

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

Н.П. Калашников

**Руководство
к решению задач
по физике
«Основы квантовой физики.
Строение вещества.
Атомная и ядерная физика»**

*Рекомендовано УМО «Ядерные физика
и технологии» в качестве учебного пособия
для студентов высших учебных заведений*

МОСКВА 2012

УДК 53(07)
ББК 22.3я7
К17

Калашников Н.П. Руководство к решению задач по физике «Основы квантовой физики. Строение вещества. Атомная и ядерная физика»: Учебное пособие. М.: НИЯУ МИФИ, 2012. – 252 с.

Предназначено для студентов инженерно-технических направлений и специальностей. Изучение курса создает базис для выработки умения ориентироваться в обильном потоке научно-технической информации, своевременно распознавать перспективные научные направления, оценивать возможность их практического использования и просчитывать последствия тех или иных технологических инноваций. Предложен сборник задач с примерами решений и задачами для самостоятельной работы и контрольных занятий. В пособии подробно разобраны типичные задачи, характерные для того или иного теоретического раздела, и приведены задачи для самостоятельной работы с ответами для самоконтроля. Одной из целей курса является воспитание культуры системного подхода, навыков логического мышления, привычки обдумывать результаты, строить правильные рабочие гипотезы и четко формулировать задачу.

Подготовлено в рамках Программы создания и развития НИЯУ МИФИ.

Рецензент д-р физ.-мат. наук, проф. Ю.А. Коровин

ISBN 978-5-7262-1661-4

© Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», 2012

Содержание

1. Предисловие. Общие методические рекомендации	5
2. Основы квантовой физики	8
2.1. Тепловое излучение	8
2.1.1. Основные понятия, законы и формулы	8
2.1.2. Методические рекомендации по решению задач	11
2.1.3. Задачи для самостоятельной работы	21
2.2. Квантовая природа света. Фотон	24
2.2.1. Основные понятия, законы и формулы	24
2.2.2. Методические рекомендации по решению задач	26
2.2.3. Задачи для самостоятельной работы	37
2.3. Классические модели атома (Томсона и Резерфорда). Модель атома по Бору. Спектры водородоподобных ионов	45
2.3.1. Основные понятия, законы и формулы	45
2.3.2. Методические рекомендации по решению задач	47
2.3.3. Задачи для самостоятельной работы	55
2.4. Волновые свойства микрочастиц. Соотношения неопределенностей Гейзенберга	60
2.4.1. Основные понятия, законы и формулы	60
2.4.2. Методические рекомендации по решению задач	62
2.4.3. Задачи для самостоятельной работы	70
2.5. Простейшие случаи движения микрочастиц. Уравнение Шредингера	77
2.5.1. Основные понятия, законы и формулы	77
2.5.2. Методические рекомендации по решению задач	81
2.5.3. Задачи для самостоятельной работы	92
2.6. Строение атома. Квантование момента импульса. Спектры щелочных металлов. Рентгеновские спектры. Молекулярные спектры. Спин электрона. Атом в магнитном поле	99
2.6.1. Основные понятия, законы и формулы	99
2.6.2. Методические рекомендации по решению задач	106
2.6.3. Задачи для самостоятельной работы	123

3. Основы теории строения вещества	130
3.1. Элементы физики твердого тела. Квантовые свойства твердых тел. Тепловые свойства кристаллов	130
3.1.1. <i>Основные понятия, законы и формулы</i>	130
3.1.2. <i>Методические рекомендации по решению задач</i>	135
3.1.3. <i>Задачи для самостоятельной работы</i>	144
3.2. Квантовая теория электронов в твердых телах (металлах и полупроводниках)	149
3.2.1. <i>Основные понятия, законы и формулы</i>	149
3.2.2. <i>Методические рекомендации по решению задач</i>	151
3.2.3. <i>Задачи для самостоятельной работы</i>	162
4. Элементы физики атомного ядра	168
4.1. Характеристики атомных ядер. Энергия связи ядра	168
4.1.1. <i>Основные понятия, законы и формулы</i>	168
4.1.2. <i>Методические рекомендации по решению задач</i>	170
4.1.3. <i>Задачи для самостоятельной работы</i>	176
4.2. Ядерные реакции	180
4.2.1. <i>Основные понятия, законы и формулы</i>	180
4.2.2. <i>Методические рекомендации по решению задач</i>	181
4.2.3. <i>Задачи для самостоятельной работы</i>	190
4.3. Радиоактивность. Прохождение излучения через вещество. Элементы дозиметрии ионизирующих излучений	193
4.3.1. <i>Основные понятия, законы и формулы</i>	193
4.3.2. <i>Методические рекомендации по решению задач</i>	199
4.3.3. <i>Задачи для самостоятельной работы</i>	211
4.4. Фундаментальные взаимодействия. Физика элементарных частиц	217
4.4.1. <i>Основные понятия, законы и формулы</i>	217
4.4.2. <i>Методические рекомендации по решению задач</i>	223
4.4.3. <i>Задачи для самостоятельной работы</i>	230
Список рекомендуемой литературы	236
Приложение. Справочный материал	237

1. Предисловие. Общие методические рекомендации

Физика – самая фундаментальная из всех естественных наук. Она изучает самые простые и общие свойства материи и сравнительно простые явления природы. Поэтому физика составляет универсальную основу всей науки и техники. В настоящее время с физикой связаны самые разнообразные области человеческой деятельности – от космонавтики до нанотехнологий, от информационных технологий до археологии.

Схематично научное исследование какого-либо физического явления можно разделить на четыре этапа: эксперимент (или наблюдения), построение физической модели, математический формализм и (после математического решения проблемы) наступает важный четвертый этап – обсуждение полученного результата, анализ влияния различных параметров на интересующую исследователя величину. Последние этапы являются составными частями физической теории, назначение которой – составить представление о механизме исследуемого явления и дать его количественное описание. Для построения теории сначала на основании наблюдательных или экспериментальных данных конструируется образная модель изучаемого явления. Модель есть научная абстракция, т.е. понятие, отражающее наиболее существенные свойства данного явления. Модель должна быть достаточно простой для того, чтобы стать пригодной для математического описания. Применение математики позволяет получить количественные соотношения между физическими величинами, которые могут быть проверены на опыте. Если теория верна, то ее предсказания должны подтверждаться результатами экспериментов и наблюдений. Физика – экспериментальная наука. Эксперимент в одних случаях позволяет найти искомые закономерности, обнаружить новое явление или новые стороны известного явления; в других случаях он выступает как объективный референт теории.

Возникает вопрос: что из того материала, который изучается в университете, окажется необходимым в вашей дальнейшей работе? Законы физики? Конечно, основные физические законы знать необходимо, но все же не это самое главное. Забытую

формулировку закона или математическое выражение можно найти в справочнике. Чем больше законов и формул сохранилось в вашей памяти, тем реже вам придется рыться в справочниках, тем выше ваш **профессионализм**, тем выше будет ваша **производительность труда**. В связи с этим среди компетенций, которыми должен обладать будущий специалист, на первое место следует поставить умение владеть **методами** работы. Цель этого пособия и заключается в том, чтобы привить ее читателю основы физического **метода** мышления.

Систематическое решение физических задач – необходимое условие успешного изучения курса физики. Решение задач помогает уяснить физический смысл явлений, закрепляет в памяти основные физические законы, прививает навыки практического применения теоретических знаний, знакомит с характерными масштабами явлений и порядками физических величин, встречающихся на практике. Подобный анализ проведен в ряде задач этого пособия.

При решении физических задач полезно придерживаться определенного порядка действий:

1) слева записать все данные задачи вместе с их численными значениями, искомые в задаче величины и табличные значения используемых физических параметров;

2) выразить все данные задачи в международной системе единиц (СИ). Исключение из этого правила допускается лишь для однородных величин, входящих в ответ в виде отношения: в таком случае они могут быть выражены в любой (но одной и той же) системе единиц;

3) сделать чертеж, схему или рисунок с обозначениями данных задачи в соответствии с условием задачи (*«Рисунок – источник и душа каждого изображения и корень каждой науки»*. – Микеланджело);

4) установить физические законы, отвечающие содержанию данной задачи. Записать, из какого закона (законов), определения или физического соотношения можно найти искомую величину;

5) решить задачу в общем (буквенном) виде, т.е. выразить искомую величину в буквенных обозначениях величин, заданных в условии;

6) произвести проверку размерностей. Полученная единица

измерения должна совпадать с единицей искомой в задаче величины;

7) произвести вычисления;

8) привести в ответе числовое значение с сокращенным наименованием единицы измерения;

9) с точки зрения здравого смысла оценить правдоподобность полученного результата.

Мне представляется, что если вы решите или разберете достаточно большое количество задач этого пособия, то основы физического мышления станут для вас более ясными, физика станет реальной основой вашего дальнейшего развития как полноценной личности эпохи научно-технического прогресса.

2. Основы квантовой физики

2.1. Тепловое излучение

2.1.1. Основные понятия, законы и формулы

Основные характеристики равновесного теплового излучения, находящегося в замкнутой полости (здесь и далее T – термодинамическая температура):

- Интегральная характеристика: плотность энергии $u(T)$ – количество энергии излучения в единице объема. Размерность $[u(T)] = \text{Дж/м}^3$.

- Дифференциальная характеристика: спектральная плотность излучения $u(\omega, T)$ — энергия излучения в единичном объеме, приходящаяся на единичный интервал частоты. Размерность $[u(\omega, T)] = \text{Дж с/м}^3$. Связь с плотностью энергии:

$$u(T) = \int_0^{\infty} u(\omega, T) d\omega. \quad (2.1.1)$$

- Аналогичная дифференциальная характеристика – спектральная плотность излучения $u(\lambda, T)$. Это энергия излучения в единичном объеме, приходящаяся на единичный интервал длин волн. Связь двух дифференциальных характеристик:

$$u(\lambda, T) = u(\omega, T) \frac{2\pi c}{\lambda^2} d\lambda,$$

где в правой части надо выразить частоту через длину волны: $\omega = 2\pi c / \lambda$. Здесь c – скорость света в вакууме. Размерность $[u(\lambda, T)] = \text{Дж/м}^4$, связь с интегральной характеристикой:

$$u(T) = \int_0^{\infty} u(\lambda, T) d\lambda.$$

Основные характеристики теплового излучения нагретого тела: энергетическая светимость

R – энергия, испускаемая единицей поверхности излучающего тела в единицу времени.

Размерность $[R] = \text{Вт}/\text{м}^2$.

• Испускательная способность тела $r_\omega = r(\omega, T)$ – количество энергии, испускаемое единицей поверхности тела в единицу времени в единичном интервале частот.

Размерность $[r_\omega] = \text{Дж}/\text{м}^2$, связь с энергетической светимостью:

$$R = \int_0^{\infty} r(\omega, T) d\omega.$$

• Аналогичным образом вводят испускательную способность тела $r_\lambda = r(\lambda, T)$ как количество энергии, испускаемое единицей поверхности тела в единицу времени в единичном интервале длин волн. При этом размерность $[r_\lambda] = \text{Вт}/\text{м}^3$, и связь с интегральной

характеристикой $R = \int_0^{\infty} r(\lambda, T) d\lambda$

• Поглощательная способность тела a_ω – это отношение потока энергии, поглощенного телом в единичном интервале частот, к падающему потоку энергии; a_ω – безразмерная величина, не превышающая единицы. Тело, для которого $a_\omega = 1$, называется абсолютно черным телом.

• Закон Кирхгофа: отношение испускательной и поглощательной способности любого тела есть универсальная функция частоты и температуры:

$$\frac{r_\omega}{a_\omega} = f(\omega, T). \quad (2.1.2)$$

По смыслу определения ясно, что $f(\omega, T)$ есть испускательная способность абсолютно черного тела.

- Испускательная способность абсолютно черного тела $f(\omega, T)$ связана со спектральной плотностью энергии равновесного теплового излучения $u(\omega, T)$ соотношением:

$$f(\omega, T) = \frac{c}{4} u(\omega, T), \quad (2.1.3)$$

где c – скорость света в вакууме.

Энергетическая светимость абсолютно черного тела:

$$R^* = \int_0^{\infty} f(\omega, T) d\omega = \frac{c}{4} u(T). \quad (2.1.4)$$

- Формула Вина: испускательная способность абсолютно черного тела пропорциональна третьей степени частоты и функции отношения частоты и температуры:

$$f(\omega, T) = \omega^3 F\left(\frac{\omega}{T}\right). \quad (2.1.5)$$

- Закон смещения Вина (первый закон Вина):

$$T\lambda_{\max} = b, \quad b = 2,898 \cdot 10^{-3} \text{ м}\cdot\text{К}, \quad (2.1.6)$$

где λ_{\max} – длина волны, соответствующая максимуму испускательной способности черного тела $f(\lambda, T)$.

- Зависимость максимальной испускательной способности абсолютно черного тела от температуры (второй закон Вина):

$$f(\lambda_{\max}, T) = b_2 T^5, \quad (2.1.7)$$

где $b_2 = 1,287 \cdot 10^{-5} \text{ Вт}/(\text{м}^3 \cdot \text{К}^5)$.

- Закон Стефана–Больцмана. Энергетическая светимость абсолютно черного тела пропорциональна четвертой степени температуры:

$$R^* = \sigma T^4, \quad \sigma = 5,6705 \cdot 10^{-8} \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^4) \quad (2.1.8)$$

- Формула Планка для испускательной способности абсолютно черного тела:

$$f(\omega, T) = \frac{\hbar \omega^3}{4\pi^2 c^2} \frac{1}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1}, \quad (2.1.9)$$

$$f(\lambda, T) = \frac{4\pi^2 \hbar c^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{2\pi\hbar c/k_B T} - 1}, \quad (2.1.10)$$

где \hbar, k_B – универсальные физические постоянные (Планка и Больцмана соответственно).

- Постоянной Планка называются две константы:

$$h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Дж}\cdot\text{с}, \quad \hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,054 \cdot 10^{-34} \text{ Дж}\cdot\text{с}.$$

При дальнейшем изложении в данном пособии чаще будет использоваться величина \hbar .

- В области малых частот или больших температур ($k_B T \gg \hbar\omega$) экспоненту можно разложить в ряд, и мы получаем формулу Релея – Джинса:

$$f(\omega, T) \approx \frac{\omega^2}{4\pi^2 c^2} k_B \cdot T. \quad (2.1.11)$$

2.1.2. Методические рекомендации по решению задач

Пример 2.1.1. Оценить величину постоянной в первом законе смещения Вина.

Решение. Используя формулу Планка для излучательной способности абсолютно черного тела (2.1.10), определим λ_{\max} – значение длины волны, на которую при данной температуре T приходится максимум излучательной способности. Место положения максимума найдем из условия

$$\frac{\partial f(\lambda, T)}{\partial \lambda} = 0, \quad (2.1.12)$$

т.е.

$$\lambda_{\max}^{-6} \left(e^{\frac{\hbar c}{k_B T \lambda_{\max}}} - 1 \right) + \lambda_{\max}^{-5} \frac{\hbar c}{k_B T \lambda_{\max}^2} e^{\frac{\hbar c}{k_B T \lambda_{\max}}} = 0.$$

Вводя вместо λ_{\max} новую безразмерную переменную x_m

$$x_m = \frac{hc}{\lambda_{\max} k_B T}, \quad (2.1.13)$$

получаем

$$5(e^{x_m} - 1) - x_m e^{x_m} = 0. \quad (2.1.14)$$

Решением трансцендентного уравнения является установление первого закона Вина из формулы Планка:

$$\lambda_{\max} \cdot T = b = \frac{hc}{k_B x_{\max}}. \quad (2.1.15)$$

Сначала обсудим приближенное решение уравнения (2.1.14). Разделим обе части уравнения (2.1.14) на $e^{x_{\max}}$:

$$x_{\max} = 5(1 - e^{-x_{\max}}). \quad (2.1.16)$$

Из структуры уравнения (2.1.16) можно предположить, что

$$x_{\max} = 5(1 - \varepsilon) \quad (\text{где } \varepsilon \ll 1). \quad (2.1.17)$$

Подставляя (2.1.17) в (2.1.16), находим

$$x_{\max} \approx 5(1 - 0,00674) = 4,9663.$$

Точное решение трансцендентного уравнения (2.1.14') дает

$$x_{\max} = 4,965. \quad (2.1.18)$$

Из (2.1.18) находим значение постоянной в первом законе смещения Вина:

$$\lambda_{\max} = \frac{1}{T} b = \frac{1}{T} \left(\frac{hc}{k_B x_{\max}} \right) = \frac{1}{T} \cdot 0,284. \quad (2.1.19)$$

Пример 2.1.2. Изучение абсолютно черного тела может быть представлено распределением энергии либо по частотам (2.1.9), либо по длинам волн (2.1.10). В первом случае максимум приходится на частоту ω_{\max} , во втором – на длину волны λ_{\max} .

Определить связь ω_{\max} с λ_{\max} при одной и той же температуре абсолютно черного тела.

Решение. Испускательная способность абсолютно черного тела $F(\omega, T) = \frac{dR}{d\omega}$ – количество энергии, испускаемое единицей поверхности тела в единицу времени в единичном интервале

частот, а $f(\lambda, T) = \frac{dR}{d\lambda}$ – количество энергии, испускаемое единицей поверхности тела в единицу времени в единичном интервале длины волн, причем, $\frac{d\lambda}{d\omega} = -\frac{2\pi c}{\omega^2}$.

Следовательно, $f(\omega, T) = \frac{dR}{d\omega} = \frac{dR}{d\lambda} \cdot \frac{d\lambda}{d\omega} = -f(\lambda, T) \frac{2\pi c}{\omega^2}$. Для того чтобы сопоставить положения максимумов $f(\omega, T)$ и $f(\lambda, T)$, рассмотрим производную

$$\begin{aligned} \frac{df(\omega, T)}{d\omega} &= \frac{4\pi c}{\omega^3} f(\lambda, T) - \frac{2\pi c}{\omega^2} \frac{df(\lambda, T)}{d\omega} = \\ &= \frac{4\pi c}{\omega} f(\lambda, T) - \frac{2\pi c}{\omega^2} \frac{df(\lambda, T)}{d\lambda} \frac{d\lambda}{d\omega} = \\ &= \frac{2\pi c}{\omega^3} \left(2f(\lambda, T) + \frac{2\pi c}{\omega} \frac{df(\lambda, T)}{d\lambda} \right). \end{aligned}$$

В максимуме функции $f(\lambda, T)$ второе слагаемое равно нулю, а первое – не равно. Таким образом, при длине волны λ_{\max} частота не соответствует максимуму $f(\omega, T)$. Максимум $f(\lambda, T)$ находится при $\frac{df(\lambda, T)}{d\lambda} < 0$, т.е. на убывающей части кривой $f(\lambda, T)$. Для нахождения ω_{\max} исследуем производную функции Планка по частоте:

$$\frac{df(\omega, T)}{d\omega} = \frac{\hbar}{4\pi^2 c^2} \frac{\left[3\omega^2 \left[e^{\frac{\hbar\omega}{k_b T}} - 1 \right] - \frac{\hbar\omega^3}{k_b T} \exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_b T}\right) \right]}{\left[\exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_b T}\right) - 1 \right]^2}. \quad (2.1.20)$$

Приравнивая эту производную нулю, получаем трансцендентное уравнение для $x = \frac{\hbar\omega}{k_B T}$:

$$x = 3(1 - e^{-x}). \quad (2.1.21)$$

Приближенное решение этого трансцендентного уравнения может быть получено, предполагая, что $e^{-x_m} \ll 1$, т.е. $x_{\max} \approx 3 - 3e^{-3} = 2,85$. Более точный расчет дает

$$\frac{\hbar\omega_{\max}}{k_B T} = 2,8214.$$

Отсюда следует закон смещения Вина

$$\omega_{\max} = \left(2,8214 \frac{k_B}{\hbar} \right) T. \quad (2.1.22)$$

Таким образом, частоте ω_{\max} соответствует длина волны $\lambda(\omega_{\max}) = \frac{2\pi c}{\omega_{\max}} = 0,510 \cdot \frac{1}{T}$.

Сравнивая полученное выражение для $\lambda(\omega_{\max})$ с (2.1.19), находим

$$\frac{\lambda(\omega_{\max})}{\lambda_{\max}} = 1,760. \quad (2.1.23)$$

Пример 2.1.3. В модели абсолютно черного тела температура стенок полости поддерживается равной 2000 К. Площадь отверстия $\Delta S = 1 \text{ мм}^2$. Определить мощность излучения через это отверстие.

Решение. Воспользуемся законом Стефана–Больцмана, находим величину

$$P = \frac{\Delta E}{\Delta t} = R^* \cdot \Delta S = \sigma T^4 \cdot \Delta S,$$

где $\sigma = 5,6705 \cdot 10^{-8} \text{ Вт/м}^2 \cdot \text{К}^4$. Производя вычисления, получаем

$$P = 0,91 \text{ Вт}.$$

Пример 2.1.4. *Исследование спектра излучения Солнца показывает, что максимум испускательной способности соответствует длине волны $\lambda_{\max} = 500$ нм. Принимая Солнце за абсолютно черное тело, определить: 1) энергетическую светимость R_{\odot}^* Солнца; 2) поток энергии Φ , излучаемый Солнцем; 3) массу dm/dt электромагнитных волн всех длин, излучаемых Солнцем за единицу времени.*

Решение: 1. Энергетическая светимость R^* абсолютно черного тела выражается формулой Стефана–Больцмана:

$$R^* = \sigma T^4. \quad (2.1.24)$$

Температура излучающей поверхности может быть определена из закона смещения Вина: $\lambda_{\max} T = b$. Выразив отсюда температуру T и подставив её в формулу (2.1.24), получим

$$R^* = \sigma (b / \lambda_{\max})^4. \quad (2.1.25)$$

Произведя вычисления по формуле (2.1.25), найдем $R^* = 64,2$ МВт/м².

2. Поток энергии Φ излучаемый Солнцем, равен произведению испускательной способности Солнца на площадь S его поверхности:

$$\Phi = R^* S = 4\pi R_{\odot}^2 R^*, \quad (2.1.26)$$

где R_{\odot} – радиус Солнца. Подставив в формулу (2.1.26) значения

R^* , $R_{\odot} = 7,0 \cdot 10^8$ м и произведя вычисления, получим

$$\Phi = 4,0 \cdot 10^{26} \text{ Вт}. \quad (2.1.27)$$

3. Массу электромагнитных волн всех длин, излучаемых Солнцем в единицу времени, определим, применив закон пропорциональности массы и энергии:

$$\frac{dm}{dt} = \frac{\Phi}{c^2} = 4,4 \cdot 10^9 \text{ кг/с}. \quad (2.1.28)$$

Пример 2.1.5. *Длина волны λ_{\max} , на которую приходится максимум энергии в спектре излучения абсолютно черного тела, равна 0,58 мкм. Определить максимальную испускательную*

способность $f(\lambda_{\max}, T)$, рассчитанную на интервал длин волн $\Delta\lambda = 1 \text{ нм}$ вблизи λ_{\max} .

Решение. Максимальная испускательная способность пропорциональна пятой степени температуры и выражается вторым законом Вина:

$$f(\lambda_{\max}, T) = b_2 T^5 \quad (2.1.29)$$

Температуру T выразим из закона смещения Вина: $T = b/\lambda_{\max}$. Подставив полученную температуру в формулу (2.1.29), найдем

$$f(\lambda_{\max}, T) = b_2 \left(\frac{b}{\lambda_{\max}} \right)^5. \quad (2.1.30)$$

Приведенное в разделе 2.1.1 значение b (2.1.6) дано в единицах СИ, в которых интервал длин волн равен 1 м. По условию же задачи требуется вычислить испускательную способность, рассчитанную на интервал длин волн 1 нм. Поэтому надо пересчитать b_2 на заданный интервал длин волн:

$$\begin{aligned} b_2 &= 1,287 \cdot 10^{-5} \text{ Вт}/(\text{м}^3 \cdot \text{К}^5) = 1,287 \cdot 10^{-5} \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot 10^9 \text{ нм} \cdot \text{К}^5) = \\ &= 1,287 \cdot 10^{-14} \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{нм} \cdot \text{К}^5). \end{aligned} \quad (2.1.31)$$

Подставляя (2.1.31) и значения b и λ_{\max} в (2.1.30), находим $f(\lambda_{\max}, T) = 40,1 \text{ кВт}/(\text{м}^2 \cdot \text{нм})$.

Пример 2.1.6. При какой температуре с каждого квадратного сантиметра поверхности абсолютного черного тела вылетает ежесекундно в среднем по 10 фотонов в диапазоне длин волн от $\lambda_1 = 549 \text{ нм}$ до $\lambda_2 = 551 \text{ нм}$?

Решение. Используя определение спектральной плоскости энергетической светимости (2.1.10)

$$f(\lambda, T) = \frac{4\pi^2 \hbar c^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{2\pi\hbar c}{k_b T \lambda}} - 1},$$

находим энергию, испускаемую единицей поверхности абсолютно черного тела в интервале длин волн $\Delta\lambda$ ($\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$):

$$\Delta R = f(\lambda_1 T) \Delta\lambda = \frac{4\pi^2 \hbar c^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{2\pi\hbar c}{k_B T \lambda}} - 1} \Delta\lambda, \quad (2.1.32)$$

где $\lambda = 550$ нм – средняя длина волны в заданном диапазоне. Тогда среднее число фотонов N_0 , покидающих каждую единицу поверхности абсолютно черного тела, определяется выражением

$$N_0 = \frac{N}{\Delta S} = \frac{\Delta R}{\varepsilon_\phi} = \frac{2\pi c}{\lambda^4} \frac{1}{e^{\frac{2\pi\hbar c}{k_B T \lambda}} - 1} \Delta\lambda. \quad (2.1.33)$$

Из этого выражения сначала находим

$$e^{\frac{2\pi\hbar c}{k_B T \lambda}} = 1 + \frac{2\pi c \Delta S \Delta\lambda}{\lambda^4 N},$$

или

$$T = \frac{2\pi\hbar c}{\lambda k_B \ln\left(1 + \frac{2\pi c \Delta\lambda \Delta S}{\lambda^4 N}\right)} = 552 \text{ К}. \quad (2.1.34)$$

Пример 2.1.7. В замкнутом изолированном пространстве находится идеальный газ с концентрацией молекул n . При какой температуре объемная плотность кинетической энергии поступательного движения молекул газа равна объемной плотности энергии электромагнитного излучения абсолютно черного тела?

Решение. Средняя кинетическая энергия поступательного движения молекулы идеального газа равна

$$\varepsilon = \frac{3}{2} k_B T, \quad (2.1.35)$$

где k_B – постоянная Больцмана. При концентрации молекул n объемная плотность кинетической энергии поступательного движения молекул газа определяется как

$$u_{\text{кин}}(T) = \frac{3}{2}nk_{\text{Б}}T. \quad (2.1.36)$$

Согласно формуле Стефана–Больцмана, объемная плотность энергии электромагнитного излучения

$$u(T) = \frac{4}{c}R^* = \frac{4\sigma}{c}T^4. \quad (2.1.37)$$

Приравнивая друг к другу $u_{\text{кин}}(T)$ и $u(T)$, находим

$$T = \sqrt[3]{\frac{3nk_{\text{Б}}c}{8\sigma}}. \quad (2.1.38)$$

Проиллюстрируем полученный результат числовым примером. Предположим, что концентрация молекул такая же, как при нормальных условиях ($T = 273 \text{ К}$, $p = 101325 \text{ Па}$). Эта концентрация (число Лошмидта) равна $n = 2,686 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$. Подставляя n в полученное выражение (2.1.38) для температуры, находим

$$T = \sqrt[3]{\frac{3 \times 2,69 \cdot 10^{25} \times 1,38 \cdot 10^{-23} \times 3,00 \cdot 10^8}{8 \times 5,67 \cdot 10^{-8}}} = 9,03 \cdot 10^5 \text{ К}. \quad (2.1.39)$$

Давление газа при этих условиях составляет $p = nk_{\text{Б}}T = 3,35 \cdot 10^8 \text{ Па} = 3300 \text{ атм}$.

Пример 2.1.8. *Определить температуру абсолютно черного тела, спектральная яркость излучения которого равна яркости лазерного излучения светового диапазона с энергией в импульсе $E = 1 \text{ Дж}$. Считать, что расходимость лазерного пучка определяется дифракцией на выходной апертуре а некогерентностью излучения длительностью импульса.*

Решение. Предполагая, что эквивалентная температура абсолютно черного тела в световом диапазоне является высокой $\hbar\omega \ll k_{\text{Б}}T$, воспользуемся для оценки температуры классической формулой Релея–Джинса. В этом приближении поток излучения абсолютно черного тела равен (количество энергии, испускаемое единицей поверхности тела в единицу времени в единичном интервале частот):

$$r_{\omega}(T) = \frac{\omega^2}{4\pi^2 c^2} k_B T.$$

Спектральная яркость лазерного излучения, как и любого источника, по определению есть плотность потока излучения q_{ω} единицы поверхности в единичном интервале частот и в единичном телесном угле:

$$I_{\text{л}} = \frac{q_{\omega}}{\Delta\omega \Delta\Omega}. \quad (2.1.40)$$

Спектральная яркость излучения связана с энергией излучения соотношением

$$E = q_{\omega} \cdot \Delta S \Delta t = q_{\omega} \pi \frac{D^2}{4} \cdot \tau, \quad (2.1.41)$$

где D – диаметр выходной апертуры, а τ – длительность лазерного импульса (причем $\Delta\omega \sim \frac{1}{\tau}$). Так как расходимость лазерного пучка определяется дифракцией на выходной апертуре, то

$$\Delta\Omega = \pi \left(\frac{\lambda}{D} \right)^2 = 4\pi^3 \cdot c^2 \left(\frac{1}{\omega D} \right)^2. \quad (2.1.42)$$

Таким образом, спектральная яркость лазерного излучения

$$I_{\text{л}} = \frac{q_{\omega} \tau}{4\pi^3 c^2} \omega^2 D^2 = \frac{E \omega^2}{\pi^4 c^2}. \quad (2.1.43)$$

Приравнивая поток излучения абсолютного черного тела и спектральную яркость лазерного излучения, имеем

$$T = \frac{4E}{\pi^2 k_B} \simeq 4 \cdot 10^{22} \text{ К}. \quad (2.1.44)$$

В заключение следует отметить, что условие применимости формулы Релея–Джинса ($\omega < 7,5 \cdot 10^{14} \text{ Гц}$) для светового диапазона заведомо выполняется

$$\hbar\omega \ll k_B T \simeq \frac{4E}{\pi^2}.$$

Пример 2.1.9. Предположим, что Земля и Солнце полностью поглощают падающее на них электромагнитное излучение и Земля находится в равновесном состоянии при температуре T . Температура поверхности Солнца $T_0=5800$ К, радиус Солнца $R_\odot = 7 \cdot 10^8$ м, радиус Земли $R_3 = 6,4 \cdot 10^6$ м, а расстояние от Земли до Солнца $D=1,5 \cdot 10^{11}$ м. Определить равновесную температуру Земли T .

Решение. Согласно закону Стефана–Больцмана, плотность мощности излучения абсолютно черного тела, имеющего температуру T , равна

$$E(T) = \sigma T^4,$$

где $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}$ Вт/м²·К⁴ – постоянная Стефана–Больцмана. Применяя к излучению закон обратных квадратов, находим плотность мощности солнечной радиации на Земле:

$$E_\odot = \sigma T_0^4 \left(\frac{R_\odot}{D} \right)^2. \quad (2.1.45)$$

Следовательно, Земля поглощает излучение мощностью

$$E_3 = \sigma T_0^4 \left(\frac{R_\odot}{D} \right)^2 \pi R_3^2, \quad (2.1.46)$$

которая предполагается равной мощности теплового излучения Земли:

$$E_3 = \sigma T^4 \cdot 4\pi R_3^2. \quad (2.1.47)$$

Таким образом, приравнявая мощность теплового излучения Земли и поглощенную мощность Солнечного излучения, находим

$$T^4 = T_0^4 \left(\frac{R_\odot}{D} \right)^2, \text{ или } T = T_0 \sqrt{\frac{R_\odot}{2D}} = 4,82 \cdot 10^{-2} T_0. \quad (2.1.48)$$

Следовательно, полученное значение $T \approx 280$ К не значительно отличается от комнатной температуры.

Пример 2.1.10. Сферический спутник радиусом r , окрашенный в черный цвет, вращается по круговой орбите вокруг Солнца. Расстояние между спутником и центром Солнца равно D .

Солнце представляет абсолютно черный шар радиусом R_{\odot} , излучающий подобно черному телу при температуре $T_0 = 6000$ К. Угол, под которым Солнце видно со спутника, составляет $\angle\alpha = 32'$. Какова равновесная температура спутника?

Решение. Ежесекундно спутник поглощает энергию, равную

$$4\pi R_{\odot}^2 \sigma T_0^4 \cdot \frac{\pi r^2}{4\pi D^2}.$$

В то же время спутник в единицу времени излучает энергию $4\pi r^2 \sigma T^4$. Отсюда получаем равновесную температуру спутника

$$T^4 = T_0^4 R_{\odot}^2 / 4D^2 = \alpha^2 T_0^4 / 4 \text{ или } T = 288 \text{ К.}$$

2.1.3. Задачи для самостоятельной работы

Закон Стефана–Больцмана

Задача 2.1.1. Вследствие повышения температуры максимум спектральной энергетической светимости абсолютно черного тела уменьшился с 2 до 1 мкм. Во сколько раз изменилась интегральная энергетическая светимость? (в 16 раз)

Задача 2.1.2. Определить температуру T при которой энергетическая светимость R^* абсолютно черного тела равна 10 кВт/м^2 . (648 К)

Задача 2.1.3. Поток энергии Φ излучаемый из смотрового окошка плавильной печи, равен 34 Вт. Определить температуру T печи, если площадь отверстия $S = 6 \text{ см}^2$. (1000 К)

Задача 2.1.4. Определить энергию W излучаемую за время $t=1$ мин из смотрового окошка площадью $S=8 \text{ см}^2$ плавильной печи, если ее температура $T = 1,72 \text{ кК}$. (5,64 кДж)

Задача 2.1.5. Температура T верхних слоев звезды Сириус равна 10 кК. Определить поток энергии Φ излучаемый с поверхности площадью $S=1 \text{ км}^2$ этой звезды. (567 ТВт)

Задача 2.1.6. Найти относительное увеличение энергетической светимости абсолютно черного тела при повышении его температуры на 1%. (4%)

Задача 2.1.7. Во сколько раз надо увеличить термодинамическую температуру абсолютно черного тела, чтобы его энергетическая светимость возросла в два раза? (в 1,19 раза)

Задача 2.1.8. Определить установившуюся температуру T зачерненной металлической пластинки, расположенной перпендикулярно солнечным лучам вне земной атмосферы на среднем расстоянии от Земли до Солнца. Значение солнечной постоянной $C = 1,4 \text{ кДж}/(\text{м}^2 \cdot \text{с})$. (396 К)

Задача 2.1.9. Плавильная печь потребляет мощность $P = 1 \text{ кВт}$. Температура T ее внутренней поверхности при открытом отверстии площадью $S = 25 \text{ см}^2$ равна 1,2 кК. Считая, что отверстие печи излучает как абсолютно черное тело, определить, какая часть мощности рассеивается стенками. (70,6 %)

Задача 2.1.10. Можно условно принять, что Земля излучает как серое тело, находящиеся при температуре $T = 280 \text{ К}$. Энергетическая светимость поверхности Земли равна $R = 325 \text{ кДж}/(\text{м}^2 \cdot \text{ч})$. Определить поглощательную способность a Земли, считая ее одинаковой для всех интервалов частот. ($a = 0,26$)

Задача 2.1.11. Мощность P излучения шара радиусом $r = 10 \text{ см}$ при некоторой постоянной температуре $T = 1 \text{ кВт}$. Найти эту температуру, считая шар серым телом с поглощательной способностью $a = 0,25$, одинаковой для всех длин волн. (866 К)

Задача 2.1.12. Определить, за какое время медный шар, помещенный в вакуум, охладится с 500 до 300 К. Радиус шара 1 см, поглощательная способность поверхности шара 0,8, удельная теплоемкость меди 390 Дж/кг·К. Влиянием окружающих тел пренебречь. (За 41 мин)

Закон Вина

Задача 2.1.13. На какую длину волны приходится максимум испускательной способности абсолютно черного тела при температуре $t = 0^\circ \text{ С}$? (10,6 мкм)

Задача 2.1.14. Температура T верхних слоев Солнца равна 5,3 кК. Считая Солнце абсолютно черным телом, определить

длину волны, которой соответствует максимальная испускательная способность Солнца. (547 нм)

Задача 2.1.15. Определить температуру T абсолютно черного тела, при которой максимум испускательной способности приходится: 1) на красную границу видимого спектра ($\lambda = 750$ нм); 2) на фиолетовую ($\lambda = 380$ нм). (1 – 379кК; 2 – 7,6 кК)

Задача 2.1.16. Максимум испускательной способности яркой звезды Арктур приходится на длину волны 580 нм. Принимая, что звезда излучает как абсолютно черное тело, определить температуру T ее поверхности. (5000 К)

Задача 2.1.17. Вследствие изменения температуры абсолютно черного тела максимум испускательной способности сместился с $\lambda_{\max 1} = 2,4$ мкм на $\lambda_{\max 2} = 0,8$ мкм. Как и во сколько раз изменилась: 1) энергетическая светимость тела и 2) его максимальная испускательная способность? (1 – увеличилась в 81 раз; 2 – увеличилась в 243 раза)

Задача 2.1.18. При увеличении термодинамической температуры T абсолютно черного тела в два раза длина волны λ_{\max} , на которую приходится максимум испускательной способности, уменьшилась на $\Delta\lambda = 400$ нм. Определить начальную температуры T . (3,62 кК)

Задача 2.1.19. Эталон единицы силы света – кандела – представляет собой полный (излучающий волны всех длин) излучатель, поверхность которого площадью $S = 0,5305$ мм² находится при температуре затвердевания платины $t = 1063^\circ$ С. Определить мощность P излучателя. (95,8 мВт)

Задача 2.1.20 Максимальная испускательная способность $f(\lambda_{\max}, T)$ абсолютно черного тела равна $4,16 \cdot 10^{11}$ Вт/м³. На какую длину волны она приходится? (1,45 мкм)

Задача 2.1.21. При нагревании абсолютно черного тела длина волны, на которую приходится максимум спектральной плотности энергетической светимости, изменилась от 0,6 до 0,5 мкм. Во сколько раз при этом увеличилась энергетическая светимость тела?

Задача 2.1.22. Вследствие изменения температуры абсолютного черного тела максимум спектральной плоскости энергетической светимости сместился с 2,4 на 0,8 мкм. Как и во сколько раз изменилась энергетическая светимость тела и максимальное значение спектральной плотности энергетической светимости?

Задача 2.1.23. Мощность излучения абсолютно черного тела в интервале длин волн от λ до $\lambda + d\lambda$ равна $E(\lambda)d\lambda$. Построить график зависимости $E(\lambda)$ при температуре тела $T_1 = 2000$ К. В том же масштабе построить зависимость $E(\lambda)$ для температуры тела $T_2 = 1000$ К. (Площадь, ограниченная кривой $E(\lambda)$, уменьшится в $2^4 = 16$ раз, а значение λ_{\max} , соответствующее максимуму кривой, увеличится вдвое)

2.2. Квантовая природа света. Фотон

2.2.1. Основные понятия, законы и формулы

- Импульс фотона:

$$p = \frac{\varepsilon_\gamma}{c} = \frac{\hbar\omega}{c} = \frac{2\pi\hbar}{\lambda}. \quad (2.2.1)$$

- Энергия фотона:

$$\varepsilon = \hbar\omega = \frac{2\pi\hbar c}{\lambda}. \quad (2.2.2)$$

- Формула Эйнштейна для фотоэффекта:

$$\varepsilon = A + T_{\max}, \quad (2.2.3)$$

где ε – энергия фотона, падающего на поверхность металла;
 A – работа выхода электрона из металла; T_{\max} – максимальная кинетическая энергия фотоэлектрона.

При небольших энергиях фотоэлектронов $T_{\max} = \frac{m_e v_{\max}^2}{2}$, в релятивистском случае $T_{\max} = m_e c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v_{\max}^2 / c^2}} - 1 \right)$, где m_e – масса покоя электрона, c – скорость света в вакууме, v_{\max} – максимальная скорость фотоэлектрона.

- Красная граница фотоэффекта:

$$\omega_{\text{кр}} = \frac{A}{\hbar} \text{ или } \lambda_{\text{кр}} = \frac{2\pi\hbar c}{A} \quad (2.2.4)$$

где $\lambda_{\text{кр}}(\omega_{\text{кр}})$ – максимальная длина волны (минимальная круговая частота) излучения, при которых еще возможен фотоэффект.

- Задерживающее напряжение:

$$U_{\text{зад}} = \frac{\hbar}{e} (\omega - \omega_{\text{кр}}), \quad (2.2.5)$$

где e – заряд электрона.

- Давление, производимое светом при нормальном падении:

$$P = \frac{E_{\Phi}}{c} (1 + \rho) = w(1 + \rho), \quad (2.2.6)$$

где E_{Φ} – плотность потока световой энергии (энергия, падающая в единицу времени на единицу поверхности), c – скорость света в вакууме, w – средняя плотность энергии в световой волне, ρ – коэффициент отражения поверхности.

- Эффект Комптона:

изменение длины волны $\Delta\lambda$ при рассеянии его на электроне на угол θ .

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{2\pi\hbar}{mc} (1 - \cos\theta) = \frac{4\pi\hbar}{mc} \sin^2 \frac{\theta}{2}, \quad (2.2.7)$$

где m – масса электрона отдачи; λ и λ' – длины волн фотона до и после рассеяния:

комптоновская длина волны

$$\lambda_c = \frac{2\pi\hbar}{mc}. \quad (2.2.8)$$

(при рассеянии фотона на электроне $\lambda_c = \frac{2\pi\hbar}{m_e c} = 2,436$ пм).

2.2.2. Методические рекомендации по решению задач

Пример 2.2.1. *Определить длину волны и частоту фотона, энергия которого равна энергии покоя: 1) электрона; 2) протона.*

Решение. Энергия покоя частицы (электрона или протона) равна mc^2 , энергия же фотона есть $\hbar\omega$. Приравнивая эти величины, находим $\omega = mc^2 / \hbar$. Для вычислений здесь удобнее воспользоваться значением постоянной Планка $\hbar = 6,582 \cdot 10^{-22}$ МэВ·с (см. табл. П.12 приложения).

1. Энергия покоя электрона равна $m_e c^2 = 0,511$ МэВ, и сразу находим частоту соответствующего фотона:
 $\omega = 0,511 / 6,582 \cdot 10^{-22} = 7,76 \cdot 10^{20}$ Гц. Длина волны
 $\lambda = 2\pi c / \omega = 2,43 \cdot 10^{-12}$ м = 2,43 пм.

2. Энергия покоя протона $m_p c^2 = 938,3$ МэВ. Частота фотона той же энергии равна $\omega = 938,3 / 6,582 \cdot 10^{-22} = 1,43 \cdot 10^{24}$ Гц, длина волны $\lambda = 2\pi c / \omega = 1,32 \cdot 10^{-15}$ м = 1,32 фм.

Пример 2.2.2. *Частота фотона, испущенного с поверхности звезды, меняется вследствие гравитационного притяжения. Найти это изменение (так называемое красное смещение). Вычислить для примера смещение желтой линии натрия ($\lambda = 589$ нм) для света, испущенного Солнцем.*

Решение. Для решения этой задачи мы вынуждены принять некое допущение, оправданное тем, что в итоге мы получим правильный результат, следующий также из более полной теории, а именно: припишем фотону *гравитационную* массу m_γ , исходя из общего соотношения между массой и энергией: $m_\gamma = \hbar\omega / c^2$. (Эта масса не имеет ничего общего с массой покоя фотона, которая равна нулю.) Тогда фотон частотой ω , испущенный на поверхности Солнца, имеет также и потенциальную энергию притяжения $U = -G \frac{m_\gamma M_\odot}{R_\odot}$, где M_\odot и R_\odot – масса и радиус Солнца. На бесконечно большом расстоянии частота фотона становится равной ω' , а потенциальная энергия его равна нулю. Закон сохранения энергии приводит к уравнению

$$\hbar\omega - G \frac{\hbar\omega M_\odot}{R_\odot c^2} = \hbar\omega', \quad (2.2.9)$$

откуда следует соотношение между частотами:

$$\omega' = \omega \left(1 - \frac{GM_\odot}{R_\odot c^2} \right). \quad (2.2.10)$$

Отсюда получаем относительное изменение частоты фотона $\Delta\omega / \omega = (\omega' - \omega) / \omega$:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = -\frac{GM_\odot}{R_\odot c^2}. \quad (2.2.11)$$

Подставляя численные значения, находим

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \times 1,99 \cdot 10^{30}}{6,96 \cdot 10^8 \times (3 \cdot 10^8)^2} = -2,1 \cdot 10^{-6}.$$

Смещение для длин волн определится отсюда при использовании соотношений $\omega = 2\pi c / \lambda$ и $\Delta\omega = -2\pi c \Delta\lambda / \lambda^2$, так что $\Delta\omega / \omega = -\Delta\lambda / \lambda$. Таким образом, сдвиг длины волны для

желтой линии натрия в нашей задаче составит $\Delta\lambda = 2,1 \cdot 10^{-6} \times 589 = 0,0012$ нм.

Гравитационное красное смещение можно охарактеризовать так называемой *условной скоростью* V , т.е. скоростью источника, при которой эффект Доплера привел бы к такому же смещению частоты света. Так как красное смещение мало, то формулы для эффекта Доплера имеют вид $\omega' = \omega(1 - V/c)$, так что условная скорость равна $V = c(-\Delta\omega/\omega)$. В нашем примере $V = 3 \cdot 10^8 \times 2,1 \cdot 10^{-6} = 630$ м/с. Красное смещение впервые наблюдалось у белых карликов, плотность которых гораздо выше Солнечной (например, для плотной звезды Сириус V условная скорость равна 20 км/с). В 1959 г. красное смещение было измерено в Земных экспериментах, где условная скорость крайне мала – 0,75 мкм/с.

Пример 2.2.3. *Определить максимальную скорость v_{max} фотоэлектронов, вырываемых с поверхности серебра:*

1) ультрафиолетовым излучением с длиной волны $\lambda_1 = 0,155$ мкм;

2) γ -излучением с длиной волны $\lambda_2 = 2,47$ пм.

Решение. Энергию фотонов в обоих случаях вычисляем по формуле $\varepsilon = 2\pi\hbar c / \lambda$ (значение комбинации $\hbar c$ приведено в табл. П.13 приложения):

$$\varepsilon_1 = \frac{2\pi \times 197,3 \cdot 10^{-9}}{0,155 \cdot 10^{-6}} = 8,0 \text{ эВ};$$

$$\varepsilon_2 = \frac{2\pi \times 197,3 \cdot 10^{-9}}{2,47 \cdot 10^{-12}} = 0,502 \text{ МэВ}.$$

Работа выхода A указана в табл. П.4 приложения: для серебра $A = 4,7$ эВ. Стало быть, энергия фотоэлектрона равна,

соответственно, $T_{\max} = \varepsilon - A$; находим $T_{\max 1} = 3,3$ эВ для первого случая и $T_{\max 2} = 0,502$ МэВ – для второго.

В первом случае кинетическая энергия намного меньше энергии покоя электрона $m_e c^2 = 0,511$ МэВ. Стало быть, имеет смысл пользоваться нерелятивистской формулой $T_{\max 1} = m_e v_{\max 1}^2 / 2$, откуда находим

$$v_{\max 1} = \sqrt{\frac{2T_{\max 1}}{m_e}} = c \sqrt{\frac{2T_{\max 1}}{m_e c^2}} = 3 \cdot 10^8 \sqrt{\frac{2 \times 3,3}{0,511 \cdot 10^6}} = 1,08 \cdot 10^6 \text{ м/с.}$$

Во втором случае кинетическая энергия сравнима с энергией покоя электрона и обязательно использование релятивистской формулы $T_{\max 2} = m_e c^2 \left(1 / \sqrt{1 - v_{\max 2}^2 / c^2} - 1 \right)$, откуда получаем

$$\begin{aligned} v_{\max 2} &= c \frac{\sqrt{1 + 2m_e c^2 / T_{\max 2}}}{1 + m_e c^2 / T_{\max 2}} = c \frac{\sqrt{1 + 2 \times 0,511 / 0,502}}{1 + 0,511 / 0,502} = \\ &= 0,863c = 2,59 \cdot 10^8 \text{ м/с.} \end{aligned}$$

Пример 2.2.4. Уединенный цинковый шарик облучается ультрафиолетовым светом с длиной волны $\lambda = 250$ нм. До какого максимального потенциала зарядится шарик? Работа выхода электрона для цинка $A_{\text{вых}} = 3,74$ эВ.

Решение. Выбитые электроны при максимально возможном заряде не должны уходить на бесконечность, т.е.

$$eU_{\max} = E_{\text{кин}} = \frac{hc}{\lambda} - A_{\text{вых}}. \quad (2.2.12)$$

Таким образом, $U_{\max} = \left(\frac{hc}{\lambda} - A_{\text{вых}} \right) / e = 1,22$ В.

Пример 2.2.5. Между фотокатодом и анодом приложена такая задерживающая разность потенциалов, что наиболее быстрые фотоэлектроны могут пролететь только две трети расстояния между катодом и анодом. Смогут ли они долететь до

анода, если расстояние между электродами уменьшить на одну треть при фиксированной разности потенциалов?

Решение. Точка, до которой могут долететь фотоэлектроны за счет своей первоначальной кинетической энергии, определяется задерживающей разностью потенциалов:

$$\frac{mV_{\max}^2}{2} = eE \cdot x = e \frac{U}{L} \cdot x = e \frac{U}{L} \cdot \frac{2}{3} L = \frac{2}{3} eU, \quad (2.2.13)$$

где L – расстояние между электродами.

При фиксированной разности потенциалов между электродами, при уменьшении расстояния на одну треть фотоэлектроны по-прежнему смогут пролететь только две трети расстояния между катодом и анодом.

Пример 2.2.6. Определить красную границу $\lambda_{\text{кр}}$ фотоэффекта для цезия, если при облучении его поверхности фиолетовым светом с длиной волны $\lambda = 400$ нм максимальная скорость v_{\max} фотоэлектрона равна $0,65$ Мм/с.

Решение. На красной границе фотоэффекта скорость фотоэлектрона и его кинетическая энергия равны нулю. Поэтому

$$\lambda_{\text{кр}} = \frac{2\pi\hbar c}{A}. \quad (2.2.14)$$

Работу выхода найдем из соотношения Эйнштейна, учитывая, что $v_{\max} \ll c$:

$$\frac{2\pi\hbar c}{\lambda} = A + \frac{m_e v_{\max}^2}{2}, \quad (2.2.15)$$

откуда

$$A = \frac{2\pi\hbar c}{\lambda} - \frac{m_e v_{\max}^2}{2} = \frac{2\pi\hbar c}{\lambda} \left(1 - \frac{m_e v_{\max}^2 \lambda}{4\pi\hbar c} \right). \quad (2.2.16)$$

Подставляя (2.2.14) в (2.2.16), получаем

$$\lambda_{\text{кр}} = \frac{\lambda}{1 - \frac{m_e v_{\max}^2 \lambda}{4\pi\hbar c}}. \quad (2.2.17)$$

Подставляя сюда численные значения, находим окончательно

$$\lambda_{\text{кр}} = \frac{400 \cdot 10^{-9}}{1 - \frac{9,11 \cdot 10^{-31} \times (0,65 \cdot 10^6)^2 \times 400 \cdot 10^{-9}}{4\pi \times 1,054 \cdot 10^{-34} \times 3 \cdot 10^8}} =$$

$$= 653 \cdot 10^{-9} = 653 \text{ нм.} \quad (2.2.18)$$

Пример 2.2.7. Пучок монохроматического света длиной волны $\lambda = 663 \text{ нм}$ падает нормально на зеркальную плоскую поверхность. Мощность пучка $\Phi = 0,6 \text{ Вт}$. Найти силу F , с которой свет давит на поверхность и число N фотонов, падающих за нее за время $t = 5 \text{ с}$.

Решение. Плотность потока световой энергии равна $E_{\Phi} = \Phi/S$ где S – площадь мишени. Давление света определяется тогда выражением

$$P = \frac{E_{\Phi}}{c}(1 + \rho) = \frac{\Phi}{Sc}(1 + \rho). \quad (2.2.19)$$

$$\text{Сила давления: } F = PS = \frac{\Phi}{c}(1 + \rho).$$

Так как поверхность зеркальна, то $\rho = 1$ и $F = 0,6 \times 2 / 3 \cdot 10^8 = 4 \cdot 10^{-9} \text{ Н}$. Энергия фотона $\varepsilon = 2\pi\hbar c / \lambda = 2\pi \times 1,054 \cdot 10^{-34} \times 3 \cdot 10^8 / 663 \cdot 10^{-9} = 3,00 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$, так что искомое число фотонов равно $N = \Phi t / \varepsilon = 10^{19}$.

Пример 2.2.8. Параллельный пучок света длиной волны $\lambda = 500 \text{ нм}$ падает нормально на зачерненную поверхность, производя давление $P = 10 \text{ мкПа}$. Определить: 1) концентрацию n фотонов в пучке; 2) число N фотонов, проходящих через $S = 1 \text{ м}^2$ площади за время $t = 1 \text{ с}$.

Решение:

1. Средняя плотность энергии в пучке находится из выражения для давления: $w = P / (1 + \rho)$. Концентрация n фотонов может быть найдена, если известна их энергия:

$$n = \frac{w}{\varepsilon} = w \frac{\lambda}{2\pi\hbar c} = \frac{P\lambda}{2\pi\hbar c(1+\rho)}. \quad (2.2.20)$$

Подставляем теперь численные данные (для зачерненной поверхности $\rho = 0$):

$$n = \frac{10 \cdot 10^{-6} \times 500 \cdot 10^{-9}}{2\pi \times 1,054 \cdot 10^{-34} \times 3 \cdot 10^8} = 2,52 \cdot 10^{13} \text{ м}^{-3}.$$

2. За время t через площадку S пройдут все фотоны из объема Sct , т.е. $N = nSct = 2,52 \cdot 10^{13} \times 3,10^8 = 7,55 \cdot 10^{21}$.

Пример 2.2.9. Плоская световая волна интенсивностью (плотностью потока световой энергии) $E_{\phi} = 2 \text{ кВт/м}^2$ падает на плоское зеркало с коэффициентом отражения $\rho = 0,8$ под углом $\varphi = 30^\circ$. Определить световое давление на зеркало.

Решение. Исходя из определения давления и применив к зеркалу второй закон И. Ньютона, можно записать

$$P = \frac{F_n}{\Delta S} = \frac{F_n \Delta t}{\Delta S \Delta t} = \frac{(\Delta \vec{K})_n}{\Delta S \Delta t}, \quad (2.2.21)$$

где $(\Delta \vec{K})_n$ – проекция импульса $\Delta \vec{K}$, сообщенная фотонами зеркалу за время Δt , на направление нормами к нему; ΔS – площадь освещенной поверхности. Величины ΔS и $(\Delta \vec{K})_n$ зависят от угла падения φ . Найдем эти зависимости: ΔS_0 – поперечная площадь светового пучка: $\Delta S = \frac{\Delta S_0}{\cos \varphi}$; $\Delta \vec{K} = \vec{K}' - \vec{K}$;

\vec{K} – суммарный импульс фотонов, падающих на зеркало;

\vec{K}' – суммарный импульс фотонов, отраженных от зеркала.

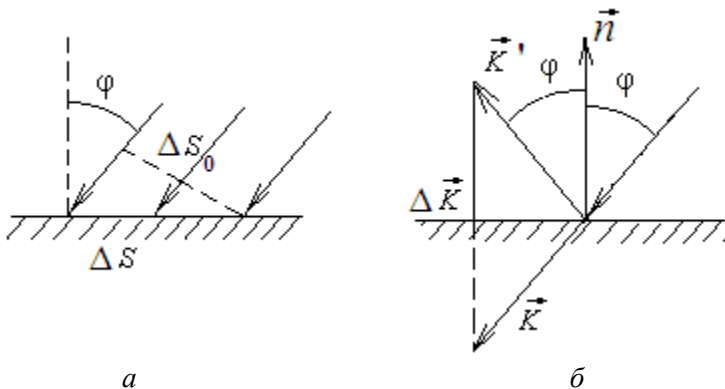


Рис. 1

Переходя к проекциям на направление нормали \vec{n} , получаем

$$\left(\Delta \vec{K}\right)_n = K'_n - K_n = K' \cos \varphi + K \cos \varphi = (K' + K) \cos \varphi. \quad (2.2.22)$$

Таким образом,

$$P = \frac{(K' + K) \cos^2 \varphi}{\Delta S_0 \Delta t}. \quad (2.2.23)$$

При $\varphi = 0 \rightarrow P = P_0$ и $P = \frac{K' + K}{\Delta S_0 \Delta t}$, но, с другой стороны,

$$P_0 = \frac{E_\Phi}{c}(1 + \rho), \text{ следовательно, } P = \frac{E_\Phi}{c}(1 + \rho) \cos^2 \varphi = 9 \text{ мкПа.}$$

Пример 2.2.10. *Параллельный пучок света падает по нормали на зачеркнутую плоскую поверхность, производя давление P . При замене поверхности на зеркальную, при каком угле падения (угол отсчитывается от нормали к поверхности) давление света не изменяется?*

Решение. Давление, производимое световой волной, падающей под углом Φ :

$$P = \frac{E_\Phi}{c}(1 + \rho) \cos^2 \varphi, \quad (2.2.24)$$

где E_Φ – плотность потока световой энергии (энергия, падающая в единицу времени на единицу площади поверхности); c –

скорость света в вакууме; ρ – коэффициент отражения поверхности.

