

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

Т.И. Бухарова, В.Л. Камынин,
В.М. Простокишин

**ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ
В ЛИНЕЙНЫХ ВЕКТОРНЫХ
ПРОСТРАНСТВАХ**

Рекомендовано к изданию УМО “Ядерные
физика и технологии”

Москва 2013

УДК 512.64
ББК 22.143
Б 94

Бухарова Т.И., Камынин В.Л., Простокишин В.М. **Линейные операторы в линейных векторных пространствах.** М.: НИЯУ МИФИ, 2013. – 180 с.

Подготовлено на основе курса лекций, читаемого авторами в НИЯУ МИФИ на протяжении многих лет. Содержание соответствует Государственному образовательному стандарту по дисциплине «Линейная алгебра». Подробно изложены вопросы, касающиеся понятия линейных пространств и линейных операторов, включая темы приведения матрицы линейного оператора к жордановой нормальной форме и вычисления функций от матриц и операторов. Теоретическая часть иллюстрируется многочисленными примерами, способствующими лучшему усвоению материала.

Предназначено для студентов всех факультетов НИЯУ МИФИ, а также для студентов вузов с повышенной математической подготовкой.

Подготовлено в рамках Программы создания и развития НИЯУ МИФИ.

Рецензенты:

д-р физ.-мат.наук, проф. А.С. Леонов (НИЯУ МИФИ),
д-р физ.-мат.наук, проф. А.В. Фаминский (РУДН)

ISBN 978-5-7262-1890-8

© Национальный исследовательский ядерный университет
«МИФИ», 2013

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	4
Глава 1. ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА	5
1.1. Понятие линейного пространства. Простейшие свойства	5
1.2. Линейная зависимость системы векторов	10
1.3. Базис и размерность линейного пространства	13
1.4. Изоморфизм линейных пространств	19
1.5. Линейные подпространства и линейные оболочки	22
1.6. Пересечение и сумма подпространств линейного пространства	25
1.7. Преобразование координат вектора при переходе к другому базису. Матрица перехода от базиса к базису	31
Глава 2. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ	35
2.1. Понятие линейного оператора. Простейшие свойства	35
2.2. Матрица линейного оператора	38
2.3. Обратный оператор. Ядро и образ оператора	48
2.4. Собственные значения и собственные векторы линейного оператора	54
2.5. Приведение матрицы линейного оператора к диагональному виду	69
Глава 3. ЖОРДАНОВА НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА МАТРИЦЫ	77
3.1. Корневые векторы и корневые подпространства	78
3.2. Циклические подпространства. Жорданова нормальная форма матрицы линейного оператора	104
3.3. Приведение матрицы линейного оператора к жордановой нормальной форме	109
3.4. Единственность жордановой нормальной формы матрицы линейного оператора	141
Глава 4. ФУНКЦИИ ОТ МАТРИЦ И ОПЕРАТОРОВ	155
4.1. Многочлен от матрицы	155
4.2. Минимальный многочлен жордановой нормальной формы	158
4.3. Вычисление многочлена от матрицы с использованием жордановой нормальной формы	161
4.4. Функции от матриц. Многочлен Лагранжа – Сильвестра	168
СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ	180

ПРЕДИСЛОВИЕ

Первая часть пособия (первые две главы) содержит основные фундаментальные понятия линейной алгебры, которые входят в любой вузовский курс линейной алгебры. Это линейное векторное пространство, линейная зависимость и независимость векторов, базис и размерность, координаты вектора, матрица перехода, подпространство линейного пространства, спектр оператора.

Вторая часть пособия (третья и четвертая главы) описывает важные для приложений вопросы приведения матрицы оператора к жордановой нормальной форме и вычисления функций от матриц и операторов. Данные вопросы входят в расширенные курсы линейной алгебры, читаемые в вузах с повышенной математической подготовкой. Они часто не отражены или недостаточно отражены в учебниках по общему курсу линейной алгебры.

В то же время, данные вопросы входят в курсы линейной алгебры, читаемые в НИЯУ МИФИ. Поэтому авторы посчитали важным создать единое пособие, где подробно излагаются все указанные выше вопросы.

При написании пособия авторы старались соблюсти баланс строгости теории и наглядности изложения.

Ко всем утверждениям в книге даны подробные строгие математические доказательства. Приводимые в пособии теоретические сведения подкрепляются разбором достаточного количества примеров, что, как мы надеемся, упростит читателю изучение материала.

Пособие адресовано студентам вузов с повышенной математической подготовкой, в первую очередь, студентам НИЯУ МИФИ. При этом оно также будет полезно всем, кто хочет самостоятельно познакомиться с теорией линейных пространств и линейных операторов в линейных пространствах и ее приложениями.

Глава 1. ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

В курсе аналитической геометрии читатель имел дело с векторами, для которых вводились операции сложения двух векторов и умножения вектора на число, подчиняющиеся определенным правилам и имеющие определенные свойства.

В настоящей главе будут изучаться множества математических объектов произвольной природы, для элементов которых также будут определены операции сложения этих элементов и операция умножения элемента на число, причем эти операции будут обладать теми же свойствами, что и соответствующие операции над векторами в аналитической геометрии.

Для таких множеств вводится название линейные (векторные) пространства. Они обладают рядом общих свойств, рассмотрению которых и посвящена настоящая глава.

1.1. Понятие линейного пространства. Простейшие свойства

Через F будем обозначать одно из множеств: действительных чисел $\mathbb{R}$ или комплексных чисел $\mathbb{C}$. Пусть V – непустое множество элементов произвольной природы.

Определение 1.1. Множество V будем называть линейным пространством (а также линейным векторным пространством либо просто векторным пространством) над множеством F , если для элементов множества V :

- 1) определена операция сложения его элементов, т.е. для любых двух элементов $x, y \in V$, существует и единственен элемент $z \in V$, $z = x + y$, называемый их суммой;
- 2) определена операция умножения его элементов на числа из

множества $\mathbf{F}$, т.е. для любого элемента $x \in V$ и для любого λ из $\mathbf{F}$ существует и единственен элемент $z \in V$, $z = \lambda x$, называемый произведением x на λ ;

3) эти операции удовлетворяют следующим восьми свойствам:

1° $\forall x, y \in V$ справедливо $x + y = y + x$ (*аксиома коммутативности сложения*);

2° $\forall x, y, z \in V$ справедливо $(x + y) + z = x + (y + z)$ (*аксиома ассоциативности сложения*);

3° существует элемент $\theta \in V$, называемый нулевым элементом, такой, что $\forall x \in V$ $x + \theta = \theta + x = x$ (*аксиома существования нулевого элемента*);

4° $\forall x \in V$ $\exists x' \in V$, называемый противоположным элементом к элементу x , такой, что $x + x' = x' + x = \theta$ (*аксиома существования противоположного элемента*); обычно элемент, противоположный к элементу x , обозначают через $-x$;

5° $\forall x \in V$ $1 \cdot x = x$;

6° $\forall x, y \in V$ и $\forall \lambda \in \mathbf{F}$ справедливо $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$ (*первая аксиома дистрибутивности*);

7° $\forall x \in V$ и $\forall \lambda, \mu \in \mathbf{F}$ справедливо $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$ (*вторая аксиома дистрибутивности*);

8° $\forall x \in V$ и $\forall \lambda, \mu \in \mathbf{F}$ справедливо $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$.

Замечание 1.1. Если $\mathbf{F} = \mathbb{R}$, то линейное пространство V называется вещественным. Если $\mathbf{F} = \mathbb{C}$, то линейное пространство V называется комплексным.

Замечание 1.2. Элементы $x \in V$ будем называть векторами и обозначать, буквами латинского алфавита. Элементы $\lambda \in \mathbf{F}$ будем называть скалярами и обозначать буквами греческого алфавита.

Утверждение 1.1 (*простейшие свойства линейного пространства*).

- 1) Нулевой элемент единственен.
- 2) Для любого $x \in V$ его противоположный элемент единственен.
- 3) $\forall x \in V$ $0 \cdot x = \theta$.

$$4) \quad \forall x \in V \quad -x = (-1) \cdot x.$$

$$5) \quad \forall \lambda \in F \quad \lambda \cdot \theta = \theta.$$

Доказательство.

1. Пусть от противного существуют два нулевых элемента θ_1 и θ_2 . Рассмотрим сумму $z = \theta_1 + \theta_2$. Поскольку θ_2 – нулевой элемент, то в силу аксиомы 3° $z = \theta_1$. Аналогично, поскольку θ_1 – нулевой элемент, то $z = \theta_2$. Следовательно, $\theta_1 = \theta_2$ и нулевой элемент единственен.

2. Пусть от противного существуют два противоположных элемента $x', x'' \in V$ к элементу $x \in V$, тогда из аксиом 2° и 3° и определения противоположного элемента имеем: $x' = x' + \theta = x' + (x + x'') = (x' + x) + x'' = \theta + x'' = x''$ – получили противоречие.

3. Запишем цепочку равенств, вытекающих из аксиомы 7° и свойств числового нуля: $0 \cdot x = (0 + 0) \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x$, т.е. $0 \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x$. Прибавим к обеим частям этого соотношения элемент $-(0 \cdot x)$, тогда в силу определения противоположного элемента: $\theta = \theta + 0 \cdot x$, т.е. $0 \cdot x = \theta$, что и требовалось доказать.

4. Запишем цепочку равенств, вытекающих из аксиом 5° и 7° и уже доказанного выше свойства 3:

$$(-1) \cdot x + x = (-1) \cdot x + 1 \cdot x = (-1 + 1) \cdot x = 0 \cdot x = \theta,$$

откуда следует равенство $(-1) \cdot x = -x$.

5. Запишем цепочку равенств, вытекающих из аксиом 6° и 3°: $\lambda \cdot \theta = \lambda \cdot (\theta + \theta) = \lambda \cdot \theta + \lambda \cdot \theta$, т.е. $\lambda \cdot \theta = \lambda \cdot \theta + \lambda \cdot \theta$. Как и при доказательстве свойства 3, прибавим к обеим частям этого соотношения элемент $-(\lambda \cdot \theta)$, тогда получим $\theta = \theta + \lambda \cdot \theta = \lambda \cdot \theta$, т.е. $\lambda \cdot \theta = \theta$, что и требовалось доказать.

Рассмотрим примеры некоторых линейных пространств.

Пример 1.1. Множество свободных векторов трехмерного пространства с введенными в курсе аналитической геометрии операциями сложения векторов и умножения вектора на число образует линейное пространство, которое будем называть линейным пространством векторов (ЛПВ). Действительно, справедливость вось-

ми аксиом из определения линейного пространства доказана в курсе аналитической геометрии. Нулем служит нулевой вектор, противоположным к вектору $\vec{x}$ – вектор $(-\vec{x})$, коллинеарный вектору $\vec{x}$, равный ему по длине и направленный противоположно.

Пример 1.2. Рассмотрим множество $\mathbf{F}^n$ – строк $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ длины n , состоящих из чисел множества $\mathbf{F}$. Введем в этом множестве операцию сложения по следующему правилу: если $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ и $y = (\eta_1, \dots, \eta_n)$, то $x + y = (\xi_1 + \eta_1, \dots, \xi_n + \eta_n)$. Также введем операцию умножения строки на число по правилу: если $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, $\lambda \in \mathbf{F}$, то $\lambda x = (\lambda \xi_1, \dots, \lambda \xi_n)$.

В качестве нулевого элемента возьмем строку, состоящую из нулей: $\theta = (0, \dots, 0)$, а в качестве противоположного элемента к элементу $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ возьмем элемент $-x = (-\xi_1, \dots, -\xi_n)$.

Нетрудно проверить, что все аксиомы из определения линейного пространства выполняются. Таким образом, множество $\mathbf{F}^n$ является линейным пространством, которое называется координатным пространством.

Если $\mathbf{F} = \mathbb{R}$, то это – вещественное координатное пространство $\mathbb{R}^n$; если $\mathbf{F} = \mathbb{C}$, то имеем комплексное координатное пространство.

Замечание 1.3. Пусть $n=1$, тогда $\mathbf{F}^1 = \{(\xi)\}$, $\xi \in \mathbf{F}$. Очевидно, можно отождествить $\mathbf{F}^1$ с $\mathbf{F}$. Поэтому само множество $\mathbf{F}$ ($\mathbb{R}, \mathbb{C}$) – линейное пространство.

Пример 1.3. Рассмотрим множество $Mat(m, n)$ – множество прямоугольных числовых таблиц (числовых матриц) размера $m \times n$ с введенными для них стандартными операциями сложения матриц и умножения матрицы на число (имеется в виду поэлементное сложение и поэлементное умножение на число). В качестве нулевого элемента возьмем матрицу

$$O = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ . & . & . \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in Mat(m, n),$$

а в качестве противоположного элемента к матрице

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ . & . & . \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in Mat(m, n)$$

возьмем матрицу $-A = \begin{pmatrix} -a_{11} & \dots & -a_{1n} \\ . & . & . \\ -a_{m1} & \dots & -a_{mn} \end{pmatrix} \in Mat(m, n).$

В силу известных свойств сложения матриц и умножения матрицы на число, для множества $Mat(m, n)$ выполнены аксиомы линейного пространства. Таким образом, $Mat(m, n)$ – линейное пространство. В дальнейшем множество квадратных матриц $Mat(n, n)$ будем обозначать $Mat(n)$.

Пример 1.4. Множество $C([a, b])$ функций, непрерывных на отрезке $[a, b]$ с обычными операциями сложения функций и умножения функции на число, образует линейное пространство. При этом в качестве нулевого элемента следует взять функцию $f(t) \equiv 0$, $x \in [a, b]$, а в качестве противоположного элемента к функции $f(t)$ – функцию с противоположным знаком: $(-f(t))$.

Пример 1.5. Линейным пространством является множество P_n всех многочленов $p(t)$ степени не выше n с обычными операциями сложения многочленов и умножения многочлена на число.

Замечание 1.4. Множество многочленов степени n при $n > 0$ не образует линейное пространство относительно обычных операций сложения и умножения на число. Действительно, возьмем произвольный многочлен $p_n(t)$ степени n . Многочлен $-p_n(t)$ также имеет степень n , но их сумма равна нулю и не является многочле-

ном степени n при $n > 0$. Это противоречит определению сложения элементов линейного пространства.

Пример 1.6. Множество всех решений однородной системы линейных алгебраических уравнений также является линейным пространством.

1.2. Линейная зависимость системы векторов

Понятие линейной зависимости векторов было введено в курсе аналитической геометрии. Обобщением этого понятия является понятие линейной зависимости элементов произвольного линейного пространства (которые мы договорились называть векторами).

Определение 1.2. Пусть V – линейное пространство над множеством $\mathbb{F}$. Линейной комбинацией векторов $a_1, \dots, a_k \in V$ называется вектор $z = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k \in V$, где $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ – некоторые числа из $\mathbb{F}$. Линейная комбинация называется нетривиальной, если хотя бы одно из чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ отлично от нуля и тривиальной, если все числа $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ равны нулю.

Определение 1.3. Векторы $a_1, \dots, a_k \in V$ называются линейно зависимыми (ЛЗ), если $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{F}$, не все равные нулю и такие, что $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k = \theta$. Другими словами, векторы $a_1, \dots, a_k \in V$ линейно зависимы, если существует их нетривиальная линейная комбинация, равная нулевому вектору.

Определение 1.4. Векторы $a_1, \dots, a_k \in V$ называются линейно независимыми (ЛНЗ), если из соотношения $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k = \theta$, следует, что $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$.

Другими словами, векторы $a_1, \dots, a_k \in V$ линейно независимы, если только тривиальная линейная комбинация их равна нулевому вектору.

Теорема 1.1 (критерий линейной зависимости). Векторы $a_1, \dots, a_k \in V$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда один из них является линейной комбинацией остальных.

Доказательство. Необходимость. Пусть $a_1, \dots, a_k \in V$ – линейно зависимы. Тогда существуют $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{F}$ не все равные нулю, такие, что $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k = \theta$. Пусть $\lambda_j \neq 0$, тогда, очевидно,

$$a_j = \left(-\frac{\lambda_1}{\lambda_j} \right) a_1 + \dots + \left(-\frac{\lambda_{j-1}}{\lambda_j} \right) a_{j-1} + \left(-\frac{\lambda_{j+1}}{\lambda_j} \right) a_{j+1} + \dots + \left(-\frac{\lambda_k}{\lambda_j} \right) a_k,$$

Таким образом, вектор a_j является линейной комбинацией остальных.

Достаточность. Пусть

$$a_j = \beta_1 a_1 + \dots + \beta_{j-1} a_{j-1} + \beta_{j+1} a_{j+1} + \dots + \beta_k a_k,$$

тогда, очевидно,

$$\beta_1 a_1 + \dots + \beta_{j-1} a_{j-1} + (-1) a_j + \beta_{j+1} a_{j+1} + \dots + \beta_k a_k = \theta,$$

и данная линейная комбинация нетривиальна, поскольку в ней как минимум один коэффициент (перед a_j) отличен от нуля ($= -1$).

Теорема доказана.

Теорема 1.2 (свойства линейной зависимости векторов).

- 1) Если среди векторов $a_1, \dots, a_k \in V$ есть нулевой, то данная система линейно зависима.
- 2) Если система $\{a_1, \dots, a_k\}$ содержит линейно зависимую подсистему, то вся система также линейно зависима.
- 3) Если система $\{a_1, \dots, a_k\}$ линейно независима, то и любая ее подсистема также линейно независима.

Доказательство.

1. Пусть $a_j = \theta$, тогда линейная комбинация

$$0 \cdot a_1 + \dots + 0 \cdot a_{j-1} + 1 \cdot a_j + 0 \cdot a_{j+1} + \dots + 0 \cdot a_k = \theta$$

и является, очевидно, нетривиальной.

Поэтому векторы $a_1, \dots, a_j = \theta, \dots, a_k$ линейно зависимы.

2. Пусть некоторая подсистема векторов системы $\{a_1, \dots, a_k\}$ линейно зависима. После перенумерования можно считать, что это векторы $a_1, \dots, a_s$, $s < k$. Тогда существуют числа $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ не все равные нулю, такие, что $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_s a_s = \theta$. Но тогда

$$\lambda_1 \cdot a_1 + \dots + \lambda_s \cdot a_s + 0 \cdot a_{s+1} + \dots + 0 \cdot a_k = \theta$$

и данная линейная комбинация нетривиальна.

3. Пусть система $\{a_1, \dots, a_k\}$ линейно независима, а какая-то ее подсистема линейно зависима. Тогда из доказанного в п. 2 утверждения следует, что и вся система $\{a_1, \dots, a_k\}$ линейно зависима. Получили противоречие, завершающее доказательство теоремы.

Теорема 1.3 (о добавлении вектора). Пусть система векторов $\{a_1, \dots, a_k\}$ линейно независима, а система векторов $\{a_1, \dots, a_k, b\}$ линейно зависима. Тогда вектор b является линейной комбинацией векторов $a_1, \dots, a_k$, т.е. $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{F}$ такие, что

$$b = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_k a_k.$$

Доказательство. Векторы $a_1, \dots, a_k, b$ линейно зависимы, поэтому существуют $\beta_1, \dots, \beta_k, \beta_{k+1} \in \mathbb{F}$ не все равные нулю, такие, что

$$\beta_1 a_1 + \dots + \beta_k a_k + \beta_{k+1} b = \theta. \quad (1.1)$$

Предположим, что $\beta_{k+1} = 0$. Тогда $\beta_1 a_1 + \dots + \beta_k a_k = \theta$, но поскольку векторы $a_1, \dots, a_k$ линейно независимы, то отсюда следует, что и $\beta_1 = \dots = \beta_k = 0$. Таким образом, линейная комбинация (1.1) тривиальна, что противоречит выбору чисел $\beta_1, \dots, \beta_k, \beta_{k+1}$. Следовательно $\beta_{k+1} \neq 0$, и тогда из (1.1) вытекает:

$$b = \left(-\frac{\beta_1}{\beta_{k+1}} \right) a_1 + \dots + \left(-\frac{\beta_k}{\beta_{k+1}} \right) a_k.$$

Теорема доказана.

1.3. Базис и размерность линейного пространства

Рассмотрим произвольное линейное пространство V над множеством $\mathbb{F}$. Пусть n – неотрицательное целое число.

Определение 1.5. Линейное пространство называется n -мерным, если в нем:

- 1) существует n линейно независимых векторов;
- 2) любые $(n+1)$ векторов линейно зависимы.

Число n в этом случае называется *размерностью пространства V* . Этот факт обозначается $\dim V = n$.

Определение 1.6. Если для любого натурального N в пространстве V найдется N линейно независимых векторов, то V называется бесконечномерным пространством ($\dim V = \infty$).

В дальнейшем, если не оговорено противное, мы рассматриваем конечномерные линейные пространства ($\dim V < \infty$).

Замечание 1.5. Если $\dim V = 0$, то это означает, что в пространстве V нет линейно независимых векторов, т.е. V состоит из единственного элемента θ .

Определение 1.7. Упорядоченный набор элементов $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ пространства V называется базисом этого пространства, если:

- 1) векторы $e_1, \dots, e_n$ линейно независимы;
- 2) $\forall x \in V \exists \xi_1, \dots, \xi_n \in \mathbb{F}$ такие, что

$$x = \xi_1 e_1 + \dots + \xi_n e_n. \quad (1.2)$$

Определение 1.8. Представление (1.2) называется разложением вектора x по базису $\mathcal{E}$, а числа $\xi_1, \dots, \xi_n$ называются координатами вектора x в данном базисе $\mathcal{E}$.

Теорема 1.4 (о единственности координат). Для любого вектора $x \in V$ его разложение по базису $\mathcal{E}$ единственно, т.е. координаты вектора x определяются однозначно.

Доказательство. Пусть у произвольного вектора $x \in V$ есть два разложения $x = \xi_1 e_1 + \dots + \xi_n e_n$ и $x = \xi'_1 e_1 + \dots + \xi'_n e_n$.

Вычитая одно равенства из другого, имеем

$$x - x = \theta = (\xi_1 - \xi'_1)e_1 + \dots + (\xi_n - \xi'_n)e_n. \quad (1.3)$$

Но $\varepsilon \equiv \{e_1, \dots, e_n\}$ – базис, т.е. $e_1, \dots, e_n$ – линейно независимые векторы, а тогда из определения линейной независимости следует, что линейная комбинация (1.3) может быть только тривиальной, а это означает, что $\xi_1 = \xi'_1, \dots, \xi_n = \xi'_n$. Теорема доказана.

Теорема 1.5 (о линейности координат). Пусть $\varepsilon \equiv \{e_1, \dots, e_n\}$ – базис, $x = \xi_1 e_1 + \dots + \xi_n e_n$, $y = \eta_1 e_1 + \dots + \eta_n e_n$, $\lambda \in \mathbf{F}$. Тогда

$$x + y = (\xi_1 + \eta_1)e_1 + \dots + (\xi_n + \eta_n)e_n,$$

$$\lambda x = (\lambda \xi_1)e_1 + \dots + (\lambda \xi_n)e_n,$$

т.е. при сложении векторов их соответствующие координаты складываются, а при умножении вектора на число его координаты также умножаются на это число.

Доказательство теоремы является непосредственным следствием аксиом линейного пространства.

Замечание 1.6. Если под $\vec{\varepsilon}$ понимать строку векторов базиса $\{e_1, \dots, e_n\}$, а под $\vec{\xi} = (\xi_1 \dots \xi_n)^T$ – столбец координат вектора x в этом базисе, в матричной форме формула (1.2) имеет вид $x = \vec{\varepsilon} \vec{\xi}$.

Теорема 1.6 (основная лемма о линейной зависимости). Пусть V – линейное пространство, а $S_1 \equiv \{a_1, \dots, a_r\}$ и $S_2 \equiv \{b_1, \dots, b_k\}$ – два набора векторов этого линейного пространства. Предположим, что:

- 1) набор векторов $S_1 \equiv \{a_1, \dots, a_r\}$ линейно независим,
- 2) любой вектор из набора S_1 является линейной комбинацией векторов из набора S_2 , тогда $r \leq k$.

Доказательство. От противного: предположим, что $r > k$. Мы придем к противоречию, если покажем, что набор векторов S_1 линейно зависим. По условию (2) существуют числа $\alpha_{ij} \in \mathbf{F}$ такие, что

Доказательство. 1. Пусть $\dim V = n > 0$ и пусть $e_1, \dots, e_n$ – произвольное семейство линейно независимых векторов из V (отметим, что хотя бы одно такое семейство существует в силу определения размерности линейного пространства). Пусть x – произвольный элемент из V . По определению размерности система $\{e_1, \dots, e_n, x\}$ линейно зависима, а значит в силу теоремы 1.3 (о добавлении вектора) вектор x является линейной комбинацией векторов $e_1, \dots, e_n$. Тогда в силу определения базиса система $\mathcal{E} \equiv \{e_1, \dots, e_n\}$ образует базис в V . Первая часть теоремы доказана.

2. Пусть теперь система $\mathcal{E} \equiv \{e_1, \dots, e_n\}$ образует базис в V . Таким образом, в V существует упорядоченная линейно независимая система из n векторов. Покажем, что любая система из $(n+1)$ векторов линейно зависима. Предположим от противного, что существует линейно независимая система $\{a_1, \dots, a_n, a_{n+1}\}$. Поскольку $\mathcal{E} \equiv \{e_1, \dots, e_n\}$ образует базис, то каждый вектор $a_1, \dots, a_{n+1}$ может быть разложен по этому базису, т.е. является линейной комбинацией векторов $e_1, \dots, e_n$. Тогда по только что доказанной основной лемме о линейной зависимости (теорема 1.6) имеем $(n+1) \leq n$, что невозможно. Следовательно, семейство $\{a_1, \dots, a_n, a_{n+1}\}$ линейно зависимо, а значит $\dim V = n$. Вторая часть теоремы доказана.

Следствие. Если $\dim V = n$, то любой базис пространства V состоит из n векторов.

Выясним теперь, какова размерность конкретных пространств из рассмотренных выше примеров 1.1–1.5, а также укажем базис в каждом из этих пространств.

Пример 1.7. Линейное пространство векторов ЛПВ. Из курса аналитической геометрии известно, что любые три некопланарных вектора линейно независимы, а любые четыре вектора всегда линейно зависимы. Поэтому размерность ЛВП равна трем, а базис

образуют любые три некопланарных вектора, например, три взаимно ортогональных единичных вектора (орта).

Пример 1.8. Координатное пространство $\mathbf{F}^n$. Базис образуют строки $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, $\dots$, $e_n = (0, \dots, 0, 1)$ и размерность $\dim \mathbf{F}^n = n$. Покажем вначале, что эти строки линейно независимы. Действительно, пусть

$$\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n = \theta, \quad (1.7)$$

но левая часть соотношения (1.7), очевидно, равна строке $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, и тогда из (1.7) вытекает, что $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$, т.е. соотношение (1.7) выполняется только если линейная комбинация тривиальная. Следовательно, строки $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, $\dots$, $e_n = (0, \dots, 0, 1)$ линейно независимы. С другой стороны, $\forall x \equiv (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbf{F}^n$, очевидно, имеем $x = \xi_1 e_1 + \dots + \xi_n e_n$, т.е. любая строка $x \in \mathbf{F}^n$ является линейной комбинацией строк $e_1, \dots, e_n$. Следовательно, по определению базиса строки $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, $\dots$, $e_n = (0, \dots, 0, 1)$ образуют базис в $\mathbf{F}^n$ и, следовательно, $\dim \mathbf{F}^n = n$.

Пример 1.9. Пространство прямоугольных матриц $Mat(m, n)$ размера $m \times n$. Размерность этого линейного пространства $\dim Mat(m, n) = m \cdot n$, а базис образуют так называемые матричные единицы из пространства $Mat(m, n)$:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad e_n = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$e_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad e_{n(m-1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

$$e_{n(m-1)+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \dots, e_{n-m} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Доказательство этих фактов аналогично доказательству в примере 1.8, и мы оставляем его читателю.

Пример 1.10. Пространство P_n многочленов $p(t)$ степени не выше n . Базисом этого линейного пространства является, например, семейство многочленов $\{1, t, t^2, \dots, t^n\}$, $\dim P_n = n+1$. Действительно, составим линейную комбинацию $\lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot t + \dots + \lambda_{n+1} \cdot t^n$, она представляет собой многочлен. Многочлен тождественно равен нулю, если все его коэффициенты при степенях t равны нулю, т.е. $\lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot t + \dots + \lambda_{n+1} \cdot t^n \equiv 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{n+1} = 0$, а это и означает, что семейство $\{1, t, t^2, \dots, t^n\}$ линейно независимо. С другой стороны, представление любого многочлена $p(t)$ в виде $p(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \dots + \alpha_n t^n$ является его представлением в виде линейной комбинации элементов $1, t, t^2, \dots, t^n$. Следовательно, семейство $\{1, t, t^2, \dots, t^n\}$ образует базис в P_n и $\dim P_n = n+1$.

Пример 1.11. Пространство непрерывных функций $C([a, b])$. Это пространство бесконечномерное. Действительно, оно содержит, в частности, многочлены всех степеней вида $1, t, t^2, \dots, t^n, \dots$, которые линейно независимы, как показано в предыдущем примере. Таким образом, $\forall N$ в $C([a, b])$ существует $N+1$ линейно независимых элементов $1, t, t^2, \dots, t^N$, что по определению и означает, что $\dim C([a, b]) = \infty$.

1.4. Изоморфизм линейных пространств

Пусть V и W – два линейных пространства над множеством F , и пусть дано отображение $\varphi: V \rightarrow W$, т.е. каждому элементу $x \in V$ по некоторому правилу поставлен в соответствие единственный элемент $x' \in W$.

Определение 1.9. Отображение $\varphi: V \rightarrow W$ называется изоморфизмом (между пространствами V и W), если:

- 1) φ – биекция – взаимно однозначное отображение V на все W ;
- 2) $\forall x, y \in V \quad \varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$;
- 3) $\forall x \in V, \forall \lambda \in F \quad \varphi(\lambda x) = \lambda \varphi(x)$.

В этом случае говорят, что пространства V и W изоморфны друг другу. Будем обозначать данный факт как $V \sim W$. Элемент $x' \in W$, для которого $x' = \varphi(x)$, называют образом элемента $x \in V$; элемент $x \in V$ в этом случае называют прообразом для $x' \in W$.

Замечание 1.7. Нетрудно видеть, что если $\varphi: V \rightarrow W$ есть изоморфизм, то $\exists \varphi^{-1}: W \rightarrow V$, и это отображение также является изоморфизмом, т.е. $V \sim W \Leftrightarrow W \sim V$.

Замечание 1.8. Можно сказать, что изоморфизм – это биекция, сохраняющая линейные операции. Если $V \sim W$, то пространства V и W в смысле свойств, связанных с введенными в них линейными операциями, по существу не отличаются друг от друга.

Теорема 1.8 (свойства изоморфизма). Пусть $V \sim W$, тогда:

- 1) если $\theta \in V$ – нулевой элемент в V , то $\theta' = \varphi(\theta)$ – нулевой элемент пространства W ;
- 2) если система элементов $\{x_1, \dots, x_k\}$ линейно независима в V , то система образов этих элементов $\{x'_1, \dots, x'_k\}$, $x'_1 = \varphi(x_1)$, ..., $x'_k = \varphi(x_k)$ будет линейно независимой в W .

Доказательство. 1. По свойствам нулевого элемента $\theta = 0 \cdot x$

$\forall x \in V$, но тогда по определению изоморфизма, имеем: $\varphi(\theta) = \varphi(0 \cdot x) = 0 \cdot \varphi(x) = 0 \cdot x' = \theta'$ – нулевой элемент в W .

2. Предположим от противного, что $x'_1, \dots, x'_k$ линейно зависимы в W . Тогда найдутся числа $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbf{F}$, не все равные нулю, такие, что $\lambda_1 x'_1 + \dots + \lambda_k x'_k = \theta'$. В силу доказанной первой части теоремы $\theta' = \varphi(\theta)$, и получаем $\theta' = \varphi(\theta) = \lambda_1 x'_1 + \dots + \lambda_k x'_k = \lambda_1 \varphi(x_1) + \dots + \lambda_k \varphi(x_k) = \varphi(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k)$. Последнее равенство следует из определения изоморфизма. Так как оператор φ является взаимно однозначным соответствием, то из равенства $\varphi(\theta) = \varphi(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k)$ вытекает, что $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k = \theta$ и не все λ_i равны нулю. Это означает, что система $\{x_1, \dots, x_k\}$ линейно зависима. Получили противоречие.

