МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

И.Л. Гусева, О.В. Шерстюкова

СБОРНИК ДОМАШНИХ ЗАДАНИЙ ПО УРАВНЕНИЯМ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Рекомендовано УМО «Ядерные физика и технологии»
в качестве учебно-методического пособия
для студентов высших учебных заведений

Москва 2012

УДК 517.53(07)
ББК 22.161.5я7
М 54

Гусева И.Л., Шерстюкова О.В. **Сборник домашних заданий по уравнениям математической физики:** *учебно-методическое пособие*. М.: НИЯУ МИФИ, 2012. 44 с.

Даны краткие теоретические сведения и 30 вариантов домашних заданий по курсу «Уравнения математической физики».

Предназначено для студентов четвертого семестра факультета «А» НИЯУ МИФИ, также может использоваться как сборник домашних заданий или как задачник преподавателями других факультетов при изучении соответствующих разделов теории уравнений математической физики.

Подготовлено в рамках Программы создания и развития НИЯУ МИФИ.

Рецензенты: доц. Г.П. Ребане (НИЯУ МИФИ);
д-р физ.-мат. наук, проф. В.В. Дружинин (СарФТИ НИЯУ МИФИ)

ISBN 978-5-7262-1659-1

ПРЕДИСЛОВИЕ

Сборник содержит 30 вариантов домашних заданий по курсу уравнений математической физики. Задания распределены по семи темам, объединенным в три раздела: «Приведение к каноническому виду линейных уравнений с частными производными второго порядка с двумя независимыми переменными», «Решение задачи Коши для волнового уравнения. Решение краевых задач на полупрямой», «Метод разделения переменных». Каждый раздел содержит справочный материал, используемый при решении заданий на соответствующую тему. Все задания, относящиеся к одной теме, примерно одинаковы по сложности.

При выдаче домашнего задания рекомендуется каждому студенту давать по одному заданию на каждую тему.

Все замечания и пожелания, касающиеся содержания данного пособия, просим направлять по адресу: sherov73@mail.ru.

1. ПРИВЕДЕНИЕ К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ДВУМЯ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

Линейным уравнением с частными производными второго порядка для неизвестной функции u двух независимых переменных x и y называется уравнение вида

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + b_2u_y + cu = f(x,y)\,, \quad (1)$$

где действительные функции $a_{ij}\,, b_k\,, c$ зависят от x и y и определены на области D. Если коэффициенты $a_{ij}\,, b_k\,, c$ постоянны, уравнение (1) называется *линейным уравнением с постоянными коэффициентами*. Будем считать, что все коэффициенты a_{ij} одновременно в нуль не обращаются.

Если в точке $M_0(x_0, y_0) \in D$ дискриминант

$$\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0,$$

то уравнение (1) называется *уравнением гиперболического типа* в точке M_0; если в точке $M_0(x_0, y_0)$

$$\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0,$$

то уравнение (1) называется *уравнением эллиптического типа* в точке M_0; если в точке $M_0(x_0, y_0)$

$$\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0,$$

то уравнение (1) называется *уравнением параболического типа* в точке M_0.

Уравнение

$$a_{11}dy^2 - 2a_{12}dxdy + a_{22}dx^2 = 0 \quad (2)$$

называется *уравнением характеристик* для уравнения (1), оно эквивалентно двум уравнениям:

$$a_{11}dy - \left(a_{12} \pm \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}\right)dx = 0. \qquad (3)$$

Кривые, определяемые соотношением $\varphi(x,y) = C$, где $\varphi(x,y) = C$ – общий интеграл одного из уравнений (3), называются *характеристиками уравнения* (1).

Пусть уравнение (1) гиперболического типа в области D, т. е. всюду в D $\Delta > 0$. Тогда уравнения (3) имеют два вещественных и функционально независимых общих интеграла

$$\varphi(x,y) = C_1 \qquad \text{и} \qquad \psi(x,y) = C_2\,,$$

которые определяют два различных семейства вещественных характеристик этого уравнения. Произведем в уравнении (1) замену независимых переменных по формулам:

$$\begin{cases} \xi = \varphi(x,y); \\ \eta = \psi(x,y). \end{cases}$$

Эта замена приводит уравнение (1) к каноническому виду

$$u_{\xi\eta} + \bar{b}_1 u_\xi + \bar{b}_2 u_\eta + \bar{c}u = \bar{f}(\xi,\eta). \qquad (4)$$

Если уравнение (1) эллиптического типа в области D, т. е. $\Delta < 0$ в D, то общие интегралы уравнений (3) имеют комплексно-сопряженные левые части. Пусть

$$\varphi(x,y) + i\,\psi(x,y) = C,$$

где $\varphi(x,y)$ и $\psi(x,y)$ – вещественные и функционально независимые функции, общий интеграл одного из уравнений (3). Замена независимых переменных по формулам:

$$\begin{cases} \xi = \varphi(x,y); \\ \eta = \psi(x,y) \end{cases}$$

приводит уравнение (1) к каноническому виду

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \bar{b}_1 u_\xi + \bar{b}_2 u_\eta + \bar{c}u = \bar{f}(\xi, \eta). \tag{5}$$

Пусть уравнение (1) параболического типа в области D, т. е. $\Delta = 0$ в D. В этом случае уравнения (3) совпадают, и общий интеграл этого уравнения $\varphi(x, y) = C$ определяет одно семейство вещественных характеристик уравнения (1). Замена независимых переменных

$$\begin{cases} \xi = \varphi(x, y); \\ \eta = \psi(x, y), \end{cases}$$

где $\psi(x, y)$ – произвольная, дважды непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая условию

$$\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \varphi_x & \varphi_y \\ \psi_x & \psi_y \end{vmatrix} \neq 0,$$

приводит уравнение (1) к каноническому виду

$$u_{\eta\eta} + \bar{b}_1 u_\xi + \bar{b}_2 u_\eta + \bar{c}u = \bar{f}(\xi, \eta). \tag{6}$$

Если исходное уравнение (1) было линейным уравнением с постоянными коэффициентами, то в соответствующем каноническом уравнении коэффициенты $\bar{b}_1$, $\bar{b}_2$, $\bar{c}$ постоянны. В этом случае уравнения (4), (5), (6) допускают дальнейшее упрощение. Можно подобрать такие вещественные числа α и β, что замена неизвестной функции по формуле

$$u = v(\xi, \eta)e^{\alpha\xi + \beta\eta}$$

приводит уравнение гиперболического типа (4) к виду

$$v_{\xi\eta} + \tilde{c}v = \tilde{f}(\xi, \eta)\,, \tag{7}$$

уравнение эллиптического типа (5) к виду

$$v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} + \tilde{c}v = \tilde{f}(\xi, \eta)\,, \tag{8}$$

уравнение параболического типа (6) к виду

$$v_{\eta\eta} + \tilde{c}v_\xi = \tilde{f}(\xi, \eta)\,. \tag{9}$$

Задание 1. Уравнение гиперболического типа

Привести уравнение к каноническому виду. Найти общее решение.

1. $u_{xx} + 3u_{xy} - 4u_{yy} = 0.$
2. $9u_{xy} - 2u_{yy} = 0.$
3. $6u_{xx} + 11u_{xy} - 10u_{yy} = 0.$
4. $4u_{xx} - 5u_{xy} - 6u_{yy} = 0.$
5. $2u_{xx} - 7u_{xy} + 5u_{yy} = 0.$
6. $21u_{xx} + 10u_{xy} + u_{yy} = 0.$
7. $4u_{xx} + 12u_{xy} - 7u_{yy} = 0.$
8. $u_{xx} - 3u_{xy} - 4u_{yy} = 0.$
9. $7u_{xx} + 3u_{xy} = 0.$
10. $10u_{xx} + 11u_{xy} - 6u_{yy} = 0.$
11. $2u_{xx} + 7u_{xy} + 5u_{yy} = 0.$
12. $6u_{xx} + 5u_{xy} - 4u_{yy} = 0.$
13. $11u_{xy} + 2u_{yy} = 0.$
14. $21u_{xx} - 10u_{xy} + u_{yy} = 0.$

15. $7u_{xx} - 12u_{xy} - 4u_{yy} = 0.$

16. $4u_{xx} + 3u_{xy} - u_{yy} = 0.$

17. $10u_{xx} - 11u_{xy} - 6u_{yy} = 0.$

18. $3u_{xx} - 5u_{xy} = 0.$

19. $6u_{xx} - 5u_{xy} - 4u_{yy} = 0.$

20. $5u_{xx} + 7u_{xy} + 2u_{yy} = 0.$

21. $u_{xx} + 10u_{xy} + 21u_{yy} = 0.$

22. $4u_{xx} - 12u_{xy} - 7u_{yy} = 0.$

23. $4u_{xx} - 3u_{xy} - u_{yy} = 0.$

24. $5u_{xy} - 7u_{yy} = 0.$

25. $6u_{xx} - 11u_{xy} - 10u_{yy} = 0.$

26. $5u_{xx} - 7u_{xy} + 2u_{yy} = 0.$

27. $4u_{xx} + 5u_{xy} - 6u_{yy} = 0.$

28. $u_{xx} - 10u_{xy} + 21u_{yy} = 0.$

29. $7u_{xx} + 12u_{xy} - 4u_{yy} = 0.$

30. $6u_{xx} + 13u_{xy} = 0.$

Задание 2. Уравнения эллиптического и параболического типов

Привести к каноническому виду и проделать дальнейшие упрощения уравнения.

