y , n_z – проекции вектора \vec{n} на оси координат.

Для определения проекции силы \vec{F}_S на горизонтальную ось Ox поступим следующим образом: через контур площадки $d\sigma$ проведем цилиндрическую поверхность с образующими параллельными оси Ox (рис. 0.2).

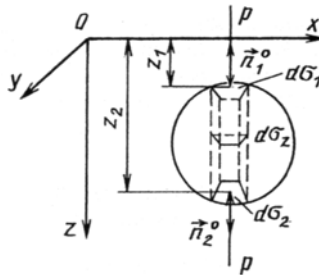


Рис. 0.2

На противоположной стороне поверхности Σ этот цилиндр вырежет некоторую площадку $d\sigma'$ с нормалью \vec{n}' . Произведения $n_x d\sigma$ и $n'_x d\sigma'$, представляющие проекции площадок на плоскость перпендикулярную оси Ox , одинаковы по абсолютному значению и противоположны по знаку. Так как давление для обеих площадок одинаково, то при вычислении F_{Sx} по (1.9.2) сумма сил действующих на площадки даст нулевое значение. Соответственно, будет равен нулю и весь интеграл, т.е. $F_{Sx} = 0$. Аналогично можно показать, что $F_{Sy} = 0$. Таким образом, горизонтальная составляющая сил давления, действующих на тело, равна нулю.

Определим теперь вертикальную составляющую силы F_{Sz} . С этой целью через контур площадки $d\sigma$ проведем цилиндрическую поверхность с образующими параллельными оси Oz . На противо-

положительной стороне поверхности Σ этот цилиндр вырежет некоторую площадку $d\sigma'$ с нормалью \vec{n}' . Проекции на ось Oz сил, действующих на площадки $d\sigma$ и $d\sigma'$, будут равны

$$dF_{Sz} = -p(z_1) \cdot n_z \cdot d\sigma, \quad dF'_{Sz} = -p(z_2) \cdot n'_z \cdot d\sigma', \quad (1.9.3)$$

где z_1 и z_2 – координаты площадок.

Имея в виду, что $n_z d\sigma = -d\sigma_z$, а $n'_z d\sigma' = d\sigma_z$, где $d\sigma_z$ – площадь поперечного сечения проведенного цилиндра, и что давление в жидкости изменяется по закону $p(z) = p(z=0) + \rho_{ж} g z$, для сумм сил, действующих на площадки, найдем

$$dF_{Sz} + dF'_{Sz} = -\rho g(z_2 - z_1) d\sigma_z \equiv -\rho_{ж} g dV, \quad (1.9.4)$$

где $dV \equiv (z_2 - z_1) d\sigma_z$ – объем элементарного цилиндра.

Интегрирование (1.9.4) дает

$$F_{Sz} = -\rho_{ж} g V. \quad (1.9.5)$$

С учетом (1.9.1) и (1.9.5) полная сила, действующая на тело,

$$F_z = g(\rho_T - \rho_{ж}) V. \quad (1.9.6)$$

Таким образом, на тело произвольной формы, погруженное в жидкость, кроме силы тяжести, действует выталкивающая сила, равная весу вытесненной телом жидкости. Это положение было установлено Архимедом.

1.10. В выбранной системе координат (рис. ОЗ) давление в жидкости изменяется по закону

$$p(z) = p_0 + g\rho_{ж}(h - z).$$

Сила давления жидкости, действующая на полоску шириной $r_0 d\theta$ на высоте $z = r_0 \cos \theta$ от центра шара, имеет две компоненты

$$dF_x = p(r_0 \cos \theta) \cdot dS_x, \quad (1.10.1)$$

$$dF_z = -p(r_0 \cos \theta) \cdot dS_z,$$

где dS_x и dS_z проекции площади полоски $dS = \pi r_0 \sin \theta r_0 d\theta$ на направления x и z :

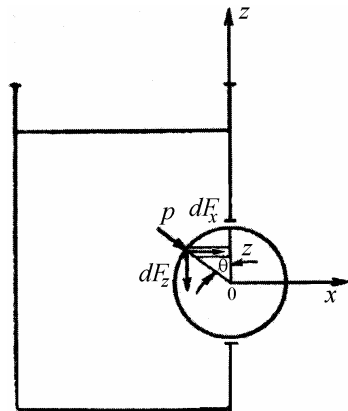


Рис. ОЗ

$$dS_x = 2r_0^2 \sin^2 \theta d\theta, \\ dS_z = \pi r_0^2 \sin \theta \cos \theta d\theta. \quad (1.10.2)$$

Результирующие значения сил находятся интегрированием по поверхности полусферы. Постоянная составляющая в $p(z)$, равная внешнему давлению p_0 , при вычислениях может быть опущена, так как она не дает вклада в вертикальную составляющую силы, а вклад в горизонтальную составляющую компенсируется силой от внешнего давления, действующей на правую половину шара. Тогда

$$F_x = g\rho_{\text{ж}} \int_0^\pi (h - r_0 \cos \theta) 2r_0^2 \sin^2 \theta d\theta = \pi r_0^2 g\rho_{\text{ж}} h, \quad (1.10.3)$$

$$F_z = -gm_T - g\rho_{\text{ж}} \int_0^\pi (h - r_0 \cos \theta) \pi r_0^2 \sin \theta \cos \theta d\theta = \\ = -gm_T + \frac{2}{3} \pi r_0^3 g\rho_{\text{ж}}. \quad (1.10.4)$$

При вычислении вертикальной составляющей силы учтено, что на шар действует объемная сила, равная $-gm_T$.

Шар вращаться не будет, так как поверхностные силы, действующие на любой элемент поверхности шара, направлены вдоль радиуса к центру шара. Результирующая объемных сил также приложена к центру шара.

1.11. В случае потери закрепления шар будет вытолкнут в горизонтальном направлении при условии равенства нулю горизонтальной составляющей результирующей силы, т.е. согласно (1.10.4)

при массе шара $m_T = \frac{2}{3} \pi r_0^3 \rho_{\text{ж}}$.

1.12. В сферической системе координат уравнения движения невязкой жидкости (1.1) и (1.2) имеют вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (\rho r^2 u_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\rho u_\varphi) + \\ + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho u_\theta \sin \theta) = 0, \quad (1.12.1)$$

$$\frac{\partial u_r}{\partial \tau} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\varphi^2 + u_\theta^2}{r} = P_{Vr} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}, \quad (1.12.2)$$

$$\frac{\partial u_\varphi}{\partial \tau} + u_r \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} - \frac{u_\varphi \cdot u_r}{r} + \frac{u_\varphi u_\theta \operatorname{ctg} \theta}{r} = P_{V\varphi} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \varphi}, \quad (1.12.3)$$

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial \tau} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r \cdot u_\theta}{r} - \frac{u_\varphi^2 \operatorname{ctg} \theta}{r} = P_{V\theta} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \theta}. \quad (1.12.4)$$

В соответствии с условиями задачи принимаем: $\rho = \text{const}$, $\vec{P}_V = 0$, $u_\varphi = u_\theta = 0$ и $u_r = u_r(r, \tau)$. При этом система уравнений движения упрощается

$$\frac{\partial}{\partial r}(r^2 u_r) = 0, \quad (1.12.5)$$

$$\frac{\partial u_r}{\partial \tau} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}. \quad (1.12.6)$$

Граничными условиями для компоненты скорости u_r и давления p будут

$$u_r(r = R) = \frac{dR(\tau)}{d\tau} \equiv \dot{R}, \quad (1.12.7)$$

$$p(r = \infty) = p_0. \quad (1.12.8)$$

Из уравнения неразрывности, которое упростилось к виду (1.12.5), находим $u_r(r, \tau) = \frac{C(\tau)}{r^2}$. Используя для определения $C(\tau)$ граничное условие (1.12.7), окончательно для распределения скорости имеем

$$u_r(r, \tau) = \frac{R^2(\tau)\dot{R}(\tau)}{r^2}. \quad (1.12.9)$$

Подставляя выражение для поля скорости (1.12.9) в (1.12.6) получим уравнение для определения давления, после интегрирования которого по радиусу в пределах от текущего r до бесконечности с учетом граничного условия (1.12.8) для распределения давления найдем

$$\frac{p(r, \tau) - p_0}{\rho} = \frac{\ddot{R}R^2 + 2R\dot{R}^2}{r} - \frac{\dot{R}^2 R^4}{2r^4}. \quad (1.12.10)$$

Из (1.12.10) следует, что давление на поверхности расширяющейся сферы равно

$$p(r = R) = p_0 + \rho(R\ddot{R} + 1,5\dot{R}^2). \quad (1.12.11)$$

1.13. Система уравнений движения жидкости, окружающей газовую полость, идентична рассмотренной в задаче 1.12. Справедлив и результат, полученный в 1.12, о зависимости давления на поверхности сферы (т.е. давления в газовой полости) от радиуса полости $R(\tau)$ (см. (1.12.11)). Обозначив через $p_\Gamma(\tau)$ давление в газовой полости и $u(\tau)$ – скорость движения поверхности сферы ($u(\tau) = \dot{R}(\tau)$), соотношение (1.12.11) перепишем в виде

$$R \frac{du}{d\tau} + \frac{3}{2}u^2 = \frac{1}{\rho}(p_\Gamma(\tau) - p_0). \quad (1.13.1)$$

В соответствии с законом адиабатического расширения ($pV^\gamma = \text{const}$) давление в полости представим как функцию текущего радиуса полости $R(\tau)$

$$p_\Gamma(\tau) = p_n \left(\frac{r_0}{R}\right)^{3\gamma}. \quad (1.13.2)$$

Подставляя выражение для $p_\Gamma(\tau)$ в (1.13.1) и переходя от времени к новой независимой переменной $R(\tau)$ $\left(\frac{d}{d\tau} = u \frac{d}{dR}\right)$, получим уравнение для скорости на поверхности полости в зависимости от радиуса полости

$$\frac{d}{dR}(R^3 u^2) = \frac{2R^2}{\rho} \left[p_n \left(\frac{r_0}{R} \right)^{3\gamma} - p_0 \right], \quad (1.13.3)$$

которое просто интегрируется

$$R^3 u^2 = \frac{2R^3}{3\rho} \left[-p_n \left(\frac{r_0}{R} \right)^{3\gamma} \frac{1}{\gamma-1} - p_0 \right] + C. \quad (1.13.4)$$

Константу интегрирования найдем, полагая, что в начальный момент $R = r_0$, а скорость $u = 0$. Тогда

$$u^2 = \frac{2p_n}{3\rho(\gamma-1)} \left(\frac{r_0}{R} \right)^3 \left(1 - \left(\frac{r_0}{R} \right)^{3(\gamma-1)} \right) + \frac{2p_0}{3\rho} \left(\left(\frac{r_0}{R} \right)^3 - 1 \right). \quad (1.13.5)$$

Полученное соотношение позволяет проанализировать поведение полости во времени. В начальный момент времени давление в полости больше давления жидкости p_0 , и полость будет расширяться. Первое слагаемое в (1.13.5) положительное и с ростом $R(\tau)$ стремится к нулю, второе слагаемое отрицательно и при увеличении $R(\tau)$ стремится к постоянному значению. Так как их сумма должна все время оставаться положительной ($u^2 \geq 0$), то размер полости $R(\tau)$ не может увеличиваться неограниченно. Существует предельный размер полости R_{\max} , при котором рост полости прекращается, т.е. u^2 становится равным нулю. R_{\max} является корнем (1.13.5) при $u^2 = 0$ и определяется трансцендентным уравнением

$$\left(\frac{R_{\max}}{r_0} \right)^3 = 1 + \frac{p_n}{(\gamma-1)p_0} \left(1 - \left(\frac{r_0}{R_{\max}} \right)^{3(\gamma-1)} \right). \quad (1.13.6)$$

В целом согласно (1.13.5) процесс представляется следующим образом. При расширении полости скорость ее роста $u(\tau)$ увеличивается, достигает максимального значения и затем уменьшается. Рост полости прекращается, когда ее размер достигнет R_{\max} . К этому моменту за счет сил инерции жидкости давление в полости станет меньше p_0 , и после остановки полость начнет уменьшаться,

при этом $u(\tau) \leq 0$. Согласно (1.13.5) сжатие полости будет продолжаться до тех пор, пока радиус полости не достигнет начального значения r_0 , так как $u^2(R=r_0)=0$. Затем полость снова начнет расширяться. Ввиду отсутствия каких либо диссипативных процессов периодическое расширение и сжатие полости будет происходить неограниченно долго.

Максимальный размер, до которого расширяется полость, определяется параметром $\frac{p_n}{(\gamma-1)p_0}$, и при его больших значениях, как следует из (1.13.6), равен

$$R_{\max} \approx r_0 \left(\frac{p_n}{(\gamma-1)p_0} \right)^{1/3}. \quad (1.13.7)$$

1.14. Уравнение для потенциала поля скорости $\varphi(r, \theta)$ в безвихревом потоке невязкой жидкости, обтекающем цилиндр, имеет вид

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = 0. \quad (1.14.1)$$

Его необходимо решить при условии непроницаемости поверхности цилиндра

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right|_{r=r_0} = 0 \quad (1.14.2)$$

и равенства скорости вдали от цилиндра скорости набегающего потока \vec{u}_0

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right|_{r \rightarrow \infty} &= u_0 \cos \theta, \\ \left. \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right|_{r \rightarrow \infty} &= -u_0 \sin \theta. \end{aligned} \quad (1.14.3)$$

Решением задачи (1.14.1) – (1.13.3) является

$$\varphi(r, \theta) = u_0 \left(r + \frac{r_0^2}{r} \right) \cos \theta. \quad (1.14.4)$$

Компоненты скорости при этом равны

$$u_r(r, \theta) = u_0 \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right) \cos \theta, \quad u_\theta(r, \theta) = -u_0 \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2}\right) \sin \theta. \quad (1.14.5)$$

Распределения давления в потоке определяется из уравнения Бернулли

$$\frac{p(r, \theta)}{\rho} + \frac{u_r^2(r, \theta) + u_\theta^2(r, \theta)}{2} = \frac{p_0}{\rho} + \frac{u_0^2}{2}. \quad (1.14.6)$$

Результирующая сила, действующая на цилиндр, равна нулю.

