Федеральное агентство по образованию
Национальный исследовательский ядерный университет
„МИФИ“

В. В. Быков, М. В. Смоленцев

Классические методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений

Учебно-методическое пособие

Москва 2009

УДК 517.91(075)
ББК 22.161.6я7
Б 95

Быков В.В., Смоленцев М.В. Классические методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений: Учебно-методическое пособие. — М.: НИЯУ МИФИ, 2009. — 62 с.

Учебное пособие написано на основе чтения лекций и проведения семинаров в группах гуманитарного факультета МИФИ и механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова. Сформулированы основные определения и теоремы, подробно описаны наиболее важные методы решения задач, детально разобрано большое количество примеров. Подобраны задачи в количестве, достаточном для упражнений.

Предназначено для студентов Института инновационного менеджмента гуманитарного факультета, может быть использовано преподавателями при проведении семинарских занятий по курсу высшей математики.

Рецензент д-р физ.-мат. наук, профессор А.В. Крянев.

Рекомендовано редсоветом МИФИ
к изданию в качестве учебно-методического пособия.

ISBN 978-5-7262-1183-1

Оглавление

1. Понятие решения дифференциального уравнения

Дифференциальным уравнением n-го порядка называется запись вида

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, \tag{1.1}$$

где функция F существенно зависит от последнего аргумента.

Любая функция y, определенная на некотором интервале $I \subset \mathbf{R}$, имеющая непрерывные производные до порядка n включительно и такая, что

$$F(x, y(x), y'(x), ..., y^{(n)}(x)) \equiv 0, \ x \in I, \tag{1.2}$$

называется *решением* дифференциального уравнения (1.1).

На практике тождество (1.2) используется для проверки полученного каким-либо методом решения. Решение может быть представлено явно заданной функцией, параметрически заданной функцией и неявно заданной функцией.

Рассмотрим несколько примеров, в каждом из которых будем пользоваться определением решения дифференциального уравнения и техникой нахождения производных.

1.1. Функция, заданная явно

Для работы с явно заданной функцией требуется знание таблицы производных и правило нахождения производной сложной функции, которое заключается в следующем: если функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x_0, а функция $z = g(y)$ — в точке $y_0 = f(x_0)$, то сложная функция $z = \varphi(x) = g(f(x))$ также имеет производную в точке x_0, причем

$$\varphi'(x_0) = g'(y_0) f'(x_0).$$

Пример 1. Проверить, является ли функция

$$y = (x + \sqrt{1 + x^2})^{10}$$

решением дифференциального уравнения

$$(1 + x^2) y'' + x y' - 100 y = 0.$$

Найдем y' и y'':

$$y' = \left(\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)^{10}\right)' =$$

$$= 10 \left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)^9 \left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)' =$$

$$= 10\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^9\left(1+\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\,2x\right) =$$

$$= 10\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^9\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}} = 10\frac{\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^{10}}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$$y'' = 10\left(\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^{10}\right)'\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} -$$

$$-10\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^{10}\left(\sqrt{1+x^2}\right)'\frac{1}{1+x^2} =$$

$$= 10\,\frac{10\,(x+\sqrt{1+x^2})^{10}}{\sqrt{1+x^2}}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} -$$

$$-10\,(x+\sqrt{1+x^2})^{10}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\frac{1}{1+x^2} =$$

$$= \frac{10\,(x+\sqrt{1+x^2})^{10}}{1+x^2}\left(10-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right).$$

Подставим y, y' и y'' в данное уравнение:

$$\frac{(1+x^2)10\,(x+\sqrt{1+x^2})^{10}}{1+x^2}\left(10-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) +$$

$$+\frac{10x\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^{10}}{\sqrt{1+x^2}} - 100\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^{10} =$$

$$= 10\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^{10}\left(10-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-10\right) = 0.$$

Получили тождество $0 = 0$. Следовательно, данная функция является решением данного уравнения.

1.2. Функция, заданная параметрически

Пусть функции $x = x(t)$ и $y = y(t)$ определены и дифференцируемы на некотором интервале I, причем $x'(t) \neq 0$. Тогда функция $x = x(t)$ имеет дифференцируемую обратную $t = t(x)$, $x \in J$, а $x(t)$ и $y(t)$ параметрически задают на интервале J дифференцируемую функцию $y = f(x) = y(t(x))$, производная которой может быть найдена по формуле

$$f'(x(t)) = \frac{y'(t)}{x'(t)}. \qquad (1.3)$$

Последнюю формулу часто кратко записывают в виде

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Если $x(t)$ и $y(t)$ имеют производные порядка k, то параметрически заданная функция — тоже. Последующие производные функции f находятся путем дифференцирования тождества (1.3).

Пример 2. Проверить, является ли параметрически заданная функция $x(t) = t^3 + t$, $y(t) = \frac{3}{4}t^4 + \frac{1}{2}t^2 + 1$ решением дифференциального уравнения $y''(1 + 3(y')^2) = 1$.

Найдем y'_x и y''_{xx}:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{(\frac{3}{4}t^4 + \frac{1}{2} + 1)'}{(t^3 + t)'} = \frac{3t^3 + t}{3t^2}.$$

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \left(\frac{3t^3 + t}{3t^2 + 1}\right)' \frac{1}{3t^2 + 1} =$$

$$= \frac{(3t^3 + t)'(3t^2 + 1) - (3t^3 + t)(3t^2 + 1)'}{(3t^2 + 1)^2(3t^2 + 1)} =$$

$$= \frac{(9t^2 + 1)(3t^2 + 1) - (3t^3 + t)6t}{(3t^2 + 1)^3} =$$

$$= \frac{27t^4 + 12t^2 + 1 - 18t^4 - 6t^2}{(3t^2 + 1)^3} = \frac{9t^4 + 6t^2 + 1}{(3t^2 + 1)^3} =$$

$$= \frac{(3t^2 + 1)^2}{(3t^2 + 1)^3} = \frac{1}{3t^2 + 1}.$$

Подставим y'_x и y''_{xx} в данное уравнение:

$$\frac{1}{3t^2 + 1}\left(1 + \frac{3(3t^3 + t)^2}{(3t^2 + 1)^2}\right) - 1 =$$

$$= \frac{(3t^2 + 1)^2 + 3(3t^3 + t)^2}{(3t^2 + 1)^3} - 1 =$$

$$= \frac{9t^4 + 6t^2 + 1 + 3(9t^6 + 6t^4 + t^2) - (3t^2 + 1)^3}{(3t^2 + 1)^3} = 0.$$

Получили тождество $0 = 0$. Следовательно, данная функция является решением данного уравнения.

1.3. Функция, заданная неявно

Пусть функция F задана и имеет непрерывные производные до порядка $k \geq 1$ включительно в некоторой окрестности точки (x_0, y_0), причем $F(x_0, y_0) = 0$ и $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$.

Тогда найдутся такие окрестности $I_x \ni x_0$ и $I_y \ni y_0$ и такая k раз дифференцируемая функция $f\colon I_x \to I_y$, что

$$F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x) \quad \text{при } x \in I_x \text{ и } y \in I_y.$$

В этом случае говорят, что $y = f(x)$ неявно задана уравнением $F(x,y) = 0$.

Производная неявно заданной функции находится по формуле

$$f'(x) = -\frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}, \tag{1.4}$$

которая не требует специального запоминания, так как получается дифференцированием (по x) тождества $F(x, f(x)) = 0$. Последующие производные функции f находятся путем дифференцирования тождества (1.4).

Пример 3. Проверить, является ли неявно заданная функция $y - A\ln y - x - B = 0$ (A, B — константы) решением дифференциального уравнения $yy'' - (y')^2 + (y')^3 = 0$.

Найдем y' и y'' ($y = y(x)$):

$$(y - A\ln y - x - B)'_x = 0 \Leftrightarrow y' - A\frac{1}{y}y' - 1 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow y'\left(1 - \frac{A}{y}\right) - 1 = 0 \Leftrightarrow y' = \frac{y}{y - A}.$$
$$y'' = \left(\frac{y}{y-A}\right)'_x = \frac{y'(y-A) - yy'}{(y-A)^2} = \frac{y'(y-A-y)}{(y-A)^2} =$$
$$= -\frac{Ay'}{(y-A)^2} = -\frac{Ay}{(y-A)^3}.$$

Подставим y, y' и y'' в данное уравнение:

$$y\left(-\frac{Ay}{(y-A)^3}\right) - \frac{y^2}{(y-A)^2} + \frac{y^3}{(y-A)^3} =$$
$$= -\frac{Ay^2}{(y-A)^3} - \frac{y^2}{(y-A)^2} + \frac{y^3}{(y-A)^3} =$$
$$= \frac{-Ay^2 - y^2(y-A) + y^3}{(y-A)^3} = \frac{-Ay^2 - y^3 + Ay^2 + y^3}{(y-A)^3} = 0.$$

Получили тождество $0 = 0$. Следовательно, данная функция является решением данного уравнения.

2. Уравнения в дифференциалах

Уравнением *в дифференциалах* называется уравнение вида

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0, \tag{2.1}$$

где функции M и N определены и непрерывны в некоторой области $D \subset \mathbf{R}^2$ и не обращаются в нуль одновременно.

Решением уравнения в дифференциалах называется такая кривая $\Gamma \subset D$, заданная уравнением $F(x,y) = 0$, что выполнены условия:

1. Функция F имеет непрерывные частные производные $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)$, $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)$, которые в точках кривой Γ не обращаются в нуль одновременно;

2. $M(x,y) \cdot \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) - N(x,y) \cdot \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = 0$ во всех точках кривой Γ.

Геометрически это означает, что касательная к кривой Γ в каждой ее точке (x,y) имеет направление, задаваемое вектором с координатами $(M(x,y), N(x,y))$.

Связь между уравнением вида (2.1) и рассмотренным ранее уравнением вида $y' = f(x,y)$ заключается в следующем.

1) Если функция $\varphi\colon I \to \mathbf{R}$ является решением уравнения (напомним, что $y' = \frac{dy}{dx}$)

$$y' = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}, \tag{2.2}$$

то ее график

$$\Gamma_\varphi = \{(x,y) \mid x \in I,\ y = \varphi(x)\},$$

задаваемый уравнением $y - \varphi(x) = 0$, является решением уравнения (2.1).

2) Если кривая Γ является решением уравнения (2.1) и имеет в точке $(x_0, y_0) \in \Gamma$ невертикальную касательную, то существует такая окрестность U этой точки, что множество $\Gamma \cap U$ есть график некоторой функции $y = \varphi(x)$, являющейся решением уравнения (2.2).

3) Аналогично, в некоторой окрестности точки, в которой касательная негоризонтальна, решение уравнения (2.1) представляет собой график некоторой функции $x = \psi(y)$, являющейся решением уравнения

$$x' = -\frac{N(x,y)}{M(x,y)},$$

где $x' = \frac{dx}{dy}$.

Однако, как видно из приведенного ниже примера, уравнение вида (2.1) может иметь в качестве решений кривые, не являющиеся (в целом) графиками функций $y = \varphi(x)$ или $x = \psi(y)$.

Пример 1. Проверим, что при всяком $C > 0$ кривая, заданная уравнением $x^2 + y^2 - C = 0$, является решением уравнения

$$x\,dx + y\,dy = 0.$$

Действительно, частные производные

$$\frac{\partial(x^2 + y^2 - C)}{\partial x} = 2x \quad \text{и} \quad \frac{\partial(x^2 + y^2 - C)}{\partial y} = 2y$$

непрерывны и обращаются в нуль одновременно только в точке $(0, 0)$, которая не удовлетворяет уравнению кривой. Далее,

$$x \cdot 2y - y \cdot 2x \equiv 0.$$

Указанная кривая представляет собой окружность с центром в начале координат. Она не является графиком какой-либо функции $y = \varphi(x)$ (или $x = \psi(y)$), так как пересекается с прямой $x = 0$ (соответственно, $y = 0$) в двух точках. Однако эта кривая содержит графики функций $y = \sqrt{C - x^2}$ и $y = -\sqrt{C - x^2}$, $x \in (-\sqrt{C}, \sqrt{C})$, также являющиеся решениями данного уравнения.

3. Уравнения с разделяющимися переменными

3.1. Уравнением с разделяющимися переменными называется уравнение вида

$$y' = f(x)g(y) \tag{3.1}$$

или вида

$$P(x)Q(y)\,dx + R(x)S(y)\,dy = 0, \tag{3.2}$$

где все функции f, g, P, Q, R и S непрерывны.

Решения уравнений данного типа ищутся следующим образом.

1. Перепишем уравнение (3.1) в виде $\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$ и “разделим” переменные:

   $$\frac{dy}{g(y)} = f(x)\,dx.$$

   Для уравнения (3.2) данный шаг выглядит так:

   $$\frac{P(x)}{R(x)}\,dx = -\frac{S(y)}{Q(y)}\,dy.$$

2. Проинтегрируем левую часть полученного соотношения по y, а правую по x:
$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx.$$
Точнее говоря, пусть $G(y)$ — какая-либо из первообразных функции $1/g(y)$, а $F(x)$ — какая-либо из первообразных функции $f(x)$. Тогда формула
$$G(y) = F(x) + C,\ C \in \mathbf{R}, \tag{3.3}$$
задает неявно решения исходного уравнения. Под этим мы всегда будем понимать следующее: если дифференцируемая функция $y\colon I \to \mathbf{R}$ для некоторого $C \in \mathbf{R}$ удовлетворяет тождеству
$$G(y(x)) = F(x) + C, x \in I,$$
(т. е. неявно задается соотношением (3.3)), то она является решением рассматриваемого уравнения.