1. $5u_{xx} + 4u_{xy} + 4u_{yy} - 4u_x - 8u_y + 7u = 0.$

2. $9u_{xx} + 24u_{xy} + 16u_{yy} - 6u_x - 9u_y + 4u = 0.$

3. $2u_{xx} - 6u_{xy} + 5u_{yy} + 4u_x - 2u_y + 9u = 0.$

4. $9u_{xx} + 6u_{xy} + u_{yy} - 9u_x - 2u_y + 10u = 0.$

5. $5u_{xx} - 4u_{xy} + u_{yy} + 5u_x - 2u_y + u = 0.$

6. $u_{xx} + 6u_{xy} + 13u_{yy} + 2u_x + 6u_y - 5u = 0.$

7. $4u_{xx} + 4u_{xy} + u_{yy} + 2u_x - 2u_y - 7u = 0.$

8. $5u_{xx} - 4u_{xy} + 4u_{yy} - 2u_x + 12u_y + 3u = 0.$

9. $25u_{xx} + 20u_{xy} + 4u_{yy} + 4u_x + 4u_y - 25u = 0.$

10. $2u_{xx} + 6u_{xy} + 5u_{yy} + 2u_x - u_y + 7u = 0.$

11. $u_{xx} - 6u_{xy} + 9u_{yy} + 2u_x - 3u_y - 5u = 0.$

12. $13u_{xx} + 6u_{xy} + u_{yy} - 6u_x - 2u_y + 5u = 0.$

13. $9u_{xx} - 24u_{xy} + 16u_{yy} + 3u_x - u_y - 2u = 0.$

14. $4u_{xx} - 4u_{xy} + 5u_{yy} + 2u_x + u_y + u = 0.$

15. $25u_{xx} - 20u_{xy} + 4u_{yy} - 12u_x + 8u_y + 4u = 0.$

16. $13u_{xx} - 6u_{xy} + u_{yy} - 2u_x - 2u_y + 9u = 0.$

17. $u_{xx} + 4u_{xy} + 5u_{yy} + 3u_x + 5u_y + 2u = 0.$

18. $4u_{xx} - 12u_{xy} + 9u_{yy} + 4u_x - 2u_y + 9u = 0.$

19. $4u_{xx} + 4u_{xy} + 5u_{yy} + 4u_x + 2u_y - 7u = 0.$

20. $u_{xx} - 10u_{xy} + 25u_{yy} + 6u_x - 7u_y + 9u = 0.$

21. $u_{xx} - 6u_{xy} + 13u_{yy} + u_x + u_y + 2u = 0.$

22. $9u_{xx} + 12u_{xy} + 4u_{yy} - 6u_x - 8u_y + 16u = 0.$

23. $5u_{xx} + 4u_{xy} + u_{yy} + 3u_x + 2u_y - u = 0.$

24. $25u_{xx} + 10u_{xy} + u_{yy} - 32u_x - 6u_y + 11u = 0.$

25. $5u_{xx} + 6u_{xy} + 2u_{yy} + u_x + 2u_y - u = 0.$

26. $16u_{xx} + 24u_{xy} + 9u_{yy} + 9u_x + 6u_y + 10u = 0.$

27. $u_{xx} - 4u_{xy} + 5u_{yy} + 4u_x - 10u_y = 0.$

28. $25u_{xx} + 30u_{xy} + 9u_{yy} - 4u_x - 3u_y + u = 0.$

29. $5u_{xx} - 6u_{xy} + 2u_{yy} + 7u_x - 4u_y + 3u = 0.$

30. $4u_{xx} + 20u_{xy} + 25u_{yy} + 12u_x + 20u_y + 9u = 0.$

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ. РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ НА ПОЛУПРЯМОЙ

Пусть требуется найти решение задачи Коши:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), & x \in \mathbb{R}, \ t > 0; \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in \mathbb{R}; \\ u_t(x,0) = \psi(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{10}$$

Здесь и всюду в дальнейшем $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$.

Если $f(x,t) \in C^1(\mathbb{R} \times [0,\infty))$, $\varphi(x) \in C^2(\mathbb{R})$, $\psi(x) \in C^1(\mathbb{R})$, то решение задачи Коши (10) существует и выражается формулой:

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(z)dz + \\ + \frac{1}{2a}\int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(z,\tau)dz. \tag{11}$$

В случае однородного уравнения ($f(x,t) = 0$) справедлива формула Даламбера

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(z)dz. \tag{12}$$

Рассмотрим краевые задачи для однородного волнового уравнения на полупрямой. Пусть требуется решить однородную краевую задачу первого типа:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & x > 0\,,\ \ t > 0; \\ u(x,0) = \varphi(x), & x > 0; \\ u_t(x,0) = \psi(x), & x > 0; \\ u(0,t) = 0\,, & t > 0. \end{cases} \tag{13}$$

Продолжим функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ нечетным образом на отрицательную часть оси x, обозначим через $\Phi_{\text{н}}(x)$ и $\Psi_{\text{н}}(x)$ полученные таким образом функции:

$$\Phi_{\text{н}}(x) = \begin{cases} \varphi(x)\,, & x > 0; \\ -\varphi(-x)\,, & x < 0, \end{cases} \qquad \Psi_{\text{н}}(x) = \begin{cases} \psi(x)\,, & x > 0; \\ -\psi(-x)\,, & x < 0. \end{cases}$$

Тогда решение задачи (13) имеет вид

$$u(x,t) = \frac{\Phi_{\text{н}}(x-at) + \Phi_{\text{н}}(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \Psi_{\text{н}}(z)dz. \tag{14}$$

Для решения однородной краевой задачи второго типа

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & x > 0\,,\ \ t > 0; \\ u(x,0) = \varphi(x), & x > 0; \\ u_t(x,0) = \psi(x), & x > 0; \\ u_x(0,t) = 0\,, & t > 0 \end{cases} \tag{15}$$

продолжим четным образом функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ на отрицательную часть оси x, обозначим через $\Phi_{\text{ч}}(x)$ и $\Psi_{\text{ч}}(x)$ полученные функции:

$$\Phi_{\text{ч}}(x) = \begin{cases} \varphi(x)\,, & x > 0; \\ \varphi(-x)\,, & x < 0, \end{cases} \qquad \Psi_{\text{ч}}(x) = \begin{cases} \psi(x)\,, & x > 0; \\ \psi(-x)\,, & x < 0. \end{cases}$$

Тогда функция

$$u(x,t) = \frac{\Phi_{\text{ч}}(x-at) + \Phi_{\text{ч}}(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \Psi_{\text{ч}}(z)dz \tag{16}$$

является решением задачи (15).

Решение смешанной задачи на полупрямой для уравнения

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}$$

с нулевыми начальными условиями

$$u(x,0) = u_t(x,0) = 0, \; x > 0,$$

и неоднородными краевыми условиями

$$u(0,t) = \mu(t), \quad t > 0,$$

или

$$u_x(0,t) = \nu(t), \; t > 0,$$

ищем в виде функции

$$u(x,t) = f(x - at)\,. \tag{17}$$

Наконец, пусть требуется решить неоднородную краевую задачу первого или второго типа с неоднородными начальными условиями:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & x > 0, \; t > 0; \\ u(x,0) = \varphi(x), & x > 0; \\ u_t(x,0) = \psi(x), & x > 0; \\ u(0,t) = \mu(t), & t > 0, \end{cases}$$

или (18)

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & x > 0, \; t > 0; \\ u(x,0) = \varphi(x), & x > 0; \\ u_t(x,0) = \psi(x), & x > 0; \\ u_x(0,t) = \nu(t), & t > 0. \end{cases}$$

Ее можно разбить на две задачи.