1.15. Разлагая вектор скорости на компоненты, и используя определение потенциала скорости, получим

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = u_0 \cdot n_x, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = u_0 n_y, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = u_0 n_z, \quad (1.15.1)$$

где $n_x = \cos \alpha$, $n_y = \cos \beta$, $n_z = \cos \gamma$ – проекции единичного вектора \vec{n} на оси координат, α , β , γ – направляющие углы вектора \vec{n} .

Из первого соотношения в (1.15.1) $\varphi = u_0 x n_x + C_1(y, z)$, из второго следует, что $C_1(y, z) = u_0 y n_y + C_2(z)$, из третьего находим $C_2(z) = u_0 z n_z + C_3$. Окончательно

$$\varphi(x, y, z) = u_0(x n_x + y n_y + z n_z + C). \quad (1.15.2)$$

1.16. $\varphi(x, y) = u_0(x n_x + y n_y + C_1)$, $\Psi(x, y) = u_0(y n_x - x n_y + C_2)$.

1.17. При истечении жидкости из точки в окружающее пространство линии тока имеют вид лучей исходящих из этой точки, как показано на рис. О4.

При мощности источника Q радиальная компонента скорости во всех точках поверхности сферы произвольного радиуса с центром в источнике равна

$$u_r = \frac{Q}{4\pi r^2}.$$

Так как

$$u_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r},$$

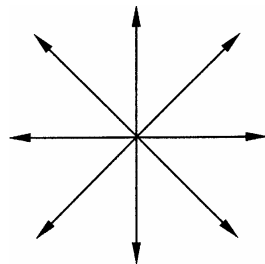


Рис. О4

то для определения φ получаем уравнение $\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{Q}{4\pi r^2}$, после интегрирования которого находим

$$\varphi(x, y, z) = -\frac{Q}{4\pi r}. \quad (1.17.1)$$

Потенциал стока той же мощности отличается от (1.17.1) знаком. В (1.17.1) r – расстояние от источника (стока) до текущей точки, равное $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ при расположении источника в начале координат и $r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$ при расположении в произвольной точке (x_0, y_0, z_0) .

1.18. Поле скоростей линейного источника, действующего в начале координат

$$u_r = \frac{V}{2\pi r}, \quad u_\theta = 0. \quad (1.18.1)$$

В соответствии с определением потенциала и функции тока

$$u_r = \frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial\Psi}{\partial\theta}, \quad u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = -\frac{\partial\Psi}{\partial r}. \quad (1.18.2)$$

Из (1.18.1) и (1.18.2) находим

$$\varphi(r, \theta) = \frac{V}{2\pi} \ln r, \quad \Psi(r, \theta) = \frac{V}{2\pi} \theta. \quad (1.18.3)$$

В декартовой системе координат

$$\varphi(x, y) = \frac{V}{2\pi} \ln \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \Psi(x, y) = \frac{V}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}. \quad (1.18.4)$$

Для источника действующего в точке \vec{r}_0

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= \frac{V}{2\pi} \ln \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}, \\ \Psi(x, y) &= \frac{V}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{y-y_0}{x-x_0}. \end{aligned} \quad (1.18.5)$$

1.19. Поле скоростей плоского потенциального вихря с циркуляцией Γ

$$u_r = 0, \quad u_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r}. \quad (1.19.1)$$

В соответствии с определением потенциала и функции тока

$$u_r = \frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial\theta}, \quad u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = -\frac{\partial\Psi}{\partial r}. \quad (1.19.2)$$

Из (1.19.1) и (1.19.2) находим

$$\varphi(r, \theta) = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta, \quad \Psi(r, \theta) = -\frac{V}{2\pi} \ln r. \quad (1.19.3)$$

В декартовой системе координат

$$\varphi(x, y) = \frac{\Gamma}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, \quad \Psi(x, y) = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (1.19.4)$$

Для источника действующего в точке \vec{r}_0

$$\varphi(x, y) = \frac{\Gamma}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{y - y_0}{x - x_0},$$

$$\Psi(x, y) = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}. \quad (1.19.5)$$

1.20. $\varphi = ax, \quad \Psi = ay, \quad u_x = a, \quad u_y = 0.$

1.21. Представив в выражении для комплексного потенциала $\Phi = u_\infty(z + r_0^2/z)$ комплексную переменную в виде $z = r \cdot \exp(i\theta) \equiv r(\cos\theta + i\sin\theta)$, и имея в виду, что $\Phi = \varphi + i\Psi$, для потенциала и функции тока в цилиндрических координатах найдем

$$\varphi = u_\infty(r + r_0^2/r) \cos\theta, \quad \Psi = u_\infty(r - r_0^2/r) \sin\theta. \quad (1.21.1)$$

Компоненты скорости при этом равны

$$u_r(r, \theta) = u_\infty \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right) \cos\theta, \quad u_\theta(r, \theta) = -u_\infty \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2}\right) \sin\theta. \quad (1.21.2)$$

Из (1.21.1) и (1.21.2) следует, что цилиндрическая поверхность $r = r_0$ непроницаема для потока жидкости ($\Psi(r = r_0) = 0$, $u_r(r = r_0) = 0$), скорость обтекания поверхности цилиндра $u_\theta(r = r_0) = -2u_\infty \sin\theta$. Вдали от цилиндра (при $r \rightarrow \infty$) скорость везде постоянна и равна u_∞ . Таким образом, мы имеем случай обтекания цилиндра радиусом r_0 потоком со скоростью u_∞ .

1.22. Представляя в выражении $\Phi(z) = cz^n$ комплексную переменную $z = x + iy$ в виде $z = r \cdot \exp(i\theta)$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\theta = \arctg \frac{y}{x}$, и имея в виду, что $\Phi = \varphi + i\Psi$, для потенциала скорости и функции тока в цилиндрической системе координат получим

$$\varphi = cr^n \cos(n\theta), \quad \Psi = cr^n \sin(n\theta). \quad (1.22.1)$$

Компоненты скорости при этом равны

$$u_r = cnr^{n-1} \cos(n\theta), \quad u_\theta = -cnr^{n-1} \sin(n\theta). \quad (1.22.2)$$

Согласно (1.22.1) линия тока, соответствующая значению $\Psi = 0$, совпадает с направлениями осей $\theta = 0$ и $\theta = \pm\pi/n$ (рис. O5).

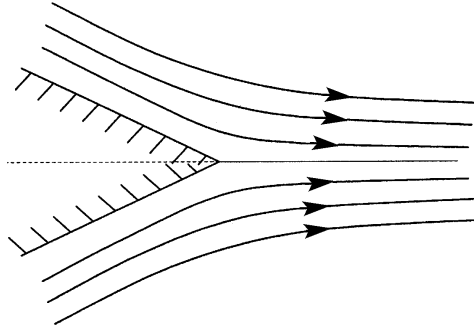


Рис. O5

Вдоль этих линий тока нормальная к ним компонента скорости u_θ равна нулю, а радиальная изменяется по закону $u_r = cnr^{n-1}$ вдоль радиуса $\theta = 0$ и $u_r = -cnr^{n-1}$ вдоль радиусов $\theta = \pm\pi/n$ (1.22.2). Направление движения жидкости показано на рис. O5. Линии тока, соответствующие значениям $\Psi \geq 0$ лежат выше луча $\theta = 0$, $\Psi \leq 0$ ниже.

Если изменить знак в выражении для комплексного потенциала, то направление движения вдоль линий тока изменится на противоположное, т.е. комплексный потенциал $\Phi(z) = -cz^n$ описывает обтекание потоком жидкости клина с углом раствора $\theta_k = 2\pi(1-1/n)$, так как $n \geq 0$ скорость в лобовой точке клина ($r = 0$) равна нулю.

Вдоль поверхности клина скорость изменяется как $u_r = cnr^{n-1}$. Случай $n = 2$ соответствует набеганию потока жидкости на плоскую стенку (рис. 06).

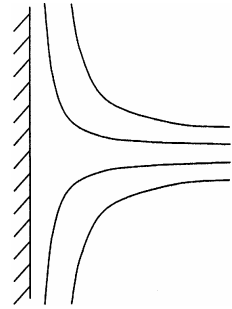


Рис. 06

ЛАМИНАРНОЕ ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ В ТРУБАХ И КАНАЛАХ

2.1. Начало сферической системы координат поместим в центр шара. Примем, что обтекание шара происходит в направлении оси $\vartheta = 0$. Тогда поле скоростей будет осесимметричным, отличны от нуля две компонент скорости $u_r(r, \vartheta)$ и $u_\vartheta(r, \vartheta)$. Уравнения движения в сферической системе координат (2.15) – (2.18) для стационарного вязкостного течения принимают вид

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{2u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{u_\vartheta \operatorname{ctg} \vartheta}{r} = 0, \quad (2.1.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r} = & \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{2u_r}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \vartheta^2} + \\ & + \frac{\operatorname{ctg} \vartheta}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \vartheta} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\vartheta}{\partial \vartheta} - \frac{2 \operatorname{ctg} \vartheta}{r^2} u_\vartheta, \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu r} \frac{\partial p}{\partial \vartheta} = & \frac{\partial^2 u_\vartheta}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u_\vartheta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\vartheta}{\partial \vartheta^2} + \\ & + \frac{\operatorname{ctg} \vartheta}{r^2} \frac{\partial u_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \vartheta} - \frac{u_\vartheta}{r^2 \sin^2 \vartheta}, \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

Граничными условиями будут условия прилипания на поверхности шара

$$u_r(r = r_0, \vartheta) = 0, \quad u_\vartheta(r = r_0, \vartheta) = 0, \quad (2.1.4)$$

и условия не возмущенности потока вдали от шара, т.е. для произвольного угла ϑ , должны быть

$$u_r(r \rightarrow \infty, \vartheta) = u_0 \cos \vartheta, \quad u_\vartheta(r \rightarrow \infty, \vartheta) = -u_0 \sin \vartheta, \\ p(r \rightarrow \infty, \vartheta) = p_\infty. \quad (2.1.5)$$

Из соображений размерности и вида граничных условий (2.1.5) решение для поля скоростей и давления будем искать в виде

$$\frac{u_r}{u_0} = f(R) \cos \vartheta, \quad \frac{u_\vartheta}{u_0} = -g(R) \sin \vartheta, \\ (p - p_\infty) \frac{r_0}{\mu u_0} = h(R) \cos \vartheta, \quad (2.1.6)$$

где R – безразмерный радиус, $R = r/r_0$.

Подставляя (2.1.6) в уравнения (2.1.1) – (2.1.3) получим систему обыкновенных уравнений для определения функций f , g , h

$$f' + \frac{2}{R}(f - g) = 0, \quad (2.1.7)$$

$$h' = f'' + \frac{2}{R}f' - \frac{4}{R^2}(f - g), \quad (2.1.8)$$

$$\frac{h}{R} = g'' + \frac{2}{R}g' + \frac{2}{R^2}(f - g). \quad (2.1.9)$$

Исключая из системы (2.1.7) – (2.1.9) функции $g(R)$ и $h(R)$, для определения $f(R)$ получим уравнение типа Эйлера

$$R^3 f''' + 8R^2 f'' + 8Rf' - 8f = 0, \quad (2.1.10)$$

решение которого можно искать в виде

$$f = R^n. \quad (2.1.11)$$

Подставляя (2.1.11) в (2.1.10), получим уравнение для определения показателей степени n , из которого находим $n_1 = 0$, $n_2 = 2$, $n_3 = -1$, $n_4 = -3$, то есть общее решение уравнения (2.1.10) имеет вид

$$f(R) = C_1 + C_2 R^2 + C_3 R^{-1} + C_4 R^{-3}. \quad (2.1.12)$$

Функции $g(R)$ и $h(R)$ явно выражаются через $f(R)$. Константы интегрирования определяются из условий на поверхности и вдали от шара (2.1.4) и (2.1.5). Для поля скоростей и давления окончательно имеем

$$u_r(r, \vartheta) = u_0 \left(1 - \frac{3}{2} \frac{r_0}{r} + \frac{1}{2} \frac{r_0^3}{r^3} \right) \cos \vartheta, \quad (2.1.13)$$

$$u_\vartheta(r, \vartheta) = -u_0 \left(1 - \frac{3}{4} \frac{r_0}{r} - \frac{1}{4} \frac{r_0^3}{r^3} \right) \sin \vartheta, \quad (2.1.14)$$

$$p(r, \vartheta) - p_\infty = -\frac{3}{2} \mu u_0 \frac{r_0}{r^2} \cos \vartheta. \quad (2.1.15)$$

Результирующая сила, действующая на шар со стороны потока жидкости, определяется интегралом

$$F_{\text{лс}} = \int_0^\pi \left(-p(r=r_0, \vartheta) \cos \vartheta - \mu \frac{\partial u_\vartheta}{\partial r} \Big|_{r=r_0} \sin \vartheta \right) 2\pi r_0^2 \sin \vartheta \, d\vartheta. \quad (2.1.16)$$

Вычисления дают

$$F_{\text{лс}} = 6\pi\mu u_0 r_0, \quad (2.1.17)$$

а коэффициент лобового сопротивления (2.28)

$$C_D = \frac{24}{\text{Re}}, \quad \text{Re} = \frac{u_0 d}{\nu}. \quad (2.1.18)$$

2.2. $u = \frac{(\rho_{\text{ж}} - \rho_{\text{в}})gd^2}{18\mu_{\text{в}}}$ при вязкостном режиме оседания и

$u = \sqrt{\left(\frac{\rho_{\text{ж}}}{\rho_{\text{в}}} - 1 \right) \frac{4gd}{3C_D(\text{Re})}}$ при $\text{Re} \geq 4,0$. Коэффициент сопротивления

$C_D(\text{Re})$ представлен на рис. 2.2. Скорости каплей 3 мм/с, 27 мм/с, 0,3 м/с, 1,64 м/с. Скорости градин 8,66 м/с, 12,2 м/с.

2.3. 1,23 м/с.

2.4. 0,86 Па·с.

2.5. Вычисления провести в соответствии с данными решателя.

2.6. 0,325 м/с

2.7. $\delta = 32$ мм.