   Для уравнения (3.2) данный шаг полностью аналогичен.

3. Уравнение (3.1) имеет еще решения вида
$$y \equiv y_0,$$
где y_0 — корень уравнения $g(y) = 0$. Эти решения были “потеряны”, когда мы делили обе части уравнения на $g(y)$.

   По тем же причинам уравнение (3.2) имеет еще решения вида
$$y \equiv y_0,$$
где y_0 — корень уравнения $Q(y) = 0$, и решения вида
$$x \equiv x_0,$$
где x_0 — корень уравнения $R(x) = 0$.

Ф.51.*) Решить уравнение $xy\,dx + (x+1)\,dy = 0$.
Разделяем переменные:
$$-\frac{x\,dx}{x+1} = \frac{dy}{y}.$$

*) Задачи взяты из сборника задач [4].

Интегрируем левую часть:

$$-\int \frac{x\,dx}{x+1} = -\int \frac{(x+1-1)\,dx}{x+1} = \int \frac{dx}{x+1} - \int dx = \\ = \ln|x+1| - x + C.$$

Интегрируем правую часть:

$$\int \frac{dy}{y} = \ln|y| + C.$$

Таким образом, решения нашего уравнения задаются неявно соотношением:

$$\ln|x+1| - x + C = \ln|y|,\ \ C \in \mathbf{R}.$$

Потенцируя, получаем

$$e^C|x+1|e^{-x} = |y|$$

или

$$\pm e^C(x+1)e^{-x} = y.$$

Следующий прием будет использоваться неоднократно в дальнейшем. Заметим, что константа e^C может быть произвольным положительным числом. Далее, как видно из формулы, функция y непрерывна и нигде не обращается в нуль, поэтому знак плюс или минус в этом соотношении выбирается не для каждого x отдельно, а сразу для всей области определения. Поэтому можно "включить" знак в произвольную постоянную, которая таким образом будет произвольным положительным или отрицательным числом.

Итак, получили формулу для решений

$$y = C(x+1)e^{-x}, \tag{3.4}$$

где C — произвольное число не равное 0. Согласно п.3 рассматриваемое уравнение имеет еще решения $y \equiv 0$ и $x \equiv -1$. Первое из них получается, если в формуле (3.4) взять $C = 0$.

Окончательно получаем

$$\left[\begin{array}{l} y = C(x+1)e^{-x}, \quad C \in \mathbf{R}, \\ x = -1. \end{array}\right.$$

Ф.57. Решить уравнение $2x^2yy' + y^2 = 2$.

Сначала перепишем уравнение в виде

$$2x^2y\frac{dy}{dx} + y^2 = 2.$$

Затем разделяем переменные и интегрируем:

$$\int \frac{2ydy}{2-y^2} = \int \frac{dx}{x^2}.$$

Для вычисления интеграла, стоящего в левой части, внесем выражение, стоящее в знаменателе, под дифференциал:

$$\int \frac{2ydy}{2-y^2} = -\int \frac{d(2-y^2)}{2-y^2} = -\ln|2-y^2| + C.$$

Таким образом, получаем (C — произвольная постоянная)

$$-\ln|2-y^2| + C = -\frac{1}{x} \Leftrightarrow \ln|2-y^2| + C = \frac{1}{x} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2-y^2 = \pm e^C e^{1/x} \Leftrightarrow 2-y^2 = Ce^{1/x} \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{2-Ce^{1/x}}.$$

Здесь мы снова включили знак (возникший в связи с избавлением от модуля) в произвольную постоянную, а затем еще учли, что $2-y^2 = 0 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{2}$ — тоже решения нашего уравнения, "потерянные" при делении на $2-y^2$.

Ф.55. Найти решения уравнения, удовлетворяющие заданному начальному условию:

$$y' = 3\sqrt[3]{y^2},\ y(2) = 0.$$

Сначала найдем общую формулу для решений, а затем отберем решения, удовлетворяющие условию $y(2) = 0$.

Разделяем переменные и интегрируем:

$$\int \frac{dy}{3\sqrt[3]{y^2}} = \int dx \Leftrightarrow \sqrt[3]{y} = x + C \Leftrightarrow y = (x+C)^3.$$

Кроме того, при делении "потеряли" решение $y \equiv 0$. Ясно, что заданному условию удовлетворяют решения $y = (x-2)^3$ и $y \equiv 0$.

Таким образом, получаем совокупность

$$\left[\begin{array}{l} y = (x-2)^3, \\ y = 0. \end{array}\right. \tag{3.5}$$

На первый взгляд кажется, что задача имеет только эти два решения. Однако это не так: легко убедиться, что решением будет всякая функция вида

$$y(x) = \begin{cases} (x - C_1)^3, & x \le C_1, \\ 0, & x \in [C_1, C_2], \\ (x - C_2)^3, & x \ge C_2. \end{cases}$$

На самом деле, совокупность (3.5) следует понимать так: решение есть непрерывная функция, определенная на объединении промежутков, на каждом из которых она задается одной из формул совокупности. Именно такой смысл мы и будем в дальнейшем вкладывать в запись решений в виде совокупности типа (3.5).

3.2. Линейная замена

Уравнение вида

$$y' = f(ax + by + c),$$

где a, b, c — произвольные числа, причем $b \neq 0$, сводится к уравнению с разделяющимися переменными. Для этого нужно записать уравнение, которому удовлетворяет функция $z(x) = ax + by(x) + c$. Имеем

$$y(x) = \frac{z(x) - ax - c}{b}, \tag{3.6}$$

откуда $y'(x) = \frac{z'(x)-a}{b}$. Подставляя выражение для y' в исходное уравнение и заменяя $ax + by + c$ на z, получим (аргумент x, как обычно при записи уравнения, опускаем)

$$\frac{z' - a}{b} = f(z) \Leftrightarrow z' = a + bf(z).$$

Получили уравнение с разделяющимися переменными на функцию z. После того, как функция z найдена, функция y находится из соотношения (3.6). Примененный нами прием называется *заменой* неизвестной функции. Мы постоянно будем пользоваться им в дальнейшем.

Ф.63. Решить уравнение $y' - y = 2x - 3$. Положим $z(x) = y(x) + 2x - 3$. Тогда $z'(x) = y'(x) + 2 \Rightarrow y'(x) = z'(x) - 2$. Подставляя в исходное уравнение, получим

$$z' - 2 = z \Leftrightarrow z' = 2 + z \Leftrightarrow \frac{dz}{dx} = 2 + z.$$

Разделяя переменные и интегрируя, получим

$$\int \frac{dz}{2+z} = \int dx \Leftrightarrow \int \frac{d(z+2)}{2+z} = x + C \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \ln|z+2| = x + C \Leftrightarrow |z+2| = e^C e^x.$$

Избавляемся от модуля, заносим знак в произвольную постоянную и учитываем “потерянное” при делении на $2+z$ решение $z \equiv -2$ как в примере 1:

$$z + 2 = Ce^x \Leftrightarrow z = Ce^x - 2.$$

Окончательно для функции y получаем

$$y(x) = z(x) - 2x + 3 = Ce^x - 2x + 1, \ C \in \mathbf{R}.$$

Задачи для самостоятельного решения: 52, 53, 57, 58, 64, 65*).

4. Однородные уравнения

4.1. Уравнение вида $y' = f(x, y)$, заданное в области $D \subset \mathbf{R}^2$, называется *однородным*, если для всякого $\lambda > 0$ из условия $(x, y) \in D$ вытекает $(\lambda x, \lambda y) \in D$ и $f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y)$. Другими словами, функция f постоянна вдоль лучей, выходящих из начала координат.

Уравнение в дифференциалах $M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0$, заданное в области $D \subset \mathbf{R}^2$, называется однородным, если для всякого $\lambda > 0$ из условия $(x, y) \in D$ вытекает

$$(\lambda x, \lambda y) \in D \text{ и } M(\lambda x, \lambda y) N(x, y) = N(\lambda x, \lambda y) M(x, y).$$

Геометрически это означает, что в точках любого луча, выходящего из начала координат, касательные к кривым, являющимся решениями уравнения, имеют одно и то же направление. Условие однородности выполнено, например, если M и N — однородные многочлены от x, y одной и той же степени.

При практической проверке однородности уравнения достаточно подставить λx вместо x и λy вместо y (при этом y', dx и dy не трогаем!) и убедиться, что полученное уравнение равносильно исходному.

---

*) Номера заданий для самостоятельного решения даны по сборнику задач [4].

Однородные уравнения обоих типов сводятся к уравнению с разделяющимися переменными при помощи подстановки $y(x) = xz(x)$, $x \neq 0$. Продемонстрируем это на примере уравнения $y' = f(x, y)$:

$$(xz)' = f(x, xz) \Leftrightarrow z + xz' = f(x, xz).$$

Из условия однородности следует, что при $x > 0$ выполнено соотношение

$$f(x, xz) = f(x^{-1}x, x^{-1}xz) = f(1, z) = g_1(z),$$

а при $x < 0$ — соотношение

$$f(x, xz) = f(-x^{-1}x, -x^{-1}xz) = f(-1, -z) = g_2(z).$$

Таким образом, в каждой из областей $x > 0$ и $x < 0$ исходное уравнение преобразуется в уравнение с разделяющимися переменными $xz' = g_i(z) - z$, $i = 1, 2$.

Таким образом, мы находим значение искомой функции y при всех $x \neq 0$, при которых она определена. Если y определена в точке $x = 0$, то это значение получается переходом к пределу при $x \to 0$ в полученных формулах (напомним, что решение — непрерывная функция). Аналогичная ситуация имеет место и для уравнения в дифференциалах, но в этом случае в результате подстановки может быть потеряно решение $x = 0$, и это надо отдельно проверять.

Ф.108. Решить уравнение $xy' = y - xe^{y/x}$.

Проверим условие однородности ($\lambda > 0$):

$$(\lambda x)y' = (\lambda y) - (\lambda x)e^{\frac{(\lambda y)}{(\lambda x)}} \Leftrightarrow xy' = y - xe^{y/x}.$$

Используем подстановку $y(x) = xz(x)$, $x \neq 0$:

$$x(z + xz') = xz - xe^z \Leftrightarrow xz' = -e^z \Leftrightarrow -\frac{dz}{e^z} = \frac{dx}{x} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow e^{-z} = \ln|x| + C \Leftrightarrow z = -\ln(\ln|x| + C) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow y = -x\ln(\ln(Cx)).$$

В последнем шаге мы внесли произвольную постоянную под знак логарифма и включили в нее знак раскрытия модуля.

Ф.103. Решить уравнение $(y^2 - 2xy)\,dx + x^2\,dy = 0$.

Проверим условие однородности ($\lambda > 0$):

$$((\lambda y)^2 - 2(\lambda x)(\lambda y))\,dx + (\lambda x)^2\,dy = 0 \Leftrightarrow (y^2 - 2xy)\,dx + x^2\,dy = 0.$$

Используем подстановку $y = zx$:

$$\begin{aligned}((zx)^2 - 2x(zx))\,dx + x^2\,d(zx) = 0 \Leftrightarrow\\ \Leftrightarrow (z^2 - 2z)\,dx + x\,dz + z\,dx = 0 \Leftrightarrow\\ \Leftrightarrow (z^2 - z)\,dx + x\,dz = 0.\end{aligned}$$

Разделяя переменные, получаем

$$\frac{dz}{z(z-1)} = -\frac{dx}{x} \Leftrightarrow \ln\left|\frac{z-1}{z}\right| = -\ln|x| + C \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{z-1}{z} = \frac{C}{x} \Leftrightarrow z = \frac{x}{x-C} \Leftrightarrow y = \frac{x^2}{x-C}.$$

При интегрировании выражения $\frac{1}{z(z-1)}$ мы использовали его разложение на простейшие дроби:

$$\frac{1}{z(z-1)} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z}.$$

При разделении переменных могли быть потеряны решения $z = 0$ и $z = 1$, т.е. $y = 0$ и $y = x$. Решение $y = x$ получается, если в последней формуле взять $C = 0$, т.е. оно фактически не было потеряно. Непосредственной проверкой убеждаемся, что уравнение имеет еще и решение $x = 0$, которое было потеряно в результате подстановки.

Таким образом, решения исходного уравнения даются совокупностью

$$\left[\begin{array}{l} y = \frac{x^2}{x-C} \\ y = 0 \\ x = 0. \end{array}\right.$$

4.2. Уравнение вида

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$$

в случае $a_1b_2 \neq a_2b_1$ сводится к однородному, если перейти к новым переменным

$$X = x - x_0,\ Y = y - y_0,$$

где x_0 и y_0 находятся из системы (определенной в силу условия $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$)

$$\left\{\begin{array}{l} a_1x_0 + b_1y_0 + c_1 = 0 \\ a_2x_0 + b_2y_0 + c_2 = 0 \end{array}\right. .$$

При этом уравнение преобразуется к виду

$$\frac{dY}{dX} = f\left(\frac{a_1X + b_1Y}{a_2X + b_2Y}\right).$$

Ф.117. Решить уравнение $(y+2)\,dx = (2x+y-4)\,dy$.