В первом случае $\Phi = 0$ и $\rho = 0$, поэтому $P_1 = \frac{E_\Phi}{c}$.

Во втором случае $\rho = 1$ и $P_2 = \frac{E_\Phi}{c} 2 \cdot \cos^2 \varphi = 2P_1 \cdot \cos^2 \varphi$.

Таким образом, при замене зачерненной поверхности на зеркальную, давление не изменяется $P_2 = P_1$, если угол падения

будет равен: $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

Пример 2.2.11. Фотон с энергией $E_\Phi = 2m_e c^2$ (m_e – масса электрона) при рассеянии на покоящемся электроне теряет половину своей энергии. Определить угол разлета α между рассеянным фотоном и электроном отдачи.

Решение. В рассматриваемом случае полная энергия фотона и электрона до столкновения равна $E_\Phi + m_e c^2 = 3m_e c^2$, а после него

$$\sqrt{p^2 c^2 + m_e^2 c^4} + E_\Phi / 2 = \sqrt{p^2 c^2 + m_e^2 c^4} + m_e c^2, \quad (2.2.25)$$

где p – импульс электрона отдачи. Величина этого импульса определяется из закона сохранения энергии:

$$3m_e c^2 = \sqrt{p^2 c^2 + m_e^2 c^4} + m_e c^2 \quad (2.2.26)$$

Отсюда следует, что $p = \sqrt{3} m_e c$. А поскольку импульс падающего и рассеянного фотонов равны $p_\Phi = \frac{E_\Phi}{c} = 2m_e c$ и

$p'_\Phi = \frac{E'_\Phi}{c} = m_e c$ соответственно, то отношение импульсов

падающего фотона, электрона отдачи и рассеянного фотона составляет $2:\sqrt{3}:1$, что соответствует углу разлета, равному $\frac{\pi}{2}$

(это следует из векторного выражения для закона сохранения импульса $\vec{P}_\Phi = \vec{P}'_\Phi + \vec{P}_e$).

Пример 2.2.12. Фотон с импульсом $p = 1,02$ МэВ/с, где c – скорость света, рассеялся на покоившемся свободном электроне, в результате чего импульс фотона стал равным $p' = 0,255$ МэВ/с.

1. Под каким углом рассеялся фотон? 2. Какая доля энергии первичного фотона приходится на кинетическую энергию электрона отдачи?

Решение. При столкновении фотона со свободным электроном выполняется соотношение

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta),$$

где m_e – масса покоя электрона, θ – угол рассеяния фотона.

1. Запишем это соотношение, выразив длины волн падающего (λ) и рассеянного (λ') фотонов через импульсы $\left(p_\phi = \frac{h}{\lambda} \right)$:

$$\frac{h}{p'} - \frac{h}{p} = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta). \quad (2.2.27)$$

После преобразований получим

$$\begin{aligned} \cos \theta &= 1 - m_e c \frac{p - p'}{p p'}; \\ \theta &= \pm \arccos \left(1 - m_e c^2 \frac{pc - p'c}{pc p'c} \right) = \pm \frac{2}{3} \pi. \end{aligned} \quad (2.2.28)$$

2. Запишем закон сохранения энергии:

$$E_\phi + m_e c^2 = E'_\phi + m_e c^2 + T,$$

где T – кинетическая энергия электрона отдачи.

$$\frac{T}{E_\phi} = \frac{E_\phi - E'_\phi}{E_0} = \frac{p - p'}{p} = 0,75,$$

т.е. на кинетическую энергию электрона отдачи приходится 75 % энергии падающего фотона.

Пример 2.2.13. Фотон с энергией $E_\phi = 4m_e c^2$ рассеялся на свободном покоящемся электроне под углом $\theta = 90^\circ$. Определить:

1) энергию рассеянного фотона; 2) кинетическую энергию T электрона; 3) направление его движения.

Решение:

1. Воспользовавшись формулой Комптона, для энергии рассеянного фотона имеем

$$\lambda' - \lambda = \frac{2\pi\hbar}{m_e c} (1 - \cos\theta)$$

или

$$\frac{2\pi\hbar c}{E'_\phi} - \frac{2\pi\hbar c}{E_\phi} = \frac{2\pi\hbar}{m_e c} (1 - \cos\theta). \quad (2.2.29)$$

Отсюда находим энергию рассеянного фотона

$$E'_\phi = \frac{E_\phi}{\left(\frac{E_\phi}{m_e c^2}\right)(1 - \cos\theta) + 1} = 0,8m_e c^2. \quad (2.2.30)$$

2. Кинетическая энергия электрона отдачи, как это следует из закона сохранения энергии, равна разности между энергией E_ϕ падающего фотона и энергией E'_ϕ рассеянного фотона:

$$T = E_\phi - E'_\phi = 4m_e c^2 - 0,8m_e c^2 = 3,2m_e c^2 \approx 1,6 \text{ МэВ}. \quad (2.2.31)$$

3. Направление движения электрона отдачи найдем, применив закон сохранения импульса:

$$\vec{p}_\phi = \vec{p}'_\phi + \vec{p}_e. \quad (2.2.32)$$

Возводя в квадрат, получаем

$$p_\phi^2 = p_\phi'^2 + p_e^2 + 2p'_\phi p_e \cos\alpha, \quad (2.2.33)$$

где угол α – угол между импульсом рассеянного фотона импульсом электрона отдачи, т.е.

$$\alpha = \theta + \phi,$$

здесь угол ϕ определяет направление движения электрона отдачи (ϕ – угол между направлением движения падающего фотона и вектором импульса электрона отдачи).

Таким образом,

$$\cos\alpha = \frac{p_\phi^2 c^2 - p_\phi'^2 c^2 - p_e^2 c^2}{2p'_\phi c \cdot p_e c}. \quad (2.2.34)$$

Из закона сохранения энергии находим импульс электрона отдачи:

$$E_{\phi} + m_e c^2 = \sqrt{p_e^2 c^2 + m_e^2 c^4} + E'_{\phi} \quad (2.2.35)$$

или

$$p_e^2 c^2 = (E_{\phi} - E'_{\phi})^2 + 2(E_{\phi} - E'_{\phi}) m_e c^2.$$

Подставляя величину импульса электрона отдачи в выражение для $\cos \varphi = -\sin \varphi$, получаем

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \cos(\theta + \varphi) = \\ &= -\sin \varphi = \frac{E'_{\phi} (E_{\phi} - E'_{\phi}) - m_e c^2 (E_{\phi} - E'_{\phi})}{E'_{\phi} \sqrt{(E_{\phi} - E'_{\phi})^2 + 2(E_{\phi} - E'_{\phi}) m_e c^2}}. \end{aligned} \quad (2.2.36)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \sin \varphi &= \frac{3,2 \cancel{m_e} c^2 \cdot 0,2 m_e c^2}{0,8 m_e c^2 m_e c^2 \sqrt{(3,2)^2 + 2 \cdot 3,2}} = \\ &= \frac{0,8}{4,08} = 0,196; \quad \varphi = 11,5^\circ \end{aligned} \quad (2.2.37)$$

2.2.3. Задачи для самостоятельной работы

ФОТОНЫ

Задача 2.2.1. В радиоастрономии важную роль играет излучение длиной волны 21 см. Какова энергия соответствующего фотона? (5,9 мкэВ)

Задача 2.2.2. Какой скоростью должен обладать электрон для того, чтобы иметь такой же импульс, как и фотон с длиной волны

$$\lambda = 1 \text{ \AA} ? \left(v = \frac{2\pi h}{\lambda m_0} = 0,7 \cdot 10^7 \text{ м/с} \right)$$

Задача 2.2.3. Каковы частота и длина волны у фотона, имеющего энергию: 1) 1 эВ; 2) 3,4 эВ? ($1 - \nu = 2,42 \cdot 10^{14}$ Гц, $\lambda = 1,24$ мкм; $2 - \nu = 8,22 \cdot 10^{14}$ Гц, $\lambda = 0,365$ мкм)

Задача 2.2.4. Определить энергию и импульс фотона, которому соответствует длина волны $\lambda = 380$ нм (фиолетовая граница видимого спектра). ($\varepsilon = 3,26$ эВ; $p = 1,74 \cdot 10^{-27}$ кг·м/с)

Задача 2.2.5. Определить энергию и длину волны фотона, импульс которого равен импульсу электрона, движущемуся со скоростью 10 Мм/с. ($\varepsilon = 17,1$ кэВ, $\lambda = 72,7$ пм)

Задача 2.2.6. При идеальных условиях глаз человека способен ощущать свет, если в него в секунду попадает 100 фотонов длиной волны 550 нм. Какова мощность такого «пучка» света? ($3,6 \cdot 10^{-17}$ Вт)

Задача 2.2.7. Ультрафиолетовая лампа испускает свет длиной волны $\lambda_{\phi} = 400$ нм, инфракрасная лампа излучает на длине волны $\lambda_{\text{кр}} = 700$ нм. Мощность излучения обеих ламп одинакова – 400 Вт. Сколько фотонов в единицу времени испускает каждая лампа? ($n_{\phi} = 8,05 \cdot 10^{20} \text{ с}^{-1}$, $n_{\text{кр}} = 1,41 \cdot 10^{21} \text{ с}^{-1}$)

Задача 2.2.8. Найти импульс фотона видимого света ($\lambda = 500$ нм) и сравнить его с импульсом молекулы водорода при комнатной температуре. При какой длине волны импульс фотона равен импульсу молекулы водорода при этой температуре? Масса молекулы водорода $M = 2,35 \cdot 10^{-24}$ г. ($p_{\phi} = \frac{\hbar\omega}{c} \approx 1,3 \cdot 10^{-27}$ кг м/с
 $p_{H_2} \approx \sqrt{3k_B T \cdot M} \approx 5,4 \cdot 10^{-24}$ кг м/с; $\lambda_{\phi} = h / \sqrt{3k_B T M} = 0,12$ нм)

Фотоэффект

Задача 2.2.9. Определить работу выхода A электрона из натрия, если красная граница фотоэффекта $\lambda_{\text{кр}} = 500$ нм. (2,48 эВ)

Задача 2.2.10. Будет ли наблюдаться фотоэффект, если на поверхность серебра направить ультрафиолетовое излучение с длиной волны 300 нм? (Нет, так как энергия фотона 4,13 эВ меньше работы выхода 4,7 эВ)

Задача 2.2.11. Какая доля энергии фотона израсходована на работу вырывания фотоэлектрона, если красная граница фотоэффекта $\lambda_{\text{кр}} = 307$ нм и максимальная кинетическая энергия фотоэлектрона $T_{\text{max}} = 1$ эВ? (80 %)

Задача 2.2.12. На поверхность лития падает монохроматический свет длиной волны $\lambda = 310$ нм. Чтобы прекратить эмиссию электронов, надо приложить задерживающую разность потенциалов U не менее 1,7 В. Чему равна работа выхода A ? ($A = 2,3$ эВ)

Задача 2.2.13. Задерживающее напряжение при освещении некоторого металла светом длиной волны $\lambda_1 = 491$ нм равно $U_1 = 0,70$ В. При смене источника света задерживающее напряжение увеличилось до $U_2 = 1,43$ В. 1) Какова длина волны λ_2 второго источника света? 2) Чему равна работа выхода для данного металла? (1 – $\lambda_2 = 380$ нм; 2 – $A = 1,83$ эВ)

Задача 2.2.14. Определить постоянную Планка, если известно, что для прекращения фотоэффекта, вызванного облучением некоторого металла светом с частотой $\nu_1 = 2,2 \cdot 10^{15}$ Гц, необходимо приложить задерживающее напряжение $U_{01} = 6,6$ В, а светом с частотой $\nu_2 = 4,6 \cdot 10^{15}$ Гц – задерживающее напряжение $U_{02} = 16,5$ В. ($6,6 \cdot 10^{-34}$ Дж·с)

Задача 2.2.15. В эксперименте было найдено, что задерживающее напряжение равно $U_2 = 0,82$ В для света длиной

волны $\lambda_1 = 300$ нм и $U_2 = 0,82$ В для света длиной волны $\lambda_2 = 400$ нм. Из этих данных найти: 1) значение постоянной Планка; 2) работу выхода для этого металла; 3) красную границу фотоэффекта. ($1 - \hbar = 6,56 \cdot 10^{-16}$ эВ·с; $2 - A = 2,27$ эВ;

$$3 - \lambda_{\text{кр}} = 544 \text{ нм})$$

Задача 2.2.16. До какого максимального потенциала зарядится изолированный цинковый шарик при облучении его электромагнитным излучением длиной волны 140 нм. (4,9 В)

Задача 2.2.17. Определить максимальное число N_{max} электронов, которое можно удалить с уединенного цинкового шарика радиусом $R = 2$ см, если его облучать монохроматическим светом длиной волны $\lambda = 324$ нм. Работа выхода для цинка $A_{\text{вых}} = 3 \cdot 10^{-19}$ Дж.

$$\left(N_{\text{max}} = \frac{(hc - A_{\text{вых}} \lambda)}{e^2 \lambda}; N_{\text{max}} = 2,75 \cdot 10^7 \text{ шт.} \right)$$

Задача 2.2.18. На цинковую пластинку падает монохроматический свет длиной волны $\lambda = 220$ нм. Определить максимальную скорость фотоэлектронов v_{max} . (0,76 Мм/с)

Задача 2.2.19. Определить максимальную скорость фотоэлектронов, вылетающих из металла по действием γ -излучения с длиной волны $\lambda = 0,3$ нм. (37,9 Мм/с)

Задача 2.2.20. Максимальная скорость фотоэлектрона равна 291 Мм/с. Определить энергию γ -кванта, вырвавшего этот электрон из металла. (1,61 МэВ)

Задача 2.2.21. Ток насыщения, протекающий через вакуумный фотоэлемент при его освещении светом, $I_{\text{н}} = 0,5$ нА. Определить число фотоэлектронов, покидающих поверхность катода в единицу времени $\left(I_{\text{н}} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{N_e}{\Delta t}; N = \frac{I_{\text{н}} \cdot \Delta t}{e} = 3,1 \cdot 10^9 \text{ с}^{-1} \right)$. (1,61 МэВ)

Давление света

Задача 2.2.22. Определить поверхностную плотность потока энергии излучения, падающего по нормали на зеркальную поверхность, если световое давление лучей равно $P = 10$ мкПа. ($1,5$ кВт/м²)

Задача 2.2.23. Радиоантенна излучает в определенном направлении мощность $P = 500$ кВт. Определить силу давления на антенну, создаваемого реакцией отдачи импульса F_p фотонов, излучаемых ею. Скорость света в вакууме $c = 3 \cdot 10^8$ м/с.
 $\left(F_p = \frac{P}{c}; F_p = 1,67 \text{ мН} \right)$

Задача 2.2.24. Поток энергии Φ , излучаемый лампой, равен 600 Вт. На расстоянии $r = 1$ м от лампы перпендикулярно падающим луча расположено круглое зеркальце диаметром $d = 2$ см. Принимая, что излучение лампы одинаково во всех направлениях и зеркальце полностью отражает падающий свет, найти силу F светового давления. ($0,1$ нН)

Задача 2.2.25. На зеркальце с идеально отражающей поверхностью площадью $S = 1,5$ см² падает нормально свет от электрической дуги. Определить импульс P полученный зеркальцем за время облучения $t = 1$ с, если поверхностная плотность потока излучения $E_e = 0,1$ МВт/м². (10^{-7} кг·м/с)

Задача 2.2.26. Плоская световая волна интенсивностью $0,70$ Вт/см² освещает шар радиусом $5,0$ см с абсолютно зеркальной поверхностью. Найти силу светового давления на шар. ($0,37$ мкН)

Задача 2.2.27. Спутник в форме шара диаметром $d = 40$ м движется вне земной атмосферы. Зная солнечную постоянную $C = 1,4$ кДж/(м²·с) и принимая, что поверхность спутника полностью отражает свет, определить силу давления F солнечного света на спутник. ($11,7$ мН)

Задача 2.2.28. В космосе движется пылинка плотностью 1 г/см^3 поглощающая весь падающий на нее свет. Зная мощность излучения Солнца $\Phi = 4 \cdot 10^{26} \text{ Вт}$, найти радиус пылинки, при котором ее гравитационное притяжение к Солнцу компенсируется силой светового давления. (0,6 мкм)

Задача 2.2.29. Параллельный пучок монохроматического света с длиной волны $\lambda = 662 \text{ нм}$ падает нормально на абсолютно черную поверхность и производит давление $p = 3 \cdot 10^{-7} \text{ Па}$. Определить концентрацию фотонов в световом пучке.

$$\left(n = \frac{p\lambda}{hc} (1 + \rho); \quad n = 10^{12} \text{ м}^{-3} \right)$$

Задача 2.2.30. Монохроматическое излучение с длиной волны $\lambda = 500 \text{ нм}$ падает нормально на плоскую зеркальную поверхность и давит на нее с силой $F = 10 \text{ мН}$. Определить число N фотонов, ежесекундно падающих на эту поверхность. ($3,77 \cdot 10^{18}$)

Эффект Комптона

Задача 2.2.31. Определить изменение длины волны при эффекте Комптона, если наблюдение ведется перпендикулярно к направлению первичного пучка излучения.

$$\left(\Delta\lambda = \frac{h}{m_e c} = 2,4263 \cdot 10^{-3} \text{ нм} \right)$$

Задача 2.2.32. Определить максимальное изменение длины волны при комптоновском рассеянии: 1) на свободных электронах; 2) на свободных протонах. (1 – 484 пм; 2 – 2,64 фм)

Задача 2.2.33. Во сколько раз изменение длины волны фотона при комптоновском рассеянии на свободном электроне превосходит аналогичное изменение при рассеянии на свободном протоне при одинаковых углах рассеяния?

$$\left((\Delta\lambda)_e / (\Delta\lambda)_p = m_p / m_e = 1836 \text{ раз} \right)$$

Задача 2.2.34. Определить максимальное смещение длины волны при комптоновском рассеянии рентгеновского излучения на

свободном

протоне

$$\left(\Delta \lambda_{\max} = 2 \lambda_{\kappa} (p) = 2 \cdot 2 \pi \hbar / m_p c = 2,643 \cdot 10^{-6} \text{ нм} \right).$$

Задача 2.2.35. В результате комптоновского рассеяния длина волны λ фотона с энергией $E_{\phi} = 0,5 \text{ МэВ}$ увеличилась на $\Delta \lambda = \alpha \lambda$, где $\alpha = 0,25$. Определить кинетическую энергию T электрона отдачи. $\left(T = \frac{\alpha}{1 + \alpha} E_{\phi} = \frac{1}{5} E_{\phi} = 0,1 \text{ МэВ} \right)$

Задача 2.2.36. Показать с помощью законов сохранения, что свободный электрон не может полностью поглотить фотон.

Задача 2.2.37. γ -квант с частотой ν рассеялся по неподвижной частице под углом θ к первоначальному направлению. При этом частота кванта уменьшилась на $\Delta \nu \ll \nu$. Определить массу этой частицы.

$$\left(m = (1 - \cos \theta) \frac{h \nu^2}{c \Delta \nu} \right)$$

Задача 2.2.38. Узкий пучок монохроматического рентгеновского излучения падает на рассеивающее вещество. При этом длины волны излучения, рассеянного под углами $\theta_1 = 60^\circ$ и $\theta_2 = 120^\circ$, отличаются друг от друга в $n = 2$ раза. Считая, что рассеяние происходит на свободных электронах, определить длину волны падающего излучения.

$$\left(\lambda = 4 \pi \lambda c \left[\sin (\theta_2 / 2) - n \sin (\theta_1 / 2) \right] / (n - 1) = 1,2 \text{ пм} \right).$$

Задача 2.2.39. Фотон с энергией $E_{\phi} = 0,4 \text{ МэВ}$ рассеяния под углом $\theta = 90^\circ$ на свободном электроне. Определить энергию E'_{ϕ} рассеянного фотона и кинетическую энергию T электрона отдачи. $(0,224 \text{ МэВ}; 0,176 \text{ МэВ})$

Задача 2.2.40. Фотон с длиной волны $\lambda = 6,0 \text{ пм}$ рассеялся под прямым углом на покоившемся свободном электроне. Определить: а) частоту рассеянного фотона; б) кинетическую энергию

электронов отдачи.

$$\left(\begin{aligned} \omega' &= 2\pi c / (\lambda + 2\pi\hbar / m_e c) = 2,2 \cdot 10^{20} \frac{\text{рад}}{\text{с}}; \\ T &= \frac{2\pi c\hbar / \lambda}{1 + \lambda m_e c / 2\pi\hbar} = 60 \text{ кэВ} \end{aligned} \right)$$

Задача 2.2.41. Фотон с частотой ν рассеивается на электроне. Определить изменение частоты фотона, рассеянного под углом θ , предполагая, что $h\nu \ll m_e c^2$. ($\Delta\nu = (1 - \cos\theta) \frac{h\nu}{m_e c^2}$)

Задача 2.2.42. Фотон рассеялся под углом $\theta = 120^\circ$ на покоившемся свободном электроне, в результате чего электрон приобрел кинетическую энергию $T = 0,45$ МэВ. Определить энергию фотона до рассеяния.

$$\left(E_\phi = \hbar\omega = \left[1 + \sqrt{1 + 2m_e c^2 / T \sin^2(\theta/2)} \right] T / 2 = 0,68 \text{ МэВ} \right)$$

Задача 2.2.43. Определить импульс P электрона отдачи при эффекте Комптона, если фотон с энергией равной энергии покоя электрона, был рассеян на угол $\theta = 180^\circ$.

$$\left(p = \frac{1}{3} m_e c = 3,6 \cdot 10^{-22} \text{ кг м/с} \right)$$

Задача 2.2.44. Какая доля энергии фотона при эффекте Комптона приходится на электрон отдачи, если фотон претерпел рассеяние на угол $\theta = 180^\circ$? Энергия E_ϕ фотона до рассеяния равна половине энергии покоя электрона. (0,5)

Задача 2.2.45. Угол рассеяния θ фотона равен 90° . Угол отдачи Φ электрона равен 30° . Определить энергию E_ϕ падающего фотона. (0,37 МэВ)

Задача 2.2.46. Определить длину волны рентгеновского излучения, если максимальная кинетическая энергия комптоновских электронов $T_{\text{max}} = 0,19$ МэВ.

$$\left(\lambda = 2\pi\hbar / m_e c (\sqrt{1 + 2m_e c^2 / T_{\text{max}}} - 1) = 3,7 \text{ пм} \right).$$

Задача 2.2.47. Фотон с энергией $E_{\phi} = 0,15$ МэВ рассеялся на покоившемся свободном электроне, в результате чего его длина волны изменилась на $\Delta\lambda = 3,0$ пм. Определить угол φ , под которым вылетел комптоновский электрон.

$$\left(\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sqrt{4\pi\hbar / m_e c \Delta\lambda^{-1}}}{1 + E_{\phi} / m_e c^2}; \varphi = 31^{\circ} \right)$$

Задача 2.2.48. Фотон с энергией $E_{\phi} = n m_e c^2$ ($n=2$) испытывает лобовое столкновение с покоившемся свободным электроном. Определить радиус кривизны траектории электрона отдачи в магнитном поле $B = 0,12$ Тл. Предполагается, что электрон отдачи движется перпендикулярно к направлению магнитного поля.

$$\left(R = \frac{2n(1+n)m_e c}{(1+2n)eB} = 3,4 \text{ см} \right)$$

Задача 2.2.49. Фотон с длиной волны $\lambda = 1$ пн рассеялся на свободном покоившемся электроне под углом $\theta = 90^{\circ}$. Какую долю своей энергии фотон передал электрону? (0,7 %).

Задача 2.2.50. Фотон, испытав столкновение с релятивистским электроном, рассеялся под углом $\theta = 60^{\circ}$, а электрон остановился. Определить комптоновское смещение длины волны рассеянного фотона. ($\Delta\lambda = 4\hbar / m_e c \sin^2 \theta / 2 = 1,2$ пн)

2.3. Классические модели атома (Томсона и Резерфорда).

Модель атома по Бору. Спектры водородоподобных ионов

2.3.1. Основные понятия, законы и формулы

- В модели Джозефа Джона Томсона атом представляет собой шар радиуса $R_{\text{ат}}$, равномерно заряженный по объему положительным электричеством, внутри которого находятся точечные электроны.

- Классическая частота колебаний электрона в модели Томсона

$$\omega = \sqrt{\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m_e R^3}}. \quad (2.3.1)$$

- В модели Томсона гармонически колеблющийся электрон излучает одну частоту. Излучение с длиной волны λ возможно при радиусе атома

$$R_T = \sqrt[3]{\frac{\lambda^2 Ze^2}{16\pi^3 \epsilon_0 m_e c^2}}. \quad (2.3.2)$$

- Угол θ , на который рассеивается заряженная частица кулоновским полем неподвижного ядра, определяется соотношением

$$\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \frac{Q_1 Q_2}{8\pi\epsilon_0 b T}, \quad (2.3.3)$$

где Q_1 и Q_2 – заряды частицы и ядра, b – прицельный параметр, T – кинетическая энергия налетающей частицы.

- *Формула Резерфорда:* относительное число частиц, рассеянных в элементарном телесном угле $d\Omega$ под углом θ к первоначальному направлению их движения

$$\frac{dN}{N} = n \left(\frac{Q_1 Q_2}{8\pi\epsilon_0 T} \right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}, \quad (2.3.4)$$

где n – число ядер вещества на единицу поверхности, $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$. Элементарный телесный угол.

- *Обобщенная формула Бальмера:*

$$\omega = RZ^2 \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right), \quad R = \frac{me^4}{32\hbar^3 \pi^2 \epsilon_0^2}, \quad (2.3.5)$$

где ω – частота перехода (рад/с) между энергетическими уровнями с квантовыми числами n_1 и n_2 ; R – постоянная Ридберга; Z – порядковый номер водородоподобного иона.

- Атом водорода по теории Н. Бора. Момент импульса электрона на стационарных орбитах

$$L = m_e v r = n \hbar \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (2.3.6)$$

где m_e – масса электрона; r – радиус орбиты; v – скорость электрона на орбите; n – главное квантовое число; $\hbar = 1,05457266 \cdot 10^{-34}$ Дж·с – постоянная Планка.

Энергия фотона, излучаемого атомом водорода при переходе из одного стационарного состояния в другое

$$\varepsilon = \hbar \omega = E_{n_2} - E_{n_1}, \quad (2.3.7)$$

где ω – круговая частота излучения, E_{n_2} и E_{n_1} – энергии атома в стационарных состояниях

$$\varepsilon = E_i \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right), \quad (2.3.8)$$

где $E_i = -\frac{m e^4}{32 \pi^2 \varepsilon_0^2 \hbar^2} = -13,6$ эВ – энергия ионизации атома водорода.

Энергия электрона, находящегося на n -й орбите.

$$E_n = -\frac{m e^4}{32 \pi^2 \varepsilon_0^2 \hbar^2 n^2}. \quad (2.3.9)$$

Скорость электрона на n -й орбите

$$v_n = \frac{Z e^2}{4 \pi \varepsilon_0 \hbar n}. \quad (2.3.10)$$

Радиус n -й орбиты

$$r_n = \frac{4 \pi \varepsilon_0 \hbar^2 n^2}{m_e Z e^2}. \quad (2.3.11)$$

2.3.2. Методические рекомендации по решению задач

Пример 2.3.1. В модели Томсона атом представляет собой шар, равномерно заряженный по объему положительным

электричеством, внутри которого находятся точечные электроны. Определить по классической теории частоту колебаний электрона в модели Томсона с одним электроном.

Решение. Рассмотрим сферу радиуса R заполненную заряженным веществом с объемной плотностью заряда $+\rho$:

$$\rho = \frac{e}{\frac{4}{3}\pi R^3}.$$

На расстоянии r от центра, находится точечный электрон с зарядом e на рассматриваемый электрон, действует сила

$$\vec{F} = e\vec{E},$$

где $\vec{E}(r)$ – напряженность электрического поля шара, равномерно заряженного по объему

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \vec{r} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 R^3} \vec{r}. \quad (2.3.12)$$

Таким образом, электрон будет двигаться под действием квазиупругой силы, т.е. совершать гармонические колебания около центра шара:

$$m\vec{r} = \vec{F}_{эл} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R^3} \vec{r}. \quad (2.3.13)$$

Следовательно, электрон должен испускать монохроматическое излучение с частотой

$$\omega = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R^3 m_e}}. \quad (2.3.14)$$

Пример 2.3.2. На тонкую пластину золотой фольги толщиной $d = 0,5$ мкм нормально к поверхности падает узкий пучок α -частиц с интенсивностью $N = 10^3 \frac{\text{частиц}}{\text{с}}$ и энергией 6 МэВ.

Определить число рассеянных α -частиц, которое будет зарегистрировано в течение $\Delta t = 5$ мин в интервале углов 59° и 61° . Плотность золота $\rho = 19,4 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$.

Решение. Обозначив молярную массу золота через $\mu_{\text{Au}} = 1,97 \text{ кг/моль}$, находим число атомов золота в объеме $(\Delta S d) = \Delta V$:

$$N_{\text{Au}} = N_A \frac{\rho}{\mu_{\text{Au}}} d \Delta S, \quad (2.3.15)$$

где N_A – число Авогадро. Отсюда для число рассеянных α -частиц получаем

$$\frac{dN_{\theta}}{(N \Delta \tau)} = N_A \frac{\rho}{\mu_{\text{Au}}} d \cdot d\sigma, \quad (2.3.16)$$

где $d\sigma$ – определяется формулой Резерфорда:

$$d\sigma = \frac{1}{4} \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 m_{\alpha} v^2} \right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4 \frac{\theta}{2}},$$

(здесь $d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta$ – телесный угол между конусами с углами 59° и 61°).

Подставляя численные значения, находим

$$dN_{\theta} = N \Delta \tau \cdot N_A \frac{\rho}{\mu_{\text{Au}}} d \cdot \frac{1}{4} \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 m_{\alpha} v^2} \right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} \approx 24 \text{ частицы.} \quad (2.3.17)$$

Пример 2.3.3. На покоящийся первоначально протон налетает с большого расстояния другой протон. Прицельное расстояние равно нулю, т.е. скорость налетающего протона, направлена по линии центров обоих протонов. Масса протона m_p . Начальная скорость налетающего протона v_0 . Каково наименьшее расстояние сближения протонов?

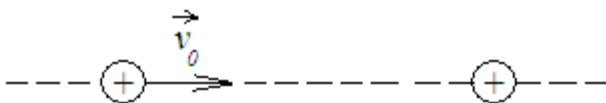


Рис. 2

Решение. Сближение протонов происходит до тех пор, пока относительная скорость протонов не станет равной нулю. В момент наибольшего сближения, согласно закону сохранения импульса:

$$m_p v_0 = 2 p_p = 2 m_p v_1,$$

где v – скорость обоих протонов в момент наибольшего сближения. В этот момент скорость и, следовательно, кинетические энергии обоих протонов одинаковы. Таким образом, первоначальная кинетическая энергия налетающего протона равна суммарной кинетической энергии обоих протонов плюс энергия кулоновского взаимодействия:

$$\frac{m v_0^2}{2} = 2 \cdot \frac{m v^2}{2} + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (2.3.18)$$

Отсюда

$$r_{\min} = \frac{e^2}{\pi\epsilon_0 m v_0^2}. \quad (2.3.19)$$

Пример 2.3.4. Вычислить радиус n -й орбиты водородоподобного иона и скорость движения электрона на этой орбите.

Решение. Согласно модели Бора, радиус r_n – электронной орбиты и скорость v_n электрона на ней связаны условием квантования орбитального момента $m v_n r_n = n \hbar$.

Для определения двух неизвестных величин r_n и v_n необходимо еще одно уравнение. Согласно предположению Бора, электрон вращается вокруг ядра по круговой орбите. При этом сила взаимодействия между электроном и ядром определяет нормальное ускорение. На основании второго закона Ньютона имеем

$$m a_n = m \frac{v_n^2}{r_n} = F_{\text{кул}} = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r_n^2}, \quad (2.3.20)$$

где e и m – заряд и масса электрона. Совместное решение первого и второго уравнений дает

$$r_n = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m Z e^2} n^2.$$

Радиус первой орбиты (боровский радиус) ($n = 1$) в атоме водорода ($Z = 1$)

$$r_1 = a = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{me^2} = 0,529 \cdot 10^{-10} \text{ м.}$$

Выражение для скорости:

$$v_n = \hbar / mr_n = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0\hbar} \frac{1}{r}.$$

Произведя вычисления по этой формуле, для $n = 1$ найдем

$$v_1 = 2,18 \text{ Мм/с.}$$

Пример 2.3.5. Какой радиус имела бы $1s$ - оболочка воображаемого атома из нейтрона и электрона, связанных между собой силой только гравитационного взаимодействия?

Решение. Из условия равенства сил $G \frac{Mm}{r^2} = m \frac{V^2}{r}$ имеем

$GM = V^2 r$. Применяя квантовый постулат Н.Бора, находим

$V = \frac{n\hbar}{mr}$. Таким образом, $GM = V^2 r = \left(\frac{n\hbar}{mr}\right)^2 r = \frac{n^2 \hbar^2}{m^2 r}$. Отсюда

при $n = 1$ получаем $r = a_1 = \frac{n^2 \hbar^2}{GMm^2} \approx 1,2 \cdot 10^{29} \text{ м} = 0,24 \cdot 10^{40} r_B$,

(где $r_B = 5,29 \cdot 10^{-11} \text{ м}$).

Пример 2.3.6. Атом водорода поглощает фотон, вследствие чего электрон, находившийся на второй боровской орбите ($n = 2$), вылетает из атома со скоростью $v_e = 6 \cdot 10^5 \text{ м/с}$. Чему равна частота поглощенного фотона?

Решение. На основании закона сохранения энергии можно записать

$$\epsilon_\phi = h\nu = \Delta E + \frac{m_e v_e^2}{2}, \quad (2.3.21)$$

где ΔE – максимальная энергия, при сообщении которой электрону последний покидают атом водорода. Эта энергия определяется из серийной формулы для водорода:

$$\Delta E = E_i \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right),$$

где $E_i = 13,6$ эВ – энергия ионизации атома водорода.

Таким образом, выражение для частоты фотона имеет вид

$$h\nu = \frac{E_i}{n} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right) + \frac{m_e v_e^2}{2}. \quad (2.3.22)$$

В конечном состоянии электрон – свободный, т.е. $m \rightarrow \infty$, поэтому $\nu = 1,07 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$.

Пример 2.3.7. *Напишите простейшую формулу для энергии связи электрона, находящегося на K -оболочке, с ядром атома, имеющим заряд Z . Рассмотрите, как изменится (увеличится или уменьшится) эта энергия связи, если учесть: а) релятивистскую поправку;*

б) эффект экранировки центрального поля остальными электронами; в) конечный размер ядра.

Решение. Энергия связи дается выражением

$$\varepsilon = \frac{m_e e^4 Z^2}{32\pi^2 \varepsilon_0 \hbar^2}. \quad (2.3.23)$$

а. При учете релятивистской поправки масса электрона увеличивается; следовательно, энергия связи увеличивается (а энергетический уровень – опускается).

б. Экранировка уменьшает заряд ядра или эффективное значение Z ; следовательно, энергия связи уменьшается.

в. Если распределение заряда в ядре считать однородным и сферически симметричным, то потенциальная энергия взаимодействия электрона с ядром будет такая же, как и для электрона на определенной орбите в боровской модели.

Однако, согласно квантовомеханическим представлениям, имеется некоторая конечная вероятность попадания этого электрона внутрь ядра атома.

Отсюда следует, что учет конечного размера ядра атома приводит к уменьшению энергии связи.

Пример 2.3.8. *Электрон в модели Н.Бора, двигаясь в атоме, испытывает кулоновскую силу притяжения со стороны ядра. Можно ли создать внешнее электрическое поле, чтобы ионизовать атом водорода? Практически осуществимые напряженности электрического поля лежат в пределах $10^7 - 10^8$ В/м.*

Решение. Напряженность поля, в котором движется электрон, $E = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r_B^2}$, где r_B – радиус электронной орбиты по «классической» теории Н.Бора. В основном состоянии атома водорода радиус орбиты $r_B = 5,29 \cdot 10^{-11}$ м. Таким образом напряженность поля, действующего на электрон со стороны ядра составляет $E = 5,15 \cdot 10^{11}$ В/м, что на несколько порядков превышает практически достижимые напряженности поля. Однако, если электрон движется по круговой орбите, которой соответствует главное квантовое число, отличное от единицы, то радиус такой орбиты определяется соотношением (см. пример 2.3.4) $r = r_B \cdot n^2$ и напряженность поля оказывается обратно пропорциональной n^4 . Если, например $n = 10$, то напряженность поля оказывается в пределах достижимых значений. В экспериментах действительно удается наблюдать ионизацию электрическим полем высоковозбужденных атомов водорода.

Пример 2.3.9. *Определить энергию фотона ϵ_ϕ , соответствующего второй линии в первой инфракрасной серии ($m = 3$, серия Пашена) атома водорода.*

Решение. Энергия фотона ϵ_ϕ , излучаемого атомом водорода при переходе электрона с одной орбита на другую (согласно постулату Бора), равна

$$\epsilon_\phi = E_i \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right),$$

где $E_i = 13,6$ эВ – энергия ионизации атома водорода; $n = 1, 2, 3, \dots$ – номер орбиты, на которую переходит электрон; $m = n+1, n+2, \dots, n+k$ – номер орбиты, с которой переходит электрон; k – номер спектральной линии в данной серии. Для серии Пашена $n = 3$; для второй линии этой серии $k = 2$, т.е. $m = n+k = 5$. Подставив численные значения, находим энергию фотона:

$$\varepsilon_{\phi} = E_i \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+k)^2} \right) = 0,97 \text{ эВ} = 1,55 \cdot 10^{-19} \text{ Дж.}$$

Пример 2.3.10. *Определить скорость, которую приобретает атом водорода в результате излучения кванта света при переходе электрона со второго уровня на первый, насколько благодаря этому увеличится длина волны излучаемого кванта?*

Решение. Применим законы сохранения энергии и импульса в системе координат, где атом водорода до излучения покоился. В результате имеем

$$E_1 = E_2 + \frac{m_0 v^2}{2} + \hbar(\omega - \Delta\omega); \quad (2.3.24)$$

$$0 = M_0 v - \frac{\hbar}{c}(\omega - \Delta\omega),$$

где E_1 и E_2 – энергия стационарных состояний электрона, между которыми совершается переход; M_0 – масса атома водорода; v – скорость его отдачи. Учитывая, что $E_1 - E_2 = \hbar\omega$ и $\Delta\omega \ll \omega$, находим

$$v = \frac{\hbar\omega}{M_0 c} = 0,0325 \text{ м/с}; \quad \Delta\lambda = \frac{\pi\hbar}{M_0 c} = 6,6 \cdot 10^{-6} \text{ \AA}.$$

Пример 2.3.11. *Атомы, летящие со скоростью v , излучают в направлении движения фотоны с частотой ν . С какой частотой излучаются фотоны в направлении: а) противоположном движению атомов; б) перпендикулярном движению атомов? Считать, что импульс фотона много меньше импульса атома.*

Решение: а) При излучении фотона в направлении движения атома

$$\frac{Mv^2}{2} = \frac{M(v - \Delta v)^2}{2} + h\nu + \Delta E, \quad Mv = M(v - \Delta v) + \frac{h\nu}{c}, \quad (2.3.25)$$

где M – масса атома, Δv – изменение скорости, ΔE – изменение внутренней энергии атома.

При получении фотона в направлении, противоположном движению атома,

$$\frac{Mv^2}{2} = \frac{M(v + \Delta v')^2}{2} + h\nu' + \Delta E, \quad Mv = M(v + \Delta v') - \frac{h\nu'}{c}, \quad (2.3.26)$$

где $\Delta v'$ – изменение скорости атома, ν' – искомая частота фотона.

При $\Delta v, \Delta v' \ll v$ из уравнений (2.3.25) и (2.3.26) следует

$$\nu' = \nu \frac{1 - v/c}{1 + v/c}; \quad (2.3.27)$$

б) при излучении в направлении перпендикулярном движению атомов получаем

$$\nu' = \nu \left(1 - \frac{v}{c}\right). \quad (2.3.28)$$

2.3.3. Задачи для самостоятельной работы

Задача 2.3.1. Определить радиус атома в модели Томсона, чтобы атом излучал волну $\lambda = 500$ нм. Сколько спектральных линий может излучать атом с одним электроном в модели

Томсона? $(R = \left(\frac{e^2 \lambda^2}{4\pi^2 c^2 m}\right)^{1/3} = 2,6 \cdot 10^{-10} \text{ м}; \quad \text{гармонически}$

колеблющийся электрон излучает одну частоту)

Задача 2.3.2. Вычислить согласно модели Томсона радиус атома водорода и длину волны испускаемого им света, если известно, что энергия ионизации атома $E = 13,6$ эВ.

$$(r = 3e^2 / 2E = 0,16 \text{ нм}; \quad \lambda = (2\pi c / e) \sqrt{m r^3} = 0,24 \text{ мкм}).$$

Задача 2.3.3. В одном из экспериментов Резерфорда α -частицы (с массой $6,68 \cdot 10^{-27}$ кг) имели кинетическую энергию 4,8 МэВ. На какое расстояние они могли приблизиться к ядру атома золота (с зарядом $+79e$)? Отдачей ядра можно пренебречь. ($4,7 \cdot 10^{-14}$ м)

Задача 2.3.4. Энергия ионизации (связи) внешнего электрона атома бора (${}^{10}_5\text{B}$) = 8,26 эВ. Используя модель Бора, определить эффективный заряд ядра $Z_{\text{эф}}$ для этого электрона. ($Z_{\text{эф}} = 1,56$)

Задача 2.3.5. Возбужденный атом водорода в принципе мог бы иметь радиус 1,0 мм. Какое квантовое число n соответствует боровской орбите таких размеров? Какой была ее энергия? (~ 4300 ; $E_n = -7 \cdot 10^{-7}$ эВ)

Задача 2.3.6. Сложить массы свободного протона и свободного электрона. Как изменится полученная сумма, если обе частицы образуют атом водорода в основном состоянии?

($\Delta m / m = 1,45 \cdot 10^{-8}$; изменение составляет $\sim 1 \cdot 10^{-8}$)

Задача 2.3.7. Между электроном и нейтроном на расстояниях больше $\sim 10^{-15}$ м действует только гравитационная сила. Постройте модель, аналогичную модели Бора для атома водорода, и получите радиус наименьшей дозированной орбиты. Могут ли такие «атомы» играть сколько-нибудь важную роль в природе? (Магнитными эффектами пренебрегите.) ($R = \hbar^2 n^2 / GM_n m_e^2$ $R = 1,22 \cdot 10^{29}$ м; нет, потому что их размер превосходит размеры Вселенной)

Задача 2.3.8. Согласно классической электродинамике электрон, движущийся с ускорением \vec{a}_n , теряет энергию на излучение по закону

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{2e^2}{3(4\pi\epsilon_0)c^3} a_n^2, \quad (2.3.29)$$

где e – заряд электрона, c – скорость света. Оценить время, в течение которого электрон, движущийся в атоме водорода по круговой орбите радиуса $r_b = 52,9$ пм, упал бы на ядро.

$$\left(\tau \approx \frac{3}{2} \frac{(4\pi\epsilon_0)^2}{e^6} \hbar^2 c^2 m \ln \frac{R_B}{r_{\text{яд}}} = 13 \text{ пс}\right) \quad (2.3.30)$$

Задача 2.3.9. Водородный ион, пролетая через кристалл, подвергается периодическому воздействию поля кристаллографической решетки кристалла, в результате чего возможно резонансное возбуждение его уровней (эффект Окорокова). Какова должна быть скорость двукратно ионизированного атома лития, чтобы при пролете его через кристалл золота (период решетки вдоль направления движения иона лития $a = 4,07 \cdot \text{Å}$) возбуждался уровень с квантовым числом

$$m = 2? \quad (v = \frac{3 Z^2 a}{4 \hbar} \quad E_i = 9 \cdot \text{ММ/с})$$

Задача 2.3.10. Во сколько раз изменился период T вращения электрона в атоме водорода, если при переходе в невозбужденное состояние атом излучил фотоны с длиной волны $\lambda = 97,5 \text{ нм}$?

Задача 2.3.11. Используя теорию Бора, определить орбитальный магнитный момент электрона, движущегося по второй орбите атома водорода. ($p_m = en\hbar / (2m) = 1,8 \cdot 10^{-23} \text{ А} \cdot \text{м}^2$)

Задача 2.3.12. Какова напряженность электрического поля ядра на первой и четвертой боровских орбитах атома водорода. ($E_1 = 5,13 \cdot 10^{11} \text{ В/м}$; $E_4 = 2 \cdot 10^9 \text{ В/м}$)

Задача 2.3.13. Пользуясь теорией Бора, определить радиус атома водорода, когда электрон находится на стационарной орбите с квантовым числом $n = 4$. Найти также скорость движения

$$\text{электрона на этой орбите. } (v = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar} \cdot \frac{1}{n}; \quad r = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{me^2} n^2)$$

Задача 2.3.14. Определить кинетическую, потенциальную и полную энергии электрона в атоме водорода на второй боровской ($n = 2$) орбите.

Задача 2.3.15. Вычислить частоты вращения электрона в атоме водорода на второй и третьей стационарных орбитах. Сравнить эти частоты с частотами излучения при переходе электрона с третьей орбиты на вторую.

Задача 2.3.16. Определить период обращения электрона в атоме водорода на первый боровской орбите.

Задача 2.3.17. Рассмотрим воображаемый элемент Z^* , атомы которого являются одновалентными. Энергия связи внешнего электрона в этом атоме равна $E_{\text{св}} = 3,2$ эВ. Известно также, что энергии трех возбужденных уровней этого электрона составляют $-1,0$; $-1,4$ и $2,0$ эВ.

а) Какова энергия основного состояния (в эВ)?

б) Перечислить все линии в спектре излучения этого элемента. Определить энергии соответствующих фотонов в эВ?

в) Изобразите графически систему уровней валентного электрона в этом атоме.

(а – $E_1 = -3,2$ эВ; б – трем переходам в основное состояние соответствуют $h\nu = 1,2$; $1,8$ и $2,2$ эВ; двум переходам в первое возбужденное состояние отвечают $h\nu = 0,6$ и $1,0$ эВ; одному переходу во второе возбужденное состояние соответствует $h\nu = 0,4$ эВ)

Задача 2.3.18. При переходе электрона в атоме водорода с третьей стационарной орбиты на вторую излучаются фотоны, соответствующие длине волны $\lambda = 0,652$ мкм (красная линия водородного спектра). Какую энергию теряет при этом атом водорода? ($\Delta E = \frac{hc}{\lambda} = 3 \cdot 10^{-19}$ Дж = $1,875$ эВ)

Задача 2.3.19. Определить длину волны, соответствующую переходу в атоме водорода с четвертой орбиты на вторую. ($\lambda = 0,488$ мкм)

Задача 2.3.20. Атом водорода в основном состоянии поглотил квант света с длиной волны $\lambda = 121,5$ нм. Определить радиус r электронной орбиты возбужденного атома водорода. (212 пм)

Задача 2.3.21. Вычислить длину волны λ , которую испускает ион гелия He^+ при переходе со второго энергетического уровня на первый. Определить длину волны λ при таком же переходе для иона лития Li^{++} . (30,3 нм; 13,5 нм)

Задача 2.3.22. Определить первый и полный потенциал $U_{\text{ион}}$ однократно ионизованного гелия ($Z = 2$). (54 эВ)

Задача 2.3.23. Определить наибольшую λ_{max} и наименьшую λ_{min} длины волны в сериях Пашена ($m = 3$) и Лаймана ($m = 1$).

Задача 2.3.24. Определить наименьшую ε_{min} и наибольшую ε_{max} энергии фотона в серии Бальмера спектра водорода.

Задача 2.3.25. Фотон с энергией $\varepsilon_{\gamma} = 16,5$ эВ выбил электрон из невозбужденного атома водорода. Какую скорость v будет иметь электрон вдали от ядра атома? (1 Мм/с)

Задача 2.3.26. Фотон выбивает электрон из покоящегося атома водорода. При каком условии пренебрежение связью электрона с ядром и его движением не вызывает грубых ошибок при анализе

этого процесса? (При $h\nu \gg \frac{me^4}{32\pi^2\varepsilon_0^2\hbar^2}$; $h\nu \gg$ энергия связи электрона)

Задача 2.3.27. Резерфорд наблюдал, что при лобовом соударении с ядрами меди (${}^{63}_{29}\text{Cu}$) α -частицы (${}^4_2\text{He}$), обладающие до удара энергией 5 МэВ, отлетают назад с энергией 3,9 МэВ. Определите отношение масс ядер меди и α -частиц.

Задача 2.3.28. Оценить магнитное поле, действующее на протон в атоме водорода со стороны электрона, находящегося на второй

стационарной орбите. ($B = \frac{\mu_0 e (Ze^2)^3 m_e^2}{4\pi (4\pi\varepsilon_0)^3 \hbar^5 n^5}$)

Задача 2.3.29. Протон, летящий со скоростью $V_0 = 4,6 \cdot 10^4$ м/с, сталкивается с неподвижным свободным атомом гелия. После столкновения протон двигается в обратном направлении со скоростью $v = v_0 / 2$, а атом переходит в возбужденное состояние.

Найти длину волны света, излучаемого атомом гелия при возвращении в первоначальное состояние. ($\lambda = \frac{32hc}{3m_p v_0^2} = 0,54 \text{ мкм}$)

2.4. Волновые свойства микрочастиц. Соотношения неопределенностей Гейзенберга

2.4.1. Основные понятия, законы и формулы

- Дебройлевская длина волны частицы с импульсом p :

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{2\pi\hbar}{p}. \quad (2.4.1)$$

В нерелятивистском случае ($v \ll c$):

$$p = mv = \sqrt{2mE_k}, \quad (2.4.2)$$

где m , v , E_k — масса, скорость и кинетическая энергия частицы.

В релятивистском случае ($v \sim c$):

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{1}{c} \sqrt{E_k(E_k + 2mc^2)}. \quad (2.4.3)$$

• Из приведенных формул следует связь длины волны де Бройля с кинетической энергией частицы. В нерелятивистском случае:

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2mE_k}}; \quad (2.4.4)$$

в релятивистском случае:

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar c}{\sqrt{E_k(E_k + 2mc^2)}}. \quad (2.4.5)$$

- Комптоновская длина волны частицы:

$$\lambda_C = \frac{2\pi\hbar}{mc}. \quad (2.4.6)$$

При решении задач полезно иметь под рукой численные значения этого параметра:

$$\text{для электрона } \lambda_C^{(e)} = 2,426 \cdot 10^{-12} \text{ м};$$

$$\text{для протона } \lambda_C^{(p)} = 1,321 \cdot 10^{-15} \text{ м}.$$

• Использование комптоновской длины волны частицы значительно упрощает численные расчеты длины волны де Бройля в релятивистском случае, позволяя оперировать безразмерными отношениями сходных физических величин. Так, формула зависимости дебройлевской длины волны от скорости частицы может быть записана в виде

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{mv} = \frac{\lambda_C}{v/c}, \quad (2.4.7)$$

а зависимость (2.4.5) λ от кинетической энергии имеет вид

$$\lambda = \frac{\lambda_C}{\sqrt{\frac{E_k}{mc^2} \left(2 + \frac{E_k}{mc^2} \right)}}. \quad (2.4.8)$$

Поскольку в релятивистском случае скорость частицы выражается обычно в долях скорости света, а кинетическая энергия в МэВ, то формулы (2.4.7) и (2.4.8) становятся очень удобными.

В нерелятивистском случае, впрочем, тоже часто удобно иметь отношения безразмерных величин. Так, формула (2.4.4) может быть записана в виде

$$\lambda = \frac{\lambda_C}{\sqrt{2E_k / mc^2}}. \quad (2.4.9)$$

Энергии покоя: для электрона $m_e c^2 = 0,511$ МэВ, для протона $m_p c^2 = 938,27$ МэВ.

• Соотношение неопределенностей Гейзенберга: для координат и проекций импульсов частицы:

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \hbar, \Delta y \cdot \Delta p_y \geq \hbar, \Delta z \cdot \Delta p_z \geq \hbar, \quad (2.4.10)$$

где $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ — неопределенности координат частицы и $\Delta p_x, \Delta p_y, \Delta p_z$ — неопределенности проекций импульса частицы на соответствующую координатную ось; для энергии и времени:

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar, \quad (2.4.11)$$

где ΔE — неопределенности энергии данного энергетического состояния, Δt — неопределенность во времени пребывания системы в этом состоянии.

2.4.2. Методические рекомендации по решению задач

Пример 2.4.1. Заряженная частица проходит ускоряющую разность потенциалов $U = 1$ МВ. Определить длину волны де Бройля, если эта частица: а) электрон, б) протон.

Решение. В обоих случаях кинетическая энергия частицы $E_k = 1$ МэВ. Сравнивая ее с энергиями покоя, приведенными выше, находим $m_e c^2 < E_k \ll m_p c^2$, т.е. движение протона может быть описано классическими формулами, а к электрону надо применять релятивистские.

Поэтому для электрона имеем из уравнения (2.4.8) с учетом $E_k / m_e c^2 = 1 / 0,511 = 1,957$:

$$\lambda^{(e)} = \frac{2,426 \cdot 10^{-12}}{\sqrt{1,957 \times 3,957}} = 0,87 \cdot 10^{-12} = 0,87 \text{ пм.}$$

Для протона $E_k / m_p c^2 = 1 / 938,27 = 1,066 \cdot 10^{-3}$, и мы воспользуемся формулой (2.4.9):

$$\lambda^{(p)} = \frac{1,321 \cdot 10^{-15}}{\sqrt{2 \times 0,001066}} = 2,86 \cdot 10^{-14} = 28,6 \text{ фм.}$$

Пример 2.4.2. Найти дебройлевскую длину волны тепловых нейтронов, соответствующую их среднеквадратичной скорости v при комнатной температуре $T = 300 \text{ К}$.

Решение. Как известно из молекулярно-кинетической теории, средняя кинетическая энергия частиц связана с температурой системы соотношением

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{3}{2} k_B T$$

где k_B — постоянная Больцмана:

$$k_B = 1,381 \cdot 10^{-23} \text{ Дж} \cdot \text{К}^{-1} = 8,617 \cdot 10^{-5} \text{ эВ} \cdot \text{К}^{-1}$$

Заметим, что из приведенного численного значения постоянной Больцмана следует, что кинетической энергии $E_k = 1 \text{ эВ}$ соответствует температура $T = (2E_k) / (3k_B) \approx 7700 \text{ К}$. Энергии же покоя электрона соответствует немислимая температура

$$T = (2 \times 0,511 \cdot 10^6) / (3 \times 8,617 \cdot 10^{-5}) \approx 4 \text{ млрд К} = 4 \cdot 10^9 \text{ К.}$$

Поэтому при комнатной температуре мы заведомо можем применять нерелятивистские формулы. Находим тогда

$$v = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}, \quad \lambda = \frac{h}{\sqrt{3mk_B T}}.$$

В этой задаче разницей масс нейтрона и протона можно пренебречь: $m \approx m_p$. Получаем, подставляя численные значения,

$$\lambda = \frac{6,626 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{3 \times 1,673 \cdot 10^{-27} \times 1,381 \cdot 10^{-23} \times 300}} = 1,45 \cdot 10^{-10} = 0,145 \text{ нм.}$$

Пример 2.4.3. Пуля массой $m = 7,62 \text{ г}$ вылетает из автомата АК-47 со скоростью $v = 850 \text{ м/с}$. Следует ли учитывать дифракционные эффекты при описании движения пули?

Решение. Длина волны де Бройля летящей пули

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{6,626 \cdot 10^{-34}}{7,62 \cdot 10^{-3} \times 850} = 1,0 \cdot 10^{-34} \text{ м.}$$

Это расстояние не только на много порядков меньше калибра ствола (размера пули), но и вообще находится за пределами возможного для современных экспериментов. Поэтому волновые свойства пули никак не проявятся, и для описания ее движения следует применять законы классической механики.

Пример 2.4.4. Баллон наполнен гелием, находящемся при температуре $T = 300$ К и нормальном давлении $p = 100$ кПа 1) Вычислить среднюю волну де Бройля атомов гелия и среднее расстояние между ними при данных условиях. 2) Можно ли рассматривать атомы гелия как корпускулы? 3) При какой температуре надо принимать во внимание волновые свойства атомов, если охладить баллон при постоянном объеме? Массу m атома гелия принять равной четырем массам протона: $m = 4m_p$.