2.8. $F_{\text{тр}} = 0,84$ Н.

2.9. $\delta_*(x) = \int_0^\delta \left(1 - \frac{u_x(x, y)}{u_0} \right) dy$. При $\frac{u_x(x, y)}{u_0} = 2Y - 2Y^3 + Y^4$,

$$Y = \frac{y}{\delta(x)}, \quad \delta(x) = 5,83 \sqrt{\frac{\nu x}{u_0}} \quad \text{найдем} \quad \delta_*(x) = 1,75 \sqrt{\frac{\nu x}{u_0}}.$$

2.10. Из-за уменьшения скорости в пограничном слое на пластинах скорость в потоке между пластинами за пределами пограничных слоев возрастает и в соответствии с уравнением Бернулли (за пределами пограничного слоя поток можно считать невязким) давление уменьшается, чем обусловлен прижимающий эффект между пластинами.

Изменение параметров внешнего потока, обусловленное влиянием пограничного слоя, можно приближенно учесть, рассматривая обтекание потоком невязкой жидкости тела с дополнительной «накладкой» на поверхность с толщиной, равной толщине вытеснения пограничного слоя $\delta_*(x)$.

Уточненная скорость на границе пограничных слоев внутри канала будет

$$u_0(x) = u_\infty \frac{h_0}{h_0 - 2\delta_*(x)}, \quad (2.10.1)$$

а давление вдоль канала изменяется по закону

$$p(x) = p_\infty + \frac{\rho u_\infty^2}{2} - \frac{\rho u_0^2(x)}{2}. \quad (2.10.2)$$

На внешних сторонах пластин пограничный слой на параметры обтекания ввиду неограниченности потока не влияет. В частности давление там остается постоянным и равным давлению в набегающем потоке p_∞ .

Прижимающее усилие определяется соотношением

$$F = \int_0^l (p_\infty - p(x)) b \, dx = \frac{\rho u_\infty^2}{2} b \int_0^l \left(\frac{u_0^2(x)}{u_\infty^2} - 1 \right) dx. \quad (2.10.3)$$

Толщина вытеснения определена в задаче 2.9 как

$$\delta_*(x) = 1,75 \sqrt{\frac{\nu x}{u_0}}. \quad (2.10.4)$$

Для заданных условий обтекания максимальное значение толщины вытеснения составляет $\delta_*(l) = 1,1$ мм. Это мало по сравнению

с расстоянием между пластинами и вычисление интеграла можно упростить

$$\frac{u_0^2(x)}{u_\infty^2} - 1 = \left(1 - \frac{2\delta_*(x)}{h_0}\right)^{-2} - 1 \approx \frac{4\delta_*(x)}{h_0} = \frac{4\delta_*(l)}{h_0} \left(\frac{x}{l}\right)^{0,5},$$

$$F = \frac{\rho u_\infty^2}{2} b l \frac{4\delta_*(l)}{h_0} \int_0^1 X^{0,5} dX = 11,7 H. \quad (2.10.5)$$

2.11. 9,56 Н.

2.12. Скорость обтекания трубок $u_0 = \frac{100 \cdot 1,2}{3,6} = 33,3$ м/с. Число

Рейнольдса $Re = \frac{u_0 d}{\nu} = \frac{33,3 \cdot 0,012}{15 \cdot 10^{-6}} = 2,66 \cdot 10^4$. Согласно рис. 2.2

коэффициент сопротивления $C_D = 1,2$ и сила сопротивления

$F_{лс} = C_D \frac{\rho u_0^2}{2} d \cdot l = 1,2 \frac{1,2 \cdot 33,3^2}{2} 0,012 \cdot 13 = 124,6$ Н. Работа двигателя

против дополнительной силы трения в единицу времени $M = F_{лс} \cdot u_0 = 4148$ Вт. Этой работе соответствует дополнительный

расход топлива $G = \frac{M}{\eta \cdot r} = \frac{4148}{0,3 \cdot 44 \cdot 10^6} = 3,14 \cdot 10^{-4}$ кг/с, что в пере-

счете на 100 км пробега (скорость 100 км/ч) дает 1,13 кг или 1,55 л бензина.

2.13. Полагаем $\delta(x) = 5,83 \sqrt{\frac{\nu x}{u_0(x)}}$, где x – расстояние от лобовой

точки цилиндра вдоль периметра, $u_0(x)$ – скорость на границе пограничного слоя, относительно которой принимаем, что она совпадает со скоростью на поверхности цилиндра при обтекании его потоком невязкой жидкости. Тогда $u_0(x) = 2u_\infty \sin \varphi \equiv 2u_\infty \sin(x/r_0)$. В лобовой точке при $x = 0$ скорость $u_0(x) = 0$. Раскрывая неопределенность отношения для толщины пограничного слоя в лобовой точке, находим

$$\delta(x=0) = 5,83 \sqrt{\nu r_0 / 2u_\infty} \quad \text{или} \quad \delta/r_0 = 5,83 / \sqrt{Re_d}.$$

Вычисления при $d \equiv 2r_0 = 10$ мм и $Re_d = 10^4$ дают $\delta = 0,29$ мм.

2.14. Скорость изменяется линейно $u_z = u_0 \frac{y}{h}$, касательное напряжение постоянно $P_{yz} = \mu u_0/h$.

$$\mathbf{2.15.} \quad u_z(y) = u_0 \frac{y}{h} - \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial z} y(h-y), \quad P_{yz} = \mu \frac{u_0}{h} - \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial z} (h-2y).$$

2.16. Течение плоскостное, безнапорное в пространстве $y \geq 0$. Отлична от нуля одна компонента скорости $u_z(y, \tau)$. Уравнение

для $u_z(y, \tau)$: $\frac{\partial u_z}{\partial \tau} = \nu \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2}$. Начальное и граничное условия

$$u_z(y, \tau = 0) = 0, \quad (2.16.2)$$

$$u_z(y = 0, \tau > 0) = u_0. \quad (2.16.3)$$

Из уравнения (2.16.1) и условий однозначности (2.16.2) и (2.16.3) следует, что скорость u_z является функцией четырех размерных величин

$$u_z = f(y, \tau, \nu, u_0). \quad (2.16.4)$$

Приведение (2.16.4) к безразмерному виду (см. раздел 3 задачника) показывает, что безразмерная скорость является функцией одного безразмерного комплекса $u_z/u_0 = f_1(y^2/\nu\tau)$, и задача (2.16.1) может быть сведена к уравнению в полных производных.

Введем новые переменные

$$U = \frac{u_z}{u_0}, \quad \xi = \frac{y}{2\sqrt{\nu\tau}}. \quad (2.16.5)$$

В новых переменных уравнение (2.16.1) принимает вид

$$U'' + 2\xi U' = 0 \quad (2.16.6)$$

с граничными условиями вместо (2.16.2) и (2.16.3)

$$U(\xi = 0) = 1, \quad U(\xi \rightarrow \infty) = 0. \quad (2.16.7)$$

Уравнение (2.16.6) просто интегрируется

$$U(\xi) = C_1 \left(\int_0^\xi e^{-\xi^2} d\xi + C_2 \right)$$

и после определения с помощью (2.16.7) констант интегрирования окончательно получим

$$\frac{u_z(y, \tau)}{u_0} = 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{y}{2\sqrt{\nu \tau}}\right), \quad (2.16.8)$$

где через $\operatorname{erf}(x)$ обозначена функция $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-x^2} dx$.

2.17. Течение плоскостное, безнапорное в пространстве $y \geq 0$. Отлична от нуля одна компонента скорости $u_z(y, \tau)$. Уравнение для $u_z(y, \tau)$:

$$\frac{\partial u_z}{\partial \tau} = \nu \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2}. \quad (2.17.1)$$

Граничное условие

$$u_z(y = 0, \tau) = u_0 \cos \omega \tau. \quad (2.17.2)$$

Независящее от начального условия движение в полупространстве установится через некоторое время после начала процесса и будет периодическим с частотой ω во всех точках пространства. Амплитуда колебаний и сдвиг по фазе относительно движения поверхности $y = 0$ будут зависеть от расстояния от поверхности.

Решение задачи удобно искать в виде реальной части комплексного выражения $U(y, \tau) = f(y) \cdot e^{i\omega\tau}$.

Решением является

$$u_z(y, \tau) = u_0 \exp\left(-\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} y\right) \cdot \cos\left(\omega\tau - \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} y\right). \quad (2.17.3)$$

2.18. Течение в направлении вдоль оси цилиндра отсутствует $u_z = 0$, различные сечения вдоль z неотличимы ($\frac{\partial}{\partial z} = 0$), течение осесимметричное ($\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0$). При этих условиях из уравнения неразрывности, записанного в цилиндрической системе координат (2.11) следует, что $u_r = 0$.

Уравнения движения (2.12), (2.13) упрощаются к виду

$$-\frac{u_\varphi^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}, \quad (2.18.1)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r^2} = 0. \quad (2.18.2)$$

$$u_\varphi(r = r_0) = \omega r_0,$$

$$p(r \rightarrow \infty) = p_0.$$

Найденное распределение скоростей и давлений:

$$u_\varphi(r) = u_0 \frac{r}{r_0} \quad \text{при } r \leq r_0, \quad (2.18.3)$$

$$u_\varphi(r) = u_0 \frac{r_0}{r} \quad \text{при } r \geq r_0, \quad (2.18.4)$$

$$p(r) = p_0 - \rho u_0^2 + \rho \frac{u_0^2}{2} \frac{r^2}{r_0^2} \quad \text{при } r \leq r_0, \quad (2.18.5)$$

$$p(r) = p_0 - \frac{\rho u_0^2}{2} \frac{r_0^2}{r^2} \quad \text{при } r \geq r_0. \quad (2.18.6)$$

В (2.18.3) – (2.18.6) обозначено $u_0 = \omega r_0$.

Если до начала вращения цилиндра жидкость покоилась, то для реализации профиля (2.18.4) жидкости необходимо сообщить энергию (на единицу длины по оси z) равную

$$Q = \int_{r_0}^{\infty} \frac{\rho u_\varphi^2(r)}{2} 2\pi r dr = \int_{r_0}^{\infty} \frac{\rho u_0^2}{2} \frac{r_0^2}{r^2} 2\pi r dr =$$

$$\rho u_0^2 \pi r_0^2 \cdot \ln r \Big|_{r_0}^{\infty} = \infty. \quad (2.18.7)$$

Равенство энергии бесконечности означает, что профиль (2.18.4) не достижим. В нестационарном процессе после начала вращения цилиндра профиль скорости во внешней части при $r \geq r_0$ с течением времени будет приближаться к (2.18.4), но никогда его не достигнет.

2.19. Распределение скорости $u_{\varphi}(r) = \frac{\omega r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \left(\frac{r_2^2}{r} - r \right)$, напря-

жение трения на внутреннем цилиндре

$$P_{r\varphi} = \mu r \frac{d}{dr} \left(\frac{u_{\varphi}}{r} \right) \Big|_{r=r_1} = -2\mu \frac{\omega r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}.$$

Момент сил приложенный к внутреннему цилиндру

$$M = -P_{r\varphi}(r_1) \cdot 2\pi r_1^2 l = 4\mu l \pi \frac{\omega r_2^2 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}.$$

2.20. Слоистое безнапорное течение $u_z(r)$, $u_r = u_{\varphi} = 0$, $\frac{\partial p}{\partial z} = 0$.

Распределение скорости:

$$u_z(r) = u_0 \frac{\ln(r/r_1)}{\ln(r_2/r_1)} \text{ при движении внешнего цилиндра,}$$

$$u_z(r) = u_0 \frac{\ln(r_2/r)}{\ln(r_2/r_1)} \text{ при движении внутреннего цилиндра.}$$

Усилия, прилагаемые к цилиндрам, в обоих случаях одинаковы.

2.21. $u_z(y) = 1,5u_0 \left(1 - \frac{y^2}{h^2} \right)$, $u_0 = \frac{\Delta p h^2}{3\mu l}$, $\lambda_{\text{тр}} = \frac{96}{\text{Re}}$.

2.22. Схема кольцевой трубы показана на рис.О7.

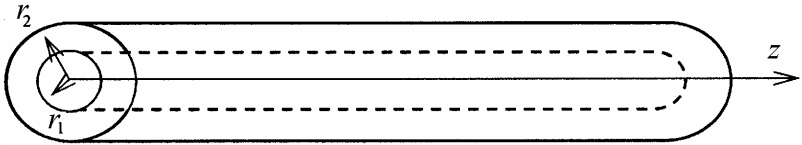


Рис. О7

Уравнение (2.31) в цилиндрической систем координат имеет вид:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du_z}{dr} \right) = -\frac{\Delta p}{\mu l}. \quad (2.22.1)$$

Его решением при граничных условиях $u_z(r = r_1) = 0$, $u_z(r = r_2) = 0$ будет

$$u_z(r) = \frac{\Delta p}{4\mu l} \left[(r_2^2 - r_1^2) \frac{\ln(r/r_1)}{\ln(r_2/r_1)} - r^2 + r_1^2 \right]. \quad (2.22.2)$$

Средняя скорость чрез канал определяется соотношением

$$u_0 = \frac{1}{r_2^2 - r_1^2} \int_{r_1}^{r_2} u_z(r) 2r dr. \quad (2.22.3)$$

Выполняя интегрирование, для средней скорости находим

$$u_0 = \frac{\Delta p r_1^2}{8\mu l} \left(1 + \theta^2 - \frac{\theta^2 - 1}{\ln \theta} \right), \quad (2.22.4)$$

где через θ обозначен параметр кривизны кольцевого слоя $\theta = r_2/r_1$. Соотношение (2.22.4) определяет связь перепада давления в канале Δp со средней скоростью u_0 . Его можно переписать в виде формулы Дарси (2.32) и определить коэффициент гидравлического сопротивления кольцевой трубы

$$\lambda_{\text{тр}} = \frac{A(\theta)}{\text{Re}}, \quad A(\theta) = \frac{64 \cdot (\theta - 1)^2}{\left(1 + \theta^2 - \frac{\theta^2 - 1}{\ln \theta} \right)}. \quad (2.22.5)$$

2.23. Поперечное сечение трубы и принятая система координат показаны на рис. О8.