Следовательно, наше исходное предположение неверно и векторы $x'_1, \dots, x'_k$ линейно независимы. Теорема доказана.

Теорема 1.9 (критерий изоморфизма линейных пространств). Пусть V и W – два линейных пространства конечной размерности над одним множеством $\mathbf{F}$. Тогда: $V \sim W \Leftrightarrow \dim V = \dim W$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $V \sim W$ и $\dim V = n$, пусть $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ – базис в V . Рассмотрим семейство $\mathcal{E}' = \{e'_1, \dots, e'_n\}$, где $e'_1 = \varphi(e_1), \dots, e'_n = \varphi(e_n)$. По свойству 2 для изоморфизмов (теорема 1.8) система $\mathcal{E}'$ линейно независима.

Пусть теперь $x' \in W$ – произвольный элемент пространства W , тогда $\exists x \in V: x' = \varphi(x)$. Разложим элемент $x \in V$ по базису $\mathcal{E}$:

$x = \xi_1 e_1 + \dots + \xi_n e_n$, тогда из определения изоморфизма следует, что $x' = \varphi(x) = \varphi(\xi_1 e_1 + \dots + \xi_n e_n) = \xi_1 \varphi(e_1) + \dots + \xi_n \varphi(e_n) = \xi_1 e'_1 + \dots + \xi_n e'_n$.

Итак, любой элемент $x' \in W$ разлагается по линейно независимому семейству $\mathcal{E}'$. Из определения базиса вытекает, что $\mathcal{E}'$ – базис в W , при этом он состоит из n элементов, поэтому $\dim W = n$.

Достаточность. Пусть $\dim V = \dim W$, пусть также

$\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ – базис в V и $\mathcal{E}' = \{e'_1, \dots, e'_n\}$ базис в W . Построим изоморфизм $\varphi: V \rightarrow W$. А именно, пусть $x \in V$ – произвольный элемент, разложим его по базису $\mathcal{E}$: $x = \xi_1 e_1 + \dots + \xi_n e_n$ и положим $x' = \varphi(x) = \xi_1 e'_1 + \dots + \xi_n e'_n$. Тогда:

1) в силу единственности координат разным векторам $x \in V$ соответствуют разные векторы $x' \in W$, т.е. построенное отображение φ – взаимно однозначное соответствие;

2) каждый элемент $x' = \xi_1 e'_1 + \dots + \xi_n e'_n \in W$ является образом некоторого элемента $x \in V$, а именно, элемента $x = \xi_1 e_1 + \dots + \xi_n e_n$, т.е. φ отображает V на все W ;

3) в силу теоремы 1.5 о линейности координат построенное отображение φ сохраняет линейные операции.

Таким образом, φ – изоморфизм между пространствами V и W . Теорема доказана.

Следствие. Каждое линейное пространство V размерности n над множеством $\mathbb{F}$ изоморфно координатному пространству $\mathbb{F}^n$ – пространству строк длины n . Это вытекает из доказанной теоремы и того факта, что $\dim \mathbb{F}^n = n$ (см. пример 1.8).

Сам изоморфизм осуществляется путем выбора базиса в V . Именно, если $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ – базис в V , $x = \xi_1 e_1 + \dots + \xi_n e_n$, то, как показано в теореме 1.9, изоморфизм можно выбрать так: $\varphi: x \rightarrow (\xi_1, \dots, \xi_n)$. Т.е., если дано линейное пространство V элементов произвольной структуры, то путем выбора в нем базиса $\mathcal{E}$ можно отождествить элемент (вектор) $x \in V$ и строку его координат $(\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{F}^n$. При этом также можно будет отождествить V и $\mathbb{F}^n$ (см. замечание 1.7). В дальнейшем мы часто будем писать равенства $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ или $x = (\xi_1 \dots \xi_n)^T = \xi$ имея ввиду указанное отождествление (конечно, при фиксированном базисе $\mathcal{E}$ в V).

1.5. Линейные подпространства и линейные оболочки

Определение 1.10. Пусть V – линейное пространство над множеством $\mathbb{F}$. Непустое подмножество L элементов линейного пространства V называется (линейным) подпространством пространства V , если $\forall x, y \in L, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{F} \quad \lambda x + \mu y \in L$.

Замечание 1.9. Подпространство L линейного пространства V само является линейным пространством. Действительно, в силу определения подпространства в L определены операции сложения элементов и умножения элемента на число, не выводящие за пределы множества L . Кроме того, аксиомы 1–8, (кроме 3 и 4), очевидно, выполнены для всех элементов из L , поскольку они выполнены для всех элементов из V . Остается проверить выполнение аксиом 3 и 4. Пусть x – произвольный элемент подпространства L . Тогда $0 \cdot x \equiv \theta \in L$, $(-1) \cdot x = -x \in L$, так что аксиомы 3 и 4 также выполнены. Таким образом, L – линейное пространство.

Замечание 1.10. Если L не совпадает с V , то L называется собственным подпространством.

Замечание 1.11. Подмножество, состоящее из одного элемента θ , является, очевидно, подпространством V . Это простейшее, так называемое, нулевое подпространство.

Теорема 1.10. Пусть L – подпространство пространства V , $\dim V < \infty$. Тогда:

- 1) $\dim L \leq \dim V$;
- 2) если L – собственное подпространство пространства V , то $\dim L < \dim V$.

Доказательство. 1. Пусть $\dim L = m$ и $m > n$. Рассмотрим в L базис $\varepsilon = \{e_1, \dots, e_m\}$. Векторы $e_1, \dots, e_m$ линейно независимы и входят в пространство V . Но по определению размерности любая система векторов из V в количестве, большем, чем n является линейно зависимой. Полученное противоречие подтверждает справедливость утверждения того, что $m \leq n$.

2. Предположим, что L – собственное подпространство V , но

$\dim L = \dim V = n$ ($\dim L$ не может быть больше n , это доказано в п.1 теоремы). Пусть $x \in V$, но $x \notin L$, пусть $\{e_1, \dots, e_n\}$ – базис в L . Рассмотрим систему векторов $\{e_1, \dots, e_n, x\}$. Эта система линейно зависима, поскольку в ней $(n+1)$ векторов. Итак, $\{e_1, \dots, e_n\}$ – линейно независима, а $\{e_1, \dots, e_n, x\}$ – зависима. Тогда по теореме 1.3 (о добавлении вектора) $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{F}$ такие, что $x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$, но тогда $x \in L$. Получили противоречие. Таким образом $\dim L < \dim V$. Теорема доказана.

Определение 1.11. Пусть $\{x_1, \dots, x_m\}$ – семейство векторов пространства V . Линейной оболочкой $L(x_1, \dots, x_m)$ семейства векторов называется множество линейных комбинаций этих векторов:

$$L(x_1, \dots, x_m) = \{x \in V : x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_m x_m\}, \quad \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{F}.$$

Элементы $x_1, \dots, x_m$ называются порождающими элементами данной линейной оболочки.

Теорема 1.11. Линейная оболочка $L(x_1, \dots, x_m)$ является подпространством в V .

Доказательство. Пусть $x, y \in L(x_1, \dots, x_m)$. Тогда $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{F}$ и $\exists \beta_1, \dots, \beta_m \in \mathbb{F}$ такие, что $x = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_m x_m$, $y = \beta_1 x_1 + \dots + \beta_m x_m$. Пусть $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$, тогда

$$z \equiv \lambda x + \mu y = (\lambda \alpha_1 + \mu \beta_1) x_1 + \dots + (\lambda \alpha_m + \mu \beta_m) x_m,$$

т.е. $z \in L(x_1, \dots, x_m)$. Это означает, что $L(x_1, \dots, x_m)$ – подпространство в пространстве V . Теорема доказана.

Теорема 1.12 (о размерности линейной оболочки). Размерность линейной оболочки $L(x_1, \dots, x_m)$ равна максимальному числу линейно независимых векторов $x_1, \dots, x_m$. При этом такие векторы образуют базис в $L(x_1, \dots, x_m)$.

Доказательство. Пусть максимальное число линейно независимых векторов среди $x_1, \dots, x_m$ равно $k \leq m$. Поменяв, при необходимости, индексы, будем считать, что это $x_1, \dots, x_k$. Поскольку $\{x_1, \dots, x_k\}$ – максимально возможная система линейно независимых векторов среди $x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_m$, система $\{x_1, \dots, x_k, x_{k+1}\}$ линейно зависима, а тогда по теореме о добавлении вектора x_{k+1} является линейной комбинацией векторов $x_1, \dots, x_k$. Аналогично, векторы $x_{k+2}, \dots, x_m$ также являются линейными комбинациями векторов $x_1, \dots, x_k$. Пусть $x \in L(x_1, \dots, x_m)$, тогда x является линейной комбинацией векторов $x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_m$. Поскольку, $x_{k+1}, \dots, x_m$ являются линейными комбинациями векторов $x_1, \dots, x_k$, то x тоже есть линейная комбинация векторов $x_1, \dots, x_k$. Итак, система $\{x_1, \dots, x_k\}$ линейно независима и любой вектор $x \in L(x_1, \dots, x_m)$ есть линейная комбинация векторов $x_1, \dots, x_k$. Следовательно, система $\{x_1, \dots, x_k\}$ образует базис в $L(x_1, \dots, x_m)$ и $\dim L(x_1, \dots, x_m) = k$. Теорема доказана.

Теорема 1.13 (о неполном базисе). Пусть V – линейное пространство над множеством F , $\dim V = n$. Пусть $\{e_1, \dots, e_k\}$ – линейно независимая система векторов в V , $k < n$. Тогда эту систему можно дополнить до базиса в V , т.е. существуют векторы $e_{k+1}, \dots, e_n \in V$ такие, что система $\{e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n\}$ – базис в V .

Доказательство. Рассмотрим линейную оболочку $L(e_1, \dots, e_k)$. Это подпространство в пространстве V . В силу теоремы 1.10 $\dim L(e_1, \dots, e_k) = k < n$, поэтому $L(e_1, \dots, e_k)$ – собственное подпространство V . Следовательно, $\exists e_{k+1} \in V$, но $e_{k+1} \notin L(e_1, \dots, e_k)$.

Семейство $\{e_1, \dots, e_k, e_{k+1}\}$ линейно независимо. Действительно, если бы оно было линейно зависимо, то по теореме 1.3 о добавлении вектора $e_{k+1} = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_k e_k \in L(e_1, \dots, e_k)$, что не так. Если $k+1 = n$, то мы получим базис в V и теорема доказана. Если $k+1 < n$, то повторяем описанную выше процедуру. За $(n-k)$ шагов мы построим линейно независимую систему $\{e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n\} \in V$, которая по теореме 1.7 о связи базиса и размерности будет являться базисом в V .

1.6. Пересечение и сумма подпространств линейного пространства

Пусть V – линейное пространство над множеством $\mathbb{F}$, и V_1, V_2 – два его подпространства.

Определение 1.12. Суммой подпространств называется множество $V_1 + V_2 = \{x \in V : \exists x_1 \in V_1, \exists x_2 \in V_2 : x = x_1 + x_2\}$.

Пересечением подпространств называется множество

$$V_1 \cap V_2 = \{x \in V : x \in V_1, x \in V_2\}.$$

Теорема 1.14. Множества $V_1 + V_2$ и $V_1 \cap V_2$ являются подпространствами пространства V .

Доказательство. Пусть $x, y \in V_1 + V_2$. Тогда существуют векторы $x_1, y_1 \in V_1$ и $x_2, y_2 \in V_2$ такие, что $x = x_1 + x_2$, $y = y_1 + y_2$. Пусть $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$, тогда $\lambda x + \mu y = (\lambda x_1 + \mu y_1) + (\lambda x_2 + \mu y_2)$. V_1 и V_2 – подпространства в V , то $z_1 \equiv \lambda x_1 + \mu y_1 \in V_1$, $z_2 \equiv \lambda x_2 + \mu y_2 \in V_2$. Итак, $\lambda x + \mu y = z_1 + z_2$, $z_1 \in V_1, z_2 \in V_2$, поэтому $\lambda x + \mu y \in V_1 + V_2$, следовательно, $V_1 + V_2$ – подпространство в V .

Пусть $x, y \in V_1 \cap V_2$, тогда $x \in V_1, x \in V_2$ и $y \in V_1, y \in V_2$. Пусть

$\lambda, \mu \in \mathbb{F}$; тогда, поскольку V_1, V_2 – подпространства, имеем $\lambda x + \mu y \in V_1$ и $\lambda x + \mu y \in V_2$, а значит $\lambda x + \mu y \in V_1 \cap V_2$, следовательно, пересечение $V_1 \cap V_2$ является подпространством.

Определение 1.13. Сумма подпространств $V_1 + V_2$ называется прямой, если каждый вектор $x \in V_1 + V_2$ представляется в виде суммы $x = x_1 + x_2$, где $x_1 \in V_1$, $x_2 \in V_2$, единственным образом. Прямая сумма обозначается: $V_1 \oplus V_2$.

Теорема 1.15 (о разложении линейного пространства в прямую сумму). Линейное пространство V является прямой суммой подпространств V_1 и V_2 ($V = V_1 \oplus V_2$) тогда и только тогда, когда:

- 1) $V_1 \cap V_2 = \{\theta\}$,
- 2) $\dim V = \dim V_1 + \dim V_2$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $V = V_1 \oplus V_2$. Это означает, что для любого $x \in V$ существуют $x_1 \in V_1$ и $x_2 \in V_2$ такие, что

$$x = x_1 + x_2. \quad (1.8)$$

Предположим, что $V_1 \cap V_2 \neq \{\theta\}$, т.е. $\exists a \neq \theta, a \in V_1 \cap V_2$. Но в этом случае вектор x помимо разложения (1.8) имеет еще одно разложение: $x = (x_1 + a) + (x_2 - a)$, $x_1 + a \in V_1$, $x_2 - a \in V_2$.

Получили противоречие. Таким образом $V_1 \cap V_2 = \{\theta\}$. Выберем теперь $\varepsilon_1 = \{f_1, \dots, f_k\}$ – базис в V_1 , $\varepsilon_2 = \{g_1, \dots, g_m\}$ – базис в V_2 ($\dim V_1 = k$, $\dim V_2 = m$). Рассмотрим семейство

$\mathcal{E} = \{f_1, \dots, f_k, g_1, \dots, g_m\}$. Покажем, что $\mathcal{E}$ – базис в V . Во-первых, это семейство линейно независимых векторов. Действительно, предположим, что существуют числа $\beta_1, \dots, \beta_{k+m} \in \mathbb{F}$ не все равные нулю, такие, что

$$(\beta_1 f_1 + \dots + \beta_k f_k) + (\beta_{k+1} g_1 + \dots + \beta_{k+m} g_m) = \theta. \quad (1.9)$$

Имеем $\beta_1 f_1 + \dots + \beta_k f_k \equiv y_1 \in V_1$, $\beta_{k+1} g_1 + \dots + \beta_{k+m} g_m \equiv y_2 \in V_2$. Тогда соотношение (1.9) представляет собой разложение нуля из V : $\theta = y_1 + y_2$, $y_1 \in V_1$, $y_2 \in V_2$, но ноль имеет еще одно разложение: $\theta = \theta + \theta$, поэтому в силу единственности разложения вектора из прямой суммы получаем, что

$$\beta_1 f_1 + \dots + \beta_k f_k = \theta, \quad \beta_{k+1} g_1 + \dots + \beta_{k+m} g_m = \theta.$$

Семейство $\{f_1, \dots, f_k\}$ – базис в V_1 , поэтому это линейно независимые векторы, а следовательно, $\beta_1 = \dots = \beta_k = 0$, и, аналогично, $\{g_1, \dots, g_m\}$ – базис в V_2 , поэтому $\beta_{k+1} = \dots = \beta_{k+m} = 0$. Получили противоречие. Таким образом, семейство $\mathcal{E} = \{f_1, \dots, f_k, g_1, \dots, g_m\}$ линейно независимо. Пусть теперь x – произвольный вектор из V . Тогда $\exists x_1 \in V_1$, $\exists x_2 \in V_2$, так что $x = x_1 + x_2$. Напомним, что $\mathcal{E}_1$ – это базис в V_1 , вектор $x_1 \in V_1$, поэтому существуют числа $\xi_1, \dots, \xi_k$ такие, что $x_1 = \xi_1 f_1 + \dots + \xi_k f_k$. Аналогично, $\mathcal{E}_2$ – это базис в V_2 , вектор $x_2 \in V_2$, поэтому существуют числа $\eta_1, \dots, \eta_m$ такие, что $x_2 = \eta_1 g_1 + \dots + \eta_m g_m$. Следовательно,

$$x = (\xi_1 f_1 + \dots + \xi_k f_k) + (\eta_1 g_1 + \dots + \eta_m g_m).$$

Итак, векторы семейства $\mathcal{E}$ линейно независимы, и любой вектор $x \in V$ представляется в виде их линейной комбинации. Следовательно, $\mathcal{E}$ – базис в V и $\dim V = k + m = \dim V_1 + \dim V_2$. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть $\dim V_1 = k$, $\dim V_2 = m$, $\dim V = k + m$, $V_1 \cap V_2 = \{\theta\}$. Пусть снова $\mathcal{E}_1 \equiv \{f_1, \dots, f_k\}$ – базис в V_1 и $\mathcal{E}_2 \equiv \{g_1, \dots, g_m\}$ – базис в V_2 .

Покажем, что $\mathcal{E} = \{f_1, \dots, f_k, g_1, \dots, g_m\}$ – базис в V . Прежде всего, покажем, что $\mathcal{E}$ – семейство линейно независимых векторов. Действительно, пусть при некоторых числах $\lambda_1, \dots, \lambda_k, \mu_1, \dots, \mu_m$:

$$\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_k f_k + \mu_1 g_1 + \dots + \mu_m g_m = \theta. \quad (1.10)$$

Тогда $\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_k f_k = -(\mu_1 g_1 + \dots + \mu_m g_m) \equiv y$, при этом, с одной стороны, $y = \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_k f_k \in V_1$, с другой стороны, $y \equiv -(\mu_1 g_1 + \dots + \mu_m g_m) \in V_2$. Следовательно, $y \in V_1 \cap V_2$, но $V_1 \cap V_2 = \{\theta\}$, поэтому $y = \theta$.

Итак, $\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_k f_k = \theta$, а поскольку $\{f_1, \dots, f_k\}$ – базис в V_1 , т.е. это семейство линейно независимых векторов, то $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$. Аналогично $\mu_1 g_1 + \dots + \mu_m g_m = \theta$, $\{g_1, \dots, g_m\}$ – базис в V_2 , поэтому и $\mu_1 = \dots = \mu_m = 0$. Таким образом, линейная комбинация в (1.10) является тривиальной, следовательно, семейство $\mathcal{E} = \{f_1, \dots, f_k, g_1, \dots, g_m\}$ – линейно независимо. Кроме того, количество векторов в этом семействе $k + m = \dim V$, поэтому в силу теоремы 1.7 о связи базиса и размерности семейство $\mathcal{E}$ – базис в пространстве V . Тогда $\forall x \in V$ имеем

$$x = (\xi_1 f_1 + \dots + \xi_k f_k) + (\eta_1 g_1 + \dots + \eta_m g_m).$$

Положим $x_1 = \xi_1 f_1 + \dots + \xi_k f_k \in V_1$ и $x_2 = \eta_1 g_1 + \dots + \eta_m g_m \in V_2$. Тогда получаем

$$x = x_1 + x_2, \quad x_1 \in V_1, \quad x_2 \in V_2. \quad (1.11)$$

Следовательно, $V = V_1 + V_2$, т.е. пространство V представляет собой сумму подпространств V_1 и V_2 . Покажем, что эта сумма является прямой. Предположим, что вектор x помимо разложения (1.11) имеет еще одно разложение $x = x'_1 + x'_2$, $x'_1 \in V_1$, $x'_2 \in V_2$.

Тогда $x_1 - x'_1 = x_2 - x'_2 \equiv z$, при этом $z = x_1 - x'_1 \in V_1$ и $z = x_2 - x'_2 \in V_2$, т.е. $z \in V_1 \cap V_2$.

Но $V_1 \cap V_2 = \{\theta\}$, поэтому $z = \theta$, откуда $x_1 = x'_1$, $x_2 = x'_2$, т.е. разложение (1.11) единственно. Следовательно, сумма подпространств V_1 и V_2 является прямой. Теорема 1.15 доказана.

Теорема 1.16 (о размерности суммы подпространств). Пусть V_1, V_2 подпространства в V , тогда

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2).$$

Доказательство. Пусть $\{b_1, \dots, b_k\}$ – базис $V_1 \cap V_2$. По теореме 1.13 о неполном базисе это семейство векторов можно дополнить до базиса в V_1 : $\varepsilon_1 = \{b_1, \dots, b_k, a_1, \dots, a_l\}$ и до базиса в V_2 : $\varepsilon_2 = \{b_1, \dots, b_k, c_1, \dots, c_m\}$. Тогда $\dim V_1 = k + l$ и $\dim V_2 = k + m$. Рассмотрим семейство векторов $\varepsilon = \{a_1, \dots, a_l, b_1, \dots, b_k, c_1, \dots, c_m\}$. Обозначим $V = V_1 + V_2$ и покажем, что ε – базис в V .

Пусть x – произвольный вектор из V . Тогда $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in V_1$, $x_2 \in V_2$. Поскольку ε_1 – базис в V_1 , то

$$x_1 = \xi_1 a_1 + \dots + \xi_l a_l + \eta_1 b_1 + \dots + \eta_k b_k,$$

а поскольку ε_2 – базис в V_2 , то

$$x_2 = \mu_1 b_1 + \dots + \mu_k b_k + \lambda_1 c_1 + \dots + \lambda_m c_m.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} x &= \xi_1 a_1 + \dots + \xi_l a_l + \eta_1 b_1 + \dots + \eta_k b_k + \mu_1 b_1 + \dots + \\ &+ \mu_k b_k + \lambda_1 c_1 + \dots + \lambda_m c_m = \\ &= \xi_1 a_1 + \dots + \xi_l a_l + (\eta_1 + \mu_1) b_1 + \dots + (\eta_k + \mu_k) b_k + \lambda_1 c_1 + \dots + \lambda_m c_m. \end{aligned}$$

Таким образом, любой вектор $x \in V$ является линейной комбинацией векторов семейства ε .

Покажем теперь, что семейство ε линейно независимо. Действительно, пусть линейная комбинация

$$\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_l a_l + \beta_1 b_1 + \dots + \beta_k b_k + \gamma_1 c_1 + \dots + \gamma_m c_m = \theta, \quad (1.12)$$

тогда $\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_l a_l + \beta_1 b_1 + \dots + \beta_k b_k = -(\gamma_1 c_1 + \dots + \gamma_m c_m) \equiv y$.

С одной стороны,

$$y = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_l a_l + \beta_1 b_1 + \dots + \beta_k b_k \in V_1, \quad (1.13)$$

с другой стороны, $y = -(\gamma_1 c_1 + \dots + \gamma_m c_m) \in V_2$, поэтому $y \in V_1 \cap V_2$.

Заметим, что семейство $\{b_1, \dots, b_k\}$ является базисом в $V_1 \cap V_2$,

поэтому любой вектор из $V_1 \cap V_2$, в том числе и y , может быть представлен в виде

$$y = \sigma_1 b_1 + \dots + \sigma_k b_k. \quad (1.14)$$

Из (1.14) и (1.13) и в силу теоремы 1.4 о единственности координат следует, что $\alpha_1 = \dots = \alpha_l = 0$, $\sigma_1 = \beta_1$, ..., $\sigma_k = \beta_k$. Тогда соотношение (1.12) запишется в виде

$$\beta_1 b_1 + \dots + \beta_k b_k + \gamma_1 c_1 + \dots + \gamma_m c_m = \theta. \quad (1.15)$$

Векторы $b_1, \dots, b_k$, $c_1, \dots, c_m$ линейно независимы, поскольку они образуют базис в V_2 , поэтому в соотношении (1.15) все коэффициенты нулевые, т.е. $\beta_1 = \dots = \beta_k = \gamma_1 = \dots = \gamma_m = 0$. Таким образом, линейная комбинация (1.12) является тривиальной, следовательно, семейство векторов $\mathcal{E}$ – линейно независимо. Значит $\mathcal{E}$ – базис в $V = V_1 + V_2$, и для размерности пространства V получаем:

$$\begin{aligned} \dim V &= \dim(V_1 + V_2) = l + k + m = (l + k) + (m + k) - k = \\ &= \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Пример 1.12. Пусть V – линейное пространство векторов (ЛПВ), V_1 – подпространство векторов, параллельных плоскости Oxy , V_2 – подпространство векторов, параллельных оси Oz . Тогда $V = V_1 \oplus V_2$. Действительно, $V_1 \cap V_2 = \{\theta\}$ и, кроме того, $\dim V = 3$, $\dim V_1 = 2$, $\dim V_2 = 1$, так что $\dim V = \dim V_1 + \dim V_2$, и остается применить теорему 1.15.

Кроме того, пусть $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ – единичные векторы, параллельные осям Ox , Oy , Oz , соответственно. Тогда $\forall x \in V$ имеем $\vec{x} = \xi_1 \vec{e}_1 + \xi_2 \vec{e}_2 + \xi_3 \vec{e}_3$. Положим $\vec{x}_1 = \xi_1 \vec{e}_1 + \xi_2 \vec{e}_2 \in V_1$, $\vec{x}_2 = \xi_3 \vec{e}_3 \in V_2$, тогда получаем разложение $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$, $\vec{x}_1 \in V_1$, $\vec{x}_2 \in V_2$ (рис.1.1).

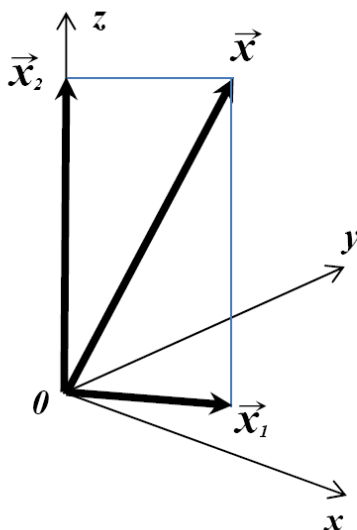


Рис. 1.1

1.7. Преобразование координат вектора при переходе к другому базису. Матрица перехода от базиса к базису

Пусть V – линейное пространство над множеством F , в котором заданы два базиса: «старый» $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ и «новый» $\mathcal{E}' = \{e'_1, \dots, e'_n\}$. По определению базиса каждый вектор из системы $\{e'_1, \dots, e'_n\}$ может быть разложен по базису $\mathcal{E}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} e'_1 = t_{11}e_1 + t_{21}e_2 + ... + t_{n1}e_n \\ \\ e'_k = t_{1k}e_1 + t_{2k}e_2 + ... + t_{nk}e_n . \\ \\ e'_n = t_{1n}e_1 + t_{2n}e_2 + ... + t_{nn}e_n \end{array} \right. \quad (1.15)$$

(1.15)

Определение 1.14. Матрица

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & \dots & t_{1n} \\ t_{21} & \dots & t_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ t_{n1} & \dots & t_{nn} \end{pmatrix}$$

называется матрицей перехода от «старого» базиса $\mathcal{E}$ к «новому» базису $\mathcal{E}'$. Столбцы матрицы T представляют собой координаты векторов нового базиса, записанных через старый базис.

Замечание 1.12. Используя правило умножения матриц, формулы (1.15) можно записать в матричной форме в виде

$$\vec{\varepsilon}' = \vec{\varepsilon} T, \quad (1.16)$$

где $\vec{\varepsilon}'$ – строка векторов $\{e'_1, \dots, e'_n\}$, а $\vec{\varepsilon}$ – строка векторов $\{e_1, \dots, e_n\}$, T – матрица перехода от базиса $\mathcal{E}$ к базису $\mathcal{E}'$.

Замечание 1.13. Матрица T – невырожденная ($\det T \neq 0$).

Действительно, столбцы матрицы T – это координаты линейно независимых векторов $e'_1, \dots, e'_n$. В силу указанного в §5 изоморфизма между векторами и их координатами и свойств изоморфизма (см. теорему 1.8, п.2) столбцы матрицы T линейно независимы, а, следовательно, в силу теоремы о базисном миноре $\det T \neq 0$.

Замечание 1.14. Из формулы (1.16), правила перемножения матриц и невырожденности матрицы T вытекает формула

$$\vec{\varepsilon} = \vec{\varepsilon}' T^{-1}, \quad (1.16, a)$$

из которой следует, что T^{-1} является матрицей перехода от базиса $\mathcal{E}'$ к базису $\mathcal{E}$.

Установим связь между «старыми» и «новыми» координатами векторов линейного пространства. Пусть $x \in V$, тогда этот вектор можно разложить как по базису $\mathcal{E}$, так и по базису $\mathcal{E}'$:

$$x = \sum_{i=1}^n \xi_i e_i, \quad x = \sum_{i=1}^n \xi'_i e'_i,$$

Замечание 1.15. В процессе доказательства теоремы была получена формула

$$\begin{array}{c} \vec{\varepsilon} \xi \\ \downarrow \end{array} = \begin{array}{c} \vec{\varepsilon} (T \xi') \\ \downarrow \end{array} \quad (1.19)$$

(см. (1.18)). Заметим, что искомая формула (1.17) получается из (1.19) путем формального «сокращения на базис», таким образом, установлено следующее свойство «сокращения», которое мы в дальнейшем будем неоднократно применять:

$$\begin{array}{c} \vec{\varepsilon} x \\ \downarrow \end{array} = \begin{array}{c} \vec{\varepsilon} y \\ \downarrow \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} x \\ \downarrow \end{array} = \begin{array}{c} y \\ \downarrow \end{array}, \quad (1.20)$$

если ε — это базис.

Замечание 1.16. Иногда, чтобы подчеркнуть от какого базиса к какому матрица T является матрицей перехода у нее ставят индекс вида $\varepsilon \rightarrow \varepsilon'$ и матрицу перехода от базиса ε к базису ε' записывают следующим образом: $T_{\varepsilon \rightarrow \varepsilon'}$. Тогда можно записать, что $T^{-1} = T_{\varepsilon' \rightarrow \varepsilon}$.

Глава 2. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

2.1. Понятие линейного оператора. Простейшие свойства

Как и выше, через $\mathbf{F}$ будем обозначать одно из множеств: действительных чисел $\mathbb{R}$ или комплексных чисел $\mathbb{C}$.

Пусть V и W – два линейных пространства над одним и тем же множеством $\mathbf{F}$.

Определение 1.1. Линейным оператором φ , действующим из линейного пространства V в линейное пространство W называется закон соответствия, по которому каждому элементу $x \in V$ ставится в соответствие единственный элемент $y \in W$, что обозначается как $y = \varphi(x)$, причем выполняются два условия (аксиомы линейности оператора):

- 1) $\forall x_1, x_2 \in V \quad \varphi(x_1 + x_2) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2);$
- 2) $\forall x \in V \text{ и } \forall \lambda \in \mathbf{F} \quad \varphi(\lambda x) = \lambda \varphi(x).$

Множество всех линейных операторов из V в W будем обозначать $L(V, W)$. В дальнейшем, как правило, рассматриваются линейные операторы из V в V . Такие линейные операторы еще называют линейными преобразованиями линейного пространства V .

Замечание 2.1. Если $\varphi \in L(V, V)$, то обязательно $\varphi(\theta) = \theta$. Действительно, в силу линейности оператора φ , имеем

$$\varphi(\theta) = \varphi(0 \cdot \theta) = 0 \cdot \varphi(\theta) = \theta.$$

Аналогично, если $\varphi \in L(V, W)$ и $\theta \in V$, $\theta' \in W$ – нулевые элементы в соответствующих линейных пространствах, то

$$\varphi(\theta) = \varphi(0 \cdot \theta) = 0 \cdot \varphi(\theta) = \theta' \in W.$$

Пример 2.1. Рассмотрим простейшие линейные операторы.