Решим систему

$$\begin{cases} 2x+y-4=0 \\ y+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-2 \end{cases}.$$

Положим $Y = y+2$, $X = x-3$. Тогда уравнение преобразуется к виду $Y\,dX = (2X+Y)\,dY$. Это однородное уравнение. Воспользуемся подстановкой $X = YZ$, $Y \neq 0$:

$$Y(Z\,dY + Y\,dZ) = (2YZ + Y)\,dY \Leftrightarrow Y\,dZ = (Z+1)\,dY.$$

Разделяя переменные, получим

$$\frac{dZ}{Z+1} = \frac{dY}{Y} \Leftrightarrow \ln|Z+1| = \ln|Y| + C \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow Z+1 = CY \Leftrightarrow X = Y(CY-1) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x-3 = (y+2)(C(y+2)-1).$$

При разделении переменных было потеряно решение $Y = 0$, т.е. $y+2=0$, таким образом решение исходного уравнения дается совокупностью

$$\left[\begin{array}{l} x-3 = (y+2)(C(y+2)-1) \\ y=-2. \end{array}\right.$$

Задачи для самостоятельного решения: 103, 104, 105, 113, 118, 119.

5. Линейные уравнения

5.1. *Линейным однородным* уравнением первого порядка называется уравнение вида

$$y' = a(x)y, \tag{5.1}$$

где функция a определена и непрерывна на некотором интервале $I \subset \mathbf{R}$.

Рассматриваемое уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Напомним, как оно решается.

1) Разделяем переменные:

$$\frac{dy}{y} = a(x)\,dx.$$

На этом шаге “теряется” решение $y \equiv 0$. Его нужно будет присоединить к ответу.

2) Интегрируем:

$$\int \frac{dy}{y} = \int a(x)\,dx \Leftrightarrow \ln|y| = \int a(x)\,dx + C,\ C \in \mathbf{R}.$$

Здесь и далее знаком интеграла обозначена произвольная (но фиксированная) первообразная функции (в данном случае функции a). Далее,

$$|y| = e^C e^{\int a(x)\,dx} \Leftrightarrow y = \pm e^C e^{\int a(x)\,dx}.$$

Поскольку e^C принимает произвольные положительные значения, $\pm e^C$ принимает произвольные ненулевые значения. Учитывая, что $y \equiv 0$ — тоже решение, окончательно получаем

$$y = Ce^{\int a(x)\,dx},\ C \in \mathbf{R}.$$

Полученная формула показывает, что все решения рассматриваемого уравнения пропорциональны друг другу. Таким образом, множество решений линейного однородного уравнения состоит из функций вида

$$y = Cy_0,\ C \in \mathbf{R}, \tag{5.2}$$

где y_0 — произвольное (фиксированное) ненулевое решение этого уравнения: для всякого $C \in \mathbf{R}$ формула (5.2) задает решение, и всякое решение получается по этой формуле при некотором C. Такую формулу называют *общим решением* уравнения, а y_0 в этом контексте называют *частным решением*.

Итак, знание одного ненулевого решения позволяет решить уравнение вида (5.1) полностью.

Пример. Решить уравнение $y' = \frac{3}{x}y$.

Одно решение легко угадывается: $y = x^3$. Но тогда общее решение есть $y = Cx^3$.

5.2. *Линейным неоднородным* уравнением первого порядка называется уравнение вида

$$y' = a(x)y + b(x), \tag{5.3}$$

где функции a и b определены и непрерывны на некотором интервале $I \subset \mathbf{R}$.

Основной факт, касающийся решений неоднородного уравнения, состоит в следующем: множество решений неоднородного уравнения состоит из функций вида

$$y = Cy_0 + y^*, \; C \in \mathbf{R},$$

где y_0 — произвольное фиксированное ненулевое решение однородного уравнения (5.1), а y^* — произвольное фиксированное решение неоднородного уравнения.

В соответствии с раннее введеной терминологией получаем, что общее решение неонородного уравнения есть сумма общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения, что кратко выражают так:

О.Р.Н.У.=О.Р.О.У.+Ч.Р.Н.У.

Таким образом, для решения неоднородного уравнения нужно:

1. Решить соответствующее однородное уравнение;

2. Найти частное решение неоднородного уравнения.

Последнее осуществляется методом *вариации произвольной постоянной*: ищем y^* в виде $y^*(x) = C(x)y_0(x)$, где y_0 — ненулевое решение однородного уравнения, а $C(x)$ — неизвестная функция. Функция $C(x)$ находится в результате подстановки y^* в уравнение (5.3):

$$C'(x)y_0(x) + C(x)y_0'(x) = a(x)C(x)y_0(x) + b(x).$$

Поскольку функция y_0 является решением (5.1), имеем $y_0'(x) = a(x)y_0(x)$, откуда

$$C'(x)y_0(x) = b(x). \tag{5.4}$$

Итак, в качестве $C(x)$ можно взять любую первообразную функции $b(x)/y_0(x)$. Полученную формулу полезно запомнить.

Примеры

Ф.140. Решить уравнение $x^2y' + xy + 1 = 0$.

Разрешим данное уравнение относительно y', т.е. перепишем его в виде

$$y' = -y/x - 1/x^2,$$

откуда ясно, что имеем дело с линейным неоднородным уравнением.

Сначала решим однородное уравнение $y' = -y/x$:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln|y| = -\ln|x| + C \Leftrightarrow \ln|yx| = C \Leftrightarrow yx = C \Leftrightarrow y = C\frac{1}{x}.$$

В последнем переходе мы, как обычно, внесли знак, возникающий при раскрытии модуля, в произвольную постоянную и учли, что функция $y(x) \equiv 0$ является решением.

Для нахождения частного решения воспользуемся формулой (5.4):

$$C'(x)\frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2} \Leftrightarrow C'(x) = -\frac{1}{x}.$$

Можно взять $C(x) = -\ln|x|$.

Таким образом, мы нашли частное решение неоднородного уравнения $y^* = -\frac{\ln|x|}{x}$. Общее решение исходного уравнения тогда задается формулой

$$y(x) = C\frac{1}{x} - \frac{\ln|x|}{x}.$$

Ф.144. Решить уравнение $xy' + (x+1)y = 3x^2e^{-x}$.

Разрешим данное уравнение относительно y':

$$y' = -\frac{x+1}{x}\,y + 3xe^{-x}.$$

Имеем линейное неоднородное уравнение.

Решим сначала однородное уравнение (C — произвольная постоянная):

$$y' = -\frac{x+1}{x}\,y \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x+1}{x}\,y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{x+1}{x}\,dx \Leftrightarrow \ln|y| = -x - \ln|x| + C \Leftrightarrow y = C\frac{e^{-x}}{x}.$$

Для нахождения частного решения воспользуемся формулой (5.4):

$$C'(x)\frac{e^{-x}}{x} = 3xe^{-x} \Leftrightarrow C'(x) = 3x^2.$$

Можно взять $C(x) = x^3$.

Общее решение исходного уравнения тогда задается формулой

$$y(x) = C\frac{e^{-x}}{x} + x^2e^{-x}.$$

5.3. Уравнение в дифференциалах (2.1) будем называть линейным в случае, когда хотя бы одно из уравнений

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$$

или

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{N(x,y)}{M(x,y)}$$

является линейным.

Ф.139. Решить уравнение $(xy + e^x)\,dx - x\,dy = 0$.

Перепишем данное уравнение в виде

$$\frac{dy}{dx} = y + \frac{e^x}{x}. \tag{5.5}$$

Полученное уравнение является линейным.

Как отмечалось в гл. 2, всякая кривая, являющаяся решением исходного уравнения в дифференциалах, в некоторой окрестности всякой точки с невертикальной касательной представляет собой график решения уравнения (5.5), так что все невертикальные участки такой кривой описываются решениями уравнения (5.5). Помимо этого, могут быть вертикальные участки, описываемые уравнениями вида $x - C = 0$, где C — постоянная. Проверкой убеждаемся, что данному уравнению удовлетворяет только $x = 0$:

$$(xy + e^x)\frac{\partial(x - C)}{\partial y} + x\frac{\partial(x - C)}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Решим уравнение (5.5). Однородное уравнение $y' = y$, очевидно, имеет решение $y(x) = e^x$. Следовательно, общее его решение есть $y(x) = Ce^x$.

Для нахождения частного решения воспользуемся формулой (5.4):

$$C'(x)e^x = \frac{e^x}{x} \Leftrightarrow C'(x) = \frac{1}{x}.$$

Получаем $C(x) = \ln|x| + \mathrm{Const}$. В качестве $C(x)$ годится, например, $\ln|x|$.

Общее решение уравнения (5.5) тогда задается формулой

$$y(x) = Ce^x + e^x \ln|x|.$$

Решения исходного уравнения в дифференциалах даются совокупностью

$$\left[\begin{array}{l} y(x) = Ce^x + e^x \ln|x| \\ x = 0. \end{array}\right.$$

В некоторых случаях данное уравнение само не является линейным, однако становится таковым при переходе к обратной функции.

Ф.149. Решить уравнение $y' = \frac{y}{3x-y^2}$.

Данное уравнение не является линейным. Однако функция, обратная искомой (когда она определена и дифференцируема), удовлетворяет линейному уравнению

$$x' = \frac{3}{y}\,x - y.$$

Вместо того, чтобы решать линейное однородное уравнение $x' = \frac{3}{y}\,x$, заметим, что функция $x(y) = y^3$ является его решением. Следовательно, его общее решение дается формулой $x(y) = Cy^3$.

Для нахождения частного решения воспользуемся формулой (5.4):

$$C'(y)y^3 = -y \Leftrightarrow C'(y) = -\frac{1}{y^2}.$$

Можно взять $C(y) = \frac{1}{y}$.

Общее решение уравнения (5.5) тогда задается формулой

$$x = Cy^3 + y^2.$$

Эта же формула задает (неявно) решения исходного уравнения. При переходе к обратной функции "теряются" решения вида $y = C$, где C — постоянная. Проверкой убеждаемся, что данному уравнению удовлетворяет только $y = 0$.

Итак, решения данного уравнения даются совокупностью

$$\left[\begin{array}{l} x = Cy^3 + y^2 \\ y = 0. \end{array}\right.$$

5.4. Уравнением *Бернулли* называется уравнение вида

$$y' = a(x)y^n + b(x)y,$$

где $n \neq 0, 1$, а a и b — непрерывные функции.

Оно сводится к решению линейного уравнения с помощью следующего приема: разделим обе части на y^n и заметим, что

$$\frac{y'}{y^n} = \frac{1}{1-n}\left(y^{1-n}\right)'.$$

Уравнение тогда можно переписать в виде

$$\frac{1}{1-n}\, z' = b(x)z + a(x),$$

где

$$z(x) = y^{1-n}(x). \tag{5.6}$$

Полученное уравнение является линейным и решается методом, изложенным выше. Функция y затем находится, исходя из соотношения (5.6).

В случае $n > 0$ при делении на y^n "теряется" решение $y \equiv 0$, его нужно добавить в ответ.

Ф.151. Решить уравнение $y' + 2y = y^2 e^x$.

Данное уравнение является уравнением Бернулли. Поделим обе части на y^2:

$$\frac{y'}{y^2} + \frac{2}{y} = e^x,$$

и положим $z(x) = y^{-1}(x)$. Тогда

$$-z' + 2z = e^x \Leftrightarrow z' = 2z - e^x.$$

Легко видеть, что функция $z = e^{2x}$ является решением линейного однородного уравнения $z' = 2z$. Значит, общее решение этого уравнения есть $z = Ce^{2x}$. Далее, частное решение неоднородного уравнения легко угадывается: $y^*(x) = e^x$. Следовательно, его общее решение дается формулой $z = Ce^{2x} + e^x$.

Решения исходного уравнения тогда даются совокупностью (учитываем “потерянное” при делении решение $y = 0$)

$$\left[\begin{array}{l} y^{-1} = Ce^{2x} + e^x \\ y = 0. \end{array}\right.$$

Задачи для самостоятельного решения: 137, 141, 146, 148, 155, 156.

6. Уравнения в полных дифференциалах

Уравнение в дифференциалах

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0, \tag{6.1}$$

заданное в некоторой области $D \subset \mathbf{R}^2$, называется уравнением *в полных дифференциалах*, если для любой точки $(x_0, y_0) \in D$ существуют такие ее окрестность U и дифференцируемая функция $g\colon U \to \mathbf{R}$, что

$$dg(x,y) = M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy, \quad (x,y) \in U.$$

Общее решение уравнения тогда дается формулой

$$g(x,y) = C,$$

где C — произвольная постоянная.

В случае, когда $M(x,y)$ и $N(x,y)$ имеют непрерывные частные производные, уравнение (6.1) является уравнением в полных дифференциалах тогда и только тогда, когда

$$M_y(x,y) = N_x(x,y), \quad (x,y) \in D. \tag{6.2}$$

Чтобы решить уравнение в полных дифференциалах, надо найти функцию $g(x,y)$, удовлетворяющую системе

$$\left\{\begin{array}{l} g_x(x,y) = M(x,y), \\ g_y(x,y) = N(x,y). \end{array}\right.$$

1) При фиксированном y проинтегрируем первое уравнение системы по x:

$$g(x,y) = \int M(x,y)\,dx + h(y).$$

Здесь $\int M(x,y)dx$ — некоторая фиксированная первообразная относительно x функции $M(x,y)$. Таким образом, вид функции $g(x,y)$ уже частично определен.