Решение для поля скорости будем искать в виде

$$u_z(x, y) = B\omega(x, y), \quad (2.23.1)$$

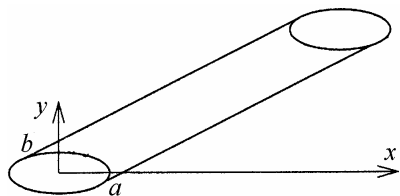


Рис. О8

где функция $\omega(x, y) = 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ положительна внутри эллипса с полуосями a и b и принимает нулевое значение на поверхности эллипса, то есть (2.23.1) удовлетворяет граничным условиям для поля скорости.

Подставляя (2.23.1) в уравнение (2.31), описывающее установившееся распределение скоростей при ламинарном течении жидкости в прямом канале произвольного поперечного сечения, находим, что оно удовлетворяется при значении коэффициента B , равном

$$B = \frac{\Delta p}{2\mu l} \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}. \quad (2.23.2)$$

Таким образом, (2.23.1) при коэффициенте B , равном (2.23.2), описывает искомое распределение скорости в эллиптическом канале, так как удовлетворяет и уравнению и граничным условиям.

Средняя скорость в канале определяется интегралом

$$u_0 = \frac{4}{\pi ab} \int_0^a dx \int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} B \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) dy \equiv \frac{8B}{3\pi} \int_0^1 (1-X^2)^{3/2} dX. \quad (2.23.3)$$

Вычисления дают

$$u_0 = \frac{B}{2} \equiv \frac{\Delta p}{4\mu l} \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}. \quad (2.23.4)$$

Из сравнения (2.23.1) и (2.23.4), следует в частности, что при движении в эллиптической трубе максимальная скорость вдвое превышает среднюю $u_{\max} = 2u_0$ при любом соотношении между длинами полуосей эллипса $a/b = n$.

Соотношение (2.23.4) определяет связь перепада давления в канале Δp со средней скоростью u_0 . Его можно переписать в виде формулы Дарси (2.32) и определить коэффициент гидравлического сопротивления эллиптической трубы.

$$\lambda_{\text{тр}} = \frac{A(n)}{\text{Re}}, \quad A(n) = 64 \frac{2(a^2 + b^2)}{(a+b)^2} \equiv 64 \frac{2(1+n^2)}{(1+n)^2}. \quad (2.23.5)$$

При определении (2.23.5) учтено, что гидравлический диаметр эллиптической трубы равен $d_r = \frac{4ab}{a+b}$, а число Рейнольдса

$$\text{Re} = \frac{u_0 d_r}{\nu}.$$

2.24. Поперечное сечение треугольной трубы со стороной a и принятая система координат показаны на рис. О9.

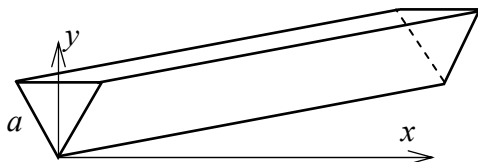


Рис. О9

Распределение скоростей по сечению трубы описывается уравнением (2.31)

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} = -\frac{\Delta p}{\mu l}, \quad u_z|_{\Gamma} = 0. \quad (2.24.1)$$

Из уравнений прямых, образующих сечение канала $y = a\sqrt{3}/2$, $y = \pm\sqrt{3}x$, построим функцию, принимающую нулевые значения на границах канала:

$$\omega(x, y) = (y - \sqrt{3}x)(y + \sqrt{3}x)(a\sqrt{3}/2 - y) \quad (2.24.2)$$

и решение для поля скорости ищем в виде,

$$u_z(x, y) = B\omega(x, y). \quad (2.24.5)$$

Подставляя (2.24.5) в (2.24.1), находим, что уравнение (2.24.1) удовлетворяется при

$$B = \frac{\Delta p}{\mu l} \frac{1}{2a\sqrt{3}}. \quad (2.24.6)$$

Максимум скорости достигается в центре треугольника ($x = 0$, $y = a/\sqrt{3}$) и равен

$$u_{\max} = \frac{1}{36} \frac{\Delta p a^2}{\mu l}. \quad (2.24.7)$$

Средняя скорость определяется интегралом

$$u_0 = \frac{8}{a^2\sqrt{3}} \int_0^{a/2} dx \int_{x\sqrt{3}}^{a\sqrt{3}/2} u_z(x, y) dy$$

и равна

$$u_0 = \frac{1}{80} \frac{\Delta p a^2}{\mu l}. \quad (2.24.8)$$

Отношение максимальной скорости к средней $u_{\max}/u_0 = 20/9 = 2,22$.

Соотношение (2.24.8) определяет связь перепада давления в канале Δp со средней скоростью u_0 . Его можно переписать в виде формулы Дарси (2.32) и определить коэффициент гидравлического сопротивления треугольной трубы.

$$\lambda_{\text{тр}} = \frac{A_{\Delta}}{\text{Re}}, \quad A_{\Delta} = \frac{160}{3} = 53,3. \quad (2.24.9)$$

При определении (2.24.9) учтено, что гидравлический диаметр треугольной трубы равен $d_{\text{т}} = \frac{a}{\sqrt{3}}$, а число Рейнольдса определяется

$$\text{Re} = \frac{u_0 d_{\text{т}}}{\nu}.$$

2.25. Так как течение жидкости в пленке установившееся, то поперечное движение отсутствует $u_x = u_y = 0$, продольная скорость изменяется только по толщине пленки $u_z(y)$, давление постоянно по толщине пленки ($\frac{\partial p}{\partial y} = 0$), при этом продольный градиент давления в пленке жидкости совпадает с градиентом в окружающей среде $\frac{dp}{dz} = \rho_e g$. Уравнение (2.10) для продольной компоненты скорости упрощается к виду

$$0 = g(\rho - \rho_b) + \mu \frac{d^2 u_z}{dy^2}. \quad (2.25.1)$$

На стенке выполняется условие прилипания

$$u_z(y=0) = 0. \quad (2.25.2)$$

Пренебрежение трением пленки о воздух означает, что на поверхности пленки

$$\left. \frac{du_z}{dy} \right|_{y=\delta} = 0. \quad (2.25.3)$$

Интегрируя (2.25.1) при граничных условиях (2.25.2) и (2.25.3) находим распределение скорости по толщине пленки

$$u_z(y) = \frac{g(\rho - \rho_B)}{\mu} y \left(\delta - \frac{y}{2} \right). \quad (2.25.4)$$

Расход жидкости на единицу ширины пленки

$$V_l = \int_0^{\delta} u_z(y) dy = \frac{g(\rho - \rho_B)}{3\mu} \delta^3,$$

откуда толщина пленки

$$\delta = \sqrt[3]{\frac{3V_l \mu}{g(\rho - \rho_B)}} \quad (2.25.5)$$

и средняя скорость

$$\bar{u}_z = \frac{V_l}{\delta} = \sqrt[3]{\frac{g(\rho - \rho_B)V_l^2}{3\mu}}. \quad (2.25.6)$$

2.26. Предполагаем, что режим течения в пленке ламинарный, а толщина пленки достаточно мала по сравнению с диаметром трубки, чтобы пленку можно считать плоской. Воспользуемся результатами, полученными при решении задачи 2.25.

Расход на единицу ширины стекающей пленки

$$V_l = \frac{V}{\pi d} = \frac{22,6 \cdot 10^{-3}}{3,6 \cdot 10^3 \cdot \pi \cdot 20 \cdot 10^{-3}} = 1,00 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}.$$

Толщина пленки

$$\delta = \sqrt[3]{\frac{3V_l \nu}{g(1 - \rho_B/\rho)}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 10^{-4} \cdot 1,003 \cdot 10^{-6}}{9,8(1 - 1,205/998,2)}} = 0,31 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

($\nu = 1,003 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$, $\rho = 998,2 \text{ кг}/\text{м}^3$, $\rho_B = 1,205 \text{ кг}/\text{м}^3$).

Средняя скорость

$$\bar{u} = \frac{V_l}{\delta} = \frac{10^{-4}}{0,31 \cdot 10^{-3}} = 0,32 \text{ м}/\text{с}.$$

Кривизна пленки мала ($\delta/d = 0,015$), пленку можно считать плоской. Вычислим число Рейнольдса:

$$\text{Re} = \frac{\bar{u} \cdot 4\delta}{\nu} = \frac{0,32 \cdot 4 \cdot 0,31 \cdot 10^{-3}}{1,003 \cdot 10^{-6}} = 396.$$

Режим течения ламинарный.

2.27. $F = 18149 \text{ Н}$.

2.28. $\nu = \frac{gd^4 \Delta\tau}{32 \ln 2 \cdot D^2 l} = 4,74 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$.

2.29. Движение жидкости в зазоре между пластинами в предположении вязкостного режима течения и осевой симметрии поля скоростей имеют вид

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru_r) + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0, \quad (2.29.1)$$

$$0 = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} - \frac{u_r}{r^2}, \quad (2.29.2)$$

$$0 = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}. \quad (2.29.3)$$

Тонкость слоя жидкости позволяет принять дополнительные упрощения. Из уравнения неразрывности следует, что осевая компонента скорости мала по сравнению с радиальной (их отношение пропорционально h/r). При этом из (2.29.2) и (2.29.3) получаем

$$\left| \frac{\partial p}{\partial z} \right| \ll \left| \frac{\partial p}{\partial r} \right|, \text{ то есть изменением давления поперек слоя можно пренебречь и считать } p = p(r, \tau).$$

Тонкость слоя позволяет также полагать, что изменения скорости поперек слоя более существенны, чем вдоль, при оценке сил трения в (2.29.2). Окончательно вместо (2.29.2) и (2.29.3) имеем

$$0 = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2}, \quad (2.29.4)$$

$$0 = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z}. \quad (2.29.5)$$

Интегрируя уравнение неразрывности (2.29.1) по ширине слоя, находим

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \bar{u}_r^h h) + u_z(z=h) = 0, \quad (2.29.6)$$

где обозначено $\bar{u}_r^h \equiv \frac{1}{h} \int_0^h u_r(z, r, \tau) dz$.

Осевая скорость на поверхности слоя равна скорости перемещения пластины $u_z(z=h) = \frac{dh}{d\tau}$, которая не зависит от радиуса. Интегрируя (2.29.6) по радиусу, находим распределение средней по ширине слоя радиальной компоненты скорости

$$\bar{u}_r^h = -\frac{1}{h} \frac{dh}{d\tau} \frac{r}{2}. \quad (2.29.7)$$

Обратимся к уравнению (2.29.4). Интегрирование его с учетом условия прилипания на поверхностях слоя дает распределение радиальной компоненты скорости по толщине слоя

$$u_r = -\frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial r} z(h-z) \quad (2.29.8)$$

и позволяет, интегрируя (2.29.8), связать среднюю по ширине слоя скорость с градиентом давления

$$\bar{u}_r^h = -\frac{1}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial r} h^2. \quad (2.29.9)$$

Исключая из (2.29.7) и (2.29.9) среднюю скорость \bar{u}_r^h , получим уравнение для давления

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{6\mu}{h^3} \frac{dh}{d\tau} r, \quad (2.29.10)$$

интегрирование которого при условии, что жидкость из слоя вытесняется в среду с давлением p_0 , дает распределение давления в виде

$$p = p_0 - \frac{3\mu}{h^3} \frac{dh}{d\tau} (r_0^2 - r^2). \quad (2.29.11)$$

Прижимающая сила F , действующая на пластину, компенсируется суммарной силой избыточного давления на пластину со стороны жидкости в слое (массой пластины пренебрегаем)

$$F = \int_0^{r_0} (p - p_0) 2\pi r dr = -\frac{3\pi\mu}{2h^3} \frac{dh}{d\tau} r_0^4. \quad (2.29.12)$$

Соотношение (2.29.12) представляет собою уравнение для определения $h(\tau)$. Его решение

$$\frac{h(\tau)}{h_0} = \left(1 + \frac{4}{3\pi\mu} \frac{F h_0^2}{r_0^4} \tau\right)^{-0.5}. \quad (2.29.13)$$

2.30. Течение считаем вязкостным, кроме того, ввиду тонкости пленки жидкости используем приближения теории пограничного слоя, в частности, пренебрегаем изменением давления поперек пленки, то есть полагаем, что градиент давления в пленке равен градиенту в окружающей среде (воздухе) $\frac{\partial p}{\partial x} = \rho_b g$. Итоговая система уравнений, описывающая движение пленки, включает уравнение неразрывности и уравнение для продольной компоненты скорости

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0, \quad (2.30.1)$$

$$(\rho - \rho_b)g + \mu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} = 0. \quad (2.30.2)$$

Решение уравнения (2.30.2) при условии прилипания на стенке $u_x(y=0) = 0$ и условии отсутствия трения пленки о воздух

$\left. \frac{\partial u_x}{\partial y} \right|_{y=\delta} = 0$ дает распределение скорости в пленке

$$u_x(y) = \frac{(\rho - \rho_b)g}{\mu} y \left(\delta - \frac{y}{2} \right). \quad (2.30.3)$$

Расход жидкости в пленке

$$V = \int_0^{\delta} u_x(y) dy = \frac{(\rho - \rho_B)g}{3\mu} \delta^3. \quad (2.30.4)$$

Интегрирование уравнения неразрывности по координате y , в пределах от нуля до δ , дает уравнение баланса массы для пленки

$$\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial \delta}{\partial \tau} = 0. \quad (2.30.5)$$

При записи (2.30.5) учтено, что $u_y(y = \delta) \equiv \frac{\partial \delta}{\partial \tau}$.