1. $W = V = \mathbb{R}^2$. Оператор поворота плоскости на угол β . Линейность оператора очевидна.

2. $W = V = P_n$. Оператор дифференцирования $\frac{d}{dt}$.

Линейность этого оператора вытекает из известных из курса математического анализа свойств дифференцирования функций.

3. $V = V_1 \oplus V_2$, $W = V_1$, где V_1 и V_2 – два линейных пространства, $V = V_1 \oplus V_2$ – их прямая сумма. Из определения прямой суммы – каждый элемент $x \in V$ равен сумме элементов $x_1 \in V_1$ и $x_2 \in V_2$:

$$x = x_1 + x_2, \quad (2.1)$$

причем такое представление единственно.

Введем оператор проектирования $p: V \rightarrow V_1$ по формуле

$$p(x) = x_1, \quad x = x_1 + x_2.$$

Корректность данного определения оператора вытекает из того, что элемент $x_1 \in V_1 \subset V$ в разложении (2.1) определяется однозначно.

Проверим линейность оператора $p: V \rightarrow V_1$.

1) Пусть $x^*, x^{**} \in V$, тогда в силу (2.1) имеют место единственные представления $x^* = x_1^* + x_2^*$ и $x^{**} = x_1^{**} + x_2^{**}$, где $x_1^*, x_1^{**} \in V_1$, $x_2^*, x_2^{**} \in V_2$, тогда $\varphi(x^* + x^{**}) = \varphi(x_1^* + x_2^* + x_1^{**} + x_2^{**}) = \varphi(x_1^* + x_1^{**} + x_2^* + x_2^{**}) = x_1^* + x_1^{**} = \varphi(x^*) + \varphi(x^{**})$.

2) Пусть $x \in V$, $\lambda \in \mathbb{F}$. Снова в силу (2.1) $x = x_1 + x_2$, и тогда $\varphi(\lambda x) = \varphi(\lambda(x_1 + x_2)) = \varphi(\lambda x_1 + \lambda x_2) = \lambda x_1 = \lambda \varphi(x)$.

Такой линейный оператор $p: V \rightarrow V_1$ называется *оператором проектирования на V_1 параллельно V_2* (рис. 2.1).

Рассмотрим множество $L(V, V)$, где V – линейное пространство, и введем в $L(V, V)$ операции сложения и умножения на число.

Определение 2.2. Суммой линейных операторов $\varphi_1 \in L(V, V)$ и

$\varphi_2 \in L(V, V)$ называется оператор $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ такой, что $\forall x \in V$:

$$\varphi(x) = (\varphi_1 + \varphi_2)(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x).$$

Определение 2.3. Произведение линейного оператора $\varphi \in L(V, V)$ на число $\lambda \in \mathbb{F}$ называется оператор $\psi = \lambda\varphi$ такой, что $\forall x \in V$ $\psi(x) = (\lambda\varphi)(x) = \lambda\varphi(x)$.

Замечание 2.2. Из определений 2.2 и 2.3 вытекает, что операторы $\varphi_1 + \varphi_2$ и $\lambda\varphi$ являются линейными операторами.

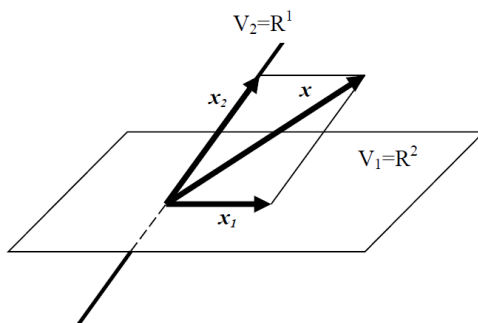


Рис. 2.1

Определение 2.4. Нулевым оператором называется оператор Θ такой, что $\forall x \in V$ $\Theta(x) = \theta$.

Определение 2.5. Пусть $\varphi \in L(V, V)$. Противоположным оператором к φ называется оператор $(-\varphi)$ такой, что $\varphi + (-\varphi) = \Theta$.

Замечание 2.3. Операторы Θ и $(-\varphi)$, где $\varphi \in L(V, V)$ являются, очевидно, линейными операторами.

Легко проверить справедливость следующего утверждения.

Утверждение 2.1. Множество с введенными указанным выше способом операциями сложения операторов и умножения оператора на число само является линейным пространством.

Определение 2.6. Тожественным оператором I называется оператор такой, что $\forall x \in V$ $I(x) = x$. Очевидно $I \in L(V, V)$.

Определение 2.7. Пусть $\phi, \psi \in L(V, V)$. Произведением (компо-

зицией) операторов φ и ψ называется оператор $\chi \equiv \varphi \circ \psi$ такой, что $\forall x \in V \quad \chi(x) = \varphi(\psi(x))$.

Теорема 2.1. Для композиции операторов

- 1) если $\varphi, \psi \in L(V, V)$, то $\varphi \circ \psi \in L(V, V)$,
- 2) имеют место свойства:
 - а) $\forall \varphi, \psi \in L(V, V), \forall \lambda \in \mathbb{F} \quad \lambda(\varphi \circ \psi) = (\lambda\varphi) \circ \psi = \varphi \circ (\lambda\psi)$;
 - б) $\forall \varphi, \psi, \chi \in L(V, V)$,
 $(\varphi + \psi) \circ \chi = \varphi \circ \chi + \psi \circ \chi$, $\varphi \circ (\psi + \chi) = \varphi \circ \psi + \varphi \circ \chi$;
 - в) $\forall \varphi, \psi, \chi \in L(V, V) \quad \varphi \circ (\psi \circ \chi) = (\varphi \circ \psi) \circ \chi$,

Доказательство.

1. Пусть $\forall x, y \in V$, $\chi = \varphi \circ \psi$, тогда $\chi(x + y) = \varphi(\psi(x + y))$, но $\psi \in L(V, V)$, поэтому $\psi(x + y) = \psi(x) + \psi(y)$. Таким образом, $\chi(x + y) = \varphi(\psi(x) + \psi(y))$. Но $\varphi \in L(V, V)$ – также линейный оператор, поэтому $\varphi(\psi(x) + \psi(y)) = \varphi(\psi(x)) + \varphi(\psi(y))$, следовательно, $\chi(x + y) = \varphi(\psi(x)) + \varphi(\psi(y)) = \chi(x) + \chi(y)$.

Аналогично проверяем, что $\forall x \in V, \forall \lambda \in \mathbb{F} \quad \chi(\lambda x) = \lambda \chi(x)$. Таким образом, $\chi \in L(V, V)$.

2. Все свойства доказываются одинаково. Проверим, например, что $(\varphi + \psi) \circ \chi = \varphi \circ \chi + \psi \circ \chi$. Пусть $x \in V$ – произвольный элемент. Пользуясь определениями произведения операторов и суммы операторов, имеем:

$$\begin{aligned} ((\varphi + \psi) \circ \chi)(x) &= (\varphi + \psi)(\chi(x)) = \\ &= (\varphi(\chi(x)) + \psi(\chi(x))) = (\varphi \circ \chi)(x) + (\psi \circ \chi)(x) = \\ &= (\varphi \circ \chi + \psi \circ \chi)(x). \end{aligned}$$

Следовательно, $(\varphi + \psi) \circ \chi = \varphi \circ \chi + \psi \circ \chi$.

2.2. Матрица линейного оператора

Пусть V – линейное пространство, $\dim V = n$ и $\varepsilon \equiv \{e_1, \dots, e_n\}$ – произвольный базис в V .

Теорема 2.2 (о задании линейного оператора). Пусть $\varepsilon \equiv \{e_1, \dots, e_n\}$ – базис в V , а $\{b_1, \dots, b_n\}$ – произвольное семейство векторов в V . Тогда существует линейный оператор $\varphi \in L(V, V)$, для которого $\varphi(e_i) = b_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, причем такой линейный оператор единственен.

Доказательство. Докажем существование оператора. Пусть $x \in V$, тогда $x = \xi_1 e_1 + \dots + \xi_n e_n$. Введем оператор φ по формуле

$$\varphi(x) = \xi_1 b_1 + \dots + \xi_n b_n. \quad (2.2)$$

Оператор введен корректно, поскольку координаты вектора в базисе определены однозначно. Проверим линейность оператора.

Пусть $x, y \in V$ и $x = \xi_1 e_1 + \dots + \xi_n e_n$, $y = \eta_1 e_1 + \dots + \eta_n e_n$. Тогда $x + y = (\xi_1 + \eta_1)e_1 + \dots + (\xi_n + \eta_n)e_n$ и мы по определению введенного оператора φ (см. (2.2)) имеем

$$\begin{aligned} \varphi(x + y) &= (\xi_1 + \eta_1)b_1 + \dots + (\xi_n + \eta_n)b_n = \\ &= (\xi_1 b_1 + \dots + \xi_n b_n) + (\eta_1 b_1 + \dots + \eta_n b_n) = \varphi(x) + \varphi(y). \end{aligned}$$

Пусть теперь $\lambda \in \mathbb{F}$. Тогда $\lambda x = \lambda \xi_1 e_1 + \dots + \lambda \xi_n e_n$, а, следовательно, в силу (2.2)

$$\varphi(\lambda x) = \lambda \xi_1 b_1 + \dots + \lambda \xi_n b_n = \lambda(\xi_1 b_1 + \dots + \xi_n b_n) = \lambda \varphi(x).$$

Оба свойства линейности оператора доказаны, следовательно, $\varphi \in L(V, V)$. Наконец, опять же в силу (2.2)

$$\varphi(e_i) = \varphi(0e_1 + \dots + 1e_i + \dots + 0e_n) = 0b_1 + \dots + 1b_i + \dots + 0b_n = b_i.$$

Таким образом, $\varphi(x)$, определенный формулой (2.2), является искомым линейным оператором.

Докажем единственность этого оператора. Предположим, что существуют два линейных оператора $\varphi \in L(V, V)$, $\psi \in L(V, V)$ такие, что

$$\varphi(e_i) = \psi(e_i) = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.3)$$

Пусть $x = \xi_1 e_1 + \dots + \xi_n e_n$ – произвольный вектор из V . Тогда в силу линейности операторов φ и ψ :

$$\varphi(x) = \varphi(\xi_1 e_1 + \dots + \xi_n e_n) = \xi_1 \varphi(e_1) + \dots + \xi_n \varphi(e_n) = \xi_1 b_1 + \dots + \xi_n b_n.$$

Получим формулу преобразования координат вектора под действием линейного оператора.

Теорема 2.3 (о преобразовании координат вектора). Пусть V – линейное пространство, $\varepsilon \equiv \{e_1, \dots, e_n\}$ – базис в V , $\varphi \in L(V, V)$.

Пусть $x = \xi_1 e_1 + \dots + \xi_n e_n = \vec{\varepsilon} \underset{\downarrow}{\xi}$ и $\varphi(x) = \eta_1 e_1 + \dots + \eta_n e_n = \vec{\varepsilon} \underset{\downarrow}{\eta}$.

Тогда

$$\underset{\downarrow}{\eta} = A_{\varphi}^{\varepsilon} \underset{\downarrow}{\xi}. \quad (2.5)$$

Доказательство. Имеем в матричной форме $x = \vec{\varepsilon} \underset{\downarrow}{\xi}$, $\varphi(x) = \vec{\varepsilon} \underset{\downarrow}{\eta}$. С другой стороны, учитывая линейность $\varphi \in L(V, V)$,

$$\varphi(x) = \varphi(\xi_1 e_1 + \dots + \xi_n e_n) = \xi_1 \varphi(e_1) + \dots + \xi_n \varphi(e_n) = \vec{\varphi}(\varepsilon) \underset{\downarrow}{\xi} = \vec{\varepsilon} A_{\varphi}^{\varepsilon} \underset{\downarrow}{\xi}.$$

В последнем переходе мы использовали матричную формулу (2.4) из замечания 2.5. Таким образом $\varphi(x) = \vec{\varepsilon} \underset{\downarrow}{\eta} = \vec{\varepsilon} A_{\varphi}^{\varepsilon} \underset{\downarrow}{\xi}$.

«Сокращая на базис» (см. формулу (1.20) из замечания 1.15 предыдущей главы), приходим к требуемой формуле (2.5).

Замечание 2.6. В процессе доказательства теоремы получена матричная формула

$$\varphi(x) = \vec{\varphi}(\varepsilon) \underset{\downarrow}{\xi}. \quad (2.6)$$

Замечание 2.7. Координаты векторов x и $\varphi(x)$ в формуле (2.5) заданы в одном и том же базисе $\varepsilon \equiv \{e_1, \dots, e_n\}$.

Итак, каждому линейному оператору $\varphi \in L(V, V)$ при фиксированном базисе соответствует матрица $A_{\varphi}^{\varepsilon}$. Покажем, что и, наоборот, при фиксированном базисе ε в V любой квадратной матрице D порядка n соответствует некоторый линейный оператор φ , для которого матрица D будет его матрицей в базисе ε .

Теорема 2.4. Пусть дано линейное пространство V и в нем выбран базис $\varepsilon \equiv \{e_1, \dots, e_n\}$. Пусть задана квадратная матрица

лено, что соответствие $\varphi \rightarrow A_\varphi^\varepsilon$ является биекцией. Проверим сохранение линейных операций.

Пусть $\varphi \leftrightarrow A_\varphi^\varepsilon = (\hat{a}_{ij})$, $\psi \leftrightarrow A_\psi^\varepsilon = (\tilde{a}_{ij})$.

Пусть $\chi = \varphi + \psi$, $\chi \leftrightarrow A_\chi^\varepsilon = (a_{ij}^*)$, тогда

$$\chi(e_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij}^* e_i, \quad j=1,2,\dots,n.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \chi(e_j) &= (\varphi + \psi)e_j = \varphi(e_j) + \psi(e_j) = \\ &= \sum_{i=1}^n \hat{a}_{ij} e_i + \sum_{i=1}^n \tilde{a}_{ij} e_i = \sum_{i=1}^n (\hat{a}_{ij} + \tilde{a}_{ij}) e_i, \quad j=1,2,\dots,n. \end{aligned}$$

В силу теоремы 1.4 (о единственности координат) из последних равенств следует, что $a_{ij}^* = \hat{a}_{ij} + \tilde{a}_{ij}$, $i, j=1,2,\dots,n$, т.е.

$$A_\chi^\varepsilon = A_\varphi^\varepsilon + A_\psi^\varepsilon.$$

Таким образом, мы показали, что $\varphi + \psi \leftrightarrow A_\varphi^\varepsilon + A_\psi^\varepsilon$.

Пусть теперь $\kappa = \lambda\varphi$, $\lambda \in \mathbb{F}$, $A_\kappa^\varepsilon = (a_{ij}^{**})$, тогда, с одной стороны,

$$\kappa(e_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij}^{**} e_i, \quad j=1,2,\dots,n,$$

а с другой стороны,

$$\kappa(e_j) = \lambda\varphi(e_j) = \lambda \sum_{i=1}^n \hat{a}_{ij} e_i = \sum_{i=1}^n \lambda \hat{a}_{ij} e_i, \quad j=1,2,\dots,n.$$

Из этих равенств следует $a_{ij}^{**} = \lambda \hat{a}_{ij}$, $i, j=1,2,\dots,n$, следовательно,

$$A_\kappa^\varepsilon = \lambda A_\varphi^\varepsilon,$$

т.е. $\lambda\varphi \leftrightarrow \lambda A_\varphi^\varepsilon$. Теорема доказана.

Следствие 1. Из теоремы 2.5 и теоремы 1.9 вытекает, что $\dim L(V, V) = \dim \text{Mat}(n) = n^2$.

Следствие 2. При фиксированном базисе $\varepsilon \equiv \{e_1, \dots, e_n\}$ в V можно отождествить оператор $\varphi \in L(V, V)$ и его матрицу A_φ^ε .

Теорема 2.6 (о матрице композиции операторов). Пусть дано линейное пространство V , и в нем фиксирован базис ε , пусть $\varphi, \psi \in L(V, V)$, $\chi = \varphi \circ \psi$. Тогда $A_\chi^\varepsilon = A_\varphi^\varepsilon \cdot A_\psi^\varepsilon$. Другими словами, если имеем эквивалентности $\varphi \sim A_\varphi^\varepsilon$, $\psi \sim A_\psi^\varepsilon$, то композиция операторов φ и ψ эквивалентна произведению матриц A_φ^ε и A_ψ^ε : $\varphi \circ \psi \sim A_\varphi^\varepsilon \cdot A_\psi^\varepsilon$.

Доказательство. Пусть $A_\varphi^\varepsilon = (a_{ij})$, $A_\psi^\varepsilon = (b_{ij})$, $A_\chi^\varepsilon = (c_{ij})$, тогда поскольку $\psi(e_j) = \sum_{k=1}^n b_{kj} e_k$, $\varphi(e_j) = \sum_{k=1}^n a_{ik} e_i$, то

$$\begin{aligned} \chi(e_j) &= \varphi(\psi(e_j)) = \varphi\left(\sum_{k=1}^n b_{kj} e_k\right) = \\ &= \sum_{k=1}^n b_{kj} \varphi(e_k) = \sum_{k=1}^n b_{kj} \left(\sum_{i=1}^n a_{ik} e_i\right) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}\right) e_i, \quad j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

С другой стороны, $\chi(e_j) = \sum_{i=1}^n c_{ij} e_i$, $j = 1, 2, \dots, n$. Тогда, применяя теорему 1.4 (о единственности координат), имеем

$$c_{ij} = \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}\right), \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Последнее равенство в силу определения умножения матриц означает, что $A_\chi^\varepsilon = A_\varphi^\varepsilon \cdot A_\psi^\varepsilon$. Теорема доказана.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 2.2. Пусть V – произвольное линейное пространство, $\dim V = n$, $I \in L(V, V)$ – тождественный оператор ($I(x) = x$

$\forall x \in V$), тогда в любом базисе ε этого пространства $A_I^\varepsilon = E \in \text{Mat}(n)$ – единичная матрица.

Пример 2.3. Рассмотрим пространство многочленов степени не выше $n: V = P_n$, $\varepsilon = \{1, t, t^2, \dots, t^n\}$. Рассмотрим оператор дифференцирования $\varphi = \frac{d}{dt}$. Тогда матрица этого оператора

$$A_\varphi^\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Действительно, в силу правила дифференцирования степенных функций имеем $\varphi(1) = 0 = (0, 0, \dots, 0, 0)$, $\varphi(t) = 1 = (1, 0, \dots, 0, 0)$, ..., $\varphi(t^n) = nt^{n-1} = (0, 0, \dots, n, 0)$.

Пример 2.4. Рассмотрим пространство V геометрических векторов, коллинеарных некоторой заданной плоскости, пусть $\varepsilon = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ – ортонормированный базис на этой плоскости, φ – оператор поворота на угол β . Нетрудно проверить (рис. 2.2), что

$$\begin{cases} \varphi(\vec{e}_1) = \cos \beta \cdot \vec{e}_1 + \sin \beta \cdot \vec{e}_2 \\ \varphi(\vec{e}_2) = -\sin \beta \cdot \vec{e}_1 + \cos \beta \cdot \vec{e}_2. \end{cases}$$

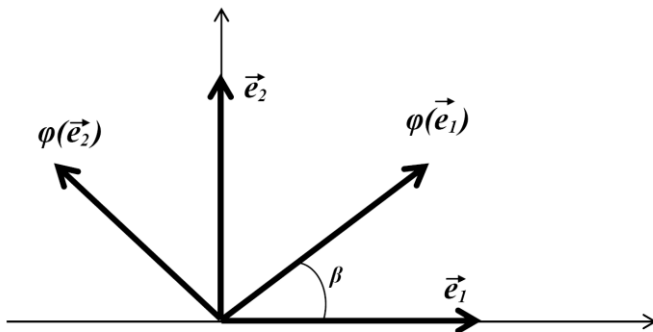


Рис. 2.2

Следовательно, матрица этого оператора в данном базисе имеет вид

$$A_{\varphi}^{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix}.$$

Пусть теперь в линейном пространстве V выбраны два различных базиса $\varepsilon = \{e_1, \dots, e_n\}$ и $\varepsilon' = \{e'_1, \dots, e'_n\}$ с матрицей перехода T , так что $\vec{\varepsilon}' = \vec{\varepsilon}T$. Тогда у линейного оператора $\varphi \in L(V, V)$ в каждом из этих базисов имеется своя матрица $A_{\varphi}^{\varepsilon}$ и $A_{\varphi}^{\varepsilon'}$.

Для определения связи между этими базисами существует

Теорема 2.7 (о преобразовании матрицы оператора при смене базиса). Пусть в V заданы два различных базиса $\varepsilon = \{e_1, \dots, e_n\}$ и $\varepsilon' = \{e'_1, \dots, e'_n\}$, $\vec{\varepsilon}' = \vec{\varepsilon}T$ и оператор $\varphi \in L(V, V)$. Тогда имеет место формула

$$A_{\varphi}^{\varepsilon'} = T^{-1}A_{\varphi}^{\varepsilon}T. \quad (2.8)$$

Прежде чем доказывать теорему докажем важную лемму, которую будем неоднократно применять в дальнейшем.

Лемма 2.1 (о «сокращении» на произвольный вектор). Пусть A и B — две квадратные матрицы порядка n . Пусть для любого n -мерного столбца $\vec{\xi}$ справедливо

$$A \begin{matrix} \vec{\xi} \\ \downarrow \end{matrix} = B \begin{matrix} \vec{\xi} \\ \downarrow \end{matrix}, \quad (2.9)$$

тогда $A = B$.

Доказательство леммы. Пусть $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$. Поскольку в равенстве (2.8) в качестве $\vec{\xi}$ можно взять произвольный столбец $\vec{\xi}$, то положим $\vec{\xi} = \vec{\xi}_k = (0, \dots, 1, 0, \dots, 0)^T$ — столбец, в котором все компоненты равны нулю, кроме k -той компоненты, которая равна единице. Тогда (2.9) запишется в виде

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1k} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & \dots & b_{2k} & \dots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1} & \dots & b_{nk} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix},$$

откуда, учитывая правило умножения матриц, получаем $(a_{1k} \ a_{2k} \dots \ a_{nk})^T = (b_{1k} \ b_{2k} \dots \ b_{nk})^T$, т.е. k -е столбцы матриц A и B совпадают. Поскольку в качестве k можно взять любое из чисел $1, 2, \dots, n$, мы получаем, что матрицы A и B равны между собой. Лемма доказана.

Перейдем к *доказательству теоремы 2.7*. Пусть $x \in V$ – произвольный вектор и пусть в некотором базисе $\varepsilon = \{e_1, \dots, e_n\}$ он имеет координаты $\underset{\downarrow}{\xi}$ ($x = \bar{\varepsilon} \underset{\downarrow}{\xi}$), а в другом базисе $\varepsilon' = \{e'_1, \dots, e'_n\}$ имеет координаты $\underset{\downarrow}{\xi'}$ ($x = \bar{\varepsilon}' \underset{\downarrow}{\xi'}$). Тогда в силу формул (2.6) и (2.4) (см. замечания 2.6 и 2.5) имеем в базисе ε

$$\underset{\downarrow}{\varphi(x)} = \underset{\downarrow}{\bar{\varphi}(\varepsilon)} \underset{\downarrow}{\xi} = (\bar{\varepsilon} \underset{\downarrow}{A_\varphi^\varepsilon}) \underset{\downarrow}{\xi} = \bar{\varepsilon} (\underset{\downarrow}{A_\varphi^\varepsilon} \underset{\downarrow}{\xi}).$$

Аналогично, в базисе ε' $\underset{\downarrow}{\varphi(x)} = \bar{\varepsilon}' (\underset{\downarrow}{A_\varphi^{\varepsilon'}} \underset{\downarrow}{\xi'})$. Координаты $\underset{\downarrow}{\xi}$ и $\underset{\downarrow}{\xi'}$ вектора x связаны соотношением $\underset{\downarrow}{\xi} = \underset{\downarrow}{T} \underset{\downarrow}{\xi'}$ (см. (1.17)), поэтому мы получаем равенство

$$\underset{\downarrow}{\varphi(x)} = \bar{\varepsilon}' (\underset{\downarrow}{A_\varphi^{\varepsilon'}} \underset{\downarrow}{\xi'}) = \bar{\varepsilon}' (\underset{\downarrow}{A_\varphi^\varepsilon} \underset{\downarrow}{\xi}) = \bar{\varepsilon}' \underset{\downarrow}{A_\varphi^\varepsilon} \underset{\downarrow}{T} \underset{\downarrow}{\xi'}.$$

Следовательно, $\bar{\varepsilon}' \underset{\downarrow}{A_\varphi^{\varepsilon'}} \underset{\downarrow}{\xi'} = \bar{\varepsilon}' \underset{\downarrow}{A_\varphi^\varepsilon} \underset{\downarrow}{T} \underset{\downarrow}{\xi'}$. В этом соотношении столбец $\underset{\downarrow}{\xi'}$ произвольный (поскольку произволен вектор x), поэтому по

лемме 2.1, можно «сократить» на этот столбец $\xi' : \vec{\varepsilon}' A_{\varphi}^{\varepsilon'} = \vec{\varepsilon} A_{\varphi}^{\varepsilon} T$,

но $\vec{\varepsilon}' = \vec{\varepsilon} T$, и получаем равенство $\vec{\varepsilon} T A_{\varphi}^{\varepsilon'} = \vec{\varepsilon} A_{\varphi}^{\varepsilon} T$. Проводя в последнем равенстве «сокращение на базис» (см. формулу (1.20) из замечания 1.15), получаем $T A_{\varphi}^{\varepsilon'} = A_{\varphi}^{\varepsilon} T$. Матрица преобразования базиса T невырожденная и поэтому имеет обратную T^{-1} . Умножая последнее равенство слева на T^{-1} , приходим к формуле (2.8). Теорема 2.7 доказана.

Следствие. Определитель матрицы оператора не меняется при изменении базиса, т.е. является инвариантом. Действительно, в силу (2.8)

$$\det A_{\varphi}^{\varepsilon'} = \det(T^{-1} A_{\varphi}^{\varepsilon} T) = \det T^{-1} \cdot \det A_{\varphi}^{\varepsilon} \cdot \det T = \det A_{\varphi}^{\varepsilon}.$$

Поэтому является корректным следующее определение.

Определение 2.9. Детерминантом (определителем) линейного оператора φ называется определитель матрицы этого оператора в любом базисе.

2.3. Обратный оператор. Ядро и образ оператора

Определение 2.10. Пусть φ – линейный оператор из $L(V, V)$. Оператор ψ называется обратным к оператору φ , если

$$\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi = I.$$

Оператор, обратный к φ , будем обозначать φ^{-1} . Если у оператора существует обратный, то говорят, что он обратим.

В дальнейшем мы увидим, что не всякий $\varphi \in L(V, V)$ имеет обратный. Однако, если обратный оператор существует, то он линеен и единственен. Покажем это.

Теорема 2.8 (о линейности и единственности обратного оператора). Если $\varphi \in L(V, V)$ имеет обратный оператор φ^{-1} , то:

- 1) $\varphi^{-1} \in L(V, V)$;
- 2) φ^{-1} определен однозначно.

Доказательство. 1. Если существует φ^{-1} , то $\forall x, y \in V$ в силу линейности φ имеем

$$\begin{aligned}\varphi^{-1}(x+y) &= \varphi^{-1}(I(x) + I(y)) = \varphi^{-1}((\varphi \circ \varphi^{-1})(x) + (\varphi \circ \varphi^{-1})(y)) = \\ &= \varphi^{-1}(\varphi(\varphi^{-1}(x)) + (\varphi(\varphi^{-1}(y)))) = \varphi^{-1}(\varphi(\varphi^{-1}(x) + \varphi^{-1}(y))) = \\ &= (\varphi^{-1} \circ \varphi)(\varphi^{-1}(x) + \varphi^{-1}(y)) = \varphi^{-1}(x) + \varphi^{-1}(y).\end{aligned}$$

Аналогично, $\forall x \in V, \lambda \in \mathbf{F}$ имеем

$$\begin{aligned}\varphi^{-1}(\lambda x) &= \varphi^{-1}(\lambda I(x)) = \varphi^{-1}(\lambda(\varphi \circ \varphi^{-1})(x)) = \varphi^{-1}(\lambda\varphi(\varphi^{-1}(x))) = \\ &= \varphi^{-1}(\varphi(\lambda\varphi^{-1}(x))) = (\varphi^{-1} \circ \varphi)(\lambda\varphi^{-1}(x)) = \lambda\varphi^{-1}(x).\end{aligned}$$

Таким образом, $\varphi^{-1} \in L(V, V)$.

2. Единственность обратного оператора докажем от противного: пусть существуют два обратных оператора к оператору $\varphi \in L(V, V)$: ψ_1 и ψ_2 . Тогда по определению обратного оператора $\varphi \circ \psi_1 = \psi_1 \circ \varphi = I$ и $\varphi \circ \psi_2 = \psi_2 \circ \varphi = I$, но тогда

$$\psi_1 = \psi_1 \circ I = \psi_1 \circ (\varphi \circ \psi_2) = (\psi_1 \circ \varphi) \circ \psi_2 = I \circ \psi_2 = \psi_2.$$

Теорема доказана.

Теорема 2.9 (о матрице обратного оператора). Если у оператора $\varphi \in L(V, V)$ существует обратный оператор φ^{-1} , то в любом базисе $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ пространства V матрица обратного оператора φ^{-1} равна обратной матрице самого оператора φ , т.е. справедливо равенство $A_{\varphi^{-1}}^{\mathcal{E}} = (A_{\varphi}^{\mathcal{E}})^{-1}$.

Доказательство. Если φ^{-1} существует, то в базисе $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ у него есть матрица, которую обозначим $A_{\varphi^{-1}}^{\mathcal{E}}$. В силу теоремы 2.6 о матрице произведения операторов имеем:

$$A_{\varphi^{-1}}^{\mathcal{E}} A_{\varphi}^{\mathcal{E}} = A_{\varphi^{-1} \circ \varphi}^{\mathcal{E}} = A_I^{\mathcal{E}} = E, \quad A_{\varphi}^{\mathcal{E}} A_{\varphi^{-1}}^{\mathcal{E}} = A_{\varphi \circ \varphi^{-1}}^{\mathcal{E}} = A_I^{\mathcal{E}} = E.$$

Следовательно, в силу определения обратной матрицы $A_{\varphi^{-1}}^{\mathcal{E}} = (A_{\varphi}^{\mathcal{E}})^{-1}$. Теорема доказана.

Следствие. Если $\varphi \in L(V, V)$ имеет обратный, то $\det A_\varphi^\varepsilon \neq 0$ для любого базиса ε .

Доказательство. Если $\exists \varphi^{-1}$, то $\exists (A_\varphi^\varepsilon)^{-1}$, а критерием существования обратной матрицы является неравенство нулю определителя матрицы, т.е. $\det A_\varphi^\varepsilon \neq 0$. Следствие доказано.

Теорема 2.10 (критерий обратимости оператора). Пусть $\varphi \in L(V, V)$. Тогда следующие три утверждения эквивалентны:

- 1) $\exists \varphi^{-1}$, т.е. φ обратим;
- 2) φ – биекция, т.е. взаимно однозначное отображение пространства V на все V ;
- 3) в некотором базисе ε $\det A_\varphi^\varepsilon \neq 0$.

Доказательство. Докажем справедливость цепочки импликаций $1) \Rightarrow 3) \Rightarrow 2) \Rightarrow 1)$, что, очевидно, будет означать справедливость утверждения теоремы в целом. Импликация $1) \Rightarrow 3)$ доказана в следствии к предыдущей теореме.

$3) \Rightarrow 2)$: Пусть $\det A_\varphi^\varepsilon \neq 0$ в некотором базисе ε . Тогда для любого столбца η система алгебраических уравнений $A_\varphi^\varepsilon \xi = \eta$ имеет единственное решение. В силу теоремы 2.3 о преобразовании координат под действием линейного оператора это означает, что $\forall u \in V$ существует и единственен вектор $x \in V$ такой, что $\varphi(x) = u$ ($x = \xi$, $u = \eta$ в ε), а это и означает, что φ – биекция.