1. Однородная краевая задача:

$$\begin{cases} v_{tt} = a^2 v_{xx}, & x > 0\,, \ t > 0; \\ v(x,0) = \varphi(x), & x > 0; \\ v_t(x,0) = \psi(x), & x > 0; \\ v(0,t) = 0\,, & t > 0, \end{cases}$$

или (19)

$$\begin{cases} v_{tt} = a^2 v_{xx}, & x > 0\,, \ t > 0; \\ v(x,0) = \varphi(x), & x > 0; \\ v_t(x,0) = \psi(x), & x > 0; \\ v_x(0,t) = 0\,, & t > 0. \end{cases}$$

2. Задача с однородными начальными условиями:

$$\begin{cases} w_{tt} = a^2 w_{xx}, & x > 0\,, \ t > 0; \\ w(x,0) = 0, & x > 0; \\ w_t(x,0) = 0, & x > 0; \\ w(0,t) = \mu(t)\,, & t > 0, \end{cases}$$

или (20)

$$\begin{cases} w_{tt} = a^2 w_{xx}, & x > 0\,, \ t > 0; \\ w(x,0) = 0, & x > 0; \\ w_t(x,0) = 0, & x > 0; \\ w_x(0,t) = \nu(t)\,, & t > 0. \end{cases}$$

Тогда решение задачи (18) представляется в виде

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t). \tag{21}$$

Замечание. Формулы (14), (16), (21) задают «формальные» решения соответствующих краевых задач.

Задание 3. Задача Коши

Решить задачу Коши для гиперболического уравнения:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), & x \in \mathbb{R}, \ t > 0; \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in \mathbb{R}; \\ u_t(x,0) = \psi(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

№	$\varphi(x)$	$\psi(x)$	$f(x,t)$
1	$x^2 + 4$	e^{-3x}	$-2t\cos x$
2	$\mathrm{ch}x$	$\sin 4x$	$(3x-2)t^2$
3	$2x^2 + x$	$\cos 3x$	xte^t
4	$\mathrm{sh}3x$	$\mathrm{sh}2x$	$(x+1)\cos 2t$
5	$\sin x$	$\mathrm{ch}2x$	$(4t^2+3t)x$
6	e^{-x}	$6x^2$	$t\,\mathrm{sh}x$
7	$\cos 3x$	$\sin 3x$	$(2x+1)t^2$
8	$\sin 2x$	$\cos x$	$(5-x)e^t$
9	$\mathrm{ch}2x$	e^{-x}	$(x+t)t$
10	$9 - x^2$	$\mathrm{sh}x$	$2te^x$
11	$\mathrm{sh}x$	$3x+1$	$(x-3)\cos t$
12	$\cos 2x$	$\sin x$	$e^x(1+2at)$
13	$\sin 5x$	$\mathrm{ch}5x$	$(x+1)t$

14	e^{2x}	e^{3x}	$x\sin 2t$
15	$3x-x^2$	$\sin 2x$	te^{-x}
16	$\mathrm{sh}6x$	$\mathrm{sh}6x$	$2t\sin 2x$
17	$\cos x$	$\cos 2x$	$a^2t^2-x^2-x$
18	$\sin 3x$	$3x^2-2$	$t\mathrm{ch}x$
19	x^2+2x	$\mathrm{ch}x$	$(3x+2)\sin 3t$
20	$\mathrm{ch}3x$	e^{2x}	$t\sin x$
21	e^{-2x}	$\mathrm{sh}3x$	$x^2-a^2t^2$
22	$\mathrm{ch}5x$	$\cos 4x$	$(1-x)e^{-t}$
23	$\sin 4x$	e^x	$(7x+5)te^{-t}$
24	$\cos 5x$	$2x-1$	$2te^{-2x}$
25	$\mathrm{sh}4x$	$\mathrm{ch}4x$	$(5x-3)t$
26	$\mathrm{ch}4x$	$\sin 6x$	$x+2t^2$
27	e^{3x}	$\cos 6x$	$(4x+3)\sin t$
28	$\cos 4x$	$2+3x^2$	$e^x(1+at)$
29	$\mathrm{sh}2x$	$\mathrm{sh}4x$	$3xt^2+t$
30	e^x	$\mathrm{ch}3x$	$(1-2x)\cos 2t$

Задание 4. Начально-краевые задачи на полупрямой

Решить начально-краевую задачу для гиперболического уравнения на полупрямой.

1. $$\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx}, & x > 0\,, \ \ t > 0; \\ u(x,0) = x(2+x), & x > 0; \\ u_t(x,0) = 3x+2, & x > 0; \\ u(0,t) = \text{sh}2t\,, & t > 0. \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, & x > 0\,, \ \ t > 0; \\ u(x,0) = x^3, & x > 0; \\ u_t(x,0) = 3x^2, & x > 0; \\ u_x(0,t) = 2\sin2t\,, & t > 0. \end{cases}$$

3. $$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, & x > 0\,, \ \ t > 0; \\ u(x,0) = x(1+x), & x > 0; \\ u_t(x,0) = -6x^2, & x > 0; \\ u(0,t) = te^t\,, & t > 0. \end{cases}$$

4. $$\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx}, & x > 0\,, \ \ t > 0; \\ u(x,0) = 1+2x, & x > 0; \\ u_t(x,0) = 3-2x, & x > 0; \\ u_x(0,t) = 2e^{-t}\,, & t > 0. \end{cases}$$

5. $$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, & x > 0\,, \ \ t > 0; \\ u(x,0) = -3x, & x > 0; \\ u_t(x,0) = e^x, & x > 0; \\ u(0,t) = \sin5t\,, & t > 0. \end{cases}$$

6. $$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, & x > 0\,, \ \ t > 0; \\ u(x,0) = x(1+x), & x > 0; \\ u_t(x,0) = -x, & x > 0; \\ u_x(0,t) = \text{ch}3t\,, & t > 0. \end{cases}$$

7. $$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, & x > 0\,, \ \ t > 0; \\ u(x,0) = x^2(1+x), & x > 0; \\ u_t(x,0) = -2x, & x > 0; \\ u(0,t) = t\cos t\,, & t > 0. \end{cases}$$

8. $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, \quad x > 0\,, \quad t > 0; \\ u(x,0) = 2 - x^3, \quad x > 0; \\ u_t(x,0) = 5x, \qquad x > 0; \\ u_x(0,t) = 0\,, \qquad t > 0. \end{cases}$

9. $\begin{cases} u_{tt} = 9u_{xx}, \quad x > 0\,, \quad t > 0; \\ u(x,0) = 3x - x^2, \quad x > 0; \\ u_t(x,0) = 3 - x, \qquad x > 0; \\ u(0,t) = t\sin 3t\,, \qquad t > 0. \end{cases}$

10. $\begin{cases} u_{tt} = 9u_{xx}, \quad x > 0\,, \quad t > 0; \\ u(x,0) = 0, \qquad x > 0; \\ u_t(x,0) = x^2 + 6x, \quad x > 0; \\ u_x(0,t) = \mathrm{sh}t, \qquad t > 0. \end{cases}$

11. $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, \quad x > 0\,, \quad t > 0; \\ u(x,0) = x^2(1 - x), \quad x > 0; \\ u_t(x,0) = -3x, \qquad x > 0; \\ u(0,t) = \mathrm{arctg}t\,, \qquad t > 0. \end{cases}$

12. $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, \quad x > 0\,, \quad t > 0; \\ u(x,0) = e^x, \qquad x > 0; \\ u_t(x,0) = 2, \qquad x > 0; \\ u_x(0,t) = 1 + t^2\,, \quad t > 0. \end{cases}$

13. $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, \quad x > 0\,, \quad t > 0; \\ u(x,0) = 2x(1 - x), \quad x > 0; \\ u_t(x,0) = 5x - 2, \qquad x > 0; \\ u(0,t) = t^2 e^{3t}, \qquad t > 0. \end{cases}$

14. $\begin{cases} u_{tt} = 9u_{xx}, \quad x > 0\,, \quad t > 0; \\ u(x,0) = 3 + x\,, \qquad x > 0; \\ u_t(x,0) = 2 + 3x, \qquad x > 0; \\ u_x(0,t) = \cos t, \qquad t > 0. \end{cases}$