Подставляя в (2.30.5) выражение для расхода жидкости в пленке (2.30.4), получим основное уравнение, описывающее поведение пленки:

$$\frac{(\rho - \rho_B)g}{\mu} \delta^2 \frac{\partial \delta}{\partial x} + \frac{\partial \delta}{\partial \tau} = 0. \quad (2.30.6)$$

Для решения (2.30.6) необходимо задать начальное условие: распределение толщины пленки по длине при $\tau = 0$ и граничное условие при $x = 0$. В качестве последнего примем

$$\delta(x = 0, \tau) = 0. \quad (2.30.7)$$

Для упрощения будем искать автомодельное по времени решение уравнения (2.30.6), которое устанавливается через некоторое время после начала процесса и не зависит от начального условия. При этом распределение толщины пленки по длине остается подобным самому себе при изменении времени и имеет вид

$$\delta(x, \tau) = f(x) \cdot T(\tau). \quad (2.30.8)$$

Подставляя (2.30.8) в (2.30.6), приходим к уравнениям

$$\frac{(\rho - \rho_B)g}{\mu} f \frac{df}{dx} = -\frac{1}{T^3} \frac{dT}{d\tau} = m. \quad (2.30.9)$$

Первый член в (2.30.9) – функция только x , второй – функция τ , поэтому они порознь равны константе m , имеющей, как не трудно установить, положительное значение.

Решение уравнения для $f(x)$ (2.30.9) с учетом граничного условия (2.30.7) дает

$$f(x) = \sqrt{\frac{2\mu m x}{(\rho - \rho_b)g}}. \quad (2.30.10)$$

Уравнение для $T(\tau)$ (2.30.9) приводит к

$$T(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2m\tau + c}}. \quad (2.30.11)$$

Для толщины пленки окончательно получаем

$$\delta(x, \tau) = \sqrt{\frac{\mu x}{(\rho - \rho_b)g(\tau + c_1)}}, \quad (2.30.12)$$

где $c_1 = c/2m$ – константа интегрирования.

Согласно (2.30.12) толщина пленки нарастает по мере удаления от передней кромки пропорционально \sqrt{x} и при больших временах утончается с течением времени пропорционально $1/\sqrt{\tau}$.

Константу интегрирования c_1 можно определить, если после наступления автомодельного режима известно значение толщины пленки δ_0 в момент τ_0 на расстоянии x_0 от передней кромки. В этом случае

$$c_1 = \frac{\mu x_0}{(\rho - \rho_b)g\delta_0^2} - \tau_0. \quad (2.30.13)$$

Если в момент τ_0 известна масса жидкости M_0 в пленке длиной

$$l \left(M(\tau) = \int_0^l \delta(x, \tau) dx \right), \text{ то}$$

$$c_1 = \left(\frac{2l}{3M_0} \right)^2 \frac{\mu l}{(\rho - \rho_b)g} - \tau_0. \quad (2.30.14)$$

2.31. При заданных условиях для нестационарного поля скорости $u_\varphi(r, \tau)$ имеем задачу (см. (2.13))

$$\frac{1}{v} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r^2}, \quad (2.31.1)$$

$$u_{\varphi}(r, \tau = 0) = 0, \quad (2.31.2)$$

$$u_{\varphi}(r = r_0, \tau) = u_0 \equiv \omega r_0. \quad (2.31.3)$$

При $\tau \rightarrow \infty$ согласно 2.18 в жидкости устанавливается профиль скорости

$$u_{\varphi}(r) = u_0 \frac{r}{r_0}. \quad (2.31.4)$$

Будем искать решение в виде

$$u_{\varphi}(r, \tau) = u_0 \frac{r}{r_0} - u_{\varphi 1}(r, \tau). \quad (2.31.5)$$

При этом для $u_{\varphi 1}(r, \tau)$ получаем задачу с однородным граничным условием

$$\frac{1}{v} \frac{\partial u_{\varphi 1}}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u_{\varphi 1}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_{\varphi 1}}{\partial r} - \frac{u_{\varphi 1}}{r^2}, \quad (2.31.6)$$

$$u_{\varphi 1}(r, \tau = 0) = u_0 \frac{r}{r_0}, \quad (2.31.7)$$

$$u_{\varphi 1}(r = r_0, \tau) = 0, \quad (2.31.8)$$

которая решается методом разделения переменных.

Окончательно получаем

$$u_{\varphi}(r, \tau) = u_0 \frac{r}{r_0} \sum_{k=1}^{\infty} C_k \exp\left(-\mu_k^2 \frac{v \tau}{r_0^2}\right) J_1\left(\mu_k \frac{r}{r_0}\right), \quad (2.31.9)$$

$$C_k = u_0 \frac{\int_0^1 J_1(\mu_k \xi) \xi^2 d\xi}{\int_0^1 J_1^2(\mu_k \xi) \xi d\xi}, \quad \mu_k \text{ — корни уравнения } J_1(\mu) = 0.$$

МЕТОДЫ РАЗМЕРНОСТЕЙ И ПОДОБИЯ

3.1. $\Delta p = f\left(\frac{\rho u_0 d}{\mu}\right) \frac{l}{d} \rho u_0^2$. Полученное соотношение представляет частный случай формулы Дарси (2.32).

3.2. $F = f\left(\frac{\rho u_0 d}{\mu}\right) \rho u_0^2 d^2$. Смотри (2.28).

3.3. При вязкостном режиме обтекания $F = f(u_0, d, \mu)$. Размерности величин $[u_0] = \text{м/с}$, $[d] = \text{м}$, $[\mu] = \text{кг}/(\text{м}\cdot\text{с})$, $[F] = \text{кг}\cdot\text{м}/\text{с}^2$. В соответствии с π -теоремой $n = 4$, $k = 3$ и после приведения к безразмерному виду будем иметь одну безразмерную величину, а значит искомая величина с точностью до константы может быть представлена в виде произведения остальных величин в каких-то степенях $F = C u_0^\alpha d^\beta \mu^\gamma$. Приравниваем размерности в последнем соотношении $\frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}^2} = \left(\frac{\text{м}}{\text{с}}\right)^\alpha \text{м}^\beta \left(\frac{\text{кг}}{\text{м}\cdot\text{с}}\right)^\gamma$ и, требуя, чтобы показатели степени при м, кг и с слева и справа были одинаковы, получим систему уравнений для определения α , β , γ :

$$1 = \alpha + \beta - \gamma, \quad 1 = \gamma, \quad -2 = -\alpha - \gamma,$$

решая которую, находим $\alpha = \beta = \gamma = 1$. Таким образом, $F = C u_0 d \mu$. В соответствии с точным решением (см. задачу 2.17) $C = 3\pi$.

3.4. $M = \rho r_0^5 \omega^2 f\left(\frac{\rho \omega r_0^2}{\mu}\right)$.

3.5. $\frac{u}{\sqrt{\tau_{cm}/\rho}} = F\left(\frac{y\sqrt{\tau_{cm}/\rho}}{\nu}\right)$.

3.6. Согласно условиям задачи реализуется плоское движение жидкости. Приняв, что движение осуществляется в направлении оси x , для поля скорости $u_x(y, \tau)$ получим следующую задачу:

$$\frac{\partial u_x}{\partial \tau} = \nu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}, \quad (3.6.1)$$

$$u_x(y, \tau = 0) = 0, \quad (3.6.2)$$

$$u_x(y = 0, \tau > 0) = u_0. \quad (3.6.3)$$

Из (3.6.1) – (3.6.3) следует, что скорость является функцией следующих размерных величин

$$u_x = f(y, \tau, \nu, u_0). \quad (3.6.4)$$

Приведение (3.6.4) к безразмерному виду дает

$$\frac{u_x}{u_0} = F\left(\frac{y^2}{\nu \tau}\right). \quad (3.6.5)$$

Безразмерная скорость зависит от одного комплекса, включающего координату и время. Переход к переменным, соответствующим (3.6.5), переведёт задачу (3.6.1) – (3.6.3) к уравнению в полных производных.

3.7. Согласно условиям задачи реализуется плоское движение жидкости. Приняв, что движение осуществляется в направлении оси x , для поля скорости $u_x(y, \tau)$ получим следующую задачу:

$$\frac{\partial u_x}{\partial \tau} = \nu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}, \quad (3.7.1)$$

$$u_x(y, \tau = 0) = 0, \quad (3.7.2)$$

$$u_x(y = 0, \tau > 0) = u_0, \quad (3.7.3)$$

$$u_x(y = h, \tau > 0) = 0. \quad (3.7.4)$$

Из (3.7.1) – (3.7.4) следует, что скорость является функцией следующих размерных величин

$$u_x = f(y, \tau, \nu, h, u_0). \quad (3.7.5)$$

Приведение (3.6.4) к безразмерному виду дает

$$\frac{u_x}{u_0} = F\left(\frac{y^2}{\nu \tau}, \frac{y}{h}\right). \quad (3.7.6)$$

Безразмерная скорость зависит от двух аргументов. Привести задачу (3.7.1) – (3.7.4) к уравнениям в полных производных нельзя.

$$\mathbf{3.8.} \quad T^2 = \frac{\sqrt{s}}{g} f\left(\frac{\rho s^{3/2}}{m}\right).$$

$$\mathbf{3.9.} \quad E = \rho g \lambda^3 f(A/\lambda).$$

$$3.10. r = C(E\tau^2/\rho)^{1/5}.$$

$$3.11. M = C\rho\sqrt{gh^3}.$$

$$3.12. D = f(\theta)\sqrt{\frac{\sigma}{g(\rho' - \rho'')}}.$$

$$3.13. \delta = C\sqrt{\frac{V\mu}{\rho g}}.$$

$$3.14. T = C\sqrt{\frac{m}{\rho g s}}.$$

$$3.15. E = C\rho g\lambda A^2.$$

3.16. Примем, что пластина расположена в плоскости $y = 0$ и обтекается потоком жидкости в направлении оси z . Система уравнений для поля скоростей и давлений в потоке жидкости имеет вид

$$\frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0, \quad (3.16.1)$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x}, \quad (3.16.2)$$

$$\rho u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + \rho u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2}\right), \quad (3.16.3)$$

$$\rho u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + \rho u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\right). \quad (3.16.4)$$

с условиями однозначности

$$u_z(y = 0, z \geq 0) = 0, \quad (3.16.5)$$

$$u_z(y \rightarrow \infty, z \geq 0) = u_\infty.$$

Из (3.16.1) – (3.16.5) следует, что компоненты скорости u_y и u_z (впрочем, как и давление p) являются функциями одинакового набора размерных величин

$$u_z = f_1(y, z, \rho, \mu, u_\infty),$$

$$u_y = f_2(y, z, \rho, \mu, u_\infty). \quad (3.16.6)$$

Приведем первое из соотношений (3.16.6) к безразмерному виду, используя метод анализа размерностей. Выпишем размерные величины с их размерностями

$$\begin{aligned} [u_y] &= \text{м/с}, [u_\infty] = \text{м/с}, [y] = \text{м}, \\ [z] &= \text{м}, [\rho] = \text{кг/м}^3, [\mu] = \text{кг/(м}\cdot\text{с)}. \end{aligned} \quad (3.16.7)$$

Из (3.16.7) следует: общее количество самостоятельно входящих в уравнение размерных величин $n = 6$, количество групп однородных по размерности величин $l = 4$, количество групп однородных по размерности величин с независимыми единицами измерения $k = 3$. В соответствии с π -теоремой после приведения уравнения к безразмерному виду будем иметь всего три ($n - k = 3$) безразмерные величины, в том числе два симплекса ($n - l = 2$) и один комплекс ($l - k = 1$). Так как значение числа k совпадает с количеством исходных размерностей, то будем изменять последние. Перейдем к новым единицам

$$\text{м} \rightarrow \text{м}/A_l, \text{с} \rightarrow \text{с}/A_\tau, \text{кг} \rightarrow \text{кг}/A_m \quad (3.16.8)$$

В новых единицах численные значения размерных величин в (3.16.6) изменятся

$$u_z \frac{A_l}{A_\tau} = f_1(yA_l, zA_l, \rho \frac{A_m}{A_l^3}, \mu \frac{A_m}{A_l A_\tau}, u_\infty \frac{A_l}{A_\tau}). \quad (3.16.9)$$

Зафиксируем значения трех комплексов

$$zA_l = 1, \rho \frac{A_m}{A_l^3} = 1, u_\infty \frac{A_l}{A_\tau} = 1. \quad (3.16.10)$$

Из (3.16.10) находим $A_l = \frac{1}{z}$, $A_\tau = \frac{u_\infty}{z}$, $A_m = \frac{1}{\rho z^3}$. Подставляя найденные значения коэффициентов A в (3.16.9), получаем уравнение для u_z в безразмерном виде:

$$\frac{u_z}{u_\infty} = f_3\left(\frac{y}{z}, \frac{\rho u_\infty z}{\mu}\right) \equiv f_3\left(\frac{y}{z}, \text{Re}_z\right). \quad (3.16.11a)$$

Аналогичный вид имеет безразмерное уравнение для u_y :

$$\frac{u_y}{u_\infty} = f_4\left(\frac{y}{z}, \frac{\rho u_\infty z}{\mu}\right) \equiv f_4\left(\frac{y}{z}, \text{Re}_z\right). \quad (3.16.11б)$$

Трение на стенке определяется соотношением

$$\tau_{\text{ст}} = \mu \left. \frac{\partial u_z}{\partial y} \right|_{y=0}. \quad (3.16.12)$$

Подставляя в (3.16.12) выражение для u_z в соответствии с (3.16.11а) найдем $\frac{\tau_{\text{ст}} z}{u_\infty \mu} = f_5(\text{Re}_z)$ или в эквивалентном виде, если правую и левую части последнего соотношения поделить на Re_z :

$$\frac{\tau_{\text{ст}}}{\rho u_\infty^2} = F(\text{Re}_z). \quad (3.16.13)$$

Из последнего следует, что коэффициент трения c_f при обтекании пластины зависит от числа Re_z :

$$\tau_{\text{ст}} = c_f(\text{Re}_z) \frac{\rho u_\infty^2}{2}. \quad (3.16.14)$$

3.17. В приближении теории ламинарного пограничного слоя течение жидкости вблизи плоской пластины, омываемой продольным потоком со скоростью u_∞ вдали от пластины, описывается уравнениями

$$\rho u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + \rho u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} = \mu \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2}, \quad (3.17.1)$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \quad (3.17.2)$$

с условиями однозначности

$$u_z(y=0, z \geq 0) = 0, \quad (3.17.3)$$

$$u_z(y \rightarrow \infty, z \geq 0) = u_\infty.$$

Из (3.17.1) – (3.17.3) следует, что компоненты скорости u_y и u_z являются функциями одинакового набора размерных величин

$$u_z = f_1(y, z, \rho, \mu, u_\infty), \quad (3.17.4)$$

$$u_y = f_2(y, z, \rho, \mu, u_\infty). \quad (3.17.5)$$

Приведем уравнения (3.17.4) и (3.17.5) к безразмерному виду, используя векторные единицы длины, то есть условно различные единицы для измерений по направлениям x, y, z – m_x, m_y, m_z . Начнем с уравнения для продольной компоненты скорости u_z .