$2) \Rightarrow 1)$: Пусть φ – биекция. Это означает, что $\forall u \in V$ существует и единственен $\forall x \in V$ такой, что $\varphi(x) = u$.

Введем оператор $\psi: V \rightarrow V$ по формуле $\psi(y) = x$, где $u = \varphi(x)$. Поскольку φ – биекция, то оператор ψ введен корректно. При этом

$$x = \psi(y) = \psi(\varphi(x)) = (\psi \circ \varphi)(x) \Rightarrow \psi \circ \varphi = I,$$

$$y = \varphi(x) = \varphi(\psi(y)) = (\varphi \circ \psi)(y) \Rightarrow \varphi \circ \psi = I.$$

Следовательно, по определению обратного оператора $\psi = \varphi^{-1}$.

Теорема доказана.

Определение 2.11. Пусть задан оператор $\varphi \in L(V, V)$.

Ядром оператора φ (обозначение $\text{Ker} \varphi$) называется множество

$$\text{Ker} \varphi = \{x \in V : \varphi(x) = \theta\}.$$

Образом оператора φ (обозначение $\text{Im} \varphi$) называется множество

$$\text{Im} \varphi = \{y \in V : \exists x \in V, \varphi(x) = y\}.$$

Замечание 2.8. Если $\varphi \in L(V, V)$, то $\text{Ker} \varphi$ – не пустое множество, т.к. всегда $\theta \in \text{Ker} \varphi$ (см. замечание 2.1).

Следствие к теореме 2.10. Если $\varphi \in L(V, V)$ обратим, то

$$1) \text{Ker} \varphi = \{\theta\},$$

$$2) \text{Im} \varphi = V.$$

Доказательство.

1. $\theta \in \text{Ker} \varphi$ в силу замечания 2.1. Если $x \in \text{Ker} \varphi$, то $\varphi(x) = \theta$, но $\varphi(\theta)$ также равно θ . Поэтому в силу взаимной однозначности отображения φ получаем $x = \theta$.

2. Утверждение $\text{Im} \varphi = V$ доказано в самой теореме 2.10 (см. утверждение 2).

Пример 2.5. Оператор дифференцирования $\frac{d}{dt}$ в пространстве многочленов P_n не имеет обратного, поскольку матрица этого оператора в базисе $\mathcal{E} = \{1, t, t^2, \dots, t^n\}$ имеет вид (см. пример 2.3):

$$A_{\varphi}^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Она содержит нулевую строку и, следовательно, $\det A_{\varphi}^{\mathcal{E}} = 0$.

Пример 2.6. Оператор поворота на угол β в пространстве векторов, компланарных некоторой плоскости, имеет обратный, соответствующий повороту на угол $(-\beta)$. Действительно, в ортонормированном базисе $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ матрица оператора поворота имеет вид

$$A_{\varphi}^{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix},$$

и, следовательно, ее определитель $\det A_{\varphi}^{\varepsilon} = 1 \neq 0$.

Выясним некоторые свойства множеств $\text{Ker} \varphi$ и $\text{Im} \varphi$.

Теорема 2.11. Если $\varphi \in L(V, V)$, тогда $\text{Ker} \varphi$ и $\text{Im} \varphi$ являются подпространствами в V .

Доказательство. 1. Пусть $x, y \in \text{Ker} \varphi$, $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$. Тогда

$$\varphi(\lambda x + \mu y) = \lambda \varphi(x) + \mu \varphi(y) = \lambda \theta + \mu \theta = \theta.$$

Таким образом, $\lambda x + \mu y \in \text{Ker} \varphi$ и по определению подпространства это означает, что $\text{Ker} \varphi$ – подпространство пространства V .

2. Пусть $y_1, y_2 \in \text{Im} \varphi$. Это означает, что

$$\exists x_1, x_2 \in V: y_1 = \varphi(x_1), y_2 = \varphi(x_2).$$

Пусть $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$ – произвольные числа, тогда справедливы равенства

$$\lambda y_1 + \mu y_2 = \lambda \varphi(x_1) + \mu \varphi(x_2) = \varphi(\lambda x_1 + \mu x_2).$$

Следовательно, $\lambda y_1 + \mu y_2 \in \text{Im} \varphi$, а значит $\text{Im} \varphi$ – подпространство пространства V . Теорема доказана

Теорема 2.12 (о сумме размерностей ядра и образа линейного оператора). Пусть в линейном пространстве V , $\dim V = n$ введен базис $\varepsilon = \{e_1, \dots, e_n\}$ и задан оператор $\varphi \in L(V, V)$. Тогда:

1) $\text{Im} \varphi = L(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n))$ – линейная оболочка векторов $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$;

2) $\dim V = \dim \text{Ker} \varphi + \dim \text{Im} \varphi$.

Доказательство. 1. Если $y \in \text{Im} \varphi$, то $\exists x \in V: y = \varphi(x)$. В

пространстве V ε – базис, поэтому $x = \xi_1 e_1 + \dots + \xi_n e_n$. Тогда

$$y = \varphi(x) = \varphi(\xi_1 e_1 + \dots + \xi_n e_n) = \xi_1 \varphi(e_1) + \dots + \xi_n \varphi(e_n),$$

что и означает, что $y \in L(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n))$. Таким образом,

$$\text{Im } \varphi \subset L(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)).$$

Обратное включение $L(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)) \subset \text{Im } \varphi$ очевидно. Поэтому

$$\text{Im } \varphi = \dim L(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)).$$

2. Из доказанного в п. 1 следует, что $\dim \text{Im } \varphi = \dim L(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n))$. В силу теоремы 1.12 о размерности линейной оболочки $\dim L(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n))$ равна максимальному количеству линейно независимых векторов среди $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$. В матрице A_φ^ε оператора φ столбцы состоят из координат векторов $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$. В силу свойства изоморфизма, а именно, что при изоморфизме линейно независимые векторы переходят в линейно независимые, следует, что максимальное число линейно независимых векторов среди $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$ равно максимальному числу линейно независимых столбцов матрицы A_φ^ε , что равно рангу матрицы A_φ^ε . Итак, $\dim \text{Im } \varphi = \text{rang } A_\varphi^\varepsilon$.

С другой стороны, координаты векторов, входящих в $\text{Ker } \varphi$, и только они (!) удовлетворяют однородной системе линейных алгебраических уравнений

$$A_\varphi^\varepsilon \underset{\downarrow}{\xi} = \underset{\downarrow}{\theta}. \quad (2.10)$$

Отсюда следует, что $\dim \text{Ker } \varphi$ равна размерности пространства решений системы (2.10). В силу известной теоремы из теории систем линейных алгебраических уравнений эта размерность равна числу неизвестных минус ранг матрицы системы, в нашем случае: $n - \text{rang } A_\varphi^\varepsilon$. Следовательно, $\dim \text{Ker } \varphi = n - \text{rang } A_\varphi^\varepsilon$, и получаем

$$\dim \text{Ker } \varphi + \dim \text{Im } \varphi = (n - \text{rang } A_\varphi^\varepsilon) + \text{rang } A_\varphi^\varepsilon = \dim V.$$

Теорема доказана.

Следствие 1. Одного из фактов $\text{Ker}\varphi = \{\theta\}$ или $\text{Im}\varphi = V$ уже достаточно для утверждения, что оператор φ обратим.

Доказательство. 1. Пусть $\text{Ker}\varphi = \{\theta\}$. Это означает, что φ – взаимно однозначное соответствие. Действительно, если

$$\exists x_1, x_2 \in V, \quad x_1 \neq x_2, \quad \varphi(x_1) = \varphi(x_2),$$

то положим $z = x_1 - x_2 \neq \theta$. При этом

$$\varphi(z) = \varphi(x_1 - x_2) = \varphi(x_1) - \varphi(x_2) = \theta,$$

но $z \in \text{Ker}\varphi$, что невозможно. С другой стороны, поскольку $\text{Ker}\varphi = \{\theta\}$, то $\dim \text{Ker}\varphi = 0$. Тогда по только что доказанной теореме $\dim \text{Im}\varphi = n$, т.е. $\text{Im}\varphi = V$, а это означает, что оператор φ отображает V на все V . Значит φ – биекция, а из этого в силу теоремы 2.10 (критерия обратимости линейного оператора) вытекает, что оператор φ обратим.

2. Пусть $\text{Im}\varphi = V$, тогда $\dim \text{Im}\varphi = n$ и по доказанной теореме $\dim \text{Ker}\varphi = 0$, т.е. $\text{Ker}\varphi = \{\theta\}$. И в силу доказанного утверждения первого пункта данного следствия имеем обратимость $\varphi \in L(V, V)$.

Определение 2.12. Число $\dim \text{Im}\varphi$ называется рангом оператора φ . Число $\dim \text{Ker}\varphi$ называется дефектом оператора φ .

Следствие 2. Ранг оператора φ равен рангу его матрицы A_φ^ε в любом базисе ε , т.е. ранг матрицы оператора A_φ^ε является инвариантом по отношению к операции преобразования базиса. Кроме того, доказанная теорема утверждает, что сумма ранга оператора φ и его дефекта всегда равна n – размерности пространства V .

2.4. Собственные значения и собственные векторы линейного оператора

Пусть V – линейное пространство над множеством $\mathbb{F}$, $\dim V = n$, φ – линейный оператор, отображающий V в себя, то есть $\varphi \in L(V, V)$.

Определение 2.13. Число $\lambda_0 \in \mathbb{F}$ называется собственным значением оператора φ , если существует ненулевой элемент $x_0 \in V$ такой, что

$$\varphi(x_0) = \lambda_0 x_0. \quad (2.11)$$

При этом элемент x называется собственным вектором оператора φ , отвечающим собственному значению λ .

Определение 2.14. Многочлен $P_n(\lambda) = \det(A_\varphi^\varepsilon - \lambda E)$, где A_φ^ε – матрица оператора φ в некотором базисе $\varepsilon = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, называется характеристическим многочленом оператора φ , а уравнение $P_n(\lambda) \equiv \det(A_\varphi^\varepsilon - \lambda E) = 0$ называется характеристическим уравнением оператора φ .

Корректность определения характеристического многочлена и характеристического уравнения оператора φ следует из следующего утверждения.

Утверждение 2.1. Характеристический многочлен оператора $\varphi \in L(V, V)$ не меняется при изменении базиса.

Доказательство. Пусть $\varepsilon = \{e_1, \dots, e_n\}$ и $\varepsilon' = \{e'_1, \dots, e'_n\}$ – два различных базиса в V , A_φ^ε и $A_\varphi^{\varepsilon'}$ – матрицы оператора φ в этих базисах, T – матрица перехода от базиса ε к базису ε' . В силу теоремы 2.7 имеем

$$\begin{aligned} \det(A_\varphi^{\varepsilon'} - \lambda E) &= \det(T^{-1}A_\varphi^\varepsilon T - \lambda E) = \\ &= \det(T^{-1}A_\varphi^\varepsilon T - \lambda T^{-1}ET) = \det(T^{-1}(A_\varphi^\varepsilon - \lambda E)T) = \\ &= \det T^{-1} \det(A_\varphi^\varepsilon - \lambda E) \det T = \det(A_\varphi^\varepsilon - \lambda E). \end{aligned}$$

Утверждение 2.1 доказано. Кроме того, имеет место

Утверждение 2.2. Ранг матрицы $A_\varphi^\varepsilon - \lambda E$ не зависит от выбора базиса.

Доказательство. Заметим, что матрица $A_\varphi^\varepsilon - \lambda E$ это матрица линейного оператора $\varphi - \lambda I$. По следствию 2 теоремы 2.12 ранг матрицы линейного оператора не зависит от выбора базиса. Утверждение 2.2 доказано.

В дальнейшем, как и договаривались выше, если оператор φ и базис ε фиксированы, мы для простоты опускаем индексы в матрице A_φ^ε и пишем просто A .

Теорема 2.13 (о нахождении собственных значений и собственных векторов линейного оператора). Число $\lambda_0 \in \mathbb{F}$ является собственным значением оператора φ тогда и только тогда, когда оно является корнем характеристического уравнения $\det(A - \lambda E) = 0$ оператора φ (A – матрица оператора φ в некотором базисе), причем этому собственному значению отвечает $n - r$ линейно независимых собственных векторов, где r равно рангу матрицы $A - \lambda_0 E$.

Доказательство. Выберем в V базис $\varepsilon = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$. Пусть A – матрица оператора φ в этом базисе. Перепишем равенство (2.11) в матричной форме

$$A \underset{\downarrow}{\xi} = \lambda \underset{\downarrow}{\xi}.$$

Перенеся $\lambda \underset{\downarrow}{\xi}$ в левую часть, получим

$$(A - \lambda E) \underset{\downarrow}{\xi} = \underset{\downarrow}{0} \quad (2.12)$$

или в развернутом виде

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda) \xi_1 + \dots + a_{1n} \xi_n = 0 \\ \dots \\ a_{n1} \xi_1 + \dots + (a_{nn} - \lambda) \xi_n = 0. \end{cases} \quad (2.13)$$

Если $\lambda_0 \in \mathbb{F}$ – собственное значение оператора φ , то согласно определению 2.13 система (2.13) имеет при $\lambda = \lambda_0$ ненулевое ре-

шение, а поскольку необходимым и достаточным условием существования ненулевого решения однородной системы является равенство нулю ее определителя, то

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda_0 & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} - \lambda_0 \end{vmatrix} \equiv \det(A - \lambda_0 E) = 0. \quad (2.14)$$

Следовательно, λ_0 – корень характеристического уравнения. Наоборот, если $\lambda_0 \in \mathbf{F}$ – корень характеристического уравнения, то выполнено (2.14), а, следовательно, однородная система (2.13) при $\lambda = \lambda_0$ имеет ненулевое решение. В силу определения 2.13 получаем, что тогда λ_0 – собственное значение оператора φ . Первая часть теоремы 2.13 доказана.

Далее, пусть λ_0 – собственное значение оператора φ , то есть λ_0 корень характеристического уравнения, принадлежащий множеству $\mathbf{F}$. Подставляя λ_0 в систему (2.12), получаем однородную систему линейных алгебраических уравнений с матрицей $A - \lambda_0 E$

$$(A - \lambda_0 E) \underset{\downarrow}{\xi} = \underset{\downarrow}{0}. \quad (2.15)$$

Обозначим ранг матрицы $A - \lambda_0 E$ через r (согласно следствию 2 к теореме 2.12 величина r не зависит от выбора базиса). Система (2.15) имеет $n - r$ линейно независимых решений, следовательно, оператор φ имеет $n - r$ линейно независимых собственных векторов, отвечающих собственному значению λ_0 . Вторая часть теоремы 2.13 доказана.

Определение 2.15. Множество всех собственных значений оператора φ называется спектром этого оператора.

Замечание 2.9. Если $\mathbf{F} = \mathbb{C}$, то множество собственных значений совпадает с множеством корней характеристического уравнения, а если $\mathbf{F} = \mathbb{R}$, то только вещественные корни характеристического уравнения являются собственными значениями.

Приведем алгоритм нахождения собственных значений и собственных векторов линейного оператора $\varphi \in L(V, V)$.

1. Выбираем в V базис $\varepsilon = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ и записываем матрицу A оператора φ в этом базисе.

2. Решаем характеристическое уравнение $\det(A - \lambda E) = 0$ и находим его корни $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{F}$, $k \leq n$. Они являются собственными значениями оператора φ .

3. Для каждого собственного значения λ_i решаем однородную систему линейных алгебраических уравнений $(A - \lambda_i E)\xi = 0$ и находим ее фундаментальную систему решений $f_1, f_2, \dots, f_{n-r}$ (здесь $r = \text{rang}(A - \lambda_i E)$). Записываем общее решение этой системы:

$$\xi \Big|_{\lambda=\lambda_i} = c_1 \underset{\downarrow}{f_1} + c_2 \underset{\downarrow}{f_2} + \dots + c_{n-r} \underset{\downarrow}{f_{n-r}},$$

и исключаем из него нулевое решение: $|c_1| + |c_2| + \dots + |c_{n-r}| \neq 0$. Это и будет множество собственных векторов, отвечающих собственному значению λ_i .

Приведем примеры нахождения собственных значений и собственных векторов некоторых линейных операторов.

Пример 2.7. Пусть $\varphi = \frac{d}{dt}$ – оператор дифференцирования, действующий в линейном пространстве $V = P_n$ многочленов степени меньшей или равной n .

В примере 2.3 была получена матрица этого оператора в базисе $\varepsilon = \{1, t, \dots, t^n\}$.

Запишем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\lambda & 2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Вычисляя определитель, получаем $(-\lambda)^{n+1} = 0$ или $\lambda = 0$. Таким образом, оператор дифференцирования имеет только одно собственное значение $\lambda = 0$. Найдем собственные векторы, отвечающие этому собственному значению. Они являются решениями системы

$$(A - 0 \cdot E) \underset{\downarrow}{\xi} = \underset{\downarrow}{0}.$$

Перейдем от матричной формы записи этой системы

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_n \\ \xi_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

к обычной, координатной:

$$\begin{cases} \xi_2 = 0 \\ \xi_3 = 0 \\ \dots \\ \xi_{n+1} = 0 \end{cases}.$$

В этой системе переменная ξ_1 является свободной, остальные переменные равны нулю. Так как у нас оказалась только одна свободная переменная, то фундаментальная система решений состоит из одного ненулевого решения. Положим $\xi_1 = 1$, тогда

$f = (1, 0, \dots, 0)$. Записываем общее решение системы уравнений и исключаем из него нулевое решение:

$$\xi_{\downarrow}|_{\lambda=0} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c \neq 0.$$

Возвращаясь к записи через базисные элементы, получаем

$$x|_{\lambda=0} = c(1 + 0 \cdot t + \dots + 0 \cdot t^n) = c, \quad c \neq 0.$$

Таким образом, собственными векторами оператора дифференцирования являются константы, за исключением нуля.

Пример 2.8. Пусть V – линейное пространство векторов плоскости, а φ – оператор поворота векторов на угол $\beta = \frac{\pi}{3}$. В примере 2.4 была получена матрица оператора поворота на произвольный угол β в ортонормированном базисе $\mathcal{E} = \{\vec{i}, \vec{j}\}$. Подставляя $\beta = \frac{\pi}{3}$, получим

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Составим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда получим $\left(\frac{1}{2} - \lambda\right)^2 + \frac{3}{4} = 0$. Это уравнение не имеет решений на множестве вещественных чисел (V – вещественное линейное пространство). Следовательно, рассматриваемый оператор не имеет собственных значений и собственных векторов.

Пример 2.9. Пусть матрица линейного оператора φ в некотором базисе $\varepsilon = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ равна

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдем собственные значения и собственные векторы этого оператора. Составим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Вычислим определитель, стоящий в левой части характеристического уравнения. Для этого к первой строке определителя прибавим, а из второй и третьей строк вычтем четвертую строку определителя:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 & 2-\lambda \\ 0 & 2-\lambda & 0 & -2+\lambda \\ 0 & 0 & 2-\lambda & -2+\lambda \\ 1 & -1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix}.$$

Вынесем множитель $2 - \lambda$ из первой, второй и третьей строк определителя:

$$(2-\lambda)^3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix}.$$

Вычтем из четвертого столбца первый:

$$(2-\lambda)^3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix},$$

и разложим полученный определитель по первой строке:

$$(2-\lambda)^3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix}.$$

Теперь прибавим к последнему столбцу полученного определителя первый столбец:

$$(2-\lambda)^3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1-\lambda \end{vmatrix},$$

и разложим его по первой строке:

$$(2-\lambda)^3 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^3 (-1-\lambda-1) = -(2-\lambda)^3 (\lambda+2).$$

В итоге характеристическое уравнение преобразуется к виду

$$-(2-\lambda)^3 (\lambda+2) = 0.$$

Это уравнение имеет два решения: $\lambda_1 = 2$ и $\lambda_2 = -2$.

Найдем собственные векторы, отвечающие собственному значению $\lambda_1 = 2$. Они являются ненулевыми решениями системы уравнений

$$(A - 2E)\underset{\downarrow}{\xi} = \underset{\downarrow}{0} \text{ или } \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Эта система эквивалентна уравнению

$$\xi_1 - \xi_2 - \xi_3 - \xi_4 = 0.$$

Будем считать ξ_2, ξ_3, ξ_4 свободными переменными, а ξ_1 — главной переменной. Выразим главную переменную через свободные переменные: $\xi_1 = \xi_2 + \xi_3 + \xi_4$. Выбирая свободные неизвестные ξ_2, ξ_3 и ξ_4 , сначала $\xi_2 = 1, \xi_3 = 0, \xi_4 = 0$, затем $\xi_2 = 0, \xi_3 = 1, \xi_4 = 0$ и $\xi_2 = 0, \xi_3 = 0, \xi_4 = 1$, получим три линейно независимых решения нашей системы: $f_1 = (1, 1, 0, 0)$, $f_2 = (1, 0, 1, 0)$ и $f_3 = (1, 0, 0, 1)$. Они являются тремя линейно независимыми собственными векторами, отвечающими собственному значению $\lambda_1 = 2$. Запишем общий вид собственного вектора, отвечающего собственному значению $\lambda_1 = 2$:

$$\underset{\downarrow}{\xi} \Big|_{\lambda_1=2} = c_1 \underset{\downarrow}{f_1} + c_2 \underset{\downarrow}{f_2} + c_3 \underset{\downarrow}{f_3}, \quad |c_1| + |c_2| + |c_3| \neq 0.$$

Найдем теперь собственные векторы, отвечающие собственному значению $\lambda_2 = -2$. Они являются ненулевыми решениями однородной системы уравнений $(A + 2E)\underset{\downarrow}{\xi} = \underset{\downarrow}{0}$ или

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Решая эту систему методом Гаусса, получаем

$$\begin{cases} \xi_1 = -\xi_4 \\ \xi_2 = \xi_4 \\ \xi_3 = \xi_4 \end{cases}.$$

Полагая $\xi_4 = 1$, получаем фундаментальное решение $f_4 = (-1, 1, 1, 1)$. Записываем общий вид собственного вектора, отвечающего собственному значению λ_2 :

$$\xi \Big|_{\lambda_2 = -2} = c \underset{\downarrow}{f_4}, \quad c \neq 0.$$

Из определения характеристического многочлена $P_n(\lambda)$ оператора φ , действующего в n -мерном пространстве, следует, что $P_n(\lambda)$ является многочленом степени n от λ , то есть

$$P_n(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_0$$

(мы учли, что коэффициент при λ^n равен $(-1)^n$).

Упражнение. Проверьте, что коэффициенты a_{n-1} и a_0 задаются формулами $a_{n-1} = \text{tr} A \equiv a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$, $a_0 = \det A$.

Напомним, что число λ_0 называется корнем многочлена $P(\lambda)$ кратности s , если этот многочлен можно представить в виде $P(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^s \tilde{P}(\lambda)$, причем $\tilde{P}(\lambda_0) \neq 0$.

Определение 2.16. Алгебраической кратностью собственного значения λ_0 называется его кратность как корня характеристического многочлена.

Определение 2.17. Геометрической кратностью собственного значения λ_0 называется количество линейно независимых собственных векторов, отвечающих этому собственному значению.

Определение 2.18. Собственное значение называется простым, если его геометрическая кратность равна 1, и кратным, если его геометрическая кратность больше 1.

Согласно определениям 2.16–2.18 в примере 2.7 собственное значение $\lambda = 0$ является простым (его алгебраическая кратность

равна n , а геометрическая кратность равна 1), в примере 2.9 собственное значение $\lambda_1 = 2$ является кратным (его алгебраическая и геометрическая кратности равны 3), а собственное значение $\lambda_2 = -2$ является простым (его алгебраическая и геометрическая кратности равны 1).

Заметим, что если F является множеством комплексных чисел, то любой линейный оператор φ , действующий в n -мерном пространстве, всегда имеет n собственных значений (с учетом их алгебраической кратности). Этот факт следует из основной теоремы алгебры, согласно которой любой многочлен степени n с комплексными коэффициентами имеет в множестве комплексных чисел ровно n корней, если каждый корень считать столько раз, какова его кратность. Таким образом, у линейного оператора, действующего в комплексном линейном пространстве, всегда существует хотя бы одно собственное значение и, соответственно, хотя бы один собственный вектор.

Следующая теорема дает ответ на вопрос, как соотносятся между собой алгебраическая и геометрическая кратности.

Теорема 2.14. Геометрическая кратность собственного значения не превосходит его алгебраической кратности.

Доказательство. Пусть λ_0 – собственное значение оператора $\varphi \in L(V, V)$, n_0 и l_0 , его алгебраическая и геометрическая кратности, соответственно. Надо показать, что $l_0 \leq n_0$. Согласно определению геометрической кратности, существует l_0 линейно независимых собственных векторов $e_1, e_2, \dots, e_{l_0}$. Дополним их до базиса V элементами $e_{l_0+1}, e_{l_0+2}, \dots, e_n$. В этом базисе матрица оператора φ имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1l_0+1} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \lambda_0 & \cdots & & a_{2l_0+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_0 & a_{l_0l_0+1} & \cdots & a_{l_0n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{l_0+1l_0+1} & \cdots & a_{l_0+1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nl_0+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} \lambda_0 - \lambda & 0 & \cdots & 0 & a_{1l_0+1} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \lambda_0 - \lambda & \cdots & & a_{2l_0+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_0 - \lambda & a_{l_0l_0+1} & \cdots & a_{l_0n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{l_0+1l_0+1} - \lambda & \cdots & a_{l_0+1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nl_0+1} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix}.$$

Мы получили матрицу с углом нулей. Для матрицы G такой, что

$$G = \begin{pmatrix} B & C \\ O & D \end{pmatrix}$$

справедлива формула $\det G = \det B \cdot \det D$. Применяя эту формулу для матрицы $A - \lambda E$, получим

$$P_n(\lambda) \equiv \det(A - \lambda E) = (\lambda_0 - \lambda)^{l_0} \cdot P_{n-l_0}(\lambda).$$

$$\text{Здесь } P_{n-l_0}(\lambda) = \det \begin{pmatrix} a_{l_0+1 \ l_0+1} - \lambda & \cdots & a_{l_0+1 \ n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n \ l_0+1} & \cdots & a_{n \ n} - \lambda \end{pmatrix}.$$

Если λ_0 не является корнем многочлена $P_{n-l_0}(\lambda)$, т.е.

$P_{n-l_0}(\lambda_0) \neq 0$, то алгебраическая кратность собственного значения λ_0 равна l_0 ($n_0 = l_0$), а если λ_0 является корнем многочлена $P_{n-l_0}(\lambda)$, т.е. $P_{n-l_0}(\lambda_0) = 0$, то алгебраическая кратность собственного значения λ_0 больше l_0 ($n_0 > l_0$). Следовательно, $l_0 \leq n_0$. Теорема 2.14 доказана.

Имеют место следующие свойства собственных векторов линейного оператора $\varphi \in L(V, V)$.

Свойство 1. Если x_0 является собственным вектором оператора φ , отвечающим собственному значению λ_0 , то cx_0 , $c \neq 0$, также является собственным вектором этого оператора, отвечающим собственному значению λ_0 .

Доказательство. По определению собственного вектора и собственного значения $\varphi(x_0) = \lambda_0 x_0$, $x_0 \neq \theta$. Рассмотрим cx_0 , $c \neq 0$. Так как $x_0 \neq \theta$, $c \neq 0$, то $cx_0 \neq \theta$. Пользуясь линейностью оператора φ , получаем $\varphi(cx_0) = c\varphi(x_0) = c\lambda_0 x_0 = \lambda_0(cx_0)$. Следовательно, cx_0 , $c \neq 0$, является собственным вектором оператора φ , отвечающим собственному значению λ_0 .

Свойство 2. Если $x_1, x_2, \dots, x_k$ являются линейно независимыми собственными векторами оператора φ , отвечающими собственному значению λ_0 , то $c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_k x_k$, $|c_1| + |c_2| + \dots + |c_k| \neq 0$, также является собственным вектором этого оператора, отвечающим собственному значению λ_0 .

Доказательство. По определению собственного вектора и собственного значения

$$\varphi(x_1) = \lambda_0 x_1, \quad x_1 \neq \theta,$$

$$\varphi(x_2) = \lambda_0 x_2, \quad x_2 \neq \theta,$$

.....

$$\varphi(x_k) = \lambda_0 x_k, \quad x_k \neq \theta.$$

Рассмотрим $x' = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_k x_k$. Так как $x_1, x_2, \dots, x_k$ линейно независимы, то $x' = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_k x_k \neq \theta$ при $|c_1| + |c_2| + \dots + |c_k| \neq 0$. Пользуясь линейностью оператора φ , получаем

$$\begin{aligned} \varphi(x') &= \varphi(c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_k x_k) = \\ &= c_1 \varphi(x_1) + c_2 \varphi(x_2) + \dots + c_k \varphi(x_k) = \\ &= c_1 \lambda_0 x_1 + c_2 \lambda_0 x_2 + \dots + c_k \lambda_0 x_k = \\ &= \lambda_0 (c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_k x_k) = \lambda_0 x'. \end{aligned}$$

Следовательно, $x' = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_k x_k$, $|c_1| + |c_2| + \dots + |c_k| \neq 0$, является собственным вектором оператора φ , отвечающим собственному значению λ_0 .

Отметим, что представление собственных векторов в виде линейной комбинаций базисных, полученное в примерах 2.7 и 2.9, в точности соответствует доказанным свойствам 1 и 2.

Свойство 3 (теорема о линейной независимости собственных векторов, отвечающих различным собственным значениям). Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ – попарно различные собственные значения оператора φ ($\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$), соответствующие собственным векторам $x_1, x_2, \dots, x_k$. Тогда $x_1, x_2, \dots, x_k$ линейно независимы.

Доказательство этого свойства проведем методом математической индукции по количеству собственных векторов.

Основание индукции. При $k = 1$ имеем одно собственное значение λ_1 и один собственный вектор x_1 . Так как по определению $x_1 \neq \theta$, то он линейно независим.

Индуктивный переход. Докажем, что если свойство 3 верно для $k - 1$ собственных векторов, то оно будет верно и для k собственных векторов. Рассмотрим линейную комбинацию векторов $x_1, x_2, \dots, x_k$ и приравняем ее нулевому вектору:

$$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_{k-1} x_{k-1} + \alpha_k x_k = \theta. \quad (2.16)$$

Покажем, что равенство (2.16) возможно, только если $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$. Применим к обеим частям этого равенства оператор φ : $\varphi(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_{k-1} x_{k-1} + \alpha_k x_k) = \varphi(\theta)$.

Так как $\varphi \in L(V, V)$, то это равенство можно переписать в виде

$$\alpha_1 \varphi(x_1) + \dots + \alpha_{k-1} \varphi(x_{k-1}) + \alpha_k \varphi(x_k) = \theta.$$

Учитывая, что $\varphi(x_i) = \lambda_i x_i$, $i = 1, 2, \dots, k$, получим

$$\alpha_1 \lambda_1 x_1 + \dots + \alpha_{k-1} \lambda_{k-1} x_{k-1} + \alpha_k \lambda_k x_k = \theta. \quad (2.17)$$

Вычтем из равенства (2.17) равенство (2.16), умноженное на λ_k :

$$\alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_k) x_1 + \dots + \alpha_{k-1} (\lambda_{k-1} - \lambda_k) x_{k-1} = \theta.$$

В силу предположения индукции о линейной независимости $k-1$ собственных векторов $x_1, x_2, \dots, x_{k-1}$ произведение $\alpha_i (\lambda_i - \lambda_k) = 0$, $i = 1, 2, \dots, k-1$. По условию теоремы $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$, следовательно, $\alpha_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, k-1$. Подставляя $\alpha_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, k-1$ в (2.16), получаем $\alpha_k x_k = \theta$. Так как $x_k \neq \theta$, то $\alpha_k = 0$.

Итак, мы получили, что в равенстве (2.16) $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$. Следовательно, собственные векторы $x_1, x_2, \dots, x_k$ линейно независимы. Свойство 3 доказано.

2.5. Приведение матрицы линейного оператора к диагональному виду

Определение 2.19. Квадратная матрица $A = (a_{ij})$ называется диагональной, если все ее элементы a_{ij} при $i \neq j$ равны нулю.