15. $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, \quad x > 0\,, \quad t > 0; \\ u(x,0) = 0, \qquad x > 0; \\ u_t(x,0) = \cos x, \qquad x > 0; \\ u(0,t) = t^3, \qquad t > 0. \end{cases}$

16. $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, & x > 0, \quad t > 0; \\ u(x,0) = 0, & x > 0; \\ u_t(x,0) = \sin 2x, & x > 0; \\ u_x(0,t) = e^t - 1, & t > 0. \end{cases}$

17. $\begin{cases} u_{tt} = 9u_{xx}, & x > 0, \quad t > 0; \\ u(x,0) = 3x + 2x^2, & x > 0; \\ u_t(x,0) = 3 + x, & x > 0; \\ u(0,t) = t\,\mathrm{ch}t, & t > 0. \end{cases}$

18. $\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx}, & x > 0, \quad t > 0; \\ u(x,0) = x(2 + x^2), & x > 0; \\ u_t(x,0) = 0, & x > 0; \\ u_x(0,t) = 2\cos^2 t, & t > 0. \end{cases}$

19. $\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx}, & x > 0, \quad t > 0; \\ u(x,0) = x(2 - x), & x > 0; \\ u_t(x,0) = x + 1, & x > 0; \\ u(0,t) = \cos t - 1, & t > 0. \end{cases}$

20. $\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx}, & x > 0, \quad t > 0; \\ u(x,0) = \sin 3x, & x > 0; \\ u_t(x,0) = x, & x > 0; \\ u_x(0,t) = 0, & t > 0. \end{cases}$

21. $\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx}, & x > 0, \quad t > 0; \\ u(x,0) = x(3 + x), & x > 0; \\ u_t(x,0) = 2 - x, & x > 0; \\ u(0,t) = t^2 \sin 2t, & t > 0. \end{cases}$

22. $\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx}, & x > 0, \quad t > 0; \\ u(x,0) = x^2 - x, & x > 0; \\ u_t(x,0) = 2x, & x > 0; \\ u_x(0,t) = -e^{2t}, & t > 0. \end{cases}$

23. $\begin{cases} u_{tt} = 9u_{xx}, & x > 0, \quad t > 0; \\ u(x,0) = 1 - \cos x, & x > 0; \\ u_t(x,0) = 2x - 1, & x > 0; \\ u(0,t) = t\cos 3t, & t > 0. \end{cases}$

24. $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, \ \ x > 0\,, \ \ t > 0; \\ u(x,0) = 0, \qquad\qquad x > 0; \\ u_t(x,0) = x - x^2, \ \ x > 0; \\ u_x(0,t) = 4\sin^2 t\,, \ \ t > 0. \end{cases}$

25. $\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx}, \qquad x > 0\,, \ \ t > 0; \\ u(x,0) = x(5+2x), \ \ x > 0; \\ u_t(x,0) = 2x, \qquad\qquad x > 0; \\ u(0,t) = te^{-t}, \qquad\qquad t > 0. \end{cases}$

26. $\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx}, \ \ \ x > 0\,, \ \ t > 0; \\ u(x,0) = x^3 + x, \qquad x > 0; \\ u_t(x,0) = 0, \qquad\qquad x > 0; \\ u_x(0,t) = \cos 2t\,, \qquad t > 0. \end{cases}$

27. $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, \ \ \ x > 0\,, \ \ t > 0; \\ u(x,0) = 2x^3, \qquad\quad x > 0; \\ u_t(x,0) = 3x^2, \qquad\quad x > 0; \\ u(0,t) = e^t - 1\,, \qquad t > 0. \end{cases}$

28. $\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx}, \ \ x > 0\,, \ \ t > 0; \\ u(x,0) = \ x^2, \qquad\qquad x > 0; \\ u_t(x,0) = 1 - 4x, \quad x > 0; \\ u_x(0,t) = \sin 4t, \qquad t > 0. \end{cases}$

29. $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, \ \ \ x > 0\,, \ \ t > 0; \\ u(x,0) = x + x^3, \qquad\quad x > 0; \\ u_t(x,0) = -x^2, \qquad\quad x > 0; \\ u(0,t) = \mathrm{sh} 3t, \qquad\quad t > 0. \end{cases}$

30. $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, \ \ x > 0\,, \ \ t > 0; \\ u(x,0) = 0, \qquad\quad x > 0; \\ u_t(x,0) = e^{-x}, \qquad x > 0; \\ u_x(0,t) = 3t^2\,, \qquad t > 0. \end{cases}$

3. МЕТОД РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ

При решении заданий из этого раздела используется метод Фурье (метод разделения переменных) для уравнений гиперболического и параболического типа.

При применении этого метода возникает необходимость решения задачи Штурма-Лиувилля следующего вида.

Пусть дана краевая задача

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \qquad 0 < x < l; \\ \alpha_1 X(0) + \beta_1 X'(0) = 0; \\ \alpha_2 X(l) + \beta_2 X'(l) = 0; \\ \alpha_i^2 + \beta_i^2 \neq 0, \qquad i = 1, 2. \end{cases} \tag{22}$$

Найти те значения параметра λ, при которых существует ненулевое решение уравнения $X'' + \lambda X = 0$, удовлетворяющее краевым условиям

$$\alpha_1 X(0) + \beta_1 X'(0) = 0, \quad \alpha_2 X(l) + \beta_2 X'(l) = 0.$$

Определение. Те значения параметра λ, при которых задача (22) имеет ненулевое решение, называются *собственными*, а соответствующие им ненулевые решения – *собственными функциями* краевой задачи (22).

Свойства собственных значений и собственных функций задачи Штурма-Лиувилля (22).

1. Существует бесконечное счетное множество собственных значений $\{\lambda_n\}$ и соответствующих им собственных функций $\{X_n(x)\}$. Каждому собственному значению соответствует одна линейно независимая собственная функция.

2. Для любого n

$$\lambda_n \geq 0\,,$$

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = +\infty.$$

Если $|\alpha_1| + |\alpha_2| \neq 0$, то

$$\forall n: \ \lambda_n > 0.$$

В случае краевых условий $X'(0) = X'(l) = 0$ существует нулевое собственное значение $\lambda_0 = 0$, которому соответствует собственная функция $X_0 \equiv 1$.

3. Собственные функции ортогональны между собой, т.е.

$$\int_0^l X_k(x) X_m(x) dx = 0 \quad \text{при} \quad k \neq m.$$

Нормой функции $X_k(x)$ называется число

$$\|X_k(x)\| = \sqrt{\int_0^l X_k^2(x) dx}.$$

Рядом Фурье функции $f(x) \in C([0\,,\ l])$ по ортогональной системе функций $\{X_n(x)\}$ называется функциональный ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n X_n(x), \tag{23}$$

где

$$f_n = \frac{1}{\|X_n(x)\|^2} \int_0^l f(x) X_n(x) dx.$$

3.1. Метод разделения переменных для однородного уравнения гиперболического типа

Пусть требуется найти функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую уравнению

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} \ , \ \ 0 < x < l, \ t > 0 \, , \tag{24}$$

начальным условиям

$$u(x,0) = \varphi(x), \ u_t(x,0) = \psi(x), \quad 0 < x < \ l, \tag{25}$$

и краевым условиям

$$\alpha_1 u(0,t) + \beta_1 u_x(0,t) = 0 \ , \quad t > 0,$$

$$\alpha_2 u(l,t) + \beta_2 u_x(l,t) = 0 \, , \quad \alpha_i^2 + \beta_i^2 \neq 0, \ i = 1,2. \tag{26}$$

Сначала решаем вспомогательную задачу: найти ненулевое решение

$$u(x,t) = T(t)X(x) \tag{27}$$

уравнения (24), удовлетворяющее краевым условиям (26). Подставляя решение (27) в уравнение (24) и разделяя переменные, получаем

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(x)}{a^2 T(t)}.$$

Последнее равенство возможно только в случае, когда обе его части равны постоянной, которую обозначаем $-\lambda$, т.е.

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(x)}{a^2 T(t)} = -\lambda \, . \tag{28}$$

Из соотношения (28) следует, что функции $X(x)$ и $T(t)$ являются, соответственно, решениями уравнений $X''(x) + \lambda X(x) = 0$ и

$$T''(t) + a^2 \lambda T(t) = 0. \tag{29}$$

Поскольку $u(x,t) = T(t)X(x) \neq 0$, то ненулевая функция $X(x)$ удовлетворяет краевым условиям

$$\alpha_1 X(0) + \beta_1 X'(0) = 0, \quad \alpha_2 X(l) + \beta_2 X'(l) = 0.$$

Таким образом, $X(x)$ – собственная функция задачи Штурма-Лиувилля (22). Находим все собственные значения $\{\lambda_n\}$ и соответствующие им собственные функции $\{X_n(x)\}$ задачи (22).