Решение:

1. Средняя кинетическая энергия атомов гелия (одноатомный газ)

$$E_k = \frac{3}{2} k_B T. \quad (2.4.12)$$

Длина волны де Бройля

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2mE_k}} = \frac{\pi\hbar}{\sqrt{3m_p k_B T}}. \quad (2.4.13)$$

Подставляем численные значения:

$$\lambda = \frac{\pi \times 1,054 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{3 \times 1,67 \cdot 10^{-27} \times 1,38 \cdot 10^{-23} \times 300}} = 7,3 \cdot 10^{-11} = 73 \text{ пм.} \quad (2.4.14)$$

Среднее расстояние между атомами гелия определяется на основе уравнения Менделеева – Клапейрона: $pV = Nk_B T$. Отсюда находим сначала объем, приходящийся на один атом гелия:

$v = V / N = k_B T / p$, после чего вычисляем уже среднее расстояние l между атомами:

$$l = \sqrt[3]{v} = \left(\frac{k_B T}{p} \right)^{1/3}. \quad (2.4.15)$$

Подставляем численные значения:

$$l = \left(\frac{1,38 \cdot 10^{-23} \times 300}{10^5} \right)^{1/3} = 3,5 \cdot 10^{-9} = 3,5 \text{ нм}. \quad (2.4.16)$$

2. Атомы гелия при заданных условиях могут рассматриваться как частицы, потому что среднее расстояние между ними намного больше длины волны де Бройля: $l / \lambda \approx 48$. Поэтому волновые эффекты (интерференция, дифракция и др.) не играют роли.

3. Волновые свойства атомов становятся важными, когда длина волны де Бройля имеет порядок расстояния между атомами. Поскольку мы охлаждаем замкнутый баллон, сохраняя то же число атомов в прежнем объеме, расстояние l между ними не изменится. Нам надо уменьшить температуру так, чтобы длина волны де Бройля возросла в 48 раз. Поскольку температура входит в (2.4.13) под знаком квадратного корня, ее надо уменьшить до значения $T = 300 / 48^2 = 0,73 \text{ К}$

На самом деле, так сильно охлаждать гелий не придется: гораздо раньше он перейдет в жидкое состояние, так что расстояние между молекулами резко уменьшится, и квантовые эффекты будут заметны при более высоких температурах. Но даже наша грубая оценка позволяет понять, что при низких температурах квантовые эффекты игнорировать будет нельзя. И другой вывод: они не важны при рассмотрении свойств обычных газов при обычных условиях.

Пример 2.4.5. На узкую щель шириной $a = 1$ мкм направлен параллельный пучок электронов, имеющих скорость $v = 3,65 \text{ Мм/с}$. Учитывая волновые свойства электронов, определить ширину x центрального максимума в дифракционной картине, полученной на экране, отстоящем на $L = 10$ см от щели. Дать интерпретацию

уширения изображения щели с корпускулярной точки зрения, выведя соотношение неопределенностей из волновой картины.

Решение. Согласно гипотезе де Бройля, длина волны λ , соответствующая частице массой m_e , движущейся с нерелятивистской скоростью v выражается формулой

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{mv} = \frac{2\pi \times 1,054 \cdot 10^{-34}}{9,11 \cdot 10^{-31} \times 3,65 \cdot 10^6} = 2,0 \cdot 10^{-10} \text{ м.} \quad (2.4.17)$$

Ширину центрального максимума определяем как расстояние между минимумами первого порядка. Дифракционный минимум при дифракции на одной щели наблюдается при условии $a \sin \varphi = k\lambda$, так что для минимумов первого порядка $a \sin \varphi = \pm\lambda$. Так как угол дифракции φ заведомо мал, то $\sin \varphi \approx \varphi$ и направления на минимумы равны $\varphi_{\pm} = \pm\lambda/a$. При расстоянии L до экрана разность $\varphi_+ - \varphi_- = 2\varphi_+$ между направлениями на минимумы первого порядка создает между ними линейное расстояние

$$x = 2\varphi_+ L = \frac{2L\lambda}{a} = 4,0 \cdot 10^{-5} = 40 \text{ мкм.} \quad (2.4.18)$$

С точки зрения корпускулярной теории электроны проходят через щель не отклоняясь, так что изображение щели должно иметь размер a . Однако в момент прохождения щели координата электронов имеет неопределенность $\Delta x = a$ (нельзя точно сказать, через какое именно место щели пролетел электрон). Это приведет к появлению компоненты импульса Δp_x параллельной плоскости экрана, или компоненты скорости $\Delta v_x = \Delta p_x / m$. Поскольку время полета электрона до экрана равно $t = L/v$, то параллельная плоскости экрана компонента скорости сместит электрон на расстояние $\Delta v_x t = \Delta p_x L / (mv)$. Смещение возможно в обе стороны, так что ширина изображения получится равной

$x = \frac{2\Delta p_x L}{mv}$. Преобразуем последнее выражение, введя длину волны де Бройля:

$$x = \frac{\Delta p_x \Delta x}{2\pi\hbar} \cdot \frac{2\lambda L}{a}. \quad (2.4.19)$$

Чтобы получился прежний результат (2.4.18), первый сомножитель в (2.4.19) должен быть равен единице, т.е.

$$\Delta p_x \Delta x = 2\pi\hbar = h. \quad (2.4.20)$$

Мы действительно получили одну из форм соотношения неопределенностей.

Пример 2.4.6. *Кинетическая энергия T электрона в атоме водорода составляет величину порядка 10 эВ. Используя соотношение неопределенностей, оцените минимальные линейные размеры атома.*

Решение. Неопределенность координаты и импульса электрона связаны соотношением

$$\Delta p \Delta x \geq \hbar.$$

Из этого соотношения следует, что чем точнее определяется положение частицы в пространстве, тем более неопределенным становится импульс, а следовательно, и энергия частицы. Пусть атом имеет линейные размеры $2a$ тогда электрон атома будет находиться где-то в пределах области с неопределенностью $\Delta x = l/2 = a$. Соотношение неопределенностей можно записать в этом случае в виде $a\Delta p \geq \hbar$, откуда

$$a \geq \frac{\hbar}{\Delta p}. \quad (2.4.21)$$

Физически разумная неопределенность импульса Δp во всяком случае, не должна превышать значения самого импульса p – в противном случае атом не смог бы существовать как локализованное образование. Из неравенства $\Delta p \leq p$ следует неравенство $1/\Delta p \geq 1/p$, так что (2.4.21) записывается в виде

$$a \geq \frac{\hbar}{p}. \quad (2.4.22)$$

Теперь остается выразить импульс через энергию электрона в атоме:

$$p = \sqrt{2m_e T} = m_e c \sqrt{2T / m_e c^2}$$

и подставить его в (2.4.22):

$$\begin{aligned} a &\geq \frac{\hbar}{m_e c \sqrt{2T / m_e c^2}} = \frac{\lambda_C^{(e)}}{2\pi \sqrt{2T / m_e c^2}} = \\ &= \frac{2,426 \cdot 10^{-12}}{2\pi \sqrt{2 \times 10 / 0,511 \cdot 10^6}} = 62 \cdot 10^{-12} = 62 \text{ пм}. \end{aligned} \quad (2.4.23)$$

Напомним, что радиус Бора $a_B = 53$ пм, что близко к полученной оценке.

Пример 2.4.7. *Используя принцип неопределенности Гейзенберга, показать, что электрон не может находиться внутри атомного ядра.*

Решение. Неопределенность величины импульса электрона должна быть равна по меньшей мере

$$\Delta p = \frac{\hbar}{\Delta x} = \frac{1,05 \cdot 10^{-34}}{10^{-15}} = 197 \text{ МэВ/с.}$$

Полная энергия электрона с таким импульсом должна быть равна

$$E = \sqrt{(m_e c^2)^2 + (cp_e)^2} = \sqrt{(0,51)^2 + (197)^2} \approx 197 \text{ МэВ,}$$

где $m_e c^2 = 0,51$ МэВ – энергия покоя электрона. Чтобы электрон с такой кинетической энергией (197 МэВ) удержать в связанном состоянии, необходимо обеспечить еще большую электростатическую энергию связи. Однако электростатическая

энергия связи равна $U = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 R}$, что для любых ядер не превышает 10 МэВ.

Пример 2.4.8. Согласно современным воззрениям, из ничего, а точнее – из физического вакуума, могут рождаться частицы (их называют виртуальными). Оценить время жизни виртуальной пары «электрон–позитрон». (Позитрон – частица с той же массой, что и электрон, но с положительным зарядом $+e$.)

Решение. Виртуальные частицы могут родиться из вакуума, если неопределенность энергии системы превышает массу покоя частиц. Соответственно большая неопределенность в энергии позволяет виртуальным частицам существовать лишь очень короткое время.

В данном случае неопределенность энергии должна превышать удвоенную массу покоя электрона: $\Delta E \geq 2m_e c^2$, время жизни виртуальной электрон-позитронной пары равно тогда:

$$\Delta t \leq \frac{\hbar}{\Delta E} \leq \frac{\hbar}{2m_e c^2} = \frac{\lambda_C^{(e)}}{4\pi c} = \frac{2,426 \cdot 10^{-15}}{4\pi \times 3 \cdot 10^8} = 6 \cdot 10^{-25} \text{ с.} \quad (2.4.24)$$

Пример 2.4.9. На лестнице стоит человек и с высоты H роняет вниз шарики массой m . Предполагается, что он целится идеально точно. Используя принцип неопределенностей Гейзенберга, оценить средний разброс шариков около центра мишени.

Решение. Выберем ось OY вертикально вниз, ось OX – горизонтально, а начало отсчета в точке бросания. При свободном падении тела в поле силы тяжести

$$y = g \frac{t^2}{2}, \text{ причем } t_{\text{пад}} = \sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

Смещение шарика вдоль горизонтально оси описывается соотношением

$$s = \Delta x = v_x t,$$

где s – расстояние между шариком и отвесом (центром мишени), Δx – начальное смещение шарика, v_x – горизонтальная составляющая его скорости, равная $\Delta p_x / m$. Применяя соотношение неопределенностей

$$\Delta p_x \approx \frac{\hbar}{\Delta x},$$

получаем

$$s = \Delta x + \frac{\Delta p_x}{m} \sqrt{\frac{2H}{g}} \approx \Delta x + \frac{\hbar}{m} \sqrt{\frac{2H}{g}} \frac{1}{\Delta x}. \quad (2.4.25)$$

Минимальному значению s соответствует условие

$$\frac{ds}{d(\Delta x)} = 1 + \frac{\hbar}{m} \sqrt{\frac{2H}{g}} \left(-\frac{1}{(\Delta x)^2} \right) = 0$$

или

$$(\Delta x)^2 = \sqrt{\frac{2\hbar^2 H}{m^2 g}}. \quad (2.4.26)$$

$$\text{Отсюда находим } \Delta x = \left(\frac{2\hbar^2 H}{m^2 g} \right)^{1/4}, \quad (2.4.27)$$

$$\text{Следовательно, } s_{\min} \approx 2 \left(\frac{2\hbar^2 H}{m^2 g} \right)^{1/4}. \quad (2.4.28)$$

2.4.3. Задачи для самостоятельной работы

Волны де Бройля

Задача 2.4.1. Определить длину волны де Бройля, характеризующую волновые свойства электрона, если его скорость $v = 1$ Мм/с. Сделать такой же подсчет для протона. ($\lambda_e = 727$ пм; $\lambda_p = 0,396$ пм)

Задача 2.4.2. Электрон движется со скоростью $v = 200$ Мм/с. Определить длину волны де Бройля. (2,71 пм)

Задача 2.4.3. Электрон, начальной скоростью которого можно пренебречь, прошел ускоряющую разность потенциалов U . Найти длину волны де Бройля для двух случаев: 1) $U = 51$ В; 2) $U = 510$ кВ. (1 – 172 пм; 2 – 1,40 пм)

Задача 2.4.4. Какую ускоряющую разность потенциалов U должен пройти электрон, чтобы длина волны де Бройля была равна 0,1 нм? (150 В)

Задача 2.4.5. Определить длину волны де Бройля электрона, если его кинетическая энергия $T = 1$ кэВ. (38,8 пм)

Задача 2.4.6. Найти длину волны де Бройля протона, прошедшего ускоряющую разность потенциалов U : 1) 1 кВ; 2) 1 МВ. (1 – 905 фм; 2 – 28,6 фм)

Задача 2.4.7. С какой скоростью движется электрон, если длина волны де Бройля электрона равна его комптоновской длине? Как изменится ответ для протона? (212 Мм/с)

Задача 2.4.8. Вычислите отношение кинетической энергии электрона к кинетической энергии протона с одинаковой длиной волны. Предполагается, что скорости обеих частиц гораздо меньше скорости света. $\left(E_k^{(e)} / E_k^{(p)} = 1836 \right)$

Задача 2.4.9. Типичное значение концентрации электронов проводимости в металле $n \sim 5 \cdot 10^{28}$ м⁻³. Оценить температуры, при которых электронный газ можно рассматривать как газ классических частиц. ($T > 160\,000$ К)

Задача 2.4.10. Типичное значение концентрации электронов проводимости в металле $n \sim 5 \cdot 10^{28}$ м⁻³. Найти длину волны де Бройля λ электронов при $T = 300$ К и среднее расстояние l между ними. ($\lambda = 6,2$ нм, $l = 270$ пм)

Задача 2.4.11. Плотность жидкого гелия равна $\rho = 0,14 \text{ г/см}^3$. Оценить температуру T , при которой становятся важны квантовые эффекты (см. пример 2.4.4). Сравнить ее с температурой сжижения гелия (4 К). ($T = 12 \text{ К}$, т.е. жидкий гелий – заведомо квантовая жидкость.)

Задача 2.4.12. Плотность жидкого азота равна $\rho = 808 \text{ кг/м}^3$. Оценить температуру T , при которой становятся важны квантовые эффекты (см. пример 2.4.4). Сравнить ее с температурой сжижения азота (126 К). Массу молекулы азота N_2 принять равной массе 28 протонов. ($T = 1,5 \text{ К}$, т.е. жидкий азот – классическая жидкость)

Задача 2.4.13. Определить длину волны де Бройля λ_e электронов, бомбардирующих антикатод рентгеновской трубки, если граница сплошного рентгеновского спектра приходится на длину волны $\lambda_\gamma = 3 \text{ нм}$. (Подсказка: рассмотреть случай, когда вся кинетическая энергия электрона переходит в энергию гамма-кванта.) ($\lambda_e = 0,06 \text{ нм}$)

Задача 2.4.14. Параллельный пучок электронов, движущихся с одинаковой скоростью $v = 1 \text{ Мм/с}$, падает нормально на диафрагму с длинной щелью шириной $a = 1 \text{ мкм}$. Проходя через щель, электроны рассеиваются и образуют дифракционную картину на экране, расположенном на расстоянии $l = 50 \text{ см}$ от щели параллельно плоскости диафрагмы. Определить линейное расстояние x между дифракционными минимумами первого порядка. (0,73 мм)

Задача 2.4.15. В примере 2.4.5 найти расстояние между двумя максимумами первого порядка. (60 мкм)

Задача 2.4.16. Постоянная кристаллической решетки $d = 3 \text{ \AA}$. Пучок электронов падает на естественную грань монокристалла. Угол скольжения электронного пучка равен $\theta = \frac{\pi}{6}$. Наблюдение отраженных электронов производится под углом, равным углу падения. Пренебрегая преломлением электронных волн,

определить энергии электронов, при которых наблюдается два первых максимум отражения. $(E_n = \left(\frac{\pi\hbar}{d \sin \theta}\right)^2 \frac{1}{2m_0} n^2,$
 $E_1 = 1,68 \text{ эВ}, E_2 = 6,7 \text{ эВ})$

Соотношения неопределенностей

Задача 2.4.17. Скорость протона составляет $(8,880 \pm 0,012) \cdot 10^5 \text{ м/с}$. С какой максимальной точностью можно измерить его положение? $(5,3 \cdot 10^{-11} \text{ м})$

Задача 2.4.18. Положение электрона можно измерить с точностью $1,6 \cdot 10^{-8} \text{ м}$. С какой точностью можно определить его скорость? $(7,2 \text{ км/с})$

Задача 2.4.19. В опытах по дифракции электронов на поликристаллической фольге найдено, что диаметр дифракционного кольца, соответствующего отражению первого порядка от плоскостей с межплоскостным расстоянием d , равен $r = 3 \text{ см}$. Расстояние от фольги до экрана равно $l = 15 \text{ см}$. Определить величину d . Энергия электронов равна 300 эВ . $(d = \frac{\lambda}{2 \sin \theta},$ где θ – угол скольжения, $\theta = \frac{1}{2} \arcsin \frac{r}{\sqrt{r^2 + l^2}};$ $d = 3,1 \text{ \AA})$

Задача 2.4.20. Пуля массой 12 г вылетает из ружейного ствола со скоростью 450 м/с . а) Какая длина волны де Бройля соответствует пуле? б) Положение пули известно с точностью до $0,55 \text{ см}$ (радиус ствола). Чему равна минимальная неопределенность ее импульса? в) Как далеко могла бы отклониться от центра мишени пуля при стрельбе с дистанции 300 м , если бы точность попадания определялась лишь принципом неопределенности (неразумность такого предположения вряд ли нуждается в комментариях)? (а – $1,2 \cdot 10^{-34} \text{ м}$; б – $1,9 \cdot 10^{-30} \text{ кг}\cdot\text{м/с}$; в – $1,1 \cdot 10^{-30} \text{ м}$)

Задача 2.4.21. Определить неточность Δx в определении координаты электрона, движущегося в атоме водорода со скоростью $v = 1,5 \cdot 10^6$ м/с если допустимая неточность ν в определении скорости составляет 10 % ее величины. Сравнить полученную неточность с диаметром d атома водорода, вычисленным по теории Бора для основного состояния, и указать, применимо ли понятие траектории в данном случае. ($\Delta x \sim 0,77$ нм; $d \sim 2a_B = 0,106$ нм; неприменимо, так как $\Delta x \gg d$)

Задача 2.4.22. Электрон с кинетической энергией $T = 15$ эВ находится в металлической пылинке диаметром $d = 1$ мкм. Оценить абсолютную (Δv) и относительную ($\Delta v / v$) неточности, с которыми может быть определена скорость электрона. ($\Delta v \sim 230$ м/с; $\Delta v / v \sim 1 \cdot 10^{-4}$)

Задача 2.4.23. Во сколько раз дебройлевская длина волны λ частицы меньше неопределенности Δx ее координаты, которая соответствует относительной неопределенности импульса в 1 %? (в $\Delta x / \lambda \approx 16$ раз)

Задача 2.4.24. Предполагая, что неопределенность координаты движущейся частицы равна дебройлевской длине волны, определить относительную неточность $\Delta p / p$ импульса этой величины. (16 %)

Задача 2.4.25. С какой точностью можно измерить положение электрона с энергией $E_k = 1,50$ кэВ, если энергия известна с точностью до 1 %? (1,0 нм)

Задача 2.4.26. Используя соотношение неопределенностей, оценить низший энергетический уровень электрона в атоме водорода. Принять линейные размеры атома $l \sim 0,1$ нм. ($E_0 \sim 2,4 \cdot 10^{-18}$ Дж = 15 эВ)

Задача 2.4.27. Частица массой m находится в потенциальной яме, имеющей формулу полусферы радиусом R . Оцените приближенно кинетическую энергию частицы в основном состоянии. (Рассмотрите только нерелятивистский квантовый

случай). (В соответствии с принципом неопределенностей $p \approx \frac{\hbar}{R}$:

$$T_{\text{кин}} = \frac{p^2}{2m} \approx \frac{\hbar^2}{2mR^2}$$

Задача 2.4.28. Приняв, что минимальная энергия E протона в ядре равна 10 МэВ, оценить, исходя из соотношения неопределенностей, линейные размеры ядра. (2,9 фм)

Задача 2.4.29. Показать, используя соотношение неопределенностей, что в ядре не могут находиться электроны. Линейные размеры ядра принять равными 5 фм (Подсказка: оценить кинетическую энергию E_k электронов в ядре и сравнить с энергией связи $E_{\text{св}}$ частиц в ядре, равной 10 МэВ) ($E_k \sim 78$ МэВ, т.е. $E_k \gg E_{\text{св}}$).

Задача 2.4.30. Рассмотрим следующий мысленный эксперимент. Пусть моноэнергетический пучок электронов ($T = 10$ эВ) падает на щель шириной a . Можно считать, что если электрон прошел через щель, то его координата известна с неточностью $\Delta x = a$. Оценить получаемую при этом относительную неточность в определении импульса $\Delta p_x / p$ электрона в двух случаях: 1) $a = 10$ нм; 2) $a = 0,1$ нм. (1 – 0,006; 2 – 0,6)

Задача 2.4.31. Предположим, что вы играете в бейсбол в мире, где значение постоянной Планка $\hbar = 0,70$ Дж·с. Мяч массой $m = 140$ г летит со скоростью $v = (20 \pm 1,0)$ м/с. Почему трудно поймать такой мяч? (Неопределенность положения мяча $\Delta x = 5$ м)

Задача 2.4.32. Предположим, что после игры в бейсбол в мире, где значение постоянной Планка $\hbar = 0,70$ Дж·с, вы положили мяч в ящик шириной $L = 0,5$ м. Какой должна быть высота H ящика, чтобы вы могли найти в нем мяч на следующий день? Масса мяча

$m = 140$ г, ускорение свободного падения имеет обычное значение. ($H \geq 20,4$ м)

Задача 2.4.33. Используя соотношение неопределенностей $\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar$, оценить ширину ΔE энергетического уровня в атоме водорода, находящегося: 1) в основном состоянии; 2) в возбужденном состоянии (время жизни атома в возбужденном состоянии равно 10^{-8} с). (1 – $\Delta E = 0$; 2 – $\Delta E = 0,06$ мкэВ)

Задача 2.4.34. Оценить относительную ширину $\Delta\omega/\omega$ спектральной линии, если известны время жизни атома в возбужденном состоянии ($\tau = 10^{-8}$ с) и длина волны ($\lambda = 0,6$ мкм) излучаемого фотона. ($3,2 \cdot 10^{-8}$)

Задача 2.4.35. Моноэнергетический пучок электронов высвечивает в центре экрана электронно-лучевой трубки пятно радиусом $r \approx 10^{-3}$ м. Пользуясь соотношением неопределенностей, определить, во сколько раз неопределенность Δx координаты на экране в направлении, перпендикулярном от трубки, меньше размера r пятна. Длину L электронно-лучевой трубки принять равной $0,50$ м, а ускоряющее электрон напряжение U – равным 20 кВ.

Задача 2.4.36. Пылинки массой $m = 10^{-12}$ г взвешены в воздухе и находятся в тепловом равновесии. Можно ли установить, наблюдая за движением пылинок, отклонение от законов классической механики? (Принять, что воздух находится при нормальных условиях, пылинки имеют сферическую форму. Плотность вещества, из которого состоят пылинки, равна $2 \cdot 10^3$ кг/м³.) (Нет: $\Delta\rho/\rho \approx 3 \cdot 10^{-11}$)

Задача 2.4.37. Используя соотношение неопределенностей $\Delta x \Delta p_x \geq \hbar$, найти выражение, позволяющее оценить минимальную энергию E электрона, находящегося в одномерном потенциальном ящике шириной l . ($E_{\min} = 2\hbar^2 / (ml^2)$)

Задача 2.4.38. Оценить относительную ширину $\Delta\omega/\omega$ спектральной линии, если известны время жизни атома в

возбужденном состоянии ($\tau \approx 10^{-8}$ с) и длина волны излучаемого фотона ($\lambda = 0,6$ мкм). ($3 \cdot 10^8$)

2.5. Простейшие случаи движения микрочастиц. Уравнение Шредингера

2.5.1. Основные понятия, законы и формулы

- Общее уравнение Шредингера:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(t, \vec{r}) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi(t, \vec{r}) + U(\vec{r}) \psi(t, \vec{r}), \quad (2.5.1)$$

где $\psi(t, \vec{r})$ — полная волновая функция, Δ — оператор Лапласа, $U(\vec{r})$ — потенциальная энергия частицы.

- Оператор Лапласа в декартовых координатах:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (2.5.2)$$

- Стационарное решение уравнения Шредингера:

$$\psi(t, \vec{r}) = e^{-\frac{i}{\hbar}Et} \Psi(\vec{r}), \quad (2.5.3)$$

где E — полная энергия частицы, $\Psi(\vec{r})$ — стационарная волновая функция (координатная часть полной волновой функции).

• Стационарное уравнение Шредингера. Подстановка стационарного решения (2.5.3) в (2.5.2) приводит к уравнению для стационарной волновой функции:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi(\vec{r}) + U(\vec{r}) \Psi(\vec{r}) = E \Psi(\vec{r}). \quad (2.5.4)$$

Для решения уравнения Шредингера должны удовлетворяться стандартные условия: конечность во всем пространстве,

однозначность, непрерывность самой Ψ -функции и ее первой производной. Должно быть выполнено также условие нормировки:

$$\int_V |\Psi(\vec{r})|^2 dV = 1, \quad (2.5.5)$$

где интеграл берется по всему пространству.

- В одномерном случае потенциальная энергия и волновая функция зависят лишь от одной из координат (выберем на ее роль координату x). Тогда от оператора Лапласа (2.5.2) остается лишь вторая производная по x , и уравнение (2.5.6) упрощается:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\Psi(x)}{dx^2} + U(x)\Psi(x) = E\Psi(x). \quad (2.5.6)$$

Условие нормировки в одномерном случае имеет вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x)|^2 dx = 1. \quad (2.5.7)$$

- Физический смысл волновой функции. В одномерном случае вероятность dW обнаружить частицу в интервале от x до $x + dx$ выражается соотношением

$$dW = |\Psi(x)|^2 dx, \quad (2.5.8)$$

где квадрат модуля $|\Psi(x)|^2$ волновой функции определяет плотность вероятности найти частицу в точке x .

Вероятность W обнаружить частицу в интервале от $x = x_1$ до $x = x_2$ следует тогда из сложения вероятностей как сумма (интеграл) dW по всем точкам отрезка:

$$W = \int_{x_1}^{x_2} |\Psi(x)|^2 dx. \quad (2.5.9)$$

- Собственное значение энергии E_n частицы, находящейся на энергетическом уровне с номером n в бесконечно глубокой одномерной прямоугольной потенциальной яме, определяется выражением

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} n^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (2.5.10)$$

где m — масса частицы, а l — ширина потенциальной ямы.

Формула (2.5.10) может быть записана в виде безразмерного отношения комптоновской длины волны частицы λ_C к ширине ямы:

$$E_n = \frac{mc^2}{8} \left(\frac{\lambda_C}{l} \right)^2 n^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.5.11)$$

Соответствующая уровню n собственная волновая функция имеет вид

$$\psi(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 0 \text{ или } x \geq l, \\ \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(\pi n \frac{x}{l}\right), & \text{если } 0 \leq x \leq l. \end{cases} \quad (2.5.12)$$

- Энергетические уровни частицы, заключенной в трехмерную прямоугольную потенциальную яму с размерами l_1, l_2, l_3 вдоль координатных осей:

$$E_{n_1, n_2, n_3} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m} \left(\frac{n_1^2}{l_1^2} + \frac{n_2^2}{l_2^2} + \frac{n_3^2}{l_3^2} \right), \quad n_i = 1, 2, 3, \dots \quad (2.5.13)$$

Соответствующая уровню (n_1, n_2, n_3) волновая функция является произведением одномерных волновых функций:

$$\Psi_{n_1, n_2, n_3}(x, y, z) = \sqrt{\frac{8}{l_1 l_2 l_3}} \sin\left(\pi n_1 \frac{x}{l_1}\right) \sin\left(\pi n_2 \frac{y}{l_2}\right) \sin\left(\pi n_3 \frac{z}{l_3}\right). \quad (2.5.14)$$

• Энергетические уровни одномерного осциллятора (потенциальная энергия имеет вид $U(x) = m\omega^2 x^2 / 2$) даются выражением

$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.5.15)$$

Волновая функция основного состояния ($n = 0$, $E_0 = \hbar\omega / 2$):

$$\psi_0(x) = \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}. \quad (2.5.16)$$

• Коэффициенты отражения ρ и прохождения τ частиц (волн де Бройля) через низкий ($U < E$) потенциальный барьер бесконечной ширины (потенциальная ступенька):

$$\rho = \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right)^2, \quad \tau = \frac{4k_1 k_2}{(k_1 + k_2)^2}, \quad (2.5.17)$$

где k_1 и k_2 — волновые числа волн де Бройля областях $U(x) = 0$ и $U(x) = U$:

$$k_1 = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2mE}, \quad k_2 = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(E-U)}. \quad (2.5.18)$$

Как и для фотонов, волновой вектор частицы связан с ее импульсом: $\hbar\vec{k} = \vec{p}$. Сумма коэффициентов отражения и прохождения равна единице: $\rho + \tau = 1$.

• Коэффициент прозрачности потенциального барьера $U(x)$

$$D \approx \exp \left[-\frac{2}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{2m(U(x) - E)} \right], \quad (2.5.19)$$

где x_1 и x_2 — координаты точек, между которыми потенциальная энергия превышает энергию частицы: $U(x) \geq E$. Для

прямоугольного барьера с постоянной высотой $U < E$ формула принимает вид

$$D \approx \exp\left[-\frac{2d}{\hbar} \sqrt{2m(U-E)}\right], \quad (2.5.20)$$

где d – ширина барьера. Это выражение полезно преобразовать к такому виду, чтобы энергия и ширина барьера входили в безразмерных отношениях:

$$D \approx \exp\left[-\frac{2dmc}{\hbar} \sqrt{\frac{2(U-E)}{mc^2}}\right] = \exp\left[-\frac{4\pi d}{\lambda_C} \sqrt{\frac{2(U-E)}{mc^2}}\right]. \quad (2.5.21)$$

Напомним, что λ_C — комптоновская длина волны частицы.

2.5.2. Методические рекомендации по решению задач

Пример 2.5.1. В потенциальной яме бесконечной глубины движется электрон. В зависимости от его кинетической энергии волновая функция может принимать различные значения, схематически представленные на рис. 3.

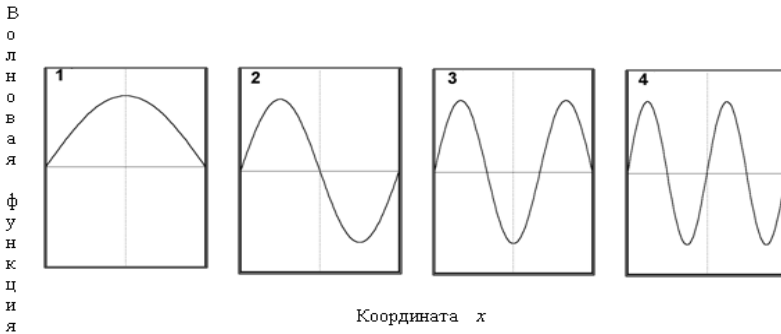


Рис. 3

Какие из этих состояний сохранятся, если ширина потенциальной ямы уменьшится вдвое (т.е. если правая стенка ямы переместится в положение, показанное пунктирной линией)?

Как изменится при этом минимальное значение кинетической энергии электрона?

Решение. В потенциальной яме бесконечной глубины волновая функция на «стенках» ямы должна быть равна нулю. Поэтому смогут остаться только состояния, обозначенные четными номерами: 2, 4, 6 и т. д.

Расстояние между узлами волновой функции основного состояния равно половине длины волны де Бройля. При уменьшении ширины ямы вдвое основным состоянием станет функция, показанная под номером 2. Ее длина волны де Бройля в два раза меньше, чем у прежней волновой функции 1. Стало быть, импульс электрона в этом состоянии больше в два раза, а кинетическая энергия – в четыре.

Пример 2.5.2. Частица находится в бесконечно глубокой потенциальной яме шириной l в состоянии с квантовым числом n . Найти вероятность W_n с которой частица может быть обнаружена в области $0 \leq x \leq l/3$. Найти числовой результат для $n = 1, 2, 3$.

Решение. Волновая функция системы имеет вид

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(\pi n \frac{x}{l}\right).$$

Искомая вероятность W_n определяется в соответствии со смыслом волновой функции: величина $|\psi(x)|^2 dx$ есть вероятность обнаружить частицу на отрезке длины dx вблизи точки x . Чтобы получить W_n надо сложить эти вероятности для всех точек x заданной области, то есть вычислить соответствующий интеграл:

$$W_n = \int_0^{l/3} |\psi(x)|^2 dx = \frac{2}{l} \int_0^{l/3} \sin^2\left(\pi n \frac{x}{l}\right) dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{l} \int_0^{l/3} \left[1 - \cos \left(2\pi n \frac{x}{l} \right) \right] dx = \\
&= \frac{1}{l} \left[\frac{l}{3} - \frac{l}{2\pi n} \sin \left(\frac{2\pi n}{3} \right) \right] = \frac{1}{3} - \frac{1}{2\pi n} \sin \left(\frac{2\pi n}{3} \right). \quad (2.5.22)
\end{aligned}$$

Отсюда для конкретных значений n получаем

$$W_1 = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4\pi} \approx 0,196, \quad W_2 = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{8\pi} \approx 0,402, \quad W_3 = \frac{1}{3}.$$

Из-за симметрии системы ясно, что такие же результаты получатся и для последней трети потенциальной ямы. Так как полная вероятность равна единице, то вероятность обнаружить частицу в средней трети ямы (в области $l/3 \leq x \leq 2l/3$) можно рассчитать по формуле $1 - 2W_n$. Видно, что в основном состоянии с вероятностью, превышающей 60 % частица будет обнаружена в средней трети ямы. В первом возбужденном состоянии, наоборот, частица пребывает в средней части ямы с вероятностью меньше 20 %. Наконец, во втором возбужденном состоянии частица может находиться в каждой из указанных частей с равной вероятностью 33,3 %.

Пример 2.5.3. Дан одномерный квантовый осциллятор с потенциальной энергией. $U(x) = m\omega^2 x^2 / 2$, находящийся в основном состоянии с энергией $E = \hbar\omega / 2$. Согласно классической физике, максимальное отклонение x_{\max} (амплитуда колебаний)

находится из соотношения $U(x) = E$, т.е. $x_{\max} = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$. Найдти

вероятность W , обнаружить колеблющуюся частицу вне классической области движения.

Решение. Волновая функция $\Psi_0(x)$ частицы в основном состоянии дана выражением (2.5.16). Нас интересует вероятность обнаружить частицу в области $x \leq -x_{\max}$ и $x \geq x_{\max}$, т.е. мы

должны вычислить и сложить интегралы $-\int_{-\infty}^{-x_{\max}} |\psi_0(x)|^2 dx$ и $\int_{x_{\max}}^{\infty} |\psi_0(x)|^2 dx$. Из симметрии потенциала и волновой функции

ясно, что эти вероятности равны, так что достаточно подсчитать и удвоить лишь одну из них. Имеем тогда

$$W = 2 \int_{x_{\max}}^{\infty} |\psi_0(x)|^2 dx = 2 \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} \int_{\sqrt{\hbar/(m\omega)}}^{\infty} e^{-\frac{m\omega}{\hbar}x^2} dx. \quad (2.5.23)$$

Выполняя в интеграле замену переменных $x = y\sqrt{\hbar/(m\omega)}$, переписываем это выражение в виде

$$W = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_1^{\infty} e^{-x^2} dx = 0,157. \quad (2.5.24)$$

Приведенный выше интеграл не берется в элементарных функциях, и мы привели лишь результат его численного расчета. Итак, с вероятностью 15 % осцилятор в основном состоянии может отклоняться на расстояния, превышающие его классическую амплитуду колебаний.

Пример 2.5.4. Рассмотрим электрон, находящийся в трехмерном кубическом ящике размером $L = 10^{-10}$ м. Чему равны энергии (в эВ) четырех низших уровней? Сколько состояний отвечает каждому энергетическому уровню? Напишите волновые функции для каждого состояния.

Решение. Все волновые функции имеют вид

$$\psi_{n_x, n_y, n_z} = (2/L)^{3/2} \sin \frac{n_x \pi x}{L} \sin \frac{n_y \pi y}{L} \sin \frac{n_z \pi z}{L}.$$

$$E_1 = 112 \text{ эВ},$$

$$\Psi = \Psi_{1,1,1},$$

$$E_2 = 224 \text{ эВ},$$

$$\Psi = \Psi_{1,1,2}; \Psi_{1,2,1} \text{ и } \Psi_{2,1,1};$$

$$E_3 = 336 \text{ эВ},$$

$$\Psi = \Psi_{1,2,2}; \Psi_{2,1,2} \text{ и } \Psi_{2,2,1};$$

$$E_4 = 410 \text{ эВ},$$

$$\Psi = \Psi_{1,1,3}; \Psi_{1,3,1} \text{ и } \Psi_{3,1,1}.$$

Пример 2.5.5. Атомы аргона заключены в непроницаемый кубический баллон с размером ребра $a = 20$ см. 1) Какова разность энергий ΔE двух первых уровней? 2) Какова кинетическая энергия E_k теплового движения атомов при температуре $T = 300$ К? 3) При какой температуре энергия теплового возбуждения равна разности энергий первых уровней? Атомная масса аргона $M = 39,9$ г/моль.

Решение: сначала вычислим массу атома аргона:

$$m = M / N_A = 39,9 \cdot 10^{-3} / 6,022 \cdot 10^{23} = 6,63 \cdot 10^{-26} \text{ кг}.$$

1) Энергия частиц в кубическом объеме дается формулой (2.5.13), где надо положить $l_1 = l_2 = l_3 = a$. Энергия основного состояния получается при значении квантовых чисел $n_1 = n_2 = n_3 = 1$, для первого возбужденного уровня значение одного из квантовых чисел увеличивается на единицу (например $n_1 = 2, n_2 = n_3 = 1$) В результате:

$$E_{1,1,1} = 3 \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2}, \quad E_{2,1,1} = 6 \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2},$$

$$\Delta E = \Delta E_{2,1,1} - E_{1,1,1} = 3 \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2}. \quad (2.5.25)$$

Подставляем численные данные:

$$\Delta E = \frac{3\pi^2 \times (1,054 \cdot 10^{-34})^2}{2 \times 6,63 \cdot 10^{-26} \times 0,2^2} = 6,20 \cdot 10^{-41} \text{ Дж}.$$

2) Средняя тепловая энергия атома аргона вычисляется по формуле

$$E_k = \frac{3}{2} k_B T = \frac{3}{2} \times 1,38 \cdot 10^{-23} \times 300 = 6,21 \cdot 10^{-21} \text{ Дж}. \quad (2.5.26)$$

3) Температура, при которой $E_k = \Delta E$ равна, как видно,

$$T = \frac{2\Delta E}{3k_B} = \frac{2 \times 6,20 \cdot 10^{-41}}{3 \times 1,38 \cdot 10^{-23}} = 3,0 \cdot 10^{-18} \text{ К.}$$

Иными словами, дискретностью уровней в газе можно спокойно пренебречь, в том числе, и по сравнению с другими квантовыми эффектами.

Пример 2.5.6. При каком отношении высоты U потенциального барьера бесконечной ширины и энергии E электрона, падающего на барьер, коэффициент отражения ρ равен $1/2$?

Решение. Для коэффициента отражения получена формула

$$\rho = \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right)^2,$$

где волновые векторы равны

$$k_1 = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2mE}, \quad k_2 = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(E-U)}.$$

Отсюда

$$\rho = \left(\frac{1 - \sqrt{1 - U/E}}{1 + \sqrt{1 - U/E}} \right)^2. \quad (2.5.27)$$

Решая уравнение относительно отношения U/E , получаем

$$\frac{U}{E} = \frac{4\sqrt{\rho}}{(1 + \sqrt{\rho})^2}. \quad (2.5.28)$$

Подставляя $\rho = 1/2$, находим $U/E = 4(3\sqrt{2} - 4) \approx 0,971$.

Пример 2.5.7. На низкий потенциальный барьер падает моноэнергетический поток электронов. Концентрация n_0 электронов в падающем потоке равна 10^9 мм^{-3} , а их энергия

$E = 100$ эВ. Определить давление, которое испытывает барьер, если его высота $U = 9,7$ эВ.

Решение. Пусть скорость электронов $v = \sqrt{2E/m}$, а поперечное сечение пучка S . Тогда за время dt на барьер попадут $dN = n_0 v S dt$ электронов. Из них ρdN отразятся, причем каждый передаст барьеру импульс $2mv$. Поэтому полный импульс, переданный отраженными электронами, равен $dp_1 = 2mv \cdot \rho dN = 2n_0 m v^2 S \rho dt = 4n_0 \rho E S dt$. Сила, действующая на барьер со стороны отраженных электронов, равна импульсу, передаваемому в единицу времени:

$$F_1 = \frac{dp_1}{dt} = 4n_0 \rho E S,$$

откуда получаем для давления ($P_1 = F_1 / S$):

$$P_1 = 4n_0 \rho E.$$

Кроме того, на барьер действуют и прошедшие электроны. Их число равно $(1 - \rho) dN$. При падении их импульс равен $\sqrt{2mE}$, после прохождения он уменьшается до $\sqrt{2m(E - U)}$. Разность этих импульсов передается барьеру. Поэтому полный импульс, переданный барьеру прошедшими электронами, равен

$$\begin{aligned} dp_2 &= \left(\sqrt{2mE} - \sqrt{2m(E - U)} \right) (1 - \rho) dN = \\ &= \left(\sqrt{2mE} - \sqrt{2m(E - U)} \right) (1 - \rho) n_0 \sqrt{\frac{2E}{m}} S dt \end{aligned} \quad (2.5.29)$$

Аналогично предыдущему случаю отсюда выводится выражение для давления, оказываемого прошедшими электронами:

$$P_2 = 2n_0 \left(1 - \sqrt{1 - U/E} \right) (1 - \rho) E. \quad (2.5.30)$$

Заметим, кстати, что для классических частиц отражения нет, и давление на барьер получается из P_2 при $\rho = 0$:

$$P_{cl} = 2En_0 \left(1 - \sqrt{1 - U/E}\right) = \frac{2n_0U}{1 + \sqrt{1 - U/E}}. \quad (2.5.31)$$

Подставляя в выражения для давлений P_1, P_2 коэффициент отражения как функцию энергии, получаем

$$P_1 = 4n_0E \left(\frac{1 - \sqrt{1 - U/E}}{1 + \sqrt{1 - U/E}} \right)^2; \quad (2.5.32)$$

$$P_2 = 4n_0E \frac{2\sqrt{1 - U/E} (1 - \sqrt{1 - U/E})}{(1 + \sqrt{1 - U/E})^2}. \quad (2.5.33)$$

Полное давление электронов на барьер равно сумме P_1 и P_2 :

$$P = \frac{4n_0U}{(1 + \sqrt{1 - U/E})^2}. \quad (2.5.34)$$

Это и есть окончательная формула, куда мы теперь подставим числовые данные:

$$n_0 = 10^{18} \text{ м}^{-3}; \quad U = 9,7 \times 1,6 \cdot 10^{-19} = 1,55 \cdot 10^{-18} \text{ Дж};$$

$$1 - \frac{U}{E} = 1 - 0,097 = 0,903.$$

Получаем тогда

$$P = \frac{4 \times 1 \cdot 10^{18} \times 1,55 \cdot 10^{-18}}{(1 + \sqrt{0,903})^2} \approx 1,63 \text{ Па}.$$

Отметим связь полученного давления с классическим:

$$P = \frac{2P_{cl}}{1 + \sqrt{1 - U/E}}. \quad (2.5.35)$$

Видно, что давление, рассчитанное на основе квантовой механики, всегда превышает давление, вычисленное по классической теории. Они совпадут лишь при больших энергиях, а в предельном случае $E = U$ квантовое давление ровно в два раза больше классического.

Пример 2.5.8. Протон и электрон прошли одинаковую ускоряющую разность потенциалов 10 кВ. Во сколько раз отличаются коэффициенты прозрачности D_e для электрона и D_p для протона, если высота барьера $U = 20$ кэВ и ширина $d = 0,1$ нм?

Решение. В обоих случаях энергия частицы $E = 10$ кэВ. Используя значения комптоновских длин волн для электрона и протона, приведенные в предыдущем разделе, находим из формулы (2.5.21):

$$D_e \approx \exp \left[-\frac{4\pi \times 1 \cdot 10^{-13}}{2,426 \cdot 10^{-13}} \sqrt{\frac{2 \times (20 - 10) \cdot 10^3}{0,511 \cdot 10^6}} \right] \approx 0,355;$$

$$D_p \approx \exp \left[-\frac{4\pi \times 1 \cdot 10^{-13}}{1,32 \cdot 10^{-15}} \sqrt{\frac{2 \times (20 - 10) \cdot 10^3}{938,3 \cdot 10^6}} \right] \approx 0,0124;$$

$$\frac{D_e}{D_p} \approx \frac{0,355}{0,0124} \approx 29. \quad (2.5.36)$$

Этот результат демонстрирует сильную зависимость коэффициента прозрачности от массы частицы.

Пример 2.5.9. Электрон с энергией $E = 4,9$ эВ налетает на прямоугольный потенциальный барьер высотой $U = 5$ эВ. При какой ширине d барьера вероятность прохождения электрона через него будет равна 0,2?

Решение. Вероятность прохождения частицы через потенциальный барьер по своему физическому смыслу совпадает с коэффициентом прозрачности D для которого у нас есть формула (2.5.21). Беря логарифм от обеих ее частей, находим выражение для ширины барьера:

$$d = \frac{\lambda_c}{4\pi\sqrt{\frac{2(U-E)}{mc^2}}} \ln(1/D). \quad (2.5.37)$$

Подставляем численные значения:

$$d = \frac{2,426 \cdot 10^{-12}}{4\pi\sqrt{\frac{2(5-4,9)}{0,511 \cdot 10^6}}} \ln(1/0,2) = 4,97 \cdot 10^{-10} \approx 0,5 \text{ нм.}$$

Пример 2.5.10. Согласно одной из простых моделей, атомное ядро из N нейтронов и Z протонов рассматривается как совокупность нуклонов в бесконечно глубоком (квадратном) потенциальном ящике.

а) Получите выражение для энергетических уровней (т.е. для числа уровней, приходящих на единичный энергетический интервал) в таком потенциальном ящике.

б) Чему равна максимальная кинетическая энергия отдельного нуклона, если ядро атома находится на самом нижнем энергетическом уровне?

в) Покажите, что при постоянной плотности ядра найденная выше максимальная энергия не зависит от числа нуклонов.

Решение:

а) Частица массой m внутри потенциального ящика описывается уравнением Шредингера:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) = E\psi. \quad (2.5.38)$$

Поскольку на стенках ящика потенциал обращается в бесконечность, то на стенках волновая функция $\psi(x, y, z) = 0$.

Собственные значения полной энергии E протона (или нейтрона) определяются выражением

$$E = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} n^2,$$

где n_x, n_y, n_z – положительные целые числа, a – размер потенциального ящика. Таким образом, получаем

$$\frac{dn}{dE} = \frac{ma^2}{\pi^2 \hbar^2 n}. \quad (2.5.39)$$

б) Поскольку полное число нейтронов (или протонов) связано с n соотношением

$$N \text{ (или } Z) = \frac{1}{8} \left(\frac{4}{3} \pi n^3 \right) \cdot 2 = \frac{\pi n^3}{3} \quad (2.5.40)$$

или

$$n^2 = \left(\frac{3N}{\pi} \right)^{2/3} \quad (2.5.41)$$

(здесь n – положительная величина, и каждому значению соответствуют два спиновых состояния частицы), то получаем для нейтрона

$$E_f = 3^{2/3} \pi^{4/3} \frac{\hbar^2 N^{2/3}}{2ma^2} \quad (2.5.42)$$

и аналогично для протона

$$E_f = 3^{2/3} \pi^{4/3} \frac{\hbar^2 Z^{2/3}}{2ma^2}. \quad (2.5.43)$$

в) Обозначим $A/a^3 = \rho$, $N/A = \alpha_n$ и $Z/A = \alpha_p$, где $A = N + Z$. Поскольку ρ , α_n и α_p являются постоянными величинами, то $N = \alpha_n A = \alpha_n \rho a^3$ и $Z = \alpha_p A = \alpha_p \rho a^3$, и мы имеем

$$\frac{N^{2/3}}{a^2} = (\alpha_n \rho)^{2/3} = \text{const}, \quad (2.5.44)$$

$$\frac{Z^{2/3}}{a^2} = (\alpha_p \rho)^{2/3} = \text{const}. \quad (2.5.45)$$

Следовательно, энергия E_f в вышеприведенных соотношениях – постоянная величина.

2.5.3. Задачи для самостоятельной работы

Прямоугольная бесконечно глубокая потенциальная яма (потенциальный ящик)

Задача 2.5.1. Частица находится в потенциальном ящике. Найти отношение разности соседних энергетических уровней $\Delta E_{n+1,n} = E_{n+1} - E_n$ к энергии E_n частицы в трех случаях: 1) $n = 3$; 2) $n = 10$; 3) $n \rightarrow \infty$. Поясните полученные результаты. ($\Delta E_{4,3} = 0,78$; $\Delta E_{11,10} = 0,21$; $\Delta E_{n+1,n} \rightarrow 0$. С ростом n дискретность спектра сглаживается)

Задача 2.5.2. Электрон находится в потенциальной яме шириной $l = 0,5$ нм. Определить наименьшую разность ΔE энергетических уровней электрона. Ответ выразить в электрон-вольтах. ($\Delta E = 4,5$ эВ)

Задача 2.5.3. Частица в потенциальной яме шириной l находится в первом возбужденном состоянии ($n = 2$). Определить, в каких точках интервала ($0 < x < l$) плотность вероятности нахождения частицы максимальна и минимальна. (Максимальна при $x = l/4, 3l/4$, минимальна при $x = l/2$)

Задача 2.5.4. Электрон находится в потенциальном ящике шириной l . В каких точках в интервале ($0 < x < l$) плотность вероятности нахождения электрона на первом и втором энергетических уровнях одинакова? Вычислить плотность вероятности для этих точек. ($x = l/3, 2l/3$; $|\psi|^2 = 3/(2l)$)

Задача 2.5.5. В одномерном потенциальном ящике шириной l находится электрон. Вычислить вероятность W нахождения электрона на основном энергетическом уровне в интервале длиной $l/4$, равноудаленном от стенок ящика. ($W = 0,475$)

Задача 2.5.6. Частица в потенциальном ящике шириной l находится в низшем возбужденном состоянии. Определить вероятность W нахождения частицы в интервале длиной $l/4$ равноудаленном от стенок ящика. ($W = 0,091$)

Задача 2.5.7. Вычислить отношение вероятностей W_1/W_2 нахождения электрона на основном и низшем возбужденном уровнях в интервале длиной $l/4$, равноудаленном от стенок потенциального ящика шириной l . (5,22)

Задача 2.5.8. Электрон находится в одномерной прямоугольной «потенциальной яме» шириной l с бесконечно высокими «стенами». Определить вероятность W обнаружения электрона в средней трети «ямы», если электрон находится в возбужденном состоянии ($n = 2$). Пояснить физический смысл полученного результата, изобразив графически плотность вероятности обнаружения электрона в данном состоянии. ($W = 0,195$)

Задача 2.5.9. Электрон находится в одномерном потенциальном ящике шириной l на одном из энергетических уровней. Найти среднее значение $\langle x \rangle$ координаты электрона ($0 < x < l$). ($l/2$)

Задача 2.5.10. Считая, что нуклоны в ядре находятся в трехмерном потенциальном ящике кубической нормы с линейными размерами $l = 10$ фм, оценить низший энергетический уровень нуклонов в ядре. Массу нуклона принять равной массе протона. (6,1 МэВ)

Задача 2.5.11. Рассмотрим электрон проводимости, движущийся в кристалле металла, имеющем кубическую форму с длиной ребра $a = 0,25$ мкм. Такой электрон свободно движется в металле, но не может ускользнуть наружу. Принимая, что электрон удерживается в трехмерном бесконечно глубоком потенциальном ящике, вычислить пять первых значений энергии, которые может иметь электрон. (18 мкэВ; 36 мкэВ; 54 мкэВ; 66 мкэВ; 72 мкэВ)

Задача 2.5.12. Электрон находится в кубическом потенциальном ящике в основном состоянии. Какова вероятность обнаружить его в

кубе, занимающем $1/8$ объема ящика и расположенном в его центре?
(0,55)

Задача 2.5.13. Электрон находится в кубическом потенциальном ящике в основном состоянии. Какова вероятность обнаружить его в кубе, занимающем $1/64$ объема ящика и расположенном в его центре?
(0,11)

Задача 2.5.14. Электрон находится в основном состоянии в двумерном квадратном бесконечно глубоком потенциально ящике со стороной l . Определить вероятность W нахождения электрона в области, ограниченной квадратом, который равноудален от стенок ящика и площадь которого составляет $1/4$ площади ящика.
(0,67)

Низкий потенциальный барьер бесконечной ширины (ступенька)

Задача 2.5.15. Электрон обладает энергией $E = 10$ эВ. Определить, во сколько раз изменится его скорость v и длина волны де Бройля λ при прохождении через потенциальный барьер высотой $U = 6$ эВ. (v уменьшится в 1,58 раза, во столько же раз возрастет λ)

Задача 2.5.16. Протон с энергией $E = 1$ МэВ изменил при прохождении над низким потенциальным барьером дебройлевскую длину на 1 %. Определить высоту U потенциального барьера.
($U = 0,02$ МэВ)

Задача 2.5.17. На пути электрона с дебройлевской длиной волны $\lambda_1 = 0,1$ нм находится потенциальный барьер высотой $U = 120$ эВ. Определить длину волны де Бройля λ_2 при прохождении над барьером. (0,22 нм)

Задача 2.5.18 Моноэнергетический поток электронов ($E = 100$ эВ) падает на низкий прямоугольный потенциальный барьер бесконечной ширины. Определить высоту потенциального

барьера U если известно, что 4 % падающих на барьер электронов отражается. (55,6 эВ)

Задача 2.5.19. Коэффициент отражения ρ протона от потенциального барьера равен $2,5 \cdot 10^{-5}$. Определить, какой процент составляет высота U барьера от кинетической энергии падающих на барьер протонов. (1,98 %)

Задача 2.5.20. Вычислить коэффициент прохождения электрона с энергией $E = 100$ эВ через потенциальный барьер высотой $U = 99,75$ эВ. (0,18)

Задача 2.5.21. При каком отношении высоты U потенциального барьера и энергии E электрона, падающего на барьер, коэффициент отражения равен 0,5? (0,97)

Задача 2.5.22. Кинетическая энергия T электрона в два раза превышает высоту U потенциального барьера. Определить коэффициент отражения и коэффициент прохождения электронов на границе барьера. ($\rho = 0,0294$; $\tau = 0,971$)

Задача 2.5.23. Коэффициент прохождения электронов через низкий потенциальный барьер равен коэффициенту отражения. Определить, во сколько раз кинетическая энергия T электронов больше высоты U потенциального барьера. ($T/U = 1,03$)

Задача 2.5.24. Электрон с энергией $E = 100$ эВ попадает на потенциальный барьер высотой $U = 64$ эВ. Определить вероятность W того, что электрон отразится от барьера. ($W = 0,0625$)

Задача 2.5.25. Найти приближенное выражение ρ_a коэффициента отражения от очень низкого потенциального барьера ($U \ll E$). Определить относительную погрешность $\delta = 100 \% (\rho_a - \rho) / \rho$ этого выражения по сравнению с точным

результатом для: 1) $U = 0,01E$; 2) $U = 0,1E$. $\rho \approx \left(\frac{U}{4E} \right)^2$.