Выпишем все размерные величины с их размерностями

$$\begin{aligned} [u_z] &= \frac{M_z}{c}, \quad [y] = m_y, \quad [z] = m_z, \quad [\rho] = \frac{\text{кг}}{m_x m_y m_z}, \\ [\mu] &= \frac{\text{кг} \cdot m_y}{c \cdot m_x m_z}, \quad [u_\infty] = \frac{M_z}{c}. \end{aligned} \quad (3.17.6)$$

Определение размерностей при использовании векторных единиц длины достаточно очевидно для всех величин в (3.17.6), кроме динамической вязкости μ . Ее размерность устанавливается из уравнения (3.17.1) и условия, что размерности всех членов в уравнении должны быть одинаковы.

Для списка (3.17.6) $n=6$, $l=5$, $k=4$ и в соответствии с π -теоремой после приведения уравнения к безразмерному виду получим две безразмерные величины ($n-k=2$), в том числе один симплекс ($n-l=1$) и один комплекс ($l-k=1$).

В соответствии с процедурой приведения уравнений к безразмерному виду изменим четыре независимые размерности из списка (3.17.6), а именно – перейдем к новым размерностям, в A_i раз меньшим старых:

$$\begin{aligned} m_y \rightarrow \frac{m_y}{A_y}, \quad m_z \rightarrow \frac{m_z}{A_z}, \quad \frac{\text{кг}}{m_x m_y m_z} \rightarrow \frac{\text{кг}}{m_x m_y m_z} / A_\rho, \\ \frac{m_z}{c} \rightarrow \frac{m_z}{c} / A_u. \end{aligned} \quad (3.17.7)$$

В новых единицах численные значения размерных величин в (3.17.4) изменятся

$$u_z A_u = f_1(y A_y, z A_z, \rho A_\rho, \mu A_\rho A_u A_y^2 / A_z, u_\infty A_u). \quad (3.17.8)$$

Зафиксируем четыре комплекса в (3.17.8)

$$yA_y = 1, \quad zA_z = 1, \quad \rho A_\rho = 1, \quad u_\infty A_u = 1. \quad (3.17.9)$$

Определим коэффициенты A_i из (3.17.9) и, подставляя их в (3.17.8), получим уравнение для u_z в безразмерном виде

$$\frac{u_z}{u_\infty} = f_1\left(1, 1, 1, \frac{\mu z}{y^2 \rho u_\infty}, 1\right) = f_3\left(y \sqrt{\frac{\rho u_\infty}{\mu z}}\right). \quad (3.17.10)$$

Аналогично приводится к безразмерному виду уравнение (3.17.5). Однако, так как u_y имеет размерность, отличную от u_z , безразмерное уравнение отличается от (3.17.10) и содержит два безразмерных комплекса

$$\frac{u_y z}{u_\infty y} = f_4\left(y \sqrt{\frac{\rho u_\infty}{\mu z}}\right). \quad (3.17.11)$$

Умножив правую и левую часть уравнения на безразмерный комплекс $y \sqrt{\frac{\rho u_\infty}{\mu z}}$, получим другую формально эквивалентную форму безразмерного уравнения, в котором содержится масштаб для поперечной скорости u_y :

$$\frac{u_y}{u_\infty} \sqrt{\frac{\rho u_\infty z}{\mu}} = f_4\left(y \sqrt{\frac{\rho u_\infty}{\mu z}}\right). \quad (3.17.12)$$

Трение на стенке определяется соотношением

$$\tau_{\text{ст}} = \mu \left. \frac{\partial u_z}{\partial y} \right|_{y=0}. \quad (3.17.13)$$

Подставляя в (3.17.13) выражение для u_z в соответствии с (3.17.10), найдем

$$\tau_{\text{ст}} = \mu u_\infty \sqrt{\frac{\rho u_\infty}{\mu z}} f_4'(0). \quad (3.17.14)$$

Соотношение (3.17.14) определяет вид коэффициент трения при обтекании пластины

$$\tau_{\text{ст}} = c_f(\text{Re}_z) \frac{\rho u_\infty^2}{2}, \quad (3.17.15)$$

с точностью до константы

$$c_f(\text{Re}_z) = \frac{2f'_4(0)}{\sqrt{\text{Re}_z}} = \frac{C}{\sqrt{\text{Re}_z}}, \quad \text{Re}_z = \frac{u_\infty z}{\nu}. \quad (3.17.16)$$

ТУРБУЛЕНТНОЕ ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ В КАНАЛАХ ЯЭУ

4.1. а) Мощность на прокачивание возрастет в 16,5 раз, б) расход уменьшится в 5 раз.

4.2. Уменьшится в 1,49 раз.

4.3. При прокачивании через одну трубу мощность на прокачивание меньше в 1,54 раза.

4.4. В 10,8 раза.

4.5. В соответствии с универсальным профилем для максимальной скорости имеем

$$\frac{u_m}{u_*} = 2,5 \ln \frac{r_0 u_*}{\nu} + 5,5, \quad (4.5.1)$$

откуда

$$\frac{u_m}{u_0} = \frac{u_*}{u_0} (2,5 \cdot 2,3 \lg \text{Re} \frac{u_*}{2u_0} + 5,5)$$

или, так как $u_*/u_0 = \sqrt{\lambda_{\text{тр}}/8}$,

$$\frac{u_m}{u_0} = \sqrt{\frac{\lambda_{\text{тр}}}{8}} (5,75 \lg \text{Re} \sqrt{\lambda_{\text{тр}}} + 5,5 - 5,75 \lg 2\sqrt{8}). \quad (4.5.2)$$

Из формулы Никурадзе

$$\lg \text{Re} \sqrt{\lambda_{\text{тр}}} = 0,5 \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_{\text{тр}}}} + 0,8 \right). \quad (4.5.3)$$

Подставляя (4.5.3) в (4.5.2), получим

$$\frac{u_m}{u_0} = 1,01 + 1,25 \sqrt{\lambda_{\text{тр}}}. \quad (4.5.4)$$

Вычисления дают: при $Re = 10^4$ $u_m/u_0 = 1,22$, при $Re = 10^5$ $u_m/u_0 = 1,165$.

4.6. $V_{\text{квад}}/V_{\text{круг}} = 0,917$.

4.7. Условия $\delta \ll \Delta l$ и $\delta \ll R$ для квадратной упаковки стержней вырождаются в одно $\delta \ll d(s/d - 1)$ или

$$\delta \leq \frac{1}{20} d \left(\frac{s}{d} - 1 \right). \quad (4.7.1)$$

Толщина слоя δ оценивается по формуле $\delta = 8d_r / (Re \lambda_{\text{тр}})$. При $\lambda_{\text{тр}} = 0,316/Re^{0,25}$ и с учетом представления d_r квадратной решетки получим

$$\delta = \frac{25d}{Re^{0,75}} \left[\frac{4}{\pi} \left(\frac{s}{d} \right)^2 - 1 \right]. \quad (4.7.2)$$

Подставляя (4.7.2) в (4.7.1), найдем

$$Re^{0,75} \geq \frac{500}{(s/d - 1)} \left[\frac{4}{\pi} \left(\frac{s}{d} \right)^2 - 1 \right]. \quad (4.7.3)$$

Для $s/d = 1,2$ вычисления дают $Re \geq 26,6 \cdot 10^3$.

4.8. Для квадратной решетки $d_r = d \left[\frac{4}{\pi} \left(\frac{s}{d} \right)^2 - 1 \right]$, для треуголь-

ной решетки $d_r = d \left[\frac{2\sqrt{3}}{\pi} \left(\frac{s}{d} \right)^2 - 1 \right]$.

4.9. Для i -го канала справедливо соотношение $\Delta p = \Psi_i \frac{\rho u_i^2}{2}$, ($\Psi_i = \xi_i + \lambda_{\text{тр}i} \frac{l_i}{d_{ri}}$), из которого для скорости в i -ом канале следует

$u_i = \left(\frac{2\Delta p}{\rho} \right)^{0,5} \frac{1}{\Psi_i^{0,5}}$. При этом средняя скорость в системе равна

$$\bar{u} = \frac{\sum_1^N u_i F_i}{\sum_1^N F_i} \equiv \sum_1^N u_i \varepsilon_i = \left(\frac{2\Delta p}{\rho} \right)^{0,5} \sum_1^N \frac{\varepsilon_i}{\Psi_i^{0,5}},$$

где $\varepsilon_i = F_i/F$ – доля i -го канала в суммарном проходном сечении системы. Из последнего соотношения для перепада давления находим

$$\Delta p = \left(\sum_1^N \frac{\varepsilon_i}{\Psi_i^{0,5}} \right)^{-2} \frac{\rho \bar{u}^2}{2} \equiv \bar{\Psi} \frac{\rho \bar{u}^2}{2}, \quad (4.9.1)$$

то есть эффективный коэффициент сопротивления системы связан с коэффициентами сопротивления каналов соотношением

$$\frac{1}{\bar{\Psi}} = \left(\sum_1^N \frac{\varepsilon_i}{\Psi_i^{0,5}} \right)^2.$$

4.10. В соответствии с условиями задачи для i -го канала справедливо соотношение $\Delta p = \frac{0,316}{(u_i d_{\Gamma i} / \nu)^{0,25}} \frac{l}{d_{\Gamma i}} \frac{\rho u_i^2}{2}$ или $\Delta p = c \frac{u_i^{1,75}}{d_{\Gamma i}^{1,25}}$, из которого для скорости в i -ом канале следует

$$u_i = \left(\frac{\Delta p}{c} \right)^{4/7} d_{\Gamma i}^{5/7}, \quad (4.10.1)$$

где обозначено $c = \frac{0,316 l \rho \nu^{0,25}}{2}$. При этом средняя скорость в системе равна

$$\bar{u} = \frac{\sum_1^N u_i F_i}{\sum_1^N F_i} \equiv \sum_1^N u_i \varepsilon_i = \left(\frac{\Delta p}{c} \right)^{4/7} \sum_1^N \varepsilon_i d_{\Gamma i}^{5/7}, \quad (4.10.2)$$

где $\varepsilon_i = F_i/F$ – доля i -го канала в суммарном проходном сечении системы. Из последнего соотношения для перепада давления следует

$$\Delta p = c \frac{\bar{u}^{7/4}}{\left(\sum_1^N \varepsilon_i d_{ri}^{5/7} \right)^{7/4}}. \quad (4.10.3)$$

Раскрывая c и домножив и поделив (4.10.3) на $\bar{d}_r^{1,25}$, вместо (4.10.3) получим

$$\Delta p = A \frac{0,316}{(\bar{u}\bar{d}_r/\nu)^{0,25}} \frac{l}{\bar{d}_r} \frac{\rho \bar{u}^2}{2}, \quad (4.10.4)$$

где обозначено

$$A = \bar{d}_r^{1/25} \left/ \left(\sum_1^N \varepsilon_i d_{ri}^{5/7} \right)^{7/4} \right.$$

Найдем гидравлический диаметр всей системы

$$\bar{d}_r = \frac{4 \sum_1^N F_i}{\sum_1^N \Pi_i} = \frac{4 \sum_1^N F_i}{\sum_1^N \frac{4F_i}{d_{ri}}} = \frac{1}{\sum_1^N \frac{\varepsilon_i}{d_{ri}}}. \quad (4.10.5)$$

Из (4.10.4) и (4.10.5) окончательно находим для коэффициента гидравлического сопротивления системы труб

$$\lambda_{\text{тр}} = A \lambda_{\text{тр}0}, \quad (4.10.6)$$

где $\lambda_{\text{тр}0} = \frac{0,316}{(\bar{u}\bar{d}_r/\nu)^{0,25}}$ – коэффициент гидравлического сопротив-

ления по формуле для круглых труб, а коэффициент A определяется гидравлическими диаметрами каналов и их долями в общем

сечении $A = \frac{1}{\left(\sum_1^N \frac{\varepsilon_i}{d_{ri}} \right)^{1,25} \left(\sum_1^N \varepsilon_i d_{ri}^{5/7} \right)^{7/4}}$.

$$4.11. \Delta p_{\text{уск}} = 1,01 \lambda_{\text{тр}} (\text{Re}) \frac{\rho u_0^2}{2}.$$

4.12. а) уменьшатся в 1,01 раза, б) возрастут в 3,90 раза, в) возрастут в 1,71 раза, значение коэффициента кинематической вязкости принять постоянным и равным $0,12 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$.

4.13. а) увеличится в 1,01 раза, б) увеличится в 1,06 раз. Использовать метод итераций

4.14. $dp/dl = -588 \text{ Па/м}$.

4.15. $F_{\text{лс}} = 1413 \text{ Н}$ и 707 Н .

4.16. $\Psi = 0,151$.

4.17. $h_{\text{суж}} = 0,064 \text{ м}$.

4.18. $h = 0,62 \text{ м}$, $\Delta h = 0,51 \text{ м}$.

4.19. $Re = 4,2 \cdot 10^6$, турбулентный, $M = 0,29$.

4.20. При $n = 2, 4, 6, 8, 10$ $u_{\text{max}}/u_0 = 2,0, 1,50, 1,33, 1,25, 1,20$ соответственно.

4.21. $l = 0,165 \text{ м}$, $Re_x = 6,3 \cdot 10^3$, пограничный слой ламинарный.

4.22. $l = 0,86 \text{ м}$, $\delta = 6,9 \text{ мм}$.

4.23. При $x = 50 \text{ мм}$ $\delta = 0,71 \text{ мм}$, $(\omega_z)_{y=0} = -3,17 \cdot 10^4 \text{ рад/с}$, $(\omega_z)_{y=\delta} = 0$. При $x = 200 \text{ мм}$ $\delta = 1,42 \text{ мм}$.