2) Для определения $h(y)$ подставим полученное выражение во второе уравнение системы:

$$\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,dx + h'(y) = N(x,y) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow h'(y) = N(x,y) - \int M_y(x,y)\,dx.$$

Условие (6.2) гарантирует, что правая часть полученного соотношения зависит только от y (по крайней мере, в некоторой окрестности каждой точки области D). Тогда в качестве h можно взять любую первообразную функции, стоящей в правой части.

Замечание. Порядок использования уравнений системы можно изменить, т.е. сначала можно использовать второе уравнение системы, а потом подставлять в первое.

Пример 1. Решить уравнение

$$(x + \sin y)dx + (x\cos y - 2y)dy = 0.$$

Здесь

$$M(x,y) = x + \sin y,\ \ N(x,y) = x\cos y - 2y.$$

Таким образом,

$$M_y(x,y) = N_x(x,y) = \cos y,$$

и данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах.

Запишем систему для определения функции $g(x,y)$:

$$\begin{cases} g_x(x,y) = x + \sin y, \\ g_y(x,y) = x\cos y - 2y. \end{cases}$$

Проинтегрируем первое уравнение системы по x

$$\int g_x(x,y)dx = \int (x + \sin y)\,dx \Leftrightarrow g(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + x\sin y + h(y).$$

Для нахождения $h(y)$ подставим полученное выражение для $g(x,y)$ во второе уравнение системы:

$$\left(\frac{1}{2}x^2 + x\sin y + h(y)\right)'_y = x\cos y - 2y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\cos y + h'(y) = x\cos y - 2y \Leftrightarrow h'(y) = -2y.$$

Таким образом, годится, например,

$$h(y) = -y^2.$$

В результате

$$g(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + x\sin y - y^2,$$

и общее решение уравнения дается формулой

$$\frac{1}{2}x^2 + x\sin y = C.$$

Пример 2. Решить уравнение

$$(2x^2t - 2x^3)\,dt + (4x^3 - 6x^2t + 2xt^2)\,dx = 0.$$

Здесь

$$M(t,x) = 2x^2t - 2x^3,\ \ N(t,x) = 4x^3 - 6x^2t + 2xt^2.$$

Таким образом,

$$M_x = N_t = -6x^2 + 4xt,$$

и данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах.

Запишем систему для определения функции $g(t,x)$

$$\begin{cases} g_t(t,x) = 2x^2t - 2x^3, \\ g_x(t,x) = 4x^3 - 6x^2t + 2xt^2. \end{cases}$$

Проинтегрируем первое уравнение системы по t:

$$\int g_t(t,x)\,dt = \int (2x^2t - 2x^3)\,dt \Leftrightarrow g(t,x) = x^2t^2 - 2x^3t + h(x).$$

Для нахождения $h(x)$ подставим полученное выражение для $g(t,x)$ во второе уравнение системы:

$$(x^2t^2 - 2x^3t + h(x))'_x = 4x^3 - 6x^2t + 2xt^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2xt^2 - 6x^2t + h'(x) = 4x^3 - 6x^2t + 2xt^2 \Leftrightarrow h'(x) = 4x^3.$$

Таким образом, можно взять $h(x) = x^4$. В результате

$$g(t,x) = x^2t^2 - 2x^3t + x^4,$$

и решение уравнения будет иметь вид

$$x^2t^2 - 2x^3t + x^4 = C \Leftrightarrow (x^2 - xt)^2 = C.$$

Извлекая квадратный корень из обеих частей последнего уравнения, получим

$$x^2 - xt = C_1 \quad (C_1 = \pm\sqrt{C}).$$

Можно разрешить это равенство относительно x, используя формулы корней квадратного уравнения

$$x = \frac{t \pm \sqrt{t^2 + 4C_1}}{2}$$

или переобозначая $C = 4C_1$,

$$x = \frac{t \pm \sqrt{t^2 + C}}{2}, \ C \in \mathbf{R}.$$

Пример 3. Решить задачу Коши

$$x' = \frac{2x^2(x - t)}{4x^3 - 6x^2t + 2xt^2}, \ x(2) = 3.$$

Данное дифференциальное уравнение решено в предыдущем примере, и его общее решение дается формулой

$$x^2 - xt = C.$$

Используя начальное условие $x(2) = 3$, получим

$$3^2 - 3(2) = C \Leftrightarrow C = 3.$$

Таким образом, решение задачи Коши будет записываться в неявном виде

$$x^2 - xt = 3,$$

или, будучи разрешенным относительно x, в явном виде

$$x = \frac{1}{2}(t + \sqrt{t^2 + 12}).$$

Задачи для самостоятельного решения: 186, 187, 188, 189, 190, 191.

7. Интегрирующий множитель

Интегрирующим множителем дифференциального уравнения

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

называется такая (не равная нулю тождественно) функция $m(x,y)$, что уравнение

$$m(x,y)M(x,y)\,dx + m(x,y)N(x,y)\,dy = 0$$

является уравнением в полных дифференциалах. Как указывалось в гл. 6, необходимым и достаточным условием для этого является выполнение тождества

$$(mM)_x = (mN)_y \Leftrightarrow m_y M + m M_y = m_x N + m N_x. \qquad \text{(НД)}$$

Если интегрирующий множитель найден, то дальнейшее решение происходит как в предыдущей главе. Так как общего метода нахождения интегрирующего множителя не существует, то его определение само по себе является достаточно сложной задачей. Тем не менее, в некоторых частных случаях удается найти интегрирующий множитель, используя специальную группировку слагаемых либо непосредственно условие (НД).

7.1. Удачная группировка слагаемых

Пример 1. Решить уравнение

$$(y - xy^2)\,dx + (x + x^2y^2)\,dy = 0.$$

Данное уравнение не является уравнением в полных дифференциалах, и интегрирующий множитель не сразу очевиден. Перепишем уравнение в виде

$$(y\,dx + x\,dy) + (-xy^2\,dx + x^2y^2\,dy) = 0.$$

Ориентируясь на первую группу слагаемых, можно взять $m(x,y) = (xy)^{-2}$.

Умножим обе части преобразованного уравнения на $(xy)^{-2}$:

$$\frac{y\,dx + x\,dy}{(xy)^2} + \frac{-xy^2\,dx + x^2y^2\,dy}{(xy)^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{y\,dx + x\,dy}{(xy)^2} = \frac{1}{x}\,dx - dy \Leftrightarrow d\left(-\frac{1}{xy}\right) = \frac{1}{x}\,dx - dy.$$

Интегрируя обе части последнего уравнения, окончательно получим

$$\frac{1}{xy} = \ln|\,x\,| - y + C.$$

Пример 2. Решить уравнение

$$y' = \frac{3yx^2}{x^3 + 2y^4}.$$

Сначала перепишем уравнение в дифференциалах

$$(3yx^2)dx + (-x^3 - 2y^2)dy = 0.$$

Оно не является уравнением в полных дифференциалах, и интегрирующий множитель сразу не очевиден. Перепишем уравнение в виде

$$x^2(3y\,dx - x\,dy) - 2y^4\,dy.$$

Обратив внимание на выражение в скобках, можно взять $m(x,y) = x^2y^{-2}$. Однако выражение в скобках уже умножено на x^2, что дает возможность выбрать $m(x,y) = y^{-2}$. Умножая обе части уравнения на y^{-2}, получим

$$x^2y^{-2}(3y\,dx - x\,dy) - 2y^2\,dy = 0.$$

Это уравнение можно упростить:

$$d(x^3y^{-1}) = 2y^2\,dy,$$

которое, будучи проинтегрированным, даст общее решение исходного дифференциального уравнения

$$x^3y^{-1} = \frac{2}{3}y^3 + C$$

в неявном виде.

7.2. Использование (НД)

Поскольку после нахождения интегрирующего множителя будут получаться уравнения в полных дифференциалах, метод решения которых описан в гл. 6, мы не будем доводить решение каждого уравнения до конца, оставляя это читателю в качестве посильного упражнения.

Выпишем (НД) в развернутом виде

$$(\ln|m|)_y M - (\ln|m|)_x N = N_x - M_y. \qquad \text{(НДР)}$$

Так как в общем случае интегрирующий множитель является функцией двух переменных, то самыми простыми являются случаи, когда его можно найти среди функций одного переменного, т. е. $m(x,y) = \varphi(x)$ или $m(x,y) = \varphi(y)$.

Случай $m(x,y) = \varphi(x)$.

Тогда (НДР) принимает вид

$$-(\ln|\varphi|)' N = N_x - M_y \Leftrightarrow (\ln|\varphi|)' = \frac{M_y - N_x}{N}.$$

Если окажется, что

$$\frac{M_y(x,y) - N_x(x,y)}{N(x,y)} \equiv g(x),$$

то

$$\varphi(x) = \exp\left(\int g(x)\,dx\right),$$

где интеграл обозначает произвольную первообразную.

Случай $m(x,y) = \varphi(y)$.

Тогда (НДР) принимает вид

$$(\ln|\varphi|)' M = N_x - M_y \Leftrightarrow (\ln|\varphi|)' = \frac{N_x - M_y}{M}.$$

Если окажется, что

$$\frac{N_x(x,y) - M_y(x,y)}{M(x,y)} \equiv h(y), \qquad (7.1)$$

то

$$\varphi(y) = \exp\left(\int h(y)\,dy\right), \qquad (7.2)$$

где интеграл обозначает произвольную первообразную.

Пример 3. Решить уравнение

$$y^2\,dx + xy\,dy = 0.$$

Здесь $M(x,y)=y^2$, $N(x,y)=xy$. Таким образом, $M_y=2y$, $N_x=y$, и (НД) не выполняется. Попробуем найти интегрирующий множитель в виде $m(x,y)=\varphi(y)$. Это возможно сделать в силу того, что

$$\frac{N_x(x,y)-M_y(x,y)}{M(x,y)}=\frac{y-2y}{y^2}=-\frac{1}{y}$$

зависит только от y. Пользуясь формулами (7.1)-(7.2), определяем

$$\varphi(y)=\exp\left(\int -\frac{dy}{y}\right)=\exp(-\ln y)=\frac{1}{y}.$$

Умножая обе части исходного уравнения на y^{-1}, получим уравнение в полных дифференциалах

$$y\,dx+x\,dy=0.$$

Более сложными являются случаи, когда $m(x,y)=\varphi(x\pm y)$, $m(x,y)=\varphi(x^2\pm y^2)$, $m(x,y)=\varphi(xy)$ и так далее. Основной идеей нахождения функций такого вида является связанность независимых переменных в определенные комбинации. Для упрощения решения вид интегрирующего множителя иногда дается в условии задачи.

Случай $m(x,y)=\varphi(x^2+y^2)$.

Обозначим $x^2+y^2=z$. Тогда

$$\begin{aligned}(\ln m(x,y))_y&=\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}\,2y=(\ln\varphi)'\,2y,\\ (\ln m(x,y))_x&=\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}\,2x=(\ln\varphi)'\,2x,\\ (\ln\varphi)'\,2yM(x,y)-(\ln\varphi)'\,2xN(x,y)&=N_x(x,y)-M_y(x,y),\\ (\ln\varphi)'&=\frac{N_x(x,y)-M_y(x,y)}{2yM(x,y)-2xN(x,y)}.\end{aligned}$$

Если окажется, что

$$\frac{N_x(x,y)-M_y(x,y)}{2yM(x,y)-2xN(x,y)}\equiv g(x^2+y^2), \tag{7.3}$$

то получим простейшее уравнение

$$\frac{d(\ln|\varphi|)}{dz}=g(z), \tag{7.4}$$

которое дает возможность определить φ.

Пример 4. Решить уравнение

$$(x^2+y)\,dy + x(1-y)\,dx = 0, \quad m(x,y) = \varphi(x^2+y^2).$$

Здесь $M(x,y) = x - xy$, $N(x,y) = x^2 + y$.

Проверим выполнение условия (7.3):

$$\frac{N_x(x,y) - M_y(x,y)}{2yM(x,y) - 2xN(x,y)} = \frac{(x^2+y)_x - (x-xy)_y}{2y(x-xy) - 2x(x^2+y)} =$$
$$= \frac{2x + x}{2xy - 2xy^2 - 2x^3 - 2xy} = -\frac{3}{2(x^2+y^2)} = g(x^2+y^2),$$

где $g(z) = -\frac{3}{2z}$.

Воспользуемся формулой (7.4):

$$\frac{d(\ln|\varphi|)}{dz} = -\frac{3}{2z},$$

и получим

$$\varphi(z) = \exp\left(-\int \frac{3\,dz}{2z}\right) = z^{-\frac{3}{2}} \Rightarrow\ m(x,y) = (x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}.$$

Умножая обе части исходного уравнения на $(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}$, получим уравнение в полных дифференциалах

$$(x^2+y)(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}\,dy + x(1-y)(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}\,dx = 0.$$

Замечание. Нет никакой необходимости заучивать наизусть выкладки или формулы, рассмотренные выше. Достаточно понять идею их получения.

Пример 5. Решить уравнение

$$(x^2y^3+y)\,dx + (x^3y^2-x)\,dy = 0, \quad m(x,y) = \varphi(xy).$$

Имеем $M(x,y) = x^2y^3 + y$, $N(x,y) = x^3y^2 - x$, $M_y = 3x^2y^2 + 1$, $N_x = 3x^2y^2 - 1$.