(1 - $\delta = -1,0\%$; 2 - $\delta = -9,9\%$)

Задача 2.5.26. Найти приближенное выражение для коэффициента прохождения τ_a через низкий потенциальный барьер при условии, что кинетическая энергия $T = E - U$ частицы в области над барьером много меньше высоты U потенциального барьера. Определить относительную погрешность $\delta = 100\% (\tau_a - \tau) / \tau$ этого выражения по сравнению с точным результатом для: 1) $E = 1,001U$; 2) $E = 1,01U$. ($\tau = 4\sqrt{\frac{T}{U}}$.)

$$1 - \delta = 6,5\% ; 2 - \delta = 21,5\%$$

Задача 2.5.27. На низкий потенциальный барьер направлен монохроматический поток электронов с плотностью потока энергии $J_1 = 10 \text{ Вт/м}^2$. Определить плотность потока энергии J_2 электронов в области над барьером, если высота его $U = 0,91 \text{ эВ}$ и энергия E электронов в падающем потоке равна 1 эВ ? ($J_2 = 0,19 \text{ Вт/м}^2$)

Задача 2.5.28. Моноэнергетический поток электронов падает на низкий потенциальный барьер. Коэффициент прохождения $\tau = 0,9$. Определить отношение J_2 / J_1 плотности потока энергии волны, прошедшей барьер, к плотности потока энергии волны, падающей на барьер. (0,126)

Прямоугольный потенциальный барьер конечной ширины

Задача 2.5.29. Найти вероятность W туннелирования электрона через прямоугольный потенциальный барьер при разности энергий $U - E = 1 \text{ эВ}$, если ширина барьера: 1) $d = 0,1 \text{ нм}$; 2) $d = 0,5 \text{ нм}$. ($1 - W = 0,36$; $2 - W = 5,9 \cdot 10^{-3}$)

Задача 2.5.30. Электрон проходит через прямоугольный потенциальный барьер шириной $d = 0,5 \text{ нм}$. Высота U барьера больше энергии E электрона на 1% . Вычислить коэффициент

прозрачности D , если энергия электрона: 1) $E = 10$ эВ; 2) $E = 100$ эВ. ($1 - W = 0,20$; $2 - W = 6,0 \cdot 10^{-3}$)

Задача 2.5.31. Ширина d прямоугольного потенциального барьера равна $0,2$ нм. Разность энергий $U - E = 1$ эВ. Во сколько раз изменится вероятность W прохождения электрона через барьер, если разность энергий возрастет в $n = 10$ раз? (Уменьшится в 84 раза)

Задача 2.5.32. Электрон с энергией $E = 9$ эВ налетает на прямоугольный барьер высотой $U = 10$ эВ. При какой ширине d потенциального барьера коэффициент прозрачности $D = 0,1$? ($d = 0,22$ нм)

Задача 2.5.33. При какой ширине d прямоугольного потенциального барьера коэффициент прозрачности D для электронов равен $0,01$? Разность энергий $U - E = 10$ эВ. ($0,142$ нм)

Задача 2.5.34. Электрон налетает на прямоугольный барьер. При каком значении $U - E$ коэффициент прозрачности $D = 10^{-3}$, если ширина d барьера равна $0,1$ нм? ($45,4$ эВ)

Задача 2.5.35. Электрон с энергией $E = 9$ эВ налетает на прямоугольный барьер. Оценить вероятность W того, что электрон пройдет через потенциальный барьер, если его высота барьера $U = 10$ эВ, а ширина $d = 0,1$ нм. ($0,359$)

Задача 2.5.36. Прямоугольный потенциальный барьер имеет ширину $d = 0,1$ нм. При какой разности энергий $U - E$ вероятность W прохождения электрона через барьер равна $0,99$? ($d = 96$ мкэВ)

Задача 2.5.37. Ядро испускает α -частицы с энергией $E = 5$ МэВ. В грубом приближении можно считать, что α -частицы проходят через прямоугольный потенциальный барьер высотой $U = 10$ МэВ и шириной $d = 5$ фм. Найти коэффициент прозрачности D барьера для α -частиц, массу которых принять равной четырем массам протона. ($5,4 \cdot 10^{-5}$)

Задача 2.5.38. Протон и электрон прошли одинаковую ускоряющую разность потенциалов $\Delta\varphi = 10$ кВ. Во сколько раз отличаются коэффициенты прозрачности D_e для электрона и D_p для протона, если высота U барьера равна 20 кэВ и ширина $d = 0,1$ пм? ($D_e / D_p \approx 73$)

Задача 2.5.39. Пучок электронов с энергией $E = 5,0$ эВ падает на барьер высотой $U = 6,0$ эВ и шириной $d = 0,70$ нм. Интенсивность пучка соответствует току силой 1,0 кА. Сколько времени надо ждать в среднем, чтобы через барьер просочился один электрон? ($2,1 \cdot 10^{-19}$ с)

Задача 2.5.40. Пучок протонов с энергией $E = 5,0$ эВ падает на барьер высотой $U = 6,0$ эВ и шириной $d = 0,70$ нм. Интенсивность пучка соответствует току силой 1,0 кА. Сколько времени надо ждать в среднем, чтобы через барьер просочился один протон? ($1,7 \cdot 10^{104}$ лет)

Задача 2.5.41. Процесс α -распада ядра можно смоделировать как прохождение α -частицей через прямоугольный потенциальный барьер высотой $U_0 = 15$ МэВ и шириной $l = 10^{-15}$ м. Определить коэффициент прозрачности барьера для α -частиц, имеющих энергию $E = 5$ МэВ.

Задача 2.5.42. Поток электронов встречает на своем пути потенциальный барьер в виде ступеньки высотой U_0 . Считая, что все электроны до барьера имели одинаковую кинетическую энергию $T = 2U_0$, определить долю электронов, прошедших

потенциальный барьер. ($D = \frac{4U_0\sqrt{2}}{(\sqrt{2v_0} + \sqrt{U_0})^2} = 0,97$)

2.6. Строение атома. Квантование момента импульса. Спектры щелочных металлов. Рентгеновские спектры. Молекулярные спектры. Спин электрона. Атом в магнитном поле

2.6.1. Основные понятия, законы и формулы

• Уравнение Шредингера для стационарных состояний электрона в поле кулоновского потенциала, создаваемого зарядом $+Ze$:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m_e} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\hat{L}^2}{2m_e r^2} - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right] \psi(r, \theta, \varphi) = E\psi(r, \theta, \varphi). \quad (2.6.1)$$

где $\psi(r, \theta, \varphi)$ – волновая функция (зависящая от сферических координат r, θ, φ), m_e – масса электрона, E – его полная энергия.

• Величина \vec{L} в (2.6.1) – оператор орбитального момента количества движения. Одновременно измеримы квадрат момента и его проекция на любую ось (обычно выбирают ось z). Соответствующие операторы имеют вид

$$\hat{L}^2 = -\hbar^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right), \quad \hat{L}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi}. \quad (2.6.2)$$

• Энергетические уровни электрона в водородоподобном атоме:

$$E_n = -\frac{m_e e^2}{2(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^2} \cdot \frac{Z^2}{n^2} = -13,6 \text{ эВ} \cdot \frac{Z^2}{n^2}, \quad (2.6.3)$$

где n – главное квантовое число ($n = 1, 2, 3, \dots$).

• Волновая функция $\psi_{n,l,m}(r, \theta, \varphi)$ стационарного состояния зависит от главного квантового числа n , орбитального квантового числа l , пробегающего значения $l = 0, 1, \dots, n-1$, и магнитного квантового числа m , пробегающего значения

$m = -l, -l+1, \dots, 0, \dots, l-1, l$. Для данного n имеется n^2 разных волновых функций, соответствующих тому же значению энергии.

• Вероятность dW того, что электрон находится в области, ограниченной элементом объема dV , взятого в окрестности точки с координатами r, θ, φ :

$$dW = |\psi_{n,l,m}(r, \theta, \varphi)|^2 dV, \\ dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi. \quad (2.6.4)$$

• Нормированные волновые функции, отвечающие $1s$ - (основное состояние) и $2s$ - состояниям:

$$\psi_{1,0,0}(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-\frac{r}{a}}, \quad \psi_{2,0,0}(r) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi a^3}} \left(2 - \frac{r}{a}\right) e^{-\frac{r}{2a}}, \quad (2.6.5)$$

где $a = a_B / Z$, а $a_B = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m_e e^2} = 52,9$ пм – боровский радиус.

В s -состояниях ($l=0, m=0$) волновые функции сферически симметричны, т.е. не зависят от углов θ и φ . Вероятность dW_r найти электрон, находящийся в атоме водорода в s -состоянии, в сферическом слое $(r, r+dr)$ одинакова по всем направлениям и определяется соотношением:

$$dW_r = |\psi_{n,0,0}|^2 4\pi r^2 dr. \quad (2.6.6)$$

• В состоянии $\psi_{n,l,m}$ с определенным значением квадрата орбитального момента импульса и его проекции на ось Z эти значения равны:

$$\vec{L}^2 = \hbar^2 l(l+1), \quad L_z = \hbar m_l. \quad (2.6.7)$$

Соответственно значения магнитного момента и его проекции, порождаемые орбитальным движением электрона, равны:

$$\mu_L = \mu_B \sqrt{l(l+1)}, \quad \mu_{L,z} = \mu_B m_l, \quad (2.6.8)$$

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} = 5,788 \cdot 10^{-5} \text{ эВ/Тл} = 0,927 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/Тл},$$

где μ_B – магнетон Бора.

- Гиромагнитное отношение для орбитальных магнитного и механического моментов:

$$\frac{\mu_L}{L} = \frac{\mu_{L,z}}{L_z} = \frac{e}{2m_e}. \quad (2.6.9)$$

- Спиновый момент импульса и его проекция на ось z :

$$\vec{S}^2 = \hbar s(s+1), \quad S_z = \hbar m_s, \quad (2.6.10)$$

где s – спиновое квантовое число (для электрона $s = 1/2$), а m_s – спиновое магнитное квантовое число (оно принимает $2s+1$ значение: $m_s = -s, -s+1, \dots, s-1, s$, так что для электрона $m_s = \pm 1/2$). Спиновый магнитный момент электрона и его проекция на ось z :

$$\mu_S = 2\mu_B \sqrt{s(s+1)}, \quad \mu_{S,z} = 2\mu_B m_s. \quad (2.6.11)$$

- Гиромагнитное отношение для спиновых магнитного и механического моментов:

$$\frac{\mu_S}{S} = \frac{\mu_{S,z}}{S_z} = \frac{e}{m_e}, \quad (2.6.12)$$

т.е. спиновый момент обладает двойным магнетизмом по сравнению с орбитальным.

- Принцип Паули: в атоме не может находиться два (и более) электрона, характеризующихся одинаковым набором четырех квантовых чисел: n, l, m_l, m_s .

- Кратность вырождения энергетических уровней атома равна $2n^2$ (2 — за счет двух возможных направлений проекции спина электрона, n^2 — число состояний с различными l, m_l при

фиксированном n).

- Распределение электронов по состояниям в атоме записывается с помощью спектроскопических символов

(s, p, d, f, g, h) исторически обозначающих значения орбитального момента ($l = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ соответственно). Электронная конфигурация записывается следующим образом: перед спектроскопическим символом ставится значение главного квантового числа n , а справа сверху – количество электронов в данном состоянии (единица обычно опускается). Например: $1s$ – электрон в состоянии $n = 1, l = 0$, $2p$ – электрон с $n = 2, l = 1$, $2p^2$ – два электрона с $n = 2, l = 1$ и т.д.

- *Оболочкой* называется совокупность уровней с одинаковым значением главного квантового числа n . Традиционные обозначения: $K, L, M, N, O, P, Q, \dots$ для $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots$ соответственно.

Подоболочка — совокупность состояний с данными значениями n и l .

Максимальное число электронов, помещающихся на данной оболочке, равно $2n^2$; максимальное число электронов, помещающихся на данной подоболочке, – $2(2l + 1)$:

K -оболочка – одна подоболочка, два электрона, конфигурация $1s^2$.

L -оболочка – две подоболочки, всего восемь электронов, конфигурация $2s^2, 2p^6$.

M -оболочка – три подоболочки, всего 18 электронов, конфигурация $3s^2, 3p^6, 3d^{10}$.

- Порядок заполнения уровней в атомах:

$1s \parallel 2s, 2p \parallel 3s, 3p \parallel 4s, 3d, 4p \parallel 5s, 4d, 5p \parallel 6s, 4f, 5d, 6p \parallel, \dots$

Знаком \parallel отделены периоды таблицы Д. И. Менделеева.

- Полный момент импульса электрона $\mathcal{L}_j = \hbar\sqrt{j(j+1)}$, где j – внутреннее квантовое число ($j = l + 1/2, l - 1/2$).
- Полный орбитальный момент атома $\mathcal{L}_L = \hbar\sqrt{L(L+1)}$, где L – полное орбитальное квантовое число.
- Полный спиновый момент атома $\mathcal{L}_S = \hbar\sqrt{S(S+1)}$, где S – полное спиновое квантовое число.
- Полный момент импульса атома $\mathcal{L}_J = \hbar\sqrt{J(J+1)}$, где J – полное внутреннее квантовое число.
- Символическое обозначение состояние атома (спектральный терм) $^{2S+1}L_J$, где $2S + 1$ – мультиплетность. Вместо полного орбитального квантового числа L пишут символ в соответствии с табл. 2.6.1.

Таблица 2.6.1

Значение	0	1	2	3	4	5
Символ	S	P	D	F	G	H

Пример. Терм $^2P_{3/2}$ расшифровывается следующим образом: мультиплетность $2S + 1 = 2$; следовательно, $S = 1/2$, символу P соответствует $L = 1$, а $J = 3/2$.

• Магнитный момент атома $\mu_J = g\mu_B\sqrt{J(J+1)}$, где g – множитель (или фактор) Ланде,

$$g = 1 + \frac{J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)}. \quad (2.6.13)$$

• Проекция магнитного момента атома на направление внешнего магнитного поля (совпадающего с осью Z)

$$\mu_{J,z} = g\mu_B m_J, \quad (2.6.14)$$

где m_J – полное магнитное квантовое число ($m_J = J, J-1, \dots, -J$).

• Энергия атома в магнитном поле

$$E_{\text{маг}} = -(\vec{\mu}_J \cdot \vec{B}) = -\mu_{J,z} B_z. \quad (2.6.15)$$

- Сила, действующая на атом в неоднородном магнитном поле,

$$F_z = \frac{\partial B}{\partial z} \mu_{J,z}, \quad (2.6.16)$$

где $\partial B / \partial z$ – градиент магнитной индукции, $\mu_{J,z}$ – проекция магнитного момента на ось Z .

- Частота ларморовой прецессии $\omega_{\text{л}} = eB / (2m_e)$, где m_e – масса электрона.

- Величина расщепления спектральной линии при эффекте Зеемана:

а) простом (нормальном):

$$\Delta\omega = 0, \pm\omega_{\text{л}}; \quad (2.6.17)$$

б) сложном (аномальном):

$$\Delta\omega = (m''_J g'' - m'_J g') \omega_{\text{л}}, \quad (2.6.18)$$

где m''_J, m'_J и g'', g' – магнитные квантовые числа, и множители Ланде соответствующих термов.

- Правила отбора для квантовых чисел $S, L, J,$ и m_S, m_L, m_J :

$$\Delta S = 0; \quad \Delta m_S = 0;$$

$$\Delta L = \pm 1; \quad \Delta m_L = 0, \pm 1; \quad (2.6.19)$$

$$\Delta J = 0, \pm 1; \quad \Delta m_J = 0, \pm 1.$$

Не осуществляются переходы $J = 0 \rightarrow J = 0$, а при $J = 0$ – переходы $m_J = 0 \rightarrow m_J = 0$.

- Спектр щелочных металлов определяется соотношением

$$\nu_{kn} = T_k - T_n, \quad (2.6.20)$$

где термы атомов щелочных металлов равны

$$T_i = \frac{R}{(n + \alpha)^2}, \quad (2.6.21)$$

где R – постоянная Ридберга, α – ридберговская поправка.

- Закон Мозли:

$$v_K = R(Z - \sigma_K)^2 \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right) \text{ для } L \rightarrow K \text{ перехода;}$$

$$v_L = R(Z - \sigma_L)^2 \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \right) \text{ для } M \rightarrow L \text{ перехода,} \quad (2.6.22)$$

где $\sigma_K, \sigma_L, \dots$ – постоянные экранирования.

- Приведенная масса двухатомной молекулы

$$\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2), \quad (2.6.23)$$

где m_1 и m_2 – массы атомов, входящих в состав молекулы.

- Собственная круговая частота осциллятора

$$\omega = \sqrt{\beta / \mu}, \quad (2.6.24)$$

где β – коэффициент квазиупругой силы.

- Нулевая собственная волновая функция одномерного квантового гармонического осциллятора

$$\psi_0(x) = C_0 \exp(-\alpha^2 x^2 / 2), \quad (2.6.25)$$

где параметр $\alpha = \sqrt{\mu \omega / \hbar}$.

- Энергия колебания гармонического осциллятора

$$E_n = \hbar \omega (n + 1/2), \quad (2.6.26)$$

где n – колебательное квантовое число ($n = 0, 1, 2, 3, \dots$).

Для квантового числа n существует правило отбора, согласно которому $\Delta n = \pm 1$.

- Нулевая энергия

$$E_0 = 1/2 \hbar \omega. \quad (2.6.27)$$

- Энергия колебания ангармонического осциллятора

$$E_\nu = \hbar \omega \left[(\nu + 1/2) - \gamma (\nu + 1/2)^2 \right], \quad (2.6.28)$$

где ν – колебательное квантовое число ($\nu = 0, 1, 2, \dots$): γ – коэффициент ангармоничности; $\Delta \nu$ – любое целое число. Для квантового числа ν нет правила отбора, поэтому $\Delta \nu$ может принимать любые целочисленные значения.

- Разность энергий двух соседних колебательных уровней

$$\Delta E_{\nu+1, \nu} = \hbar\omega \left[1 - 2\gamma(\nu+1) \right]. \quad (2.6.29)$$

- Максимальное значение квантового числа ν

$$\nu_{\max} = \frac{1}{2\gamma} - 1. \quad (2.6.30)$$

- Максимальная энергия колебательного движения

$$E_{\max} = \hbar\omega / (4\gamma). \quad (2.6.31)$$

- Энергия диссоциации двухатомной молекулы

$$E_d = \frac{\hbar\omega}{4\gamma} (1 - 2\gamma). \quad (2.6.32)$$

- Момент инерции двухатомной молекулы относительно оси, проходящей через ее центр инерции перпендикулярно прямой, соединяющей ядра атомов,

$$I = \mu d^2, \quad (2.6.33)$$

где μ – приведенная масса молекулы; d – межъядерное расстояние.

- Энергия вращательного движения двухатомной молекулы

$$E_j = BJ(J+1), \quad (2.6.34)$$

где J – вращательное квантовое число ($J=0, 1, 2, \dots$); B – вращательная постоянная $B = \hbar^2 / 2I$.

2.6.2. Методические рекомендации по решению задач

Типичными для этого раздела являются задачи на использование волновых функций электрона в водородоподобном атоме. При решении таких задач часто встречается интеграл от произведения экспоненциальной функции на произвольную степень переменной интегрирования. Поэтому мы включаем ряд чисто математических упражнений, результаты которых используются при решении физических задач на данную тему.

Пример 2.6.1. Вычислить интеграл $I_n = \int_0^{\infty} dr r^n e^{-\lambda r}$, где параметр $\lambda > 0$, а n – произвольное натуральное число.

Решение. Рассмотрим интеграл при $n = k$, где $k \geq 1$ – произвольное целое число, и применим к нему формулу интегрирования по частям:

$$I_k = -\frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} d(e^{-\lambda r}) r^k = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda r} r^k \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} d(r^k) e^{-\lambda r} = \frac{k}{\lambda} \int_0^{\infty} e^{-\lambda r} r^{(k-1)},$$

так что получилось рекуррентное соотношение

$$I_k = \frac{k}{\lambda} I_{k-1}, \quad k \geq 1 \quad (2.6.35)$$

Теперь напишем уравнения (2.6.35) для $k = 1, \dots, n$:

$$I_1 = \frac{1}{\lambda} I_0, \quad I_2 = \frac{2}{\lambda} I_1, \dots, \quad I_n = \frac{n}{\lambda} I_{n-1},$$

и перемножим их:

$$I_1, I_2, \dots, I_n = \frac{1 \times 2 \times \dots \times n}{\lambda^n} I_0 I_1 \dots I_{n-1}$$

Сокращая слева и справа I_1, \dots, I_{n-1} , получаем

$$I_n = I_0 \frac{n!}{\lambda^n}.$$

Интеграл I_0 легко вычисляется:

$$I_0 = \int_0^{\infty} dr e^{-\lambda r} = \frac{1}{\lambda},$$

откуда находим окончательный ответ:

$$I_n = \int_0^{\infty} dr r^n e^{-\lambda r} = \frac{n!}{\lambda^{n+1}}. \quad (2.6.36)$$

С помощью формулы (2.6.36) вычисляются и аналогичные интегралы с конечными пределами интегрирования.

Пример. 2.6.2. Вычислить интеграл $I_2(R) = \int_0^R dr r^2 e^{-\lambda r}$.

Решение. Нам надо свести этот интеграл к интегралу по бесконечной полуоси. Для этого прибавим и отнимем этот же интеграл, взятый в пределах от R до ∞ . Получаем

$$I_2(R) = \int_0^{\infty} dr r^2 e^{-\lambda r} - \int_R^{\infty} dr r^2 e^{-\lambda r}.$$

Первый интеграл равен интегралу I_2 , вычисленному в предыдущей задаче. Во втором интеграле делаем замену переменных $r = x + R$:

$$I_2(R) = I_2 - e^{-\lambda R} \int_0^{\infty} dx (x + R)^2 e^{-\lambda x}.$$

Если теперь раскрыть $(x + R)^2$ в подынтегральном выражении и вынести степени R , не зависящие от переменной интегрирования x то получится сумма интегралов вида I_n ($n = 0, 1, 2$):

$$I_2(R) = I_2 - e^{-\lambda R} (I_2 + 2RI_1 + R^2I_0),$$

что после подстановки выражений (2.6.36) для I_0, I_1, I_2 принимает вид

$$I_2(R) = \int_0^R dr r^2 e^{-\lambda r} = \frac{2}{\lambda^3} - \frac{e^{-\lambda R}}{\lambda^3} [2 + 2(\lambda R) + (\lambda R)^2]. \quad (2.6.37)$$

Пример 2.6.3. Атом водорода находится в состоянии $1s$. Определить вероятность W пребывания электрона в атоме внутри сферы радиусом $r = 0,1a_B$ (a_B – радиус Бора).

Решение. Искомая вероятность равна интегралу от плотности вероятности (2.6.6). С учетом выражения (2.6.5) для волновой функции в $1s$ -состоянии $Z = 1$, получаем

$$W = \frac{4}{a_B^3} \int_0^{0,1a_B} r^2 e^{-2r/a_B} dr = 4 \int_0^{0,1} x^2 e^{-2x} dx,$$

где мы сделали замену переменных $r = a_B x$, чтобы перейти к безразмерной величине x .

Мы могли бы далее воспользоваться результатом **примера 2.6.2** для интеграла $I_2(R)$ при $\lambda = 2$ и $R = 0,1$. Однако, с учетом малости R , мы можем заменить экспоненту под знаком интеграла на первые члены ее разложения в ряд:

$$\begin{aligned} W &\approx 4 \int_0^{0,1} x^2 [1 - 2x + 2x^2 + \dots] dx = \\ &= 4 \cdot \left[\frac{(0,1)^3}{3} - 2 \frac{(0,1)^4}{4} + 2 \frac{(0,1)^5}{5} + \dots \right] = \\ &= 1,333 \cdot 10^{-3} - 2,000 \cdot 10^{-4} + 1,6 \cdot 10^{-5} \dots = 1,149 \cdot 10^{-3}. \end{aligned}$$

Отброшенные члены разложения имеют порядок, $(0,1)^6$, т.е. мы можем быть уверены в нашем ответе с точностью до последнего показанного знака: $W = (1,149 \pm 0,001) \cdot 10^{-3}$. И действительно, точный расчет дает для W значение $W = 0,1485 \cdot 10^{-3}$.

В общем случае радиального возбуждения вероятность $W_n(R)$ найти электрон внутри сферы радиусом R дается выражением

$$W_n(R) = 4\pi \int_0^R r^2 |\psi_{n,0,0}(r)|^2 dr. \quad (2.6.38)$$

Поведение $W_n(R)$ для $n = 1, 2$ показано на рис. 4.

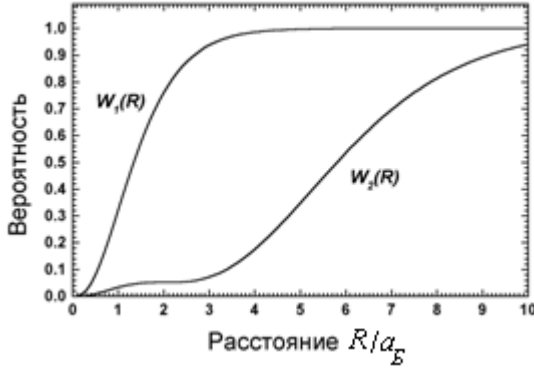


Рис. 4. Графики вероятностей $W_1(R)$ и $W_2(R)$ нахождения электрона внутри сферы радиусом R для $1s$ - и $2s$ -состояний электрона в атоме водорода

Пример 2.6.4. Волновая функция атома водорода в основном состоянии имеет вид

$$\psi(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a_B^3}} e^{-r/a_B},$$

где a_B — радиус Бора. Определить наиболее вероятное расстояние от ядра, на котором может быть обнаружен электрон.

Решение. Вероятность обнаружить электрон в элементе объема $d\vec{r}$ равна $dW = |\psi(r)|^2 d\vec{r}$. Так как волновая функция основного состояния не зависит от направления радиус-вектора \vec{r} , а лишь от его величины r , то можно написать выражение для вероятности dW_r обнаружить электрон в шаровом слое радиусом r и толщиной dr . Объем этого слоя равен $4\pi r^2 dr$ (площадь поверхности, умноженная на толщину). Именно им надо заменить элемент объема $d\vec{r}$ в dW , чтобы получить

$$dW_r = 4\pi r^2 |\psi(r)|^2 dr.$$

Отсюда видно, что плотность вероятности найти электрон на расстоянии от r до $r + dr$ равна

$$P(r) = \frac{dW_r}{dr} = 4\pi r^2 |\psi(r)|^2 = \frac{4}{a_B^3} r^2 e^{-2r/a_B}, \quad (2.6.39)$$

куда мы уже подставили данное в условии выражение для волновой функции атома в основном состоянии.

Наиболее вероятное расстояние $r_{\text{вер}}$ определяется как расстояние, на котором плотность вероятности максимальна:

$$\frac{dP(r)}{dr} = \frac{4}{a_B^3} \left(2re^{-2r/a_B} - r^2 \frac{2}{r} e^{-2r/a_B} \right) = \frac{8}{a_B^3} re^{-2r/a_B} \left(1 - \frac{r}{a_B} \right) = 0,$$

откуда получаем $r_{\text{вер}} = a_B$. В отличие от атома Бора, где a_B было просто радиусом первой орбиты, в квантовой механике и этот параметр имеет вероятностный смысл.

Пример 2.6.5. *Определить среднее расстояние электрона от ядра в основном состоянии атома водорода.*

Решение. Поскольку мы знаем из предыдущей задачи выражение для вероятности найти электрон в шаровом слое между поверхностями с радиусами r и $r + dr$ надо умножить эту вероятность на величину радиуса и сложить такие произведения для всех возможных значений r , то есть вычислить интеграл:

$$\langle r \rangle = \int r dW_r = \int_0^{\infty} rP(r) dr.$$

Подставляя сюда выражение для плотности вероятности $P(r)$, получаем

$$\langle r \rangle = \frac{4}{a_B^3} \int_0^{\infty} dr r^3 e^{-2r/a_B} = \frac{4}{a_B^3} \times 3 \left(\frac{a_B}{2} \right)^4 = \frac{3}{2} a_B. \quad (2.6.40)$$

Здесь мы использовали выражение для интеграла I_3 из уравнения (2.6.36) при $\lambda = 2/a_B$. Видно, что среднее расстояние

от ядра не совпадает с наиболее вероятным расстоянием предыдущей задачи.

• Аналогично вычисляются средние от любой степени r . Например,

$$\langle r^2 \rangle = \int_0^{\infty} r^2 P(r) dr \text{ и т.д.}$$

• Не следует забывать, что выражение для плотности вероятности, $P(r)$ которое мы использовали, относится к основному состоянию.

Для других состояний будут иные волновые функции и, соответственно, другие результаты.

Пример 2.6.6. Волновая функция первого радиального возбуждения атома водорода ($2s$ -состояния с $n=2$, $l=0$, $m=0$) равна (2.6.5)

$$\psi(r) = C \left(2 - \frac{r}{a_B} \right) \exp \left(-\frac{r}{2a_B} \right),$$

где C – нормировочная постоянная, a_B – радиус Бора. Какие расстояния от ядра наиболее вероятны для электрона в этом состоянии?

Решение. Аналогичная задачи решена нами для основного состояния. Радиальная плотность вероятности находится по тому же принципу:

$$P(r) = 4\pi |C|^2 r^2 \left(2 - \frac{r}{a_B} \right)^2 \exp \left(-\frac{r}{a_B} \right).$$

Эта функция обращается в нуль при $r=0$, $r=2a_B$ и на бесконечности. Ясно, что у нее должно быть, по крайней мере, два максимума на интервалах $(0, 2a_B)$ и $(2a_B, \infty)$. Чтобы найти их, продифференцируем функцию $P(r)$ по r :

$$\begin{aligned} \frac{dP(r)}{dr} &= 4\pi|C|^2 \left[2r \left(2 - \frac{r}{a_b} \right)^2 e^{-r/a_b} - r^2 \frac{2}{a_b} \left(2 - \frac{r}{a_b} \right) e^{-r/a_b} - \right. \\ &\quad \left. - r^2 \left(2 - \frac{r}{a_b} \right)^2 \frac{1}{a_b} e^{-r/a_b} \right] = \\ &= 4\pi|C|^2 r \left(2 - \frac{r}{a_b} \right) e^{-r/a_b} \left[\left(\frac{r}{a_b} \right)^2 - 6 \frac{r}{a_b} + 4 \right] = 0. \end{aligned}$$

Решения $r = 0$ и $r = 2a_b$ соответствуют минимуму плотности вероятности. Для нахождения максимумов надо решить квадратное уравнение $r^2 - 6ra_b + 4a_b^2 = 0$, откуда получаем $r_1 = (3 - \sqrt{5})a_b \approx 0,76a_b$ и $r_2 = (3 + \sqrt{5})a_b \approx 5,24a_b$. Нетрудно убедиться также, что значение плотности вероятности в точке r^2 примерно в 3,7 раза больше ее значения в точке r_1 .

Плотность вероятности для сферически симметричного состояния с $n = 1, 2$ в безразмерных единицах $P_n(R) \cdot a_b$ показана на рис. 5.

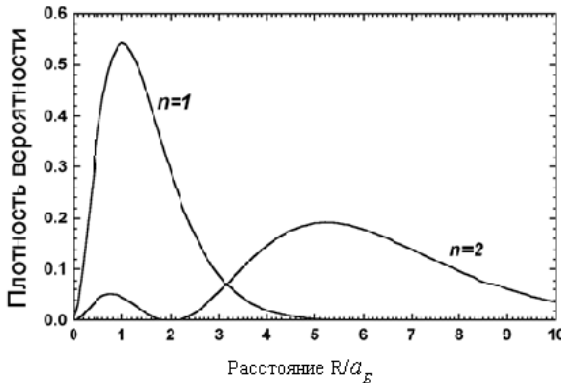


Рис. 5. Графики плотностей вероятностей

$$P_1(R) \cdot a_b = \frac{dW_1(R)}{dR} \text{ и } P_2(R) \cdot a_b = a_b \frac{dW_2(R)}{dR}$$

для $1s$ - и $2s$ -состояний электрона в атоме водорода
(графики вероятностей $W_1(R)$ и $W_2(R)$ см. на рис. 4)

Пример 2.6.7. Электрон в возбужденном атоме водорода находится в $3p$ -состоянии. Определить изменение магнитного момента, обусловленного орбитальным движением электрона, при переходе атома в основное состояние.

Решение. Изменение $\Delta\mu_L$ магнитного момента найдем как разность магнитных моментов в конечном (основном) и начальном (возбужденном) состояниях, т.е. $\Delta\mu_L = \mu_{L,0} - \mu_{L,1}$. Магнитный момент орбитального движения электрона, зависит только от орбитального квантового числа l : $\mu_L = \mu_B \sqrt{l(l+1)}$, так что $\mu_{L,0} = 0$, $\mu_{L,1} = \mu_B \sqrt{2}$ и $\Delta\mu_L = -\mu_B \sqrt{2} = -1,31 \cdot 10^{-23}$ Дж/Тл. Знак минус показывает, что в данном случае магнитный момент уменьшился.

Пример 2.6.8. Энергия ионизации атома водорода $I = 13,6$ эВ. Какой кинетической энергией должен обладать: 1) электрон, 2) протон и 3) альфа-частица, чтобы иметь возможность ионизировать атом водорода?

Решение. Предполагая, что ионизация происходит в результате полностью неупругого удара, можно написать закон сохранения импульса:

$$mv_0 = (m + m_H)u, \text{ откуда } u = v_0 \frac{m}{m + m_H},$$

где m – масса бомбардирующей частицы, $m_H = m_p + m_e$ – масса атома водорода, v_0 – начальная скорость налетающей частицы, u – конечная одинаковая скорость частицы и атома после столкновения. Кинетическая энергия T_0 бомбардирующей частицы до столкновения и полная кинетическая энергия T частицы и атома после столкновения равны:

$$T_0 = \frac{mv_0^2}{2}, T = \frac{(m + m_H)u^2}{2} = \frac{m^2v_0^2}{2(m + m_H)} = T_0 \frac{m}{m + m_H}.$$

Убыль кинетической энергии должна быть равна энергии ионизации I :

$$\text{откуда } I = T_0 - T = T_0 \frac{m_H}{m + m_H}$$

$$T_0 = I \frac{m + m_H}{m_H}. \quad (2.6.41)$$

Чем больше масса бомбардирующей частицы, тем меньшая доля первоначальной кинетической энергии может быть использована для ионизации. При ионизации электроном первоначальная кинетическая энергия электрона практически полностью расходуется на ионизацию. Подставляя в (2.6.41) значение $m = m_e$, получаем

$$T_{0,e} = I \frac{m_p + 2m_e}{m_p + m_e} \approx I = 13,6 \text{ эВ}, \quad (2.6.42)$$

поскольку $m_p \gg m_e$. Для ионизации атома ускоренным протоном первоначальная энергия должна быть в два раза больше:

$$T_{0,p} = I \frac{2m_p + m_e}{m_p + m_e} \approx 2I = 27,2 \text{ эВ}. \quad (2.6.43)$$

Наконец, при ионизации α -частицами, которые представляют собой атомные ядра гелия ($m \approx 4m_p$), начальная кинетическая энергия должна быть в пять раз больше:

$$T_{0,\alpha} \approx I \frac{4m_p + m_p}{m_p} = 5I = 68 \text{ эВ}. \quad (2.6.44)$$

Проведенная оценка объясняет, почему в газоразрядной плазме ионизация происходит почти исключительно электронами, а ионизация собственными ионами практически не играет роли.

Пример 2.6.9. *Электрон, двигаясь в атоме, испытывает со стороны ядра кулоновскую силу притяжения. Можно ли создать*

внешнее электрическое поле, способное преодолеть эту силу и ионизировать атом водорода? Практически осуществимые напряженности поля лежат в пределах $10^7 \div 10^8$ В/м.

Решение. Для ионизации атома внешним полем нужны напряженности, не меньшие, чем напряженность кулоновского поля, в котором находится электрон. Для оценки последнего будем считать, что в состоянии с квантовым числом n расстояние от центра равно радиусу Бора $a_B = 52,9$ пм, умноженному на n^2 . Тогда

$$E_n = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 a_B^2 n^4} \approx \frac{5,14 \cdot 10^{11}}{n^4} \text{ В/м.}$$

В основном состоянии атома водорода ($n=1$) напряженность электрического поля $E_1 = 5,14 \cdot 10^{11}$ В/м на несколько порядков превышает практически достижимые напряженности поля. Однако если электрон находится в состоянии с квантовым числом n , то напряженность поля уменьшается в n^4 раз. Если, например, $n=10$, то напряженность поля оказывается в пределах достижимых значений. В экспериментах действительно удается наблюдать ионизацию электрическим полем высоковозбужденных атомов водорода.

Пример 2.6.10. Исходя из элементарной теории Бора:

а) вычислите магнитное поле в центре атома водорода, индуцированное электроном в основном состоянии;

б) оцените для этого состояния сверхтонкое расщепление энергетического уровня

Решение: а) Электрон в основном состоянии создает круговой ток

$$I = \frac{ev}{2\pi R_B}, \quad (2.6.45)$$

где e – заряд и v – скорость электрона, а R_B – радиус боровской орбиты. Этот ток в центре круговой орбиты радиуса R создает магнитное поле

$$B = \mu_0 \frac{I}{2R} = \frac{\mu_0 e v}{4\pi R^2} \approx 12,5 \text{ Вб/м}^2; \quad (2.6.46)$$

б) Разность энергий между состояниями протона со спином, направленным вверх и вниз, равна

$$\Delta E = 2 \cdot B \cdot \mu_{\text{яд}} = 7,88 \cdot 10^{-7} \text{ эВ},$$

где $\mu_{\text{яд}} = 5,05 \cdot 10^{-27} \text{ Дж/Тл} = 3,15 \cdot 10^{-8} \text{ эВ/Тл}$.

Пример 2.6.11. Калий-щелочной металл с атомным номером $Z = 19$.

а) Какова конфигурация электронных оболочек этого атома в основном состоянии?

б) Какие квантовые числа L , S и J характеризуют основное состояние атома калия?

в) Опишите количество зеемановское расщепление уровней атома, находящегося в основном и первом возбужденном состояниях.

Решение:

а) $1s^2, 2s^2, 2p^6, 3s^2, 3p^6, 4s^1$;

б) $L = 0$; $S = 1/2$, $J = 1/2$.

в)

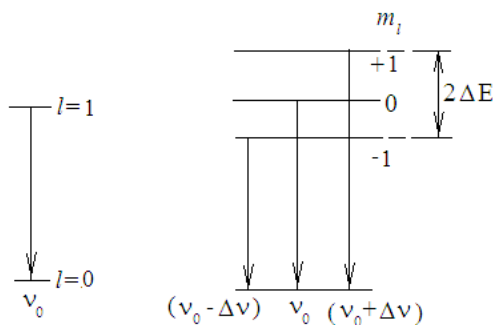


Рис. 6

В случае нормального эффекта Зеемана мы должны рассматривать только то расщепление энергетического уровня, которое отвечает изменениям квантового числа m_l соответствующего z -компоненте орбитального момента количества движения. Для основного состояния $m_l = 0$, а для первого

возбужденного состояния (4р) оно может принимать значения $m_l = -0; 0; +1$. На рис. 6 приведена диаграмма энергетических уровней и показаны разрешенные переходы. Сдвиг уровней ΔE в магнитном поле B составляет

$$\Delta E = \pm \frac{eh}{4\pi mc} B.$$

Согласно правилу отбора для разрешенных переходов с магнитных подуровней, имеем $\Delta m_l = 0$ или $\Delta m_l = \pm 1$. Этим переходам соответствует излучение с энергией

$$h\nu = h\nu_0 + \frac{eh}{4\pi mc} B, \quad \Delta m_l = +1;$$

$$h\nu = h\nu_0, \quad \Delta m_l = 0;$$

$$h\nu = h\nu_0 - \frac{eh}{4\pi mc} B, \quad \Delta m_l = -1.$$

Пример 2.6.12. Согласно закону Мозли, частота линии K_α рентгеновского излучения ν зависит от атомного номера элемента Z следующим образом:

$$\sqrt{\omega} = aZ - b.$$

а) Выразите приближенно коэффициент a через фундаментальные физические постоянные.

б) Объясните, почему частоты спектральных линий рентгеновского излучения изменяются от элемента к элементу в соответствии с таким простым законом, а частоты линий оптических спектров описываются более сложно.

Решение:

а) Сравнивая формулу $\sqrt{\omega} = aZ - b$ и закон Мозли и (2.6.22)

$$\hbar\omega = E_f - E_i = (Z-1)^2 Rch \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) = \frac{2\pi^2 me^4 (Z-1)^2}{h^2} \frac{3}{4},$$

получаем

$$a = \frac{1}{2} \sqrt{3Rc} = \frac{\pi e^2}{2h} \sqrt{\frac{6m}{h}},$$

где R – постоянная Ридберга.

б) В атоме с большим атомным номером Z все электроны, за исключением $1s$ -электронов, не оказывают влияния. Считая, что

$$E(1s) \sim (Z-1)^2,$$

а

$$E(2p) \sim \left(\frac{1}{2^2}\right) (Z-1)^2,$$

получаем

$$\nu = \frac{E(2p) - E(1s)}{h} \sim (Z-1)^2,$$

т.е. частный случай закона Мозли.

При анализе оптических спектров пренебрегать влиянием остальных электронов уже нельзя, поскольку именно они определяют уровни оптических переходов.

Пример 2.6.13. Считая, что поправка на экранирование заряда ядра электронами на K -оболочке одинакова для атомов с $Z < 50$, определить кинетическую энергию $T_{\text{кин}}$ фотоэлектронов, вылетающих из K -оболочки атомов цинка ${}_{30}^{65}\text{Zn}$ под действием K_{α} – излучения серебра ${}_{47}^{108}\text{Ag}$, равного 21,6 кэВ.

Решение. Согласно закону Мозли, энергия кванта, излучаемого при переходе электрона с уровня n_2 на уровень n_1 (заряд ядра Z),

$$\varepsilon_{\gamma} = \hbar\omega = Ry(Z - \sigma) \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right),$$

где $Ry = 13,6$ эВ – энергия ионизации атома водорода (ридберг), находящегося в основном состоянии. Для линии K_2 : $n_1 = 1$, $n_2 = 2$. Поскольку энергия такого кванта в спектре излучения серебра известна и равна $\varepsilon_{\gamma} = 21,6$ эВ, то из приведенной формулы закона

Мозли можно найти поправку σ на экранирование заряда ядра электронами на

K -оболочке (в обоих случаях $Z < 50$):

$$\sigma = Z_{\text{Ag}} - \sqrt{\frac{4\varepsilon_\gamma}{3Ry}} \approx 1.$$

Энергия, необходимая для освобождения электрона из K -оболочки атома цинка ${}_{30}^{65}\text{Zn}$ (переход с $n = 1$ в $n = \infty$), равна

$$(\hbar\omega)_{\text{Zn}} = Ry \cdot (Z_{\text{Zn}} - 1)^2 = 13,6 \cdot 29^2 = 11,4 \text{ кэВ},$$

а следовательно, кинетическая энергия вылетевшего отсюда электрона

$$T_{\text{кин}} = \varepsilon_\gamma - (\hbar\omega)_{\text{Zn}} = 21,6 - 11,4 = 10,2 \text{ кэВ}.$$

Пример 2.6.14. Собственная угловая частота ω колебаний молекулы HCl равна $5,63 \cdot 10^{14} \text{ с}^{-1}$, коэффициент ангармоничности $\gamma = 0,0201$. Определить: 1) энергию $\Delta E_{2,1}$ (в эВ) перехода молекулы с первого на второй колебательный энергетический уровень; 2) максимальное квантовое число ν_{max} ; 3) максимальную колебательную энергию E_{max} ; 4) энергию диссоциации E_d .

Решение: 1. Энергию перехода $\Delta E_{\nu+1, \nu}$ между двумя соседними уровнями найдем как разность двух значений колебательной энергии:

$$\Delta E_{\nu+1, \nu} = E_{\nu+1} - E_\nu.$$

Так как колебательная энергия двухатомной молекулы определяется соотношением (2.6.28)

$$E_\nu = \hbar\omega \left[\left(\nu + \frac{1}{2} \right) - \gamma \left(\nu + \frac{1}{2} \right)^2 \right],$$

то

$$\begin{aligned} \Delta E_{\nu+1,\nu} &= \hbar\omega \left(\left[\left(\nu + \frac{3}{2} \right) - \gamma \left(\nu + \frac{3}{2} \right)^2 \right] - \left[\left(\nu + \frac{1}{2} \right) - \gamma \left(\nu + \frac{1}{2} \right)^2 \right] \right) = \\ &= \hbar\omega [1 - 2\gamma(\nu + 1)]. \end{aligned} \quad (2.6.47)$$

Подставив значения \hbar , ω , γ и произведя вычисления, найдем

$$\Delta E_{2,1} = 1,09 \cdot 10^{-19} \text{ Дж},$$

или

$$\Delta E_{2,1} = 0,682 \text{ эВ}.$$

2. Максимальное квантовое число ν_{\max} найдем, приравняв разность соседних энергетических уровней нулю:

$$\Delta E_{\nu+1,\nu} = \hbar\omega [1 - 2\gamma(\nu_{\max} + 1)] = 0,$$

или $1 - 2\gamma(\nu_{\max} + 1) = 0$, откуда $\nu_{\max} = \frac{1}{2\gamma} - 1$.

Подставив сюда значение γ и округлив до ближайшего (снизу) целого значения найденного ν_{\max} , получим $\nu_{\max} = 23$.

3. Максимальную колебательную энергию E_{\max} найдем, если в выражение $E_\nu = \hbar\omega \left[\left(\nu + \frac{1}{2} \right) - \gamma \left(\nu + \frac{1}{2} \right)^2 \right]$ вместо ν подставим ν_{\max} по формуле (2.6.31)

$$E_{\max} = \hbar\omega \left[\left(\frac{1}{2\gamma} - 1 + \frac{1}{2} \right) - \gamma \left(\frac{1}{2\gamma} - 1 + \frac{1}{2} \right)^2 \right]. \quad (2.6.48)$$

Выполняя простые преобразования и пренебрегая $\gamma/4$ по сравнению с $1/(4\gamma)$, получаем $E_{\max} = \hbar\omega/(4\gamma)$. Подставим значения \hbar , ω , γ и произведем вычисления: $E_{\max} = 7,38 \cdot 10^{-19}$ Дж, или $E_{\max} = 4,61$ эВ.

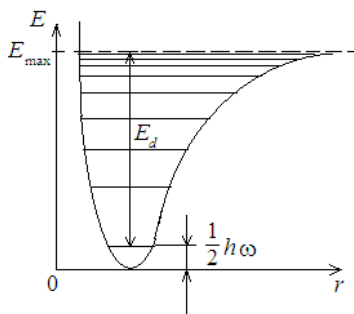


Рис. 7

4. Энергия диссоциации есть энергия, которую необходимо затратить, чтобы отделить атомы в молекуле друг от друга и удалить их без сообщения им кинетической энергии на расстояние, на котором взаимодействие атомов пренебрежимо мало. На рис. 7 эта энергия отвечает переходу с нулевого колебательного уровня на самый высокий возбужденный, соответствующий ν_{\max} . Тогда энергия диссоциации

$$E_d = E_{\max} - E_0 = \frac{\hbar\omega}{4\gamma} - \frac{1}{2}\hbar\omega, \text{ или } E_d = \frac{\hbar\omega}{4\gamma}(1 - 2\gamma). \quad (2.6.49)$$

Заменив $\hbar\omega / (4\gamma)$ на E_{\max} , получим $E_d = E_{\max}(1 - 2\gamma)$.

Произведя вычисления, найдем $E_d = 4,43$ эВ.

Пример 2.6.15. Для молекулы HF определить: 1) момент инерции I , если межъядерное расстояние $d = 91,7$ пм; 2) вращательную постоянную B ; 3) энергию, необходимую для возбуждения молекулы на первый вращательный уровень.

Решение: 1. Если воспользоваться формулой приведенной массы μ молекулы, то ее момент инерции можно выразить соотношением (2.6.33)

$$I = \mu d^2 \text{ или } I = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} d^2,$$

где m_1 и m_2 – массы атомов водорода и фтора.

Приведенную массу молекулы удобно сначала выразить в а. е. м. (относительные атомные массы химических элементов приведены в табл. П. 6):

$$\mu = \frac{1 \cdot 19}{1 + 19} \text{ а. е. м.} = 0,95 \text{ а. е. м.}$$

Выразив приведенную массу в единицах СИ ($\mu = 0,95 \cdot 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ кг} = 1,59 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$), найдем момент инерции молекулы HF: $I = 1,33 \cdot 10^{-47} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$.

2. Вращательная постоянная B с учетом выражения для I равна

$$B = \hbar^2 / (2\mu d^2).$$

Подставив значения \hbar , μ , d и произведя вычисления, получим

$$B = 4,37 \cdot 10^{-22} \text{ Дж или } B = 2,73 \text{ мэВ.}$$

3. Энергия, необходимая для возбуждения молекулы на первый вращательный уровень, равна разности энергий молекулы на первом и нулевом вращательных уровнях.

Так как вращательная энергия двухатомной молекулы выражается соотношением (2.6.34) $E_j = BJ(J+1)$, то разность энергий двух соседних вращательных уровней

$$\Delta E_{j+1,j} = E_{j+1} - E_j = \{ [B(J+1)(J+2)] - [BJ(J+1)] \}.$$

После упрощений получим $\Delta E_{j+1,j} = 2B(J+1)$.

Положив здесь $J=0$, найдем значение энергии, необходимое для возбуждения молекулы с нулевого уровня на первый:

$$\Delta E_{1,0} = 2B = 5,46 \text{ мэВ.}$$

2.6.3. Задачи для самостоятельной работы

Атом водорода

Задача 2.6.1. Электрон в атоме водорода находится в основном состоянии. С помощью рис.5 определить отношение вероятностей

w_1 / w_2 пребывания электрона в сферических слоях толщиной $\Delta r = 0,01a_B$ и радиусами $r_1 = 0,5a_B$ и $r_2 = 1,5a_B$. ($w_1 / w_2 \approx 0,8$)

Задача 2.6.2. Электрон в атоме водорода находится в $2s$ -состоянии. С помощью рис. 5 определить отношение вероятностей w_1 / w_2 пребывания электрона в сферических слоях толщиной $\Delta r = 0,01a_B$ и радиусами $r_1 = 4,0a_B$ и $r_2 = 10a_B$.

($w_1 / w_2 \approx 3,5$)

Задача 2.6.3. Графически электронное облако (орбиталь) принято изображать контуром ограничивающим область, в которой вероятность обнаружения электрона составляет 0,9. С помощью рис. 5 найти радиус $r_{\text{орб}}$ орбитали для $1s$ -состояния электрона в атоме водорода. ($r_{\text{орб}} \approx 2,7a_B$)

Задача 2.6.4. Графически электронное облако (орбиталь) ограничивающим область принято изображать контуром, в которой вероятность обнаружения электрона составляет 0,9. С помощью рис. 5 найти радиус $r_{\text{орб}}$ орбитали для $2s$ -состояния электрона в атоме водорода. ($r_{\text{орб}} \approx 9,1a_B$)

Задача 2.6.5. Электрон в атоме водорода находится в основном состоянии. С помощью рис. 5 найти радиус сферы $r_{1/2}$, для которой вероятность найти электрон внутри нее равна вероятности обнаружить электрон вне ее. ($r_{1/2} \approx 1,3a_B$)

Задача 2.6.6. Электрон в атоме водорода находится в $2s$ -состоянии. С помощью рис. 5 найти радиус сферы, $r_{1/2}$, для которой вероятность найти электрон внутри нее равна вероятности обнаружить электрон вне ее. ($r_{1/2} = 5,8a_B$)

Задача 2.6.7. Электрон находится в атоме водорода в основном состоянии. Найти среднеквадратичное расстояние $r_{\text{кв}} = \sqrt{\langle r^2 \rangle}$ электрона от центра атома. ($r_{\text{кв}} = \sqrt{3}a_B$)

Задача 2.6.8. Электрон находится в атоме водорода в основном состоянии. 1) Найти среднее значение обратного расстояния $\left\langle \frac{1}{r} \right\rangle$. 2) Используя этот результат, определить среднее значение потенциальной энергии $\langle U(r) \rangle$. 3) Сравнить ее с полной энергией E_1 электрона в этом состоянии и найти среднее значение $\langle T \rangle$ кинетической энергии электрона. (1 – $\left\langle \frac{1}{r} \right\rangle = \frac{1}{a_B}$; 2 – $\langle U(r) \rangle = -\frac{me^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^2} = 2E_1 = -27,2$ эВ; 3 – $\langle T \rangle = |E_1| = 13,6$ эВ)

Задача 2.6.9. С помощью формулы Бора для радиуса электронной орбиты оцените среднее расстояние a до ядра электрона, находящегося на ближайшей к ядру ($n=1$) орбите атома урана ($Z=92$). Какая энергия I необходима для удаления из атома этого электрона с самой внутренней орбиты? ($a=0,58$ пм; $I=0,12$ МэВ)

Задача 2.6.10. Энергия ионизации (связи) внешнего электрона атома бора равна 8,26 эВ. а) Определите «эффективный заряд ядра» $Z_{\text{эф}}$ для этого электрона. б) Оцените средний радиус его орбиты. ($a - Z_{\text{эф}} = 1,56e$; $b - a = 136$ пм)

Задача 2.6.11. Энергия ионизации (связи) внешнего электрона атома натрия равна 5,14 эВ. а) Определите «эффективный заряд ядра» $Z_{\text{эф}}$ для этого электрона. б) Оцените средний радиус его орбиты. ($a - Z_{\text{эф}} = 1,84$; $b - a = 258$ пм)

Орбитальный момент импульса и магнитный момент электрона

Задача 2.6.12. Вычислить момент импульса орбитального движения электрона, находящегося в атоме 1) в s -состоянии; 2) в p -состоянии. ($1 - L = 0$; $2 - L = 1,49 \cdot 10^{-34}$ Дж·с)

Задача 2.6.13. В принятой для рентгеновского излучения терминологии восемь электронов с $n = 2$ находятся на L -оболочке.

а) Вычислите $Z_{\text{эф}}$ для $2p$ -электрона с L -оболочки. (Считайте, что $2s$ -электроны находятся внутри.)

б) По той же терминологии при переходе $2p$ -электрона на K -оболочку возникает K_{α} -линия спектра. Определите длины волн, отвечающие K_{α} -линиям в спектрах алюминия и свинца. ($a -$

$$Z_{\text{эф}} = Z - 5; \quad \delta - h\nu = 13,6 \left[(Z - 2)^2 - \frac{(Z - 5)^2}{4} \right], \quad \text{для Al} - 8,68 \text{ \AA}$$

и для Pb - 0,185 \AA)

Задача 2.6.14. Энергия ионизации (связи) внешнего электрона атома бора равна 8,26 эВ. а) Определите «эффективный заряд ядра» $Z_{\text{эф}}$ для этого электрона. (Подсказка: воспользуйтесь боровской моделью.)

б) Определите средний радиус его орбиты. ($a - Z_{\text{эф}} = 1,56$; $\delta - r_{\text{cp}} = 1,36 \cdot 10^{-10}$ м).

Задача 2.6.15. Определить возможные значения проекции момента импульса орбитального движения электрона в атоме на направление внешнего магнитного поля. Электрон находится в d -состоянии. ($L_z = \pm 2,11 \cdot 10^{-34}$ Дж·с, $\pm 1,05 \cdot 10^{-34}$ Дж·с, 0)

Задача 2.6.16. Атом водорода, находившийся первоначально в основном состоянии, поглотил квант света с энергией $\varepsilon = 10,2$ эВ.

1) Определить изменение момента импульса ΔL орбитального движения электрона. В возбужденном атоме электрон находится в p -состоянии. 2) Чему равно главное квантовое число n в возбужденном состоянии? ($1 - \Delta L = 1,49 \cdot 10^{-34}$ Дж·с; $2 - n = 2$)

Задача 2.6.17. Определить наименьший угол θ , который может образовать вектор момента импульса орбитального движения электрона в атоме с направлением внешнего магнитного поля. Электрон в атоме находится в d -состоянии. ($\theta = 35,3^\circ$)

Задача 2.6.18. Электрон в атоме находится в f -состоянии. Найти орбитальный момент импульса L электрона и максимальное значение проекции момента импульса $L_{z,\max}$ на направление внешнего магнитного поля. ($L = 3,65 \cdot 10^{-34}$ Дж·с, $L_{z,\max} = 3,16 \cdot 10^{-34}$ Дж·с)

Задача 2.6.19. Может ли момент импульса орбитального движения L электрона в атоме водорода быть равен $1,83 \cdot 10^{-34}$ Дж·с? (Не может)

Задача 2.6.20. Момент импульса орбитального движения L электрона в атоме водорода равен $4,71 \cdot 10^{-34}$ Дж·с. Определить магнитный момент μ_L обусловленный орбитальным движением электрона. ($\mu_L = 4,14 \cdot 10^{-23}$ Дж/Тл)

Задача 2.6.21. Вычислить полную энергию E , орбитальный момент импульса L и магнитный момент μ_L электрона, находящегося в $2p$ -состоянии в атоме водорода. ($E = -3,4$ эВ; $L = 1,49 \cdot 10^{-34}$ Дж·с; $\mu_L = 1,31 \cdot 10^{-23}$ Дж/Тл)

Задача 2.6.22. Определить возможные значения магнитного момента μ_L , обусловленного орбитальным движением электрона в возбужденном атоме водорода, если энергия ΔE возбуждения равна $12,09$ эВ. ($\mu_L = 0$; $1,31 \cdot 10^{-23}$ Дж/Тл; $2,27 \cdot 10^{-23}$ Дж/Тл)

Спин электрона. Опыт Штерна–Герлаха

Задача 2.6.23. Вычислить спиновый момент импульса S электрона и проекцию S_z этого момента на направление внешнего магнитного поля. ($S = 0,913 \cdot 10^{-34}$ Дж·с; $S_z = \pm 0,527 \cdot 10^{-34}$ Дж·с)

Задача 2.6.24. Вычислить спиновый магнитный момент μ_s электрона и проекцию магнитного момента $\mu_{s,z}$ на направление внешнего поля. ($\mu_s = 1,61 \cdot 10^{-23}$ Дж/Тл; $\mu_{s,z} = \pm 0,927 \cdot 10^{-23}$ Дж/Тл)

Задача 2.6.25. Атомы серебра, обладающие скоростью $v = 0,6$ км/с, пропускаются через узкую щель и направляются перпендикулярно линиям индукции неоднородного магнитного поля (опыт Штерна и Герлаха). В поле протяженностью $l = 6$ см пучок расщепляется на два. Определить степень неоднородности магнитного поля, при которой расстояние b между компонентами расщепленного пучка по выходе его из поля равно 3 мм. Атомы серебра находятся в основном состоянии. ($\frac{\partial B}{\partial z} = 5,8$ кТл/м)

Задача 2.6.26. Узкий пучок атомарного водорода пропускается в опыте Штерна и Герлаха через поперечное неоднородное ($\frac{\partial B}{\partial z} = 2$ кТл/м) магнитное поле протяженностью $l = 8$ см. Скорость v атомов водорода равна 4 км/с. Определить расстояние b между компонентами расщепленного пучка атомов по выходе его из магнитного поля. Все атомы водорода в пучке находятся в основном состоянии. (4,47 мм)

Задача 2.6.27. В опыте Штерна и Герлаха узкий пучок атомов цезия в основном состоянии проходит через поперечное неоднородное магнитное поле протяженностью $l_1 = 10$ см и попадает на экран, расположенный также на расстоянии $l_2 = 10$ см. Какова должна быть степень неоднородности магнитного поля, чтобы расстояние b между компонентами расщепленного пучка на экране было равно 6 мм? Скорость атомов цезия равна 0,3 км/с.