Подставив найденные λ_n в (29), получаем уравнение $T_n''(t) + a^2\lambda_n T_n(t) = 0$. Если $\lambda_n > 0$, то общее решение этого уравнения имеет вид

$$T_n(t) = C_n \cos\sqrt{\lambda_n} at + D_n \sin\sqrt{\lambda_n} at\ .$$

Если $\lambda_0 = 0$, то $T_0(t) = D_0 t + C_0$, где C_n, D_n– произвольные постоянные.

Решение исходной задачи (24), (25), (26) ищем в виде суммы ряда

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x).$$

В случае, когда $|\alpha_1| + |\alpha_2| \neq 0$,

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n \cos\sqrt{\lambda_n} at + D_n \sin\sqrt{\lambda_n} at\ \right) X_n(x). \qquad (30)$$

Если краевые условия имеют вид $u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0$, то

$$u(x,t) = D_0 t + C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n \cos\sqrt{\lambda_n} at + D_n \sin\sqrt{\lambda_n} at\ \right) X_n(x). \quad (31)$$

Коэффициенты C_n и D_n рядов (30) и (31) находятся по формулам

$$C_n = \frac{1}{\|X_n(x)\|^2} \int_0^l \varphi(x) X_n(x) dx\,,\ \ n \in \mathbb{N},$$

$$D_n = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}\, a\, \|X_n(x)\|^2} \int_0^l \psi(x) X_n(x) dx\,,\ \ n \in \mathbb{N}.$$

Если $u(x,t)$ имеет вид (31), то

$$C_0 = \frac{1}{l} \int_0^l \varphi(x) dx\,,\quad D_0 = \frac{1}{l} \int_0^l \psi(x) dx\,.$$

3.2. Метод разделения переменных для неоднородного уравнения параболического типа

Будем решать начально-краевую задачу вида

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t)\,, & 0 < x < l\,,\ t > 0; \\ u(x,0) = \varphi(x), & 0 < x < l; \\ \alpha_1 u(0,t) + \beta_1 u_x(0,t) = 0, & t > 0; \\ \alpha_2 u(l,t) + \beta_2 u_x(l,t) = 0, & t > 0; \\ \alpha_i^2 + \beta_i^2 \neq 0, \quad i = 1,\ 2. \end{cases} \tag{32}$$

Сначала рассматриваем задачу Штурма-Лиувилля, ассоциированную с (32):

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, & 0 < x < l; \\ \alpha_1 X(0) + \beta_1 X'(0) = 0; \\ \alpha_2 X(l) + \beta_2 X'(l) = 0. \end{cases}$$

Находим собственные значения $\{\lambda_n\}$ и собственные функции $\{X_n(x)\}$. Решение $u(x,t)$ задачи (32) будем искать в виде суммы ряда

$$u(x,t) = \sum_{n=1(n=0)}^{\infty} T_n(t)\, X_n(x). \tag{33}$$

Разложим функции $f(x,t)$ и $\varphi(x)$ в ряды Фурье по ортогональной системе функций $\{X_n(x)\}$:

$$f(x,t) = \sum_{n=1(n=0)}^{\infty} f_n(t)\, X_n(x),$$

$$\varphi(x) = \sum_{n=1(n=0)}^{\infty} \varphi_n\, X_n(x),$$

где

$$f_n(t) = \frac{1}{\|X_n(x)\|^2} \int_0^l f(x,t) X_n(x) dx,$$

$$\varphi_n = \frac{1}{\|X_n(x)\|^2} \int_0^l \varphi(x) X_n(x) dx.$$

Подставив разложения функций $u(x,t)$, $f(x,t)$ и $\varphi(x)$ в неоднородное уравнение и начальные условия, а затем, приравняв коэффициенты при $X_n(x)$, получим для задачи Коши

$$\begin{cases} T_n'(t) + a^2 \lambda_n T_n(t) = f_n(t); \\ T_n(0) = \varphi_n \end{cases}$$

для нахождения функций $T_n(t)$.

Решение смешанной задачи

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + bu + f(x,t), & 0 < x < l\,,\ t > 0; \\ u(x,0) = \varphi(x), & 0 < x < l; \\ \alpha_1 u(0,t) + \beta_1 u_x(0,t) = 0, & t > 0; \\ \alpha_2 u(l,t) + \beta_2 u_x(l,t) = 0, & t > 0; \\ b \in \mathbb{R}\,,\ \alpha_i^2 + \beta_i^2 \neq 0,\ i = 1, 2, \end{cases} \tag{34}$$

может быть сведено к решению задачи (32) относительно неизвестной функции $v(x,t)$ после введения новой переменной v по формуле

$$u(x,t) = v(x,t) e^{bt}.$$

Пусть требуется решить начально-краевую задачу, у которой неоднородность уравнения и краевые условия стационарные, т.е. не зависят от t:

$$
\begin{cases}
u_t = a^2 u_{xx} + f(x), & 0 < x < l\,,\ t > 0; \\
u(x,0) = \varphi(x), & 0 < x < \ l; \\
\alpha_1 u(0,t) + \beta_1 u_x(0,t) = p, & t > 0; \\
\alpha_2 u(l,t) + \beta_2 u_x(l,t) = q, & t > 0; \\
p, q \in \mathbb{R}\,,\ \alpha_i^2 + \beta_i^2 \neq 0,\ i = 1, 2.
\end{cases}
\tag{35}
$$

В ряде случаев решение такой задачи может быть найдено в виде

$$
u(x,t) = v(x) + w(x,t),
\tag{36}
$$

где $v(x)$ – решение краевой задачи

$$
\begin{cases}
a^2 v''(x) + f(x) = 0,\ 0 < x < l; \\
\alpha_1 v(0) + \beta_1 v'(0) = p; \\
\alpha_2 v(l) + \beta_2 v'(l) = q
\end{cases}
\tag{37}
$$

(если такое решение существует), а $w(x,t)$ – решение редуцированной задачи

$$
\begin{cases}
w_t = a^2 w_{xx}, & 0 < x < l\,,\quad t > 0; \\
w(x,0) = \varphi(x) - v(x), & 0 < x < \ l; \\
\alpha_1 w(0,t) + \beta_1 w_x(0,t) = 0, & t > 0; \\
\alpha_2 w(l,t) + \beta_2 w_x(l,t) = 0.
\end{cases}
\tag{38}
$$

Замечание. В заданиях 5–7 требуется найти «формальное» решение смешанной задачи.

Задание 5. Однородное волновое уравнение

Методом разделения переменных решить начально-краевую задачу на отрезке.

1. $$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, \quad 0 < x < 2, \qquad t > 0; \\ u(x,0) = \sin \pi x, \qquad 0 < x < 2; \\ u_t(x,0) = \sin \dfrac{3\pi}{2} x, \quad 0 < x < 2; \\ u(0,t) = u(2,t) = 0, \qquad t > 0. \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} u_{tt} = 9u_{xx}, \qquad 0 < x < 1, \quad t > 0; \\ u(x,0) = \cos \dfrac{5\pi}{2} x, \qquad 0 < x < 1; \\ u_t(x,0) = \cos \dfrac{3\pi}{2} x, \qquad 0 < x < 1; \\ u_x(0,t) = u(1,t) = 0, \qquad t > 0. \end{cases}$$

3. $$\begin{cases} u_{tt} = 9u_x, \qquad 0 < x < 1, \quad t > 0; \\ u(x,0) = \cos 4\pi x, \qquad 0 < x < 1; \\ u_t(x,0) = \cos 2\pi x, \qquad 0 < x < 1; \\ u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0, \qquad t > 0. \end{cases}$$

4. $$\begin{cases} u_{tt} = 9u_{xx}, \qquad 0 < x < 1, \quad t > 0; \\ u(x,0) = \sin \dfrac{3\pi}{2} x, \qquad 0 < x < 1; \\ u_t(x,0) = \sin \dfrac{\pi}{2} x, \qquad 0 < x < 1; \\ u(0,t) = u_x(1,t) = 0, \qquad t > 0. \end{cases}$$