Определение 2.20. Линейный оператор называется диагонализующим, если существует базис, в котором его матрица имеет диагональный вид.

Записывая координаты элементов $\varphi(e_1), \varphi(e_2), \dots, \varphi(e_n)$ – образов базисных элементов $e_1, e_2, \dots, e_n$ по столбцам, получаем матрицу A оператора φ в базисе $\varepsilon = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Теорема 2.15 доказана.

Следствие (достаточное условие приведения матрицы линейного оператора к диагональному виду). Если линейный оператор φ , действующий в n -мерном линейном пространстве V , имеет n различных собственных значений, то существует базис, в котором матрица этого оператора имеет диагональный вид.

Доказательство. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ – различные собственные значения оператора φ , а $e_1, e_2, \dots, e_n$ – отвечающие им собственные векторы. По свойству 3 предыдущего параграфа они линейно независимы. Следовательно, они образуют базис. По теореме 2.15 в базисе из собственных векторов матрица оператора имеет диагональный вид.

Пример 2.10. Пусть $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ – матрица оператора φ в

некотором базисе. Требуется выяснить, можно ли привести матрицу этого оператора к диагональному виду путем перехода к новому базису. В случае положительного ответа найти этот базис и соответствующую ему матрицу.

Решение. Найдем собственные значения оператора φ . Для этого составим и решим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -\lambda(\lambda^2 - 1) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1.$$

Так как мы получили три различных собственных значения, то по следствию к теореме 2.15 существует базис из собственных векторов, в котором матрица оператора φ имеет диагональный вид. Найдем их.

Обозначим базис, в котором задана матрица оператора φ , через $\varepsilon = \{e_1, e_2, e_3\}$. Найдем собственный вектор f_1 , отвечающий собственному значению $\lambda_1 = 0$. Он является ненулевым решением однородной системы линейных алгебраических уравнений

$$(A - 0E)\underset{\downarrow}{\xi} = \underset{\downarrow}{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_1 = 0 \\ \xi_2 = 0 \end{cases}.$$

Полагая $\xi_3 = 1$, получим $f_1 = (0, 0, 1) = e_3$.

Аналогично найдем собственные векторы f_2 и f_3 , отвечающие собственным значениям $\lambda_2 = 1$ и $\lambda_3 = -1$, соответственно.

$$\begin{aligned} (A - E)\underset{\downarrow}{\xi} &= \underset{\downarrow}{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \xi_1 - \xi_2 = 0 \\ \xi_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_1 = \xi_2 \\ \xi_3 = 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

Полагая $\xi_2 = 1$, получим $f_2 = (1, 1, 0) = e_1 + e_2$.

$$(A + E)\underset{\downarrow}{\xi} = \underset{\downarrow}{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \xi_1 + \xi_2 = 0 \\ \xi_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_1 = -\xi_2 \\ \xi_3 = 0 \end{cases}.$$

Полагая $\xi_2 = 1$, получим $f_3 = (-1, 1, 0) = -e_1 + e_2$.

Таким образом, мы получили базис из собственных векторов оператора φ : $f_1 = e_3$, $f_2 = e_1 + e_2$, $f_3 = -e_1 + e_2$. В этом базисе матрица оператора φ имеет вид

$$A_{\varphi}^f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Пример 2.11. Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ – матрица линейного

оператора φ из примера 2.9. Требуется выяснить, можно ли привести матрицу этого оператора к диагональному виду путем перехода к новому базису. В случае положительного ответа найти этот базис и соответствующую ему матрицу.

Решение. В примере 2.9 мы нашли собственные значения оператора φ и отвечающие им линейно независимые собственные векторы. Собственному значению $\lambda_1 = 2$ отвечают векторы $f_1 = (1, 1, 0, 0)$, $f_2 = (1, 0, 1, 0)$ и $f_3 = (1, 0, 0, 1)$, а собственному значению $\lambda_2 = -2$ – $f_4 = (-1, 1, 1, 1)$. Покажем, что векторы f_1 , f_2 , f_3 , f_4 образуют базис. Составим матрицу, строками которой являются координаты этих векторов, вычислим ее ранг, приведя матрицу к ступенчатому виду элементарными преобразованиями:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Мы получили, что ранг матрицы равен 4. Это означает, что векторы f_1, f_2, f_3, f_4 линейно независимы и, следовательно, образуют базис. В этом базисе матрица оператора φ имеет вид

$$A_{\varphi}^f = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что полученный результат (диагонализуемость оператора φ) не является случайностью. Имеет место

Теорема 2.16 (*критерий диагонализуемости линейного оператора*). Оператор $\varphi \in L(V, V)$ диагонализуем тогда и только тогда, когда каждый корень характеристического многочлена принадлежит $\mathbf{F}$ и его геометрическая кратность совпадает с алгебраической кратностью.

Доказательство. Необходимость. Пусть $\varphi \in L(V, V)$ – диагонализуемый оператор. Выберем в V базис $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, в котором матрица A оператора φ имеет диагональный вид

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \lambda_1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_k \end{pmatrix} \equiv \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_2, \dots, \lambda_k, \dots, \lambda_k),$$

здесь число $\lambda_i \in \mathbf{F}, i=1, 2, \dots, k$ встречается в матрице A n_i раз, $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$.

Характеристический многочлен матрицы A (оператора φ) равен

$$P_n(\lambda) \equiv \det(A - \lambda E) = (\lambda_1 - \lambda)^{n_1} (\lambda_2 - \lambda)^{n_2} \dots (\lambda_k - \lambda)^{n_k}.$$

Отсюда следует, что число λ_i является собственным значением оператора φ алгебраической кратности n_i , $i=1, 2, \dots, k$. Рассмотрим матрицу $A - \lambda_i E$. Ее ранг равен $n - n_i$. Тогда по теореме 2.13 собственному значению λ_i отвечает $n - r = n - (n - n_i) = n_i$ линейно независимых собственных векторов, следовательно, геометрическая кратность λ_i также равна n_i .

Достаточность. Пусть любой корень характеристического уравнения оператора φ принадлежит множеству F (если F – множество комплексных чисел, то это условие выполняется автоматически, а если F – множество вещественных чисел, то оно означает, что все корни характеристического уравнения являются вещественными числами). Тогда характеристический многочлен оператора φ имеет вид

$$P_n(\lambda) \equiv \det(A - \lambda E) = (\lambda_1 - \lambda)^{n_1} (\lambda_2 - \lambda)^{n_2} \dots (\lambda_k - \lambda)^{n_k},$$

$$n_1 + n_2 + \dots + n_k = n.$$

Из теоремы 2.13 следует, что числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ являются собственными значениями оператора φ алгебраической кратности $n_1, n_2, \dots, n_k$, соответственно. По условию алгебраические кратности собственных значений совпадают с геометрическими: $n_i = l_i$, $i=1, 2, \dots, k$. Пусть $e_1^i, e_2^i, \dots, e_{n_i}^i$ – линейно независимые собственные векторы, отвечающие собственному значению λ_i , $i=1, 2, \dots, k$. Покажем, что векторы $e_1^1, e_2^1, \dots, e_{n_1}^1, \dots, e_1^k, e_2^k, \dots, e_{n_k}^k$ линейно независимы. Рассмотрим их линейную комбинацию и приравняем ее нулевому вектору:

$$\alpha_1^1 e_1^1 + \dots + \alpha_{n_1}^1 e_{n_1}^1 + \dots + \alpha_1^k e_1^k + \dots + \alpha_{n_k}^k e_{n_k}^k = \theta. \quad (2.19)$$

Обозначим $x^i = \alpha_1^i e_1^i + \dots + \alpha_{n_i}^i e_{n_i}^i$, $i = 1, 2, \dots, k$ и перепишем (2.19) в виде

$$x^1 + x^2 + \dots + x^k = \theta. \quad (2.20)$$

Покажем, что $x^1 = x^2 = \dots = x^k = \theta$. Предположим противное. Пусть среди векторов $x^1, x^2, \dots, x^k$ есть ненулевые векторы (из (2.20) очевидно, что $k > 1$), например, $x^1, x^2, \dots, x^m$ ($2 \leq m \leq k$). Тогда, с одной стороны, они являются собственными векторами, отвечающими различным собственным значениям и, следовательно, по свойству 3 линейной независимости собственных векторов, отвечающих различным собственным значениям, они линейно независимы. С другой стороны, имеем $x^1 + x^2 + \dots + x^m = \theta$, что означает их линейную зависимость. Получили противоречие. Следовательно, $x^1 = x^2 = \dots = x^k = \theta$, т.е.

$$\alpha_1^i e_1^i + \dots + \alpha_{n_i}^i e_{n_i}^i = \theta, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Так как по условию $e_1^i, e_2^i, \dots, e_{n_i}^i$ линейно независимы, то

$$\alpha_1^i = \alpha_2^i = \dots = \alpha_{n_i}^i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Итак, мы получили, что в равенстве (2.19) все коэффициенты равны нулю. Следовательно, собственные векторы $e_1^1, e_2^1, \dots, e_{n_1}^1, \dots, e_1^k, e_2^k, \dots, e_{n_k}^k$ линейно независимы. А так как их количество равно размерности пространства V , то они образуют базис. Согласно теореме 2.15 в базисе из собственных векторов матрица оператора имеет диагональный вид. Теорема 2.16 доказана.

Замечание 2.10. Линейная независимость собственных векторов f_1, f_2, f_3, f_4 в примере 2.11 автоматически следует из доказанной выше теоремы.

Глава 3. ЖОРДАНОВА НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА МАТРИЦЫ

Пусть V – линейное пространство над множеством $\mathbf{F}$, $\dim V = n$, φ – линейный оператор, отображающий V в себя ($\varphi \in L(V, V)$).

В этой главе будем предполагать, что корни характеристического многочлена $P_n(\lambda)$ оператора φ лежат в $\mathbf{F}$ (в комплексном линейном пространстве в силу основной теоремы алгебры это требование выполнено автоматически).

Цель данной главы – доказать, что в этом случае в пространстве V существует базис, в котором матрица оператора φ имеет специальный вид, называемый жордановой нормальной формой матрицы оператора φ :

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & J_d \end{pmatrix} \equiv \text{diag}(J_1, J_2, \dots, J_d),$$

где матрицы J_i , называемые жордановыми клетками, имеют вид

$$J_i = \begin{pmatrix} \alpha_i & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_i & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_i \end{pmatrix}, \quad \alpha_i \in \mathbf{F}, -$$

матрица порядка m_i , $i = 1, 2, \dots, d$, $m_1 + m_2 + \dots + m_d = n$.

3.1. Корневые векторы и корневые подпространства

Определение 3.1. Ненулевой элемент (вектор) $x_0 \in V$ называется *корневым вектором* оператора φ , отвечающим числу λ_0 , если при некотором натуральном s выполняется равенство

$$(\varphi - \lambda_0 I)^s(x_0) = \theta.$$

Определение 3.2. Натуральное число m называется *высотой* корневого вектора x , если

$$(\varphi - \lambda_0 I)^m(x_0) = \theta, \text{ а } (\varphi - \lambda_0 I)^{m-1}(x_0) \neq \theta.$$

Утверждение 3.1. Число λ_0 из определения 3.1 корневого вектора, является собственным значением оператора φ .

Доказательство. Пусть m — высота вектора x_0 . Обозначим $y_0 = (\varphi - \lambda_0 I)^{m-1}(x_0)$. В силу определения 3.2 $y_0 \neq \theta$. С учетом того, что

$$(\varphi - \lambda_0 I)^m(x_0) = (\varphi - \lambda_0 I)((\varphi - \lambda_0 I)^{m-1}(x_0)) = (\varphi - \lambda_0 I)(y_0),$$

имеем

$$\begin{cases} (\varphi - \lambda_0 I)(y_0) = \theta \\ y_0 \neq \theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi(y_0) = \lambda_0 y_0 \\ y_0 \neq \theta \end{cases}.$$

Это и означает, что λ_0 является собственным значением оператора φ , отвечающим собственному вектору y_0 .

Утверждение 3.2. Собственный вектор является корневым вектором высоты 1.

Доказательство. Пусть x_0 — собственный вектор оператора φ , отвечающий собственному значению λ_0 :

$$\begin{cases} \varphi(x_0) = \lambda_0 x_0 \\ x_0 \neq \theta. \end{cases}$$

Перепишем это определение в виде

$$\begin{cases} (\varphi - \lambda_0 I)(x_0) = \theta \\ (\varphi - \lambda_0 I)^0(x_0) \neq \theta \end{cases},$$

следовательно, x_0 – корневой вектор высоты 1. Утверждение 3.2 доказано.

Определение 3.3. Подпространство L линейного пространства V называется *инвариантным* относительно оператора $\varphi \in L(V, V)$, если $\forall x \in L \quad \varphi(x) \in L$.

Пример 3.1. Пусть λ_0 – собственное значение оператора $\varphi \in L(V, V)$, а x_0 – отвечающий ему собственный вектор. Покажем, что $L(x_0) = \{cx_0\}$, $c \in \mathbb{F}$, является одномерным подпространством, инвариантным относительно оператора φ .

Действительно, для любого элемента $x \in L(x_0)$
 $\varphi(x) \equiv \varphi(cx_0) = c\varphi(x_0) = c\lambda_0 x_0 \in L(x_0)$.

Теорема 3.1. Пусть λ_0 – собственное значение оператора $\varphi \in L(V, V)$ геометрической кратности l , а $x_1, x_2, \dots, x_l$ – линейно независимые собственные векторы, отвечающие этому собственному значению. Тогда подпространство

$$L(x_1, x_2, \dots, x_l) = \{c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_l x_l\}, \quad c_i \in \mathbb{F},$$

инвариантно относительно оператора φ , его размерность равна l .

Доказательство. Возьмем произвольный элемент

$$x = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_l x_l \in L(x_1, x_2, \dots, x_l),$$

и покажем, что $\varphi(x) \in L(x_1, x_2, \dots, x_l)$:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \varphi(c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_l x_l) = \\ &= c_1 \varphi(x_1) + c_2 \varphi(x_2) + \dots + c_l \varphi(x_l) = \\ &= c_1 \lambda_0 x_1 + c_2 \lambda_0 x_2 + \dots + c_l \lambda_0 x_l = \\ &= \lambda_0 (c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_l x_l) = \lambda_0 x \in L(x_1, x_2, \dots, x_l). \end{aligned}$$

Поскольку $x_1, \dots, x_l$ — линейно независимые порождающие элементы подпространства $L(x_1, x_2, \dots, x_l)$, то в силу теоремы 1.12 его размерность равна l . Теорема 3.1 доказана.

Определение 3.4. Подпространство $L(x_1, x_2, \dots, x_l)$ называется собственным подпространством оператора φ , отвечающим собственному значению λ_0 , и обозначается V_{λ_0} .

Из определения собственного подпространства V_{λ_0} следует, что его размерность равна геометрической кратности собственного значения λ_0 .

Теорема 3.2. Множество U , состоящее из всех корневых векторов оператора φ , отвечающих собственному значению λ_0 и нулевого элемента θ , является линейным подпространством, инвариантным относительно оператора φ .

Доказательство. Пусть x и y — корневые векторы, отвечающие собственному значению λ_0 , высоты r и s , соответственно. Возьмем $m = \max\{r, s\}$. Вычислим $(\varphi - \lambda_0 I)^m(\alpha x + \beta y)$:

$$\begin{aligned} (\varphi - \lambda_0 I)^m(\alpha x + \beta y) &= \alpha(\varphi - \lambda_0 I)^m(x) + \beta(\varphi - \lambda_0 I)^m(y) = \\ &= \theta + \theta = \theta \end{aligned}$$

(здесь мы воспользовались линейностью оператора $(\varphi - \lambda_0 I)^m$).

Следовательно, $\alpha x + \beta y$ — либо нулевой элемент, либо корневой вектор, отвечающий собственному значению λ_0 , высоты $\leq m$. Это означает, что множество U является подпространством линейного пространства V . Докажем, что U инвариантно относительно оператора φ . Возьмем произвольный элемент $x \in U$ и покажем, что $\varphi(x) \in U$. Если $x = \theta$, то $\varphi(\theta) = \theta$ в силу линейности оператора φ и, следовательно, $\varphi(\theta) \in U$. Пусть теперь $x \neq \theta$. То-

гда он является корневым вектором оператора φ , отвечающим собственному значению λ_0 . Обозначим его высоту r_0 . Запишем $\varphi(x)$ в виде $\varphi(x) = (\varphi - \lambda_0 I + \lambda_0 I)(x) = (\varphi - \lambda_0 I)(x) + \lambda_0 x$. Из определения 3.2 следует, что если $r_0 > 1$, то $(\varphi - \lambda_0 I)(x)$ – корневой вектор высоты $r_0 - 1$, а если $r_0 = 1$, то $(\varphi - \lambda_0 I)(x) = \theta$. В обоих случаях $(\varphi - \lambda_0 I)(x) \in U$. Так как выше было доказано, что U является подпространством и $x \in U$, $(\varphi - \lambda_0 I)(x) \in U$, то $\varphi(x) \in U$. Теорема 3.2 доказана.

Определение 3.5. Линейное подпространство, состоящее из всех корневых векторов оператора φ , отвечающих собственному значению λ_0 и нулевого элемента θ , называется корневым подпространством, отвечающим собственному значению λ_0 , и обозначается V^{λ_0} .

Замечание 3.1. $V_{\lambda_0} \subseteq V^{\lambda_0}$.

Теорема 3.3. Корневые векторы оператора φ , отвечающие собственному значению λ_0 и имеющие разные высоты, линейно независимы.

Доказательство. Пусть $x_1, x_2, \dots, x_r$ – корневые векторы оператора φ , отвечающие собственному значению λ_0 , высоты $m_1, m_2, \dots, m_r$, $m_1 < m_2 < \dots < m_r$, соответственно. Для доказательства линейной независимости этих векторов покажем, что равенство

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_{r-1} x_{r-1} + \alpha_r x_r = \theta \quad (3.1)$$

возможно только в случае $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_r = 0$. Применим к равенству (3.1) оператор $(\varphi - \lambda_0 I)^{m_r-1}$. В силу линейности этого оператора и с учетом того, что $(\varphi - \lambda_0 I)^{m_r-1}(\theta) = \theta$, имеем:

$$\alpha_1 (\varphi - \lambda_0 I)^{m_r-1}(x_1) + \alpha_2 (\varphi - \lambda_0 I)^{m_r-1}(x_2) + \dots$$

$$\dots + \alpha_{r-1}(\varphi - \lambda_0 I)^{m_r-1}(x_{r-1}) + \alpha_r(\varphi - \lambda_0 I)^{m_r-1}(x_r) = \theta.$$

Из определения корневого вектора следует, что $(\varphi - \lambda_0 I)^s(x_i) = \theta$ при $s \geq m_i$, поэтому

$$(\varphi - \lambda_0 I)^{m_r-1}(x_1) = (\varphi - \lambda_0 I)^{m_r-1}(x_2) = \dots = (\varphi - \lambda_0 I)^{m_r-1}(x_{r-1}) = \theta.$$

В результате получаем $\alpha_r(\varphi - \lambda_0 I)^{m_r-1}(x_r) = \theta$, а так как $(\varphi - \lambda_0 I)^{m_r-1}(x_r) \neq \theta$, то $\alpha_r = 0$. Подставляя $\alpha_r = 0$ в (3.1), получаем

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_{r-1} x_{r-1} = \theta. \quad (3.2)$$

Применяя к равенству (3.2) оператор $(\varphi - \lambda_0 I)^{m_{r-1}-1}$ и проводя аналогичные рассуждения, находим $\alpha_{r-1} = 0$. Повторяя эту процедуру (последовательно применяя к получаемому на каждом шаге равенству оператор $(\varphi - \lambda_0 I)^{m_{r-2}-1}, \dots, (\varphi - \lambda_0 I)^{m_1-1}$), находим, что $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_r = 0$. Теорема 3.3 доказана.

Утверждение 3.3. Пусть x_0 – корневой вектор оператора φ , отвечающий собственному значению λ_0 , высоты m , тогда $(\varphi - \lambda_0 I)(x_0), (\varphi - \lambda_0 I)^2(x_0), \dots, (\varphi - \lambda_0 I)^{m-1}(x_0)$ – корневые векторы этого оператора, отвечающие собственному значению λ_0 , высоты $m-1, m-2, \dots, 1$, соответственно.

Доказательство. Рассмотрим, например, элемент $y_0 = (\varphi - \lambda_0 I)(x_0)$. Имеем

$$\begin{aligned} (\varphi - \lambda_0 I)^{m-2}(y_0) &= (\varphi - \lambda_0 I)^{m-2}((\varphi - \lambda_0 I)(x_0)) = \\ &= (\varphi - \lambda_0 I)^{m-1}(x_0) \neq \theta, \\ (\varphi - \lambda_0 I)^{m-1}(y_0) &= (\varphi - \lambda_0 I)^{m-1}((\varphi - \lambda_0 I)(x_0)) = \\ &= (\varphi - \lambda_0 I)^m(x_0) = \theta, \end{aligned}$$

следовательно, элемент y_0 является корневым вектором высоты $m-1$. Для других элементов доказательство аналогичное. Утверждение 3.3 доказано.

Из теоремы 3.3 и утверждения 3.3 следует утверждение 3.4.

Утверждение 3.4. Максимальная высота корневого вектора оператора φ не превосходит размерности пространства V .

Доказательство. Пусть p — максимальная высота корневого вектора. В силу утверждения 3.3 существует p корневых вектора разных высот. Согласно теореме 3.3 они линейно независимы, поэтому их количество не превосходит размерности пространства V . Утверждение доказано.

Теорема 3.4. Пусть λ_0 — собственное значение оператора $\varphi \in L(V, V)$. Пространство V раскладывается в прямую сумму двух инвариантных относительно оператора φ подпространств — корневого подпространства V^{λ_0} и подпространства L , в котором у оператора φ нет собственного значения λ_0 , т.е. $V = V^{\lambda_0} \oplus L$.

Доказательство. Пусть $V^{\lambda_0} = V$. Покажем, что в этом случае $L = \{\theta\}$. Действительно $\{\theta\}$ является подпространством, оба подпространства $\{\theta\}$ и V^{λ_0} инвариантны относительно оператора φ , и $V \equiv V^{\lambda_0} = V^{\lambda_0} \oplus \{\theta\}$.

Пусть теперь $V^{\lambda_0} \neq V$. Обозначим через p максимальную высоту корневого вектора оператора φ , отвечающего собственному значению λ_0 . Тогда для любого $x \in V^{\lambda_0}$ $(\varphi - \lambda_0 I)^p(x) = \theta$, а для любого $x \notin V^{\lambda_0}$ и для любого натурального числа i выполняется условие $(\varphi - \lambda_0 I)^i(x) \neq \theta$. Введем оператор $\psi = (\varphi - \lambda_0 I)^p$. Как отмечалось выше, ψ — линейный оператор. Заметим, что ядро этого оператора $\text{Ker } \psi = \{x \in V : \psi(x) \equiv (\varphi - \lambda_0 I)^p(x) = \theta\}$ совпадает с корневым подпространством V^{λ_0} .

Из теоремы 3.2 следует, что $\text{Ker } \psi \equiv V^{\lambda_0}$ является линейным подпространством, инвариантным относительно оператора φ .

Обозначим через L образ оператора ψ :

$$L = \text{Im } \psi = \{y \in V : \exists x \in V : \psi(x) = y\}.$$

Согласно теореме 2.11 это множество является подпространством. Докажем, что оно инвариантно относительно φ . Пусть y — произвольный элемент из L . Так как $y \in L \equiv \text{Im } \psi$, то найдется $x \in V$, для которого $\psi(x) = y$. Покажем, что элемент $\varphi(x)$ является прообразом $\varphi(y)$:

$$\varphi(y) = \varphi(\psi(x)) = \varphi((\varphi - \lambda_0 I)^p x) = (\varphi - \lambda_0 I)^p (\varphi(x)) = \psi(\varphi(x))$$

(здесь мы воспользовались тем, что операторы φ и ψ коммутируют, т.е. $\varphi\psi = \psi\varphi$). Это означает, что $\varphi(y) \in L$. Следовательно, L является подпространством, инвариантным относительно φ .

Рассмотрим сумму $V^{\lambda_0} + L$ подпространств V^{λ_0} и L . Докажем, что эта сумма прямая. Напоминаем, что согласно критерию прямой суммы (теорема 1.15), сумма $V^{\lambda_0} + L$ — прямая тогда и только тогда, когда $V^{\lambda_0} \cap L = \{\theta\}$. Будем доказывать от противного. Пусть $\exists x \neq \theta : x \in V^{\lambda_0} \equiv \text{Ker } \psi$, $x \in L = \text{Im } \psi$. Так как $x \in V^{\lambda_0}$, то $(\varphi - \lambda_0 I)^p x = \theta$, а так как $x \in \text{Im } \psi$, то $\exists \tilde{x} \in V : x = \psi(\tilde{x}) \equiv (\varphi - \lambda_0 I)^p \tilde{x}$. Элемент $\tilde{x}$ удовлетворяет условиям: $(\varphi - \lambda_0 I)^p \tilde{x} \equiv x \neq \theta$, $(\varphi - \lambda_0 I)^{2p} \tilde{x} \equiv (\varphi - \lambda_0 I)^p x = \theta$. Это означает, что $\tilde{x}$ — корневой вектор высоты больше, чем p , а это противоречит тому, что p — максимальная высота корневого вектора. Следовательно, $V^{\lambda_0} \cap L = \{\theta\}$. Таким образом, согласно теореме 1.15, сумма $V^{\lambda_0} + L$ прямая. Кроме того, из условия $V^{\lambda_0} \cap L = \{\theta\}$ вытекает, что подпространство L не содержит соб-

Следовательно, в базисе ε матрица оператора φ имеет блочно-диагональный вид

$$A_{\varphi}^{\varepsilon} = \begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix},$$

где $A_i = \begin{pmatrix} a_{11}^i & \dots & a_{1l_i}^i \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{l_i 1}^i & \dots & a_{l_i l_i}^i \end{pmatrix}, i = 1, 2.$

Запишем характеристический многочлен оператора φ :

$$\begin{aligned} P_n(\lambda) &= \det(A_{\varphi}^{\varepsilon} - \lambda E) = \begin{vmatrix} A_1 - \lambda E_1 & O \\ O & A_2 - \lambda E_2 \end{vmatrix} = \\ &= \det(A_1 - \lambda E_1) \cdot \det(A_2 - \lambda E_2), \end{aligned}$$

здесь E_i – единичная матрица порядка l_i , $i = 1, 2$.

Так как в подпространстве L у оператора φ нет собственного значения λ_0 , то $\det(A_2 - \lambda_0 E_2) \neq 0$. Следовательно, λ_0 является корнем многочлена $\det(A_1 - \lambda E_1)$, имеющего степень l_1 .

С другой стороны, так как алгебраическая кратность λ_0 равна n , то характеристический многочлен оператора φ имеет вид

$$P_n(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_0)^n.$$

Тогда $l_1 \geq n$, а так как $l_1 \leq n$, то $l_1 = n$ и, следовательно, $l_2 = 0$. Получили противоречие. Значит $L = \{\theta\}$, а $V = V^{\lambda_0}$.

Пример 3.2. Найдем корневые подпространства линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение. Составим характеристическое уравнение

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 3 & 1 \\ -1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \dots = (2-\lambda)^3 = 0.$$

Следовательно, оператор имеет только одно собственное значение $\lambda_0 = 2$, и корневое подпространство, отвечающее этому собственному значению, совпадает со всем пространством $V^{\lambda_0} = V$.

Теорема 3.5 (о разложении пространства в прямую сумму корневых подпространств). Пусть характеристический многочлен $P_n(\lambda)$ оператора $\varphi \in L(V, V)$ имеет вид

$$P_n(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)^{n_1} (\lambda - \lambda_2)^{n_2} \dots (\lambda - \lambda_k)^{n_k}, \quad n_1 + \dots + n_k = n,$$

т.е. $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ – собственные значения оператора φ , а $n_1, n_2, \dots, n_k$ – их алгебраические кратности. Тогда пространство V разлагается в прямую сумму корневых подпространств $V^{\lambda_1}, V^{\lambda_2}, \dots, V^{\lambda_k}$:

$$V = V^{\lambda_1} \oplus V^{\lambda_2} \oplus \dots \oplus V^{\lambda_k},$$

причем $\dim V^{\lambda_i} = n_i, i = 1, \dots, k$.

Доказательство. По теореме 3.4 пространство V раскладывается в прямую сумму двух инвариантных относительно оператора φ подпространств – корневого подпространства V^{λ_1} и подпространства L_1 , в котором φ не имеет собственного значения λ_1 :

$$V = V^{\lambda_1} \oplus L_1.$$

Разложим L_1 в прямую сумму двух инвариантных относительно оператора φ подпространств – корневого подпространства V^{λ_2} и подпространства L_2 , в котором оператор φ не имеет собственных значений λ_1 и λ_2 : $L_1 = V^{\lambda_2} \oplus L_2$. Тогда $V = V^{\lambda_1} \oplus V^{\lambda_2} \oplus L_2$. Повторяя эту процедуру k раз, получим

Здесь E_i – единичная матрица порядка l_i , $i = 1, 2, \dots, k+1$. Так как в подпространствах $V^{\lambda_2}, \dots, V^{\lambda_k}$, L_k нет собственного значения λ_1 , то $\det(A_i - \lambda_1 E_i) \neq 0$ при $i = 2, \dots, k+1$. Следовательно, λ_1 является корнем многочлена $\det(A_1 - \lambda E_1)$, имеющего степень l_1 . По условию теоремы алгебраическая кратность λ_1 равна n_1 , поэтому степень l_1 многочлена $\det(A_1 - \lambda E_1)$ должна быть больше или равна n_1 , т.е. $l_1 \geq n_1$. Проводя аналогичные рассуждения для подпространств $V^{\lambda_2}, \dots, V^{\lambda_k}$, получим $l_i \geq n_i$, $i = 2, \dots, k$. Отсюда следует, что $l_1 + l_2 + \dots + l_k \geq n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$. С другой стороны, $l_1 + l_2 + \dots + l_k + l_{k+1} = n$.

Это возможно тогда и только тогда, когда $l_{k+1} = 0$, $l_1 = n_1$, $l_2 = n_2$, ..., $l_k = n_k$. Откуда следует, что $\dim V^{\lambda_i} = n_i$, $i = 1, \dots, k$, $L_k = \{\theta\}$. Теорема 3.5 доказана.

Следствие. Максимальная высота p корневого вектора оператора φ , отвечающего собственному значению λ_0 , не превосходит его алгебраической кратности n_0 .

Доказательство. Пусть x_0 – корневой вектор оператора φ , отвечающий собственному значению λ_0 , высоты p , тогда по теореме 3.3 $x_0, (\varphi - \lambda_0 I)(x_0), (\varphi - \lambda_0 I)^2(x_0), \dots, (\varphi - \lambda_0 I)^{p-1}(x_0)$ – p линейно независимых корневых векторов оператора φ , принадлежащих корневому подпространству V^{λ_0} размерности n_0 . Из определения размерности подпространства следует, что $p \leq n_0$. Следствие доказано.

Займемся изучением отдельного корневого подпространства линейного оператора φ . Пусть λ_0 – собственное значение оператора φ алгебраической кратности n_0 , V^{λ_0} – отвечающее ему корневое подпространство, $\dim V^{\lambda_0} = n_0$. Выберем в V^{λ_0} базис ε .

Обозначим через A матрицу оператора φ в этом базисе, тогда

$$V^{\lambda_0} \equiv \text{Ker}(\varphi - \lambda_0 I)^p = \text{Ker}(A - \lambda_0 E)^p,$$

где p – пока неизвестная нам максимальная высота корневого вектора ($p \leq n_0$), отвечающего собственному значению λ_0 .