($\frac{\partial B}{\partial z} = 429$ Тл/м)

Задача 2.6.28. Узкий пучок атомов рубидия в основном состоянии пропускается через поперечное неоднородное магнитное поле протяженностью $l_1 = 10$ см. На экране, отстоящем на расстояние $l_2 = 20$ см от магнита, наблюдается расщепление пучка на два. Определить силу F , действующую на атомы рубидия, если расстояние b между компонентами пучка на экране равно 4 мм и скорость v атомов равна 0,5 км/с. ($F = 2,84 \cdot 10^{-21}$ Н)

Заполнение электронных оболочек

Задача 2.6.29. Сколько разных состояний у электрона с главным квантовым числом $n = 5$? (50)

Задача 2.6.30. Сколько электронов может находиться в подоболочке с $n = 6$, $l = 3$? (14)

Задача 2.6.31. Какое максимальное число s -, p - и d -электронов может находиться в электронных K -, L - и M -оболочках атома? (K : два s -электрона; L : два s -электрона и шесть p -электронов; M : два s -электрона, шесть p -электронов и десять d -электронов)

Задача 2.6.32. Используя принцип Паули, указать, какое максимальное число N электронов в атоме могут иметь одинаковыми следующие квантовые числа: 1) n, l, m, σ ; 2) n, l, m ; 3) n, l ; 4) n . (1 – один; 2 – два; 3 – $2(2l + 1)$; 4 – $2n^2$)

Задача 2.6.33. Заполненный электронный слой характеризуется квантовым числом $n = 3$. Указать число N электронов в этом слое, у которых одинаковы следующие квантовые числа: 1) $\sigma = +1/2$; 2) $m = +1$; 3) $m = -2$; 4) $\sigma = -1/2$ и $m = 0$; 5) $\sigma = +1/2$ и $l = 2$. (1 – девять; 2 – четыре; 3 – два; 4 – три; 5 – пять)

Задача 2.6.34. Найти число N электронов в атомах, у которых в основном состоянии заполнены: 1) K - и L -оболочки, $3s$ -подоболочка и наполовину $3p$ -подоболочка; 2) K -, L - и M -слои

и $4s$ -, $4p$ - и $4d$ -подоболочки. Что это за атомы? (1 – 15 – фосфор; 2 – 46 – палладий)

Задача 2.6.35. Написать формулы электронного строения атомов: 1) бора; 2) углерода; 3) натрия. ($1 - 1s^2 2s^2 p^1$; $2 - 1s^2 2s^2 p^2$; $3 - 1s^2 2s^2 p^6 3s^1$)

3. Основы теории строения вещества

3.1. Элементы физики твердого тела. Квантовые свойства твердых тел. Тепловые свойства кристаллов

3.1.1. Основные понятия, законы и формулы

• Молярный объем кристалла $V_m = \mu / \rho$,

где μ – молярная масса вещества; ρ – плотность кристалла. Объем V_m элементарной ячейки в кристаллах:

а) при кубической сингонии $V_m = a^3$;

б) при гексагональной сингонии $V_m = \sqrt{3}a^2c / 2$. Здесь a и c – параметры решетки.

Если для гексагональной решетки принять теоретическое значение

$$c = \sqrt{8/3}a, \text{ то } V_m = \sqrt{2}a^3.$$

• Число Z_m элементарных ячеек в одном моле кристалла

$$Z_m = V_m / V, \text{ или } Z_m = kN_{A/n},$$

где k – число одинаковых атомов в химической формуле соединения (например, в кристалле AgBr число одинаковых атомов Ag или Br в химической формуле соединения равно единице); N_A – постоянная Авогадро; n – число одинаковых атомов, приходящихся на элементарную ячейку. На рис. 8 представлена структура NaCl ; аналогичную структуру имеют соединения KBr , MnO и др.

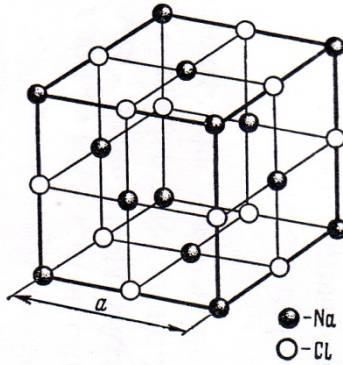


Рис. 8

Число Z элементарных ячеек в единице объема кристалла $Z = Z_m / V_m$ или в общем случае

$$Z = \rho \frac{k}{n} \cdot \frac{N_A}{\mu};$$

для кристалла, состоящего из одинаковых атомов ($k = 1$),

$$Z = \rho \frac{N_A}{n\mu}.$$

- Параметр a кубической решетки

$$a = \sqrt[3]{n\mu / (k\rho N_A)}.$$

Расстояние, d между соседними атомами в кубической решетке;

- а) в гранецентрированной $d = a / \sqrt{2}$;
- б) в объемно центрированной $d = \sqrt{3} a / 2$.

- Вращательная энергия двухатомной молекулы:

$$E_J = \frac{\hbar^2}{2I} J(J+1),$$

где I – момент инерции молекулы, J – квантовое число ($J = 0, 1, 2, \dots$).

- Колебательная энергия двухатомной молекулы:

$$E_v = \hbar\omega(v + 1/2),$$

где ω – собственная частота колебаний молекулы, $\nu = 0, 1, 2, \dots$ – квантовое число.

- Средняя энергия квантового гармонического осциллятора при температуре T :

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{\hbar\omega}{2} + \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1}, \quad (3.1.1)$$

где ω – круговая частота колебаний осциллятора, k_B – постоянная Больцмана, T – термодинамическая температура.

- Внутренняя молярная энергия кристалла (энергия тепловых колебаний кристаллической решетки) в квантовой теории теплоемкости Эйнштейна:

$$U = U_0 + 3R \frac{\theta_E}{e^{\theta_E/T} - 1}, \quad (3.1.2)$$

где $\theta_E = \hbar\omega / k_B$ – характеристическая температура Эйнштейна; $U_0 = 3R\theta_E / 2$ – молярная энергия нулевых колебаний; R – универсальная газовая постоянная.

- Молярная теплоемкость кристалла в квантовой теории теплоемкости Эйнштейна:

$$c_p = \frac{dU}{dT} = 3R \left(\frac{\theta_E}{T} \right)^2 \frac{e^{\theta_E/T}}{(e^{\theta_E/T} - 1)^2}. \quad (3.1.3)$$

При высоких температурах ($T \gg \theta_E$):

$$c_p = 3R \left[1 - \frac{1}{12} \left(\frac{\theta_E}{T} \right)^2 + \dots \right]. \quad (3.1.4)$$

В пределе бесконечно высоких температур $c_p \rightarrow 3R$ (закон Дюлонга и Пти).

При низких температурах ($T \ll \theta_E$):

$$c_p = 3R \left(\frac{\theta_E}{T} \right)^2 e^{-\theta_E/T}. \quad (3.1.5)$$

• В квантовой теории теплоемкости Дебая число dN собственных колебаний кристаллической решетки, приходящихся на интервал частот от ω до $\omega + d\omega$, определяется выражением:

$$dN = 9N \frac{\omega^2 d\omega}{\omega_{\max}^3}, \quad (3.1.6)$$

где N — число атомов, ω_{\max} — максимальная частота, ограничивающая спектр колебаний (т.н. *дебаевская частота*):

$$\omega_{\max} = v \sqrt[3]{6\pi^2 n}. \quad (3.1.7)$$

Здесь $n = N/V$ — концентрация атомов, v — средняя скорость волны колебаний в кристалле.

• Скорости продольных (v_{\parallel}) и поперечных (v_{\perp}) звуковых волн в кристалле определяются по формулам

$$v_{\parallel} = \sqrt{E/\rho}, \quad v_{\perp} = \sqrt{G/\rho}, \quad (3.1.8)$$

где ρ — плотность среды, а E и G — модули продольной и поперечной упругости, соответственно. Средняя скорость v звуковой волны связана с v_{\parallel} и v_{\perp} соотношением

$$\frac{3}{v^2} = \frac{2}{v_{\perp}^2} + \frac{1}{v_{\parallel}^2}. \quad (3.1.9)$$

• Наименьшая длина волны, возбуждаемая в кристалле,

$$\lambda_{\min} = \frac{2\pi v}{\omega_{\max}} \approx \frac{2}{\sqrt[3]{n}} \approx 2d, \quad (3.1.10)$$

где d — расстояние между соседними атомами в решетке.

• Молярная внутренняя энергия кристалла по Дебаю:

$$U = \int_0^{\omega_{\max}} \langle \varepsilon \rangle dN = U_0 + 9RT \left(\frac{T}{\theta_D} \right)^3 \int_0^{\theta_D/T} \frac{x^3}{e^x - 1} dx. \quad (3.1.11)$$

Здесь $U_0 = \frac{9}{8} R\theta_D$ — молярная нулевая энергия кристалла по Дебаю; $\theta_D = \hbar\omega_{\max} / k_B$ — характеристическая температура Дебая.

- Молярная теплоемкость кристаллической решетки по Дебаю:

$$c_p = 3R \left[12 \left(\frac{T}{\theta_D} \right)^3 \int_0^{\theta_D/T} \frac{x^3}{e^x - 1} dx - 3 \frac{\theta_D / T}{e^{\theta_D/T} - 1} \right]. \quad (3.1.12)$$

При низких температурах ($T \ll \theta_D$):

$$c_p \approx \frac{12}{5} \pi^4 R \left(\frac{T}{\theta_D} \right)^3, \quad (3.1.13)$$

при высоких температурах ($T \gg \theta_D$):

$$c_p \approx 3R \left[1 - \frac{1}{20} \left(\frac{\theta_D}{T} \right)^2 + \frac{1}{560} \left(\frac{\theta_D}{T} \right)^4 + \dots \right]. \quad (3.1.14)$$

В пределе бесконечно высоких температур c_p стремится к $3R$ (закон Дюлонга и Пти). Сравнение приближенных формул с точными показано на рис. 9.

- Результаты для тепловых свойств кристалла выписаны в предположении, что его молекулы состоят из одного атома. Если молекулу входят n_a атомов, то все результаты надо умножить на n_a .

- Энергия ε и квазиимпульс p фонона связаны с круговой частотой ω колебаний обычными соотношениями

$$\varepsilon = \hbar\omega, \quad p = \frac{2\pi\hbar}{\lambda}. \quad (3.1.15)$$

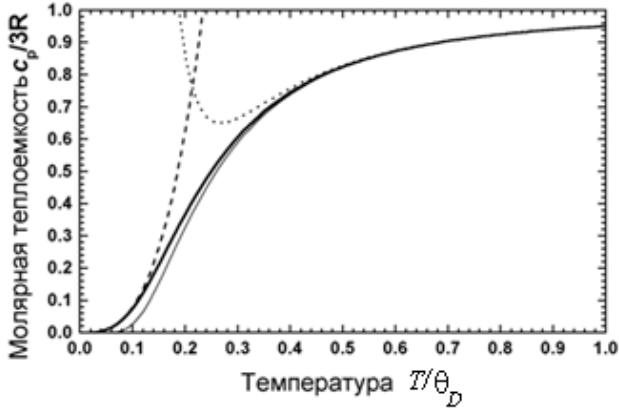


Рис. 9

Молярная теплоемкость кристалла по Дебаю (сплошная линия) в сравнении с приближенными формулами (3.1.13) (штриховая линия) и (3.1.14) (точечная линия). Видно, что первую формулу можно применять с высокой степенью точности при $T \leq 0,1 \theta_D$, а вторую $T \geq 0,5 \theta_D$. Тонкой сплошной линией показана теплоемкость, рассчитанная в рамках теории Эйнштейна при $\theta_E = \sqrt{\frac{3}{5}} \theta_D$ (см. пример 3.1.1). Видно, что при $T > 0,3 \theta_D$ обе теории практически неразличимы.

3.1.2. Методические рекомендации по решению задач

Пример 3.1.1. *Найти связь характеристических температур Эйнштейна и Дебая.*

Решение. Как известно, в теории теплоемкости Дебая характеристическая температура выражается через параметры материала, в то время как в теории Эйнштейна характеристическая температура должна быть выбрана феноменологически, путем сравнения теоретической формулы с данными эксперимента. В то же время обе теории должны давать более или менее сходные результаты, по крайней мере, в области высоких температур, где

значения теплоемкости неплохо описываются законом Дюлонга и Пти.

Поэтому мы приравняем первые два члена высокотемпературных разложений (3.1.4) и (3.1.14) в обеих теориях:

$$3R \left[1 - \frac{1}{12} \left(\frac{\theta_E}{T} \right)^2 + \dots \right] = 3R \left[1 - \frac{1}{20} \left(\frac{\theta_D}{T} \right)^2 + \dots \right], \quad (3.1.16)$$

откуда находим

$$\theta_E = \sqrt{\frac{3}{5}} \theta_D = 0,775 \theta_D. \quad (3.1.17)$$

Другой возможный путь установления связи между двумя теориями – приравнение нулевых энергий: $(3/2)R\theta_E = (9/8)R\theta_D$, откуда следует близкий результат: $\theta_E = \frac{3}{4}\theta_D = 0,75\theta_D$. Результаты теорий Эйнштейна и Дебая при связи температур (3.1.17) можно сравнить на рис. 9.

Пример 3.1.2. *Определить количество теплоты ΔQ , необходимое для нагревания кристалла NaCl массой $m = 20$ г на $\Delta T = 2$ К, если нагревание происходит от температуры: 1) $T_1 = \theta_D$; 2) $T_2 = 2$ К. Температуру Дебая θ_D для NaCl принять равной 320 К.*

Решение. Количество теплоты ΔQ подводимое для нагревания тела от температуры T_i до $T_i + \Delta T$, может быть вычислено по формуле

$$\Delta Q = \frac{m}{\mu} \int_{T_i}^{T_i + \Delta T} c_p dT, \quad (3.1.18)$$

где μ — молярная масса вещества, а c_p — его молярная теплоемкость, которая в общем случае есть функция температуры, поэтому за знак интеграла ее выносить нельзя. Однако в первом случае изменение температуры мало по сравнению с ее начальным значением, так что теплоемкость можно считать постоянной:

$c_p(T) \approx c_p(\theta_D)$. Для вычисления последней можно применить приближенную формулу (3.1.14), откуда находим

$$c_p(\theta_D) \approx 3R \left(1 - \frac{1}{20} + \frac{1}{560} \right) = 2,855R. \quad (3.1.19)$$

Подставляя это значение в формулу (3.1.19), получим

Подставляя это значение в формулу (3.1.19), получим

$$\Delta Q = 2,855R \frac{m}{\mu} \Delta T = 2,855 \times 8,31 \times \frac{20}{23,0 + 35,5} \times 2 = 16,2 \text{ Дж.} \quad (3.1.20)$$

Во втором случае нахождение ΔQ облегчается тем, что можно воспользоваться предельным законом Дебая (3.1.13), в согласии с которым теплоемкость пропорциональна кубу абсолютной температуры. В этом случае теплоемкость сильно изменяется в пределах заданного интервала температур и ее нельзя выносить за знак интеграла в формуле (3.1.19). Получаем в этом случае

$$\Delta Q = \frac{12m}{5\mu} \pi^4 R \int_{T_2}^{T_2 + \Delta T} \left(\frac{T}{\theta_D} \right)^3 dT = \frac{12m}{5\mu} \pi^4 R \frac{(T_2 + \Delta T)^4 - T_2^4}{4\theta_D^3}. \quad (3.1.21)$$

Подставляя численные значения, находим

$$\Delta Q = \frac{12 \times 20}{5(23,0 + 35,5)} \pi^4 \times 8,31 \frac{4^4 - 2^4}{4 \times 320^3} = 1,22 \text{ мДж.}$$

Пример 3.1.3. Вычислить дебаевскую частоту и дебаевскую температуру для железа, если скорости распространения продольных и поперечных колебаний равны 5,85 и 3,23 км/с соответственно.

Решение. Во-первых, найдем концентрацию атомов железа, используя таблицы в последнем разделе. Плотность железа $\rho = 7,87 \cdot 10^6 \text{ г/м}^3$. Молярная масса железа приведена в таблице Менделеева: $\mu = 55,85 \text{ г/моль}$. Отсюда находим сначала молярный объем: $V_m = \mu / \rho = 7,10 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3/\text{моль}$.

Теперь вычисляем концентрацию атомов в кристалле железа:
 $n = N_A / V_m = 8,48 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}$.

Во-вторых, определим среднюю скорость звука в железе, используя соотношение (3.1.9): $3/v^2 = 2/3230^2 + 1/5850^2$, откуда $v = 3685 \text{ м/с}$.

Дебаевскую частоту находим теперь по формуле (3.1.7):

$$\omega_{\max} = 3685 \sqrt[3]{6\pi^2 \times 8,48 \cdot 10^{28}} = 6,31 \cdot 10^{13} \text{ Гц}.$$

И, наконец, вычисляем дебаевскую температуру:

$$\theta_D = \hbar \omega_{\max} / k_B = 482 \text{ К}.$$

Пример 3.1.4. Оценить давление фононов в меди при температуре $T = \theta_D$, если $\theta_D = 320 \text{ К}$. Фононы рассматривать как идеальный газ.

Решение. Для определения давления фононов воспользуемся уравнением Менделеева-Клапейрона, записанным в форме

$$pV = N \frac{\langle \vec{p} \cdot \vec{v} \rangle}{3} = N \frac{\langle p v \rangle}{3}, \quad (3.1.22)$$

где \vec{p} и \vec{v} — импульс и скорость фононов, а N — их число в системе объемом V . Мы заменили скалярное произведение на обычное, так как импульс фонона параллелен его скорости. В качестве v мы выбираем усредненную скорость звука, а импульс фонона связан с его энергией ε соотношением $p = \varepsilon / v$, так что получаем

$$p = \frac{N \langle \varepsilon \rangle}{3V} = \frac{W}{3V}, \quad (3.1.23)$$

где W — полная кинетическая энергия фононов.

Рассмотрим моль меди. Ее молярный объем находим с использованием таблиц в последнем разделе, разделив молярную массу μ на плотность ρ :

$$V_m = \frac{\mu}{\rho} = \frac{63,55 \cdot 10^{-3}}{8,93 \cdot 10^3} = 7,12 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3/\text{моль}. \quad (3.1.24)$$

Полную кинетическую энергию W фононов можно найти: 1) вычитая из молярной энергии U кристалла энергию U_0 нулевых колебаний и 2) уменьшая результат в два раза (так как на кинетическую энергию фононов приходится ровно половина полной энергии): $W = (U - U_0) / 2$. Получаем тогда

$$p = \frac{U - U_0}{6V_m}. \quad (3.1.25)$$

При $T = \theta_D$ находим из (3.1.11):

$$U - U_0 = 9R\theta_D \int_0^1 \frac{x^3 dx}{\exp(x) - 1} = 9 \times 8,31 \times 320 \times 0,0778 = \\ = 1,86 \cdot 10^3 \text{ Дж/моль} \quad (3.1.26)$$

(интеграл в правой части взят численно). Находим окончательно

$$p = \frac{1,86 \cdot 10^3}{6 \times 7,12 \cdot 10^{-6}} = 43,5 \text{ МПа}. \quad (3.1.27)$$

Пример 3.1.5. *Определить среднее число фононов в моде упругих колебаний кристаллической решетки, для которой спектральная плотность числа фононов максимальна. Считать выполненным условие $T < 0,5\theta_D$.*

Решение. Определим частоту моды, соответствующей максимальной спектральной плотности числа фононов. Функцию спектральной плотности числа фононов $f(\omega)$ получим, перемножая спектральную плотность фононных мод $D(\omega)$ на среднее число фононов в моде $\langle n \rangle$:

$$f(\omega) = D(\omega) \langle n \rangle = \frac{3V\omega^2}{2\pi^2 v_{зв}^3} \frac{1}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1}. \quad (3.1.28)$$

Для упрощения последующих преобразований произведем замену $\frac{\hbar\omega}{k_B T} = x$. После этого имеем

$$f(x) = \frac{3V(k_B T)^2}{2\pi^2 v_{3B}^3 \hbar^2} \frac{x^2}{e^x - 1} = a \frac{x^2}{e^x - 1}, \quad (3.1.29)$$

где $a = \frac{3V(k_B T)^2}{2\pi^2 v_{3B}^3 \hbar^2}$. При $x \rightarrow 0$ и $x \rightarrow \infty$ эта неотрицательная функция стремится к нулю. Следовательно, в промежутке $0 \leq x < +\infty$ функция $f(x)$ имеет максимум. Дифференцируя $f(x)$ по x и приравнявая результат к нулю, получим

$$\frac{x(2e^x - 2 - xe^x)}{(e^x - 1)^2} = 0 \quad \text{или} \quad x = 2(1 - e^{-x}). \quad (3.1.30)$$

Решая полученное трансцендентное уравнение методом последовательных приближений, находим $x_{\max} = 1,59$, т.е. частота моды, соответствующей максимуму функции спектральной плотности числа фононов $f(\omega)$:

$$\omega_{\max} = 1,59 \frac{k_B T}{\hbar}. \quad (3.1.31)$$

Тогда искомое среднее число фононов в этой моде вычисляется согласно соотношению

$$\langle n \rangle = \frac{1}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1} = 0,26 \quad (3.1.32)$$

Пример 3.1.6. Атом может находиться в любом из двух квантовых состояний с разностью энергий E . Построить качественную зависимость удельной теплоемкости C ансамбля таких атомов от абсолютной температуры T . Рассмотреть поведение теплоемкости в предельных случаях $T \rightarrow 0$ и $T \rightarrow \infty$.

Решение. Поскольку $N_2 \sim N e^{-\frac{E}{k_B T}}$, $N_1 \sim N$ и $N_1 + N_2 = N$, то, мы имеем

$$C = \begin{cases} \frac{NE^2}{4k_B T^2} & \text{при } T \rightarrow \infty; \\ NE^2 \frac{1}{k_B T^2} e^{-\frac{E}{k_B T}} & \text{при } T \rightarrow 0. \end{cases} \quad (3.1.33)$$

Графически функция $C = C(T)$ имеет вид

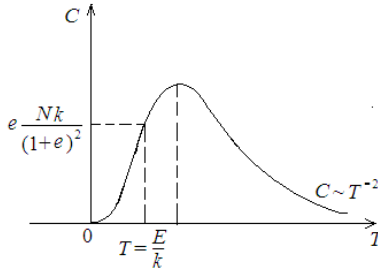


Рис. 10

Пример 3.1.7. Удельная теплоемкость решетки определенной модификации углерода зависит от температуры как T^2 , а не как T^3 , что обычно имеет место для твердых тел. Что можно сказать о структуре этой специфической фазы углерода?

Решение. Энергия, связанная с колебаниями решетки, определяется выражением (3.1.11)

$$U = \int \frac{\hbar\omega g(\omega) d\omega}{e^{\hbar\omega/kT} - 1},$$

где $g(\omega)$ – плотность состояний для фононов. При низких температурах именно низкочастотная зависимость $g(\omega)$ определяет температурную зависимость энергии.

Для трехмерной решетки

$$g(\omega) d\omega = \frac{d^3k}{(2\pi)^3} = \frac{4\pi k^2 dk}{(2\pi)^3} = \frac{4\pi\omega^2 d\omega}{(2\pi)^3 c^3},$$

где c – скорость звука. Таким образом, $g(\omega) \sim \omega^2$, откуда следует, что энергия зависит от температуры как T^4 , а удельная

теплоемкость пропорциональна T^3 . Однако если твердое тело состоит из двумерных кристаллов (каким является графит), то $g(\omega) \sim \omega$, откуда следует квадратичная зависимость удельной теплоемкости от температуры. Таким образом, квадратичная зависимость теплоемкости от температуры указывает, что углерод в этой фазе представляет собой двумерный кристалл.

Пример. 3.1.8. Зная температуру Дебая $\theta_D = 365$ К и плотность $\rho = 5,32 \cdot 10^3$ кг/м³ германия (Ge), оценить максимальные значения энергии и квазиимпульса акустического фонона, если известно, что германий имеет решетку типа алмаза.

Решение. Максимальная энергия фонона выражается через максимальную частоту:

$$\varepsilon_{\max} = \hbar\omega_{\max} = k_B \theta_D = 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 365 \text{ Дж} \approx 3 \cdot 10^{-22} \text{ эВ}.$$

Максимальное значение волнового числа $q_{\max} = \frac{\pi}{a}$, где a – постоянная решетки. Поэтому

$$p_{\max} = \hbar q_{\max} = \frac{\pi \hbar}{a}.$$

Величину a выразим через плотность $a = \left(\frac{\mu}{\rho} \cdot \frac{\nu}{N_A} \right)^{1/3}$, где $\nu = 8$ – число атомов на элементарную ячейку, μ – молярная масса. Следовательно,

$$p_{\max} = \pi \hbar \left(\frac{\rho N_A}{\mu \nu} \right)^{1/3} \approx 0,5 \cdot 10^{-24} \text{ кг} \cdot \text{м/с}.$$

Пример 3.1.9. Найти зависимость полного числа фононов в кристалле, состоящем из N атомов, от температуры. Рассмотреть предельные случаи, когда: а) $T \gg \theta_D$; б) $T \ll \theta_D$.

Решение. Полное число фононов получим интегрированием $dn(\omega)$ по частоте от 0 до ω_{\max} :

$$n_f = \int_0^{\omega_{\max}} dn(\omega) = 9N \left(\frac{\hbar}{k_B \theta_D} \right)^3 \int_0^{\omega_{\max}} \frac{\omega^2 d\omega}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1}.$$

Производя замену переменной интегрирования $x = \frac{\hbar\omega}{k_B T}$,

получим:

$$n_f = 9N \left(\frac{T}{\theta_D} \right)^3 \int_0^{\theta_D/T} \frac{x^2 dx}{e^x - 1}.$$

При высоких температурах ($T \gg \theta_D$) отношение $\frac{\theta_D}{T} \ll 1$,

поэтому $e^x - 1 \approx x$ и интеграл легко вычисляется

$$n_f = 9N \left(\frac{T}{\theta_D} \right)^3 \int_0^{\theta_D/T} x dx = \frac{9}{2} N \frac{T}{\theta_D} \sim T.$$

При $T \ll \theta_D$ отношение $\frac{\theta_D}{T} \gg 1$, поэтому

$$n_f = 9N \left(\frac{T}{\theta_D} \right)^3 \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{e^x - 1} \approx 21,645 \frac{T^3}{\theta_D} \sim T^3.$$

Пример 3.1.10. Найти выражение внутренней энергии кристаллической решетки в зависимости от температуры с учетом энергии нулевых колебаний. Рассмотреть предельные случаи $T \gg \theta_D$ и $T \ll \theta_D$.

Решение. Внутренняя энергия кристалла выразится формулой

$$E = \int_0^{\omega_{\max}} \langle \varepsilon(\omega, T) \rangle dN(\omega),$$

где $\langle \varepsilon(\omega, T) \rangle$ определено в (3.1.1). $\langle \varepsilon(\omega, T) \rangle = \frac{\hbar\omega}{2} + \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1}$ —

средняя энергия гармонического осциллятора с частотой ω ,

$dN(\omega) = 9N \frac{\omega^2 d\omega}{\omega_{\max}^3}$ — число нормальных колебаний с частотами

от ω до $\omega + d\omega$ (см. (3.1.6)). Таким образом,

$$E = 9N \frac{\hbar}{\omega_{\max}^3} \left[\frac{1}{2} \int_0^{\omega_{\max}} \omega^3 d\omega + \int_0^{\omega_{\max}} \frac{\omega^3 d\omega}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1} \right]$$

или, $E = E_0 + 9Nk_B\theta_D \left(\frac{T}{\theta_D} \right)^4 \int_0^{\theta_D/T} \frac{x^3 dx}{e^x - 1}$, где $E_0 = \frac{9}{8} Nk_B\theta_D$,

$\theta_D = \frac{\hbar\omega_{\max}}{k_B}$, $x = \frac{\hbar\omega}{k_B T}$. При $T \gg \theta_D$ вследствие малости верхнего

предела в интеграле разложим $e^x \approx 1 + x$ и получим

$$\int_0^{\theta_D/T} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{1}{3} \left(\frac{\theta_D}{T} \right)^3.$$

Таким образом, $E = E_0 + 3Nk_B T$, $E \sim T$. В области низких температур $\theta_D / T \gg 1$ и

$$\int_0^{\theta_D/T} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15}.$$

Для внутренней энергии в этом случае справедливо выражение

$$E = E_0 + \frac{3\pi^4}{5} Nk_B T \left(\frac{T}{\theta_D} \right)^3; E \sim T^4.$$

3.1.3. Задачи для самостоятельного решения

Теплоемкость кристалла

Задача 3.1.1. Вычислить удельные теплоемкости кристаллов алюминия и меди по классической теории теплоемкости. ($C_{Al} = 924$ Дж/(кг·К); $C_{Cu} = 392$ Дж/(кг·К))

Задача 3.1.2. Пользуясь классической теорией, вычислить удельные теплоемкости кристаллов NaCl и CaCl. ($C_{NaCl} = 853$ Дж/(кг·К); $C_{CaCl} = 660$ Дж/(кг·К))

Задача 3.1.3. Вычислить по классической теории теплоемкости теплоемкость кристалла бромида алюминия AlBr объемом $V = 1 \text{ м}^3$. Плотность ρ кристалла бромида алюминия равна $3,01 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$.

($C_{\text{AlBr}} = 1,4 \text{ МДж/К}$)

Задача 3.1.4. Определить изменение ΔU внутренней энергии кристалла никеля при нагревании его от $t = 0^\circ \text{ С}$ до $t = 200^\circ \text{ С}$. Масса m кристалла равна 20 г. ($\Delta U = 1,70 \text{ кДж}$)

Задача 3.1.5. Вывести формулу для средней энергии $\langle \varepsilon \rangle$ классического линейного гармонического осциллятора при тепловом равновесии. Вычислить значение $\langle \varepsilon \rangle$ при $T = 300 \text{ К}$. ($\langle \varepsilon \rangle = 4,14 \cdot 10^{-21} \text{ Дж}$)

Задача 3.1.6. Определить энергию U и теплоемкость C системы, состоящей из $N = 10^{25}$ классических трехмерных независимых гармонических осцилляторов. Температура $T = 300 \text{ К}$. ($U = 124 \text{ кДж}$; $C = 414 \text{ Дж/К}$)

Задача 3.1.7. Определить: 1) среднюю энергию линейного одномерного квантового осциллятора при температуре $T = \theta_E = 200 \text{ К}$; 2) энергию U системы, состоящей из $N = 10^{25}$ квантовых трехмерных независимых осцилляторов, при температуре $T = \theta_E = 300 \text{ К}$. ($1 - 2,99 \cdot 10^{-21} \text{ Дж}$; $2 - 134 \text{ кДж}$)

Задача 3.1.8. Найти частоту ν колебаний атомов серебра по теории теплоемкости Эйнштейна, если характеристическая температура серебра равна $\theta_E = 165 \text{ К}$. ($3,44 \cdot 10^{12} \text{ Гц}$)

Задача 3.1.9. Во сколько раз изменится средняя энергия квантового осциллятора, приходящаяся на одну степень свободы, при повышении температуры от $T_1 = \theta_E / 2$ до $T_2 = \theta_E$? (Увеличится в 1,65 раза.)

Задача 3.1.10. Определить отношение $\langle \varepsilon \rangle / \langle \varepsilon_T \rangle$ средней энергии линейного квантового осциллятора к средней энергии

теплового движения молекул идеального газа при температуре $T = \theta_E$. (0,721)

Задача 3.1.11. Используя квантовую теорию теплоемкости Эйнштейна, вычислить изменение ΔU молярной внутренней энергии кристалла при нагревании его на $\Delta T = 2$ К от температуры $T = \theta_E / 2$ ($\theta_E \gg \Delta T$). (36,1 Дж/моль)

Задача 3.1.12. Пользуясь теорией теплоемкости Эйнштейна, определить изменение ΔU молярной внутренней энергии кристалла при нагревании его от нуля до $T = 0,1\theta_E$. Характеристическую температуру Эйнштейна принять для данного кристалла равной $\theta_E = 300$ К. (0,34 Дж/моль)

Задача 3.1.13. Определить относительную погрешность, которая будет допущена, если при вычислении теплоемкости при $T = \theta_E$ вместо значения, даваемого теорией Эйнштейна, воспользоваться значением, даваемым законом Дюлонга и Пти. (8,6 %)

Задача 3.1.14 Вычислить по теории Эйнштейна молярную нулевую энергию кристалла цинка. Характеристическая температура θ_E для цинка равна 230 К. (2,87 кДж/моль)

Задача 3.1.15. Вычислить по теории Дебая молярную нулевую энергию кристалла меди. Характеристическая температура θ_D меди равна 320 К. (2,99 кДж/моль)

Задача 3.1.16. Определить максимальную частоту ω_{\max} собственных колебаний в кристалле золота по теории Дебая. Характеристическая температура для золота $\theta_D = 180$ К. ($2,36 \cdot 10^{13}$ Гц)

Задача 3.1.17. Вычислить максимальную частоту ω_{\max} Дебая, если известно, что молярная теплоемкость серебра при $T = 20$ К равна 1,7 Дж/(моль К) ($1,87 \cdot 10^{13}$ Гц)

Задача 3.1.18. Найти отношение изменения ΔU внутренней энергии кристалла при нагревании его от нуля до $T = 0,1\theta_D$ к нулевой энергии U_0 . ($5,15 \cdot 10^{-3}$)

Задача 3.1.19. Пользуясь теорией теплоемкости Дебая, определить изменение ΔU_m молярной внутренней энергии кристалла при нагревании его от нуля до $T = 0,1\theta_D$. Характеристическую температуру Дебая θ_D принять для данного кристалла равной 300 К. (14,4 Дж/моль)

Задача 3.1.20. Используя квантовую теорию теплоемкости Дебая, вычислить изменение ΔU молярной внутренней энергии кристалла при нагревании его на $\Delta T = 2$ К от температуры $T = \theta_D / 2$. Считать $\theta_D \gg \Delta T$. (41,2 Дж)

Задача 3.1.21. При нагревании серебра массой $m = 10$ г от $T_1 = 10$ К до $T_2 = 20$ К было подведено, $\Delta Q = 0,71$ Дж теплоты. Определить дебаевскую температуру θ_D серебра. Считать $T_2 \ll \theta_D$. (212 К)

Задача 3.1.22. Определить относительную погрешность, которая будет допущена при вычислении теплоемкости кристалла при $T = \theta_D$, если вместо значения, даваемого теорией Дебая, воспользоваться значением, даваемым законом Дюлонга и Пти. (5,1 %)

Задача 3.1.23. Найти среднюю скорость звуковых колебаний в алюминии, дебаевская температура которого $\theta_D = 396$ К. Какова скорость поперечных звуковых волн, если скорость продольных $v_{\parallel} = 6,3$ км/с. ($v = 3,4$ км/с; $v_{\perp} = 2,9$ км/с)

Задача 3.1.24. На рис. 9 показан график зависимости теплоемкости кристалла от температуры (по Дебаю). Найти с помощью этого графика: 1) дебаевскую температуру для серебра, если при $T = 65$ К его молярная теплоемкость равна 15 Дж/(моль·К); 2) молярную теплоемкость алюминия при $T = 80$ К, если при $T = 250$ К она равна 22,4 Дж/(моль·К); 3) максимальную частоту колебаний для меди, у которой при $T = 125$ К теплоемкость отличается от

классического значения $3R$ на 25 %. ($1 - \theta_D \approx 220 \text{ К}$; $2 - c_p = 10 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$; $3 - \omega_{\max} = 4,1 \cdot 10^{13} \text{ Гц}$)

Задача 3.1.25. Сравнить количество теплоты, необходимое для нагревания одного моля железа $\Delta T = 10 \text{ К}$ от температуры $T_1 = 0 \text{ К}$ и $T_2 = 900 \text{ К}$. Для железа температура Дебая $\theta_D = 470 \text{ К}$.

$$(\Delta Q_1 = \frac{3\pi^4 R (\Delta T)^4}{5\theta_D^3} = 46,8 \text{ мДж}, \Delta Q_2 = 3R\Delta T = 249,3 \text{ Дж})$$

Задача 3.1.26. Определить среднее число фононов в моде упругих колебаний кристаллической решетки с дебаевской частотой при температуре $T_1 = 0,15 T_{\text{пл}}$ для молибдена.

($T_{\text{пл}} = 2898 \text{ К}$, $\theta_D = 450 \text{ К}$)

Фононы

(В задачах этого раздела пренебречь дисперсией звуковых волн в кристалле)

Задача 3.1.27. Найти энергию фонона, соответствующего максимальной частоте Дебая, если дебаевская температура $\theta_D = 250 \text{ К}$. Ответ выразить в электрон-вольтах. (21 эВ)

Задача 3.1.28. Определить импульс фонона, соответствующего частоте $\omega = 0,1\omega_{\max}$. Средняя скорость звука в кристалле равна $v = 1,38 \text{ км/с}$, дебаевская температура $\theta_D = 100 \text{ К}$. ($10^{-25} \text{ Н} \cdot \text{с}$)

Задача 3.1.29. Длина волны λ фонона, соответствующего частоте $\omega = 0,01\omega_{\max}$, равна 52 нм. Усредненная скорость звука в кристалле равна $v = 4,8 \text{ км/с}$. Найти дебаевскую температуру. (443 К)

Задача 3.1.30. Температура Дебая для вольфрама равна $\theta_D = 310 \text{ К}$. Определить усредненную скорость звука и длину волны фононов, соответствующих частоте $\omega = 0,1\omega_{\max}$. ($v = 2,6 \text{ км/с}$; $\lambda = 4,0 \text{ нм}$)

Задача 3.1.31. Оценить максимальные значения энергии, средней скорости и импульса фонона в меди, дебаевская температура которой $\theta_D = 330$ К. ($\varepsilon_{\max} = 28$ мэВ; $v = 2,5$ км/с; $p_{\max} = 1,8 \cdot 10^{-24}$ Н·с)

Задача 3.1.32. Дебаевская температура кристалла $\theta_D = 300$ К, межатомное расстояние $d = 0,25$ нм. Чему равна усредненная скорость звука? (3,13 км/с)

3.2. Квантовая теория электронов в твердых телах (металлах и полупроводниках)

3.2.1. Основные понятия, законы и формулы

- Распределение Ферми по энергиям для свободных электронов в металле:

$$dn(E) = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \frac{\sqrt{E} dE}{\exp[(E - \mu) / k_B T] - 1}, \quad (3.2.1)$$

где $dn(E)$ – концентрация электронов, энергия которых заключается в интервале значений от E до $E + dE$; m – масса электрона; μ – химический потенциал.

При нулевой температуре распределение Ферми принимает вид

$$dn(E)_{|T=0} = \begin{cases} \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \sqrt{E} dE, & \text{если } E < E_F, \\ 0, & \text{если } E > E_F, \end{cases} \quad (3.2.2)$$

где E_F — энергия Ферми.

- Зависимость химического потенциала от температуры при низких температурах:

$$\mu = E_F \left[1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{k_B T}{E_F} \right)^2 \right]. \quad (3.2.3)$$

- Средняя энергия электрона в металле:

$$\langle E \rangle = \frac{3}{5} E_F \left[1 + \frac{5\pi^2}{12} \left(\frac{k_B T}{E_F} \right)^2 \right]. \quad (3.2.4)$$

- Уровень Ферми в металле:

$$E_F = \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2 n)^{2/3}, \quad (3.2.5)$$

где n – концентрация свободных электронов.

- Температура Ферми $T_F = E_F / k_B$. При не слишком высоких температурах $T \ll T_F$ число $N_{\text{эф}}$ эффективных электронов (т.е. электронов с энергиями, превышающими энергию Ферми) примерно равно

$$N_{\text{эф}} \approx N \frac{k_B T}{E_F} = N \frac{T}{T_F}, \quad (3.2.6)$$

где N – полное число электронов.

- Удельная проводимость собственных полупроводников

$$\gamma = en(b_n + b_p), \quad (3.2.7)$$

где e – заряд электрона; n – концентрация носителей заряда (электронов и дырок); b_n и b_p – подвижности электронов и дырок.

Напряжение U_H на гранях образца при эффекте Холла

$$U_H = R_H B j l, \quad (3.2.8)$$

где R_H – постоянная Холла; B – индукция магнитного поля; l – ширина пластины; j – плотность тока.

- Постоянная Холла для полупроводников типа алмаза, кремния, германия и др., обладающих носителями заряда одного вида (n или p),

$$R_H = \frac{3\pi}{8} \frac{1}{en}, \quad (3.2.9)$$

где n – концентрация носителей заряда.

3.2.2. Методические рекомендации по решению задач

Пример 3.2.1. Литий (${}^7_3\text{Li}$) имеет плотность $\rho = 534 \cdot 10^{-3} \text{ кг/м}^3$.

Определить значение граничной энергии Ферми в электрон-вольтах у электронов проводимости лития.

Решение. Атом лития имеет лишь один внешний (валентный) электрон; следовательно, концентрация электронов n равна числу атомов в единице объема лития. Поскольку атомная масса лития 6,94, то

$$n = \frac{N_A}{V_m} = \frac{N_A \rho}{\mu} = 6,022 \cdot 10^{23} \cdot 534 \cdot 10^3 / 6,94 = 4,63 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}.$$

Используя соотношение (3.2.5), получаем

$$E_F = \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2 n)^{2/3} = 7,55 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} = 4,7 \text{ эВ}.$$

Пример 3.2.2. Оценить энергию Ферми для кристалла серебра.

Решение. Энергию Ферми мы найдем по формуле (3.2.5), но нам надо знать концентрацию свободных электронов. Поскольку серебро – одновалентный металл, то каждый атом отдает в зону проводимости по одному электрону, так что концентрация последних равна концентрации атомов:

$$n = \frac{N_A}{V_m} = \frac{N_A \rho}{\mu}, \quad (3.2.10)$$

где μ – молярная масса, а ρ – плотность вещества. Подставляя сюда данные для серебра, находим $n = 6,022 \cdot 10^{23} \times 10,5 \cdot 10^3 / 107,87 \cdot 10^{-3} = 5,86 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}$.

Подставляя это значение в (3.1.20), находим

$$E_F = \frac{(1,054 \cdot 10^{-34})^2}{2 \times 9,11 \cdot 10^{-31}} \times (3\pi^2 \times 5,86 \cdot 10^{28})^{2/3} =$$

$$= 8,80 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} = 5,5 \text{ эВ.}$$

Пример 3.2.3. Кусок металла объемом $V = 20 \text{ см}^3$ находится при температуре $T = 0$. Определить число N свободных электронов, импульсы которых отличаются от максимального импульса p_F не более, чем на $0,1p_F$. Энергия Ферми $E_F = 5 \text{ эВ}$.

Решение. Воспользуемся выражением (3.2.2) для распределения электронов в металле по энергиям, и перепишем его в виде распределения по импульсам, учитывая связь $E = p^2 / 2m$ и $dE = p dp / m$, тогда получаем для $p \leq p_F$:

$$dn(p) = \frac{1}{\pi^2 \hbar^3} p^2 dp, \quad (3.2.11)$$

откуда находим искомое число электронов

$$N = V \int_{0,9p_F}^{p_F} dn(p) = \frac{V}{\pi^2 \hbar^3} \int_{0,9p_F}^{p_F} p^2 dp = \frac{V}{\pi^2 \hbar^3} p_F^3 \frac{1 - 0,9^3}{3}. \quad (3.2.12)$$

Учитывая, что максимальный импульс p_F и максимальная энергия E_F электронов в металле связаны соотношением $p_F = \sqrt{2mE_F}$, преобразуем (3.2.12) к виду

$$N = \frac{0,271V}{3\pi^2} \left(\frac{\sqrt{2mc^2 E_F}}{\hbar c} \right)^3. \quad (3.2.13)$$

Используя значения $mc^2 = 0,511 \cdot 10^6 \text{ эВ}$ и $\hbar c = 197,3 \cdot 10^{-9} \text{ эВ} \cdot \text{м}$, находим

$$N = \frac{0,271 \times 20 \cdot 10^{-6}}{3\pi^2} \left(\frac{\sqrt{2 \times 0,511 \cdot 10^6 \times 5}}{197,3 \cdot 10^{-9}} \right)^3 = 2,75 \cdot 10^{23} \text{ электронов.}$$

Пример 3.2.4. Кусок меди объемом $V = 1 \text{ см}^3$ находится при температуре, очень близкой к абсолютному нулю. Предположим, что электроны в нем ведут себя подобно вырожденному газу Ферми. Определить характерные особенности распределения электронов по энергиям $\frac{dN}{dE}$ и E_{\max} .

Решение. При температуре абсолютного нуля все электроны занимают нижние энергетические уровни. В этом случае

$$dN \sim p^2 dp \sim \sqrt{E} dE.$$

В результате интегрирования в пределах от 0 до E_{\max} , где E_{\max} – энергия Ферми, находим

$$N \sim E_{\max}^{3/2} \text{ или } E_{\max} \sim N^{2/3}.$$

Энергия Ферми определяется выражением

$$E_{\max} = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{3\pi^2 N}{V} \right)^{2/3}.$$

Пример 3.2.5. Определить выражение средней кинетической энергии $\langle E \rangle$ в зависимости от энергии Ферми E_F .

Решение. Если dn – число электронов, импульсы которых находятся в интервале dp , то по определению средняя кинетическая энергия

$$\langle E \rangle = \frac{\int E(p) dn}{\int dn}.$$

Полное число электронов (удвоенное полное число состояний)

$$n = \frac{8\pi V p_F^3}{3(n)^3},$$

где $V = L^3$ – объем ящика.

$$\text{Следовательно, } dn = \frac{8\pi V p^2 dp}{h^3}.$$

Таким образом,

$$\langle E \rangle = \frac{\int E(p)}{\int p^2 dp} = \frac{\int (p^2 / 2m) p^2 dp}{\frac{1}{3} p^3 \Big|_0^{p_F}} = \frac{3}{5} E_F.$$

Пример 3.2.6. Оценить давление электронного газа в металлическом натрии при $T = 0$, если концентрация свободных электронов в нем $n = 2,5 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}$. Воспользоваться уравнением для идеального газа.

Решение. Под уравнением идеального газа в этой задаче понимается связь давления со средней энергией частиц:

$p = \frac{2}{3} n \langle E \rangle$. В нашем случае средняя энергия выражается через энергию Ферми $\left(\langle E \rangle = \frac{3}{5} E_F \right)$, откуда

$$p = \frac{2}{5} n E_F. \quad (3.2.14)$$

Энергию Ферми находим по формуле (3.2.5):

$$E_F = \frac{(1,054 \cdot 10^{-34})^2}{2 \times 9,11 \cdot 10^{-31}} \times (3\pi^2 \times 2,5 \cdot 10^{28})^{2/3} = 5,0 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}. \quad (3.2.15)$$

Подставляя это значение в (3.2.14), находим

$$p = \frac{2}{5} \times 2,5 \cdot 10^{28} \cdot 5,0 \cdot 10^{-19} = 5,0 \cdot 10^9 \text{ Па} \approx 50000 \text{ атм}. \quad (3.2.16)$$

Заметим, что поскольку $E_F \sim n^{2/3}$, то давление электронного газа $p \sim n^{5/3}$. Давление обычных (классических) частиц пропорционально их числу, а здесь мы получили более сильную зависимость. Здесь проявился принцип Паули: ферми-частицы «мешают» друг другу, они вынуждены занимать всё более высокие энергетические состояния, что повышает их среднюю кинетическую энергию и, как следствие, давление.

Пример 3.2.7. Вычислить температуру идеального газа, у которого средняя кинетическая энергия частиц равна средней

кинетической энергии серебра (Ag) при абсолютном нуле температуры. Предполагая, что на каждый атом серебра приходится один свободный электрон и эффективная масса электрона $m^* = m_0$.

Решение. Средняя энергия электронов проводимости в металле при $T = OK$, согласно соотношениям (3.2.4) – (3.2.5) равна:

$$\langle E \rangle = \frac{3}{5} E_F = \frac{3}{5} \frac{\hbar^2}{2m^*} (3\pi^2 n)^{2/3}.$$

В случае серебра (Ag) $\rho = 10,5 \cdot 10^3$ кг/м, $\mu = 107,87$ кг/кмоль и $\langle E \rangle \approx 3,3$ эВ = $5,28 \cdot 10^{-19}$ Дж. Средняя энергия классических частиц при температуре T определяется равенством $\langle E \rangle_{\text{кл}} = \frac{3}{2} k_B T$, где k_B – постоянная Больцмана. Тогда согласно условию задачи для T получим:

$$T = \frac{2 \langle E \rangle}{3 k_B} = 25 \text{ КК.}$$

Пример 3.2.8. В идеальном электронном газе среднее число частиц в квантовом состоянии с энергией E_i равно

$$\langle n_i \rangle \sim \frac{1}{e^{\frac{E_i - \mu}{kT}} + 1}.$$

1) Получить выражение для μ в зависимости от плотности частиц $n = \frac{N}{V}$, температуры T и других параметров.

2) Показать, что эта формула в предельном случае $n\lambda^3 \ll 1$ (где λ – дебройлевская длина волны для теплового движения частиц) сводится к распределению Максвелла–Больцмана.

3) Показать, что электронный газ в металле при комнатной температуре не соответствует предельному случаю и не описывается статистикой Максвелла–Больцмана.

Решение:

1. Параметр μ можно найти из условия

$$\sum_i \langle n_i \rangle = n.$$

Используя выражение для $\langle n_i \rangle$, получаем

$$\frac{2}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^\infty \frac{d^3 p}{e^{\frac{E-\mu}{kT}} + 1} = n;$$

здесь множитель «2» в числителе обусловлен тем, что электроны обладают спином $1/2$. Так как $E = p^2 / 2m$, имеем

$$\frac{2}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^\infty \frac{4\pi p^2 dp}{e^{\frac{p^2/2m-\mu}{kT}} + 1} = n.$$

Отсюда можно найти μ . В случае $e^{\frac{\mu}{kT}} \ll 1$ подынтегральное выражение можно разложить в ряд и получить следующее соотношение:

$$2 \left(\frac{mkT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \left\{ e^{\frac{\mu}{kT}} - \frac{1}{\sqrt{8}} e^{2\frac{\mu}{kT}} + \dots \right\} = n.$$

2. Дебройлевская длина волны для теплового движения частицы с массой m и энергией kT определяется выражением

$$\lambda = \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{mkT}}.$$

При $n\lambda^3 \ll 1$ в разложении для μ можно пренебречь членами высокого порядка малости и записать

$$e^{\frac{\mu}{kT}} = \frac{n\lambda^3}{2} = \frac{N}{2V} \lambda^3 \ll 1,$$

где V – объем, занимаемый частицами. Таким образом, среднее число частиц $\langle n_i \rangle$ в состоянии с энергией E_i равно

$$\langle n_i \rangle \sim e^{-\frac{E_i-\mu}{kT}} = \frac{N}{2} \frac{\lambda^3}{V} e^{-\frac{E_i}{kT}}.$$

3. При комнатной температуре $kT \approx \frac{1}{40}$ эВ; подставляя в формулу для λ это значение kT , а также постоянные $m_e c^2 \approx 0,5 \cdot 10^6$ эВ и $\hbar c = 1973$ эВ·Å, получаем

$$\lambda \approx 44 \text{ Å}.$$

Следовательно, $n\lambda^3 \approx 10^{-19} \cdot 10^{24} = 10^5$, и статистика Максвелла–Больцмана к электронному газу **не применима**.

Пример 3.2.9. *Определить концентрацию свободных электронов в металле при температуре $T = 0$ К, если известно, что их средняя энергия равна 1,5 эВ.*

Решение. Концентрацию свободных электронов определим с помощью формулы

$$E_F = \frac{\hbar^2}{2m} (2\pi^2 n)^{2/3}$$

для энергии Ферми, которая связана со средней энергией свободных электронов соотношением

$$\langle E \rangle = \frac{3}{5} E_F.$$

После преобразований запишем расчетную формулу

$$n = \frac{1}{3\pi^2} \left(\frac{2mE_F(0)}{\hbar^2} \right)^{3/2} = \frac{1}{3\pi^2} \left(\frac{10m \langle E \rangle}{3\hbar} \right)^{3/2}.$$

Выполняя вычисления, находим

$$n = 2,1 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}.$$

Пример 3.2.10. *Объяснить, почему теплоемкость газа свободных электронов при низких температурах $T \ll T_F$ (T_F – температура вырождения) много меньше, чем для газа, состоящего из классических частиц. Чему приблизительно равняется отношение $\beta = C_V^{(e)} / C_{\text{кл}}$ для натрия (Na) при $T = 300$ К?*

Решение. В тепловом движении из-за принципа Паули принимают участие только те электроны, которые находятся в состояниях с энергией, отличающейся от энергии Ферми на $\sim k_B T$.

Доля таких электронов для металлов равна примерно $\frac{k T}{E_F} \ll 1$.

Чтобы найти теплоемкость электронного газа, воспользуемся термодинамическим соотношением

$$C_V^{(e)} = \left(\frac{\partial \langle E \rangle}{\partial T} \right)_V,$$

где средняя энергия N электронов в металле, заключенных в объеме V , определяется соотношением (3.2.4)

$$\langle E \rangle = \frac{3}{5} E_F \left[1 + \frac{5\pi^2}{12} \left(\frac{k T}{E_F} \right)^2 \right].$$

Вычислив производную от энергии по температуре, получим

$$C_V^{(e)} = \frac{\pi^2}{2} k_B N \left(\frac{k T}{E_F} \right).$$

Теплоемкость идеального газа классических частиц

$$(C_V)_{\text{кл}} = \frac{3}{2} k_B N.$$

Поэтому отношение β

$$\beta = \frac{C_V^{(e)}}{(C_V)_{\text{кл}}} = \frac{\pi^2}{3} \left(\frac{k T}{E_F} \right).$$

Для натрия Na $E_F \approx 3,2$ эВ. Поэтому при $T = 300$ К $\beta \approx 0,03$.

Пример 3.2.11. Образец из германия n -типа в виде пластины длиной $L = 10$ см и шириной $l = 6$ мм помещен в однородное магнитное поле ($B = 0,1$ Тл) перпендикулярно линиям магнитной индукции. При напряжении $U = 250$ В, приложенном к концам пластины, возникает холловская разность потенциалов $U_H = 8,8$ мВ. Определить: 1) постоянную Холла R_H ; 2) концентрацию n_n носителей тока. Удельную проводимость γ германия принять равной 80 См/м.

Решение:

1. При помещении полупроводника в магнитное поле (рис. 11) носители тока (в полупроводнике n -типа это электроны),

перемещающиеся под действием приложенной к нему разности потенциалов U , будут отклоняться в поперечном направлении.

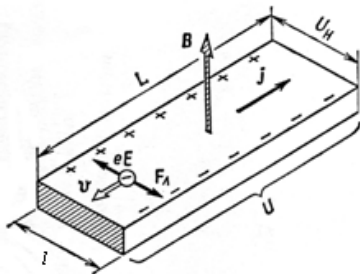


Рис. 11

Это отклонение, вызванное силой Лоренца, приведет к «накоплению» заряда на боковых поверхностях образца, причем создаваемое в результате этого напряжение U_H (холловская разность потенциалов) действием своим будет уравнивать силу Лоренца. Холловская разность потенциалов определяется соотношением

$$U_H = R_H B j l,$$

откуда постоянная Холла

$$R_H = \frac{U_H}{B j l}. \quad (3.2.17)$$

Плотность тока j найдем, воспользовавшись законом Ома в дифференциальной форме:

$$j = \gamma E,$$

где E – напряженность поля в образце.

Считая поле в образце однородным, можно написать $E=U/L$, и тогда

$$j = \gamma \frac{U}{L}.$$

Подставив плотность тока в выражение (3.2.17), получим

$$R_H = \frac{U_H L}{B U \gamma l}. \quad (3.2.18)$$

Убедимся в том, что правая часть равенства (3.2.18) дает единицу постоянной Холла ($\text{м}^3/\text{Кл}$):

$$\frac{[U_H][L]}{[B][U][\gamma][l]} = \frac{1 \text{ В} \cdot 1 \text{ м}}{1 \text{ Тл} \cdot \text{В} \cdot 1 \text{ См/м} \cdot 1 \text{ м}} = \frac{1 \text{ м}}{1 \text{ Тл} \cdot 1 \text{ См}} =$$

$$= \frac{1 \text{ А} \cdot 1 \text{ м} \cdot 1 \text{ м} \cdot 1 \text{ В}}{1 \text{ Н} \cdot 1 \text{ А}} = \frac{1 \text{ Дж} \cdot 1 \text{ м}^2}{1 \text{ Н} \cdot 1 \text{ Кл}} = 1 \text{ м}^3 / \text{Кл}.$$

Выразим все величины в единицах СИ ($U_H = 8,8 \cdot 10^{-3}$ В, $L = 0,1$ м, $B = 0,1$ Тл, $U = 250$ В, $\gamma = 80$ См/м, $l = 6 \cdot 10^{-3}$ м) и произведем вычисления:

$$R_H = \frac{8,8 \cdot 10^{-3} \cdot 0,1}{0,1 \cdot 250 \cdot 80 \cdot 6 \cdot 10^{-3}} \text{ м}^3/\text{Кл} = 7,33 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3/\text{Кл}.$$

2. Концентрацию n носителей тока в полупроводнике одного типа (в нашем случае n -типа) можно найти из соотношения

$$R_H = \frac{3\pi}{8} \cdot \frac{1}{en},$$

где e – элементарный заряд. Отсюда

$$n = \frac{3\pi}{8R_H e}.$$

Произведя вычисления, получим $n = 10^{23}$ электронов/м³.