5. $$\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx}, \qquad 0 < x < 3, \quad t > 0; \\ u(x,0) = \sin \dfrac{5\pi}{3} x, \qquad 0 < x < 3; \\ u_t(x,0) = \sin \dfrac{\pi}{3} x, \qquad 0 < x < 3; \\ u(0,t) = u(3,t) = 0, \qquad t > 0. \end{cases}$$

6. $$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, \qquad 0 < x < 2, \quad t > 0; \\ u(x,0) = \cos \dfrac{3\pi}{4} x, \qquad 0 < x < 2; \\ u_t(x,0) = \cos \dfrac{7\pi}{4} x, \quad 0 < x < 2; \\ u_x(0,t) = u(2,t) = 0, \qquad t > 0. \end{cases}$$

7. $$\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx}, & 0 < x < 4, \quad t > 0; \\ u(x,0) = \cos\dfrac{5\pi}{4}x, & 0 < x < 4; \\ u_t(x,0) = \cos\dfrac{\pi}{4}x, & 0 < x < 4; \\ u_x(0,t) = u_x(4,t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

8. $$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, & 0 < x < 2, \quad t > 0; \\ u(x,0) = \sin\dfrac{5\pi}{4}x, & 0 < x < 2; \\ u_t(x,0) = \sin\dfrac{7\pi}{4}x, & 0 < x < 2; \\ u(0,t) = u_x(2,t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

9. $$\begin{cases} u_{tt} = 9u_{xx}, & 0 < x < 1, \quad t > 0; \\ u(x,0) = \sin \pi x, & 0 < x < 1; \\ u_t(x,0) = \sin 2\pi x, & 0 < x < 1; \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

10. $$\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx}, & 0 < x < 2, \quad t > 0; \\ u(x,0) = \cos\dfrac{5\pi}{4}x, & 0 < x < 2; \\ u_t(x,0) = \cos\dfrac{7\pi}{4}x, & 0 < x < 2; \\ u_x(0,t) = u(2,t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

11. $$\begin{cases} u_{tt} = 16u_{xx}, & 0 < x < 3, \quad t > 0; \\ u(x,0) = 5, & 0 < x < 3; \\ u_t(x,0) = \cos\dfrac{2\pi}{3}x, & 0 < x < 3; \\ u_x(0,t) = u_x(3,t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

12. $$\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx}, & 0 < x < 3, \quad t > 0; \\ u(x,0) = \sin\dfrac{5\pi}{6}x, & 0 < x < 3; \\ u_t(x,0) = \sin\dfrac{\pi}{2}x, & 0 < x < 3; \\ u(0,t) = u_x(3,t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

13. $$\begin{cases} u_{tt} = 25u_{xx}, & 0 < x < 2, \quad t > 0; \\ u(x,0) = \sin\dfrac{\pi}{2}x + 3\sin\pi x, & 0 < x < 2; \\ u_t(x,0) = 0, & 0 < x < 2; \\ u(0,t) = u(2,t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

14. $$\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx}, & 0 < x < 1, \quad t > 0; \\ u(x,0) = \cos\dfrac{5\pi}{2}x, & 0 < x < 1; \\ u_t(x,0) = \cos\dfrac{\pi}{2}x, & 0 < x < 1; \\ u_x(0,t) = u(1,t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

15. $$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, & 0 < x < 2, \quad t > 0; \\ u(x,0) = \cos\dfrac{3\pi}{2}x, & 0 < x < 2; \\ u_t(x,0) = 4, & 0 < x < 2; \\ u_x(0,t) = u_x(2,t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

16. $$\begin{cases} u_{tt} = 25u_{xx}, & 0 < x < 2, \quad t > 0; \\ u(x,0) = \sin\dfrac{3\pi}{4}x - 2\sin\dfrac{5\pi}{4}x, & 0 < x < 2; \\ u_t(x,0) = 0, & 0 < x < 2; \\ u(0,t) = u_x(2,t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

17. $$\begin{cases} 4u_{tt} = u_{xx}, & 0 < x < 1, \quad t > 0; \\ u(x,0) = \sin 4\pi x - 7\sin 3\pi x, & 0 < x < 1; \\ u_t(x,0) = 0, & 0 < x < 1; \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

18. $$\begin{cases} u_{tt} = 9u_{xx}, & 0 < x < 1, \quad t > 0; \\ u(x,0) = \cos\dfrac{\pi}{2}x, & 0 < x < 1; \\ u_t(x,0) = \cos\dfrac{5\pi}{2}x, & 0 < x < 1; \\ u_x(0,t) = u(1,t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

19. $$\begin{cases} u_{tt} = 25u_{xx}, & 0 < x < 1, \quad t > 0; \\ u(x,0) = 3 + 2\cos\pi x, & 0 < x < 1; \\ u_t(x,0) = 0, & 0 < x < 1; \\ u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

20. $$\begin{cases} 4u_{tt} = u_{xx}, & 0 < x < 1, \quad t > 0; \\ u(x,0) = \sin\dfrac{\pi}{2}x + 7\sin\dfrac{7\pi}{2}x, & 0 < x < 1; \\ u_t(x,0) = 0, & 0 < x < 1; \\ u(0,t) = u_x(1,t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

21. $$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, & 0 < x < 5, \quad t > 0; \\ u(x,0) = 0, & 0 < x < 5; \\ u_t(x,0) = 6\sin\dfrac{\pi}{5}x - \sin\dfrac{2\pi}{5}x, & 0 < x < 5; \\ u(0,t) = u(5,t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

22. $$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, & 0 < x < 2, \quad t > 0; \\ u(x,0) = \cos\dfrac{\pi}{4}x + 5\cos\dfrac{7\pi}{4}x, & 0 < x < 2; \\ u_t(x,0) = 0, & 0 < x < 2; \\ u_x(0,t) = u(2,t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

23. $$\begin{cases} u_{tt} = 9u_{xx}, & 0 < x < 2, \quad t > 0; \\ u(x,0) = 0, & 0 < x < 2; \\ u_t(x,0) = 7 - \cos\dfrac{5\pi}{2}x, & 0 < x < 2; \\ u_x(0,t) = u_x(2,t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

24. $$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, & 0 < x < 5, \quad t > 0; \\ u(x,0) = 0, & 0 < x < 5; \\ u_t(x,0) = 2\sin\dfrac{3\pi}{10}x - \sin\dfrac{\pi}{2}x, & 0 < x < 5; \\ u(0,t) = u_x(5,t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

25.
$$\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx}, & 0 < x < 4, \quad t > 0; \\ u(x,0) = 0, & 0 < x < 4; \\ u_t(x,0) = \sin\dfrac{3\pi}{4}x - 2\sin\dfrac{7\pi}{4}x, & 0 < x < 4; \\ u(0,t) = u(4,t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

26.
$$\begin{cases} u_{tt} = 25u_{xx}, & 0 < x < 1, \quad t > 0; \\ u(x,0) = \cos\dfrac{5\pi}{2}x - 2\cos\dfrac{7\pi}{2}x, & 0 < x < 1; \\ u_t(x,0) = 0, & 0 < x < 1; \\ u_x(0,t) = u(1,t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

27.
$$\begin{cases} 4u_{tt} = u_{xx}, & 0 < x < 7, \quad t > 0; \\ u(x,0) = 0, & 0 < x < 7; \\ u_t(x,0) = \cos\dfrac{\pi}{7}x - 3\cos\dfrac{2\pi}{7}x, & 0 < x < 7; \\ u_x(0,t) = u_x(7,t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

28.
$$\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx}, & 0 < x < 4, \quad t > 0; \\ u(x,0) = 0, & 0 < x < 4; \\ u_t(x,0) = \sin\dfrac{\pi}{8}x - 2\sin\dfrac{5\pi}{8}x, & 0 < x < 4; \\ u(0,t) = u_x(4,t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

29.
$$\begin{cases} 4u_{tt} = u_{xx}, & 0 < x < 1, \quad t > 0; \\ u(x,0) = 0, & 0 < x < 1; \\ u_t(x,0) = 4\cos\dfrac{3\pi}{2}x + \cos\dfrac{5\pi}{2}x, & 0 < x < 1; \\ u_x(0,t) = u(1,t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

30.
$$\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx}, & 0 < x < 3, \quad t > 0; \\ u(x,0) = 0, & 0 < x < 3; \\ u_t(x,0) = \sin\dfrac{\pi}{2}x + \sin\dfrac{5\pi}{6}x, & 0 < x < 3; \\ u(0,t) = u_x(3,t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

Задание 6. Постановка и решение начально-краевой задачи

Поставить и решить начально-краевую задачу на отрезке.