Следуя Замечанию, будем использовать для нахождения функции φ непосредственно (НДР). Обозначая $xy = z$, находим

$$(\ln|m|)_y = (\ln|\varphi|)'\,x, \quad (\ln|m|)_x = (\ln|\varphi|)'\,y.$$

Подставим вычисленные выражения в (НДР):

$$(\ln|\varphi|)'x(x^2y^3+y)-(\ln|\varphi|)'y(x^3y^2-x)=-2\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(x^3y^3+xy-x^3y^3+xy)(\ln|\varphi|)'=-2\Leftrightarrow(\ln|\varphi|)'=-\frac{2}{xy}.$$

Получили простейшее дифференциальное уравнение

$$(\ln|\varphi|)'=-\frac{2}{z},$$

решая которое находим

$$\varphi(z)=\frac{1}{z^2},\ m(x,y)=\frac{1}{(xy)^2}.$$

Умножая обе части исходного дифференциального уравнения на $(xy)^{-2}$, получим уравнение в полных дифференциалах

$$(x^2y^3+y)x^{-2}y^{-2}\,dx+(x^3y^2-x)x^{-2}y^{-2}\,dy=0.$$

Задачи для самостоятельного решения: 195, 197, 198, 200, 211, 215.

8. Уравнения, не разрешенные относительно производной

Рассмотрим дифференциальное уравнение первого порядка

$$F(x,y,y')=0,\tag{8.1}$$

где функция F определена и непрерывна в некоторой области $D\subset\mathbf{R}^3$. Будем называть это уравнение дифференциальным уравнением, *не разрешенным относительно производной* вследствие того, что оно не представлено в виде $y'=f(x,y)$.

Рассматриваемые в настоящем пособии дифференциальные уравнения, не разрешенные относительно производной, условно разделим на два типа.

Уравнения 1 типа — это уравнения, которые путем применения алгебраических операций приводятся к одному или нескольким уравнениям вида $y'=f(x,y)$.

Уравнения 2 типа — это уравнения, которые методом введения параметра, описываемым ниже, сводятся к дифференциальным уравнениям, интегрируемым в квадратурах.

Метод введения параметра состоит в следующем. Обозначим $y' = p$, тогда получим систему

$$\begin{cases} F(x,y,p) = 0 \\ dy = p\,dx, \end{cases} \tag{8.2}$$

которая будет эквивалентна уравнению (8.1).

Рассмотрим два случая, когда функция F имеет специальный вид, что позволяет проинтегрировать уравнение (8.1) в квадратурах.

8.1. Уравнения, приводимые к виду x=g(y,y')

В этом случае система (8.2) принимает вид

$$\begin{cases} x = g(y,p) \\ dy = p\,dx. \end{cases}$$

Подставляя x из первого уравнения системы во второе, получим

$$(pg_y - 1)\,dy + pg_p\,dp = 0. \tag{8.3}$$

Если удается получить решение уравнения (8.3) в виде $p = h(y,C)$ (C — произвольная постоянная), то $x = g(y,h(y,C))$ — решение исходного уравнения.

Если удается получить решение уравнения (8.3) в виде $y = h(p,C)$, то решение исходного уравнения можно задать параметрически системой

$$\begin{cases} x = g(h(p,C),p) \\ y = h(p,C). \end{cases}$$

8.2. Уравнения, приводимые к виду y=f(x,y')

В этом случае система (8.2) принимает вид

$$\begin{cases} y = f(x,p), \\ dy = p\,dx. \end{cases}$$

Подставляя y из первого уравнения системы во второе, получим

$$(f_x - p)\,dx + f_p\,dp = 0. \tag{8.4}$$

Если удается получить решение уравнения (8.4) в виде $p = h(x,C)$ (C — произвольная постоянная), то $y = f(x,h(x,C))$ — решение исходного уравнения.

Если удается получить решение уравнения (8.4) в виде $x = h(y, C)$, то решение исходного уравнения можно задать параметрически системой

$$\begin{cases} y = f(x, p) \\ x = h(y, C). \end{cases}$$

Рассмотрим несколько примеров.

Ф.251. Решить уравнение

$$y'^2 + xy = y^2 + xy'.$$

Данное уравнение является уравнением 1 типа. Преобразуем данное уравнение к виду

$$y'^2 - xy' + xy - y^2 = 0.$$

Решая его как квадратное относительно y', находим что

$$\left[\begin{array}{l} y' = y \\ y' = x - y. \end{array} \right.$$

Первое уравнение является уравнением с разделяющимися переменными с общим решением $y = Ce^x$. Второе уравнение является линейным уравнением первого порядка с решением $y = Ce^{-x} + x - 1$. Однако полученные решения не исчерпывают всего множества решений, так как возможны еще решения в виде кусочно-заданных функций, о чем упоминалось в гл. 3.

Ф.267. Решить уравнение

$$x = y'^3 + y'.$$

Данное уравнение является уравнением 2 типа. Обозначая $y' = p$, от данного уравнения перейдем к эквивалентной системе

$$\begin{cases} x = p^3 + p \\ dy = p\,dx. \end{cases}$$

Вычислим dx из первого уравнения системы и подставим полученное выражение во второе уравнение:

$$dy = p\,(3p^2 + 1)\,dp.$$

Получили уравнение с разделяющимися переменными. Решая его, находим

$$y = \frac{3}{4}p^4 + \frac{1}{2}p^2 + C.$$

В результате, решение исходного уравнения параметрически задается системой

$$\begin{cases} x = p^3 + p, \\ y = \frac{3}{4}p^4 + \frac{1}{2}p^2 + C. \end{cases}$$

Ф.282. Решить уравнение

$$2xy' - y = y' \ln yy'.$$

Данное уравнение является уравнением 2 типа. Заметим, что $y' \neq 0$. Разделив уравнение на $2y'$, получим

$$x = \frac{y}{2y'} + \ln yy'.$$

Обозначая $y' = p$, от данного уравнения перейдем к эквивалентной системе

$$\begin{cases} x = \frac{y}{2p} + \ln yp \\ dy = p\,dx. \end{cases}$$

Найдем dx из первого уравнения системы

$$dx = d\left(\frac{y}{2p} + \ln yp\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{2p} + \ln yp\right) dy +$$
$$+\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{y}{2p} + \ln yp\right) dp = \left(\frac{1}{2p} + \frac{1}{y}\right) dy + \left(-\frac{y}{2p^2} + \frac{1}{p}\right) dp$$

и подставим полученное выражение во второе уравнение:

$$(2p - y)\left(\frac{dy}{2y} + \frac{dp}{2p}\right) = 0.$$

Получили уравнение, распадающееся на уравнение, не являющееся дифференциальным, и уравнение с разделяющимися переменными. Решая их, находим

$$p = \frac{y}{2}, \quad p = \frac{C}{y}.$$

В результате, решение исходного уравнения получим в виде

$$2x = 1 + 2\ln|x|, \quad y^2 = 2Cx - C\ln C.$$

Ф.271. Решить уравнение

$$y = y'^2 + 2y'^3.$$

Данное уравнение является уравнением 2 типа. Обозначая $y' = p$, от данного уравнения перейдем к эквивалентной системе

$$\begin{cases} y = p^2 + 2p^3 \\ dy = p\,dx. \end{cases}$$

Находим dy из первого уравнения системы и подставим его во второе уравнение:

$$(2p + 6p^2)\,dp = p\,dx,$$

являющееся уравнением с разделяющимися переменными. Решая его, найдем

$$x = 3p^2 + 2p + C, \quad p = 0.$$

В результате, решениями исходного уравнения являются функция $y = 0$ и семейство функций, заданных параметрически:

$$\begin{cases} x = 3p^2 + 2p + C \\ y = 2p^3 + p^2. \end{cases}$$

Ф.284. Решить уравнение

$$y = xy' - x^2y'^3.$$

Данное уравнение является уравнением 2 типа. Обозначая $y' = p$, от данного уравнения перейдем к эквивалентной системе

$$\begin{cases} y = xp - x^2p^3, \\ dy = p\,dx. \end{cases}$$

Находим dy из первого уравнения системы

$$dy = d(xp - x^2p^3) = (xp - x^2p^3)_x\,dx + (xp - x^2p^3)_p\,dp = \\ = (p - 2xp^3)\,dx + (x - 3x^2p^2)\,dp$$

и подставим его во второе уравнение

$$p\,dx = (p - 2xp^3)\,dx + (x - 3x^2p^2)\,dp \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x(-2p^3\,dx + (1 - 3xp^2)\,dp) = 0,$$

распадающееся на уравнение, не являющееся дифференциальным, и уравнение в полных дифференциалах. Решая их, находим

$$x = \frac{C\sqrt{|p|}}{p^2} - \frac{1}{p^2}, \quad x = 0.$$

В результате, решениями исходного уравнения являются функция $y = 0$ и семейство функций, заданных параметрически:

$$\begin{cases} x = \frac{C\sqrt{|p|}}{p^2} - \frac{1}{p^2} \\ \\ y = xp - x^2p^3. \end{cases}$$

Задачи для самостоятельного решения: 259, 267, 270, 272, 283, 287.

9. Уравнения, допускающие понижение порядка

Напомним, что уравнением n-го порядка называется запись вида

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{9.1}$$

где функция F определена и имеет непрерывные частные производные в некоторой области G, причем $\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} \not\equiv 0$.

Решением уравнения (9.1) называется функция y, заданная на некотором интервале I и имеющая на нем непрерывные производные вплоть до n-го порядка включительно, обращающая при подстановке соотношение (9.1) в тождество на интервале I:

$$F(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0,\ x \in I.$$

В некоторых случаях порядок уравнения можно понизить, т. е. свести решение исходного уравнения к решению некоторого уравнения меньшего порядка. Мы подробно рассмотрим три таких ситуации.

9.1. F не зависит от y, т. е. уравнение имеет вид

$$F(x, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0.$$

Функция $z(x) = y'(x)$ тогда удовлетворяет уравнению $(n-1)$-го порядка

$$F(x, z, z', \ldots, z^{(n-1)}) = 0.$$

Решения исходного уравнения y затем находятся путем интегрирования найденных функций z. При этом важно не забыть прибавить произвольную постоянную.

Если F не зависит от $y', \dots, y^{(k-1)}$, то можно сразу использовать замену $z(x) = y^{(k)}(x)$. При этом порядок уравнения понизится на k. Искомая функция y затем находится путем k-кратного интегрирования (при каждом интегрировании появляется новая произвольная постоянная!).

Ф.421. Решить уравнение $x^2y'' = y'^2$.

Положим $z(x) = y'(x)$. Тогда уравнение запишется в виде

$$x^2z' = z^2.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{dz}{z^2} = \frac{dx}{x^2} \Leftrightarrow -\frac{1}{z} = -\frac{1}{x} - C \Leftrightarrow z = \frac{x}{1+Cx}.$$

Вернемся к функции y:

$$y' = \frac{x}{1+Cx}.$$

При $C \neq 0$ имеем

$$y = \int \frac{x\,dx}{1+Cx} = \frac{1}{C}\int \left(1 - \frac{1}{1+Cx}\right) dx = \\ = \frac{1}{C}\left(x - \frac{1}{C}\ln|1+Cx|\right) + \tilde{C}.$$

При $C = 0$ получаем

$$y' = x \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x^2 + \tilde{C}.$$

9.2. Функция F не зависит от x:

$$F(y, y', \dots, y^{(n)}) = 0. \tag{9.2}$$

Такое уравнение называется автономным.

Пусть решение y определено на интервале I, причем $y'(x) \neq 0$ при $x \in I$. Тогда функция y строго монотонна и взаимно-однозначно отображает интервал I на некоторый интервал J. В этом случае существует единственная функция $p\colon J \to \mathbf{R}$, удовлетворяющая соотношению

$$p(y(x)) = y'(x), \quad x \in I, \tag{9.3}$$

причем она имеет непрерывные производные вплоть до $(n-1)$-го порядка включительно.

Дифференцируя соотношение (9.3) по x, получаем:

$$p'(y(x)) \cdot y'(x) = y''(x),$$

откуда, учитывая (9.3), имеем

$$p'(y(x)) \cdot p(y(x)) = y''(x).$$

Дифференцируя полученное соотношение, получим

$$\begin{aligned} p''(y(x)) \cdot y'(x) \cdot p(y(x)) + p'(y(x)) \cdot p'(y(x)) \cdot y'(x) = \\ = p''(y(x)) \cdot p^2(y(x)) + p'^2(y(x)) \cdot p(y(x)) = y'''(x). \end{aligned}$$

Продолжая этот процесс, выразим значения производных функции y через значения функции p и ее производных, причем в выражение для $y^{(k)}(x)$ входят производные функции p до $(k-1)$-го порядка.

Подставляя полученные выражения в (9.2) и принимая $y \in J$ за новую независимую переменную, получим уравнение $(n-1)$-го порядка

$$F(y, p, p'p, \ldots) = 0.$$

Дальнейшее зависит от того, удается ли найти функцию p из полученного уравнения явно. Если это сделать удается, т. е. если в результате решения уравнения получаем

$$p = p(y, C_1, \ldots, C_{n-1}),$$

где $C_1, \ldots, C_{n-1}$ — произвольные постоянные, то неизвестная функция y ищется из уравнения с разделяющимися переменными (см. гл. 3)

$$y' = p(y, C_1, \ldots, C_{n-1}).$$

В противном случае для решения полученного уравнения используется метод введения параметра (см. гл. 8).