Напомним, что если в линейном пространстве выбран и зафиксирован базис, то мы отождествляем элемент x с его координатами ξ в этом базисе. Запишем определение $\text{Ker}(A - \lambda_0 E)^p$:

$$\text{Ker}(A - \lambda_0 E)^p = \left\{ \underset{\downarrow}{\xi} : (A - \lambda_0 E)^p \underset{\downarrow}{\xi} = \underset{\downarrow}{0} \right\}.$$

Таким образом, корневое подпространство V^{λ_0} является пространством решений однородной системы линейных алгебраических уравнений $(A - \lambda_0 E)^p \underset{\downarrow}{\xi} = \underset{\downarrow}{0}$, где $p \leq n_0$. Так как размерность пространства решений однородной системы равна $n - \text{rang}(A - \lambda_0 E)^p$, то число p находится из условий

$$\begin{cases} n - \text{rang}(A - \lambda_0 E)^{p-1} < n_0 \\ n - \text{rang}(A - \lambda_0 E)^p = n_0. \end{cases}$$

Заметим, что пространства

$$\text{Ker}(A - \lambda_0 E)^i = \left\{ \underset{\downarrow}{\xi} : (A - \lambda_0 E)^i \underset{\downarrow}{\xi} = \underset{\downarrow}{0} \right\}, \quad i = 1, \dots, p-1,$$

являются подпространствами корневых векторов оператора φ , отвечающими собственному значению λ_0 , высотами меньше или равными 1, меньше или равными 2, ..., меньше или равными $p-1$, соответственно. Следовательно, имеет место вложение

$$\begin{aligned} \text{Ker}(A - \lambda_0 E)^1 &\subset \text{Ker}(A - \lambda_0 E)^2 \subset \dots \\ \dots &\subset \text{Ker}(A - \lambda_0 E)^{p-1} \subset \text{Ker}(A - \lambda_0 E)^p = V^{\lambda_0}. \end{aligned}$$

Здесь $\text{Ker}(A - \lambda_0 E)^1 \equiv \text{Ker}(A - \lambda_0 E) = \left\{ \xi : (A - \lambda_0 E) \xi = 0 \right\}$ – собственное подпространство V_{λ_0} , отвечающее собственному значению λ_0 .

Способы практического нахождения корневых векторов

Рассмотрим два способа нахождения корневых векторов и корневых подпространств линейного оператора φ , матрица которого в некотором базисе равна A .

1 способ

1. Находим все собственные значения оператора φ (матрицы A) и их алгебраические кратности.

2. Для каждого собственного значения λ_i алгебраической кратности n_i ищем отвечающее ему корневое подпространство V^{λ_i} . Для этого возводим матрицу $A - \lambda_i E$ в степень до тех пор, пока $n - \text{rang}(A - \lambda_i E)^p$ не станет равной n_i . В результате получаем p – максимальную высоту корневого вектора ($p \leq n_i$), отвечающего собственному значению λ_i . Решаем однородную систему линейных алгебраических уравнений $(A - \lambda_i E)^p \xi = 0$ и находим фундаментальную систему решений $\{e_1^i, \dots, e_{n_i}^i\}$. Эти решения образуют базис корневого подпространства V^{λ_i} , а само корневое подпространство V^{λ_i} является линейной оболочкой фундаментальной системы решений $\{e_1^i, \dots, e_{n_i}^i\} - V^{\lambda_i} = L(e_1^i, \dots, e_{n_i}^i)$.

3. Если требуется найти высоты базисных векторов $e_1^i, \dots, e_{n_i}^i$, то ищем высоту каждого базисного вектора e_j^i следующим способом:

вычисляем последовательно $(A - \lambda_i E) \underset{\downarrow}{e_j^i}$, $(A - \lambda_i E)^2 \underset{\downarrow}{e_j^i}$ ($\underset{\downarrow}{e_j^i}$ – столбец координат вектора $\underset{\downarrow}{e_j^i}$) и т.д., и находим s такое, что $(A - \lambda_i E)^{s-1} \underset{\downarrow}{e_j^i} \neq 0$, а $(A - \lambda_i E)^s \underset{\downarrow}{e_j^i} = 0$; следовательно, s – искомая высота корневого вектора $\underset{\downarrow}{e_j^i}$.

2 способ

1. Находим все собственные значения оператора φ (матрицы A) и их алгебраические кратности.

2. Для каждого собственного значения λ_i алгебраические кратности n_i :

1) решаем однородную систему линейных алгебраических уравнений $(A - \lambda_i E) \underset{\downarrow}{\xi} = \underset{\downarrow}{0}$ и находим фундаментальную систему решений $\{\underset{\downarrow}{e_1^i}, \dots, \underset{\downarrow}{e_{l_i}^i}\}$. Эти решения являются линейно независимыми собственными векторами оператора φ , отвечающими собственному значению λ_i , т.е. корневыми векторами высоты 1. Их количество равно геометрической кратности λ_i ;

2) решаем однородную систему линейных алгебраических уравнений $(A - \lambda_i E)^2 \underset{\downarrow}{\xi} = \underset{\downarrow}{0}$ и дополняем ранее найденную систему линейно независимых векторов $\underset{\downarrow}{e_1^i}, \dots, \underset{\downarrow}{e_{l_i}^i}$ векторами – решениями $\underset{\downarrow}{e_{l_i+1}^i}, \dots, \underset{\downarrow}{e_{g_i}^i}$, линейно независимыми с найденными ранее, при этом векторы $\underset{\downarrow}{e_{l_i+1}^i}, \dots, \underset{\downarrow}{e_{g_i}^i}$ являются линейно независимыми корневыми векторами высоты 2;

3) повторяем эту процедуру для однородной системы линейных алгебраических уравнений $(A - \lambda_i E)^3 \underset{\downarrow}{\xi} = \underset{\downarrow}{0}$, и т.д., до тех пор, пока общее количество линейно независимых решений не достигнет ал-

гебраической кратности n_i собственного значения λ_i – размерности пространства V^{λ_i} . Количество шагов не превосходит n_i .

В результате получаем базис $e_1^i, \dots, e_{l_i}^i, e_{l_i+1}^i, \dots, e_{n_i}^i$ корневого подпространства V^{λ_i} , при этом для каждого вектора оказывается найденной его высота.

Отметим, что первый способ проще логически, но может потребовать большего количества вычислений, чем второй способ, который требует меньшей вычислительной работы, но в нем на каждом шагу надо следить за тем, чтобы вновь выбранные векторы фундаментальной системы решений образовывали с ранее найденными векторами линейно независимую систему. Второй способ понадобится при нахождении жорданова базиса.

Пример 3.3. Для заданной матрицы найдем корневые подпространства и укажем в них какой-либо базис. Для векторов базиса (как для корневых) найдем их высоту.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -1 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Решение. Составим характеристическое уравнение

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 3 & 1 \\ -1 & -5-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \dots = -(3+\lambda)^3 = 0.$$

Следовательно, оператор имеет только одно собственное значение $\lambda_0 = -3$ алгебраической кратности $n_0 = 3$, а корневое подпространство, отвечающее этому собственному значению, совпадает со всем пространством $V^{\lambda_0} = V$, $\dim V^{\lambda_0} = 3$.

1 способ. Найдем ранг матрицы $A + 3E$:

$$A + 3E = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $\text{rang}(A+3E) = 2$, а $n - \text{rang}(A+3E) = 3 - 2 \neq 3$.

Вычислим матрицу $(A+3E)^2$ и найдем ее ранг

$$(A+3E)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Имеем $\text{rang}(A+3E)^2 = 1$ и $n - \text{rang}(A+3E)^2 = 3 - 1 \neq 3$. Это означает, что максимальная высота корневого вектора p больше 2, а так как она меньше или равна 3, получаем, что $p = 3$. Следовательно, $\text{rang}(A+3E)^3 = 0$, т.е. $(A+3E)^3$ – нулевая матрица. Проверим это:

$$(A+3E)^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Фундаментальной системой решений однородной системы линейных алгебраических уравнений с нулевой матрицей системы являются любые три линейно независимых вектора. Возьмем, например, $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$. Найдем их высоты:

$$\begin{aligned} (A+3E)e_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ (A+3E)^2 e_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \\ (A+3E)^3 e_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

следовательно, высота вектора $e_1 = (1, 0, 0)$ равна 3. Аналогично,

$$(A+3E)e_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$(A+3E)^2 e_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$(A+3E)^3 e_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$(A+3E)e_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$(A+3E)^2 e_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$(A+3E)^3 e_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

высота векторов $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$ также равна 3.

Заметим, что в данном примере $V^{\lambda_0} = V$. Поэтому, если нам не нужно находить максимальную высоту корневого вектора, то в качестве базиса $V^{\lambda_0} = V$ можно было сразу взять любые три линейно независимых вектора и найти их высоты.

2 способ

1) Решим однородную систему линейных алгебраических уравнений

$$(A+3E)\underset{\downarrow}{\xi}=\underset{\downarrow}{0}, \quad \underset{\downarrow}{\xi} \equiv \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}$$

методом Гаусса. Приведем матрицу системы к ступенчатому виду:

$$(A+3E) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем $\begin{cases} \xi_1 - 2\xi_3 = 0 \\ \xi_2 + \xi_3 = 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} \xi_1 = 2\xi_3 \\ \xi_2 = -\xi_3 \end{cases}$. Здесь ξ_3 –

свободная переменная. Положим $\xi_3 = 1$, получаем $e_1 = (2, -1, 1)$ – собственный вектор оператора φ , отвечающий собственному значению $\lambda_0 = -3$, т.е. корневой вектор высоты 1. Так как мы получили только один линейно независимый собственный вектор, то геометрическая кратность собственного значения $\lambda_0 = -3$ равна 1.

2) Решим однородную систему линейных алгебраических уравнений $(A+3E)\underset{\downarrow}{\xi}=\underset{\downarrow}{0}$ методом Гаусса. Приведем матрицу системы к сильно ступенчатому виду:

$$(A+3E)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда получим $\xi_1 + \xi_2 - \xi_3 = 0$, или $\xi_1 = -\xi_2 + \xi_3$. Имеем две свободные переменные: ξ_2 и ξ_3 . Фундаментальная система решений этой системы состоит из двух решений. Одно из них берем $e_1 = (2, -1, 1)$ – решение системы, полученной на предыдущем шаге. У этого вектора $\xi_3 = 1$. Чтобы получить линейно независимый с ним вектор высоты 2, положим свободную переменную $\xi_3 = 0$.

Тогда, выбрав $\xi_2 = 1$, получаем $e_2 = (-1, 1, 0)$ – корневой вектор высоты 2.

3) $(A + 3E)^3$ – нулевая матрица. Фундаментальной системой решений однородной системы линейных алгебраических уравнений с нулевой матрицей системы являются любые три линейно независимых вектора. Нужно дополнить векторы $e_1 = (2, -1, 1)$ и $e_2 = (-1, 1, 0)$ линейно независимым с ними вектором. Выбрав $\xi_3 = 0$, $\xi_2 = 0$, $\xi_1 = 1$, получаем вектор $e_3 = (1, 0, 0)$ – корневой вектор высоты 3.

Пример 3.4. Для заданной матрицы найти корневые подпространства и указать в них какой-либо базис. Для векторов базиса (как для корневых) найти высоту.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 1 & -7 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & -8 & 2 & 2 \\ -1 & -4 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Решение. Составим характеристическое уравнение:

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 5 & 1 & -7 \\ -1 & -\lambda & 0 & -1 \\ -2 & -8 & 2-\lambda & 2 \\ -1 & -4 & -1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = \dots = (4 - \lambda)^2 (1 + \lambda)^2 = 0.$$

Оператор имеет два собственных значения: $\lambda_1 = 4$ и $\lambda_2 = -1$ алгебраической кратности $n_1 = n_2 = 2$. Поэтому $V = V^{\lambda_1} \oplus V^{\lambda_2}$, здесь V^{λ_1} и V^{λ_2} – корневые подпространства, отвечающие собственным значениям λ_1 и λ_2 , и $\dim V^{\lambda_1} = \dim V^{\lambda_2} = 2$.

1 способ

Рассмотрим сначала собственное значение $\lambda_1 = 4$. Найдем ранг матрицы $A - 4E$:

$$\begin{aligned}
 A - 4E &= \begin{pmatrix} -5 & 5 & 1 & -7 \\ -1 & -4 & 0 & -1 \\ -2 & -8 & -2 & 2 \\ -1 & -4 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -5 & 5 & 1 & -7 \\ -1 & -4 & 0 & -1 \\ -1 & -4 & -1 & 1 \\ -1 & -4 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \\
 &\sim \begin{pmatrix} -1 & -4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 25 & 6 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Следовательно, $\text{rang}(A - 4E) = 3$ и тогда, очевидно,

$$n - \text{rang}(A - 4E) = 4 - 3 = 1 \neq \dim V^{\lambda_1} = 2.$$

Это означает, что максимальная высота корневого вектора p больше 1, а так как она меньше или равна 2, то $p = 2$. Вычислим матрицу $(A - 4E)^2$:

$$(A - 4E)^2 = \begin{pmatrix} 25 & -25 & 0 & 25 \\ 10 & 15 & 0 & 10 \\ 20 & 30 & 0 & 20 \\ 10 & 15 & 0 & 10 \end{pmatrix};$$

и решим однородную систему $(A - 4E)^2 \underset{\downarrow}{\xi} = 0$ методом Гаусса:

$$(A - 4E)^2 \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем $\begin{cases} \xi_1 + \xi_4 = 0 \\ \xi_2 = 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} \xi_1 = -\xi_4 \\ \xi_2 = 0 \end{cases}$. Выбирая сво-

бодные переменные ξ_3 и ξ_4 — сначала $\xi_3 = 1, \xi_4 = 0$, а затем $\xi_3 = 0, \xi_4 = 1$ — получаем два линейно независимых решения этой

системы: $e_1^1 = (0, 0, 1, 0)$ и $e_2^1 = (-1, 0, 0, 1)$, которые образуют базис

V^{λ_1} . Найдем их высоты:

$$(A - 4E)e_{\downarrow 1}^1 = \begin{pmatrix} -5 & 5 & 1 & -7 \\ -1 & -4 & 0 & -1 \\ -2 & -8 & -4 & 2 \\ -1 & -4 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} \neq 0_{\downarrow},$$

$$(A - 4E)e_{\downarrow 2}^1 = \begin{pmatrix} -5 & 5 & 1 & -7 \\ -1 & -4 & 0 & -1 \\ -2 & -8 & -4 & 2 \\ -1 & -4 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \neq 0_{\downarrow}.$$

Так как $e_{\downarrow 1}^1$ и $e_{\downarrow 2}^1$ не являются собственными векторами, т.е. корневыми векторами высоты 1, то они являются корневыми векторами высоты 2.

Теперь рассмотрим собственное значение $\lambda_2 = -1$. Найдем ранг матрицы $A+E$:

$$A+E = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 1 & -7 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & -8 & 3 & 2 \\ -1 & -4 & -1 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 1 & -7 \\ 0 & -10 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & -1 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 5 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

т.е. $\text{rang}(A+E) = 3$, а $n - \text{rang}(A+E) = 4 - 3 = 1 \neq \dim V^{\lambda_2} = 2$.

Это означает, что максимальная высота корневого вектора p больше 1, а так как она меньше или равна $\dim V^{\lambda_2} = 2$, то $p = 2$.

Вычислим матрицу $(A+E)^2$:

$$(A+E)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 25 & 10 & -45 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -50 & 5 & 40 \\ 0 & -25 & -10 & 45 \end{pmatrix},$$

и решим однородную систему $(A+E)^2 \underset{\downarrow}{\xi} = \underset{\downarrow}{0}$ методом Гаусса:

$$\begin{aligned} (A+E)^2 &\sim \begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 1 & 8 \\ 0 & -5 & -2 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 & -9 \\ 0 & -10 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \\ &\sim \begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 & -9 \\ 0 & 0 & 5 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \\ &\sim \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем $\begin{cases} \xi_2 - \xi_4 = 0 \\ \xi_3 - 2\xi_4 = 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} \xi_2 = \xi_4 \\ \xi_3 = 2\xi_4 \end{cases}$. Выбирая сво-

бодные переменные ξ_1 и ξ_4 — сначала $\xi_1 = 1$, $\xi_4 = 0$, а затем $\xi_1 = 0$, $\xi_4 = 1$ — получаем два линейно независимых решения этой системы: $e_1^2 = (1, 0, 0, 0)$ и $e_2^2 = (0, 1, 2, 1)$, которые образуют базис V^{λ_2} . Найдем их высоты:

$$(A+E)e_{\downarrow 1}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 1 & -7 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & -8 & 3 & 2 \\ -1 & -4 & -1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \neq 0_{\downarrow},$$

$$(A+E)e_{\downarrow 2}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 1 & -7 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & -8 & 3 & 2 \\ -1 & -4 & -1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0_{\downarrow}.$$

Таким образом, $e_{\downarrow 1}^2$ является корневым вектором высоты 2, а $e_{\downarrow 2}^2$ – собственным вектором, т.е. корневым вектором высоты 1.

2 способ

Рассмотрим сначала собственное значение $\lambda_1 = 4$.

1) Решим однородную систему линейных алгебраических уравнений $(A - 4E)e_{\downarrow}^{\xi} = 0$ методом Гаусса. Выше мы нашли, что

$$(A - 4E) \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда имеем $\begin{cases} \xi_1 + \xi_4 = 0 \\ \xi_2 = 0 \\ \xi_3 - 2\xi_4 = 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} \xi_1 = -\xi_4 \\ \xi_2 = 0 \\ \xi_3 = 2\xi_4 \end{cases}$. Выбрав свободную

переменную $\xi_4 = 1$, получаем $e_1^1 = (-1, 0, 2, 1)$ – собственный вектор оператора φ , отвечающий собственному значению $\lambda_1 = 4$, т.е. корневой вектор высоты 1. Так как мы получили только один линейно независимый собственный вектор, то геометрическая кратность собственного значения $\lambda_1 = 4$ равна 1.

2) Решим однородную систему линейных алгебраических уравнений $(A - 4E) \underset{\downarrow}{\xi} = \underset{\downarrow}{0}$ методом Гаусса. Выше, рассматривая 1-й

способ, мы уже решали эту систему и получили $\begin{cases} \xi_1 = -\xi_4 \\ \xi_2 = 0 \end{cases}$.

Так как у нас две свободные переменные $-\xi_3$ и ξ_4 , то фундаментальная система решений этой системы состоит из двух линейно независимых решений. Одно из них берем $e_1^1 = (-1, 0, 2, 1)$ – решение системы, полученной на предыдущем шаге (ему отвечают свободные переменные $\xi_3 = 2, \xi_4 = 1$). Это корневой вектор высоты 1. Чтобы получить второе решение, линейно независимое с первым, положим $\xi_3 = 1, \xi_4 = 0$. Тогда $e_2^1 = (0, 0, 1, 0)$. Это корневой вектор высоты 2. Векторы e_1^1 и e_2^1 образуют базис V^{λ_1} .

Теперь рассмотрим собственное значение $\lambda_2 = -1$.

1) Решим однородную систему линейных алгебраических уравнений $(A + E) \underset{\downarrow}{\xi} = \underset{\downarrow}{0}$ методом Гаусса. Выше мы нашли, что

$$(A + E) \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Отсюда имеем } \begin{cases} \xi_1 = 0 \\ \xi_2 - \xi_4 = 0 \\ \xi_3 - 2\xi_4 = 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \xi_1 = 0 \\ \xi_2 = \xi_4 \\ \xi_3 = 2\xi_4 \end{cases}.$$

Выбрав свободную переменную $\xi_4 = 1$, получим $e_1^2 = (0, 1, 2, 1)$ – собственный вектор оператора φ , отвечающий собственному значению $\lambda_2 = -1$, т.е. корневой вектор высоты 1. Так как мы полу-

чили только один линейно независимый собственный вектор, то геометрическая кратность собственного значения $\lambda_2 = -1$ равна 1.

2) Решим однородную систему линейных алгебраических уравнений $(A + E)^2 \xi = 0$ методом Гаусса. Выше, рассматривая 1 спо-

соб, мы уже решали эту систему и получили $\begin{cases} \xi_2 = \xi_4 \\ \xi_3 = 2\xi_4 \end{cases}$.

Так как нас две свободные переменные $-\xi_1$ и ξ_4 , то, фундаментальная система решений этой системы состоит из двух линейно независимых решений. Одно из них берем $e_1^2 = (0, 1, 2, 1)$ – решение системы, полученной на предыдущем шаге (ему отвечают свободные переменные $\xi_1 = 0, \xi_4 = 1$). Это корневой вектор высоты 1. Чтобы получить второе решение, линейно независимое с первым, положим $\xi_1 = 1, \xi_4 = 0$. Тогда $e_2^2 = (1, 0, 0, 0)$ – корневой вектор высоты 2. Векторы e_1^2 и e_2^2 образуют базис V^{λ_2} . Согласно теореме 3.5 $V = V^{\lambda_1} \oplus V^{\lambda_2}$, поэтому $\mathcal{E} = \{e_1^1, e_2^1, e_1^2, e_2^2\}$ образует базис V . В силу инвариантности подпространств V^{λ_1} и V^{λ_2} относительно φ , в базисе $\mathcal{E}$ матрица оператора φ имеет блочно-диагональный вид:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}.$$

Упражнение. Найти матрицу оператора φ в базисе, построенном первым и вторым способом.

Возникает вопрос, можно ли в каждом корневом подпространстве научиться выбирать базис так, чтобы матрица оператора имела еще более простой вид? Ответ на этот вопрос будет дан в следующих параграфах.

3.2. Циклические подпространства.

Жорданова нормальная форма матрицы линейного оператора

Пусть элемент x_0 является корневым вектором оператора $\varphi \in L(V, V)$ высоты m , отвечающим собственному значению λ_0 .

Определение 3.6. Система элементов $(\varphi - \lambda_0 I)^{m-1}(x_0)$, $(\varphi - \lambda_0 I)^{m-2}(x_0)$, ..., $(\varphi - \lambda_0 I)(x_0)$, x_0 называется жордановой цепочкой, порожденной элементом x_0 .

Положим $e_1 = (\varphi - \lambda_0 I)^{m-1}(x_0)$, $e_2 = (\varphi - \lambda_0 I)^{m-2}(x_0)$, ..., $e_m = x_0$. Согласно утверждению 3.3 элементы $e_1, e_2, \dots, e_m$ жордановой цепочки являются корневыми векторами высоты 1, 2, ..., m , соответственно. В силу теоремы 3.3 они линейно независимы.

Заметим, что первый элемент e_1 жордановой цепочки имеет высоту 1, т.е. является собственным вектором оператора φ , отвечающим собственному значению λ_0 .

Определение 3.7. Векторы $e_2, \dots, e_m$ жордановой цепочки называются, соответственно, присоединенными векторами 1-го, 2-го, ..., $(m-1)$ -го порядка к собственному вектору e_1 .

Выразим каждый предыдущий вектор жордановой цепочки через последующий вектор:

$$\begin{aligned} e_{i-1} &= (\varphi - \lambda_0 I)^{m-i+1}(x_0) = (\varphi - \lambda_0 I) \left((\varphi - \lambda_0 I)^{m-i}(x_0) \right) = \\ &= (\varphi - \lambda_0 I)(e_i), \quad i = 2, 3, \dots, m. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Перепишем формулы (3.3) в виде

$$(\varphi - \lambda_0 I)(e_i) = e_{i-1}, \quad i = 2, 3, \dots, m. \quad (3.4)$$

Кроме того, имеет место равенство

$$(\varphi - \lambda_0 I)(e_1) = \theta. \quad (3.5)$$

Получаем, что векторы жордановой цепочки удовлетворяют соотношениям

$$\varphi(e_1) = \lambda_0 e_1, \quad \varphi(e_i) = e_{i-1} + \lambda_0 e_i, \quad i = 2, 3, \dots, m. \quad (3.6)$$

Определение 3.8. Линейная оболочка элементов $e_1, e_2, \dots, e_m$ жордановой цепочки называется циклическим подпространством, порожденным собственным вектором e_1 .

В силу линейной независимости элементы $e_1, e_2, \dots, e_m$ образуют базис циклического подпространства. Обозначим его $[e_1] = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$.

Определение 3.9. Базис $[e_1]$ циклического подпространства $L([e_1])$ называется циклическим базисом.

Утверждение 3.5. Циклическое подпространство $L([e_1])$ инвариантно относительно оператора φ .

Доказательство. Возьмем произвольный элемент $x \in L([e_1])$:

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_m e_m,$$

и проверим, что $\varphi(x) \in L([e_1])$:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= (\varphi - \lambda_0 I + \lambda_0 I)(x) = (\varphi - \lambda_0 I)(x) + \lambda_0 I(x) = \\ &= (\varphi - \lambda_0 I)(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_m e_m) + \lambda_0(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_m e_m) = \\ &= \alpha_1(\varphi - \lambda_0 I)(e_1) + \alpha_2(\varphi - \lambda_0 I)(e_2) + \dots \\ &\dots + \alpha_m(\varphi - \lambda_0 I)(e_m) + \lambda_0 \alpha_1 e_1 + \lambda_0 \alpha_2 e_2 + \dots + \lambda_0 \alpha_m e_m = \\ &= \theta + \alpha_2 e_1 + \dots + \alpha_m e_{m-1} + \lambda_0 \alpha_1 e_1 + \lambda_0 \alpha_2 e_2 + \dots + \lambda_0 \alpha_m e_m \in L([e_1]). \end{aligned}$$

В процессе вычислений мы воспользовались формулами (3.4) и (3.5). Утверждение 3.5 доказано.

Утверждение 3.6. В циклическом подпространстве в базисе $[e_1]$ матрица оператора φ имеет вид

$$J_0 = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

Доказательство. Элементы $e_1, e_2, \dots, e_m$ жордановой цепочки $[e_1] = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ удовлетворяют соотношениям: $\varphi(e_1) = \lambda_0 e_1$, $\varphi(e_2) = e_1 + \lambda_0 e_2$, $\dots$, $\varphi(e_m) = e_{m-1} + \lambda_0 e_m$. Записывая координаты образов базисных векторов $\varphi(e_1), \varphi(e_2), \dots, \varphi(e_m)$ по столбцам, получаем матрицу J_0 оператора φ в базисе $[e_1]$. Утверждение 3.6 доказано.

Определение 3.10. Матрица вида (3.7), где $\lambda_0 \in \mathbb{F}$ – некоторое число, называется жордановой клеткой.

Имеет место и обратное утверждение.

Утверждение 3.7. Если матрица линейного оператора φ в некотором базисе является жордановой клеткой, то этот базис циклический, причем на диагонали матрицы стоит собственное значение оператора φ .

Доказательство. Пусть в базисе $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ матрица оператора φ имеет вид (3.7). Вычислим характеристический многочлен этого оператора: $P_m(\lambda) = \det(J_0 - \lambda E) = (\lambda_0 - \lambda)^m$. Следовательно, λ_0 является собственным значением оператора φ . Используя определение матрицы линейного оператора, запишем образы базисных элементов:

$$\varphi(e_1) = \lambda_0 e_1, \quad \varphi(e_2) = e_1 + \lambda_0 e_2, \dots, \quad \varphi(e_m) = e_{m-1} + \lambda_0 e_m. \quad (3.8)$$

Равенства (3.8) можно переписать в виде (3.4), (3.5):

$$(\varphi - \lambda_0 I)(e_1) = \theta,$$

$$(\varphi - \lambda_0 I)(e_i) = e_{i-1}, \quad i = 2, 3, \dots, m.$$

Следовательно, элементы $e_1, e_2, \dots, e_m$ образуют циклический базис.

Утверждение 3.7 доказано.

Определение 3.11. Матрица J вида

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & O & \dots & O \\ O & J_2 & \dots & O \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ O & O & \dots & J_d \end{pmatrix} = \text{diag}(J_1, J_2, \dots, J_d), \quad (3.9)$$

где

$$J_i = \begin{pmatrix} \alpha_i & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_i & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_i \end{pmatrix}, \quad \alpha_i \in \mathbf{F}, \quad -$$

жорданова клетка порядка m_i , $i = 1, \dots, d$, $m_1 + m_2 + \dots + m_d = n$, называется жордановой матрицей.

Приведем пример жордановой матрицы порядка 5

$$J = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \text{diag}(J_1, J_2, J_3).$$

Здесь $J_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $J_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $J_3 = (3)$.

Определение 3.12. Базис, в котором матрица линейного оператора $\varphi \in L(V, V)$ имеет вид (3.9), называется жордановым базисом, а сама матрица называется жордановой нормальной формой матрицы оператора φ .

Теорема 3.6. Матрица линейного оператора $\varphi \in L(V, V)$ имеет жорданову нормальную форму тогда и только тогда, когда базис, в котором она задана, является объединением жордановых цепочек, причем на диагонали стоят собственные значения этого оператора.

Доказательство. Необходимость. Пусть в базисе $\varepsilon = \{e_1^1, \dots, e_{m_1}^1, e_1^2, \dots, e_{m_2}^2, e_1^d, \dots, e_{m_d}^d\}$, $m_1 + m_2 + \dots + m_d = n$, матрица оператора φ имеет вид (3.9). Вычислим характеристический многочлен оператора φ :

$$\begin{aligned} P_n(\lambda) &= \det(J - \lambda E) = \\ &= \det(J_1 - \lambda E_1) \cdot \det(J_2 - \lambda E_2) \cdot \dots \cdot \det(J_d - \lambda E_d) = \\ &= (\alpha_1 - \lambda)^{m_1} \cdot (\alpha_2 - \lambda)^{m_2} \cdot \dots \cdot (\alpha_d - \lambda)^{m_d}. \end{aligned}$$

Здесь E_i – единичная матрица порядка m_i , $i = 1, 2, \dots, d$. Так как числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d$ являются корнями характеристического многочлена, то они являются собственными значениями оператора φ , следовательно, на диагонали матрицы J стоят собственные значения. Покажем, что элементы $e_1^i, \dots, e_{m_i}^i$ образуют жорданову цепочку, $i = 1, 2, \dots, d$. В силу определения матрицы оператора имеем

$$\varphi(e_1^i) = \alpha_i e_1^i, \quad \varphi(e_2^i) = e_1^i + \alpha_i e_2^i, \dots, \quad \varphi(e_{m_i}^i) = e_{m_i-1}^i + \alpha_i e_{m_i}^i. \quad (3.10)$$

Эти равенства можно переписать в виде

$$\begin{aligned} (\varphi - \alpha_i I)(e_1^i) &= \theta, \\ (\varphi - \alpha_i I)(e_2^i) &= e_1^i, \\ &\dots\dots\dots \\ (\varphi - \alpha_i I)(e_{m_i}^i) &= e_{m_i-1}^i. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Следовательно, элементы $e_1^i, \dots, e_{m_i}^i$, $i = 1, 2, \dots, d$ образуют жорданову цепочку.

Достаточность. Пусть базис ε является объединением жордановых цепочек

$$\begin{aligned}
P_n(\lambda) &= \det(J - \lambda E) = \\
&= \det(J_1 - \lambda E_1) \cdot \det(J_2 - \lambda E_2) \cdot \dots \cdot \det(J_d - \lambda E_d) = \\
&= (\alpha_1 - \lambda)^{m_1} \cdot (\alpha_2 - \lambda)^{m_2} \cdot \dots \cdot (\alpha_d - \lambda)^{m_d}.
\end{aligned}$$

Здесь E_i — единичная матрица порядка m_i , $i = 1, 2, \dots, d$. Так как числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d$ являются корнями характеристического многочлена, то они являются собственными значениями оператора φ , следовательно, на диагонали матрицы J стоят собственные значения. Покажем, что элементы $e_1^i, \dots, e_{m_i}^i$ образуют жорданову цепочку, $i = 1, 2, \dots, d$. В силу определения матрицы оператора имеем

$$\varphi(e_1^i) = \alpha_i e_1^i, \quad \varphi(e_2^i) = e_1^i + \alpha_i e_2^i, \dots, \quad \varphi(e_{m_i}^i) = e_{m_i-1}^i + \alpha_i e_{m_i}^i. \quad (3.10)$$

Эти равенства можно переписать в виде

$$\begin{aligned}
(\varphi - \alpha_i I)(e_1^i) &= \theta, \\
(\varphi - \alpha_i I)(e_2^i) &= e_1^i, \\
&\dots\dots\dots \\
(\varphi - \alpha_i I)(e_{m_i}^i) &= e_{m_i-1}^i.
\end{aligned} \quad (3.11)$$

Следовательно, элементы $e_1^i, \dots, e_{m_i}^i$, $i = 1, 2, \dots, d$ образуют жорданову цепочку.