Пример 3.2.12. Кремниевый образец нагревают от 0 до 10° С. Во сколько раз возрастает его электропроводность?

Решение. Отношение

$$\frac{n_e(2)}{n_e(1)} = \frac{\exp(-\Delta E / 2kT_2)}{\exp(-\Delta E / 2kT_1)} = \exp\left(\frac{\Delta E}{2k} \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)\right).$$

Таким образом, поскольку для кремния $\Delta E = 1,1$ эВ = $1,76 \cdot 10^{-19}$ Дж, мы имеем

$$\frac{n_e(2)}{n_e(1)} = \exp\left[\frac{1,76 \cdot 10^{-19}}{2(1,38 \cdot 10^{-23})} \left(\frac{1}{273} - \frac{1}{283}\right)\right] = 2,28.$$

Пример 3.2.13. Образец из чистого полупроводника нагревают от температуры $T_1 = 250$ К до $T_2 = 375$ К. При этом его удельная проводимость увеличивается в $n = 800$ раз. Как она изменится при последующем нагревании еще на $\Delta T = 125$ К?

Решение. Используя функцию распределения Ферми–Дирака, можно записать выражение для концентрации электронов проводимости n_e в чистом полупроводнике:

$$n_e \sim e^{-\frac{\Delta E}{2kT}}$$

Поскольку электропроводность σ пропорциональна концентрации n_e носителей тока, можно сделать вывод, что для чистых полупроводников она изменяется по закону

$$\sigma = \sigma_0 e^{-\frac{\Delta E}{2kT}},$$

где σ_0 – постоянная величина.

Таким образом, отношение удельных проводимостей при температурах T_2 и T_1 равно

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = e^{\frac{\Delta E}{2k} \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right)} \quad \text{или} \quad \ln \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{\Delta E}{2k} \frac{T_2 - T_1}{T_1 T_2}.$$

Аналогичное соотношение для значений σ_3 при температуре $T_3 = T_1 + 2\Delta T$ и σ_2 имеет вид ($T_2 - T_1 = T_3 - T_2 = \Delta T$):

$$\frac{\sigma_3}{\sigma_2} = e^{\frac{\Delta E}{2k} \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_3} \right)} \quad \text{или} \quad \ln \frac{\sigma_3}{\sigma_2} = \frac{\Delta E \cdot \Delta T}{2k T_2 T_3}.$$

Решая полученную систему уравнений (исключая ширину запрещенной зоны ΔE), находим:

$$\ln \frac{\sigma_3}{\sigma_2} = \frac{\Delta E \cdot \Delta T}{2k T_2 T_3} = \frac{\Delta T}{T_2 T_3} \frac{T_1 T_2}{\Delta T} \ln \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{T_1}{T_3} \ln \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{T_1}{T_1 + 2\Delta T} \ln \frac{\sigma_2}{\sigma_1}.$$

Учитывая, что $T_1 + 2\Delta T = 2T_1$, можно упростить это выражение:

$$\ln \frac{\sigma_3}{\sigma_2} = \frac{T_1}{T_1 + 2\Delta T} \ln \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{1}{2} \ln \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \ln \sqrt{\frac{\sigma_2}{\sigma_1}};$$

следовательно,

$$\frac{\sigma_3}{\sigma_2} = \sqrt{\frac{\sigma_2}{\sigma_1}} \approx 28,3.$$

3.2.3. Задачи для самостоятельной работы

Электроны в металле. Распределение Ферми–Дирака

Задача 3.2.1. Определить максимальную скорость электронов в металле при $T = 0$ К, если уровень Ферми $E_F = 5,0$ эВ. ($v_{\max} = 1,33$ Мм/с)

Задача 3.2.2. Определить концентрацию n свободных электронов в металле при температуре $T = 0$ К. Энергию Ферми принять равной 1 эВ. ($n = 4,54 \cdot 10^{27}$ м⁻³)

Задача 3.2.3. Цинк — двухвалентный металл. Плотность цинка $\rho = 7,133 \cdot 10^3$ кг/м³. Вычислить: 1) концентрацию электронов проводимости; 2) энергию Ферми; 3) максимальную скорость электронов; 4) минимальную волну де Бройля. ($1 - n = 1,31 \cdot 10^{29}$ м⁻³; $2 - E_F = 9,41$ эВ; $3 - v_{\max} = 1,82$ Мм/с; $4 - \lambda_{\min} = 0,40$ нм)

Задача 3.2.4. Плотность золота $\rho = 19,3$ г/см³. Каждый атом отдает в зону проводимости один электрон. Найти энергию Ферми для золота. ($E_F = 5,53$ эВ)

Задача 3.2.5. В нейтронной звезде нейтроны подчиняются тому же распределению Ферми, что и свободные электроны в металле. Масса нейтрона $m_n = 1,673 \cdot 10^{-27}$ кг. Вычислить энергию Ферми для нейтронной звезды радиусом $R = 10$ км, масса которой равна двум массам Солнца. ($E_F = 136$ МэВ)

Задача 3.2.6. «Белые карлики» — это последняя стадия эволюции звезды. Состоят они в основном из атомов железа и достаточно горячи и плотны, так что все атомные электроны становятся свободными. Оценить энергию Ферми электронного газа в «белом карлике» с массой, равной массе Солнца, и радиусом, равным радиусу Земли. ($E_F = 234$ кэВ)

Задача 3.2.7. Определить отношение концентраций n_1 / n_2 свободных электронов при $T = 0$ К в литии и цезии, если известно, что уровни Ферми в этих металлах соответственно равны $E_{F,1} = 4,72$ эВ, $E_{F,2} = 1,53$ эВ. ($n_1 / n_2 = 5,42$)

Задача 3.2.8. Определить число свободных электронов, которое приходится на один атом натрия при температуре $T = 0$ К. Уровень Ферми для натрия равен $3,12$ эВ. Плотность ρ натрия равна 970 кг/м³. (0,985)

Задача 3.2.9. Найти число свободных электронов, приходящихся на один атом алюминия при $T = 0$ К. Уровень Ферми $E_F = 11,7$ эВ. (3,02)

Задача 3.2.10. Найти число свободных электронов, приходящихся на один атом меди при $T = 0$ К. Уровень Ферми $E_F = 7,0$ эВ? (0,994)

Задача 3.2.11. Вычислить среднюю кинетическую энергию $\langle E \rangle$ электронов в металле при $T = 0$ К, если уровень Ферми $E_F = 6,0$ эВ. (3,6 эВ)

Задача 3.2.12. До какой температуры T_1 следовало бы нагреть классический электронный газ, чтобы средняя энергия его электронов оказалась равной средней энергии свободных электронов в меди при $T = 0$ К? Считать, что на каждый атом меди приходится один свободный электрон. ($T_1 \approx 3 \cdot 10^4$ К)

Задача 3.2.13. Металл находится при температуре $T = 0$ К. Какой процент электронов имеет энергию, превышающую половину максимальной? (64,6 %)

Задача 3.2.14. Металл с энергией Ферми $E_F = 7$ эВ находится при температуре $T = 0$ К. Найти энергию $E_{1/2}$, такую, что энергия ровно половины электронов превышает $E_{1/2}$. ($E_{1/2} = 4,41$ эВ)

Задача 3.2.15. Металл находится при температуре $T = 0$ К. Найти относительное число $\Delta N / N$ свободных электронов,

кинетическая энергия которых отличается от энергии Ферми не более чем на 2 %. (0,03)

Задача 3.2.16. Оценить температуру вырождения T_F для калия, если его плотность $\rho = 860 \text{ кг/м}^3$. ($T_F = 23,7 \text{ КК}$)

Задача 3.2.17. Определить отношение концентраций n_1 / n_2 свободных электронов при $T = 0 \text{ К}$ в литии и цезии, если известно, что уровни Ферми в этих металлах соответственно равны $E_{F,1} = 4,72 \text{ эВ}$, $E_{F,2} = 1,53 \text{ эВ}$. (5,41)

Задача 3.2.18. Определить число свободных электронов, которое приходится на один атом натрия при температуре $T = 0 \text{ К}$. Уровень Ферми E_F для натрия равен $3,12 \text{ эВ}$. Плотность ρ натрия равна 970 кг/м^3 . (0,9)

Задача 3.2.19. Вычислить среднюю кинетическую энергию $\langle E \rangle$ электронов в металле при температуре $T = 0 \text{ К}$, если уровень Ферми $E_F = 7 \text{ эВ}$. ($\langle E \rangle = \frac{3}{5} E_F = 4,2 \text{ эВ}$)

Задача 3.2.20. Определить отношение концентрации n_{\max} электронов в металле (при $T = 0 \text{ К}$), энергия которых отличается от максимальной не более чем на ΔE , к концентрации n_{\min} электронов, энергии которых не превышают значения $E = \Delta E$; ΔE принять равным $0,01 E_F$. (В 14,9 раза)

Задача 3.2.21. Выразить среднюю скорость $\langle v \rangle$ электронов в металле при $T = 0 \text{ К}$ через максимальную скорость v_{\max} . Вычислить $\langle v \rangle$ для металла, уровень Ферми E_F которого при $T = 0 \text{ К}$ равен 6 эВ . ($\langle v \rangle = 3/4 v_{\max} = 1,09 \text{ Мм/с}$)

Задача 3.2.22. Найти долю электронов вне сферы Ферми для меди при температуре: 1) $T = 0 \text{ К}$; 2) $T = 300 \text{ К}$; 3) $T = 1000 \text{ К}$. (1 – 0; 2 – $4 \cdot 10^{-8}$; 3 – 0,012)

Задача 3.2.23. При какой температуре доля электронов вне сферы Ферми для лития составляет 0,013? Энергия Ферми $E_F = 4,7$ эВ. ($T = 708$ К)

Задача 3.2.24. Серебро плавится при температуре $t_{\text{пл}} = 961^\circ$ С. Какая доля электронов имеет при такой температуре энергию, превышающую энергию Ферми $E_F = 5,5$ эВ? (0,019)

Задача 3.2.25. По функции распределения $dn(E)$ электронов в металле по энергиям установить распределение $dn(\lambda)$ по длинам волн де Бройля. Используя полученный результат, найти процент электронов, длина волны которых меньше удвоенной минимальной. (87,5 %)

Задача 3.2.26. Зная распределение $dn(E)$, электронов в металле по энергиям, установить распределение $dn(v)$ электронов по скоростям. Используя полученный результат, определить, во сколько раз при температуре $T = 0$ К число электронов со скоростями от $v_{\text{max}}/2$ до v_{max} больше числа электронов со скоростями от 0 до $v_{\text{max}}/2$. (Восемь раз)

Задача 3.2.27. Зная распределение $dn(E)$ электронов в металле по энергиям, установить распределение $dn(v)$ электронов по скоростям. Используя полученный результат, выразить среднюю скорость $\langle v \rangle$ электронов в металле при $T = 0$ К через максимальную скорость v_{max} . Вычислить $\langle v \rangle$ для металла, уровень Ферми E_F которого равен 6 эВ. ($\langle v \rangle = 1,09$ Мм/с)

Задача 3.2.28. Зная распределение $dn(E)$ электронов в металле по энергиям, установить распределение $dn(v)$ электронов по скоростям. Используя полученный результат, выразить среднюю квадратичную скорость $\sqrt{\langle v^2 \rangle}$ электронов в металле при $T = 0$ К

через максимальную скорость электронов. Вычислить среднюю квадратичную скорость для металла с $E_F = 6$ эВ.

$$\left(\sqrt{\langle v^2 \rangle} \right) = 1,12 \text{ Мм/с}$$

Задача 3.2.29. Зная распределение $dn(E)$ электронов в металле по энергиям, установить распределение $dn(v)$ электронов по скоростям. Используя полученный результат, выразить среднее от обратной скорости $\left\langle \frac{1}{v} \right\rangle$ через максимальную скорость электронов

в металле при $T=0$. Вычислить $v_{об} = 1 / \left\langle \frac{1}{v} \right\rangle$ для металла с $E_F = 6$ эВ.

$$(v_{об} = 0,97 \text{ Мм})$$

Распределение электронов в полупроводниках. Эффект Холла

Задача 3.2.30. При изменении температуры чистого беспримесного полупроводника от значения $T_1 = 400$ К до $T_2 = 500$ К изменяются собственная концентрация носителей от n_1 до n_2 ($n_2/n_1 = 37,5$). Определить энергию Ферми E_F .

Задача 3.2.31. При изменении температуры чистого беспримесного полупроводника от значения $T_1 = 400$ К до $T_2 = 500$ К изменяются собственная концентрация носителей от $n_1 = 8 \cdot 10^{18} \text{ м}^{-3}$ до $n_2 = 6 \cdot 10^{19} \text{ м}^{-3}$. Определить ширину запрещенной зоны полупроводника ΔE .

Задача 3.2.32. Определить уровень Ферми E_F в собственном полупроводнике, если энергия ΔE_0 активации равна 0,1 эВ. За нулевой уровень отсчета кинетической энергии электронов принять низший уровень зоны проводимости. (–0,05)

Задача 3.2.33. Собственный полупроводник (германий) имеет при некоторой температуре удельное сопротивление $\rho = 0,48 \text{ Ом}\cdot\text{м}$.

Определить концентрацию n носителей заряда, если подвижности b_n и b_p электронов и дырок соответственно равны $0,36$ и $0,16$ $\text{м}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$. ($2,5 \cdot 10^{19} \text{ м}^{-3}$)

Задача 3.2.34. Удельная проводимость γ кремния с примесями равна 112 $\text{См}/\text{м}$. Определить подвижность b_p дырок и их концентрацию n_p , если постоянная Холла $R_H = 3,66 \cdot 10^{-4}$ $\text{м}^3/\text{Кл}$. Принять, что полупроводник обладает только дырочной проводимостью. ($3,5 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$; $2 \cdot 10^{22} \text{ м}^{-3}$)

Задача 3.2.35. В германии часть атомов замещена атомами сурьмы. Рассматривая дополнительный электрон примесного атома по модели Бора, оценить его энергию E связи и радиус r орбиты. Диэлектрическая проницаемость ϵ германия равна 16 . ($0,053$ эВ; $0,85$ нм)

Задача 3.2.36. Полупроводник в виде тонкой пластины шириной $l = 1$ см и длиной $L = 10$ см помещен в однородное магнитное поле с индукцией $B = 0,2$ Тл. Вектор магнитной индукции перпендикулярен плоскости пластины. К концам пластины (по направлению L) приложено постоянное напряжение $U = 300$ В. Определить холловскую разность потенциалов U_H на гранях пластины, если постоянная Холла $R_H = 0,1$ $\text{м}^3/\text{Кл}$, удельное сопротивление $\rho = 0,5$ Ом·м. (28 ГГц)

Задача 3.2.37. Тонкая пластина из кремния шириной $l = 2$ см помещена перпендикулярно линиям индукции однородного магнитного поля ($B = 0,5$ Тл). При плотности тока $j = 2$ $\text{мкА}/\text{мм}^2$, направленного вдоль пластины, холловская разность потенциалов U_H оказалась равной $2,8$ В. Определить концентрацию n носителей заряда. ($5,25 \cdot 10^{16} \text{ м}^{-3}$)

Задача 3.2.38. При изменении температуры чистого беспримесного полупроводника от $T_1 = 350$ К до $T_2 = 400$ К. Определить относительное изменение электрических сопротивлений (R_2/R_1), если уровень Ферми, отсчитанный от верхней границы валентной зоны, равен $E_F = 0,6$ эВ.

Задача 3.2.39. Германиевый кристалл, в котором ширина запрещенной зоны равна $0,72$ эВ, нагревают от температуры $t_1 = 0^\circ \text{С}$

до температуры $t_2 = 15^\circ\text{C}$. Во сколько раз возрастает его удельная проводимость?

Задача 3.2.40. При нагревании кремниевого кристалла от температуры $t_1 = 0^\circ\text{C}$ до температуры $t_2 = 10^\circ\text{C}$ его удельная проводимость возрастает в 2,28 раза. Определить ширину запрещенной зоны кристалла кремния.

4. Элементы физики атомного ядра

4.1. Характеристики атомных ядер. Энергия связи ядра

4.1.1. Основные понятия, законы и формулы

- Ядро обозначается символом

$${}^A_Z X,$$

где X — символ химического элемента; Z — атомный номер (число протонов в ядре); A — массовое число (число нуклонов в ядре). Число N нейтронов в ядре: $N = A - Z$.

- Масса покоя M устойчивой системы n взаимодействующих частиц меньше суммы масс покоя m_i свободных частиц. Разность

$$\Delta m = \sum_{i=1}^n m_i - M$$

называется дефектом масс системы частиц.

- Энергия связи ядра ${}^A_Z X$:

$$E_{\text{св}} = c^2 \Delta m = c^2 [Zm_p + (A - Z)m_n - M_X],$$

где m_p , m_n и M_X — массы протона, нейтрона и ядра соответственно.

Коэффициент пропорциональности c^2 (квадрат скорости света) можно выразить в разных единицах и пользоваться наиболее удобной формой в соответствии с единицами измерения массы и энергии:

$$c^2 = 8,988 \cdot 10^{16} \text{ Дж/кг} = 931,49 \text{ МэВ/а.е.м.}$$

- Для расчетов энергии связи (дефекта масс) удобнее пользоваться выражением, куда входят не массы ядер, а массы нейтральных атомов:

$$E_{\text{св}} = c^2 \Delta m = c^2 [Z m_{\text{H}} + (A - Z) m_n - M_{A, X}],$$

где m_{H} и $M_{A, X}$ — массы атома водорода и нейтрального атома с ядром ${}^A_Z X$ соответственно.

- Удельная энергия связи (энергия связи на нуклон):
 $E_{\text{уд}} = E_{\text{св}} / A.$

График зависимости удельной энергии связи от массового числа A приведен на рис. 12. Из этого графика, в частности, следует, что с выделением энергии могут происходить реакции деления тяжелых ядер и синтез легких ядер.

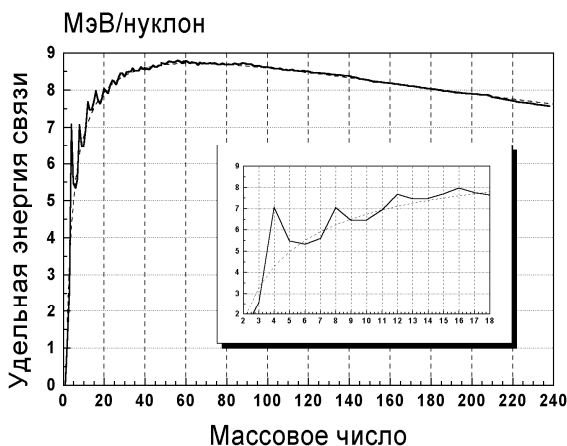


Рис. 12

- Полуэмпирическая формула Бете–Вайцзеккера для удельной энергии связи (в единицах МэВ/нуклон):

$$\frac{E_{\text{св}}(Z, A)}{A} = 15,3 - 16,8A^{-1/3} - 87,2(1/2 - Z/A)^2 - 0,665Z^2 A^{-4/3}.$$

4.1.2. Методические рекомендации по решению задач

Пример 4.1.1. Оценить массовую плотность и плотность числа частиц ядерного вещества.

Решение. В ядре объемом $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ число нуклонов в единице объема, или концентрация,

$$n = \frac{A}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{A}{\frac{4}{3}\pi \left[(1,2 \cdot 10^{-15} \text{ м}) A^{1/3} \right]^3} = 1,38 \cdot 10^{44} \text{ м}^{-3}.$$

Умножая это значение на массу нуклона, получаем массовую плотность

$$\rho = n \cdot M_p = (1,38 \cdot 10^{44}) (1,67 \cdot 10^{-27}) = 2,3 \cdot 10^{17} \text{ кг/м}^3.$$

Следовательно, один кубический сантиметр ядерного вещества имеет массу 230 млн т. Следует отметить, что плотность ядерного вещества не зависит от размеров ядра, поскольку объем ядра пропорционален массовому числу A .

Пример 4.1.2. Чему был бы равен радиус Земли, если бы наша планета со своей реальной массой имела бы плотность ядерной материи? Чему был бы равен радиус ядра урана ${}_{92}^{238}\text{U}$, если бы это ядро имело плотность Земли?

Решение. Плотность ядерной материи (произведение массы нуклона на плотность числа частиц в ядерном веществе)

$$\rho_{\text{яд}} = m_p n = m_p \cdot \frac{A}{\frac{4}{3}\pi R_{\text{яд}}^3} = \frac{m_p}{\frac{4}{3}\pi r_0^3},$$

где m_p – масса нуклона; $R_{\text{яд}} = r_0 A^{1/3}$; $r_0 = 1,3 \cdot 10^{-15}$ м. Средняя плотность планеты Земля

$$\rho_3 = \frac{M_3}{V_3} = \frac{M_3}{\frac{4}{3}\pi R_3^3},$$

где $M_3 = 5,976 \cdot 10^{24}$ кг, $R_3 = 6,3814 \cdot 10^6$ м.

Таким образом,
$$R_x = \sqrt[3]{\frac{M_3}{\frac{4}{3}\pi\rho_{\text{яд}}}} = r_0 \sqrt[3]{\frac{M_3}{m_p}} \approx 180 \text{ м}$$

$$R_U = \sqrt[3]{\frac{M_U}{\frac{4}{3}\pi\rho_3}} = R_3 \sqrt[3]{\frac{M_U}{M_3}} = 2,6 \cdot 10^{-10} \text{ м.}$$

Пример 4.1.3. *Относительная атомная масса водорода, взятая из таблицы Д.И. Менделеева, равна $A_r = 1,00797$ а.е.м. Естественная смесь водорода содержит некоторую долю тяжелого изотопа – дейтерия. Масса атома дейтерия $m_D = 2,01410$ а.е.м. Найдите долю дейтерия в природной смеси водорода. Сколько атомов N водорода приходится на один атом дейтерия?*

Решение. Если долю дейтерия обозначить через d , то относительная атомная масса водорода должна определяться как $A_r = 1,00797 = 1,00783 \times (1 - d) + 2,01410 \times d = 1,00783 + 1,00627d$, откуда следует $d = 0,00014$. Иными словами, содержание дейтерия в естественных условиях равно примерно 0.014 %. Мы получили долю дейтерия по массе. Найдём теперь его долю по числу атомов. Смесь из одного атома дейтерия и N атомов водорода имеет массу $M = 1,00783N + 2,01410$ а.е.м. Только что найденная массовая доля дейтерия равна $d = 0,00014 = m_D / M$, откуда получаем $0,00014(1,00783N + 2,01410) = 2,01410$. Решение этого уравнения даёт $N \approx 14400$. Обратная величина $\eta = 1/N \approx 0,00007$ даёт долю дейтерия по числу атомов. Естественно, η примерно в два раза меньше d , поскольку атом дейтерия примерно вдвое тяжелее атома водорода.

Пример 4.1.4. *Нейтронная звезда это объект, чья плотность примерно равна плотности ядерной материи. Вычислить, какой радиус имело бы Солнце, превратившись в нейтронную звезду.*

Считать, что при таком превращении масса Солнца $M_{\odot} = 1,99 \cdot 10^{30}$ кг не изменилась.

Решение. Плотность ядерной материи находится по данным о протоне $\rho_p = \frac{m_p}{4\pi r_p^3 / 3}$. Ту же плотность будет иметь Солнце после

превращения в нейтронную звезду: $\rho_p = \frac{M_{\odot}}{4\pi R_n^3 / 3}$. Разделив первое равенство на второе, получим $1 = (m_p R_n^3 / M_{\odot} r_p^3)$, откуда

$$R_n = r_p \sqrt[3]{\frac{M_{\odot}}{m_p}} = 1,3 \cdot 10^{-15} \sqrt[3]{\frac{1,99 \cdot 10^{30}}{1,67 \cdot 10^{-27}}} = 13,8 \text{ км.}$$

Пример 4.1.5. Вычислить дефект массы, Δm и энергию связи $E_{\text{св}}$ ядра ${}_{5}^{11}\text{B}$.

Решение. Дефект массы ядра определим по формуле

$$\Delta m = Zm_{\text{H}} + (A - Z)m_n - M_A. \quad (4.1.1)$$

Для нашего ядра $Z = 5$, $A = 11$, а массы нейтральных атомов берем из табл. П.6:

$$\Delta m = 5 \times 1,00783 + (11 - 5) \times 1,00867 - 11,00931 = 0,08186 \text{ а.е.м.}$$

Энергия связи ядра находится из соотношения Эйнштейна:

$$E_{\text{св}} = \Delta m c^2 = 0,08186 \times 931,49 = 76,25 \text{ МэВ.}$$

Пример 4.1.6. Ядро ${}_{14}^{27}\text{Si}$ переходит в «зеркальное» ядро ${}_{13}^{27}\text{Al}$ путем позитронного распада. Максимальная энергия позитронов равна $\varepsilon_{\text{max}} = 3,48$ МэВ. Предполагая, что радиус ядра определяется выражением $r_0 A^{1/3}$, где A – массовое число, оценить значение r_0 из этих данных.

Решение. По отношению к ядерным силам протон и нейтрон ведут себя совершенно одинаково. Эта зарядовая независимость ядерных сил проявляется в так называемых зеркальных ядрах, получающихся друг из друга заменой протонов на нейтроны и наоборот. Именно такими парами являются ядра ${}_{14}^{27}\text{Si}(14p + 13n)$ и ${}_{13}^{27}\text{Al}(13p + 14n)$. Если бы зарядовая независимость ядерных сил была бы точным законом природы, то все параметры зеркальных ядер были бы одинаковыми и β -распад был бы запрещен законом сохранения энергии. Кулоновское взаимодействие нарушает зарядовую независимость и делает такой распад возможным



Позитрон не сможет унести энергии больше, чем выделяется при распаде. Таким образом,

$$m_e c^2 + \varepsilon_{\max} = [M(\text{Si}) - M(\text{Al})] c^2 = (m_p - m_n)^2 + E_{\text{кул}}.$$

Для определения кулоновской энергии взаимодействия предположим, что ядро представляет собой равномерно заряженный шар радиуса R и зарядом Z_e :

$$E_{\text{кул}} = \frac{3}{5} \frac{e^2}{R} Z(Z-1).$$

Таким образом,

$$m_e c^2 + \varepsilon_{\max} = (m_p - m_n)^2 + \frac{3}{5} \frac{e^2}{R} [Z_{\text{Si}}(Z_{\text{Si}} - 1) - Z_{\text{Al}}(Z_{\text{Al}} - 1)],$$

откуда

$$\frac{e^2}{r_0 A^{1/3}} = \frac{5}{78} [m_n - m_p + m_e]^2 + \varepsilon_{\max}.$$

И, окончательно, $r_0 = 1,4 \cdot 10^{-15}$ м.

Пример 4.1.7. Энергия связи электрона с ядром невозбужденного атома водорода (энергия ионизации) равна $E_{\text{св}} = 13,6$ эВ. Определить, на сколько масса атома водорода меньше суммы масс свободных протона и электрона.

Решение. Искомая величина представляет собой дефект массы устойчивой системы, состоящей из протона и электрона, т.е. дефект массы атома водорода, и формула для энергии связи ядер в данном случае запишется в виде

$$E_{\text{св}} = c^2 (m_p + m_e - m_{\text{H}}). \quad (4.1.2)$$

Отсюда находим дефект массы:

$$\Delta m = m_p + m_e - m_{\text{H}} = \frac{E_{\text{св}}}{c^2} = \frac{13,6}{931,49 \cdot 10^6} = 1,46 \cdot 10^{-8} \text{ а.е.м.} \quad (4.1.3)$$

Экспериментальное наблюдение дефекта массы атома водорода в настоящее время невозможно, так как по своей величине он значительно меньше погрешностей современных методов измерения масс частиц. У наиболее тяжелых атомов энергия связи электронной оболочки с ядром достигает десятых долей МэВ, но и в этом случае энергией связи электронной оболочки с ядром можно пренебречь по сравнению с энергией связи нуклона в ядре. **Малость дефекта масс на атомном уровне позволила в свое время сформулировать закон сохранения массы в химических реакциях, который, как теперь оказывается, верен лишь приближенно. На самом деле фундаментальное значение имеет закон сохранения энергии.**

Пример 4.1.8. Определить энергию E , которую нужно затратить для отрыва нейтрона от ядра ${}_{11}^{23}\text{Na}$.

Решение. После отрыва нейтрона число нуклонов A в ядре уменьшится на единицу, а число протонов Z останется неизменным. В результате получится ядро ${}_{11}^{22}\text{Na}$. Ядро ${}_{11}^{23}\text{Na}$ можно рассматривать как устойчивую систему, образовавшуюся в результате захвата свободного нейтрона ядром ${}_{11}^{22}\text{Na}$. Энергия отрыва нейтрона от ядра ${}_{11}^{23}\text{Na}$ равна энергии связи нейтрона с

ядром ^{22}Na . Выразив энергию связи нейтрона через дефект массы системы, получим

$$E = E_{\text{св}} = c^2(m_{^{22}\text{Na}} + m_n - m_{^{23}\text{Na}}) = \\ = 931,49 \times (21,99444 + 1,00867 - 22,98977) = 12,43 \text{ МэВ}.$$

Пример 4.1.9. Медная монетка, состоящая из атомов ^{63}Cu , имеет массу $m = 3$ г. Какую энергию надо затратить, чтобы отделить все протоны и нейтроны в этой монетке друг от друга? Масса нейтрального атома меди равна $m_{\text{Cu}} = 62,92960$ а.е.м.

Решение. Ядро меди содержит $Z = 29$ протонов и $N = A - Z = 34$ нейтрона. Энергия связи вычисляется стандартным образом:

$$E_{\text{св}} = c^2(29m_{\text{H}} + 34m_n - m_{\text{Cu}}) = \\ = 931,49 \times (29 \times 1,00783 + 34 \times 1,00867 - 62,92960) = \\ = 551,7 \text{ МэВ} = 8,83 \cdot 10^{11} \text{ Дж}. \quad (4.1.4)$$

В монетке массой m содержится

$$N = N_A \frac{m}{M} = 6,02 \cdot 10^{23} \times \frac{3 \cdot 10^{-3}}{63 \cdot 10^{-3}} = 2,87 \cdot 10^{22} \text{ ядер}.$$

Умножая энергию связи на число ядер, находим искомую энергию: $E = NE_{\text{св}} = 2,5 \cdot 10^{12} \text{ Дж} = 2,5 \text{ ТДж}$.

Для сравнения выразим эту энергию в единицах условного топлива: при сгорании 1 кг у.т. выделяется энергия 29,308 МДж. Поэтому найденная нами энергия эквивалентна примерно 85,3 т у.т.

Пример 4.1.10. С помощью формулы Бете–Вайцеккера найти заряд Z_0 наиболее устойчивого ядра-изобары при заданном A . Выяснить каков характер активности у ядер ^{27}Mg , ^{29}P , ^{37}K , ^{67}Cu .

Решение. При фиксированном A условие максимума энергии связи $\partial E_{\text{св}} / \partial Z = 0$ приводит к результату

$$Z_0 = \frac{A/2}{1 + 0,0075 \cdot A^{2/3}}.$$

Для $A = 27$, $Z_0 = 12,64$; и поскольку Z принимает только целочисленные значения, наиболее связанным оказывается ядро с $Z = 13$, т.е. ${}_{13}^{27}\text{Al}$. Это означает, что $M({}_{13}^{27}\text{Al}) < M({}_{12}^{27}\text{Mg})$, а т.к. для Mg атомный номер $Z = 12$, то ядро ${}_{12}^{27}\text{Mg}$ должно быть нестабильным и распадаться, переходя в ${}_{13}^{27}\text{Al}$, т.е. претерпевать β^- – распад. ${}_{15}^{29}\text{P}$ является β^+ – активным; ${}_{19}^{37}\text{K}$ – β^+ – активен; ${}_{28}^{67}\text{Cu}$ – β^- – активен.

4.1.3. Задачи для самостоятельной работы

Масса и состав ядра. Превращения ядер

Задача 4.1.1. Определить атомные номера, массовые числа и химические символы зеркальных ядер, которые получаются, если в ядрах ${}_{2}^3\text{He}$, ${}_{4}^7\text{Be}$, ${}_{8}^{15}\text{O}$ протоны заменить нейтронами, а нейтроны – протонами. (${}_{1}^3\text{H}$, ${}_{3}^7\text{Li}$, ${}_{7}^{15}\text{N}$)

Задача 4.1.2. Какую часть массы нейтрального атома 1) полония ${}_{84}^{210}\text{Po}$; 2) плутония ${}_{94}^{239}\text{Pu}$ составляет масса его электронной оболочки? ($1 - 2,20 \cdot 10^{-4}$; $2 - 2,16 \cdot 10^{-4}$)

Задача 4.1.3. Зная массу m_a нейтрального атома изотопа лития ${}_{3}^7\text{Li}$, определить массы: однозарядного $({}_{3}^7\text{Li})^+ m_+$, двухзарядного $({}_{3}^7\text{Li})^{++} m_{++}$ и трехзарядного $({}_{3}^7\text{Li})^{+++} m_{+++}$ ионов лития. ($m_+ = 7,01546$ а.е.м.; $m_{++} = 7,01491$ а.е.м.; $m_{+++} = 7,01436$ а.е.м.)

Задача 4.1.4. Покоившееся ядро радона ${}_{86}^{220}\text{Rn}$ выбросило α -частицу. В какое ядро превратилось ядро радона? (${}_{84}^{216}\text{Po}$)

Задача 4.1.5. Ядро радия ${}^{226}_{88}\text{Ra}$ выбросило α -частицу. Какое ядро при этом образовалось? (${}^{222}_{86}\text{Rn}$)

Задача 4.1.6. Ядро ${}^{65}_{30}\text{Zn}$ захватило электрон с K -оболочки атома. Какое ядро образовалось в результате K -захвата? (${}^{65}_{29}\text{Cu}$)

Задача 4.1.7. В ядре изотопа углерода ${}^{14}_6\text{C}$ один из нейтронов превратился в протон в результате β^- -распада. Какое ядро получилось в результате такого превращения? (${}^{14}_7\text{N}$)

Задача 4.1.8. В ядре изотопа кремния ${}^{27}_{14}\text{Si}$ один из протонов превратился в нейтрон в результате β^+ -распада. Какое ядро получилось в результате такого превращения? (${}^{27}_{13}\text{Al}$)

Дефект массы и энергия связи ядра

Задача 4.1.9. Определить дефект массы Δm и энергию связи $E_{\text{св}}$ ядра атома тяжелого водорода. ($\Delta m = 0,00240$ а.е.м.; $E_{\text{св}} = 2,24$ МэВ)

Задача 4.1.10. Определить энергию E которая освободится при соединении одного протона и двух нейтронов в атомное ядро. (8,50 МэВ)

Задача 4.1.11. Определить удельную энергию связи ядра ${}^{12}_6\text{C}$. (7,68 МэВ/нуклон)

Задача 4.1.12. Энергия связи ядра, состоящего из двух протонов и одного нейтрона, равна 7,72 МэВ. Определить массу m_a нейтрального атома, имеющего это ядро. (3,01604 а.е.м.)

Задача 4.1.13. Определить массу нейтрального атома, если ядро этого атома состоит из трех протонов и двух нейтронов и энергия связи ядра равна 26,3 МэВ. (5,01260 а.е.м.)

Задача 4.1.14. Атомное ядро, поглотившее γ -фотон ($\lambda = 0,47$ пм), перешло в возбужденное состояние и распалось на отдельные нуклоны, разлетевшиеся в разные стороны. Суммарная

кинетическая энергия T нуклонов равна 0,4 МэВ. Определить энергию связи ядра. (2,2 МэВ)

Задача 4.1.15. Какую наименьшую энергию нужно затратить, чтобы разделить на отдельные нуклоны ядра ${}^7_3\text{Li}$ и ${}^7_4\text{Be}$? Почему для ядра бериллия эта энергия меньше, чем для ядра лития? ($E_{\text{Li}} = 39,3$ МэВ; $E_{\text{Be}} = 37,6$ МэВ)

Задача 4.1.16. Определить энергию, которая выделится при образовании из протонов и нейтронов ядер гелия ${}^4_2\text{He}$, если общая масса образовавшегося гелия равна 1 г. (682 ГДж)

Задача 4.1.17. Какую наименьшую энергию нужно затратить, чтобы оторвать один нейтрон от ядра азота ${}^{14}_7\text{N}$? (10,6 МэВ)

Задача 4.1.18. Найти минимальную энергию, необходимую для удаления одного протона из ядра азота ${}^{14}_7\text{N}$? (7,55 МэВ)

Задача 4.1.19. Энергия связи ядра кислорода ${}^{18}_8\text{O}$ равна 139,9 МэВ, ядра фтора ${}^{19}_9\text{F}$ – 147,8 МэВ. Определить, какую минимальную энергию нужно затратить, чтобы оторвать один протон от ядра фтора. (8,0 МэВ)

Задача 4.1.20. Какую наименьшую энергию нужно затратить, чтобы разделить ядро ${}^4_2\text{He}$ на две одинаковые части? (23,8 МэВ)

Задача 4.1.21. Определить наименьшую энергию, необходимую для разделения ядра углерода ${}^{12}_6\text{C}$ на три одинаковые части. (7,27 МэВ)

Задача 4.1.22. Определить энергию, необходимую для разделения ядра ${}^{20}_{10}\text{Ne}$ на две α -частицы и ядро ${}^{12}_6\text{C}$, если известно, что энергия связи на один нуклон в ядрах ${}^{20}_{10}\text{Ne}$, ${}^4_2\text{He}$ и ${}^{12}_6\text{C}$ равны соответственно 8,03; 7,07 и 7,68 МэВ/нуклон. ($E = 20 \varepsilon_{\text{Ne}} - 2 \varepsilon_{\alpha} - 12 \varepsilon_{\text{C}} = 11,9$ МэВ, где ε – энергия связи на один нуклон в соответствующем ядре)

Задача 4.1.23. Определить среднюю плотность ядерного вещества, полагая, что радиус ядра равен $R = r_0 \cdot A^{1/3}$, где A – массовое число, $r_0 = 1,3 \cdot 10^{-15}$ м. Энергия связи на один нуклон

$\varepsilon = 8,5$ МэВ/нуклон. Средняя масса нуклона $m_N \approx 940$ МэВ.

$$(\rho = (m_N A - \varepsilon \cdot A) / 4\pi R^{3/3} = 2,02 \cdot 10^{14} \text{ кг/м}^3)$$

Задача 4.1.24. Солнце имеет массу $2 \cdot 10^{30}$ кг, распределенную со средней плотностью $1,4 \cdot 10^3$ кг/м³. Каким был бы диаметр Солнца, имеющего ту же массу, но плотность ядерного вещества? (Диаметр уменьшится в $5,47 \cdot 10^4$ раз и составит 25,4 км)

Задача 4.1.25. Тяжелое ядро ^{204}X содержит 204 нуклона и характеризуется удельной энергией связи 8 МэВ/нуклон. Допустим, что энергия покоя свободного нейтрона равна 940 МэВ.

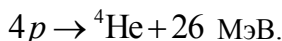
1) Определить энергию покоя ядра ^{204}X . 2) Ядро ^{204}X испускает

α -частицу (с энергией связи 28 МэВ) и превращается в ядро с удельной энергией связи 8,1 МэВ/нуклон. Определить кинетическую энергию, которая выделяется в этом процессе. (1 – 190,128 ГэВ; 2 – $T = 16$ МэВ)

Задача 4.1.26. Оценить полную энергию связи ядра $^{40}_{20}\text{Ca}$. (350 МэВ)

Задача 4.1.27. Вычислить энергию нейтрона в ядре $^{12}_6\text{C}$. (18,72 МэВ)

Задача 4.1.28 Мощность излучения Солнца (с учетом излучения нейтрино) равна $4 \cdot 10^{26}$ Вт. Предполагая, что вся энергия выделяется в результате ядерной реакции синтеза, протекающей по протонно-протонному циклу:

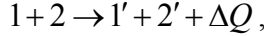


Определить, сколько ежедневно рождается атомов гелия внутри Солнца? ($\approx 10^{38}$ атомов/сутки).

4.2. Ядерные реакции

4.2.1. Основные понятия, законы и формулы

• Энергетическая схема ядерной реакции, когда сталкиваются две частицы 1 и 2, и в результате рождаются две новые частицы 1' и 2':

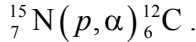


где ΔQ — энергосодержание реакции:

$$\Delta Q = c^2 [(m_1 + m_2) - (m_{1'} + m_{2'})], \quad (4.2.1)$$

где m_i и $m_{i'}$ ($i = 1, 2$) — массы покоя частиц до и после реакции соответственно. Это выражение очевидным образом обобщается на любое число участвующих в реакции частиц (которое в результате взаимодействия в принципе может измениться). Если $\Delta Q > 0$, то реакция идет с выделением энергии, если $\Delta Q < 0$, то реакция происходит с поглощением энергии.

• Символическая запись ядерной реакции может быть дана в развернутом виде или в сокращенном:



При записи в развернутом виде равны слева и справа суммы индексов — верхних (сохранение числа нуклонов) и нижних (сохранение электрического заряда).

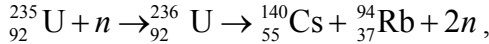
При записи в сокращенном виде сначала записывают символ ядра мишени, в скобках на первом месте — обозначение бомбардирующей частицы, на втором, (после запятой) — обозначение более легкой частицы, рождающейся в реакции, а за скобками — химический символ продукта ядерной реакции. Обычно используют следующие символические обозначения: p — протон; n — нейтрон; d — дейтрон (ядро изотопа водорода ${}^2_1\text{H}$); t — тритон (ядро изотопа водорода ${}^3_1\text{H}$); α — альфа-частица (ядро изотопа гелия ${}^4_2\text{He}$), e^- — электрон, e^+ — позитрон (античастица электрона с той же массой и противоположным электрическим зарядом), ν_e и $\bar{\nu}_e$ — нейтрино и антинейтрино, γ — гамма-квант.

• Законы сохранения:

- а) числа нуклонов $A_1 + A_2 = A_3 + A_4$;
- б) заряда $Z_1 + Z_2 = Z_3 + Z_4$;
- в) релятивистской полной энергии $E_1 + E_2 = E_3 + E_4$;
- г) импульса $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_3 + \vec{p}_4$.

Если общее число ядер и частиц, образовавшихся в результате реакции, больше двух, то запись соответственно дополняется.

- При делении некоторых ядер, например,



Количество нейтронов на выходе реакции больше, чем на входе, в результате чего возможно возникновение цепной реакции деления.

- Пороговая (минимальная) кинетическая энергия частоты t , налетающей на покоящуюся частицу M , для возбуждения ядерной реакции

$$t + M \rightarrow t_1 + t_2 + \dots;$$

$$T_{\text{пор}} = \left\{ (m_1 + m_2 + \dots)^2 - (t + M)^2 \right\} \frac{c^2}{2M}, \quad (4.2.2)$$

где t, M, m_1, m_2, \dots – массы покоя соответствующих частиц.

4.2.2. Методические рекомендации по решению задач

Пример 4.2.1. Вычислить кинетическую энергию α -частицы, испускаемой при превращении ядра урана ${}_{92}^{232}\text{U}$ (с массой 232,03714 а.е.м.) в ядро тория ${}_{90}^{238}\text{Th}$ (с массой 228,02873 а.е.м.).

Решение. Так как, масса α -частицы (ядро гелия ${}^4_2\text{He}$) равна 4,002603 а.е.м., то полная масса продуктов распада равна: $M(\text{Th}) + M(\text{He}) = 228,02873 + 4,002603 = 232,03133$ а.е.м.

Уменьшение массы при распаде ядра урана ${}_{92}^{232}\text{U}$ составляет:

$$\Delta M = M(\text{U}) - [M(\text{Th}) + M(\text{He})] = 0,00581 \text{ а.е.м.}$$

Эта масса переходит в кинетическую энергию. Так как $1 \text{ а.е.м.} = 931,5 \text{ МэВ}$, то при распаде высвобождается энергия, приблизительно равна $5,4 \text{ МэВ}$. С помощью закона сохранения импульса можно показать, что кинетическая энергия α -частицы равна примерно $5,3 \text{ МэВ}$. Следовательно, дочернее ядро (тория), испытывающее при вылете α -частицы отдачу в противоположном направлении, обладает кинетической энергией около $0,1 \text{ МэВ}$

$$\left(E_{Th} = \Delta M c^2 \cdot \frac{m_{\alpha}}{m_{\alpha} + M_{Th}} \right)$$

Пример 4.2.2. Найти энергию реакции ${}^9\text{Be}(p, \alpha){}^6\text{Li}$. Каковы кинетические энергии продуктов реакции, если ядро мишени (${}^9\text{Be}$) покоилось, кинетическая энергия протона равнялась $T_p = 5,45 \text{ МэВ}$, а ядро гелия вылетело под углом 90° к направлению движения протона?

Решение. Необходимые численные данные берем из табл. П.6 приложения. Энергия реакции

$$\begin{aligned} \Delta Q &= c^2 (m_{{}^9\text{Be}} + m_{{}^1\text{H}} - m_{{}^4\text{He}} - m_{{}^6\text{Li}}) = \\ &= 931,49 \times (9,01219 + 1,00783 - 4,00260 - 6,01513) = 2,13 \text{ МэВ}. \end{aligned}$$

По закону сохранения энергии сумма кинетических энергий ядра лития и α -частицы равна начальной кинетической энергии протона плюс энергия, выделившаяся в реакции

$$T_{\text{Li}} + T_{\alpha} = T_p + \Delta Q. \quad (4.2.3)$$

Применим теперь закон сохранения импульса: $\vec{p}_p = \vec{p}_{\text{Li}} + \vec{p}_{\alpha}$ или $\vec{p}_{\text{Li}} = \vec{p}_p - \vec{p}_{\alpha}$. Возводя это равенство в квадрат и учитывая, что $\vec{p}_p \cdot \vec{p}_{\alpha} = 0$, получаем

$$p_{\text{Li}}^2 = p_p^2 + p_{\alpha}^2. \quad (4.2.4)$$

Поскольку при заданных условиях кинетические энергии частиц много меньше их масс покоя, мы можем применять нерелятивистские соотношения между кинетической энергией и импульсом, так что выписанное равенство записывается в виде

$$T_{Li} m_{6Li} = T_p m_{1H} + T_{\alpha} m_{4He} \quad (4.2.5)$$

Решая систему уравнений (4.2.3) и (4.2.4), получаем

$$T_{\alpha} = \frac{m_{6Li} (\Delta Q + T_p) - T_p m_{1H}}{m_{4He} + m_{6Li}};$$

$$T_{Li} = \frac{m_{4He} (\Delta Q + T_p) + T_p m_{1H}}{m_{4He} + m_{6Li}}. \quad (4.2.6)$$

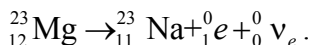
Подставляя численные данные, находим

$$T_{\alpha} = \frac{6,01513 \times (2,13 + 5,45) - 5,45 \times 1,00783}{4,00260 + 6,01513} = 4,00 \text{ МэВ};$$

$$T_{Li} = \frac{4,00260 \times (2,13 + 5,45) + 5,45 \times 1,00783}{4,00260 + 6,01513} = 3,58 \text{ МэВ} \quad (4.2.7)$$

Пример 4.2.3. Радиоактивное ядро магния ${}_{12}^{23}\text{Mg}$ выбросило позитрон и нейтрино (масса покоя равна нулю). Определить энергию β^+ -распада ядра.

Решение. Так как вылетевший позитрон унес положительный единичный заряд, то конечным продуктом реакции будет ядро с $Z = 11$, т.е. изотоп натрия. А поскольку нуклоны из ядра магния не вылетали, то массовое число этого изотопа будет по-прежнему равно 23. Таким образом, реакцию β^+ -распада ядра магния можно записать в виде



В уравнении энергетического баланса выразим массы ядер через массы нейтральных атомов:

$$\begin{aligned} \Delta Q &= c^2 \left[\left(m_{^{23}\text{Mg}} - 12m_e \right) - \left(m_{^{23}\text{Na}} - 11m_e \right) - m_e \right] = \\ &= c^2 \left(m_{^{23}\text{Mg}} - m_{^{23}\text{Na}} - 2m_e \right) = \\ &= 931,49 \times (22,99414 - 22,98977 - 2 \times 0,00055) = 3,05 \text{ МэВ}. \quad (4.2.8) \end{aligned}$$

Энергия ΔQ делится между продуктами реакции (в основном между позитроном и нейтрино). Поскольку масса нейтрино равна нулю, она не присутствует в уравнении энергетического баланса (4.2.8).

Пример 4.2.4. Согласно углеродному циклу Бете, источником энергии солнечного излучения является энергия, выделяющаяся при образовании гелия из водорода в результате цепочки реакций, когда исчезают четыре протона, а появляется ядро гелия ^4He , и вылетают два позитрона и два нейтрино (с нулевой массой покоя). Подсчитать, какое количество водорода ежесекундно должно превращаться в гелий. Солнечная постоянная $S = 1,4 \text{ кДж} / (\text{м}^2 \cdot \text{с})$. Принимая, что водород составляет 35 % массы Солнца, подсчитать, на сколько лет хватит запаса водорода, если интенсивность излучения Солнца считать неизменной.

Решение. При превращении четырех протонов в ядро ^4He выделяется энергия

$$\Delta Q = c^2 (4m_p - m_\alpha - 2m_e). \quad (4.2.9)$$

Выразим массы ядер через массы нейтральных атомов:

$m_p = m_{^1\text{H}} - m_e$, $m_\alpha = m_{^4\text{He}} - 2m_e$, откуда

$$\begin{aligned} \Delta Q &= c^2 \left[4 \left(m_{^1\text{H}} - m_e \right) - \left(m_{^4\text{He}} - 2m_e \right) - 2m_e \right] = \\ &= c^2 \left[4m_{^1\text{H}} - m_{^4\text{He}} - 4m_e \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 931,49 \times (4 \times 1,00783 - 4,00260 - 4 \times 0,00055) = \\
 &= 24,70 \text{ МэВ} = 3,96 \cdot 10^{-12} \text{ Дж.} \quad (4.2.10)
 \end{aligned}$$

Разделив E на массу четырех протонов, найдем «теплотворную» способность термоядерного топлива:

$$q = \frac{E}{4m_p} = \frac{3,96 \cdot 10^{-12}}{4 \times 1,67 \cdot 10^{-27}} = 5,9 \cdot 10^{14} \text{ Дж/кг.} \quad (4.2.11)$$

С другой стороны, зная солнечную постоянную C и расстояние $R = 1,496 \cdot 10^{11}$ м от Земли до Солнца, определяем светимость Солнца:

$$L = 4\pi R^2 C = 3,9 \cdot 10^{26} \text{ Вт.} \quad (4.2.12)$$

Теперь вычисляем массовый расход водорода в недрах Солнца:

$$\frac{dm}{dt} = \frac{L}{q} = 6,6 \cdot 10^{11} \text{ кг/с.} \quad (4.2.13)$$

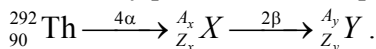
Так как масса Солнца равна $M_{\odot} = 2,0 \cdot 10^{30}$ кг, то полная масса водорода $M_{\text{H}} = 0,35M_{\odot}$, и его хватит на время

$$t = \frac{M_{\text{H}}}{dm/dt} = \frac{0,35 \times 2 \cdot 10^{30}}{6,6 \cdot 10^{11}} = 1,06 \cdot 10^{18} \text{ с} = 3,4 \cdot 10^{10} \text{ лет.} \quad (4.2.14)$$

Это примерно в два раза больше времени, в течение которого существует наша Вселенная.

Пример 4.2.5. *Какой изотоп образуется из альфа-радиоактивного тория ${}_{90}^{232}\text{Th}$ в результате четырех α -распадов и двух β -распадов?*

Решение. Представим схему радиоактивного распада тория:



Применим законы сохранения заряда и числа нуклонов. После четырех α -распадов $A_x = 232 - 4 \cdot 4 = 216$, $Z_x = 90 - 2 \cdot 4 = 82$, а после двух β -распадов $A_y = 216 - 0 \cdot 2 = 216$, $Z_y = 82 - (-1) \cdot 2 = 84$. Таким образом, конечным продуктом распада является изотоп полония ${}_{84}^{216}\text{Po}$.

Пример 4.2.6. В результате столкновения нейтрона с ядром $^{16}_8\text{O}$ наблюдается испускание дейтерия (изотоп водорода ^2_1H , содержащий один протон и один нейтрон). Какое ядро возникает в результате реакции?

Решение. Столкновение приводит к реакции $^1_0n + ^{16}_8\text{O} \rightarrow X + ^2_1\text{H}$. Общее число нуклонов первоначально было равно $16+1=17$, полный заряд: $Z = 8 + 0 = 8$. Число нуклонов и заряд в правой части уравнения реакции должны иметь такие же значения. Следовательно, $Z_X = 8 - 1 = 7$, $A_X = 17 - 2 = 15$. По периодической системе элементов находим, что $Z_X=7$ соответствует азоту. Таким образом, в результате реакции образовалось ядро азота $^{15}_7\text{N}$. Эту реакцию теперь можно записать в виде $^{16}_8\text{O}(n, d)^{15}_7\text{N}$, где d означает дейтерий ^2_1H .

Пример 4.2.7. Радиоактивное ядро магния ^{23}Mg выбросило позитрон и нейтрино. Определить Q энергию β^+ -распада ядра.

Решение. Реакцию β^+ -распада ядра магния можно записать следующим образом: $^{23}_{12}\text{Mg} \rightarrow ^{23}_{11}\text{Na} + ^0_1e + ^0_0\nu$.

Принимая, что ядро магния было неподвижным, и учитывая, что масса покоя нейтрино равна нулю, напишем уравнение энергетического баланса. На основании закона сохранения релятивистской полной энергии имеем

$$c^2 m_{\text{Mg}} = c^2 m_{\text{Na}} + T_{\text{Na}} + c^2 m_e + T_e + T_\nu. \quad (4.2.15)$$

Энергия распада

$$Q = T_{\text{Na}} + T_e + T_\nu = c^2 (m_{\text{Mg}} - m_{\text{Na}} - m_e). \quad (4.2.16)$$

Выразим массы ядер магния и натрия через соответствующие нейтральные атомы:

$$Q = c^2 \left[(m_{\text{Mg}} - 12m_e) - (m_{\text{Na}} - 11m_e) - m_e \right].$$

Так как массы покоя электрона и позитрона одинаковы, то после упрощений получим

$$Q = c^2 (m_{\text{Mg}} - m_{\text{Na}} - 2m_e).$$

Сделав подстановку, найдем $Q = 3,05$ МэВ.

Пример 4.2.8. Сколько α - и β^- -распадов должно произойти, чтобы ${}_{92}^{238}\text{U}$ превратился в стабильный изотоп свинца ${}_{82}^{206}\text{Pb}$?

Решение. При α -распаде заряд ядра уменьшается на две единицы, а массовое число – на четыре. При β^- -распаде заряд ядра увеличивается на одну единицу (за счет испускания электрона). Поэтому при превращении урана в свинец должно произойти $(238 - 206)/4 = 8\alpha$ -распадов, во время которых заряд ядра уменьшается на 16 единиц, и $6\beta^-$ -распадов, чтобы общее уменьшение заряда ядра стало равно $(92 - 82) = 10$. Таким образом, правильным является ответ: 8α -распадов и $6\beta^-$ -распадов.

Пример 4.2.9. На рис. 13 показана область существования β -стабильных ядер. Прямая линия равновесные значения Z_β , соответствующие β -стабильным ядрам. Здесь Z – порядковый номер элемента, а N – число нейтронов в ядре. Определить в области $Z < Z_\beta$:

- 1) ядра обладают избытком протонов Z или нейтронов N ;
- 2) являются β^- или β^+ радиоактивными.

Решение: Схематическая диаграмма известных в настоящее время ядер приведена на рис. 13. При рассмотрении этой диаграммы можно видеть ряд интересных особенностей систематики различных ядер.



Рис. 13

1. Устойчивые ядра с порядковыми номерами $Z \leq 20$ имеют приблизительно одинаковое число протонов и нейтронов ($Z \approx N$).

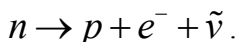
2. При $Z \geq 20$ в устойчивых ядрах начинает возрастать отношение числа нейтронов к числу протонов N/Z . Устойчивые ядра располагаются вдоль узкой полосы значений $N - Z$, называемой долиной устойчивости. Линия, соответствующая β -стабильным ядрам, может быть аппроксимирована соотношением

$$Z_{\beta} = \varepsilon N,$$

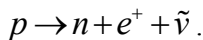
где $\varepsilon \approx 0,7$. Это означает, что стабильные ядра содержат больше нейтронов, чем протонов. Причину этого эффекта легко понять, если вспомнить, что ядерные силы – **близкодействующие**, а кулоновские – **дальнодействующие**. С ростом атомного номера увеличивается кулоновское отталкивание протонов, и поэтому для поддержания стабильности ядер требуется большое число нейтронов, у которых имеется лишь ядерное притяжение. Следовательно, с ростом Z возрастает отношение N/Z .