1. Поставить и решить начально-краевую задачу о малых продольных колебаниях однородного стержня длины l с жесткозакрепленным левым концом $(x = 0)$ и со свободным правым концом $(x = l)$. Начальное отклонение равно $\sin\frac{2\pi x}{l}$, начальная скорость – нулевая.

2. Поставить и решить начально-краевую задачу о малых поперечных колебаниях струны длиной l со свободными концами. Начальное отклонение равно $x(2l - x)$, начальная скорость – нулевая.

3. Дан тонкий однородный стержень длиной l, боковая поверхность которого теплоизолирована. Поставить и решить начально-краевую задачу о распределении температуры в стержне, если левый конец стержня $(x = 0)$ теплоизолирован, а температура его правого конца $(x = l)$ поддерживается равной нулю. Начальная температура стержня равна $A(x - l)$, где $A = \text{const}$.

4. Поставить и решить начально-краевую задачу о малых продольных колебаниях однородного стержня длиной l с жесткозакрепленными концами. Начальное отклонение – нулевое, начальная скорость равна $l - x$.

5. Поставить и решить начально-краевую задачу о малых поперечных колебаниях струны длиной l со свободным левым концом $(x = 0)$ и жесткозакрепленным правым $(x = l)$. Начальное отклонение равно $l^2 - x^2$, начальная скорость – нулевая.

6. Дан тонкий однородный стержень длиной l, боковая поверхность которого теплоизолирована. Поставить и решить начально-краевую задачу о распределении температуры в стержне, если концы стержня теплоизолированы, а начальная температура стержня равна $4x + 3$.

7. Дан тонкий однородный стержень длиной l, боковая поверхность которого теплоизолирована. Поставить и решить начально-краевую задачу о распределении температуры в стержне, если температура его левого конца $(x = 0)$ поддерживается равной нулю, а

правый конец $(x = l)$ теплоизолирован. Начальная температура стержня равна $\sin\frac{\pi x}{l}$.

8. Поставить и решить начально-краевую задачу о малых поперечных колебаниях струны длиной l с жесткозакрепленными концами. Начальное отклонение равно $x(l - x)$, начальная скорость – нулевая.

9. Поставить и решить начально-краевую задачу о малых продольных колебаниях однородного стержня длиной l со свободным левым концом $(x = 0)$ и жесткозакрепленным правым $(x = l)$. Начальное отклонение – нулевое, начальная скорость равна x^2.

10. Поставить и решить начально-краевую задачу о малых продольных колебаниях однородного стержня длиной l со свободными концами. Начальное отклонение равно $x^2 - lx$, начальная скорость – нулевая.

11. Дан тонкий однородный стержень длиной l, боковая поверхность которого теплоизолирована. Поставить и решить начально-краевую задачу о распределении температуры в стержне, если температура его левого конца $(x = 0)$ поддерживается равной нулю, а правый конец $(x = l)$ теплоизолирован. Начальная температура стержня равна Ax, где $A = \mathrm{const}$.

12. Поставить и решить начально-краевую задачу о малых поперечных колебаниях струны длиной l с жесткозакрепленными концами. Начальное отклонение – нулевое, начальная скорость – $\cos\frac{\pi x}{2l}$.

13. Поставить и решить начально-краевую задачу о малых поперечных колебаниях струны длиной l с жесткозакрепленным левым концом $(x = 0)$ и со свободным правым концом $(x = l)$. Начальное отклонение – нулевое, начальная скорость равна $\sin\frac{\pi x}{l}$.

14. Поставить и решить начально-краевую задачу о малых продольных колебаниях однородного стержня длиной l со свободными концами. Начальное отклонение – нулевое, начальная скорость равна x^2.

15. Дан тонкий однородный стержень длиной l, боковая поверхность которого теплоизолирована. Поставить и решить начально-краевую задачу о распределении температуры в стержне, если левый конец стержня $(x = 0)$ теплоизолирован, а температура его

правого конца $(x = l)$ поддерживается равной нулю. Начальная температура стержня равна $\cos\frac{2\pi x}{l}$.

16. Поставить и решить начально-краевую задачу о малых поперечных колебаниях струны длиной l со свободными концами. Начальное отклонение – нулевое, начальная скорость равна $x + l$.

17. Поставить и решить начально-краевую задачу о малых продольных колебаниях однородного стержня длиной l с жесткозакрепленным левым концом $(x = 0)$ и со свободным правым концом $(x = l)$. Начальное отклонение – нулевое, начальная скорость равна $\operatorname{sh}\frac{2x}{l}$.

18. Дан тонкий однородный стержень длиной l, боковая поверхность которого теплоизолирована. Поставить и решить начально-краевую задачу о распределении температуры в стержне, если концы стержня теплоизолированы, а начальная температура стержня равна x^2.

19. Поставить и решить начально-краевую задачу о малых поперечных колебаниях струны длиной l со свободным левым концом $(x = 0)$ и жесткозакрепленным правым $(x = l)$. Начальное отклонение равно $\sin\frac{\pi x}{l}$, начальная скорость – нулевая.

20. Поставить и решить начально-краевую задачу о малых продольных колебаниях однородного стержня длиной l со свободными концами. Начальное отклонение равно $\sin\frac{\pi x}{l}$, начальная скорость – нулевая.

21. Дан тонкий однородный стержень длиной l, боковая поверхность которого теплоизолирована. Поставить и решить начально-краевую задачу о распределении температуры в стержне, если температура его левого конца $(x = 0)$ поддерживается равной нулю, а правый конец $(x = l)$ теплоизолирован. Начальная температура стержня равна A, где $A = \text{const}$.

22. Поставить и решить начально-краевую задачу о малых продольных колебаниях однородного стержня длиной l с жесткозакрепленными концами. Начальное отклонение равно $x \cdot \sin\frac{\pi x}{l}$, начальная скорость – нулевая.

23. Поставить и решить начально-краевую задачу о малых поперечных колебаниях струны длиной l со свободным левым концом

$(x = 0)$ и жесткозакрепленным правым $(x = l)$. Начальное отклонение – нулевое, начальная скорость – $\cos\frac{\pi x}{l}$.

24. Дан тонкий однородный стержень длиной l, боковая поверхность которого теплоизолирована. Поставить и решить начально-краевую задачу о распределении температуры в стержне, если температура его концов поддерживается равной нулю, а начальная температура стержня равна $\cos\frac{\pi x}{2l}$.

25. Поставить и решить начально-краевую задачу о малых продольных колебаниях однородного стержня длиной l с жесткозакрепленным левым концом $(x = 0)$ и со свободным правым концом $(x = l)$. Начальное отклонение – нулевое, начальная скорость равна Ax, где $A = \text{const}$.

26. Дан тонкий однородный стержень длиной l, боковая поверхность которого теплоизолирована. Поставить и решить начально-краевую задачу о распределении температуры в стержне, если температура его концов поддерживается равной нулю, а начальная температура стержня равна $\sin\frac{\pi x}{2l}$.

27. Поставить и решить начально-краевую задачу о малых поперечных колебаниях струны длиной l с жесткозакрепленным левым концом $(x = 0)$ и со свободным правым концом $(x = l)$. Начальное отклонение равно $\operatorname{sh}\frac{x}{l}$, начальная скорость – нулевая.

28. Дан тонкий однородный стержень длиной l, боковая поверхность которого теплоизолирована. Поставить и решить начально-краевую задачу о распределении температуры в стержне, если температура его концов поддерживается равной нулю, а начальная температура стержня равна $e^{\frac{x}{l}}$.

29. Поставить и решить начально-краевую задачу о малых продольных колебаниях однородного стержня длиной l со свободными концами. Начальное отклонение равно $\sin\frac{\pi x}{l}$, начальная скорость – нулевая.

30. Поставить и решить начально-краевую задачу о малых поперечных колебаниях струны длиной l со свободным левым концом $(x = 0)$ и жесткозакрепленным правым $(x = l)$. Начальное отклонение – нулевое, начальная скорость $l - x$.

Задание 7. Неоднородное уравнение параболического типа

Методом разделения переменных решить начально-краевую задачу на отрезке.