Достаточность. Пусть базис $\mathcal{E}$ является объединением жордановых цепочек

$$\begin{aligned}
\mathcal{E} &= \{e_1^1, \dots, e_{m_1}^1\} \cup \{e_1^2, \dots, e_{m_2}^2\} \cup \dots \cup \{e_1^d, \dots, e_{m_d}^d\}, \\
m_1 + m_2 + \dots + m_d &= n.
\end{aligned}$$

Каждая жорданова цепочка $e_1^i, \dots, e_{m_i}^i$, $i = 1, 2, \dots, d$, удовлетворяет условиям (3.11). Записав условия (3.11) в эквивалентной форме (3.10), а координаты образов $\varphi(e_1^1), \dots, \varphi(e_{m_d}^d)$ базисных элементов $e_1^1, \dots, e_{m_d}^d$ по столбцам, получим матрицу (3.9). Теорема 3.6 доказана.

Это корневые векторы высоты 1 (собственные векторы) оператора φ , отвечающие собственному значению λ_0 . Обозначим линейную оболочку семейства ε^1 через N^1 : $N^1 = L(\varepsilon^1)$. Заметим, что число l_1 совпадает с геометрической кратностью собственного значения λ_0 , а $N^1 = \text{Ker}(\varphi - \lambda_0 I) = V_{\lambda_0}$ – собственное подпространство оператора φ , отвечающее собственному значению λ_0 .

Пусть $e_1^2, \dots, e_{l_2}^2$ – линейно независимые решения системы

$$(A - \lambda_0 E)^2 \underset{\downarrow}{\xi} = \underset{\downarrow}{0}, \quad (3.13)$$

дополняющие фундаментальную систему решений ε^1 системы (3.12) до фундаментальной системы решений ε^2 системы (3.13): $\varepsilon^2 = \varepsilon^1 \cup \{e_1^2, \dots, e_{l_2}^2\}$. Обозначим $N^2 = L(\varepsilon^2) = \text{Ker}(\varphi - \lambda_0 I)^2$.

По построению $e_1^2, \dots, e_{l_2}^2 \notin N^1$ и, следовательно, являются линейно независимыми корневыми векторами высоты 2. И т.д.

Пусть, наконец, $e_1^p, \dots, e_{l_p}^p$ – линейно независимые решения однородной системы

$$(A - \lambda_0 E)^p \underset{\downarrow}{\xi} = \underset{\downarrow}{0}, \quad (3.14)$$

дополняющие фундаментальную систему решений ε^{p-1} системы $(A - \lambda_0 E)^{p-1} \underset{\downarrow}{\xi} = \underset{\downarrow}{0}$ до фундаментальной системы решений ε^p системы (3.14): $\varepsilon^p = \varepsilon^{p-1} \cup \{e_1^p, \dots, e_{l_p}^p\}$. Эта фундаментальная система решений ε^p образует базис корневого подпространства

$$V^{\lambda_0} \equiv N^p = L(\varepsilon^p) = \text{Ker}(\varphi - \lambda_0 I)^p.$$

Обозначим $N^{p-1} = L(\varepsilon^{p-1}) = \text{Ker}(\varphi - \lambda_0 I)^{p-1}$. По построению $e_1^p, \dots, e_{l_p}^p \notin N^{p-1}$ и, следовательно, являются линейно независимыми корневыми векторами высоты p .

Так как $\dim V^{\lambda_0} = n_0$ (теорема 3.5), то базис $\mathcal{E}^p$ содержит n_0 элементов (теорема 1.7). Он является объединением рассмотренных выше систем корневых векторов:

$$\mathcal{E}^p = \{e_1^1, \dots, e_{l_1}^1\} \cup \{e_1^2, \dots, e_{l_2}^2\} \cup \dots \cup \{e_1^{p-1}, \dots, e_{l_{p-1}}^{p-1}\} \cup \{e_1^p, \dots, e_{l_p}^p\},$$

$$l_1 + l_2 + \dots + l_p = n_0.$$

Для наглядности составим из элементов базиса $\mathcal{E}^p$ табл. 3.1, в которой в первой строке записаны базисные элементы, являющиеся корневыми векторами высоты p , во второй – базисные элементы, являющиеся корневыми векторами высоты $p-1$, и т.д. В последней строке записаны корневые векторы высоты 1, т.е. собственные векторы.

Таблица 3.1

$$\begin{array}{ccc} e_1^p, & \dots, & e_{l_p}^p, \\ e_1^{p-1}, & \dots, & e_{l_{p-1}}^{p-1}, \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ e_1^1, & \dots, & e_{l_1}^1. \end{array}$$

Для удобства дальнейшего изложения введем обозначения: $\psi = \varphi - \lambda_0 I$, $\psi^i = (\varphi - \lambda_0 I)^i$. Тогда $N^i = \text{Ker } \psi^i$, $i = 1, \dots, p$.

Теорема 3.7. Базис $\mathcal{E}^p$ удовлетворяет следующим свойствам:

- 1) элементы $\psi(e_1^i), \dots, \psi(e_{l_i}^i)$ являются линейно независимыми корневыми векторами высоты $i-1$, $i = 2, \dots, p$;
- 2) семейство $\mathcal{E}^{i-2} \cup \{\psi(e_1^i), \dots, \psi(e_{l_i}^i)\}$ – линейно независимо в N^{i-1} ;
- 3) количество корневых векторов высоты i не превосходит количества корневых векторов высоты $i-1$, т.е. $l_i \leq l_{i-1}$.

Доказательство. Пусть $e_1^i, \dots, e_{l_i}^i$ – корневые векторы высоты i , входящие в базис $\mathcal{E}^P$. Это означает, что $L(e_1^i, \dots, e_{l_i}^i) \cap N^{i-1} = \{\theta\}$.

Рассмотрим элементы $\psi(e_1^i), \dots, \psi(e_{l_i}^i)$. Это корневые векторы высоты $i-1$, следовательно, они принадлежат подпространству N^{i-1} . Докажем, что они линейно независимы. Составим их линейную комбинацию и приравняем ее нулевому элементу:

$$\alpha_1 \psi(e_1^i) + \dots + \alpha_{l_i} \psi(e_{l_i}^i) = \theta.$$

В силу линейности оператора ψ , это равенство можно переписать в виде $\psi(\alpha_1 e_1^i + \dots + \alpha_{l_i} e_{l_i}^i) = \theta$. Это означает, что $\alpha_1 e_1^i + \dots + \alpha_{l_i} e_{l_i}^i \in N^1$. Так как $N^1 \subset N^{i-1}$ и $L(e_1^i, \dots, e_{l_i}^i) \cap N^{i-1} = \{\theta\}$, то и $L(e_1^i, \dots, e_{l_i}^i) \cap N^1 = \{\theta\}$, поэтому $\alpha_1 e_1^i + \dots + \alpha_{l_i} e_{l_i}^i = \theta$. С учетом линейной независимости $e_1^i, \dots, e_{l_i}^i$, получаем $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{l_i} = 0$. Следовательно, $\psi(e_1^i), \dots, \psi(e_{l_i}^i)$ линейно независимы.

Теперь докажем, что $L(\psi(e_1^i), \dots, \psi(e_{l_i}^i)) \cap N^{i-2} = \{\theta\}$. Будем доказывать от противного. Пусть есть ненулевой элемент x , который принадлежит $L(\psi(e_1^i), \dots, \psi(e_{l_i}^i)) \cap N^{i-2}$. Разложим его по базису пространства $L(\psi(e_1^i), \dots, \psi(e_{l_i}^i))$ и воспользуемся линейностью ψ : $x = \alpha_1 \psi(e_1^i) + \dots + \alpha_{l_i} \psi(e_{l_i}^i) = \psi(\alpha_1 e_1^i + \dots + \alpha_{l_i} e_{l_i}^i)$.

По нашему предположению $x \neq \theta$, тогда и $y \equiv \alpha_1 e_1^i + \dots + \alpha_{l_i} e_{l_i}^i \neq \theta$ (линейный оператор нулевой элемент переводит в нулевой элемент). Следовательно, y является ненулевым элементом, принадлежащим подпространству $L(e_1^i, \dots, e_{l_i}^i)$. Это означает, что y является корневым вектором высоты i , а

$x = \psi(y)$ – корневым вектором высоты $i-1$. В силу этого $x \notin N^{i-2}$. Получили противоречие. Следовательно,

$$L(\psi(e_1^i), \dots, \psi(e_{l_i}^i)) \cap N^{i-2} = \{\theta\}.$$

Рассмотрим сумму подпространств $L(\psi(e_1^i), \dots, \psi(e_{l_i}^i))$ и N^{i-2} . Так как пересечение этих подпространств состоит из нулевого элемента, то сумма является прямой. Кроме того, она принадлежит N^{i-1} . Поэтому, во-первых, семейство $\varepsilon^{i-2} \cup \{\psi(e_1^i), \dots, \psi(e_{l_i}^i)\}$ линейно независимо в N^{i-1} , а во-вторых

$$\begin{aligned} \dim(L(\psi(e_1^i), \dots, \psi(e_{l_i}^i)) \oplus N^{i-2}) &= \\ &= \dim(L(\psi(e_1^i), \dots, \psi(e_{l_i}^i))) + \dim N^{i-2} = \\ &= l_i + \dim N^{i-2} \leq \dim N^{i-1} = l_{i-1} + \dim N^{i-2}. \end{aligned}$$

Отсюда имеем $l_i \leq l_{i-1}$. Свойства базиса ε^p доказаны.

Переходим к построению жорданова базиса в корневом подпространстве V^{λ_0} .

Возьмем корневые векторы $e_1^p, \dots, e_{l_p}^p$ максимальной высоты p из базиса ε^p . Вычислим $\psi(e_1^p), \dots, \psi(e_{l_p}^p)$. По теореме 3.7, это линейно независимые корневые векторы высоты $p-1$ такие, что $L(\psi(e_1^p), \dots, \psi(e_{l_p}^p)) \not\subset N^{p-2}$ и $l_p \leq l_{p-1}$.

Возможны два случая.

1 случай: $l_p = l_{p-1}$. Заменим в базисе ε^p элементы $e_1^{p-1}, \dots, e_{l_{p-1}}^{p-1}$ на элементы $\psi(e_1^p), \dots, \psi(e_{l_p}^p)$. Покажем, что объединение векторов $\hat{\varepsilon}^p = \varepsilon^{p-2} \cup \{\psi(e_1^p), \dots, \psi(e_{l_p}^p)\} \cup \{e_1^p, \dots, e_{l_p}^p\}$ – базис в V^{λ_0} .

Рассмотрим подпространства $N^{p-2} = L(\mathcal{E}^{p-2})$, $L \equiv L(\psi(e_1^p), \dots, \psi(e_{l_p}^p))$ и $M = L(e_1^p, \dots, e_{l_p}^p)$. По свойствам базиса $\mathcal{E}^p$ $N^{p-2} \cap L = \{\theta\}$, $N^{p-2} \cap M = \{\theta\}$, $M \cap L = \{\theta\}$. Следовательно, сумма этих подпространств является прямой, а объединение их базисов $\hat{\mathcal{E}}^p$ является базисом этой суммы. Количество элементов в $\hat{\mathcal{E}}^p$ совпадает с количеством элементов в $\mathcal{E}^p$, поэтому $\hat{\mathcal{E}}^p$ является базисом в V^{λ_0} . Базис $\hat{\mathcal{E}}^p$ для случая $l_p = l_{p-1}$ записан в таблице 2. Он удовлетворяет тем же свойствам, что и базис $\mathcal{E}^p$.

Таблица 3.2

$$\begin{array}{ccc}
 e_1^p, & \dots, & e_{l_p}^p, \\
 \psi(e_1^p), & \dots, & \psi(e_{l_p}^p), \\
 \cdot & \cdot & \cdot \\
 e_1^1, & \dots, & e_{l_1}^1.
 \end{array}$$

2 случай: $l_p < l_{p-1}$. Дополним систему $\psi(e_1^p), \dots, \psi(e_{l_p}^p)$ элементами из набора $e_1^{p-1}, \dots, e_{l_{p-1}}^{p-1}$ так, чтобы, во-первых, получилось l_{p-1} элементов, во-вторых, они были линейно независимы, в-третьих, пересечение их линейной оболочки с подпространством N^{p-2} состояло бы только из нулевого элемента. Обозначим эти элементы $\tilde{e}_{l_p+1}^{p-1}, \dots, \tilde{e}_{l_{p-1}}^{p-1}$. Покажем, что

$$\hat{\mathcal{E}}^p = \mathcal{E}^{p-2} \cup \{\psi(e_1^p), \dots, \psi(e_{l_p}^p), \tilde{e}_{l_p+1}^{p-1}, \dots, \tilde{e}_{l_{p-1}}^{p-1}\} \cup \{e_1^p, \dots, e_{l_p}^p\} -$$

базис в V^{λ_0} .

Рассмотрим подпространства $N^{p-2} = L(\mathcal{E}^{p-2})$,

$$L \equiv L(\psi(e_1^p), \dots, \psi(e_{l_p}^p), \tilde{e}_{l_p+1}^{p-1}, \dots, \tilde{e}_{l_{p-1}}^{p-1}) \text{ и } M = L(e_1^p, \dots, e_{l_p}^p).$$

По построению $N^{p-2} \cap L = \{\theta\}$, по свойствам базиса $\mathcal{E}^p$ $N^{p-2} \cap M = \{\theta\}$, $M \cap L = \{\theta\}$. Следовательно, сумма этих подпространств является прямой, а объединение их базисов $\hat{\mathcal{E}}^p$ является базисом этой суммы. Так как количество элементов в $\hat{\mathcal{E}}^p$ совпадает с количеством элементов в $\mathcal{E}^p$, то $\hat{\mathcal{E}}^p$ является базисом V^{λ_0} . Базис $\hat{\mathcal{E}}^p$ для случая $l_p < l_{p-1}$ записан в таблице 3. Он удовлетворяет тем же свойствам, что и базис $\mathcal{E}^p$.

Таблица 3.3

$$\begin{array}{ccccccc} e_1^p, & & \dots, & & e_{l_p}^p, & & \\ \psi(e_1^p), & \dots, & \psi(e_{l_p}^p), & \tilde{e}_{l_p+1}^{p-1}, & \dots, & \tilde{e}_{l_{p-1}}^{p-1}, & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ e_1^1, & \dots, & \dots, & \dots, & \dots, & \dots, & e_{l_1}^1. \end{array}$$

В результате мы построили базис $\hat{\mathcal{E}}^p$. Он отличается от базиса $\mathcal{E}^p$ элементами второй строки таблицы базисных элементов.

Применяем эту процедуру к базисным элементам третьей строки таблицы базиса $\hat{\mathcal{E}}^p$ (табл. 3.2, если $l_p = l_{p-1}$ или табл. 3.3, если $l_p < l_{p-1}$). Находим образы базисных элементов второй строки таблицы. Если их количество совпадает с количеством элементов в третьей строке таблицы, то заменяем базисные элементы третьей строки таблицы на образы базисных элементов второй строки. Если их количество меньше количества элементов в третьей строке таблицы, то дополняем их элементами из третьей строки таблицы

так, чтобы, во-первых, получилось l_{p-2} элементов, во-вторых, они были линейно независимы, в-третьих, пересечение их линейной оболочки с подпространством N^{p-3} состояло только из нулевого элемента. Заменяем базисные элементы третьей строки таблицы на полученную систему из l_{p-2} элементов. И т.д.

Повторяя эту процедуру $p-1$ раз, построим базис $\tilde{\mathcal{E}}^p$ подпространства V^{λ_0} (табл. 3.4).

Таблица 3.4

$$\begin{array}{l}
 e_1^p, \dots, e_{l_p}^p, \\
 \psi(e_1^p), \dots, \psi(e_{l_p}^p), \tilde{e}_{l_{p+1}}^{p-1}, \dots, \tilde{e}_{l_{p-1}}^{p-1}, \\
 \psi^2(e_1^p), \dots, \psi^2(e_{l_p}^p), \psi(\tilde{e}_{l_{p+1}}^{p-1}), \dots, \psi(\tilde{e}_{l_{p-1}}^{p-1}), \tilde{e}_{l_{p-1}+1}^{p-2}, \dots, \tilde{e}_{l_{p-2}}^{p-2}, \\
 \dots, \\
 \psi^{p-2}(e_1^p), \dots, \psi^{p-2}(e_{l_p}^p), \psi^{p-3}(\tilde{e}_{l_{p+1}}^{p-1}), \dots, \psi^{p-3}(\tilde{e}_{l_{p-1}}^{p-1}), \dots, \tilde{e}_{l_3+1}^2, \dots, \tilde{e}_{l_2}^2, \\
 \psi^{p-1}(e_1^p), \dots, \psi^{p-1}(e_{l_p}^p), \psi^{p-2}(\tilde{e}_{l_{p+1}}^{p-1}), \dots, \psi^{p-2}(\tilde{e}_{l_{p-1}}^{p-1}), \dots, \psi(\tilde{e}_{l_3+1}^2), \dots \\
 \dots, \psi(\tilde{e}_{l_2}^2), \tilde{e}_{l_2+1}^1, \dots, \tilde{e}_{l_1}^1.
 \end{array}$$

Векторы последней строки этой таблицы являются собственными векторами оператора φ . Они образуют базис в подпространстве $N^1 \equiv V_{\lambda_0}$. Их количество равно l_1 — геометрической кратности собственного значения λ_0 . Векторы двух последних строк образуют базис в подпространстве N^2 корневых векторов высоты меньше или равной двум, и т.д. Наконец, все векторы табл. 3.4 образуют базис в подпространстве V^{λ_0} .

Столбцы табл. 3.4 образуют жордановы цепочки:

$$\begin{aligned} \left[\psi^{p-1}(e_1^p) \right] &= \left\{ \psi^{p-1}(e_1^p), \psi^{p-2}(e_1^p), \dots, e_1^p \right\}, \dots, \\ \left[\psi^{p-1}(e_{l_p}^p) \right] &= \left\{ \psi^{p-1}(e_{l_p}^p), \psi^{p-2}(e_{l_p}^p), \dots, e_{l_p}^p \right\}, \dots, \left[\tilde{e}_{l_1}^1 \right] = \left\{ \tilde{e}_{l_1}^1 \right\}. \end{aligned}$$

Изменив порядок следования базисных элементов, получим новый базис подпространства V^{λ_0} :

$$\left[\psi^{p-1}(e_1^p) \right] \cup \dots \cup \left[\psi^{p-1}(e_{l_p}^p) \right] \cup \dots \cup \left[\tilde{e}_{l_1}^1 \right].$$

Он является объединением жордановых цепочек. Введем циклические подпространства

$$\begin{aligned} Z_1^{\lambda_0} &= L\left(\left[\psi^{p-1}(e_1^p)\right]\right), \dots, Z_{l_p}^{\lambda_0} = L\left(\left[\psi^{p-1}(e_{l_p}^p)\right]\right), \dots, \\ Z_{l_1}^{\lambda_0} &= L\left(\left[\tilde{e}_{l_1}^1\right]\right). \end{aligned}$$

Так как объединение базисов этих подпространств образует базис корневого подпространства V^{λ_0} , то они образуют прямую сумму и эта сумма совпадает с V^{λ_0} :

$$V^{\lambda_0} = Z_1^{\lambda_0} \oplus \dots \oplus Z_{l_p}^{\lambda_0} \oplus \dots \oplus Z_{l_1}^{\lambda_0}. \quad (3.15)$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 3.8. Корневое подпространство V^{λ_0} раскладывается в прямую сумму циклических подпространств.

Замечание 3.2. Количество циклических подпространств в разложении (3.15) равно геометрической кратности l_1 собственного значения λ_0 .

Замечание 3.3. Так как базис

$$\left[\psi^{p-1}(e_1^p) \right] \cup \dots \cup \left[\psi^{p-1}(e_{l_p}^p) \right] \cup \dots \cup \left[\tilde{e}_{l_1}^1 \right]$$

является жордановым базисом в корневом подпространстве V^{λ_0} , то, согласно теореме 3.6, в этом базисе матрица оператора φ имеет вид (3.9), причем количество жордановых клеток в этой матрице равно геометрической кратности l_1 собственного значения λ_0 , а

жорданова клетка J_i имеет порядок, равный размерности i -го циклического подпространства, и $\alpha_i = \lambda_0$, $i = 1, 2, \dots, l_1$.

Теорема 3.9 (о существовании жордановой нормальной формы матрицы линейного оператора). Если все корни характеристического многочлена оператора $\varphi \in L(V, V)$ принадлежат множеству $\mathbb{F}$, то существует базис, в котором матрица этого оператора имеет жорданову нормальную форму.

Доказательство. Пусть $\dim V = n$. По условию теоремы все корни характеристического многочлена оператора $\varphi \in L(V, V)$ принадлежат множеству $\mathbb{F}$. Это означает, что характеристический многочлен $P_n(\lambda)$ распадается на произведение линейных множителей, т.е.

$$P_n(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)^{n_1} (\lambda - \lambda_2)^{n_2} \dots (\lambda - \lambda_k)^{n_k}, \quad n_1 + \dots + n_k = n.$$

Отсюда следует, что оператор φ имеет k различных собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ алгебраических кратностей $n_1, n_2, \dots, n_k$, соответственно. Согласно теореме 3.5 пространство V разлагается в прямую сумму корневых подпространств $V^{\lambda_1}, V^{\lambda_2}, \dots, V^{\lambda_k}$: $V = V^{\lambda_1} \oplus V^{\lambda_2} \oplus \dots \oplus V^{\lambda_k}$, $\dim V^{\lambda_i} = n_i, i = 1, \dots, k$. По теореме 3.8 каждое корневое подпространств $V^{\lambda_i}, i = 1, \dots, k$, раскладывается в прямую сумму циклических подпространств: $V^{\lambda_i} = Z_1^{\lambda_i} \oplus \dots \oplus Z_{l_i}^{\lambda_i}$. Здесь l_i — геометрическая кратность собственного значения λ_i . В результате получаем разложение пространства V в прямую сумму циклических подпространств:

$$V = Z_1^{\lambda_1} \oplus \dots \oplus Z_{l_1}^{\lambda_1} \oplus \dots \oplus Z_1^{\lambda_k} \oplus \dots \oplus Z_{l_k}^{\lambda_k}.$$

Выбирая в каждом циклическом подпространстве циклический базис и объединяя эти базисы, получим базис, в котором матрица оператора φ имеет жорданову нормальную форму (3.9). Теорема 3.9 доказана.

Замечание 3.4. Количество d жордановых клеток в жордановой нормальной форме матрицы линейного оператора φ равно сумме геометрических кратностей всех собственных значений этого оператора, т.е. $d = l_1^1 + l_1^2 + \dots + l_1^k$.

При построении жорданова базиса в корневом подпространстве V^{λ_0} мы строили жордановы цепочки начиная с корневых векторов большей высоты и заканчивая собственными векторами.

Приведем другой способ построения жорданова базиса.

Снова вернемся к табл. 4. Рассмотрим ее первый столбец. Он образует жорданову цепочку высоты p . Нижний элемент этого столбца $\psi^{p-1}(e_1^p)$ является собственным вектором оператора φ . Обозначим его $\tilde{e}_1^1$. Так как $\tilde{e}_1^1$ собственный вектор оператора φ , отвечающий собственному значению λ_0 , то $\tilde{e}_1^1 \in \ker(\varphi - \lambda_0 I)$.

Из равенства $\tilde{e}_1^1 = \psi^{p-1}(e_1^p)$ следует, что $\tilde{e}_1^1 \in \text{Im } \psi^{p-1} \equiv \text{Im}(\varphi - \lambda_0 I)^{p-1}$. Таким образом, $\tilde{e}_1^1$ удовлетворяет условиям $\tilde{e}_1^1 \in \text{Ker}(\varphi - \lambda_0 I) \cap \text{Im}(\varphi - \lambda_0 I)^{p-1}$. Аналогично устроены собственные векторы $\tilde{e}_2^1 = \psi^{p-1}(e_2^p), \dots, \tilde{e}_{l_p}^1 = \psi^{p-1}(e_{l_p}^p)$. Следовательно, чтобы построить жордановы цепочки длины p надо сначала найти l_p линейно независимых собственных векторов принадлежащих линейному подпространству $M_1 = \text{Ker}(\varphi - \lambda_0 I) \cap \text{Im}(\varphi - \lambda_0 I)^{p-1}$. Обозначим их $g_1^1, g_2^1, \dots, g_{l_p}^1$. Затем для каждого такого собственного вектора $g_i^1, i = 1, \dots, l_p$ нужно найти присоединенные векторы 1-го, 2-го, ..., $(p-1)$ -го порядка. Пусть g_i^2 – присоединенный вектор 1-го порядка к вектору g_i^1 , т.е. $\psi(g_i^2) = g_i^1$. Переписав это равенство в

матричной форме, получим неоднородную систему линейных алгебраических уравнений относительно g_i^2 $(A - \lambda_0 E)g_i^2 = g_i^1$.

Решив эту систему, найдем g_i^2 . Для нахождения g_i^3 – присоединенного вектора 2-го порядка $(\psi(g_i^3) = g_i^2)$, решим неоднородную систему линейных алгебраических уравнений $(A - \lambda_0 E)g_i^3 = g_i^2$ или $(A - \lambda_0 E)^2 g_i^3 = g_i^1$. И т.д., пока не дойдем до g_i^p – присоединенного вектора $(p-1)$ -го порядка $(\psi(g_i^p) = g_i^{p-1})$. Для нахождения этого вектора решим неоднородную систему линейных алгебраических уравнений $(A - \lambda_0 E)g_i^p = g_i^{p-1}$ или $(A - \lambda_0 E)^{p-1} g_i^p = g_i^1$.

Замечание 3.5. Для нахождения присоединенных к g_i^1 векторов, иногда удобно сначала найти последний вектор g_i^p , решив неоднородную систему $(A - \lambda_0 E)^{p-1} g_i^p = g_i^1$, а затем вычислить остальные по формулам:

$$g_i^{p-1} = (A - \lambda_0 E)g_i^p, g_i^{p-2} = (A - \lambda_0 E)g_i^{p-1}, \dots, g_i^2 = (A - \lambda_0 E)g_i^3.$$

После того, как все жордановы цепочки максимальной длины p построены, переходим к построению жордановых цепочек меньшей длины. Для этого рассматриваем подпространство

$$M_2 = \text{Ker}(\varphi - \lambda_0 I) \cap \text{Im}(\varphi - \lambda_0 I)^{p-2}.$$

Его размерность равна l_{p-1} – количеству элементов во второй строке табл.3.4. Имеет место вложение $M_1 \subseteq M_2$. Если $\dim M_1 = \dim M_2$ (количество элементов в первой и второй строках табл.3.4 совпадает), то жордановых цепочек длины $p-1$ не будет. Если $\dim M_1 < \dim M_2$, то ищем $\dim M_2 - \dim M_1$ линейно независимых собственных векторов, которые входят в M_2 , но не

входят в M_1 . Для них находим присоединенные векторы. И т.д. Продолжаем этот процесс до тех пор, пока суммарное количество элементов в жордановых цепочках не совпадет с размерностью корневого подпространства V^{λ_0} .

Замечание 3.6. Если геометрическая кратность собственного значения λ_0 равна 1, то жорданов базис корневого подпространства V^{λ_0} состоит из одной жордановой цепочки длиной $p = \dim V^{\lambda_0}$ (в табл. 3.4 будет только один столбец высоты p). В этом случае построение жорданова базиса сводится к нахождению собственного вектора и вычислению присоединенных к нему векторов способом, изложенным в замечании 3.5.

Рассмотрим, какой вид может иметь жорданова нормальная форма матрицы линейного оператора φ , если $\dim V = 3$.

Возможны следующие случаи.

1. У оператора φ имеется три различных собственных значения $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Тогда жорданова нормальная форма матрицы линейного оператора φ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

2. У оператора φ имеется два различных собственных значения λ_1, λ_2 . Пусть алгебраические кратности собственных значений λ_1 и λ_2 равны 2 и 1, соответственно.

Если геометрическая кратность собственного значения λ_1 равна 2, то жорданова нормальная форма матрицы линейного оператора φ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

а если геометрическая кратность собственного значения λ_1 равна 1, то жорданова нормальная форма матрицы линейного оператора φ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

3. У оператора φ имеется одно собственное значение λ_1 алгебраической кратности 3. Если геометрическая кратность собственного значения λ_1 равна 1, то жорданова нормальная форма матрицы линейного оператора φ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}.$$

Если геометрическая кратность собственного значения λ_1 равна 2, то жорданова нормальная форма матрицы линейного оператора φ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} \text{ или } \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}.$$

Если геометрическая кратность собственного значения λ_1 равна 3, то жорданова нормальная форма матрицы линейного оператора φ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}.$$

Упражнение. Выписать все возможные виды жордановой нормальной формы матрицы линейного оператора для $\dim V = 4$.

Перед тем как перейти к нахождению жордановой нормальной формы матрицы конкретных линейных операторов, напомним следующие ранее полученные факты:

- 1) количество жордановых клеток, отвечающих собственному значению λ_i , равно его геометрической кратности l_i^j ;
- 2) размер жордановой клетки, отвечающей собственному значению λ_i , не превышает его алгебраической кратности n_i .

Пример 3.5. Пусть матрица линейного оператора φ в некотором базисе имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти жорданов базис и жорданову нормальную форму матрицы оператора φ .

Решение. Составим характеристическое уравнение:

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Вычислив

$$\det(A - \lambda E) = (1 - \lambda)^2 \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)^5,$$

получим уравнение $(1 - \lambda)^5 = 0$. Следовательно, оператор φ имеет только одно собственное значение $\lambda_0 = 1$ алгебраической кратности $n_0 = 5$, а корневое подпространство V^{λ_0} , отвечающее этому

собственному значению, совпадает с пространством V .

Решим систему линейных алгебраических уравнений

$$(A - E) \underset{\downarrow}{\xi} = \underset{\downarrow}{0} \quad (3.16)$$

методом Гаусса. Приведем матрицу системы к сильно ступенчатому виду:

$$A - E = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Отсюда получим } \begin{cases} \xi_1 + \xi_3 = 0 \\ \xi_2 + \xi_4 = 0 \\ \xi_5 = 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \xi_1 = -\xi_3 \\ \xi_2 = -\xi_4 \\ \xi_3 = 0 \end{cases}.$$

Полагая свободные переменные ξ_3 и ξ_4 сначала $\xi_3 = 1$, $\xi_4 = 0$, а затем $\xi_3 = 0$, $\xi_4 = 1$, — найдем фундаментальную систему решений системы (3.16) $e_1^1 = (-1, 0, 1, 0, 0)$ и $e_2^1 = (0, -1, 0, 1, 0)$. Это собственные векторы оператора φ , отвечающие собственному значению $\lambda_0 = 1$, т.е. корневые векторы высоты 1. Следовательно, геометрическая кратность собственного значения $\lambda_0 = 1$ равна 2: $l_1^0 = 2$. Это означает, что жорданов базис будет состоять из двух

жордановых цепочек. Обозначим $N^1 = L(e_1^1, e_2^1)$, $\dim N^1 = 2$ ($N^1 = \text{Ker}(\varphi - I) = \text{Ker}(A - E)$).