3. Ядра, расположенные по склонам долины устойчивости (выше или ниже линии $Z_{\beta} = \varepsilon N$), могут переходить в устойчивое состояние путем радиоактивности распада, испуская β^{-} - или β^{+} -частицы. (Конечно, для более массивных ядер возможен α -распад, а некоторые ядра, стремясь к стабильности, самопроизвольно делятся.)

4. Ядра, расположенные ниже долины устойчивости $Z < Z_{\beta} = \varepsilon N$, имеют избыток нейтронов (нейтроноизбыточные). В нейтроноизбыточных ядрах возможен β^{-} -распад, сопровождающийся превращением нейтрона в протон и вылетом электрона и антинейтрино:



5. Ядра, расположенные выше долины устойчивости $Z > Z_{\beta} = \varepsilon N$, содержат избыток протонов и распадаются путем β^{+} -распада:



Следовательно, в области $Z < \varepsilon N$ ядра обладают избытком нейтронов и β^{-} -активны.

Таким образом, **ядра обладают избытком нейтронов и β^{-} -активны.**

Пример 4.2.10. Оценить, какое количество урана участвует в делении при взрыве 20-килотонной бомбы (Энергия взрыва 1 кг тротила равна 4,2 МДж.)

Решение. При делении урана выделяется энергия порядка 1 МэВ/нуклон, т.е. $10^6 \times 1,6 \cdot 10^{-19} / 1,67 \cdot 10^{-27} \approx 10^{14}$ Дж/кг. Энергия же взрыва 20-килотонной бомбы составляет $20 \times 4,2 \cdot 10^{12} = 0,84 \cdot 10^{14}$ Дж. Эти числа примерно совпали, т.е. деление одного килограмма ^{235}U выделяет такую же энергию, как и взрыв 20 килотонн тротила.

Пример 4.2.11. Определить массовый расход dm/dt ядерного горючего ^{235}U в реакторе АЭС. Тепловая мощность станции равна $P = 10$ МВт. Принять, что в одном акте деления выделяется энергия $Q = 200$ МэВ, а КПД станции равен $\eta = 0,2$ (20 %).

Решение. Если за время dt разделилось dN атомов урана, то выделенная энергия равна QdN , а мощность реактора с учетом его КПД составит $P = \eta QdN/dt$. Масса ядра урана равна примерно $m_U = 235 \times 1,67 \cdot 10^{-27} = 3,92 \cdot 10^{-25}$ кг, т.е. искомый массовый расход, составляет $dm/dt = m_U dN/dt = m_U P / (\eta Q)$. В СИ $Q = 200 \cdot 10^6 \times 1,60 \cdot 10^{-19} = 3,20 \cdot 10^{-11}$ Дж.

Отсюда находим $\frac{dm}{dt} = \frac{3,92 \cdot 10^{-25} \times 10^7}{0,2 \times 3,20 \cdot 10^{-11}} = 6,13 \cdot 10^{-7}$ кг/с = 53 г/сут.

4.2.3. Задачи для самостоятельной работы

Ядерные реакции

Задача 4.2.1. Вычислить с помощью табличных значений масс атомов энергию на один нуклон, которая выделяется при протекании термоядерной реакции ${}^6_3\text{Li} + {}^2_1\text{H} \rightarrow {}^4_2\text{He}$. Сравнить

полученную величину с энергией на один нуклон, освобождающейся при делении ядра урана (полная высвобождаемая при этом энергия примерно равна 200 МэВ). (2,80 МэВ; 0,85 МэВ)

Задача 4.2.2. Определить порядковый номер Z и массовое число A частицы, обозначенной буквой x в символической записи ядерной реакции: ${}^{14}_6\text{C} + {}^4_2\text{He} \rightarrow {}^{17}_8\text{O} + x \cdot ({}_0^1n)$

Задача 4.2.3. Определить порядковый номер Z и массовое число A частицы, обозначенной буквой x в символической записи ядерной реакции: ${}^{27}_{13}\text{Al} + x \rightarrow {}^1_1\text{H} + {}^{26}_{12}\text{Mg}$. ($Z = 0$, $A = 0$ – фотон)

Задача 4.2.4. Определить энергию Q ядерных реакций:
 1) ${}^9_4\text{Be} + {}^2_1\text{H} \rightarrow {}^{10}_5\text{B} + {}^1_0n$; 2) ${}^6_3\text{Li} + {}^2_1\text{H} \rightarrow 2{}^4_2\text{He}$; 3) ${}^7_3\text{Li} + {}^4_2\text{He} \rightarrow {}^{10}_5\text{B} + {}^1_0n$;
 4) ${}^7_3\text{Li} + {}^1_1\text{H} \rightarrow {}^7_4\text{Be} + {}^1_0n$; 5) ${}^{44}_{20}\text{Ca} + {}^1_1\text{H} \rightarrow {}^{41}_{19}\text{K} + {}^4_2\text{He}$. Высвобождается или поглощается энергия в каждой из указанных реакций?

(1 – $Q = 4,36$ МэВ; 2 – $Q = 22,4$ МэВ; 3 – $Q = -2,79$ МэВ;

4 – $Q = -1,64$ МэВ; 5 – $Q = -1,04$ МэВ. При $Q > 0$ энергия высвобождается, при $Q < 0$ – поглощается)

Задача 4.2.5. Найти энергию Q ядерных реакций: 1) ${}^3_1\text{H}(p, \gamma){}^4_2\text{He}$;
 2) ${}^2_1\text{H}(d, \gamma){}^4_2\text{He}$; 3) ${}^2_1\text{H}(n, \gamma){}^3_1\text{H}$; 4) ${}^{19}_9\text{F}(p, \alpha){}^{16}_8\text{O}$.
 (1 – $Q = 19,8$ МэВ; 2 – $Q = 23,8$ МэВ; 3 – $Q = 6,26$ МэВ; 4 – $Q = 8,12$ МэВ)

Задача 4.2.6. Определить энергию Q ядерной реакции ${}^9_4\text{Be}(n, \gamma){}^{10}_4\text{Be}$, если известно, что энергия связи ядра ${}^9_4\text{Be}$ равна 58,16 МэВ, а ядра ${}^{10}_4\text{Be}$ – 64,98 МэВ. ($Q = 6,82$ МэВ)

Задача 4.2.7. Найти энергию Q ядерной реакции ${}^{14}_7\text{N}(n, p){}^{14}_6\text{C}$, если энергия связи ядра ${}^{14}_7\text{N}$ равна 104,66 МэВ, а ядра ${}^{14}_6\text{C}$ – 105,29 МэВ. ($Q = 0,63$ МэВ)

Задача 4.2.8. Определить суммарную кинетическую энергию $T_{\text{я}}$ ядер, образовавшихся в результате реакции $^{13}\text{C}(d, \alpha)^{11}\text{B}$, если кинетическая энергия T_d дейтрона равна 1,5 МэВ. Ядро-мишень ^{13}C считать неподвижным. ($T_{\text{я}} = 6,66$ МэВ)

Задача 4.2.9. При ядерной реакции $^9\text{Be}(\alpha, n)^{12}\text{C}$ высвобождается энергия $Q = 5,70$ МэВ. Пренебрегая кинетическими энергиями ядер бериллия и гелия и принимая их суммарный импульс равным нулю, определить кинетические энергии T_n и T_C продуктов реакции. ($T_n = 5,26$ МэВ; $T_C = 0,44$ МэВ)

Задача 4.2.10. Пренебрегая кинетическими энергиями ядер дейтерия и принимая их суммарный импульс равным нулю, определить кинетические энергии T_{He} и T_n продуктов реакции $^2_1\text{H} + ^2_1\text{H} \rightarrow ^3_1\text{H} + ^1_0\text{n}$. ($T_n = 2,44$ МэВ, $T_{\text{He}} = 0,82$ МэВ)

Задача 4.2.11. Покоившееся ядро полония $^{210}_{84}\text{Po}$ выбросило α -частицу. Определить кинетические энергии $T_{\text{я}}$ ядра отдачи и T_{α} α -частицы, а также полную энергию, выделившуюся при α -распаде ΔQ , ($T_{\text{я}} = 0,105$ МэВ; $T_{\alpha} = 5,400$ МэВ; $\Delta Q = 5,505$ МэВ)

Задача 4.2.12. Ядро углерода $^{14}_6\text{C}$ выбросило электрон и антинейтрино. Определить полную энергию ΔQ бета-распада ядра. (0,158 МэВ)

Задача 4.2.13. Неподвижное ядро кремния $^{31}_{14}\text{Si}$ выбросило электрон с кинетической энергией $T_e = 0,50$ МэВ. Пренебрегая кинетической энергией ядра отдачи, определить кинетическую энергию $T_{\bar{\nu}}$ антинейтрино. (0,98 МэВ)

Задача 4.2.14. Ядро атома азота $^{13}_7\text{N}$ выбросило позитрон. Кинетическая энергия позитрона равна 1 МэВ. Пренебрегая

кинетической энергией ядра отдачи, определить кинетическую энергию T_ν нейтрино, выброшенного вместе с позитроном. (0,2 МэВ)

Задача 4.2.15. Определить энергию Q ядерной реакции ${}^9\text{Be}(n, \gamma){}^{10}\text{Be}$, если известно, что энергия связи ядра ${}^9\text{Be}$ равна 58,16 МэВ, а ядра ${}^{10}\text{Be}$ – 64,98 МэВ. ($Q = 0,63$ МэВ)

Задача 4.2.16. Найти энергию Q ядерной реакции ${}^{14}\text{N}(n, p){}^{14}\text{C}$, если энергия связи ядра ${}^{14}\text{N}$ равна 104,66 МэВ, а ядра ${}^{14}\text{C}$ – 105,29 МэВ. ($Q = 0,63$ МэВ)

Задача 4.2.17. Определить суммарную кинетическую энергию T_γ ядер, образовавшихся в результате реакции ${}^{13}\text{C}(d, \alpha){}^{11}\text{B}$, если кинетическая энергия T_d дейтрона равна 1,5 МэВ. Ядро-мишень ${}^{13}\text{C}$ считать неподвижным. ($T_\gamma = 6,66$ МэВ)

Задача 4.2.18. При ядерной реакции ${}^9\text{Be}(\alpha, n){}^{12}\text{C}$ высвобождается энергия $Q = 5,70$ МэВ. Пренебрегая кинетическими энергиями ядер бериллия и гелия и принимая их суммарный импульс равным нулю, определить кинетические энергии T_n и T_C продуктов реакции. ($T_n = 5,26$ МэВ; $T_C = 0,44$ МэВ)

Задача 4.2.19. Нуклид ${}^{32}_{15}\text{P}$ распадается, испуская электрон с минимальной кинетической энергией 1,71 МэВ. 1) Определить дочернее ядро; 2) вычислить массу дочернего атома в а.е.м. ($1 - {}^{32}_{16}\text{S}$; 2) 31,97207)

Задача 4.2.20. В реакции ${}^{14}_7\text{N}(\alpha, p){}^{17}_8\text{O}$ налетающие α -частицы имеют кинетическую энергию 7,68 МэВ. Определить полную кинетическую энергию продуктов реакции. Масса ${}^{17}_8\text{O}$ равна 16,909131 а.е.м. (6,49 МэВ)

Задача 4.2.21. Какая энергия выделяется в реакции деления ${}^1_0n + {}^{235}_{92}\text{U} \rightarrow {}^{141}_{56}\text{Ba} + {}^{92}_{36}\text{Kr} + 3{}^1_0n$. Массы ${}^{141}_{56}\text{Ba}$ и ${}^{92}_{36}\text{Kr}$ равны соответственно 140,9141 и 91,9250 а.е.м. (174,7 МэВ)

Задача 4.2.22. Сколько энергии (в Дж) содержится в 1 кг воды, если природный дейтерий использовать в реакции ядерного синтеза ${}^2_1\text{D} + {}^2_1\text{D} \rightarrow {}^3_1\text{H} + {}^1_1\text{H}$. ($1,6 \cdot 10^9$ Дж/кг)

Задача 4.2.23. Сколько граммов урана расходуется ежедневно для производства 1 ГВт электроэнергии? КПД преобразования 30 %. (Около 3 кг в сутки)

Задача 4.2.24. Вычислить коэффициент полезного действия двигателей атомного ледокола, если их мощность $P_1 = 32$ МВт, а атомный реактор расходует $m = 200$ г урана ${}^{235}_{92}\text{U}$ в сутки. При делении одного ядра урана выделяется энергия $E_0 = 200$ МэВ. Молярная масса урана $\mu = 235$ кг/кмоль. ($\eta = \frac{P_1 \mu t}{E_0 m N_A}$; $\eta \approx 17$ %)

4.3. Радиоактивность. Прохождение излучения через вещество. Элементы дозиметрии ионизирующих излучений

4.3.1. Основные понятия, законы и формулы

- Основной закон радиоактивного распада:

$$N = N_0 e^{-\lambda t}, \quad (4.3.1)$$

где $N = N(t)$ – число нераспавшихся атомов в момент времени t ; $N_0 = N(0)$ – число нераспавшихся атомов в момент, принятый за начальный ($t = 0$); e — основание натуральных логарифмов λ – постоянная радиоактивного распада.

- Период полураспада $T_{1/2}$ — промежуток времени, за который число нераспавшихся атомов уменьшится в два раза. Период полураспада связан с постоянной распада соотношением

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0,69315}{\lambda}. \quad (4.3.2)$$

- Величина $\tau = 1/\lambda$, обратная постоянной распада, называется средним временем жизни радиоактивного атома (промежуток

времени, за которое число нераспавшихся ядер уменьшается в e раз). Связь τ с периодом полураспада:

$$T_{1/2} = 0,69315\tau, \quad \tau = 1,4427T_{1/2}.$$

- Число ядер, распавшихся в интервале времени $t, t + \Delta t$:

$$-\Delta N = N(t) - N(t + \Delta t) = N(t)(1 - e^{-\lambda\Delta t}). \quad (4.3.3)$$

При бесконечно малом интервале времени dt число распавшихся атомов

$$-dN = N\lambda dt.$$

- Активность A радиоактивного образца есть величина, равная отношению числа $-dN$ ядер, распавшихся в изотопе, к промежутку времени dt , за которое произошел распад. Активность определяется соотношением

$$A = -\frac{dN}{dt} = \lambda N = \lambda N_0 e^{-\lambda t}. \quad (4.3.4)$$

Как видно, активность образца со временем уменьшается по экспоненциальному закону: $A(t) = A_0 e^{-\lambda t}$. Единицей активности в СИ является один беккерель (Бк), равный одному распаду в секунду. Традиционная внесистемная единица активности — кюри (Ки): $1 \text{ Ки} = 3,7 \cdot 10^{10} \text{ Бк}$. Массовая (удельная) активность a радиоактивного источника есть активность единицы массы: $a = A / m$.

- Если некоторое количество радиоактивного препарата (1) помещено в закрытый сосуд, и при распаде вещества (1) образуется вещество (2), также радиоактивное, то количество второго вещества (2) в этом сосуде по истечении времени t определяется соотношением

$$N_2 = N_{0,1} \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}), \quad (4.3.5)$$

где $N_{0,1}$ — число атомов первого препарата (1) при $t = 0$, λ_1 и λ_2 — постоянные распадов препаратов (1) и (2) соответственно.

Если период полураспада препарата (1) значительно больше периода полураспада препарата (2), т.е. $\lambda_1 \ll \lambda_2$, то последняя формула принимает вид

$$N_2 \approx N_1 \frac{\lambda_1}{\lambda_2} (1 - e^{-\lambda_2 t}), \quad (4.3.6)$$

где N_1 и N_2 — число радиоактивных атомов веществ (1) и (2) в момент времени t .

При радиоактивном равновесии (для времен $\frac{1}{\lambda_1} \gg t \gg \frac{1}{\lambda_2}$) имеет место соотношение

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}. \quad (4.3.7)$$

• Обобщение предыдущего соотношения: если имеется смесь ряда радиоактивных изотопов, образующихся один из другого, и постоянная распада λ_1 первого члена ряда много меньше постоянных $\lambda_i, i = 2, 3, \dots, k$ всех остальных членов ряда, то в смеси устанавливается состояние радиоактивного равновесия, при котором активность всех членов ряда равны между собой:

$$\lambda_1 N_1 = \lambda_2 N_2 = \dots = \lambda_k N_k, \quad \lambda_1 \ll \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_k.$$

• *Поглощенной дозой* излучения называется энергия, поглощенная единицей массы облучаемого объекта.

$$D = \Delta W / \Delta m, \quad (4.3.8)$$

где ΔW — энергия ионизирующего излучения, переданная элементу облучаемого вещества; Δm — масса этого элемента. Ее размерность $[D] = [E / m] = L^2 T^{-2} = \text{Дж/кг}$. В СИ эта единица получила название грей (Гр). Часто используется также внесистемная единица — рад: 1 рад = 0,01 Дж/кг, т.е. 1 Гр = 100 рад.

• Для отражения опасности облучения для живого организма, вводят понятие *эквивалентной дозы*. Чтобы получить значение

эквивалентной дозы, надо величину поглощенной дозы умножить на так называемый коэффициент качества излучения Q (табл. П.9). Единицей измерения эквивалентной дозы в СИ служит зиверт (Зв): $1 \text{ Зв} = 1 \text{ Гр} \cdot Q$. Используют также внесистемную единицу – бэр (биологический эквивалент рентгена): $1 \text{ бер} = 1 \text{ рад} \cdot Q$, т.е. $1 \text{ Зв} = 100 \text{ бэр}$.

- Для характеристики радиационной обстановки на местности и в помещениях используют понятие *экспозиционной дозы*: количество рентгеновского или гамма-излучения, выраженное в единицах заряда одного знака, порожденного им в единице массы сухого воздуха в данной точке пространства:

$$X = \Delta Q / \Delta m. \quad (4.3.9)$$

Единицей измерения в СИ является Кл/кг – доза, производящая в 1 кг сухого воздуха число ионов, суммарный заряд которых составляет 1 Кл каждого знака. На практике часто используют внесистемную единицу – рентген (Р): $1 \text{ Р} = 0,000258 \text{ Кл/кг}$.

Так как на образование в воздухе пары ионов, (считаются ионы одного знака) тратится 34 эВ, то энергия, затрачиваемая на образование единицы заряда, равна $w = 34 \text{ Дж/Кл}$. Теперь экспозиционную дозу можно связать с поглощенной (воздухом же) дозой $D_{\text{возд}} = 1P \times w = 2,58 \cdot 10^{-4} \times 34 = 8,77 \text{ мГр} = 0,877 \text{ рад}$. Однако это не означает, что такую же дозу получает находящийся там объект.

- Мощность экспозиционной дозы фотонного излучения \dot{X} есть величина, равная отношению экспозиционной дозы ΔX фотонного излучения к интервалу времени Δt , за которое получена эта доза, т.е.

$$\dot{X} = \Delta X / \Delta t. \quad (4.3.10)$$

Мощность экспозиционной дозы выражается в амперах на килограмм (А/кг).

- Экспозиционная доза рентгеновского и γ -излучения, падающего на объект, экранированный защитным слоем толщиной x ,

$$X = X_0 e^{-\mu x}, \quad (4.3.11)$$

где X_0 – экспозиционная доза при отсутствии защитного слоя.

- Экспозиционная доза γ -излучения, падающего за время t на объект, находящийся в воздухе на расстоянии R от точечного источника,

$$X = \dot{X}t / R^2, \quad (4.3.12)$$

где \dot{X} – мощность экспозиционной дозы на расстоянии, равном единице. Поглощением γ -излучением в воздухе пренебрегаем.

- Закон ослабления узкого пучка моноэнергетических γ -излучений при прохождении через поглощающее вещество:

а) ослабление плотности потока ионизирующих частиц или фотонов

$$J = J_0 e^{-\mu x}, \quad (4.3.13)$$

где J_0 – плотность потока частиц, падающих на поверхность вещества; J – плотность потока частиц после прохождения слоя вещества толщиной x ; μ – линейный коэффициент ослабления (рис. 14);

б) ослабление интенсивности излучений

$$I = I_0 e^{-\mu x}, \quad (4.3.14)$$

где I – интенсивность γ -излучений в веществе на глубине x ; I_0 – интенсивность γ -излучений, падающих на поверхность вещества.

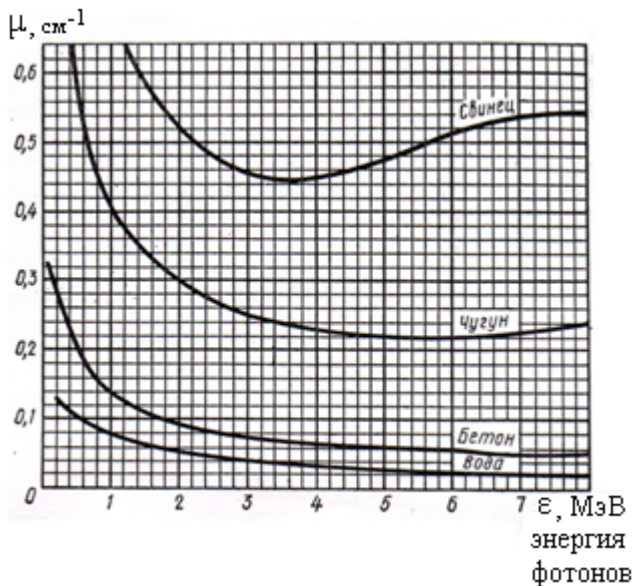


Рис. 14

- Слоем половинного ослабления называется слой, толщина $x_{1/2}$ которого такова, что интенсивность проходящих через него γ -излучений уменьшается в два раза:

$$x_{1/2} = \frac{\ln 2}{\mu} = \frac{0,693}{\mu} . \quad (4.3.15)$$

- Мощность дозы излучения (мощность поглощенной дозы излучения)

$$\dot{D} = \Delta D / \Delta t , \quad (4.3.16)$$

где Δt – время, в течение которого была поглощена элементом облучения доза излучения ΔD .

Мощность дозы излучения выражается в греях в секунду (Гр/с).

4.3.2. Методические рекомендации по решению задач

Пример 4.3.1. Определить начальную активность A_0 радиоактивного магния ${}_{12}^{27}\text{Mg}$ массой $m = 0,2$ мкг, а также его активность A через время $\Delta t = 6$ ч. Период полураспада магния $T = 9,46$ мин (см. в табл. П.5 приложения). Предполагается, что все атомы изотопа радиоактивны.

Решение. Активность A изотопа характеризует скорость радиоактивного распада и определяется отношением числа ядер dN , распавшихся за интервал времени dt , к величине этого интервала: $A = -\frac{dN}{dt}$. Знак «минус» показывает, что число N радиоактивных ядер с течением времени убывает. Применим закон радиоактивного распада:

$$N = N_0 \exp(-\lambda t),$$

где $N(N_0)$ – число радиоактивных ядер, содержащихся в изотопе в момент времени $t(t_0 = 0)$; $\lambda = \frac{\ln 2}{T}$ – постоянная радиоактивного распада. Продифференцировав $N = N(t)$ по времени получим

$$A = -\frac{dN}{dt} = \lambda N_0 e^{-\lambda t} = A_0 e^{-\lambda t},$$

где $A_0 = \lambda N_0$. Так как $N_0 = \frac{m}{\mu} N_A$ (μ – молярная масса, N_A – число Авогадро), то

$$A_0 = \frac{m}{\mu} \frac{\ln 2}{T} N_A; \quad A = \frac{m}{\mu} \frac{\ln 2}{T} N_A e^{-\frac{\ln 2}{T} t}.$$

Подставив в данные формулы числовые значения, получим

$$A_0 = 5,13 \cdot 10^{12} \text{ Бк}; \quad A = 81,3 \text{ Бк}.$$

Пример 4.3.2. В замкнутый объем помещено N_0 атомов радиоактивного элемента, постоянная распада ядер которого равна λ_1 . Ядра элемента, образующегося в результате распада, также радиоактивны, их постоянная распада равна λ_2 .

Определить, как с течением времени изменяется число «дочерних» ядер. Рассмотреть предельные случаи $\lambda_1 \gg \lambda_2$ и $\lambda_1 \ll \lambda_2$.

Решение. За время dt число N_2 ядер нового элемента («дочерних» ядер) изменяется: 1) за счет появления новых ядер в результате распада исходных («материнских») и 2) за счет убыли собственных в результате их распада:

$$dN_2 = \lambda_1 N_1 dt - \lambda_2 N_2 dt, \quad (4.3.17)$$

где N_1 – число «материнских» ядер, а N_2 – число «дочерних» в тот же момент времени t . Согласно закону радиоактивного распада. $N_1 = N_0 \exp(-\lambda_1 t)$, так что

$$\frac{dN_2}{dt} + \lambda_2 N_2 = \lambda_1 N_0 e^{-\lambda_1 t}. \quad (4.3.18)$$

Решение неоднородного дифференциального уравнения можно представить в виде суммы общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного. Последнее ищем в виде $Ae^{-\lambda_1 t}$. Подставляя это выражение в (4.3.18), получаем соотношение

$$-\lambda_1 A + \lambda_2 A = \lambda_1 N_0, \quad (4.3.19)$$

откуда

$$A = N_0 \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}. \quad (4.3.20)$$

Общее решение однородного уравнения $\dot{N}_2 + \lambda_2 N_2 = 0$ уже хорошо нам известно: $Be^{-\lambda_2 t}$. Таким образом,

$$N_2(t) = Be^{-\lambda_2 t} + N_0 \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_1 t}. \quad (4.3.21)$$

Постоянная B в этом соотношении определяется из начального условия отсутствия «дочерних» ядер в момент времени $t = 0$:

соотношение $N_2(0) = 0$ дает $B = -N_0 \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}$. Окончательно

получаем

$$N_2(t) = N_0 \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}).$$

В начальный момент и по прошествии достаточно большого времени число «дочерних» ядер равно нулю. В момент t_{\max} выражение (4.3.5) достигает своего максимального значения. Величину t_{\max} можно определить, приравняв нулю производную dN_2 / dt :

$$t_{\max} = \frac{\ln \lambda_2 - \ln \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}. \quad (4.3.22)$$

Подставляя (4.3.22) в (4.3.5), находим максимальное значение N_2 :

$$N_{2,\max} = N_0 \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}}. \quad (4.3.23)$$

Общий характер временной зависимости $N_2(t)$ показан на рис. 15, а) для случая, когда постоянные распада «материнских» и «дочерних» ядер близки. На практике при разумных временах наблюдения показанный пик может быть очень размыт и в сущности не наблюдаем. Рассмотрим частные случаи.

Если $\lambda_1 \ll \lambda_2$, то «материнские» ядра распадаются гораздо медленнее «дочерних», и число последних быстро достигает своего максимального значения. Из (4.3.23) при $\lambda_2 \rightarrow \infty$ следует, что в начальный момент времени это максимальное значение равно. Но такое быстрое «подстраивание» числа «дочерних» ядер под $N_{2,\max} \approx N_0 \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ число «материнских» происходит в каждый момент времени, так что закон изменения их числа должен иметь

вид $N_2(t) \approx N_1(t) \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = N_0 \frac{\lambda_1}{\lambda_2} e^{-\lambda_1 t}$. Этот же результат прямо следует из (4.3.5) при $\lambda_2 \rightarrow \infty$. Обращает внимание, что число «дочерних» ядер уменьшается со временем с постоянной распада «материнских» ядер.

Примером может служить радиоактивный распад радия ${}_{88}^{226}\text{Ra}$ с постоянной распада $\lambda_1 = 1,354 \cdot 10^{11} \text{ с}^{-1}$ (период полураспада $T_{1/2}^{(1)} = \ln 2 / \lambda_1 = 1622$ года), продуктом которого является радон ${}_{86}^{222}\text{Rn}$; с постоянной распада $\lambda_2 = 2,097 \cdot 10^{-6} \text{ с}^{-1}$ (период полураспада $T_{1/2}^{(2)} = 3,83$ сут). Если радий поместить в закрытый сосуд, то уже через месяц содержание радона в нем будет лишь на 0,4 % меньше равновесного. Само же равновесное значение, как видно из соотношения $N_2 / N_0 = \lambda_1 / \lambda_2$, составляет лишь около шести миллионных исходного числа атомов радия. Достигнутое значение концентрации радона будет сохраняться неизменным столетиями, в соответствие с периодом полураспада «материнских» ядер (около 1600 лет). Этот случай показан на рис. 15,б. Только на интервалах порядка нескольких тысячелетий станет заметным уменьшение числа атомов радона, хотя период полураспада ядер радона составляет менее 4 сут.

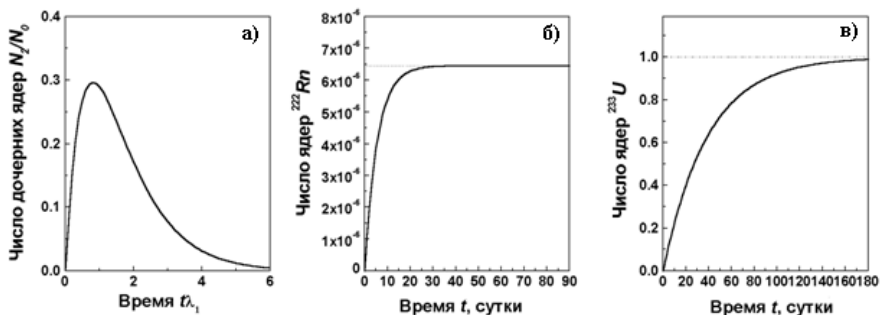


Рис. 15

Кривая на рис. 15,а соответствует близким значениям периода полураспада «материнских» и «дочерних» ядер: $\lambda_2 / \lambda_1 = 1,5$, время показано в единицах среднего времени жизни «материнских» ядер ($t\lambda_1$). При таких заданных условиях отчетливо виден пик в зависимости $N_2(t)$. б – относительное число ядер изотопа радона ${}^{222}_{86}\text{Rn}$, возникающих при радиоактивном распаде радия ${}^{226}_{88}\text{Ra}$. Так как радий живет гораздо дольше радона, устанавливается равновесная концентрация радона $N_2 \sim 6 \cdot 10^{-6} N_0$ (показана пунктиром). По прошествии огромного промежутка времени равновесная концентрация радона будет уменьшаться, причем характерное время задано периодом полураспада ядер радия – около 1600 лет. в – относительное число ядер изотопа урана ${}^{233}_{92}\text{U}$, возникающих при радиоактивном распаде протактиния ${}^{233}_{91}\text{Pa}$. Поскольку время жизни урана намного больше времени жизни ядер протактиния, последние достаточно быстро исчезают, и относительная концентрация ядер урана становится близкой к единице. Затем ядра урана распадаются со своей постоянной распада

(уменьшение их числа на графике не видно из-за огромного периода полураспада – порядка 16 тыс. лет)

Достаточно часто при распаде «материнских» ядер возникает цепочка «дочерних» радиоактивных продуктов, а не один лишь тип ядер. Обычно они все распадаются гораздо быстрее «материнских» ядер. В этом случае полученное нами соотношение для числа «материнских» и равновесного числа «дочерних» ядер обобщается очевидным образом:

$$\lambda_1 N_1 = \lambda_2 N_2 = \lambda_3 N_3 = \dots = \lambda_k N_k;$$
$$\lambda_1 \ll \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_k. \quad (4.3.24)$$

В обратном случае $\lambda_1 \gg \lambda_2$ «материнские» ядра распадаются гораздо быстрее «дочерних», так что уже через несколько средних времен жизни «материнских» ядер они почти исчезают, а число «дочерних» ядер становится почти равным начальному числу «материнских»: $N_2 \approx N_0$. Далее «дочерние» ядра распадаются по обычному закону со своей собственной постоянной распада λ_2 : $N_2 = N_0 \exp(-\lambda_2 t)$.

Примером может служить распад протактиния ${}_{91}^{233}\text{Pa}$ ($T_{1/2}^{(1)} = 27$ сут, $\lambda_1 = 2,97 \cdot 10^{-7} \text{ с}^{-1}$), в результате которого образуется изотоп урана ${}_{92}^{233}\text{U}$ ($T_{1/2}^{(2)} = 1,592 \cdot 10^5$ лет, $\lambda_2 = 1,38 \cdot 10^{-13} \text{ с}^{-1}$). Этому случаю соответствует кривая на рис. 15,в. В отличие от предыдущего случая, равновесная концентрация «дочерних» ядер близка к единице, а ее уменьшение происходит в соответствии с периодом полураспада «дочерних» ядер (в нашем примере – урана).

Пример 4.3.3. При определении периода полураспада $T_{1/2}$ короткоживущего радиоактивного изотопа использован счетчик импульсов. За время $\Delta t = 1$ мин в начале наблюдения ($t = 0$) было насчитано $\delta n_1 = 250$ имп., а по истечении времени $t = 1$ ч счетчик насчитал $\delta n_2 = 92$ имп. за тот же интервал Δt . Определить

постоянную радиоактивного распада λ и период полураспада $T_{1/2}$ изотопа.

Решение. Число импульсов Δn , регистрируемых счетчиком за интервал времени Δt , пропорционально числу распавшихся атомов ΔN . Таким образом, при первом измерении

$$\Delta n_1 = k\Delta N_1 = kN_1(1 - e^{-\lambda\Delta t}), \quad (4.3.25)$$

где N_1 — количество радиоактивных атомов к моменту начала отсчета; k — коэффициент пропорциональности (постоянный для данного прибора и данного расположения прибора относительно радиоактивного изотопа). При повторном измерении (предполагается, что расположение приборов осталось прежним)

$$\Delta n_2 = k\Delta N_2 = kN_2(1 - e^{-\lambda\Delta t}), \quad (4.3.26)$$

где N_2 — количество радиоактивных атомов к моменту начала второго измерения.

Разделив соотношение (4.3.25) на выражение (4.3.26) и приняв во внимание, что интервал измерения Δt одинаков в обоих случаях, а N_1 и N_2 связаны между собой соотношением $N_2 = N_1 e^{-\lambda t}$, получим

$$\frac{\Delta n_1}{\Delta n_2} = e^{\lambda t}. \quad (4.3.27)$$

где t — время, прошедшее от первого до второго измерения. Для вычисления λ выражение (4.3.25) следует прологарифмировать, откуда

$$\lambda = \frac{1}{t} \ln \frac{\Delta n_1}{\Delta n_2} = \frac{1}{3600} \times \ln \frac{250}{92} = 2,78 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1};$$

$$T_{1/2} = \frac{0,693}{\lambda} = 2496 \text{ с} = 41,6 \text{ мин.} \quad (4.3.28)$$

Пример 4.3.4. Природный уран представляет собой смесь трех изотопов: ^{234}U , ^{235}U , и ^{238}U . Содержание урана ^{234}U ничтожно (0,006 %), на долю ^{235}U приходится 0,71 %, а остальную массу

(99,28 %) составляет уран ^{238}U . Периоды полураспада этих изотопов соответственно равны $2,5 \cdot 10^5$ лет, $7,1 \cdot 10^8$ лет и $4,5 \cdot 10^9$ лет. Вычислить активность каждого из изотопов и процентную долю радиоактивности, вносимую каждым изотопом в общую радиоактивность образца природного урана массой $m = 1$ кг.

Решение. Массы изотопов в образце природного урана равны $m_{234} = 6 \cdot 10^{-5} m$, $m_{235} = 7,1 \cdot 10^{-3} m$ и $m_{238} = 99,28 \cdot 10^{-2} m$ соответственно. Активность каждого изотопа равна

$$A_i = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} N_i = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \cdot \frac{N_A m_i}{\mu_i},$$

где μ_i – молекулярная масса изотопа, N_A – число Авогадро, $T_{1/2}$ – период полураспада данного изотопа. Отсюда находим искомую активность для каждого из изотопов:

$$A_{234} = \frac{0,693}{2,5 \cdot 10^5} \cdot \frac{6,02 \cdot 10^{23} \times 6 \cdot 10^{-5}}{234 \cdot 10^{-3}} = 4,28 \cdot 10^{14} \text{ год}^{-1} = 1,36 \cdot 10^7 \text{ Бк};$$

$$A_{235} = \frac{0,693}{7,1 \cdot 10^8} \cdot \frac{6,02 \cdot 10^{23} \times 7,1 \cdot 10^{-3}}{235 \cdot 10^{-3}} = 1,78 \cdot 10^{13} \text{ год}^{-1} = 5,63 \cdot 10^5 \text{ Бк};$$

$$A_{238} = \frac{0,693}{4,5 \cdot 10^9} \cdot \frac{6,02 \cdot 10^{23} \times 0,9928}{238 \cdot 10^{-3}} = 3,87 \cdot 10^{14} \text{ год}^{-1} = 1,23 \cdot 10^7 \text{ Бк}.$$

Полная активность образца получается при сложении активностей различных изотопов:

$$A = A_{234} + A_{235} + A_{238} = 2,65 \cdot 10^7 \text{ Бк}. \quad (4.3.29)$$

Процентная доля радиоактивности, вносимая каждым из изотопов в общую радиоактивность природного урана, определится, очевидно, отношением активности изотопа к полной активности образца:

$$\eta_{234} = 100\% \frac{A_{234}}{A} = 51\%, \quad \eta_{235} = 100\% \frac{A_{235}}{A} = 2\%,$$

$$\eta_{238} = 100\% \frac{A_{238}}{A} = 47\%. \quad (4.3.30)$$

Пример 4.3.5. Так как свинец (Pb), содержащийся в урановой руде (U), является конечным продуктом распада уранового ряда, то из отношения количества урана в руде к количеству свинца в ней можно определить возраст руды. Определить возраст образца урановой руды, если известно, что на 1 кг урана $^{238}_{92}\text{U}$ в этом образце содержится 320 г свинца $^{206}_{82}\text{Pb}$.

Решение. Согласно основному закону радиоактивного распада (4.3.1):

$$N_{\text{Pb}} = N_U (1 - e^{-\ln 2 t / T_U}),$$

или

$$\frac{M_{\text{Pb}}}{A_{\text{Pb}}} = \frac{M_U}{A_U} (1 - e^{-\ln 2 t / T_U}).$$

Используя данные таблицы П.8, находим $t = 3 \cdot 10^9$ лет.

Пример 4.3.6. Человек массой 75 кг облучен α -частицами. Поглощенная доза составила 24 мрад. Вычислить: 1) поглощенную телом человека энергию и 2) эквивалентную полученную дозу.

Решение. Поглощенная доза $D = 24 \cdot 10^{-3}$ рад = $24 \cdot 10^{-5}$ Гр. Поглощенная энергия $E = mD = 18$ мДж. В табл. П. 9 находим коэффициент качества α -излучения: $Q = 20$. Отсюда вычисляем эквивалентную дозу: $DQ = 4,8$ мЗв = 0,48 бэр.

Пример 4.3.7. Время жизни радиоактивного элемента в среднем составляет $\tau = 10$ дней. Какова вероятность того, что произвольный атом этого элемента распадается в течение пятого дня?

Решение. Согласно теореме перемножения вероятностей, вероятность распада атома в интервале от t до $t + dt$ равна

$$p(t) dt = \frac{dt}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}},$$

где $e^{-\frac{t}{\tau}}$ – вероятность существования атома после момента времени t ; τ – среднее время жизни элемента, равное 10 дням.

Вероятность распада атома в течение пятого дня

$$\langle p \rangle = \int_4^5 p(t) dt = \frac{1}{\tau} \int_4^5 e^{-t/\tau} dt = e^{-0,4} - e^{-0,5} = 0,064.$$

Пример 4.3.8. *Период полураспада свободного нейтрона ~ 12 мин. Какой энергией (в МэВ) должен обладать нейтрон, чтобы с вероятностью 50 % он мог выжить, преодолев расстояние в 10 световых лет от звезды до Земли?*

Решение. Для преодоления столь огромного расстояния нейтрон должен двигаться со скоростью, близкой к скорости света, и поэтому обладать очень большой энергией. Чтобы достигнуть Земли, ему отведено время $t = 10$ лет, или около $\pi \cdot 10^8$ с. Согласно условию задачи, только половина нейтронов должна «выжить» к концу этого пути; отсюда получаем, что время, затрачиваемое нейтроном в его собственной системе отсчета на покрытие этого расстояния, должно быть равно периоду полураспада нейтрона, т.е. $t_0 = 12$ мин. Используя преобразование Лоренца, имеем

$$t = t_0 / \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = t_0 \cdot \frac{m_n c^2}{E_n}$$

Таким образом,

$$E = m_n \cdot \frac{\tau}{t_0} \approx (4,4 \cdot 10^5)(940 \text{ МэВ}) \approx 4 \cdot 10^8 \text{ МэВ}.$$

Пример 4.3.9. *Вычислить толщину слоя половинного ослабления $x_{1/2}$ параллельного пучка γ -излучения для воды, если линейный коэффициент ослабления $\mu = 0,047 \text{ см}^{-1}$.*

Решение. При прохождении γ -излучения через слой вещества происходит поглощение пучка γ -излучения за счет трех факторов: фотоэффекта, эффекта Комптона и образования пар (электрон – позитрон). В результате действия этих трех факторов

интенсивность γ -излучения экспоненциально убывает в зависимости от толщины слоя:

$$I = I_0 e^{-\mu x}. \quad (4.3.31)$$

Пройдя поглощающий слой толщиной, равной толщине слоя половинного ослабления $x_{1/2}$, пучок γ -излучения будет иметь интенсивность $I = I_0 / 2$. Подставив значения I и x в формулу (4.3.31), получим $I_0 / 2 = I_0 e^{-\mu x_{1/2}}$, или (после сокращения на I_0) $1/2 = e^{-\mu x_{1/2}}$.

Прологарифмировав последнее выражение, получим искомое значение толщины слоя половинного ослабления:

$$x_{1/2} = \ln 2 / \mu. \quad (4.3.32)$$

Подставив в формулу (4.3.29) значения μ и $\ln 2$, найдем $x_{1/2}$

$$x_{1/2} = 14,7 \text{ см.}$$

Таким образом, слой воды толщиной в 14,7 см снижает интенсивность γ -излучения в два раза.

Пример 4.3.10. Точечный радиоактивный источник ^{60}Co находится в центре свинцового сферического контейнера с толщиной стенок $x = 1$ см и наружным радиусом $R = 20$ см. Определить максимальную активность A_{max} источника, который можно хранить в контейнере, если допустимая плотность потока $J_{\text{доп}}$ -фотонов при выходе из контейнера равна $8 \cdot 10^6 \text{ с}^{-1} \text{ м}^{-2}$.

Принять, что при каждом акте распада ядра ^{60}Co испускается $n = 2$ γ -фотона, средняя энергия которых $\langle \varepsilon \rangle = 1,25$ МэВ.

Решение. Активность радиоактивного источника связана с потоком излучения γ -фотонов соотношением $\Phi = An$, где n – число γ -фотонов, испускаемых при одном акте распада, откуда

$$A = \Phi / n. \quad (4.3.33)$$

Поток Φ , входящий в эту формулу, выразим через плотность потока. Плотность потока на расстоянии R от точечного источника излучений

$$J_1 = \Phi / (4\pi R^2). \quad (4.3.34)$$

После прохождения излучений через свинцовую стенку контейнера плотность потока уменьшается и выражается соотношением

$$J_2 = J_1 e^{-\mu x}. \quad (4.3.35)$$

Выражая отсюда J_1 и подставляя в формулу (4.3.23), получаем

$$J_2 e^{\mu x} = \Phi / (4\pi R^2), \quad (4.3.36)$$

откуда

$$\Phi = 4\pi R^2 J_2 e^{\mu x}. \quad (4.3.37)$$

Подставляя выражение для Φ в формулу (4.3.33), находим

$$A = 4\pi R^2 J_2 e^{\mu x} / n. \quad (4.3.38)$$

Если в полученном выражении принять $J_2 = J_{\text{доп}}$, то эта формула будет выражать искомую максимальную активность источника, который можно хранить в контейнере

$$A_{\text{max}} = 4\pi R^2 J_{\text{доп}} e^{\mu x} / n. \quad (4.3.39)$$

По графику на рис. 14 находим, что линейный коэффициент ослабления μ для γ -фотонов с энергией $\varepsilon = 1,25$ МэВ равен $0,64 \text{ см}^{-1}$.

Выражая численные значения, входящие в выражение (4.3.39), в единицах СИ и выполняя вычисления, находим

$$A_{\text{max}} = 3,8 \text{ МБк.}$$

Пример 4.3.11. *Космическое излучение на уровне моря на экваторе образует в воздухе объемом $\Delta V = 1 \text{ см}^3$ в среднем $N = 24$ пары ионов за время $\Delta t = 10$ с. Определить экспозиционную дозу X , получаемую человеком за время $t = 1$ год.*

Решение. Экспозиционную дозу, получаемую человеком, можно выразить по формуле

$$X = \frac{dX}{dt} \cdot t, \quad (4.3.40)$$

где $\frac{dX}{dt}$ – мощность экспозиционной дозы излучения. Мощность

дозы $\frac{dX}{dt} = \frac{Q}{m\Delta t}$, где Q – заряд ионов одного знака, образуемых излучением за время Δt в воздухе массой $m = \rho V$, где ρ –

плотность воздуха; V – объем. Заряд всех ионов одного знака:
 $Q = |e|N$.

Таким образом,

$$X = \frac{dX}{dt} \cdot t = \frac{Q}{m\Delta t} t = \frac{|e|N \cdot t}{\rho V \Delta t}. \quad (4.3.41)$$

Подставляя численные значения, выраженные в единицах СИ, получим

$$X = 9,41 \text{ мк Кл/кг.}$$

Пример 4.3.12. *Изотоп золота ^{198}Au , используемый для терапии рака, имеет период полураспада $T_{1/2} = 2,7$ сут. Вычислить массу препарата, необходимую для получения активности $A = 250$ Ки.*

Решение. Исходя из определения активности, сразу находим из (4.3.4), что необходимое количество атомов $N = AT_{1/2} / \ln 2$. Период полураспада, выраженный в секундах, равен $T_{1/2} = 2,7 \times 86400 = 2,33 \cdot 10^5$ с. Активность $A = 250$ Ки $= 9,25 \cdot 10^{12}$ Бк. Подставляя эти численные данные, находим: $N = 3,11 \cdot 10^{18}$. В расчете подобного рода разница в массах протона и нейтрона и дефект массы ядра несуществен, так что массу атома золота находим как $m_{\text{Au}} = (Z + N)m_p = 198 \times 1,67 \cdot 10^{-27}$ кг. Искомая масса препарата тогда равна $m = Nm_{\text{Au}} = 1,03 \cdot 10^{-6}$ кг $= 1,03$ мг.

4.3.3. Задачи для самостоятельной работы

Закон радиоактивного распада. Активность. Радиоактивное равновесие

Задача 4.3.1. Радий в результате спонтанного распада излучает α -частицы (ядра гелия), количество которых можно подсчитать, собрав за определенное время t весь выделившийся гелий. В

результате такого эксперимента в нормальных условиях (Н.У.) выделяется $0,578 \text{ мм}^3$ гелия в течение 587 дней и за то же время подсчитано $1,648 \times 10^{16}$ α -частиц. Из результатов этого опыта

определить число Авогадро.
$$\left(\rho V = \frac{m}{\mu} RT \right) = \frac{N}{N_A} RT.$$

Задача 4.3.2. Известно, что $M = 1 \text{ г}$ радия за время $\Delta t = 1 \text{ с}$ дает $3,7 \cdot 10^{10}$ ядер гелия. Каково будет давление гелия, образующегося в герметичной ампуле объемом $V = 1 \text{ см}^3$, в которой в течение года находилось $m = 100 \text{ мг}$ радия? Температура ампулы $t = 15^\circ \text{С}$.

Задача 4.3.3. Изотоп водорода ${}^3_1\text{H}$ (*тритий*) имеет период полураспада 12,33 года. Его можно использовать для датирования предметов, возраст которых не превышает 100 лет. Тритий образуется в верхних слоях атмосферы под действием космических лучей и переносится на Землю с дождем. Определите возраст бутылки вина, если активность трития в нем составляет 1/10 активности в молодом вине. (41 год)

Задача 4.3.4. При распаде радиоактивно изотопа ${}^{210}\text{P}$ в течение времени $\Delta t = 1 \text{ ч}$ образовался ${}^4\text{He}$, который при нормальных условиях занял объем $V = 89,5 \text{ см}^3$. Определить период полураспада.

Задача 4.3.5. В микрокалориметр с теплоемкостью $C = 0,1 \text{ кДж/К}$ помещена масса $M = 1 \text{ мг}$ изотопа кремния ${}^{31}\text{Si}$. При распаде ядра ${}^{31}\text{Si}$ выделяется энергия $\Delta Q = 4,4 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$. Период полураспада изотопа кремния $T = 2 \text{ ч } 36 \text{ мин}$. На сколько повысится температура калориметра через 52 минуты после начала опыта?

Задача 4.3.6. Чтобы определить возраст древней ткани, была измерена в ней концентрация атомов радиоуглерода ${}^{14}\text{C}$. Она оказалась соответствующей 9,2 распадам в минуту на один грамм углерода. Концентрация ${}^{14}\text{C}$ в живых растениях соответствует 14 распадам в минуту на один грамм углерода. Период полураспада ${}^{14}\text{C}$ равен 5730 лет. Определить возраст древней ткани.

Задача 4.3.7. Какова вероятность W того, что в данный атом в изотопе радиоактивного иода ^{131}I распадается в течение ближайшей секунды? ($1,0 \cdot 10^{-6}$)

Задача 4.3.8. Определить постоянные распада λ изотопов радия $^{220}_{88}\text{Ra}$ и $^{226}_{88}\text{Ra}$. ($\lambda_{^{220}\text{Ra}} = 30,1 \text{ с}^{-1}$; $\lambda_{^{226}\text{Ra}} = 13,7 \text{ пс}^{-1}$)

Задача 4.3.9. Постоянная распада λ рубидия ^{89}Rb равна $0,00077 \text{ с}^{-1}$. Определить его период полураспада $T_{1/2}$. (15 мин)

Задача 4.3.10. Какая часть начального количества атомов распадается за один год в радиоактивном изотопе тория ^{229}Th ? ($0,94 \cdot 10^{-4}$)

Задача 4.3.11. Какая часть начального количества атомов радиоактивного актиния ^{225}Ac останется: 1) через 5 сут? 2) через 15 сут? ($1 - 0,71$; $2 - 0,35$)

Задача 4.3.12. За один год начальное количество радиоактивного изотопа уменьшилось в три раза. Во сколько раз оно уменьшится за два года? (в 9 раз)

Задача 4.3.13. За какое время t распадается $1/4$ начального количества ядер радиоактивного изотопа, если период его полураспада $T_{1/2} = 24 \text{ ч}$? ($9,96 \text{ ч}$)

Задача 4.3.14. За время $t = 8$ сут распалось $3/4$ начального количества ядер радиоактивного изотопа. Определить период полураспада $T_{1/2}$. (4 сут)

Задача 4.3.15. Период полураспада $T_{1/2}$ радиоактивного нуклида равен 1 ч. Определить среднюю продолжительность τ жизни этого нуклида? (1,44 ч)

Задача 4.3.16. Какая часть начального количества радиоактивного нуклида распадается за время t , равное средней продолжительности жизни этого нуклида? (63,2 %)

Задача 4.3.17. Определить число N атомов, распадающихся в радиоактивном изотопе за время $t = 10 \text{ с}$, если его активность $A = 0,1 \text{ МБк}$. Считать активность в течение указанного времени постоянной. (10^6)

Задача 4.3.18. За время t активность A препарата уменьшилась в 250 раз. Скольким периодам полураспада $T_{1/2}$ равен промежуток времени t ? ($t = 8,0T_{1/2}$)

Задача 4.3.19. За время t сут активность изотопа уменьшилась от $A_1 = 118$ ГБк до $A_2 = 7,4$ ГБк. Определить период полураспада $T_{1/2}$ этого нуклида. (6,0 ч)

Задача 4.3.20. На сколько процентов снизится активность A изотопа иридия ^{192}Ir за время $t = 30$ сут? (На 24,5 %)

Задача 4.3.21. Определить промежуток времени τ , в течение которого активность A изотопа стронция ^{90}Sr уменьшится: 1) в $k_1 = 10$ раз? 2) в $k_2 = 100$ раз? (1 – 95 лет; 2 – 190 лет)

Задача 4.3.22. Счетчик Гейгера, установленный вблизи препарата радиоактивного изотопа серебра, регистрирует поток β -частиц. При первом измерении счетчик давал 87 отсчетов в секунду, а по истечении времени $t = 1$ сут число отсчетов в секунду уменьшилось до 22. Определить период полураспада $T_{1/2}$ изотопа. (0,5 сут)

Задача 4.3.23. Определить активность A препарата фосфора ^{32}P массой $m = 1$ мг. (10,5 ТБк)

Задача 4.3.24. Вычислить удельные активности a : 1) кобальта ^{60}Co , 2) стронция ^{90}Sr , 3) радия ^{226}Ra . (1 – 41,8 ТБк/г; 2 – 5,13 ТБк/г; 3 – 36,5 ГБк/г)

Задача 4.3.25. Найти массу m_1 урана ^{238}U , имеющего такую же активность, как препарат стронция ^{90}Sr массой $m_2 = 1$ мг. (413 кг)

Задача 4.3.26. Определить массу m_1 радона ^{222}Rn , находящегося в радиоактивном равновесии с радием ^{226}Ra массой $m_2 = 1$ г. (6,41 мкг)

Задача 4.3.27. Уран ^{234}U является продуктом распада наиболее распространенного изотопа урана ^{238}U . Определить период

полураспада $T_{1/2}$ урана ^{234}U , если его массовая доля в естественном уране равна $5,7 \cdot 10^{-5}$. ($2,6 \cdot 10^5$ лет)

Задача 4.3.28. Радиоактивный изотоп $^{22}_{11}\text{Na}$ излучает γ -кванты энергией $\varepsilon = 1,28$ МэВ. Определить мощность P гамма-излучения и энергию W , излучаемую за время $t = 5$ мин изотопом натрия массой $m = 5$ г. Считать, что при каждом акте распада излучается один фотон. ($P = 236$ Вт; $W = 70,9$ кДж)

Задача 4.3.29. Точечный изотропный радиоактивный источник создает на расстоянии $r = 1$ м интенсивность гамма-излучения $I = 1,6$ мВт/м². Принимая, что при каждом акте распада ядра излучается один γ -квант с энергией $\varepsilon = 1,33$ МэВ, определить активность A источника. (94,5 ГБк)

Задача 4.3.30. Определить интенсивность I гамма-излучения на расстоянии $r = 5$ см от точечного изотропного радиоактивного источника активностью $A = 148$ ГБк. Считать, что при каждом акте распада излучается в среднем $n = 1,8$ фотон с энергией $\varepsilon = 0,51$ МэВ каждый. ($0,7$ Вт/м²)

Элементы дозиметрии

Задача 4.3.31. Вычислить предельную недельную норму полетов на авиалайнерах, если предельная допустимая доза для населения составляет 0,5 бэр за год, а мощность эквивалентной дозы, получаемой вследствие космического излучения равна 0,7 мбэр/ч (соответствует высоте 10–12 км). (13 ч в неделю)

Задача 4.3.32. При типичной рентгенокопии грудной клетки человек получает дозу 25 мбэр. Если масса облученной части тела составляет половину массы пациента, равной 80 кг, то, какое количество энергии излучения поглощено телом? Коэффициент качества излучения Q принять равным 0,85. (11,8 мДж)

Задача 4.3.33. Взрослый человек получает с пищей около 0,10 мкКи изотопа $^{40}_{19}\text{K}$. Сколько распадов происходит в 1 с? (3700 расп./с)

Задача 4.3.34. Человек получил летальную дозу облучения 300 рад. Какова поглощенная телом энергия, если облучение действовало во всем объеме тела, а масса человека равна 80 кг. (240 Дж)

Задача 4.3.35. Какая доля всех молекул воздуха при нормальных условиях ионизируется рентгеновским излучением при экспозиционной дозе $X = 1 \text{ Р}$? Молекулярная масса воздуха $M = 28,97 \text{ г/моль}$. ($7,76 \cdot 10^{-11}$)

Задача 4.3.36. Воздух при нормальных условиях облучается γ -излучением. Определить энергию W , поглощаемую воздухом массой $m = 5 \text{ г}$ при экспозиционной дозе излучения $X = 1 \text{ Р}$. (43,9 мкДж)

Задача 4.3.37 Под действием космических лучей в воздухе объемом $V = 1 \text{ см}^3$ на уровне моря образуется в среднем 120 пар ионов в минуту. Определить экспозиционную дозу X излучения, действию которой подвергается человек за время $t = 1 \text{ сут}$. Молярная масса воздуха $M = 28,97 \text{ г/моль}$, стандартный молярный объем V_m при нормальных условиях равен 22,4 л/моль. (21,4 нКл/кг)

Задача 4.3.38. На расстоянии $l = 10 \text{ см}$ от точечного источника γ -излучения мощность экспозиционной дозы $X = 0,86 \text{ мкА/кг}$. На каком расстоянии от источника l_{\min} экспозиционная доза X излучения за рабочий день продолжительностью 6 ч не превысит предельно допустимую норму 5,16 мкКл/кг? Поглощением γ -лучей в воздухе пренебречь. (6 м)

Задача 4.3.39. Мощность экспозиционной дозы \dot{X} гамма-излучения на расстоянии $r_1 = 40 \text{ см}$ от точечного источника равна 4,30 мкА/кг. Определить время, в течение которого можно находиться на расстоянии $r_2 = 6 \text{ м}$ от источника, если предельно допустимая экспозиционная доза равна $X_{\max} = 5,16 \text{ мкКл/кг}$. Поглощением γ -лучей в воздухе пренебречь. (4,5 мин)

Задача 4.3.40. Экранированный источник γ -излучения создает на расстоянии 1,0 м дозу 0,055 рад/ч для среднего человека. Допустимая максимальная доза составляет 5,0 рэм/год. Как близко

от источника можно работать, если продолжительность рабочей недели составляет 35 ч? Предполагается, что интенсивность излучения убывает обратно пропорционально квадрату расстояния (в действительности из-за поглощения в воздухе интенсивность излучения убывает еще быстрее, поэтому полученный вами ответ в действительности соответствует значению больше допустимого). (4,5 м)

Задача 4.3.41. Источник β -излучателя ${}^{32}_{15}\text{P}$ (в виде соли NaHPO_4) имплантирован в орган, который должен получить в лечебных целях 5000 рад. Период полураспада изотопа ${}^{32}_{15}\text{P}$ равен 14,3 сут; 1 мКи соответствует 1 рад/мин. На какое время следует имплантировать источник? (90 ч)

4.4. Фундаментальные взаимодействия. Физика элементарных частиц

4.4.1. Основные понятия, законы и формулы

• В настоящее время известны четыре *фундаментальных* (т.е. не сводящихся друг к другу) *взаимодействия*.