1. $$\begin{cases} u_t = u_{xx} + xe^{-3t}, \ \ t > 0, \ \ 0 < x < \pi; \\ u(x,0) = 0, \qquad\qquad\qquad 0 < x < \pi; \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0, \qquad\quad t > 0. \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} u_t = u_{xx} - 6x, \quad t > 0, \qquad 0 < x < 1; \\ u(x,0) = x^3, \qquad\qquad\qquad 0 < x < 1; \\ u(0,t) = 0, \qquad u(1,t) = 5, \qquad t > 0. \end{cases}$$

3. $$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 2u + e^t \sin 3x, \ \ t > 0, \qquad 0 < x < \pi; \\ u(x,0) = \sin x, \qquad\qquad\qquad\qquad 0 < x < \pi; \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \qquad\qquad\qquad\quad t > 0. \end{cases}$$

4. $$\begin{cases} u_t = u_{xx} + (4x+1)t, \ \ t > 0, \qquad 0 < x < 1; \\ u(x,0) = 0\ , \qquad\qquad\qquad\qquad 0 < x < 1; \\ u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0, \qquad\qquad\quad t > 0. \end{cases}$$

5. $$\begin{cases} u_t = u_{xx} - 5u + \cos 7x, \ \ t > 0, \qquad 0 < x < \pi; \\ u(x,0) = 2, \qquad\qquad\qquad\qquad 0 < x < \pi; \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0, \qquad\qquad\quad t > 0. \end{cases}$$

6. $$\begin{cases} u_t = u_{xx} + u + te^t \sin \pi x, \ \ t > 0, \qquad 0 < x < 1; \\ u(x,0) = \sin 2\pi x, \qquad\qquad\qquad\quad 0 < x < 1; \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, \qquad\qquad\qquad\quad t > 0. \end{cases}$$

7. $$\begin{cases} u_t = u_{xx} + xe^{-2t}, \ \ t > 0, \qquad 0 < x < \pi; \\ u(x,0) = 0, \qquad\qquad\qquad 0 < x < \pi; \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \qquad\quad t > 0. \end{cases}$$

8. $$\begin{cases} u_t = u_{xx} + u + e^t \sin t \cos 2x, \ \ t > 0, \qquad 0 < x < \pi; \\ u(x,0) = 0, \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 < x < \pi; \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0, \qquad\qquad\qquad t > 0. \end{cases}$$

9. $$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 2 - 6x, \ \ t > 0, & 0 < x < 1; \\ u(x,0) = x^3 + x, & 0 < x < 1; \\ u_x(0,t) = 1\,, \qquad u_x(1,t) = 2\,, & t > 0. \end{cases}$$

10. $$\begin{cases} u_t = u_{xx} + x \cdot \sin t\,, \ \ t > 0, & 0 < x < \pi; \\ u(x,0) = 0, & 0 < x < \pi; \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

11. $$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 2\,, \ \ t > 0, & 0 < x < 1; \\ u(x,0) = x(1-x), & 0 < x < 1; \\ u(0,t) = 1, \qquad u(1,t) = 0, & t > 0; \end{cases}$$

12. $$\begin{cases} u_t = u_{xx} - u + e^{2t} \cos 3\pi x, \ \ t > 0, & 0 < x < 1; \\ u(x,0) = 2\cos 2\pi x, & 0 < x < 1; \\ u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

13. $$\begin{cases} u_t = u_{xx} + (2x-1)\cos t, \ \ t > 0, & 0 < x < 1; \\ u(x,0) = 0, & 0 < x < 1; \\ u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

14. $$\begin{cases} u_t = u_{xx} + x(t+1), \ \ t > 0, & 0 < x < \pi; \\ u(x,0) = 0, & 0 < x < \pi; \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

15. $$\begin{cases} u_t = u_{xx} - 2u + e^{-2t}\cos t \cdot \sin 2x, \ t > 0, & 0 < x < \pi; \\ u(x,0) = 0, & 0 < x < \pi; \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

16. $$\begin{cases} u_t = u_{xx} + (x-\pi)\cos t, \ t > 0, & 0 < x < \pi; \\ u(x,0) = 0, & 0 < x < \pi; \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

17. $$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 2u - t, \qquad t > 0, & 0 < x < 1; \\ u(x,0) = \cos \pi x, & 0 < x < 1; \\ u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

18. $$\begin{cases} u_t = u_{xx} - 4, \ \ t > 0, & 0 < x < 1; \\ u(x,0) = 2x^2, & 0 < x < 1; \\ u(0,t) = 3, \quad u(1,t) = 2, & t > 0. \end{cases}$$

19. $$\begin{cases} u_t = u_{xx} + (x-1)t, \ \ t > 0, & 0 < x < 1; \\ u(x,0) = 0, & 0 < x < 1; \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

20. $$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 3u - 5e^{2t}\sin 4x, \ \ t > 0, & 0 < x < \pi; \\ u(x,0) = \sin 5x, & 0 < x < \pi; \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

21. $$\begin{cases} u_t = u_{xx}, \quad t > 0, & 0 < x < 1; \\ u(x,0) = x^2, & 0 < x < 1; \\ u_x(0,t) = 2, \quad u_x(1,t) = 2, & t > 0. \end{cases}$$

22. $$\begin{cases} u_t = u_{xx} + x\sin 2t, \ \ t > 0, & 0 < x < \pi; \\ u(x,0) = 0, & 0 < x < \pi; \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

23. $$\begin{cases} u_t = u_{xx}, \quad t > 0, & 0 < x < 1; \\ u(x,0) = x, & 0 < x < 1; \\ u(0,t) = 3, \quad u(1,t) = 3, & t > 0. \end{cases}$$

24. $$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 3u + e^{3t}\sin 2t, \quad t > 0, & 0 < x < \pi; \\ u(x,0) = \cos 4x, & 0 < x < \pi; \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0\,, & t > 0. \end{cases}$$

25. $$\begin{cases} u_t = u_{xx} + x^2 t, \ \ t > 0, & 0 < x < \pi; \\ u(x,0) = 0, & 0 < x < \pi; \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

26. $$\begin{cases} u_t = u_{xx} + \pi\sin\pi x, \ \ t > 0, & 0 < x < 1; \\ u(x,0) = x, & 0 < x < 1; \\ u_x(0,t) = 2, \quad u_x(1,t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

27. $$\begin{cases} u_t = u_{xx} - 2u + e^{-2t}\cos t \cdot \sin 2x, & t > 0,\ 0 < x < \pi; \\ u(x,0) = 0, & 0 < x < \pi; \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

28. $$\begin{cases} u_t = u_{xx} + \pi\cos\frac{\pi x}{2}, \quad t > 0, & 0 < x < 1; \\ u(x,0) = x, & 0 < x < 1; \\ u_x(0,t) = 1, \quad u_x(1,t) = -1, & t > 0. \end{cases}$$

29. $$\begin{cases} u_t = u_{xx} + (x-1)e^{-t}, \quad t > 0, & 0 < x < 1; \\ u(x,0) = 0, & 0 < x < 1; \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

30. $$\begin{cases} u_t = u_{xx}, \quad t > 0, & 0 < x < 1; \\ u(x,0) = 3x + 5, & 0 < x < 1; \\ u(0,t) = 4, \quad u(1,t) = 2, & t > 0. \end{cases}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 2004.
2. Свешников А.Г., Боголюбов Ф.Н., Кравцов В.В. Лекции по математической физике. М.: Изд-во МГУ, 2004.
3. Арсенин В.Я. Методы математической физики и специальные функции. М.: Наука, 1984.
4. Костин А.Б., Тихонов И.В., Ткаченко Д.С. Уравнения математической физики. Пособие по практическим занятиям. Ч. I. М.: МИФИ, 2007.
5. Леонов А.С., Волков Н.П. Сборник задач по вариационному исчислению и уравнениям математической физики. М.: НИЯУ МИФИ, 2010.
6. Комеч А.И. Практическое решение уравнений математической физики. Учеб.-метод. пособие. М.: Изд-во мех.-мат. фак. МГУ, 1993.

СОДЕРЖАНИЕ

Ирина Львовна Гусева
Ольга Владимировна Шерстюкова

СБОРНИК ДОМАШНИХ ЗАДАНИЙ ПО УРАВНЕНИЯМ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Учебно-методическое пособие

Редактор М.В. Макарова

Подписано в печать 15.11.2011. Формат 60x84 1/16.
Печ. л. 3,0. Уч.-изд. л. 3,5. Тираж 300 экз.
Изд. № 2/31. Заказ № 30.

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ».
115409, Москва, Каширское шоссе, 31.

ООО «Полиграфический комплекс «Курчатовский».
144000, Московская область, г. Электросталь, ул. Красная, 42

ДЛЯ ЗАМЕТОК