Область определения произвольного решения y уравнения (9.2) можно разбить на промежутки так, что внутри каждого промежутка функция y либо удовлетворяет условию $y'(x) \neq 0$, либо постоянна. На промежутках первого типа решение находится методом, описанным выше (при этом значения решения в концах промежутка определяются его значениями внутри, поскольку решение является непрерывной функцией). Решения вида $y = C$, где C — постоянная, нужно искать непосредственно из исходного уравнения.

Ф.423. Решить уравнение $y^3y'' = 1$.

Это автономное уравнение. Положим $y' = p(y)$. Тогда $y'' = p'p$. Для функции $p = p(y)$ получаем уравнение с разделяющимися переменными

$$y^3p'p = 1 \Leftrightarrow p\,dp = \frac{dy}{y^3} \Leftrightarrow \frac{p^2}{2} = -\frac{1}{2y^2} + C.$$

Вернемся к функции y ($2C$ мы переобозначили C):

$$y' = \pm\sqrt{-\frac{1}{y^2} + C}.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными:

$$\pm\frac{y\,dy}{\sqrt{Cy^2 - 1}} = dx \Leftrightarrow \frac{1}{C}\int \frac{d(Cy^2-1)}{2\sqrt{Cy^2-1}} = \int dx \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \pm\sqrt{Cy^2-1} = Cx + \tilde{C} \Leftrightarrow Cy^2 - 1 = (Cx + \tilde{C})^2.$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что решений вида $y = C$ исходное уравнение не имеет.

9.3. Уравнение является однородным относительно $y, y', \ldots, y^{(n)}$, т. е. для всякого $\lambda \in \mathbf{R}$:

$$F(x, \lambda y, \lambda y', \ldots, \lambda y^{(n)}) = 0 \Leftrightarrow F(x, y, y' \ldots, y^{(n)}) = 0.$$

В частности, это условие выполнено, если F является однородным многочленом относительно $y, y', \ldots, y^{(n)}$.

Пусть решение y определено на интервале I, причем $y(x) \neq 0$ при $x \in I$. Положим $z(x) = y'(x)/y(x)$. Тогда, дифференцируя по x соотношение $y'(x) = z(x)y(x)$, последовательно получаем

$$\begin{aligned} y'' &= z'y + zy' = z'y + z^2y = y(z^2 + z') \\ y''' &= y'(z^2 + z') + y(2zz' + z'') = \\ &= zy(z^2 + z') + y(2zz' + z'') = y(z^3 + 3zz' + z'') \quad \text{и т. д.} \end{aligned}$$

Отметим, что выражение для $y^{(k)}$ имеет вид $y \cdot \varphi(z, \ldots, z^{(k-1)})$. Подставляя полученные выражения в исходное уравнение и используя однородность F, получим (напомним, что на рассматриваемом интервале

$y(x) \neq 0$):

$$F(x, y, yz, y(z^2 + z'), \ldots) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow y^r F(x, 1, z, z^2 + z', \ldots) = 0 \Leftrightarrow F(x, 1, z, z^2 + z', \ldots) = 0.$$

Таким образом, мы получили уравнение порядка $(n-1)$ относительно z.

Если функцию z удается выразить явно, то y затем находится из уравнения $y' = yz \Leftrightarrow (\ln|y|)' = z$. В противном случае используется метод введения параметра (см. гл. 8).

Область определения произвольного решения y рассматриваемого уравнения можно разбить на промежутки так, что внутри каждого промежутка функция y либо не обращается в нуль, либо равна нулю тождественно. На промежутках первого типа решение находится методом, описанным выше. Наличие у уравнения решения $y = 0$ проверяется непосредственно.

Ф.463. Решить уравнение $xyy'' - xy'^2 = yy'$.

Это уравнение является однородными относительно y, y' и y'':

$$x(\lambda y)(\lambda y'') - x(\lambda y')^2 = (\lambda y)(\lambda y') \Leftrightarrow xyy'' - xy'^2 = yy'.$$

Положим $z(x) = y'(x)/y(x)$. Тогда $y' = yz$, $y'' = y'z + yz' = y(z^2 + z')$ и уравнение перепишется в виде

$$xy^2(z^2 + z') - xy^2z^2 = y^2z \Leftrightarrow x(z^2 + z') - xz^2 = z \Leftrightarrow z' = z/x.$$

Полученное линейное однородное уравнение очевидно имеет решение $z = x$. Тогда его общее решение дается формулой $z = Cx$.

Вернемся к функции y:

$$y'/y = Cx \Leftrightarrow (\ln|y|)' = Cx \Leftrightarrow \ln|y| = Cx^2 + \tilde{C} \Leftrightarrow y = \tilde{C}e^{Cx^2},$$

где $\tilde{C} \neq 0$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что $y = 0$ является решением исходного уравнения. Таким образом, общее решение дается формулой $y = \tilde{C}e^{Cx^2}$.

9.4. Порядок уравнения можно понизить, если его удастся представить как полную производную по x какой-либо функции $\Phi(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$. В этом случае его решение сводится к решению уравнения $(n-1)$-го порядка

$$\Phi(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) = C.$$

Чтобы преобразовать уравнение к такому виду, возможно, понадобится умножать или делить его на какие-то выражения. При этом полезно ориентироваться на следующие (и подобные) формулы:

$$\frac{y^{(k+1)}}{y^{(k)}} = \left(\ln|y^{(k)}|\right)' \qquad y^{(k)}y^{(k+1)} = \left(\frac{1}{2}{y^{(k)}}^2\right)'$$

$$y^{(k+1)}y^{(m)} + y^{(k)}y^{(m+1)} = \left(y^{(k)}y^{(m)}\right)'$$

$$\frac{y^{(k+1)}y^{(m)} - y^{(k)}y^{(m+1)}}{{y^{(m)}}^2} = \left(\frac{y^{(k)}}{y^{(m)}}\right)'.$$

Ф.455. Решить уравнение $yy''' + 3y'y'' = 0$.

Перегруппируем слагаемые следующим образом:

$$(yy''' + y'y'') + 2y'y'' = 0,$$

и заметим, что $yy''' + y'y'' = (yy'')'$ и $2y'y'' = \left(y'^2\right)'$:

$$\left(yy'' + y'^2\right)' = 0.$$

Далее, выражение в скобках есть снова производная: $yy'' + y'^2 = (yy')'$. Таким образом, получаем $(yy')'' = 0$. Используя соотношение $yy' = (\frac{1}{2}y^2)'$, окончательно получаем

$$(y^2)''' = 0 \Leftrightarrow y^2 = C_1x^2 + C_2x + C_3.$$

Ф.456. Решить уравнение $y'y''' = 2y''^2$.

Заметим, что если разделить уравнение на $y'y''$, оно представляет собой полную производную:

$$\frac{y'''}{y''} = 2\frac{y''}{y'} \Leftrightarrow (\ln|y''|)' = (\ln|y'|)' \Leftrightarrow \left(\ln\left|\frac{y''}{y'}\right|\right)' = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{y''}{y'} = C_1 \Leftrightarrow (\ln|y'|)' = C_1 \Leftrightarrow \ln|y'| = C_1x + C_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y' = C_2e^{C_1x} \Leftrightarrow y = C_2e^{C_1x} + C_3.$$

При делении на $y'y''$ могли потеряться решения, для которых $y'' \equiv 0 \Leftrightarrow y = C_1x + C_2$ (они включают в себя те решения, для которых $y' \equiv 0$). Непосредственная проверка показывает, что все эти функции удовлетворяют исходному уравнению.

Задачи для самостоятельного решения: 436, 437, 448, 458, 462, 465.

10. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами

Линейным однородным уравнением порядка n с постоянными коэффициентами называется уравнение вида

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \tag{10.1}$$

где a_i, $i = 1, \ldots, n$ — действительные постоянные. Уравнению (10.1) поставим в соответствие *характеристический* многочлен

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n \tag{10.2}$$

и *характеристическое* уравнение $P(\lambda) = 0$.

Для решения уравнения (10.1) надо:

1. Найти корни характеристического многочлена (10.2), следя за тем, чтобы количество полученных корней с учетом их кратности было равно порядку этого уравнения;
2. Выписать частные решения, соответствующие каждому корню, по следующим правилам:
   - Каждому действительному корню λ многочлена (10.2) кратности $k \geq 1$ соответствуют k функций
   $$e^{\lambda x},\ xe^{\lambda x},\ x^2 e^{\lambda x}, \ldots, x^{k-1} e^{\lambda x}.$$
   - Каждой паре комплексно-сопряженных корней $\lambda = a \pm bi$, $b \neq 0$, кратности $k \geq 1$ соответствуют $2k$ функций
   $$e^{ax}\cos bx,\ e^{ax}\sin bx,\ xe^{ax}\cos bx,\ xe^{ax}\sin bx,$$
   $$x^2 e^{ax}\cos bx,\ x^2 e^{ax}\sin bx, \ldots, x^{k-1} e^{ax}\cos bx,\ x^{k-1} e^{ax}\sin bx.$$

Тогда общее решение уравнения (10.1) есть произвольная линейная комбинация выписанных частных решений $y_1, y_2, \ldots, y_n$, т. е.

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n,\ C_i \in \mathbf{R},\ i = 1, \ldots, n.$$

Рассмотрим несколько примеров.

Ф.512. Решить уравнение

$$y'' + 4y' + 3y = 0.$$

Выпишем характеристический многочлен

$$P(\lambda) = \lambda^2 + 4\lambda + 3 = (\lambda + 3)(\lambda + 1).$$

Итак, имеем корни $\lambda_1 = -3$ и $\lambda_2 = -1$, которым соответствуют частные решения

$$y_1 = e^{-3x}, y_2 = e^{-x}.$$

Таким образом, общее решение имеет вид

$$y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-x}.$$

Ф.515. Решить уравнение

$$y'' - 4y' + 5y = 0.$$

Выпишем характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0.$$

Решая его, находим корни $\lambda_{1,2} = 2 \pm i$. Этой паре комплексно-сопряженных корней соответствуют частные решения

$$y_1 = e^{2x} \cos x,\ y_2 = e^{2x} \sin x.$$

Таким образом, общее решение имеет вид

$$y = C_1 e^{2x} \cos x + C_2 e^{2x} \sin x.$$

Ф.520. Решить уравнение

$$y^{(4)} + 4y = 0.$$

Выпишем характеристическое уравнение

$$\lambda^4 + 4 = 0.$$

Преобразуем его к виду $\lambda = \sqrt[4]{-4}$. Пользуясь формулой для извлечения корня степени n из комплексного числа, получим

$$\begin{aligned}
\lambda_m &= \sqrt[4]{4}\left(\cos\frac{\pi + 2\pi k}{4} + \sin\frac{\pi + 2\pi k}{4}\right),\ m = 0, 1, 2, 3: \\
\lambda_0 &= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 + i,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+\sin\frac{3\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-1+i,\\
\lambda_2 &= \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+\sin\frac{5\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-1-i,\\
\lambda_3 &= \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+\sin\frac{7\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=1-i.
\end{aligned}$$

Таким образом, паре комплексно-сопряженных корней $\lambda_{0,3} = 1 \pm i$ соответствует пара частных решений $e^x\cos x,\ e^x\sin x$, а паре корней $\lambda_{1,2} = -1\pm i$ — пара частных решений $e^{-x}\cos x,\ e^{-x}\sin x$.

В результате, общее решение имеет вид

$$y = C_1e^x\cos x + C_2e^x\sin x + C_3e^{-x}\cos x + C_4e^{-x}\sin x.$$

Ф.524. Решить уравнение

$$y^{(5)} - 6y^{(4)} + 9y''' = 0.$$

Выпишем характеристический многочлен

$$\lambda^5 - 6\lambda^4 + 9\lambda^3 = \lambda^3(\lambda^2 - 6\lambda + 9) = \lambda^3(\lambda-3)^2.$$

Решая последнее уравнение, находим корни $\lambda_{1,2,3} = 0,\ \lambda_{4,5} = 3$.

Корням $\lambda_{1,2,3} = 0$ соответствуют частные решения

$$y_1 = 1,\ y_2 = x,\ y_3 = x^2,$$

а корням $\lambda_{4,5} = 3$ — решения

$$y_4 = e^{3x},\ y_5 = xe^{3x}.$$

Таким образом, общее решение имеет вид

$$y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4e^{3x} + C_5xe^{3x}.$$

Задачи для самостоятельного решения: 511, 515, 518, 519, 527, 528.

11. Линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами

11.1. Линейным неоднородным уравнением порядка n ***с постоянными коэффициентами*** называется уравнение вида

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x), \tag{11.1}$$

где a_i, $i = 1, \ldots, n$ — действительные постоянные, а f — известная непрерывная функция, называемая правой частью уравнения. Уравнение с "отброшенной" правой частью

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \tag{11.2}$$

называется однородным уравнением, соответствующим уравнению (11.1). Рассмотрение уравнения (11.2) обусловлено теоремой об общем решении линейного неоднородного уравнения: если y_0 — общее решение уравнения (11.2), а Y — частное решение уравнения (11.1), то общее решение y уравнения (11.1) дается формулой

$$y = y_0 + Y.$$

Метод нахождения y_0 описан в предыдущей главе. Остановимся на методах нахождения Y.