Сильное взаимодействие имеет характер притяжения между большинством элементарных частиц, в частности оно обеспечивает связь нуклонов (протонов и нейтронов) в атомных ядрах. Это взаимодействие существенно только на очень малых расстояниях, сравнимых с размерами ядер ($\sim 10^{-13}$ см), т.е. является короткодействующим и на этих расстояниях значительно (более чем в сто раз) превосходит электромагнитное взаимодействие. Количественно сильное взаимодействие характеризуется параметром

$$\alpha_s = \frac{g^2}{\hbar c} = 14,6, \quad (4.4.1)$$

где g – константа сильного взаимодействия (не путать с ускорением свободного падения); \hbar – постоянная Планка; c – скорость света.

Электромагнитное взаимодействие обуславливает связь электрически заряженных частиц в атомах и молекулах, распространяется на значительные расстояния и описывается известными законами электричества и магнетизма. Это взаимодействие на два порядка слабее сильного и характеризуется параметром

$$\alpha_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \approx \frac{1}{137}, \quad (4.4.2)$$

где e – заряд электрона, ϵ_0 – электрическая постоянная.

Слабое взаимодействие проявляется при распаде некоторых элементарных частиц (например, при β -распаде нейтрона: $n^0 \rightarrow p^+ + e^- + \bar{\nu}_e$, где p^+ – протон, e^- – электрон, $\bar{\nu}_e$ – электронное антинейтрино). Оно осуществляется на очень малых расстояниях ($\sim 10^{-16}$ м) и играет важную роль в термоядерных реакциях, поэтому активно участвует в эволюции звезд и других космических объектов. Параметр, характеризующий слабое взаимодействие,

$$\alpha_w = \frac{G_F (m_p c^2)^2}{(\hbar c)^3} \approx 10^{-10}, \quad (4.4.3)$$

где $G_F \cong 1,166 \cdot 10^{-5} (\hbar c)^3 \text{ ГэВ}^2 \cong 1,4 \cdot 10^{-62} \text{ Дж} \cdot \text{м}^3$ – константа Ферми, m_p – масса протона.

Наконец, *гравитационное взаимодействие* является самым универсальным, так как осуществляется между всеми материальными объектами. Оно распространяется на очень большие расстояния (как и электромагнитное), однако, в силу своей малости, играет несущественную роль в микромире вплоть до расстояний порядка 10^{-33} см (так называемая *планковская длина*). Ожидается, что на столь малых расстояниях гравитационное взаимодействие становится «равноправным» участником событий. С другой стороны, гравитация – основной фактор, определяющий поведение объектов мегамира. Параметр, характеризующий «интенсивность» гравитационного взаимодействия,

$$\alpha_g = \left[\frac{\sqrt{(Gm_p)^2}}{\hbar c} \right] \cong 5,3 \cdot 10^{-18}, \quad (4.4.4)$$

где $G \cong 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}$ – гравитационная постоянная. Величину $\sqrt{Gm_p}$ иногда называют гравитационным зарядом протона.

Все эти взаимодействия в масштабах микромира имеют по своей природе квантовый характер и могут интерпретироваться как обмен квантами соответствующего поля. Более того, фактически теряется разница между частицами вещества и частицами (квантами) поля, поэтому, в соответствии с общепринятой в настоящее время *стандартной моделью*, все известные на сегодняшний день элементарные частицы делятся на два больших класса: частицы-источники взаимодействий и частицы-переносчики взаимодействий. Частицы первого класса (о них шла речь в предыдущем разделе), в свою очередь, подразделяются на две группы, отличающиеся тем, что частицы первой группы – *адроны* – участвуют во всех четырех фундаментальных взаимодействиях, включая сильные, а частицы второй группы – *лептоны* – не участвуют в сильных взаимодействиях. (Названия «адрон» и «лептон» происходят от греческих слов «тяжелый» и «легкий».) К адронам относится очень много различных элементарных частиц, большинство из которых имеет своего «двойника» – *античастицу*. Как правило, это довольно массивные частицы, с малым временем жизни. Исключение составляют нуклоны, причем считается, что время жизни протона превышает возраст Вселенной. Лептонами являются шесть элементарных частиц: электрон e , *мюон* μ и *таон* τ , а также связанные с ними три *нейтрино*: ν_e , ν_μ и ν_τ (см. табл. 4.1). Кроме того, каждая из этих частиц также имеет своего «двойника» – соответствующую античастицу. Все лептоны настолько похожи друг на друга по некоторым, специфическим в масштабах микромира свойствам, что мюон и таон можно было бы назвать тяжелыми электронами, а нейтрино – электронами, «потерявшими» заряд и массу. В то же

время, в отличие от электронов, мюоны и таоны радиоактивны, а все нейтрино чрезвычайно слабо взаимодействуют с веществом и поэтому настолько неуловимы, что, например, их поток проходит через Солнце, практически не ослабляясь.

Стандартная модель предполагает, что все адроны являются суперпозицией нескольких *кварков* и *антикварков* (см. табл. 4.2).

Генеральное направление в физике микромира – установление единой первопричины всех четырех фундаментальных взаимодействий, т.е. создание такой теории, в которой все известные сейчас взаимодействия были бы частными случаями одного фундаментального взаимодействия. Первый серьезный успех на пути к единому описанию всех взаимодействий был достигнут в конце 1960-х гг., когда удалось найти согласующийся с опытом вариант теории, объединяющий электромагнитное и слабое взаимодействия. Авторам этой *теории электрослабого взаимодействия* А. Саламу, С. Вайнбергу и Ш. Глэшоу в 1979 г. была присуждена Нобелевская премия.

Следующим шагом стала попытка физиков-теоретиков объединить электрослабое и сильное взаимодействия. Речь идет о так называемом *Великом объединении* (Grand Unification), в котором оба названных взаимодействия выступали бы как разные аспекты одного явления. И здесь достигнуты впечатляющие результаты, которые, однако, нуждаются в экспериментальном подтверждении.

Что касается *суперобъединения* всех четырех фундаментальных взаимодействий, то на этом пути делаются только первые шаги. В рамках обычной теории поля, где частицы рассматриваются как точечные, не удастся построить ни одной удовлетворительной квантовой теории гравитации. В настоящее время большие надежды возлагаются на *теорию суперструн*, которая развивается с удивительной скоростью, так как всё больше и больше физиков-теоретиков участвуют в ее разработке.

- Элементарными частицами называются мельчайшие известные в настоящее время частицы материи. Этот термин в значительной мере условен. Характерной особенностью элементарных частиц является их способность к взаимным превращениям.

- Классификация элементарных частиц основана на иерархии фундаментальных взаимодействий в природе. Таких взаимодействий известно четыре: *сильное, электромагнитное, слабое и гравитационное.*

- Элементарные частицы, участвующие во всех видах взаимодействия, называются *адронами*. Они, в свою очередь, подразделяются на *мезоны* (не несущие барионного заряда) и *барионы* (нуклоны и гипероны).

Число адронов достигает 350-ти. Элементарные частицы, не участвующие в сильных взаимодействиях, называются лептонами. Всего их шесть, но для каждой имеется своя античастица. К лептонам относятся электроны, мюоны, таоны и три типа нейтрино.

- Элементарным частицам приписываются следующие квантовые числа, некоторые из них называются зарядами: Q – электрический заряд; L_e – электронный лептонный заряд; L_μ – мюонный лептонный заряд; B – барионный заряд; T – изотопический спин; T_z – проекция изотопического спина на ось z ; S – странность; Y – гиперзаряд.

- Связи между квантовыми числами:

$$S = 2Q - B; \quad (4.4.5)$$

$$Y = B + S; \quad (4.4.6)$$

$$Q = T_z + Y / 2 = T_z + (B + S) / 2. \quad (4.4.7)$$

- При взаимодействии частиц выполняются законы сохранения Q , L и B зарядов (т.е. значения этих зарядов слева и справа в выражении какой-либо реакции должны быть равны). В сильных взаимодействиях выполняются также законы сохранения S (или Y), T и его проекции T_z .

- В 1964 г. была выдвинута гипотеза о том, что все адроны являются композицией сравнительно небольшого числа «истинно» элементарных частиц – кварков, имеющих дробный электрический заряд и не существующих отдельно друг от друга. Предполагается, что есть всего шесть различных типов (ароматов) кварков (d , u , s , c , b , t), каждый из которых может находиться в трех различных состояниях (цветах). Кроме того, каждому кварку соответствует

антикварк. Итого получается 36 кварковых состояний адронной формы материи.

• Некоторые квантовые числа кварков и лептонов приведены в табл. 4.1.

Таблица 4.1

Частица	Q	B	L
e^-	-1	0	1
μ^-	-1	0	1
τ^-	-1	0	1
ν_e	0	0	1
ν_τ	0	0	1
ν_μ	0	0	1
d	-1/3	1/3	0
u	2/3	1/3	0
s	-1/3	1/3	0
c	2/3	1/3	0
b	-1/3	1/3	0
t	2/3	1/3	0

- Квантовые числа античастиц имеют противоположные знаки.
- В табл. 4.2 приведен кварковый состав некоторых адронов.

Таблица 4.2

Частица	Кварковый состав	Масса МэВ
Барионы		
p	(u, u, d)	938,28
n	(u, d, d)	939,57
Λ^0	(u, d, s)	1115,60
Σ^-	(d, d, s)	1197,34
Σ^0	(u, d, s)	1192,46
Σ^+	(u, u, s)	1189,36
Мезоны		

Продолжение табл. 4.2

Частица	Кварковый состав	Масса МэВ
π^-	(d, \bar{u})	139,6
π^0	$(u, \bar{u}), (d, \bar{d}) \dots$	135,0
π^+	(u, \bar{d})	139,6
K^-	(s, \bar{u})	493,7
K^0	(d, \bar{s})	497,7
K^+	(u, \bar{s})	433,7

4.4.2. Методические рекомендации по решению задач

Пример 4.4.1. Выбрать квантовую схему, соответствующую гравитационному взаимодействию.

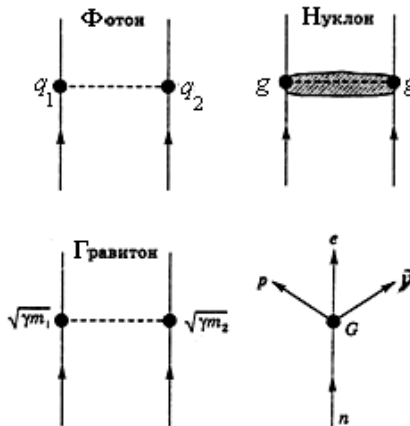


Рис. 16

Решение. На приведенных в примере вариантах ответов (рис. 16) показаны так называемые диаграммы Фейнмана для разных типов фундаментальных взаимодействий. Первая диаграмма относится к электромагнитному взаимодействию, вторая – к сильному, третья – к гравитационному, четвертая – к слабому. Правильным является ответ:

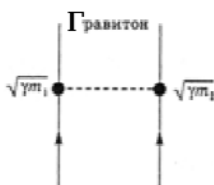


Рис. 17

Пример 4.4.2. На рис. 18 показана кварковая диаграмма β^- -распада нуклона.

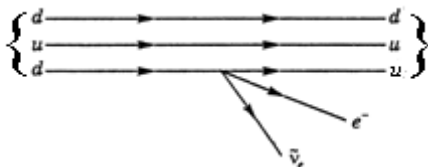


Рис. 18

Определить, какой реакции соответствует эта диаграмма.

Решение. В настоящее время принято считать, что вся материя (в том числе и более сотни микрочастиц – протоны, нейтроны и др.) состоит из двух типов первичных частиц, которые и будем называть элементарными, – лептонов и кварков.

Кварковый состав некоторых барионов и мезонов указан в табл. 4.2.

В начальном состоянии нуклон состоит из двух d -кварков и одного u -кварка. Это – нейтрон. В конечном состоянии нуклон состоит из двух u -кварков и одного d -кварка. Это – протон. Таким образом, рассматриваемая диаграмма соответствует реакции $n \rightarrow p + e^- + \tilde{\nu}_e$.

Пример 4.4.3. Какие схемы мюонного распада возможны: 1) $\mu^- \rightarrow e^- + \tilde{\nu}_e$; 2) $\mu^- \rightarrow e^- + \tilde{\nu}_e + \nu_\mu$; 3) $\mu^- \rightarrow e^- + \tilde{\nu}_e$?

Решение. У μ^- -мюона мюонный лептонный заряд $L_\mu = +1$, электронный лептонный заряд $L_e = 0$. Это начальное состояние (до распада). Следовательно, в конечном состоянии (после распада) лептонные заряды должны иметь те же значения: $L_\mu = +1$ и $L_e = 0$.

В результате распада 1 в конечном состоянии: $L_\mu = 0$, $L_e = +1 - 1 = 0$; следовательно, мюонный лептонный заряд не сохраняется; такой распад в действительности не наблюдался. В результате распада 2 в конечном состоянии $L_\mu = 0 + 0 + 1 = +1$; $L_e = +1 - 1 + 0 = 0$, т.е. оба лептонных заряда сохраняются. И это – один из наиболее распространенных распадов μ^- -мюона. Распад 3 не происходит из-за несохранения электронного лептонного заряда L_e (в конечном состоянии $L_e = +1 + 1 = +2$).

Пример 4.4.4. Мюоны космических лучей образуются, в основном, в стратосфере Земли под действием первичного космического излучения. Оценить энергию, мюона, достигающего поверхности Земли, если он образовался на высоте $H = 40$ км. Потерями энергии мюона на ионизацию воздуха пренебречь.

Решение. Время жизни мюона в лабораторной системе отсчета можно записать в виде:

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \tau_0 \gamma.$$

За время τ мюон успевает долететь до поверхности Земли, двигаясь со скоростью, близкой к скорости света:

$$H = \tau \cdot c = \tau_0 c \cdot \gamma \Rightarrow \gamma = \frac{H}{\tau_0 c} \quad (\text{из этого соотношения можно оценить}$$

Лоренц-фактор γ)

$$\gamma = \frac{40 \cdot 10^3}{2,2 \cdot 10^{-6} \cdot 3 \cdot 10^8} \approx 6,1 \cdot 10^5, \text{ т.е. } V \rightarrow c.$$

Учитывая связь энергии движущегося мюона с энергией покоя, получаем

$$\varepsilon = \gamma m_{\mu} c^2 = m_{\mu} c^2 \frac{H}{\tau_0 c} \approx 6,4 \text{ ГэВ.}$$

Пример 4.4.5. *Определить, какие из самых тяжелых ядер и антинейтронов могут образоваться в реакции $p+p$ при соударении протона с энергией $\varepsilon_p = 3 \cdot 10^{12}$ эВ с неподвижным протоном и на встречных пучках протонов, ускоренных до такой же энергии.*

Решение. Определим сначала скорость центра масс системы двух протонов. Если энергия налетающей частицы E_1 , а покоящейся $m_2 c^2$, то суммарная энергия системы $E = E_1 + m_2 c^2$, а полный импульс системы \vec{p}_1 . Рассматривая эту систему как сложную частицу, находим скорость центра масс

$$\vec{v}_{\text{ц.м.}} = \frac{\vec{p}_1 c}{E_1 + m_2 c^2}.$$

При рассмотрении столкновения частиц полезно использовать инвариантную величину

$$E^2 - p^2 c^2 = m_0^2 c^4 = \text{inv},$$

где E и \vec{p} – полная энергия и импульс системы (до столкновения), m_0 – масса покоя образовавшейся частицы.

В рассматриваемом случае две частицы в системе центра масс (СЦМ) образуют (рождают) одну частицу с массой $Mc^2 = E_{\text{ц.м.}}$, т.е.

$$\begin{aligned} (Mc^2)^2 &= E_{\text{ц.м.}}^2 - 0^2 = (E_1 + m_2 c^2)^2 - p_1^2 c^2 = \\ &= (E_1 + m_2 c^2)^2 - [E_1^2 - (m_2 c^2)^2], \end{aligned}$$

или

$$E_{\text{ц.м.}} = \sqrt{m_1^2 c^4 + m_2^2 c^4 + 2m_2 c^2 \cdot E_1}.$$

Для соударения двух одинаковых протонов $m_1 = m_2 = m_p$ получаем

$$p + p \rightarrow M + \tilde{M} + p + p \text{ и } E_{\text{ц.м.}} = \sqrt{2m_p c^2 (E + m_p c^2)}.$$

Очевидно, что $E_{\text{ц.м.}} \geq \sqrt{[2Am_p + 2m_p] c^4 m_p}$, откуда

$$(2m_p^2 c^4 + 2m_p c^2 E) \geq 4m_p^2 c^4 (A+1)^2;$$

$$A+1 \leq \sqrt{\frac{E}{2m_p c^2} + \frac{1}{2}}.$$

В случае столкновения с неподвижным протоном

$$A \leq \sqrt{\frac{E}{2m_p c^2} + \frac{1}{2}} - 1 \leq 39.$$

В случае столкновения на встречных пучках $E \approx 2E_1$

$$2E_1 = 2Am_p c^2 + 2m_p c^2 \approx 2Am_p c^2,$$

откуда $A \approx 3000$, т.е. практически все известные ядра.

Пример 4.4.6. *Определить пороговую энергию $\varepsilon_{\text{пор}}$ для реакции*

$\tilde{\nu}_e + p \rightarrow n + e^+$ *на покоящемся протоне.*

Решение. Воспользуемся инвариантной величиной $E^2 - p^2 c^2 = inv$, где E и \vec{p} – полная энергия и полный импульс системы. Рассмотрим сначала величину этого инварианта в системе покоящегося протона, а потом в системе центра масс образовавшихся нейтрона и позитрона:

$$(\varepsilon_{\text{пор}} + m_p c^2)^2 - p^2 c^2 = (m_n c^2 + m_e c^2)^2 - 0^2 \text{ или}$$

$$2\varepsilon_{\text{пор}} m_p c^2 + m_p^2 c^4 = m_n^2 c^4 + 2m_n m_e c^4 + m_e^2 c^4, \text{ откуда}$$

$$\varepsilon_{\text{пор}} = \frac{(m_n^2 - m_p^2) + 2m_n m_e + m_e^2}{2m_p} c^2 \approx 1,81 \text{ МэВ}.$$

Пример 4.4.7. Какой минимальной энергией должен обладать движущийся электрон, чтобы при его столкновении с другим покоящимся электроном образовалась электрон-позитронная пара:

$$e^- + e^- \rightarrow e^- + e^- + e^- + e^+?$$

Решение. Используем инвариантную величину

$$E^2 - p^2 c^2 = inv,$$

где E и \vec{p} – полная энергия и полный импульс системы. Минимальная энергия движущегося электрона обеспечивает рождение электрон-позитронной пары, которая в системе центра масс покоится, т.е.

$$\begin{aligned} (E_{\min} + m_e c^2)^2 - (p_e + 0)^2 &= (4m_e c^2)^2 - 0^2; \\ 2m_e c^2 E_{\min} + 2m_e^2 c^4 &= 16m_e^2 c^4, \end{aligned}$$

откуда $E_{\min} = 7m_e c^2$, т.е. пороговая кинетическая энергия электрона равна приблизительно 3 МэВ.

Пример 4.4.8. Найти наименьшее значение энергии γ -кванта, достаточное для осуществления реакции разложения дейтона γ -лучами ${}_1^2\text{D} + h\nu \rightarrow {}_1^1\text{H} + {}_0^1n$.

Решение. Воспользуемся (как и в случае примера 4.4.4) инвариантной величиной $E^2 - p^2 c^2 = inv$, где E и \vec{p} – полная энергия и полный импульс системы $(\varepsilon_\gamma + M_D c^2)^2 - p_\gamma^2 c^2 = (m_p + m_n)^2 - 0^2$.

Откуда следует,

$$\varepsilon_\gamma(\min) = \frac{(m_p + m_n)^2 - M_D^2}{2M_D} c^2 \approx 2,4 \text{ МэВ.}$$

Пример 4.4.9. Показать, что конверсия высокоэнергетического фотона в электрон-позитронную пару может происходить только в присутствии третьего тела.

Решение. Рассмотрим переход в системе покоя пары $e^+ e^-$. По определению, суммарный импульс пары в этой системе равен нулю. Следовательно, фотон в этой системе должен иметь **нулевой**

импульс. Но для фотона энергия и импульс пропорциональны друг другу, и, следовательно, фотон не имеет ни энергии, ни импульса и, очевидно, не может существовать. Таким образом, все переходы фотона в частицы с массой покоя, отличной от нуля, запрещены.

Пример 4.4.10. Чему равны длины волн двух фотонов, возникающих при аннигиляции в состоянии покоя протон-антипротонной пары?

Решение. При аннигиляции в покое протон-антипротонной пары $p + \bar{p} \rightarrow \gamma + \gamma$ выделяется энергия $\Delta E = 2m_p c^2$, которая делится поровну между фотонами в силу закона сохранения импульса. Учитывая связь энергии фотона с длиной волны (или частотой), получаем

$$\varepsilon_\phi = \hbar\omega = \frac{2\pi\hbar c}{\lambda}; \quad \lambda = \frac{2\pi\hbar c}{\varepsilon_\phi} = \frac{2\pi\hbar c}{m_p c^2} \approx 1,32 \text{ фм.}$$

Пример 4.4.11. Электрон и позитрон, образованные квантом с энергией 5,7 МэВ, дают в камере Вильсона, помещенной в магнитное поле, траектории с радиусом кривизны $R = 3$ см. Найти индукцию магнитного поля.

Решение. Сила Лоренца $Bqv = \frac{mv^2}{R}$, откуда $B = \frac{mv}{qR}$. Согласно

формулам теории относительности импульс частицы связан с ее кинетической энергией $E_{\text{кин}}$ соотношением

$pc = \sqrt{E_{\text{кин}}(E_{\text{кин}} + 2m_0c^2)}$, где m_0 – масса покоя частицы. Отсюда $B = \frac{1}{cq} \sqrt{E_{\text{кин}}(E_{\text{кин}} + 2m_0c^2)}$. Если γ -квант с энергией $\varepsilon_\gamma = \hbar\nu$

превращается в пару частиц, то по закону сохранения энергии $\varepsilon_\gamma = 2m_0c^2 + E_{1\text{кин}} + E_{2\text{кин}}$, где m_0c^2 – энергия покоя каждой частицы, $E_{1\text{кин}}$ и $E_{2\text{кин}}$ – кинетические энергии частиц в момент их возникновения. Таким образом, кинетическая энергия каждой частицы $E_{\text{кин}} = 2,34$ МэВ и, подставляя численные данные, получим величину индукции магнитного поля $B = 0,31$ Тл.

Пример 4.4.12. Имеется мезон, который может распасться двумя возможными путями с образованием различных продуктов

распада. Оба процесса характеризуются временами распада τ_1 и τ_2 . Напишите формулу для неопределенности массы этого мезона.

Решение. Запишем отнесенную к единице времени вероятность распада частицы в момент времени t в дифференциальной форме

$$dP(t) \sim - \left(\frac{dt}{\tau_1} + \frac{dt}{\tau_2} \right) = - \frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_1 \tau_2} dt.$$

Отсюда определяем вероятность того, что к моменту времени t мезон еще существует:

$$P(t) \sim \exp \left(- \frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_1 \tau_2} t \right).$$

Таким образом, среднее время жизни мезона

$$\tau_{\text{ср}} = \frac{\tau_1 \tau_2}{\tau_1 + \tau_2}.$$

Согласно принципу неопределенностей Гейзенберга для энергии E имеем

$$\Delta E = \frac{\hbar (\tau_1 + \tau_2)}{\tau_1 \cdot \tau_2}.$$

Следовательно, неопределенность массы частицы

$$\Delta m = \frac{\hbar (\tau_1 + \tau_2)}{\tau_1 \tau_2 c^2}.$$

4.4.3. Задачи для самостоятельной работы

Задача 4.4.1. Протоны с кинетической энергией T налетают на неподвижную водородную мишень. Определить пороговые значения T для следующих реакций:

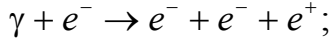
$$1) p + p \rightarrow p + p + p + \tilde{p};$$

$$2) p + p \rightarrow p + p + \pi^0.$$

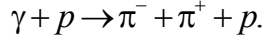
$$(1 - T_{\text{пор}} = 6m_p = 5,6 \text{ ГэВ}; 2 - T_{\text{пор}} = m_\pi (4m_p + m_\pi) / 2m_p = 0,28 \text{ ГэВ})$$

Задача 4.4.2. Определить пороговую энергию γ -кванта, необходимую для образования:

1) электрон-позитронной пары в поле покоящегося электрона:



2) пары $\pi^- - \pi^+$ – мезонов в поле покоящегося протона:

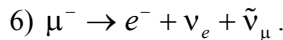
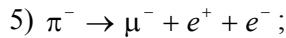
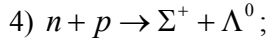
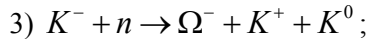
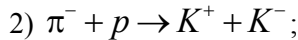
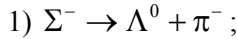


$$(1 - \varepsilon_{\text{пор}} = 4m_e c^2 = 2,04 \text{ МэВ}; 2 - \varepsilon_{\text{пор}} = 2m_\pi c^2 \left(1 + \frac{m_\pi}{m_p}\right) = 320 \text{ МэВ})$$

Задача 4.4.3. Определить пороговую энергию $\varepsilon_{\text{пор}}$ для реакции на покоящемся протоне $\tilde{\nu}_e + p \rightarrow n + e^+$.

$$(\varepsilon_{\text{пор}} = (m_n - m_p + m_e) c^2 \approx 1,81 \text{ МэВ})$$

Задача 4.4.4. Указать причины, запрещающие нижеследующие процессы:



(1 – законом сохранения энергии; 2 – не сохраняется барионный заряд; 3 – не сохраняется электрический заряд; 4 – не сохраняется странность; 5 – не сохраняется лептонный заряд; 6 – не сохраняются электронный и мюонные заряды)

Задача 4.4.5. Известно, что типичная звезда излучает огромное количество энергии и, следовательно, ее масса со временем уменьшается. Почему, тем не менее, можно говорить об определенной массе звезды? Считая, что Солнце за последние 10^9 лет имело постоянную мощность излучения $4 \cdot 10^{26}$ Вт. Определить какую часть своей массы потеряло Солнце за это время. ($\sim 0,01$ %)

Задача 4.4.6. Определить, запрещены или нет перечисленные ниже реакции. Если имеется запрет, то следует указать, с нарушением какого закона сохранения этот запрет связан:

1) $\Lambda \rightarrow p + \pi^0$; 2) $\tilde{p} + p \rightarrow \mu^+ + e^-$; 3) $n \rightarrow p + e^- + \nu_e$;

4) $p \rightarrow n + e^+ + \nu_e$; 5) $\Sigma^+ \rightarrow \Lambda^0 + \pi^+$.

(нарушаются законы сохранения: 1 – заряда; 2 – мюонного и электронного лептонных чисел; 3 – электронного лептонного числа; 4 – энергии; 5 – спина)

Задача 4.4.7. Существует τ^- -лептон и соответствующее ему нейтрино ν_τ . Этот τ^- -лептон в ряде случаев может распадаться на три мюона и два нейтрино. Определить тип этих нейтрино.

($\tau^- \rightarrow \mu^+ + \mu^- + \mu^- + \tilde{\nu}_\mu + \nu_\tau$)

Задача 4.4.8. При распаде $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$ энергия нейтрино $\varepsilon_\nu = pc$ и кинетическая энергия мюона черпается из разности масс пиона и мюона. Определить импульс p нейтрино и кинетическую энергию мюона в МэВ. ($T_\mu = 4,18$ МэВ; $p = \sqrt{2m_\mu T_\mu}$)

Задача 4.4.9. Радиус действия нуклон-нуклонных сил составляет ~ 2 фм. Определить величину массы, которую должна иметь виртуальная частица, чтобы обеспечить такой радиус действия ядерных сил. ($mc^2 \sim 100$ МэВ)

Задача 4.4.10. Массу π^0 -мезона можно измерить с помощью реакции $\pi^- + p \rightarrow \pi^0 + n$ при очень малой кинетической энергии налетающей частицы (которая предполагается равной нулю). Нейтрон вылетает с кинетической энергией 0,60 МэВ. Определить массу π^0 -мезона с помощью законов сохранения энергии и импульса. ($m_\pi c^2 = 133,5$ МэВ)

Задача 4.4.11. Определить энергию, выделяющуюся при аннигиляции: 1) электрона и позитрона; 2) протона и антипротона. (1 – 1,022 МэВ; 2 – 1876,6 МэВ)

Задача 4.4.12. Чему равны длины волн двух фотонов, возникающих при аннигиляции в состоянии покоя протон-антипротонной пары? ($\lambda = 1,132$ фм)

Задача 4.4.13. Покоящаяся частица (например, нейтральный пион) массой m распадается на два фотона. Определите импульс p каждого фотона. ($p = mc/2$)

Задача 4.4.14. Свободный нейтрон радиоактивен. Выбрасывая электрон и антинейтрино, он превращается в протон. Определить суммарную кинетическую энергию T всех частиц, возникающих в процессе превращения нейтрона. Принять, что кинетическая энергия нейтрона равна нулю, а масса покоя антинейтрино пренебрежимо мала. (0,78 МэВ).

Задача 4.4.15. Фотон с энергией $\varepsilon = 3$ МэВ в поле тяжелого ядра превратился в пару электрон–позитрон. Принимая, что кинетическая энергия частиц одинакова, определить кинетическую энергию T каждой частицы. (0,99 МэВ)

Задача 4.4.16. Электрон и позитрон, имевшие одинаковые кинетические энергии, равные 0,24 МэВ, при соударении превратились в два одинаковых фотона. Определить энергию ε фотона и соответствующую ему длину волны λ . (0,75 МэВ; 1,65 пм)

Задача 4.4.17. При столкновении позитрона с электроном часто происходит аннигиляция этих частиц: они превращаются в два γ -кванта. В каком случае энергии этих γ -квантов будут равны и они будут двигаться в противоположных направлениях? Чему будет равна минимальная частота таких γ -квантов? (Если скорость электрона и позитрона равны по модулю и противоположно направлены, $v = 1,24 \cdot 10^{20}$ Гц)

Задача 4.4.18. Нейтральный π -мезон (π^0), распадаясь, превращается в два одинаковых γ -фотона. Определить энергию ε фотона. Кинетической энергией и импульсом мезона пренебречь. (67,5 МэВ)

Задача 4.4.19. При распаде π -мезона на два фотона зафиксированы фотоны с энергиями ε_1 и ε_2 , которые летят в противоположных направлениях. Определить скорость распавшегося мезона. Для фотона связи энергии и импульса имеет вид $\varepsilon = pc$, где c – скорость света.

$$\left(v = c \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \right)$$

Задача 4.4.20. При распаде нейтральной частицы на два фотона обнаружены фотоны, летящие под углами θ_1 и θ_2 к направлению движения частицы. Определите скорость распавшейся частицы.

$$(v = c \frac{\sin(\theta_1 + \theta_2)}{\sin\theta_1 + \sin\theta_2})$$

Задача 4.4.21. Определить кварковый состав π^+ -мезона и протона p . (π^+ имеет состав $u\bar{d}$; p – состав uud)

Задача 4.4.22. При упругом центральном столкновении нейтрона с неподвижным ядром замедляющего вещества кинетическая энергия нейтрона уменьшилась в 1,4 раза. Определите массу ядер замедляющего вещества. ($\mu = 12$ а.е.м. (графит))

Задача 4.4.23. Электрон и позитрон, образованные квантом с энергией 5,7 МэВ, дают в камере Вильсона, помещенной в магнитное поле, траектории радиусом кривизны $R = 3$ см.

Определить индукцию магнитного поля. ($B = \frac{1}{ceR} \sqrt{W(W + 2m_0c^2)}$);

$$B = 0,31 \text{ Тл}$$

Задача 4.4.24. Нейтрон и антинейтрон аннигилируют, превращаясь в два фотона. Определить энергию каждого из возникших фотонов, считая, что начальная энергия аннигилирующих частиц ничтожно мала. (942 МэВ)

Задача 4.4.25. Какая выделилась бы энергия (в Дж), если бы метеор из антивещества массой 1 кг столкнулся с Землей? ($2mc^2 = 1,8 \cdot 10^{17}$ Дж)

Задача 4.4.26. При каком радиусе звезда массой M превратится в «черную дыру», т.е. перестает излучать свет? Оцените этот радиус для Солнца. $G = 6,672 \cdot 10^{-11}$ Н.м²кг⁻² – гравитационная

постоянная; $M_c = 1,97 \cdot 10^{30}$ кг – масса Солнца. ($R < \frac{GM}{c^2}$;

$$R_c \approx 1,5 \text{ км}$$

Задача 4.4.27. Определить красное смещение для звезды массой M и радиусом R , если частота света на поверхности звезды равна

v . Оценить красное смещение для Солнца в видимой области. Какие эффекты мешают обнаружить красное смещение в излучение Солнца? ($\Delta\nu = \gamma \cdot v M / Rc^2$, γ – гравитационная постоянная. $\Delta\nu_c \approx 10^3$ Гц. Тепловое движение атомов на поверхности Солнца влияет на частоту излучаемых фотонов больше, чем гравитационное поле)

Задача 4.4.28. Свет, излучаемый с поверхности звезды, имеет тем меньшую частоту, чем массивнее звезду и меньше ее радиус. Чем объясняется этот эффект? Почему его называют красным смещением? (Притяжением фотона к звезде $\Delta\nu = \gamma v M / Rc^2$)

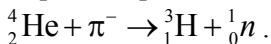
Задача 4.4.29. Позитрон с кинетической энергией $T = 750$ кэВ налетает на покоящийся свободный электрон. В результате аннигиляции возникают два γ -кванта с одинаковыми энергиями.

Определить угол между направлениями их разлета. ($\cos \frac{\theta}{2} = \frac{1}{\sqrt{1 + 2m_e c^2 / T}}$,

$\theta \approx 99^\circ$)

Задача 4.4.30. Позитрон останавливается в веществе и аннигилирует с электроном. Если в этом процессе рождаются три γ -кванта с одинаковой энергией, то чему равна энергия каждого γ -кванта и каковы относительные направления образовавшихся γ -квантов, испускаемых из точки, в которой произошла аннигиляция? ($\epsilon = 0,34$ МэВ; под углом 120° друг к другу и все в одной плоскости).

Задача 4.4.31. Отрицательный пион (в состоянии покоя) поглощается ядром гелия, причем происходит реакция



Определить энергетический выход Q для этой реакции. (119 МэВ)

Список рекомендуемой литературы

1. *Калашиников Н.П., Смондырев М.А.* Основы физики. Упражнения и задачи. М.: Дрофа, 2004.– 464 с.

2. *Калашиников Н.П., Леготин С.Д., Максименко В.В.* Физика: Практикум. М.: МГИУ, 2009.– 180 с.

3. *Чертов А.Г., Воробьев А.А.* Задачник по физике. М.: Высшая школа, 1988. – 527 с.
4. *Мин Чен.* Задачи по физике с решениями. М.: МИР, 1978. – 29 с.
5. *Белонучкин В.Е., Заикин Д.А., Ципенюк Ю.М.* Основы физики. Курс общей физики, т.2. Квантовая и статистическая физика. М.: Физматлит, 2001. – 504 с.
6. *Калашиников Н.П., Тихонов В.К.* Физика. Основы колебательных и волновых процессов, оптики и квантовой физики: Практикум по решению задач. М.: МГИУ, 2005. – 158 с.
7. *Калашиников Н.П., Кожевников Н.М.* Физика. Интернет-тестирование базовых знаний. СПб.: Лань, 2009. – 160 с.
8. *Иродов И.Е.* Задачи по общей физике. М.: Физматлит; Наука. 1979. – 368 с.
9. *Овчинкин В.А., Раевский А.О., Ципенюк Ю.М.* Сборник задач по общему курсу физики, ч.3. Атомная и ядерная физика. Строение вещества. М.: МФТИ, 2001. – 432 с.
10. *Оррир Дж.* Физика. Полный курс. М.: КДУ, 2011. – 752 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

Таблица П.1

Множители и приставки для образования десятичных кратных и дольных единиц и их наименований

Множитель	Приставка	Обозначение
10^{18}	экса	э
10^{15}	пета	п
10^{12}	тера	т
10^9	гига	г
10^6	мега	м
10^3	кило	к
10^2	гекто	г
10	дека	да
10^{-1}	деци	д
10^{-2}	санتي	с
10^{-3}	милли	м
10^{-6}	микро	мк
10^{-9}	нано	н
10^{-12}	пико	п
10^{-15}	фемто	ф
10^{-18}	атто	а

Таблица П.2*Буквы греческого алфавита*

Α α	альфа	Ι ι	йота	Ρ ρ	ро
Β β	бета	Κ κ	каппа	Σ σ	сигма
Γ γ	гамма	Λ λ	лямбда	Τ τ	тау
Δ δ	дельта	Μ μ	мю	Υ υ	ипсилон
Ε ε	эпсилон	Ν ν	ню	Φ φ	фи
Ζ ζ	дзета	Ξ ξ	кси	Χ χ	хи
Η η	эта	Ο ο	омикрон	Ψ ψ	пси
Θ θ	тета	Π π	пи	Ω ω	омега

Таблица П.3*Температура Дебая*

Вещество	θ_D, К	Вещество	θ_D, К
Азот	81	Медь	347
Алмаз	2250	Никель	477
Алюмин	433	Ртуть	72
Аргон	92	Свинец	105
Висмут	120	Серебро	227
Вольфра	383	Титан	420
Графит	413	Уран	248
Железо	477	Фтор	78
Золото	162	Хлор	115
Кремний	645	Цинк	329

Таблица П.4
Работа выхода электронов из металлов

Металл	A, эВ	A, ·10⁻¹⁹ Дж
Калий	2,2	3,5
Литий	2,3	3,7
Натрий	2,5	4,0
Платина	6,3	10,1
Серебро	4,7	7,5
Цинк	4,0	6,4

Таблица П. 5
Масса нейтральных атомов

Элемент	Z	Изотоп	Масса, а.е.м.
Нейтрон	0	<i>n</i>	1,00867
Водород	1	¹ H	1,00783
		² H	2,01410
Гелий	2	³ He	3,01603
		⁴ He	4,00260
		⁶ Li	6,01513
Литий	3	⁷ Li	7,01601
		⁹ Be	9,01219
Бериллий	4	⁷ Be	7,01693
		¹⁰ Be	10,01354
		⁹ B	9,01333
Бор	5	¹⁰ B	10,01294
		¹¹ B	11,00931
		¹⁰ C	10,00168
Углерод	6	¹² C	12,00000
		¹³ C	13,00335
		¹⁴ C	14,00324

Продолжение табл. П.5

Элемент	Z	Изотоп	Масса, а.е.м.
Азот	7	^{13}N	13,00574
		^{14}N	14,00307
		^{15}N	15,00011
Кислород	8	^{16}O	15,99491
		^{17}O	16,99913
		^{18}O	17,99916
Фтор	9	^{17}F	18,99840
Натрий	11	^{22}Na	21,99444
		^{23}Na	22,98977
Магний	12	^{23}Mg	22,99414
Алюминий	13	^{30}Al	29,99817
Кремний	14	^{31}Si	30,97535
Фосфор	15	^{31}P	30,97376
Калий	19	^{41}K	40,96184
Кальций	20	^{44}Ca	43,95549
Свинец	82	^{206}Pb	205,97446
Полоний	84	^{210}Po	209,98297
Плутоний	94	^{239}Pu	239,05216

Таблица П.6

Масса и энергия связи некоторых стабильных ядер

Символ ядра	Общее число частиц в ядре	Число протонов	Число нейтронов	Масса ядра, а.е.м.	Энергия связи, МэВ
${}^2_1\text{H}$	2	1	1	2,0147425 ± 6	2,2241 ± 11
${}^3_1\text{H}$	3	1	2	3,017001 ± 3	8,488 ± 3
${}^3_2\text{He}$	3	2	1	3,0169807 ± 18	7,7243 ± 20
${}^4_2\text{He}$	4	2	3	4,0038761 ± 13	28,2937 ± 22
${}^6_3\text{Li}$	6	3	4	6,017040 ± 4	31,987 ± 5
${}^7_3\text{Li}$	7	3	5	7,018239 ± 4	39,239 ± 6
${}^9_4\text{Be}$	9	4	5	9,015057 ± 4	58,153 ± 6
${}^{10}_5\text{B}$	10	5	5	10,016124 ± 4	64,744 ± 6
${}^{11}_5\text{B}$	11	5	6	11,012815 ± 6	76,192 ± 8
${}^{12}_6\text{C}$	12	6	6	12,0038156 ± 4	92,156 ± 6
${}^{13}_6\text{C}$	13	6	7	13,007490 ± 1	97,102 ± 7
${}^{14}_7\text{N}$	14	7	7	14,0075256 ± 3	104,653 ± 7
${}^{15}_7\text{N}$	15	7	8	15,0048783 ± 4	115,485 ± 8
${}^{16}_8\text{O}$	16	8	8	16,000000	127,612 ± 8
${}^{17}_8\text{O}$	17	8	9	17,0045374 ± 5	131,754 ± 9
${}^{18}_8\text{O}$	18	8	10	18,0048850 ± 8	139,798 ± 10
${}^{19}_9\text{F}$	19	9	10	19,004444 ± 2	147,79 ± 1
${}^{20}_{10}\text{Ne}$	20	10	10	19,998798 ± 1	160,63 ± 1
${}^{21}_{10}\text{Ne}$	21	10	11	21,000524 ± 1	167,39 ± 1
${}^{22}_{10}\text{Ne}$	22	10	12	21,9983771 ± 7	177,76 ± 1
${}^{27}_{13}\text{Al}$	27	13	14	26,990111 ± 3	224,944 ± 14
${}^{28}_{14}\text{Si}$	28	14	14	27,9858236 ± 7	236,52 ± 1,5

Продолжение табл. П.6

Сим-вол ядра	Общее число частиц в ядре	Число протонов	Число нейтронов	Масса ядра, а.е.м.	Энергия связи, МэВ
${}_{15}^{31}\text{P}$	31	15	16	$30,983612 \pm 1$	$162,898 \pm 15$
${}_{16}^{32}\text{S}$	32	16	16	$31,982239 \pm 1$	$271,76 \pm 1,5$
${}_{17}^{35}\text{Cl}$	35	17	18	$34,979971 \pm 2$	$298,19 \pm 2$
${}_{17}^{37}\text{Cl}$	37	17	20	$36,977657 \pm 2$	$317,08 \pm 2$
${}_{18}^{36}\text{Ar}$	36	18	18	$35,978982 \pm 2$	$306,69 \pm 2$
${}_{20}^{40}\text{Ca}$	40	20	20	$39,975293 \pm 2$	$342,03 \pm 2$
${}_{27}^{59}\text{Co}$	59	27	32	$58,951919 \pm 3$	$524,74 \pm 3$
${}_{54}^{130}\text{Xe}$	130	54	76	$129,94481 \pm 3$	$1096,74 \pm 3$
${}_{62}^{144}\text{Sm}$	144	62	82	$143,95741 \pm 9$	$1195,887 \pm 8$

Таблица П.7

Масса и энергия покоя некоторых частиц и легких ядер

Частица	Масса		Энергия	
	m , кг	m , а.е.м.	mc^2 , Дж	mc^2 , МэВ
Электрон	$9,109 \cdot 10^{-31}$	0,00055	$8,16 \cdot 10^{-14}$	0,5110
Пи-мезон π^0	$2,406 \cdot 10^{-28}$	0,14490	$2,16 \cdot 10^{-11}$	135,0
Протон	$1,673 \cdot 10^{-27}$	1,00728	$1,50 \cdot 10^{-10}$	938,3
Нейтрон	$1,675 \cdot 10^{-27}$	1,00867	$1,51 \cdot 10^{-10}$	939,6
Дейтрон	$3,344 \cdot 10^{-27}$	2,01355	$3,01 \cdot 10^{-10}$	1876
α -частица	$6,645 \cdot 10^{-27}$	4,00150	$5,97 \cdot 10^{-10}$	3727

Таблица П.8

Период полураспада радиоактивных изотопов

Изотоп	Символ	Тип распада	$T_{1/2}$
Актиний	$^{225}_{89}\text{Ac}$	α	10,0 сут
Иод	$^{131}_{53}\text{I}$	β^{-}, γ	8,04 сут
Иридий	$^{192}_{77}\text{Ir}$	β^{-}, γ	73,83 сут
Кобальт	$^{60}_{27}\text{Co}$	β^{-}, γ	5,27 года
Магний	$^{27}_{12}\text{Mg}$	β^{-}	9,46 мин
Натрий	$^{22}_{11}\text{Na}$	γ	2,60 года
Радий	$^{220}_{88}\text{Ra}$	α	0,023 с
Радий	$^{226}_{88}\text{Ra}$	α, γ	1600 лет
Радон	$^{222}_{86}\text{Rn}$	α	3,82 сут
Стронций	$^{90}_{38}\text{Sr}$	β^{-}	28,6 лет
Торий	$^{229}_{90}\text{Th}$	α, γ	7340 лет
Уран	$^{235}_{92}\text{U}$	α	$7,04 \cdot 10^8$ лет
Уран	$^{238}_{92}\text{U}$	α, γ	$4,47 \cdot 10^9$ лет
Фосфор	$^{32}_{15}\text{P}$	β^{-}	14,36 сут

Таблица П.9

Коэффициент качества различных видов излучения

Излучение	Q
Рентгеновское γ -излучение	1
β -излучение	1
Нейтроны $E < 10$ кэВ	5
$E = 10 \div 100$ кэВ	10
$E = 100$ кэВ $\div 2$	20
$E = 2 \div 20$ МэВ	10
$E > 20$ МэВ	5
Протоны $E > 2$ МэВ	5
α -излучение и другие тяжелые	20

Таблица П. 10

Соотношения между некоторыми внесистемными единицами и единицами СИ

Измеряемая величина	Название единицы	Символ	Значение в СИ
Длина	1 ангстрем	1 Å	10^{-10} м
	1 астрономическая единица	1 а.е.	$1,496 \cdot 10^{11}$ м
	1 световой год	1 св. год	$0,946 \cdot 10^{16}$ м
	1 парсек	1 ПК	$3,086 \cdot 10^{16}$ м
Площадь	1 барн	1 б	10^{-28} м ²
	1 ар (сотка)	1 ар	100 м ²
	1 гектар	1 га	10^4 м ²
Объем	1 литр	1 л	$1 \text{ дм}^3 = 10^{-3} \text{ м}^3$
Плоский угол	1 градус	1°	$1,745 \cdot 10^{-2}$ рад
	1 минута (1°/60)	1′	$2,909 \cdot 10^{-4}$ рад
	1 секунда (1′/60)	1″	$4,848 \cdot 10^{-6}$ рад

Продолжение табл. П.10

Измеряемая величина	Название единицы	Символ	Значение в СИ
Время	1 минута	1 мин	60 с
	1 час	1 ч	3 600 с
	1 сутки	1 сут	86 400 с
	1 год	1 год	$3,156 \cdot 10^7$ с
Скорость	1 километр в час	1 км/ч	0,2778 м/с
Масса	1 грамм	1 г	10^{-3} кг
	1 тонна	1 т	10^3 кг
Плотность	1 г/см ³	1 г/см ³	10^3 кг/м ³
Энергия	1 электрон-вольт	1 эВ	$1,602 \cdot 10^{-19}$ Дж
	1 калория	1 кал	4,1868 Дж
	1 киловатт-час	1 кВт · ч	$3,6 \cdot 10^6$ Дж
Мощность	1 лошадиная сила	1 л.с.	735,499 Вт
Давление	1 миллиметр ртутного столба	1 мм рт. ст.	133,3224 Па.
	1 техническая атмосфера	1 ат	98,0665 кПа
	1 физическая атмосфера	1 атм	760 Торр = = 101,35 кПа
	1 бар	1 бар	10^5 Па = 101,325 кПа 10^5 Па
Удельное сопротивление		1 Ом · мм ² /м	10^{-6} Ом · м
Магнитная индукция	1 гаусс	1 Гс	10^{-4} Тл
Напряженность H магнитного поля	1 эрстед	1 Э	79,5775 А/м

Окончание табл. П.10

Измеряемая величина	Название единицы	Символ	Значение в СИ
Магнитный поток	1 максвелл	1 Мкс	10^{-8} Вб
Экспозиционная доза	1 рентген	1 Р	$2,58 \cdot 10^4$ Кл/кг
Поглощенная доза	1 рад	1 рад	10^{-2} Гр (Дж/кг)
Активность	1 кюри	1 Ки	$3,7 \cdot 10^{10}$ Бк

Таблица. П.11

Некоторые астрономические величины

Физическая величина	Символ	Значение
Масса Земли	M_3	$5,976 \cdot 10^{24}$ кг
Радиус Земли	R_3	$6,3814 \cdot 10^6$ м
Ускорение свободного падения	g	$9,80665$ м/с ²
Период обращения Земли вокруг оси	сут	24 ч 3 мин = 56,555 с = 86636,555 с
Расстояние от Земли до Луны		$3,844 \cdot 10^8$ м
Масса Луны	M_{ζ}	$7,35 \cdot 10^{22}$ кг
Радиус Луны	R_{ζ}	$1,737 \cdot 10^6$ м
Большая полуось орбиты Земли	а.е.	$1,4960 \cdot 10^{11}$ м
Средняя орбитальная скорость Земли	v_{\oplus}	29,765 км/с
Период обращения Земли вокруг Солнца	год	$3,1557 \cdot 10^7$ с
Масса Солнца	M_{\odot}	$1,9889 \cdot 10^{30}$ кг
Радиус Солнца	R_{\odot}	$6,9599 \cdot 10^8$ м
Светимость Солнца	L_{\odot}	$3,826 \cdot 10^{26}$ Дж/с

Таблица П.12

Основные физические постоянные

Физическая величина	Символ	Значение
Гравитационная постоянная	G	$6,67259 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}$
Скорость света	c	$2,997\,924\,58 \cdot 10^8 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$
Элементарный заряд	e	$1,602177\,33 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$
Постоянная Планка	h	$6,626\,075\,5 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$
Постоянная Планка $h / 2\pi$	\hbar	$1,054\,572\,66 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с} =$ $= 6,582122\,0 \cdot 10^{-16} \text{ эВ} \cdot \text{с}$
Электрическая постоянная	ε_0	$8,854187817 \cdot 10^{-12} \text{ Кл}^2 \cdot \text{Н}^{-1} \cdot \text{м}^{-2}$
Магнитная постоянная	μ_0	$12,566\,370\,614 \cdot 10^{-7} \text{ Н} \cdot \text{А}^{-2}$
Масса электрона	m_e	$9,109\,389\,7 \cdot 10^{-31} \text{ кг} = 0,510\,999\,06 \text{ МэВ}/c^2$
Масса протона	m_p	$1,672\,6231 \cdot 10^{-27} \text{ кг} = 938,272\,31 \text{ МэВ}/c^2 =$ $= 1,007276470 \text{ а.е.м.} = 1836,152\,701 m_e$
Масса нейтрона	m_n	$1,674\,928\,6 \cdot 10^{-27} \text{ кг} = 939,565\,63 \text{ МэВ}/c^2 =$ $= 1,008\,664\,904 \text{ а.е.м.}$
Атомная единица массы	а.е.м.	$1,660\,540\,2 \cdot 10^{-27} \text{ кг} = 931,494\,32 \text{ МэВ}/c^2$
Постоянная Больцмана	k_B	$1,380\,658 \cdot 10^{-23} \text{ Дж} \cdot \text{К}^{-1} =$ $= 8,617385 \cdot 10^{-5} \text{ эВ} \cdot \text{К}^{-1}$
Число Авогадро	N_A	$6,022136\,7 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$

Таблица П.13

Часто встречающиеся комбинации физических постоянных

Физическая величина	Символ	Значение
Коэффициент в соотношении между энергией и массой	c^2	$8,988 \cdot 10^{16} \text{ Дж} \cdot \text{кг}^{-1} =$ $= 931,49 \text{ МэВ а.е.м.}^{-1}$
Коэффициент $\hbar c$ в соотношении между расстоянием и энергией	$\hbar c$	$3,16153 \cdot 10^{-26} \text{ Дж} \cdot \text{м} =$ $= 197,327 \text{ МэВ} \cdot \text{фм}$
Постоянная $1/(4\pi\epsilon_0)$	k	$8,988 \cdot 10^9 \text{ Н} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{Кл}^{-2}$
Произведение $\mu_0\epsilon_0$	$1/c^2$	$1,113 \cdot 10^{-17} \text{ м}^{-2} \cdot \text{с}^2$
Удельный заряд электрона $e/m_e = \omega_e/B$		$1,759 \cdot 10^{11} \text{ с}^{-1} \cdot \text{Тл}^{-1}$
Удельный заряд протона $e/m_p = \omega_p/B$		$9,579 \cdot 10^7 \text{ с}^{-1} \cdot \text{Тл}^{-1}$
Постоянная тонкой структуры $e^2/4\pi\epsilon_0\hbar c$	α	1/137,035
Электромагнитный радиус электрона $e^2/4\pi\epsilon_0 m_e c^2$	r_e	$2,818 \cdot 10^{-15} \text{ м}$
Радиус Бора $4\pi\epsilon_0\hbar^2/m_e e^2$	α_B	$0,529 \cdot 10^{-10} \text{ м}$
Постоянная Ридберга $m_e e^4/8\epsilon_0^2 h^3$	R	$1,097 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}$
Энергия Ридберга $hcR = m_e e^4/8\epsilon_0^2 h^2 = m_e c^2 \alpha^2/2$	Ry	13,605 эВ
Комптоновская длина волны электрона $\hbar/m_e c$	λ_e	$3,862 \cdot 10^{-13} \text{ м}$
Магнетон Бора $e\hbar/2m_e c$	μ_B	$9,274 \cdot 10^{-24} \text{ Дж} \cdot \text{Тл}^{-1} =$ $= 5,788 \cdot 10^{-11} \text{ МэВ} \cdot \text{Тл}^{-1}$

Продолжение табл. П.13

Физическая величина	Символ	Значение
Ядерный магнетон $e\hbar / 2m_p c$	$\mu_{\text{яд}}$	$5,051 \cdot 10^{-27} \text{ Дж} \cdot \text{Тл}^{-1} =$ $= 3,152 \cdot 10^{-14} \text{ МэВ} \cdot \text{Тл}^{-1}$
Универсальная газовая постоянная $k_B N_A$	R	$8,314 \text{ Дж} \cdot \text{моль}^{-1} \cdot \text{К}^{-1}$
Число Фарадея eN_A	F	$96\,484,56 \text{ Кл} \cdot \text{моль}^{-1}$
Молярный объем	V_m	$22,414 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 \cdot \text{моль}^{-1}$
Постоянная Стефана–Больцмана $\sigma = \pi^2 k_B^4 / 60\hbar^3 c^2$	σ	$5,6705 \cdot 10^{-8} \text{ Вт} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{К}^{-4}$
Постоянная закона смещения Вина $b = \lambda_{\text{max}} T$	b	$2,898 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}$

Николай Павлович Калашиников

**Руководство к решению задач по физике
«Основы квантовой физики. Строение вещества.
Атомная и ядерная физика»**

Учебное пособие

Редактор *Е.Г. Станкевич*

Верстка *В.И. Смылова*

Подписано в печать 15.11.2011. Формат 60x84 1/16.

Печ.л. 16,0. Уч.-изд.л. 20,0. Тираж 1000 экз.

Изд. № 2/32.

Заказ № 32.

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»,
115409, Москва, Каширское ш., 31
ООО «Полиграфический комплекс «Курчатовский».
144000, Московская область, г. Электросталь, ул. Красная, 42