4.24. $4,94 \cdot 10^5 \text{ Н}$.

ГИДРОДИНАМИКА ПОРИСТЫХ СТРУКТУР ЯЭУ

5.1. При одинаковых значениях опорных коэффициентов, характеризующих перенос поперечного импульса

$$T_{ij}^{\text{эф}} = - \left(\varepsilon \cdot P + \frac{2}{3} (\mu_{\perp} \sin^2 \varphi + \mu_{\uparrow\perp} \cos^2 \varphi) \right) \text{div} \vec{u} \cdot \delta_{ij} + \\ + (\mu_{\perp} \sin^2 \varphi + \mu_{\uparrow\perp} \cos^2 \varphi) \cdot \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right),$$

при одинаковых значениях всех опорных коэффициентов вязкости

$$T_{ij}^{\text{эф}} = - \left(\varepsilon \cdot P + \frac{2}{3} \mu_{\text{эф}} \text{div} \vec{u} \right) \cdot \delta_{ij} + \mu_{\text{эф}} \cdot \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right).$$

5.2. При установившемся течении $u_y = u_z = 0$, $u_x = u_x(y)$.
Уравнение движения (5.13) с учетом (5.22) и (5.23) принимает вид

$$0 = -\lambda_{\text{тр}} \frac{\varepsilon \rho u_x^2}{2d_\Gamma} - \varepsilon \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \mu_{\text{эф}} \frac{\partial u_x}{\partial y}. \quad (5.2.1)$$

Граничным условием для (5.2.1) является

$$\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{u_x}{l_c} \right) \Big|_{y=0} = 0. \quad (5.2.2)$$

Так как $\mu_{\text{эф}} = C_\mu u$ уравнение приводится к линейному виду относительно u_x^2 :

$$0 = -\lambda_{\text{тр}} \frac{\varepsilon \rho u_x^2}{2d_\Gamma} - \varepsilon \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{C_\mu}{2} \frac{\partial^2 u_x^2}{\partial y^2}. \quad (5.2.3)$$

Вдали от стенки, где $\frac{\partial u_x}{\partial y} = 0$, скорость равна $u_\infty = \sqrt{-\frac{\partial p}{\partial x} \frac{2d_\Gamma}{\lambda_{\text{тр}} \rho}}$.

Относительно безразмерной скорости $U_x = u_x/u_\infty$ уравнение принимает вид

$$0 = -U_x^2 + 1 + b^2 \frac{\partial^2 U_x^2}{\partial y^2} \quad (5.2.4)$$

при $b = \sqrt{\frac{C_\mu d_\Gamma}{\lambda_{\text{тр}} \varepsilon \rho}}$.

Решением уравнения (5.2.4), ограниченным на бесконечном удалении от стенки и удовлетворяющим (5.2.2), является

$$u_x(y) = u_\infty \sqrt{1 - \frac{1}{1 + l_c/2b} \exp\left(-\frac{y}{b}\right)}. \quad (5.2.5)$$

Решение при $l_c = 0$ отвечает условию прилипания на стенке $u_x(y) = u_\infty \sqrt{1 - \exp\left(-\frac{y}{b}\right)}$, а при $l_c \rightarrow \infty$ условию абсолютного скольжения $u_x(y) = u_\infty$.

5.3. При установившемся течении $u_y = u_z = 0$, $u_x = u_x(y)$ и линейной зависимости коэффициента эффективной вязкости $\mu_{\perp\perp}$ от скорости $\mu_{\perp\perp} = C_{\perp\perp}u$ уравнение движения (см. (5.13) – (5.21)) приводится к виду линейному относительно u_x^2

$$0 = -\lambda_{\text{тпр}} \frac{\varepsilon \rho u_x^2}{2d_r} - \varepsilon \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{C_{\perp\perp}}{2} \frac{\partial^2 u_x^2}{\partial y^2}. \quad (5.3.1)$$

или в безразмерной форме

$$0 = 1 - U_x^2 + \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2 U_x^2}{\partial Y^2}, \quad (5.3.2)$$

где обозначено: $Y = \frac{y}{h}$, $U_x = \frac{u_x}{u_\infty}$, $u_\infty = \sqrt{-\frac{\partial p}{\partial x} \frac{2d_r}{\lambda_{\text{тпр}} \rho}}$, $k = h \sqrt{\frac{\lambda_{\text{тпр}} \varepsilon \rho}{C_{\perp\perp} d_r}}$.

Общее решение уравнения (5.3.2) может быть представлено как

$$U_x^2(Y) = 1 + C_1 \text{sh}kY + C_2 \text{ch}kY. \quad (5.3.3)$$

Константы C_1 и C_2 определяются из граничных условий. При условии прилипания на стенках получено

$$u_x(Y) = u_\infty \sqrt{1 - \frac{\text{ch}kY}{\text{ch}k}}, \quad (5.3.4)$$

при условии абсолютного скольжения на стенках

$$u_x(Y) = u_\infty. \quad (5.3.5)$$

5.4. Используя полученное в задаче 5.3 решение, для отношения средних скоростей можно получить

$$\frac{\bar{u}_1}{\bar{u}_2} = \int_0^1 \sqrt{1 - \frac{\text{ch}kY}{\text{ch}k}} dY \equiv \Phi(k). \quad (5.4.1)$$

График зависимости отношения средних скоростей от параметра $k = h \sqrt{\frac{\lambda_{\text{тпр}} \varepsilon \rho}{C_{\perp\perp} d_r}}$ показан на рис. О10.

Параметр k содержит коэффициент $C_{\perp\perp}$, связывающий эффективную вязкость $\mu_{\perp\perp}$ со скоростью, т.е. определяющий вязкость. Полученный результат послужил основой для разработки метода экспериментального определения опорной вязкости $\mu_{\perp\perp}$, основан-

ного на сопоставлении средних скоростей в каналах с различными граничными условиями на стенках при одинаковых значениях продольного градиента давления.

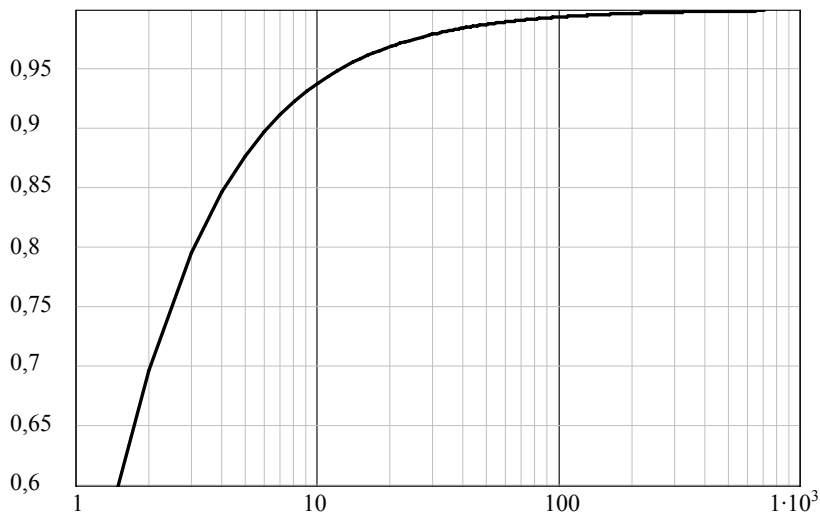


Рис. О10

5.5. Согласно [5] перепад давления при поперечном обтекании коридорных упаковок стержней рассчитывается по формуле

$$\Delta p = \zeta \frac{\rho u_m^2}{2},$$

где ζ – коэффициент сопротивления, u_m – скорость жидкости в узком сечении между стержнями.

Для расчета коэффициента сопротивления одного ряда стержней ζ_1 рекомендуются зависимости:

при $x_1 = 1,1 \div 7; x_1 < x_2; \Psi_0 = 0,06 \div 1$

$$\zeta_1 = 2(x_1 - 1)^{-0,5} \text{Re}_m^{-0,2}; \quad (5.5.1)$$

при $x_1 = 1,1 \div 7; x_1 > x_2; \Psi_0 = 1 \div 8$

$$\zeta_1 = 0,38(x_1 - 1)^{-0,5} (\Psi_0 - 0,94)^{-0,59} \text{Re}_m^{-0,2} / \Psi_0^2, \quad (5.5.2)$$

где $\Psi_0 = (x_1 - 1)/(x_2 - 1)$; $x_1 = s_1/d$; $x_2 = s_2/d$ – относительные шаги поперечный и продольный; d – наружный диаметр трубы.

В числе Re_m за характерные параметры приняты наружный диаметр труб и скорость в узком сечении пучка.

Задача сводится к определению по приведенным данным коэффициента $\lambda_{\text{тр}}$ в формуле Дарси

$$\Delta p = \lambda_{\text{тр}} \frac{l}{d_r} \frac{\rho \bar{u}^2}{2} \quad (5.5.3)$$

с использованием в качестве масштабов истинно средней скорости и гидравлического диаметра. Коэффициент $k_{\xi\xi}$ определяется при этом по (5.15). Формула для $\lambda_{\text{тр}}$ получена в виде

$$\lambda_{\text{тр}}(x) = Re^{-0,2} x^{3,2} \frac{\left(1 - \frac{1}{4x^2}\right)^3}{(x-1)^{2,3}} \equiv \frac{\Phi(x)}{Re^{0,2}}.$$

Для расчета $\Phi(x)$ подбирались простые аппроксимирующие зависимости, вид которых при различных диапазонах изменения шага представлен в табл. 5.5.1.

Таблица 5.5.1

Диапазон изменения шага решетки	Аппроксимирующая зависимость для $\Phi(x)$	Значения параметров
1,02 – 1,12	$\Phi_T(x) = \frac{ax+b}{(x-1)^n}$	$a = 2,168$ $b = 1,495$ $n = 1,5$
1,13 – 1,30	$\Phi_T(x) = ax^2 + bx + c$	$a = 348,2$ $b = -904,5$ $c = 602,1$
1,30 – 1,80	$\Phi_T(x) = ax + b$	$a = -2,323$ $b = 17,14$
1,80 – 10,0	$\Phi_T(x) = ax + b$	$a = 1,762$ $b = 8,111$

5.6. Согласно [5] перепад давления при поперечном обтекании треугольных упаковок стержней рассчитывается по формуле:

$$\Delta p = \zeta \frac{\rho u_m^2}{2}, \quad (5.6.1)$$

где ζ – коэффициент сопротивления, u_m – скорость жидкости в узком сечении между стержнями.

Для расчета коэффициента сопротивления одного ряда стержней ζ_1 рекомендуются зависимости:

$$\zeta_1 = C \text{Re}_m^{-0,27}. \quad (5.6.2)$$

Значения коэффициента C приведены в табл. 5.6.1. В числе Re_m за характерный размер принят наружный диаметр труб. Определяющая скорость – средняя скорость в узком сечении пучка.

Приведенные данные преобразовывались с целью определения коэффициента $\lambda_{\text{тр}}$ в формуле Дарси

$$\Delta p = \lambda_{\text{тр}} \frac{l}{d_r} \frac{\rho \bar{u}^2}{2} \quad (5.5.3)$$

с использованием в качестве масштабов истинно средней скорости и гидравлического диаметра.

Таблица 5.6.1

Ψ^*	x_1	C
0,1 – 1,7	$\geq 1,44$	$C = 3,2 + 0,66 (1,7 - \Psi)^{1,5}$
0,1 – 1,7	$< 1,44$	$C = 3,2 + 0,66(1,7 - \Psi)^{1,5} + \frac{1,44 - x}{0,11} [0,8 + 0,20(1,7 - \Psi)^{1,5}]$
1,7 – 6,5	$1,44 \div 3$	$C = 0,44 (\Psi + 1)^2$
1,7 – 6,5	$< 1,44$	$C = [0,44 + (1,44 - x_1)](\Psi + 1)^2$
$\geq 1,7$	$3 \div 10$	$C = 0,062 + 0,21 (10 - x_1)^{-0,24}$

* $\Psi = (x_1 - 1)/(x'_2 - 1)$, где $x'_2 = \sqrt{x_1^2/4 + x_2^2}$ - относительный диагональный шаг труб.

Коэффициент $k_{\xi\xi}$ определяется при этом по (5.15). Формула для $\lambda_{\text{тр}}$ получена в виде

$$\lambda_{\text{тр}} = C \text{Re}^{-0,27} \frac{4}{\pi} \left(\frac{2\sqrt{3}}{\pi} \right)^{0,27} x^{3,27} \frac{\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{3}} \frac{1}{x^2} \right)^3}{(x-1)^{1,73}} \equiv \frac{\Phi(x)}{\text{Re}^{0,27}}, \quad (5.6.4)$$

где если $x \geq 1,44$, то $C = 3,587$; если $x < 1,44$, то
 $C = 3,587 + 8,338(1,44 - x)$.

Для расчета $\Phi(x)$ подбирались простые аппроксимирующие зависимости, вид которых при различных диапазонах изменения шага представлен в табл. 5.6.2.

Таблица 5.6.2

Диапазон изменения шага решетки	Аппроксимирующая зависимость для $\Phi(x)$	Значения параметров
1,02 – 1,06	$\Phi_T(x) = \frac{ax+b}{(x-1)^n}$	$a = 2,50, \quad n = 0,5$
1,06 – 1,40	$\Phi_T(x) = ax + b$	$a = 7,91, \quad b = 1,01$
1,40 – 6,0	$\Phi_T(x) = ax + b$	$a = 17,48, \quad b = -13,79$

5.7. При установившемся течении в прямом канале поле скоростей не изменяется по длине, т.е. для всех компонент скорости

$$\frac{\partial u_i}{\partial x} = 0, \quad i = x, \quad y, \quad z. \quad (5.7.1)$$

По ширине канал не ограничен, течение однородно по z , поэтому

$$\frac{\partial u_i}{\partial z} = 0, \quad i = x, \quad y, \quad z, \quad (5.7.2)$$

и движение в направлении z отсутствует $u_z = 0$.

Из уравнения неразрывности

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0, \quad (5.7.3)$$

с учетом (5.7.1) и (5.7.2) следует $\frac{\partial u_y}{\partial y} = 0$ и $u_y = \text{const} = 0$, так как

стенки канала непроницаемы.