11.2. Метод неопределенных коэффициентов

Этот метод применяется в случаях, когда f имеет специальный вид.

Для уравнений с $f(x) = P_m(x)e^{cx}$, где $P_m(x)$ — многочлен степени m, частное решение можно найти в виде

$$Y = x^s Q_m(x) e^{cx},$$

где $Q_m(x)$ — многочлен той же степени m. Число $s = 0$, если c не является корнем характеристического многочлена уравнения (11.2), а если c — корень, то s равно кратности этого корня. Частными случаями такой правой части являются

$$f_1(x) = P_m(x), \quad f_2(x) = Ae^{cx},$$

которым соответствуют частные решения

$$Y_1 = x^s Q_m(x), \quad Y_2 = x^s e^{cx}.$$

Для уравнений с правой частью

$$f(x) = e^{ax}(P_k(x)\cos bx + Q_l(x)\sin bx),$$

где $P_k(x)$, $Q_l(x)$ — многочлены степеней k и l соответственно, частное решение может быть найдено в виде

$$Y = x^s e^{ax}(R_m(x)\cos bx + T_m(x)\sin bx),$$

где $s = 0$, если $\mu = a + bi$ не является корнем характеристического многочлена уравнения (11.2), а если μ — корень, то s равно кратности этого корня, а $m = \max\{k, l\}$.

Частными случаями такой правой части являются

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= Ae^{ax}\cos bx, \quad f_2(x) = Be^{ax}\sin bx,\\
f_3(x) &= A\cos bx + B\sin bx, \quad f_4(x) = e^{ax}P_k(x)\cos bx,\\
f_5(x) &= e^{ax}P_k(x)\sin bx, \quad f_6(x) = P_k(x)\cos bx + Q_l(x)\sin bx,
\end{aligned}$$

для которых частные решения могут быть найдены в виде

$$\begin{aligned}
Y_1(x) &= x^s A_1 e^{ax}\cos bx, \quad Y_2(x) = x^s B_1 e^{ax}\sin bx,\\
Y_3(x) &= x^s(A_1\cos bx + B_1\sin bx),\\
Y_4(x) &= x^s e^{ax}(R_m(x)\cos bx + T_m(x)\sin bx),\\
Y_5(x) &= x^s e^{ax}(R_m(x)\sin bx + T_m(x)\cos bx),\\
Y_6(x) &= x^s(R_m(x)\cos bx + T_m(x)\sin bx).
\end{aligned}$$

После того как установлен вид решения, надо найти все его неопределенные коэффициенты. Это можно сделать, подставляя частное решение в уравнение (11.1) и используя линейную независимость функций.

В ряде случаев первоначально $f(x)$ не имеет специального вида, но может быть к нему приведена путем различных преобразрваний. Рассмотрим это на следующих правых частях:

$$f(x) = \sin^2 bx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2bx,$$

$$\begin{aligned}
f(x) = \cos^3 bx = \cos^2 bx\cos bx = \frac{1}{2}(1 + \cos 2bx)\cos bx =\\
= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2bx\cos bx = \frac{1}{2}\cos bx + \frac{1}{2}\cos 2bx\cos bx =\\
= \frac{1}{2}\cos bx + \frac{1}{4}(\cos bx + \cos 3bx) =\\
= \frac{1}{2}\cos bx + \frac{1}{4}\cos bx + \frac{1}{4}\cos 3bx = \frac{3}{4}\cos bx + \frac{1}{4}\cos 3bx,
\end{aligned}$$

$$f(x) = \sin^4 bx = (\sin^2 bx)^2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2bx\right)^2 =$$
$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos 2bx + \frac{1}{4}\cos^2 2bx = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos 2bx + \frac{1}{8}(1 + \cos 4bx) =$$
$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos 2bx + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\cos 4bx = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2bx + \frac{1}{8}\cos 4bx,$$
$$f(x) = (e^{ax} + e^{cx})\cos^3 bx = e^{ax}\cos^3 bx + e^{cx}\cos^3 bx =$$
$$= e^{ax}\left(\frac{3}{4}\cos bx + \frac{1}{4}\cos 3bx\right) + e^{cx}\left(\frac{3}{4}\cos bx + \frac{1}{4}\cos 3bx\right).$$

Рассмотрим примеры на применение метода неопределенных коэффициентов.

Пример 1. Решить уравнение

$$y'' - y' - 2y = 4x^2.$$

Для этого уравнения $y_0 = C_1e^{-x} + C_2e^{2x}$, $f(x) = 4x^2$. Используя специальный вид правой части, будем искать частное решение в виде

$$Y = A_2x^2 + A_1x + A_0.$$

Таким образом, $Y' = 2A_2 + A_1, y'' = 2A_2$. Подставляя полученные результаты в дифференциальное уравнение, получим

$$2A_2 - (2A_2x + A_1) - 2(A_2x^2 + A_1x + A_0) = 4x^2,$$
$$(-2A_2)x^2 + (-2A_2 - 2A_1)x + (2A_2 - A_1 - 2A_0) = 4x^2 + 0x + 0.$$

Приравнивая коэффициенты при равных степенях x, получим

$$-2A_2 = 4, -2A_2 - 2A_1 = 0, 2A_2 - A_1 - 2A_0 = 0,$$
$$A_0 = -3, A_1 = 2, A_2 = -2,$$

и частное решение будет иметь вид

$$Y = -2x^2 + 2x - 3.$$

В результате, запишем общее решение как

$$y = y_0 + Y = C_1e^{-x} + C_2e^{2x} - 2x^2 + 2x - 3.$$

Пример 2. Решить уравнение

$$y'' - y' - 2y = e^{3x}.$$

Для этого уравнения $y_0 = C_1e^{-x} + C_2e^{2x}, f(x) = e^{3x}$. Используя специальный вид правой части, будем искать частное решение в виде

$$Y = Ae^{3x}.$$

Тогда $Y' = 3Ae^{3x},\ Y'' = 9Ae^{3x}$. Подставляя полученные результаты в дифференцильное уравнение, будем иметь

$$9Ae^{3x} - 3Ae^{3x} - 2Ae^{3x} = e^{3x},\ 4Ae^{3x} = e^{3x},$$

откуда следует, что $A = \frac{1}{4}$ и общее решение запишем как

$$y = C_1e^{-x} + C_2e^{2x} + \frac{1}{4}e^{3x}.$$

Пример 3. Решить уравнение

$$y'' - y' - 2y = \sin 2x.$$

Для этого уравнения $y_0 = C_1e^{-x} + C_2e^{2x}, f(x) = \sin 2x$. Используя специальный вид правой части, будем искать частное решение в виде

$$Y = A\sin 2x + B\cos 2x.$$

Тогда $Y' = 2A\cos 2x - 2B\sin 2x,\ Y'' = -4A\sin 2x - 4B\cos 2x$. Подставляя полученные результаты в дифференцильное уравнение, будем иметь

$$\begin{gathered}(-4A\sin 2x - 4B\cos 2x) - (2A\cos 2x - 2B\sin 2x - \\ -2(A\sin 2x + B\cos 2x = \sin 2x, \\ (-6A + 2B)\sin 2x + (-6B - 2A)\cos 2x = 1\cdot\sin 2x + 0\cdot\cos 2x.\end{gathered}$$

Приравнивая коэффициенты при равных степенях x, получим

$$A = -\frac{3}{20},\ B = \frac{1}{20},$$

и общее решение будет иметь вид

$$y = C_1e^{-x} + C_2e^{2x} - \frac{3}{20}\sin 2x + \frac{1}{20}.$$

11.3. Метод вариации произвольных постоянных

Частное решение уравнения (11.1) можно найти в виде

$$Y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n,$$

где $y_1, \ldots, y_n$ — базисные решения соответствующего однородного уравнения (11.2), но $C_1, C_2, \ldots, C_n$ уже не константы, а неизвестные функции переменной x, т. е.

$$Y(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) + ... + C_n(x)y_n(x).$$

Для того чтобы найти $C_i(x)$, $i = 1, \ldots, n$, необходимо решить линейную систему (переменную x везде опускаем)

$$\begin{cases} C_1'y_1 + C_2'y_2 + ... + C_n'y_n = 0 \\ C_1'y_1' + C_2'y_2' + ... + C_n'y_n' = 0 \\ \vdots \\ C_1'y_1^{(n-2)} + C_2'y_2^{(n-2)} + ... + C_n'y_n^{(n-2)} = 0 \\ C_1'y_1^{(n-1)} + C_2'y_2^{(n-1)} + ... + C_n'y_n^{(n-1)} = f \end{cases}$$

относительно C_i' и затем проинтегрировать полученные равенства для нахождения C_i, опуская все константы интегрирования. Это возможно, так как ищется только одно частное решение.

Для $n = 2$ записанная выше система будет иметь вид

$$\begin{cases} C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0 \\ C_1'y_1' + C_2'y_2' = f. \end{cases}$$

Рассмотрим примеры на применение этого метода.

Пример 4. Решить уравнение

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}.$$

Здесь $n = 2$ и $y_0 = C_1e^x + C_2xe^x$. Следовательно,частное решение будем искать в виде

$$Y = C_1(x)e^x + C_2(x)xe^x. \tag{11.3}$$

Учитывая, что $y_1 = e^x$, $y_2 = xe^x$, $f(x) = \frac{e^x}{x}$, получим систему для определения $C_1(x), C_2(x)$:

$$\begin{cases} C_1'(x)e^x + C_2'(x)xe^x = 0 \\ C_1'(x)e^x + C_2'(x)(e^x + xe^x) = \frac{e^x}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1'(x) = -1 \\ C_2'(x) = \frac{1}{x}. \end{cases}$$

Можно взять

$$C_1(x) = -x, \quad C_2(x) = \ln|x|.$$

Подставляя найденные функции в (11.3), получим

$$Y = -xe^x + xe^x \ln|x|.$$

В результате, общее решение имеет вид

$$y = y_0 + Y = C_e^x + C_2 xe^x - xe^x + xe^x \ln|x|.$$

Пример 5. Решить уравнение

$$x'' + 4x = \sin^2 2t.$$

Это уравнение второго порядка относительно $x(t)$ с

$$x_0 = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t. \tag{11.4}$$

Следовательно, частное решение будем искать в виде

$$X = C_1(t) \cos 2t + C_2(t) \sin 2t.$$

Учитывая,что $x_1 = \cos 2t$, $x_2 = \sin 2t$, $f(t) = \sin^2 2t$, получим систему для нахождения $C_1(t), C_2(t)$:

$$\begin{cases} C_1'(t) \cos 2t + C_2'(t) \sin 2t = 0 \\ C_1'(t)(-2 \sin 2t) + C_2'(t) 2 \cos 2t = \sin^2 2t. \end{cases}$$

Решая ее, получим

$$C_1'(t) = -\frac{1}{2} \sin^3 2t, \quad C_2'(t) = \frac{1}{2} \sin^2 2t \cos 2t.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} C_1(t) &= -\frac{1}{2} \int \sin^3 2t dt = \frac{1}{4} \cos 2t - \frac{1}{12} \cos^3 2t, \\ C_2(t) &= \frac{1}{2} \int \sin^2 2t \cos 2t dt = \frac{1}{12} \sin^3 2t. \end{aligned}$$

Подставляя найденные функции в (11.4), получим

$$X = \left(\frac{1}{4} \cos 2t - \frac{1}{12} \cos^3 2t \right) \cos 2t + (\frac{1}{12} \sin^3 2t) \sin 2t =$$

$$= \frac{1}{4} \cos^2 2t - \frac{1}{12} (\cos^4 2t - \sin^4 2t) =$$

$$= \frac{1}{4} \cos^2 2t - \frac{1}{12} (\cos^2 2t - \sin^2 2t)(\cos^2 2t + \sin^2 2t) =$$

$$= \frac{1}{6} \cos^2 2t + \frac{1}{12} \sin^2 2t.$$

В результате, общее решение имеет вид

$$x = x_0 + X = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t + \frac{1}{6}\cos^2 2t + \frac{1}{12}\sin^2 2t.$$

11.4. Принцип суперпозиции

Если правая часть уравнения (11.1) представляет собой сумму или может быть представлена в виде суммы функций

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_p(x),$$

то в качестве частного решения уравнения (11.1) можно взять сумму частных решений

$$Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_p$$

уравнений с той же левой частью и правыми частями $f_1, f_2, \ldots, f_p$ соответственно. Этот факт иногда называют принципом суперпозиции.