Таким образом, единственной, отличной от нуля компонентой скорости является

$$u_x = u_x(y). \quad (5.7.4)$$

С учетом (5.7.4) уравнения движения (5.13) упрощаются:

$$0 = -k_{xx}u_x - \varepsilon \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \mu_1 \frac{\partial u_x}{\partial y}, \quad (5.7.5)$$

$$0 = -k_{yx}u_x - \varepsilon \frac{\partial P}{\partial y}. \quad (5.7.6)$$

В (5.7.5), (5.7.6) в соответствии

с (5.19):

$$P = p + (c_{\perp} \sin^2 \varphi + c_{\uparrow} \cos^2 \varphi) \rho u_x^2 \equiv p + c(\varphi) \rho u_x^2, \quad (5.7.7)$$

с (5.20):

$$\mu_1 = \mu_{\perp} \sin^2 \varphi + \mu_{\uparrow} \cos^2 \varphi, \quad (5.7.8)$$

с (5.16), (5.17):

$$k_{xx} = \frac{\varepsilon \rho}{2d_{\Gamma}} (\lambda_{\text{тр}\perp} \sin^2 \varphi + \lambda_{\text{тр}\uparrow} \cos^2 \varphi) u_x \equiv \frac{\varepsilon \rho}{2d_{\Gamma}} \Lambda(\varphi) u_x, \quad (5.7.9)$$

$$k_{yx} = \frac{\varepsilon \rho}{2d_{\Gamma}} (\lambda_{\text{тр}\uparrow} - \lambda_{\text{тр}\perp}) \sin \varphi \cos \varphi u_x \equiv -\frac{\varepsilon \rho}{2d_{\Gamma}} \Pi(\varphi) u_x. \quad (5.7.10)$$

С учетом последних соотношений вместо (5.7.5), (5.7.6) имеем

$$0 = -\frac{\varepsilon \rho}{2d_{\Gamma}} \Lambda(\varphi) u_x^2 - \varepsilon \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \mu_1 \frac{\partial u_x^2}{\partial y}, \quad (5.7.11)$$

$$0 = \frac{\varepsilon \rho}{2d_{\Gamma}} \Pi(\varphi) u_x^2 - \varepsilon \frac{\partial p}{\partial y} - \varepsilon c(\varphi) \rho \frac{\partial u_x^2}{\partial y}. \quad (5.7.12)$$

Уравнение (5.7.11) определяет распределение скорости по высоте канала. Из уравнения (5.7.12) при известном $u_x(y)$ можно определить распределения давления по высоте канала.

Для дальнейшего анализа необходимо привлекать граничные условия на стенках канала.

а) Условие скольжения на стенках $\left. \frac{\partial u_x}{\partial y} \right|_{y=0,h} = 0$. При скольже-

нии на стенках решение уравнения (5.7.11) имеет вид

$$u_x(y) = u_0 \equiv \sqrt{-\frac{\partial p}{\partial x} \frac{2d_r}{\rho\Lambda(\varphi)}}. \quad (5.7.13)$$

Скорость распределена равномерно по сечению канала и $\Lambda(\varphi)$ имеет смысл коэффициента гидравлического сопротивления.

Из уравнения (5.7.12) определяется связь поперечного градиента давления с продольным.

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} \frac{\Pi(\varphi)}{\Lambda(\varphi)}. \quad (5.7.14)$$

б) Условие прилипания на стенках $u_x(y=0) = u_x(y=h) = 0$.

В этом случае решением уравнения (5.7.11) будет

$$u_x(Y) = u_0 \sqrt{(chb-1) \frac{shbY}{shb} + 1 - chbY}, \quad (5.7.15)$$

где $Y = \frac{y}{h}$, $b = \sqrt{\frac{\varepsilon\rho\Lambda(\varphi)uh^2}{\mu_1(\varphi)d_r}}$, $u_0 = \sqrt{-\frac{\partial p}{\partial x} \frac{2d_r}{\rho\Lambda(\varphi)}}$.

Для давления из (5.7.12) получаем

$$p(Y) + c(\varphi)\rho u_x^2(Y) = p(0) + \frac{\rho u_0^2 h}{2d_r} \left(\frac{chb-1}{b \cdot shb} (chbY-1) + Y - \frac{1}{b} shbY \right). \quad (5.7.16)$$

При этом суммарный перепад давления поперек канала

$$\Delta p \equiv p(1) - p(0) = \frac{\rho u_0^2 h}{2d_r} \left(\frac{1}{b \cdot shb} (chb-1)^2 + 1 - \frac{shb}{b} \right). \quad (5.7.17)$$

5.8. Указание: использовать результата решения задачи 5.7.

5.9. Указание: для определения коэффициента гидравлического сопротивления нужно проинтегрировать выражение для поля скорости $u_x(y)$ по сечению канала с тем, чтобы установить связь средней скорости с продольным градиентом давления.

5.10. В терминах массовой скорости и избыточной температуры ($\vartheta = t(r, z) - t_{\text{ж}}$) уравнения движения и теплопереноса в приближении модели пористой среды имеют вид:

$$\nabla_r \frac{m_r^2}{\rho} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{m_r m_z}{\rho} = -\frac{\partial P}{\partial r} + \mu \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \nabla_r \frac{m_r}{\rho} \right\} - k_{rr} m_r, \quad (5.10.1)$$

$$\nabla_r \frac{m_z m_r}{\rho} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{m_z^2}{\rho} = -\frac{\partial P}{\partial z} - \rho g + \mu \nabla_r \left(\frac{\partial}{\partial r} \frac{m_z}{\rho} \right) - k_{zz} m_z, \quad (5.10.2)$$

$$\nabla_r m_r + \frac{\partial}{\partial z} m_z = 0, \quad (5.10.3)$$

$$\nabla_r m_r c \vartheta + \frac{\partial}{\partial z} m_z c \vartheta = \lambda \nabla_r \frac{\partial \vartheta}{\partial r} + q_v, \quad (5.10.4)$$

$$k_{zz} = \lambda_{\text{трз}} \frac{m}{2\rho d_{\Gamma}}, \quad k_{rr} = \lambda_{\text{трr}} \frac{m}{2\rho d_{\Gamma}}. \quad (5.10.5)$$

где обозначено $\nabla_r = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r$.

Уравнения для возмущений скоростей и температур получают, если из исходных уравнений (5.10.1) – (5.10.5) вычесть уравнения для невозмущенных скоростей и температур

$$m_{z0} = \sqrt{\left(\frac{P_{\text{вх}} - P_{\text{вых}}}{l} - \rho_{\text{ж}} g \right) \frac{2\rho_{\text{ж}} d_{\Gamma}}{\lambda_{\text{трз}}}},$$

$$\vartheta_0 \equiv t(r, z) - t_{\text{ж}} = \Delta t_0 \left(k_r - 2(k_r - 1) \frac{r^2}{r_0^2} \right) \frac{z}{l} = \Delta t_0 f(r) \frac{z}{l}. \quad (5.10.6)$$

При анализе будем использовать приближение малых возмущений, т.е. будем пренебрегать произведением возмущений по сравнению с возмущением в первой степени. Такой подход позволяет получить для определения возмущений линейную задачу.

Итоговые уравнения движения в безразмерной форме имеют вид

$$A_z \frac{\partial M_r}{\partial Z} = -\frac{\partial \wp}{\partial R} + A_{\mu} \frac{\partial}{\partial R} \nabla_R M_r - \bar{K} M_r, \quad (5.10.7)$$

$$A_Z \frac{\partial M_Z}{\partial Z} = -\frac{\partial \wp}{\partial Z} + A_\mu \nabla_R \left(\frac{\partial M_Z}{\partial R} \right) - 2M_Z + Zf(R), \quad (5.10.8)$$

$$\nabla_R M_r + \frac{\partial M_Z}{\partial Z} = 0, \quad (5.10.9)$$

где M_i – безразмерное возмущение компонент массовой скорости, $M_1 = m_i/m_{z0}$; \wp – безразмерное возмущение давления, $\wp = p'/\rho_{ж} g \beta \Delta t_0 l$; $R = r/l$, $Z = z/l$, $\bar{K} = \lambda_{\text{тр}r}/\lambda_{\text{тр}z}$.

Возмущение температуры описывается уравнением

$$m_{z0} c \frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial z} = \lambda \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial r} + q_{\text{воз}}, \quad (5.10.10)$$

где роль эффективного источника тепловыделения играет член, определяемый невозмущенным полем температуры ϑ_0 и возмущениям скорости

$$q_{\text{воз}} = \lambda \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial \vartheta_0}{\partial r} - m_z c \frac{\partial \vartheta_0}{\partial z} - m_r c \frac{\partial \vartheta_0}{\partial r}, \quad (5.10.12)$$

Система (5.10.7)–(5.10.9) включает три уравнения для определения трех неизвестных величин m_r , m_z , p' .

Оценки показывают, что коэффициенты A_Z и A_μ малы, при этом возмущения скоростей прямо связываются с возмущениями давления

$$M_r = -\frac{1}{K} \frac{\partial \wp}{\partial R}, \quad (5.10.13)$$

$$M_Z = \frac{1}{2} \left(Z \cdot f(R) - \frac{\partial \wp}{\partial Z} \right), \quad (5.10.14)$$

а распределение возмущений давления описывается уравнением

$$\frac{2}{K} \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} R \frac{\partial \wp}{\partial R} + \frac{\partial^2 \wp}{\partial Z^2} = f(R) \quad (5.10.15)$$

при граничных условиях

$$\wp(Z=0) = 0, \quad \wp(Z=1) = 0, \quad \left. \frac{\partial \wp}{\partial R} \right|_{R=R_0} = 0. \quad (5.10.16)$$

Система (5.10.13) – (5.10.16) допускает аналитическое решение. Возмущение давления представляется в виде

$$\wp = k_r \wp_1 + 2 (k_r - 1) L^2 \wp_2, \quad (5.10.17)$$

где

$$\wp_1 = \frac{1}{2}(Z^2 - Z), \quad \wp_2(R, Z) = 2 \sum_{k=1,3,5..} P_k(R) \sin(\pi k Z),$$

$$P_k(R) = \frac{2}{(\pi k)^3} \left(\frac{8}{k(\pi k)^2} + R^2 \right) - \frac{4R_0}{(\pi k)^4 \sqrt{k/2}} \frac{I_0(\mu_k R)}{I_1(\mu_k R_0)},$$

$$\mu_k = \pi k \sqrt{K/2},$$

а компоненты возмущения скоростей равны

$$M_r = \frac{(k_r - 1)}{\bar{k}} 16L^2 \sum_{k=1,3,5..} \left(\frac{I_1(\mu_k R)}{I_1(\mu_k R_0)} - \frac{R}{R_0} \right) \frac{\sin(\pi k Z)}{(\pi k)^3}, \quad (5.10.18)$$

$$M_z = \frac{k_r}{4} - (k_r - 1)L^2 \left(R^2 Z - 2 \sum_{k=1,3,5..} \pi k P_k(R) \cos(\pi k Z) \right), \quad (5.10.19)$$

где $P_k(R)$ и μ_k даются в (5.10.17).

На рис. О11 и рис. О12 представлено рассчитанное распределение скоростей по радиусу на входе (рис. О11) и выходе (рис. О12) из активной зоны для условий реактора ВВЭР-1000 (1 – оценка по полученному решению, 2 – расчет по численной программе ТРЕТОН).

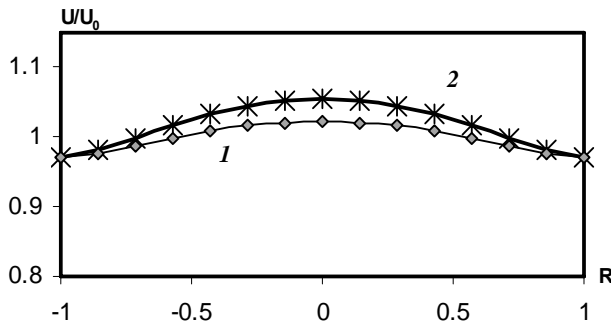


Рис. О11

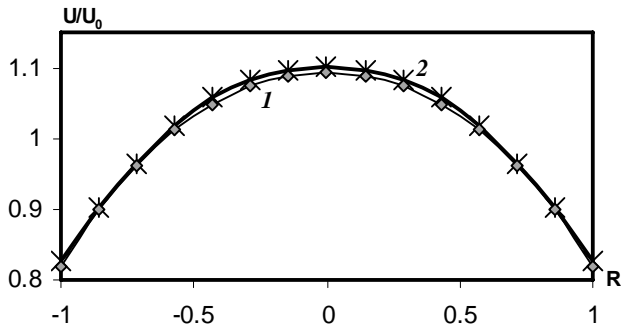


Рис. 0.12

Список литературы

1. Любимов А.В. Сборник задач по гидродинамике, газодинамике и теории упругости. – М.: МИФИ, 1970.
2. Аэрогидромеханика: Учебник для студентов высших технических учебных заведений / Е.Н. Бондарев, В.Т. Дубасов, Ю.А. Рыжов и др. – М.: Машиностроение, 1993. С80–81.
3. Клайн С.Дж. Подobie и приближенные методы. – М.: Мир, 1968, с.42-43.
4. Митенков Ф.М., Головки В.Ф., Ушаков П.А., Юрьев Ю.С. Проектирование теплообменных аппаратов АЭС. – М.: Энергоатомиздат, 1988.
5. Кириллов П.Л., Юрьев Ю.С., Бабков В.П. Справочник по теплогидравлическим расчетам (ядерные реакторы, теплообменники, парогенераторы). – М.: Энергоатомиздат, 1984.
6. Корсун А.С., Маслов Ю.А., Меринов И.Г., Пономарев В.А., Харитонов В.С. Описание анизотропных свойств теплопереноса при трехмерном моделировании активной зоны ВВЭР // Труды Пятой международной научно-технической конференции «Обеспечение безопасности АЭС с ВВЭР». 29 мая – 1 июня 2007 г., ФГУП ОКБ «Гидропресс», г. Подольск. Электронное издание.