Пример 6. Решить уравнение

$$y' - 5y = 3e^x - 2x + 1.$$

Общее решение соответствующего однородного уравнения имеет вид

$$y_0 = C_1 e^{5x}.$$

Правая часть данного уравнения может быть представлена в виде

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x), \text{ где } f_1(x) = 3e^{2x},\ f_2(x) = -2x + 1.$$

Соответствующие частные решения будут иметь вид

$$Y_1 = Ae^x,\ Y_2 = B_1 x + B_0.$$

Для определения A, B_1, B_0 подставим Y_1, Y_2 в уравнения

$$y' - 5y = 3e^x,\ y' - 5y = -2x + 1$$

соответственно. Найдем

$$A = -\frac{3}{4},\ B_1 = \frac{2}{5},\ B_0 = -\frac{3}{25}.$$

Согласно принципу суперпозиции, в качестве частного решения исходного дифференциального уравнения можно взять

$$Y = Y_1 + Y_2 = -\frac{3}{4}e^x + \frac{2}{5}x - \frac{3}{25},$$

а общее решение будет иметь вид

$$y = C_1 e^{5x} - \frac{3}{4}e^x + \frac{2}{5}x - \frac{3}{25}.$$

Пример 7. Решить уравнение

$$y' - 5y = x^2 e^x - x e^{5x}.$$

Общее решение соответствующего однородного уравнения есть

$$y_0 = C_1 e^{5x}.$$

Правая часть данного уравнения может быть представлена в виде

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x), \text{ где } f_1(x) = x^2 e^x,\ f_2(x) = x e^{5x}.$$

Соответствующие частные решения будут иметь вид

$$Y_1 = e^x(A_2x^2 + A_1x + A_0),\ Y_2 = xe^{5x}(B_1x + B_0) = e^{5x}(B_1x^2 + B_0x).$$

Для определения A_2, A_1, A_0, B_1, B_0 подставим Y_1, Y_2 в уравнения

$$y' - 5y = x^2e^x,\ y' - 5y = -xe^{5x}$$

соответственно. Найдем

$$A_2 = -\frac{1}{4},\ A_1 = -\frac{1}{8},\ A_0 = -\frac{1}{32},\ B_1 = -\frac{1}{2},\ B_0 = 0.$$

Согласно принципу суперпозиции, в качестве частного решения исходного дифференциального уравнения можно взять

$$Y = Y_1 + Y_2 = e^x(-\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}) - \frac{1}{2}x^2e^{5x},$$

и общее решение будет

$$y = C_1e^{5x} + e^x\left(-\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\right) - \frac{1}{2}x^2e^{5x}.$$

11.5. Задача Коши

Задача нахождения среди множества всех возможных решений уравнения (11.1) решения, удовлетворяющего следующей системе начальных условий:

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y_0', \\ \ldots \\ y^{n-2}(x_0) = y_0^{n-2}, \\ y^{n-1}(x_0) = y_0^{n-1}, \end{cases}$$

будем называть задачей Коши для уравнения (11.1).

Пример 8. Решить задачу Коши

$$y'' - y' - 2y = 4x^2, \; y(0) = 1, \; y'(0) = 4.$$

Общее решение данного дифференциального уравнения, найденное в примере 1, есть

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} - 2x^2 + 2x - 3.$$

Тогда

$$y' = -C_1 e^{-x} + 2C_2 e^{2x} - 4x + 2.$$

Используя данные начальные условия, получим

$$y(0) = C_1 e^{-(0)} + 2C_2 e^{2(0)} - 2(0)^2 + 2(0) - 3 = 1 \Leftrightarrow C_1 + C_2 = 4,$$
$$y'(0) = -C_1 e^{-(0)} + 2C_2 e^{2(0)} - 4(0) + 2 = 4 \Leftrightarrow -C_1 + C_2 = 2.$$

Решая полученную для C_1, C_2 систему уравнений, найдем

$$C_1 = 2, \; C_2 = 2.$$

Подставляя найденные значения в общее решение, получим решение задачи Коши

$$y = 2e^{-x} + 2e^{2x} - 2x^2 + 2x - 3.$$

Пример 9. Решить задачу Коши

$$x'' + 4x = \sin^2 2t, \; x(0) = 0, \; x'(0) = 0.$$

Общее решение данного дифференциального уравнения, найденное в примере 5, есть

$$x = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t + \frac{1}{6}\cos^2 2t + \frac{1}{12}\sin^2 2t.$$

Тогда

$$x' = -2C_1 \sin 2t + 2C_2 \cos 2t - \frac{1}{3} \cos 2t \sin 2t.$$

Используя данные начальные условия, получим

$$x(0) = C_1 + \frac{1}{6} = 0,\ C_1 = -\frac{1}{6},$$

$$x'(0) = 2C_2 = 0,\ C_2 = 0.$$

Подставляя найденные значения $C+1$ и C_2 в общее решение, получим решение задачи Коши

$$x = -\frac{1}{6} \cos 2t + \frac{1}{\cos}^{2} 2t + \frac{1}{12} \sin^2 2t.$$

Пример 10. Решить задачу Коши

$$y'' - y' - 2y = \frac{e^x}{x},\ y(1) = 0,\ y'(1) = 1.$$

Общее решение данного дифференциального уравнения, найденное в примере 4, есть

$$y = C_1 e^x + C_3 x e^x + x e^x \ln|x|,\ C_3 = C_2 - 1.$$

Тогда

$$y' = C_1 e^x + C_3 e^x + C_3 x e^x + e^x \ln|x| + x e^x \ln|x| + e^x.$$

Используя данные начальные условия, получим

$$y(1) = C_1 e^1 + C_3 \cdot 1 \cdot e^1 + 1 \cdot e^1 \ln 1 = 0 \Leftrightarrow C_1 e + C_3 e = 0,$$

$$y'(1) = C_1 e^1 + C_3 e^1 + e^1 \ln 1 + 1 \cdot e^1 \ln 1 + e^1 = 1 \Leftrightarrow C_1 e + 2C_3 e = 1 - e.$$

Решая полученную для C_1 и C_3 систему уравнений, находим

$$C_1 = C_3 = \frac{e-2}{e}.$$

Подставляя найденные значения в общее решение, получим решение задачи Коши

$$y = e^{x-1}(e-1)(1-x) + x e^x \ln|x|.$$

Задачи для самостоятельного решения: 533, 535, 537, 539, 546, 578.

12. Линейные однородные системы с постоянными коэффициентами

Система дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy, \end{cases}$$

где a, b, c, d — заданные действительные числа, называется линейной однородной системой второго порядка с постоянными коэффициентами.

Пару функций $x = x(t), y = y(t)$, определенных на интервале I, называют решением такой системы, если при их подстановке оба уравнения системы превращаются в тождества на I.

Для решения этих систем будем использовать метод исключения неизвестных. Он позволяет свести систему дифференциальных уравнений к дифференциальному уравнению второго порядка. Это происходит путем выражения одной из неизвестных функций из одного из уравнений системы (например, $x(t)$ из второго уравнения) и подстановки в оставшееся уравнение. Решая полученное уравнение, находим вторую из двух искомых функций ($y(t)$). Для получения первой искомой функции ($x(t)$) нужно вернуться к уравнению, которое было использовано для ее подстановки.

В этой и следующей главах все производные берутся по переменной t.

Ф.786. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = 3x + 4y. \end{cases}$$

Из первого уравнения системы выражаем

$$y = x' - 2x,$$

подставляем во второе уравнение системы и получаем

$$(x' - 2x)' = 3x + 4(x' - 2x) \Leftrightarrow x'' - 6x' + 5x = 0.$$

Получили линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами. Решая его по алгоритму, описанному в предыдущей главе, получим общее решение

$$x = C_1 e^t + C_2 e^{5t}.$$

Затем находим

$$y = (C_1e^t + C_2e^{5t})' - 2(C_1e^t + C_2e^{5t}) =$$
$$= C_1e^t + 5C_2e^{5t} - 2C_1e^t - 2C_2e^{5t} = -C_1e^t + 3C_2e^{5t}.$$

Таким образом, общее решение системы есть

$$x = C_1e^t + C_2e^{5t},\ y = -C_1e^t + 3C_2e^{5t}.$$

Ф.789. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x' = x + y, \\ y' = 3y - 2x. \end{cases}$$

Из первого уравнения системы выражаем

$$y = x' - x,$$

подставляем во второе уравнение системы и получаем

$$(x' - x)' = 3(x' - x) - 2x \Leftrightarrow x'' - 4x' + 5x = 0.$$

Получили линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами. Решая его по алгоритму, описанному в предыдущей главе, получим общее решение

$$x = e^{2t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t).$$

Затем находим

$$\begin{aligned} y = (e^{2t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t)' - e^{2t}(C_1 \cos t - C_2 \sin t) = \\ = 2C_1e^{2t} \cos t - C_2e^{2t} \sin t + \\ +2C_2e^{2t} \sin t + C_2e^{2t} \cos t - C_1e^{2t} \cos t - C_2e^{2t} \sin t = \\ = e^{2t}((C_1 + C_2) \cos t + (C_2 - C_1) \sin t). \end{aligned}$$

Таким образом, общее решение системы есть

$$x = e^{2t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t), y = e^{2t}((C_1 + C_2) \cos t + (C_2 - C_1) \sin t).$$

Ф.791. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x' = -x - 5y \\ y' = x + y. \end{cases}$$

Из первого уравнения системы выражаем $x = y' - y$, подставляем во второе уравнение системы и получаем

$$(y' - y)' + y' - y + 5y = 0, y'' - y' + y' + 4y = 0, y'' + 4y = 0.$$

Получим линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами. Решая его по алгоритму, описанному в предыдущей главе, получим общее решение

$$y = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t.$$

Затем находим

$$x = (C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t)' - C_1 \cos 2t - C_2 \sin 2t =$$
$$= -2C_1 \sin 2t + 2C_2 \cos 2t - C_1 \cos 2t - C_2 \sin 2t =$$
$$= (2C_2 - C_1) \cos 2t - (2C_1 + C_2) \sin 2t.$$

Таким образом общее решение системы будет иметь вид

$$x = (2C_2 - C_1) \cos 2t - (2C_1 + C_2) \sin 2t, y = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t.$$

Ф.793. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x' = 3x - y \\ y' = 4x - y. \end{cases}$$

Из первого уравнения системы выражаем

$$y = 3x - x',$$

подставляем во второе уравнение системы и получаем

$$(3x - x')' = 4x - 3x + x' \Leftrightarrow 3x' - x'' = x + x' \Leftrightarrow x'' - 2x' + x = 0.$$

Получили линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами. Решая его по алгоритму, описанному в предыдущей главе, получим общее решение

$$x = C_1 e^t + C_2 t e^t.$$

Затем находим

$$y = 3C_1 e^t + 3C_2 t e^t - (C_1 e^t + C_2 t e^t)' =$$
$$= 3C_1 e^t + 3C_2 t e^t - C_1 e^t - C_2 e^t - C_2 t e^t = (2C_1 + C_2) e^t.$$

Таким образом, общее решение системы есть

$$x = (C_1 + C_2 t) e^t, y = (2C_1 + C_2) e^t.$$

Задачи для самостоятельного решения: 788, 789, 790, 793, 794, 795.

13. Линейные неоднородные системы с постоянными коэффициентами

Система

$$\begin{cases} x' = ax + by + f_1(t), \\ y' = cx + dy + f_2(t), \end{cases}$$

где a, b, c, d — заданные действительные числа, а f_1, f_2 — заданные непрерывные функции, называется линейной неоднородной системой второго порядка с постоянными коэффициентами.

Понятие решения этой системы и метод ее решения по существу описаны в предыдущей главе. Отличие от рассказанного заключается лишь в том, что система будет теперь сводиться к неоднородному уравнению.

Пример 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = 2x + y + 4t^2. \end{cases}$$

Выражая y из первого уравнения системы и подставляя во второе, получим

$$x'' - x' - 2x = 4t^2.$$

Данное уравнение решено в примере 1 гл. 11, и его общее решение есть

$$x = C_1e^{-t} + C_2e^{2t} - 2t^2 + 2t - 3.$$

Для нахождения y достаточно продифференцировать полученное для x выражение

$$y = x' = -C_1e^{-t} + 2C_2e^{2t} - 4t + 2.$$

В результате, находим пару функций

$$x = C_1e^{-t} + C_2e^{2t} - 2t^2 + 2t - 3, \ y = -C_1e^{-t} + 2C_2e^{2t} - 4t + 2,$$

являющуюся общим решением исходной системы.

Пример 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x + 2y + \frac{e^t}{t}. \end{cases}$$

Выражая y из первого уравнения системы и подставляя во второе, получим

$$x'' - 2x' + x = \frac{e^t}{t}.$$

Данное уравнение решено в примере 4 гл. 11, и его общее решение есть

$$x = C_1 e^t + C_2 t e^t - t e^t + t e^t \ln|t|.$$

Для нахождения y достаточно продифференцировать полученное для x выражение

$$y = C_1 e^t + C_2(1+t)e^t + (\ln|t| + (\ln|t| - 1)t)e^t.$$

В результате, находим пару функций

$$\begin{array}{rcl} x & = & C_1 e^t + C_2 t e^t - t e^t + t e^t \ln|t|, \\ y & = & C_1 e^t + C_2(1+t)e^t + (\ln|t| + (\ln|t| - 1)t)e^t, \end{array}$$

являющуюся общим решением исходной системы.

Задачи для самостоятельного решения: 826, 827, 828, 829, 830, 846.

Список рекомендуемой литературы

1. Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения: примеры и задачи. М.: Высшая школа, 1989.

2. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения. М.: Физматлит, 2005.

3. Филиппов А.Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений. М.: Эдиториал УРСС, 2004.

4. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М.—Ижевск: Изд-во РХД, 2005.

Быков Владимир Владиславович
Смоленцев Михаил Викторович

КЛАССИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Учебно-методическое пособие

Редактор Шумакова Е.Е.

Оригинал-макет изготовлен Быковым В.В.,
Смоленцевым М.В.

Подписано в печать 18.08.2009. Формат 60x84 1/16
Печ. л. 3,75. Уч.-изд. л. 3,75. Тираж 350 экз.
Изд. № 053-1. Заказ №

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»,
115409, Москва, каширское шоссе, д. 31.
Типография НИЯУ МИФИ.