1 способ

Вычислим матрицу $(A - E)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ и решим одно-

родную систему линейных алгебраических уравнений

$$(A - E)^2 \underset{\downarrow}{\xi} = \underset{\downarrow}{0}. \quad (3.17)$$

Система (3.17) сводится к уравнению $\xi_1 + \xi_3 - 2\xi_5 = 0$. Отсюда получим $\xi_1 = -\xi_3 + 2\xi_5$. Это уравнение имеет четыре свободных переменных: $\xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5$. Следовательно, у него есть четыре линейно независимых решения. Два из них – это e_1^1 и e_2^1 . Чтобы получить линейно независимые с ними решения свободные переменные ξ_2 и ξ_5 (в предыдущей системе они были главными), берем по очереди 0 и 1 (остальные свободные переменные берем равными нулю). Полагая $\xi_2 = 1, \xi_3 = 0, \xi_4 = 0, \xi_5 = 0$, получим $\xi_1 = 0$ и $e_1^2 = (0, 1, 0, 0, 0)$. Аналогично, полагая $\xi_2 = 0, \xi_3 = 0, \xi_4 = 0, \xi_5 = 1$, получим $\xi_1 = 2$ и $e_2^2 = (2, 0, 0, 0, 1)$. Так как по построению $e_1^2, e_2^2 \notin N^1$, то e_1^2 и e_2^2 – корневые векторы высоты 2. Обозначим

$$N^2 = L(e_1^1, e_2^1, e_1^2, e_2^2), \dim N^2 = 4,$$

$$(N^2 = \text{Ker}(\varphi - I)^2 = \text{Ker}(A - E)^2).$$

Заметим, что $(A - E)^3$ – нулевая матрица (проверьте непосредственным вычислением). Действительно, так как размерность пространства решений системы (3.17) оказалась равной 4, то размер-

ность пространства решений системы $(A - E)^3 \xi = 0$ должна быть

больше 4. А так как $\dim V^{\lambda_0} = 5$, то размерность пространства решений этой системы также равна 5, что возможно только в случае, когда $(A - E)^3$ является нулевой матрицей. Фундаментальной системой решений однородной системы линейных алгебраических уравнений с нулевой матрицей системы являются любые 5 линейно независимых векторов. Нам надо найти вектор не принадлежащий N^2 . Для этого найдем в N^2 более простой базис:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \\ \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Теперь очевидно, что вектор $e_1^3 = (0, 0, 0, 0, 1) \notin N^2$.

Получили базис $\mathcal{E}$ из корневых векторов: e_1^3 – корневой вектор высоты 3, e_1^2, e_2^2 – корневые векторы высоты 2, e_1^1, e_2^1 – корневые векторы высоты 1 (собственные векторы).

Перейдем к построению жорданова базиса. Возьмем корневые векторы максимальной высоты. В нашем случае это e_1^3 . Положим $\tilde{e}_1^3 = e_1^3$, вычислим корневой вектор $\tilde{e}_1^2 = (\varphi - I)\tilde{e}_1^3$ высоты 2:

$$\tilde{e}_{\downarrow 1}^2 = (A - E)\tilde{e}_{\downarrow 1}^3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Дополним систему векторов e_1^1 , e_2^1 , $\tilde{e}_1^2$ до базиса N^2 корневым вектором высоты 2. В качестве $\tilde{e}_2^2$ возьмем e_2^2 : $\tilde{e}_2^2 = e_2^2 = (2, 0, 0, 0, 1)$. Вычислим $\tilde{e}_1^1$ и $\tilde{e}_2^1$:

$$\begin{aligned} \tilde{e}_{\downarrow 1}^1 &= (A - E)\tilde{e}_{\downarrow 1}^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \tilde{e}_{\downarrow 2}^1 &= (A - E)\tilde{e}_{\downarrow 2}^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \end{aligned}$$

корневые векторы высоты 1. Сгруппируем полученные базисные векторы в жордановы цепочки, упорядочивая их по возрастанию высоты: $\{\tilde{e}_1^1, \tilde{e}_1^2, \tilde{e}_1^3\}$ и $\{\tilde{e}_2^1, \tilde{e}_2^2\}$. Объединение этих жордановых цепочек образует жорданов базис $\tilde{\mathcal{E}} = \{\tilde{e}_1^1, \tilde{e}_1^2, \tilde{e}_1^3\} \cup \{\tilde{e}_2^1, \tilde{e}_2^2\}$.

Так как $(A - E)\tilde{e}_{\downarrow 1}^1 = 0$, $(A - E)\tilde{e}_{\downarrow 1}^2 = \tilde{e}_{\downarrow 1}^1$, $(A - E)\tilde{e}_{\downarrow 1}^3 = \tilde{e}_{\downarrow 1}^2$, то

$$A\tilde{e}_{\downarrow 1}^1 = \tilde{e}_{\downarrow 1}^1, \quad A\tilde{e}_{\downarrow 1}^2 = \tilde{e}_{\downarrow 1}^1 + \tilde{e}_{\downarrow 1}^2, \quad A\tilde{e}_{\downarrow 1}^3 = \tilde{e}_{\downarrow 1}^2 + \tilde{e}_{\downarrow 1}^3.$$

Аналогично, так как $(A - E)\tilde{e}_{\downarrow 2}^1 = 0$ и $(A - E)\tilde{e}_{\downarrow 2}^2 = \tilde{e}_{\downarrow 2}^1$, то

$$A \underset{\downarrow}{\tilde{e}_2^1} = \underset{\downarrow}{\tilde{e}_2^1}, \quad A \underset{\downarrow}{\tilde{e}_2^2} = \underset{\downarrow}{\tilde{e}_2^1} + \underset{\downarrow}{\tilde{e}_2^2}.$$

Запишем матрицу оператора φ в базисе $\tilde{\mathcal{E}}$ (она будет представлять собой жорданову нормальную форму):

$$\tilde{J} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица перехода от исходного базиса к базису $\tilde{\mathcal{E}}$ равна

$$\tilde{T} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2 способ

Найдем максимальную длину жордановой цепочки p .

Для этого вычислим матрицу

$$(A - E)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и найдем ее ранг. Он равен 1. Это означает, что однородная система линейных алгебраических уравнений

$$\underset{\downarrow}{(A - E)^2} \underset{\downarrow}{\xi} = \underset{\downarrow}{0}$$

имеет $5 - 1 = 4$ свободных переменных. Следовательно, размерность пространства решений этой системы (оно состоит из корневых векторов высоты меньше или равно два) равна 4. Так как раз-

мерность всего корневого пространства равна 5, то у рассматриваемого оператора имеется только один линейно независимый корневой вектор высоты 3, а корневых векторов высоты больше 3 быть не может. Таким образом, максимальная длина жордановой цепочки $p = 3$. Кроме того, так как у оператора только один линейно независимый корневой вектор высоты 3, то жорданова цепочка длиной 3 будет одна.

Найдем собственный вектор g_1^1 , входящий в эту цепочку:

$$g_1^1 \in M_1 = \text{Ker}(\varphi - I) \cap \text{Im}(\varphi - I)^2.$$

Образ линейного оператора $(\varphi - I)^2$ совпадает с линейной оболочкой столбцов его матрицы $(A - E)^2$:

$$\begin{aligned} \text{Im}(\varphi - I)^2 &= \text{Im}(A - E)^2 = \\ &= L \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = L \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

Возьмем $g_1^1 = (-1, 0, 1, 0, 0)$. Найдем g_1^2 – присоединенный вектор 1-го порядка. Он является решением неоднородной системы

$$(A - E) \underset{\downarrow}{g_1^2} = \underset{\downarrow}{g_1^1}.$$

Решим эту систему методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Отсюда получим $\begin{cases} \xi_1 + \xi_3 = 0 \\ \xi_2 + \xi_4 = 1 \\ \xi_5 = 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} \xi_1 = -\xi_3 \\ \xi_2 = -\xi_4 + 1 \\ \xi_5 = 0 \end{cases}$. Полагая сво-

бодные переменные $\xi_3 = 0$, $\xi_4 = 0$, находим ненулевое решение этой системы $g_1^2 = (0, 1, 0, 0, 0)$.

Найдем g_1^3 – присоединенный вектор 2-го порядка. Он является решением неоднородной системы

$$(A - E) \underset{\downarrow}{g_1^3} = \underset{\downarrow}{g_1^2}.$$

Решим эту систему методом Гаусса

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда получим $\begin{cases} \xi_1 + \xi_3 = 1 \\ \xi_2 + \xi_4 = 0 \\ \xi_5 = 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} \xi_1 = -\xi_3 + 1 \\ \xi_2 = -\xi_4 \\ \xi_5 = 0 \end{cases}$. Полагая сво-

бодные переменные $\xi_3 = 0$, $\xi_4 = 0$, находим ненулевое решение этой системы $g_1^3 = (1, 0, 0, 0, 0)$. Жорданова цепочка длины 3 построена: $g_1^1 = (-1, 0, 1, 0, 0)$, $g_1^2 = (0, 1, 0, 0, 0)$, $g_1^3 = (1, 0, 0, 0, 0)$.

Строим вторую жорданову цепочку. С учетом того, что у нас всего две жордановы цепочки, то длина второй цепочки равна 2.

Найдем собственный вектор g_2^1 , входящий в эту цепочку

$$g_2^1 \in M_2 = \text{Ker}(\varphi - I) \cap \text{Im}(\varphi - I),$$

$$g_2^1 \notin M_1 = \text{Ker}(\varphi - I) \cap \text{Im}(\varphi - I)^2.$$

Так как $\text{Ker}(\varphi - I) = N^1 = L(e_1^1, e_2^1) = L \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$, а

$$\text{Im}(\varphi - I) = \text{Im}(A - E) = L \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) =$$

$$= L \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right),$$

то $\text{Ker}(\varphi - I) \cap \text{Im}(\varphi - I) = \text{Ker}(\varphi - I) = L \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$

Следовательно, в качестве g_2^1 можно взять вектор с координатами

$g_2^1 = (0, -1, 0, 1, 0)$. Найдем g_2^2 – присоединенный вектор 1-го порядка. Он является решением неоднородной системы

$$(A - E) \underset{\downarrow}{g_2^2} = \underset{\downarrow}{g_2^1}.$$

Решим эту систему методом Гаусса

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Отсюда получим $\begin{cases} \xi_1 + \xi_3 = -2 \\ \xi_2 + \xi_4 = 0 \\ \xi_5 = -1 \end{cases}$ или $\begin{cases} \xi_1 = -\xi_3 - 2 \\ \xi_2 = -\xi_4 \\ \xi_5 = -1 \end{cases}$. Полагая

свободные переменные $\xi_3 = 0$, $\xi_4 = 0$, найдем ненулевое решение этой системы $g_2^2 = (-2, 0, 0, 0, -1)$. Вторая жорданова цепочка длины 2 построена: $g_2^1 = (0, -1, 0, 1, 0)$, $g_2^2 = (-2, 0, 0, 0, -1)$.

Объединение этих жордановых цепочек образует жорданов базис $\hat{e} = \{g_1^1, g_1^2, g_1^3\} \cup \{g_2^1, g_2^2\}$.

Запишем матрицу оператора φ в базисе $\hat{e}$:

$$\hat{J} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица перехода от исходного базиса базису $\hat{e}$ равна:

$$\hat{T} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Пример 3.6. Пусть матрица линейного оператора φ в некотором базисе имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -9 & 5 & 4 \\ 7 & -13 & 8 & 7 \\ 8 & -17 & 11 & 8 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найти жорданов базис и жорданову нормальную форму матрицы оператора φ .

Решение. Составим и решим характеристическое уравнение $\det(A - \lambda E) = 0$. Опуская промежуточные выкладки, приведем вид, к которому преобразуется это уравнение:

$$(1 - \lambda)(2 - \lambda)^3 = 0.$$

Отсюда следует, что оператор имеет два собственных значения $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = 2$ алгебраической кратности $n_1 = 1$ и $n_2 = 3$, соответственно. Это означает, что, $\dim V^{\lambda_1} = 1$, $\dim V^{\lambda_2} = 3$. Здесь V^{λ_i} — корневое подпространство, отвечающее собственному значению λ_i , $i = 1, 2$.

Так как $\dim V^{\lambda_1} = 1$, то жордановым базисом корневого подпространства V^{λ_1} является собственный вектор, отвечающий собственному значению $\lambda_1 = 1$. Он является любым ненулевым решением однородной системы линейных алгебраических уравнений

$$(A - E)\underset{\downarrow}{\xi} = \underset{\downarrow}{0}.$$

Решив эту систему, получим
$$\begin{cases} \xi_1 = 3\xi_4 \\ \xi_2 = 6\xi_4 \\ \xi_3 = 7\xi_4 \end{cases}.$$

Полагая свободную переменную $\xi_4 = 1$, находим собственный вектор оператора φ , отвечающий собственному значению $\lambda_1 = 1$: $f_1^1 = (3, 6, 7, 1)$.

Теперь найдем жорданов базис корневого подпространства V^{λ_2} . Ищем собственные векторы оператора φ , отвечающие собственному значению $\lambda_2 = 2$. Для этого решим однородную систему линейных алгебраических уравнений

$$(A - 2E) \underset{\downarrow}{\xi} = \underset{\downarrow}{0}. \quad (3.18)$$

В результате получим $\begin{cases} \xi_1 = \xi_3 - \xi_4 \\ \xi_2 = \xi_3 \end{cases}$. Полагая свободные пере-

менные ξ_3 и ξ_4 сначала $\xi_3 = 1$, $\xi_4 = 0$, а затем $\xi_3 = 0$, $\xi_4 = 1$, найдем фундаментальную систему решений системы (3.18) $e_1^1 = (1, 1, 1, 0)$ и $e_2^1 = (-1, 0, 0, 1)$. Это линейно независимые собственные векторы оператора φ , отвечающие собственному значению $\lambda_2 = 2$, т.е. корневые векторы высоты 1. Следовательно, геометрическая кратность собственного значения $\lambda_2 = 2$ равна 2. Это означает, что жорданов базис подпространства V^{λ_2} будет состоять из двух жордановых цепочек. Так как $\dim V^{\lambda_2} = 3$, то одна из них будет иметь длину 1, а другая – длину 2. Обозначим $N^1 = L(e_1^1, e_2^1)$, $\dim N^1 = 2$ ($N^1 = \text{Ker}(\varphi - 2I) = \text{Ker}(A - 2E)$).

1 способ

Вычислим матрицу $(A - 2E)^2 = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -3 & -3 \\ -6 & 12 & -6 & -6 \\ -7 & 14 & -7 & -7 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ и решим од-

нородную систему линейных алгебраических уравнений

$$(A - 2E)^2 \underset{\downarrow}{\xi} = \underset{\downarrow}{0}. \quad (3.19)$$

Эта система сводится к уравнению $\xi_1 - 2\xi_2 + \xi_3 + \xi_4 = 0$. Отсюда получим $\xi_1 = 2\xi_2 - \xi_3 - \xi_4$. Это уравнение имеет три свободных переменных: ξ_2, ξ_3, ξ_4 . Следовательно, у него есть три линейно независимых решения. Два из них это e_1^1 и e_2^1 . Чтобы получить линейно независимое с ними решение – свободную переменную ξ_2 (в предыдущей системе она была главной) берем равной 1 (остальные свободные переменные ξ_3 и ξ_4 берем равными нулю). Тогда $e_1^2 = (2, 1, 0, 0)$. По построению e_1^2 – корневой вектор высоты 2. Мы получили базис корневого подпространства V^{λ_2} : e_1^2 – корневой вектор высоты 2, e_1^1, e_2^1 – корневые векторы высоты 1 (собственные векторы).

Перейдем к построению жорданова базиса в корневом подпространстве V^{λ_2} . Берем корневой вектор максимальной высоты. В нашем случае это вектор e_1^2 . Положим $\tilde{e}_1^2 = e_1^2$ и вычислим

$$\underset{\downarrow}{\tilde{e}_1^1} = (A - 2E) \underset{\downarrow}{\tilde{e}_1^2} = \begin{pmatrix} 4 & -9 & 5 & 4 \\ 7 & -15 & 8 & 7 \\ 8 & -17 & 9 & 8 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} -$$

корневой вектор высоты 1.

Мы получили жорданову цепочку длины 2: $\tilde{e}_1^1, \tilde{e}_1^2$. Дополним эту систему векторов до базиса V^{λ_2} собственным вектором $\tilde{e}_2^1$, линейно независимым с $\tilde{e}_1^1$. Так как $\tilde{e}_1^1 = -e_1^1$, то берем $\tilde{e}_2^1 = e_2^1 = (-1, 0, 0, 1)$. Сгруппируем полученные базисные векторы в жордановы цепочки, упорядочивая их по возрастанию высоты $\{\tilde{e}_1^1, \tilde{e}_1^2\}$ и $\{\tilde{e}_2^1\}$. Объединение этих жордановых цепочек образует жорданов базис в корневом подпространстве V^{λ_2} . Добавляя собственный вектор f_1^1 , отвечающий собственному значению $\lambda_1 = 1$, получим жорданов базис $\tilde{\varepsilon}$ в пространстве V : $\tilde{\varepsilon} = \{f_1^1\} \cup \{\tilde{e}_1^1, \tilde{e}_1^2\} \cup \{\tilde{e}_2^1\}$. Так как $A \underset{\downarrow}{f_1^1} = \underset{\downarrow}{f_1^1}$, $A \underset{\downarrow}{\tilde{e}_1^1} = 2 \underset{\downarrow}{\tilde{e}_1^1}$, $A \underset{\downarrow}{\tilde{e}_1^2} = \underset{\downarrow}{\tilde{e}_1^1} + 2 \underset{\downarrow}{\tilde{e}_1^2}$, $A \underset{\downarrow}{\tilde{e}_2^1} = 2 \underset{\downarrow}{\tilde{e}_2^1}$, то матрица оператора φ в базисе $\tilde{\varepsilon}$ равна:

$$\tilde{J} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \quad (3.20)$$

Матрица перехода от исходного базиса к базису $\tilde{\varepsilon}$ равна:

$$\tilde{T} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & -1 \\ 6 & -1 & 1 & 0 \\ 7 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.21)$$

2 способ

Как отмечалось выше, жорданов базис подпространства V^{λ_2} состоит из двух жордановых цепочек, одна из которых имеет длину 1, а другая – длину 2.

Найдем собственный вектор g_1^1 , входящий в жорданову цепочку длиной 2:

$$g_1^1 \in \text{Ker}(\varphi - 2I) \cap \text{Im}(\varphi - 2I).$$

По определению $\text{Ker}(\varphi - 2I)$ является линейной оболочкой собственных векторов $e_1^1 = (1, 1, 1, 0)$ и $e_2^1 = (-1, 0, 0, 1)$:

$$\text{Ker}(\varphi - 2I) = L(e_1^1, e_2^1) = L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Образ линейного оператора $\varphi - 2I$ совпадает с линейной оболочкой столбцов его матрицы:

$$\begin{aligned} \text{Im}(\varphi - 2I) &= \text{Im}(A - 2E) = \\ &= L\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -9 \\ -15 \\ -17 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = L\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}\right). \end{aligned}$$

Нетрудно заметить, что вектор

$$g_{\downarrow}^1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

принадлежит $\text{Ker}(\varphi - 2I) \cap \text{Im}(\varphi - 2I)$.

Найдем первый присоединенный вектор g_1^2 . Он является решением неоднородной системы $(A - 2E)g_{\downarrow}^2 = g_{\downarrow}^1$. Решим эту систему методом Гаусса:

$$\begin{aligned}
 & \left(\begin{array}{cccc|c} 4 & -9 & 5 & 4 & -1 \\ 7 & -15 & 8 & 7 & -1 \\ 8 & -17 & 9 & 8 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim \\
 & \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).
 \end{aligned}$$

Отсюда получим $\begin{cases} \xi_1 - \xi_3 + \xi_4 = 2 \\ \xi_2 - \xi_3 = 1 \end{cases}$ или $\begin{cases} \xi_1 = \xi_3 - \xi_4 + 2 \\ \xi_2 = \xi_3 + 1 \end{cases}$.

Полагая свободные переменные, $\xi_3 = 0$, $\xi_4 = 0$, находим ненулевое решение этой системы $g_1^2 = (2, 1, 0, 0)$. Жорданова цепочка длины 2 построена: $g_1^1 = (-1, -1, -1, 0)$, $g_1^2 = (2, 1, 0, 0)$. Дополняя эту цепочку собственными векторами f_1^1 и $\tilde{e}_2^1$ (см. способ 1 этого примера), получим жорданов базис $\hat{e}$ в пространстве V : $\hat{e} = \{f_1^1\} \cup \{g_1^1, g_1^2\} \cup \{\tilde{e}_2^1\}$. Так как $g_1^1 = \tilde{e}_1^1$ и $g_1^2 = \tilde{e}_1^2$, то базис $\hat{e}$ совпадает с базисом $\tilde{e}$, найденным ранее способом 1. Поэтому матрица оператора φ в этом базисе также имеет вид (3.20), а матрица перехода равна (3.21).

Пример 3.7. Пусть матрица линейного оператора φ в некотором базисе имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -6 & -1 & 3 \\ 2 & -3 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти жорданов базис и жорданову нормальную форму матрицы оператора φ .

Решение. Составим и решим характеристическое уравнение $\det(A - \lambda E) = 0$. Опуская промежуточные выкладки, приведем вид, к которому преобразуется это уравнение $(3 - \lambda)(1 + \lambda)^3 = 0$. Отсюда следует, что оператор имеет два собственных значения $\lambda_1 = 3$ и $\lambda_2 = 2$ алгебраической кратности $n_1 = 1$ и $n_2 = 3$, соответственно. Это означает, что $V = V^{\lambda_1} \oplus V^{\lambda_2}$, $\dim V^{\lambda_1} = 1$, $\dim V^{\lambda_2} = 3$. Здесь V^{λ_i} – корневое подпространство, отвечающее собственному значению λ_i , $i = 1, 2$.

Так как $\dim V^{\lambda_1} = 1$, то жордановым базисом корневого подпространства V^{λ_1} является собственный вектор, отвечающий собственному значению $\lambda_1 = 3$. Он является любым ненулевым решением однородной системы линейных алгебраических уравнений

$$(A - 3E) \underset{\downarrow}{\xi} = \underset{\downarrow}{0}.$$

Решив эту систему, найдем собственный вектор оператора φ , отвечающий собственному значению $\lambda_1 = 3$: $f_1^1 = (2, 1, 1, 1)$.

Теперь найдем жорданов базис корневого подпространства V^{λ_2} . Ищем собственные векторы оператора φ , отвечающие собственному значению $\lambda_2 = -1$. Для этого решим однородную систему линейных алгебраических уравнений

$$(A + E) \underset{\downarrow}{\xi} = \underset{\downarrow}{0}. \quad (3.22)$$

$$\text{Решив эту систему, получим } \begin{cases} \xi_1 = \xi_2 \\ \xi_3 = 0 \\ \xi_4 = 0 \end{cases}.$$

У решения системы (3.22) оказалась только одна свободная переменная ξ_2 , поэтому у оператора φ есть только один линейно независимый собственный вектор, отвечающий собственному значению $\lambda_2 = -1$. Полагая свободную переменную $\xi_2 = 1$, находим

его: $g_1^1 = (1, 1, 0, 0)$. Так как геометрическая кратность собственного значения $\lambda_2 = -1$ равна 1, то жорданов базис подпространства V^{λ_2} будет состоять из одной жордановой цепочки длиной 3. Для ее нахождения воспользуемся способом, изложенным в замечаниях 3.5, 3.6. В нашем случае $p = 3$. Вычислим $(A + E)^2$:

$$(A + E)^2 = \begin{pmatrix} 31 & -31 & -1 & 2 \\ 15 & -15 & -1 & 2 \\ 16 & -16 & 0 & 0 \\ 10 & -10 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

и найдем присоединенный вектор 2-го порядка g_1^3 . Он является решением неоднородной системы

$$(A + E)^2 \underset{\downarrow}{g_1^3} = \underset{\downarrow}{g_1^1}.$$

Решим эту систему методом Гаусса

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 31 & -31 & -1 & 2 & 1 \\ 15 & -15 & -1 & 2 & 1 \\ 16 & -16 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & -10 & 2 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

$$\text{Отсюда получим } \begin{cases} \xi_1 = \xi_2 \\ \xi_3 = 0 \\ 2\xi_4 = 1 \end{cases}.$$

Полагая свободную переменную, $\xi_2 = 0$, найдем ненулевое решение этой системы $g_1^3 = \left(0, 0, 0, \frac{1}{2} \right)$ – корневой вектор высоты 3.

Теперь вычислим присоединенный вектор 1-го порядка:

$$g_{\downarrow}^2 = (A + E)g_{\downarrow}^3 = \begin{pmatrix} 6 & -6 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & -2 & 4 \\ 3 & -3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Жорданова цепочка длиной 3 построена: $g_1^1 = (1, 1, 0, 0)$, $g_1^2 = (1.5, 1.5, 2, 1)$, $g_1^3 = (0, 0, 0, 0.5)$. Дополнив эту цепочку собственным вектором f_1^1 , получим жорданов базис $\hat{\varepsilon}$ в пространстве V : $\hat{\varepsilon} = \{f_1^1\} \cup \{g_1^1, g_1^2, g_1^3\}$. В базисе $\hat{\varepsilon}$ матрица оператора φ равна

$$\hat{J} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Матрица перехода от исходного базиса к базису $\hat{\varepsilon}$ равна

$$\hat{T} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1.5 & 0 \\ 1 & 1 & 1.5 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

3.4. Единственность жордановой нормальной формы матрицы линейного оператора

При доказательстве теоремы единственности жордановой нормальной формы матрицы линейного оператора будут использованы следующие утверждения.

Пусть A – квадратная блочно-диагональная матрица

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & O & \dots & O \\ O & A_2 & \dots & O \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ O & O & \dots & A_d \end{pmatrix} = \text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_d),$$

где A_i – квадратная матрица порядка m_i , $i = 1, \dots, d$.

Утверждение 3.8. $\text{rang} A = \text{rang} A_1 + \text{rang} A_2 + \dots + \text{rang} A_d$.

Доказательство. Воспользуемся следующими свойствами ранга матрицы:

1. Ранг матрицы не меняется при элементарных преобразованиях над ее строками;
2. С помощью элементарных преобразований над строками можно привести матрицу к ступенчатому виду;
3. Ранг ступенчатой матрицы равен количеству ненулевых строк.

С помощью элементарных преобразований над первыми m_1 строками матрицы A , в состав которых входит матрица A_1 , приведем эту часть матрицы A к ступенчатому виду. Заметим, что количество ненулевых строк в этой части полученной матрицы равно рангу матрицы A_1 . Аналогичным образом поступим со следующими m_2 строками. И т.д., пока не дойдем до последних m_d строк, в состав которых входит матрица A_d . Приведем и эту часть матрицы к ступенчатому виду. В результате мы получим матрицу, в которой количество ненулевых строк равно

$$\text{rang} A_1 + \text{rang} A_2 + \dots + \text{rang} A_d.$$

Не меняя порядка следования ненулевых строк, поместим все ненулевые строки в нижнюю часть матрицы. Полученная матрица будет иметь ступенчатый вид. По свойству 1 ее ранг совпадает с рангом матрицы A , а по свойству 3 ее ранг равен количеству ненулевых строк. Так как при перестановке строк местами количество ненулевых строк не изменилось, то

$$\text{rang} A = \text{rang} A_1 + \text{rang} A_2 + \dots + \text{rang} A_d.$$

Утверждение 3.8 доказано.

Утверждение 3.9. $A^2 = \text{diag}(A_1^2, A_2^2, \dots, A_d^2)$.

Для доказательства этой формулы достаточно расписать левую и правую ее части в терминах обычных (числовых) элементов матриц $A_1, A_2, \dots, A_d$ (предоставляем это сделать читателю).

Следствие. $A^l = \text{diag}(A_1^l, A_2^l, \dots, A_d^l)$.

Утверждение 3.10. Произведением двух верхних треугольных матриц является верхняя треугольная матрица, причем элементы, стоящие на главной диагонали матрицы, равны произведению соответствующих элементов перемножаемых матриц.

Доказательство. Пусть

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ 0 & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1n} \\ 0 & d_{22} & \dots & d_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & d_{nn} \end{pmatrix},$$

тогда

$$\begin{aligned} CD &= \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ 0 & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1n} \\ 0 & d_{22} & \dots & d_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & d_{nn} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} c_{11}d_{11} & \dots & \dots & \dots \\ 0 & c_{22}d_{22} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & c_{nn}d_{nn} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Следствие. Пусть

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ 0 & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & c_{nn} \end{pmatrix},$$

тогда

$$C^l = \begin{pmatrix} (c_{11})^l & \dots & \dots & \dots \\ 0 & (c_{22})^l & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & (c_{nn})^l \end{pmatrix}.$$

Определение 3.13. Ненулевая квадратная матрица A называется нильпотентной матрицей порядка m , если $\exists m \in \mathbb{N}$ такое, что $A^m = O$, а $A^{m-1} \neq O$.

Рассмотрим квадратную матрицу порядка m

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

для элементов которой справедливо соотношение

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } j - i = 1 \\ 0, & \text{если } j - i \neq 1 \end{cases}.$$

Утверждение 3.11. Матрица B является нильпотентной матрицей порядка m .

Доказательство. Рассмотрим последовательные степени матрицы B . Обозначим через $\tilde{b}_{ij}$ элементы матрицы B^2 .

$$\tilde{b}_{11} = b_{11}b_{11} + b_{12}b_{21} + \dots + b_{1k}b_{k1} = b_{12}b_{21} = 1 \cdot 0 = 0,$$

$$\tilde{b}_{12} = b_{11}b_{12} + b_{12}b_{22} + \dots + b_{1k}b_{k2} = b_{11}b_{12} + b_{12}b_{22} = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 0,$$

$$\tilde{b}_{13} = b_{11}b_{13} + b_{12}b_{23} + \dots + b_{1k}b_{k3} = b_{12}b_{23} = 1 \cdot 1 = 1$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$$

$$\tilde{b}_{1k} = b_{11}b_{1k} + b_{12}b_{2k} + \dots + b_{1k}b_{kk} = b_{12}b_{2k} + b_{1k-1}b_{k-1k} = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$$

и т.д.

Таким образом, $\tilde{b}_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } j - i = 2 \\ 0, & \text{если } j - i \neq 2 \end{cases}$, и, следовательно,

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Аналогично, получаем, что в каждой следующей степени матрицы B ее единичная диагональ смещается вправо-вверх, и окончательно имеем

$$B^{m-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B^m = O.$$

Утверждение 3.11 доказано.

Пример 3.8. При $m = 4$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{тогда } B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть теперь J_0 – жорданова клетка порядка m_0 :

$$J_0 = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим матрицу

$$J_0 - \lambda E = \begin{pmatrix} \alpha - \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha - \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha - \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha - \lambda \end{pmatrix}.$$

Утверждение 3.12. Если $\alpha \neq \lambda$, то для любого натурального l $\text{rang}(J_0 - \lambda E)^l = m_0$.

Доказательство. Так как $J_0 - \lambda E$ — верхняя треугольная матрица, то по следствию к утверждению 3.10 $(J_0 - \lambda E)^l$ является верхней треугольной матрицей вида

$$(J_0 - \lambda E)^l = \begin{pmatrix} (\alpha - \lambda)^l & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & (\alpha - \lambda)^l & \dots & \dots & \dots \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & (\alpha - \lambda)^l & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & (\alpha - \lambda)^l \end{pmatrix}.$$

Определитель этой матрицы равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали: $\det(J_0 - \lambda E)^l = (\alpha - \lambda)^{m_0 \cdot l}$.

По условию $\alpha \neq \lambda$, поэтому $\det(J_0 - \lambda E)^l \neq 0$. Из определения ранга матрицы следует, что $\text{rang}(J_0 - \lambda E)^l = m_0$. Утверждение 3.12 доказано.

Утверждение 3.13. Если $\alpha = \lambda$, то для любого натурального l

$$\text{rang}(J_0 - \lambda E)^l = \begin{cases} m_0 - l, & \text{если } l \leq m_0 \\ 0, & \text{если } l \geq m_0 \end{cases}.$$

Доказательство. Так как $\alpha = \lambda$, то

$$J_0 - \lambda E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Эта матрица имеет $m_0 - 1$ линейно независимых строк, следовательно, ее ранг равен $m_0 - 1$. Согласно утверждению 3.11

$$(J_0 - \lambda E)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Эта матрица имеет $m_0 - 2$ линейно независимых строк, следовательно, ее ранг равен $m_0 - 2$. И т.д.

Как было показано в утверждении 3.11, в каждой следующей степени матрицы $J_0 - \lambda E$ ее единичная диагональ смещается вправо-вверх, и количество линейно независимых строк уменьшается на 1. При $l = m_0 - 1$ имеем

$$(J_0 - \lambda E)^{(m_0-1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

следовательно, $\text{rang}(J_0 - \lambda E)^{(m_0-1)} = 1$.

Начиная с $l = m_0$, $(J_0 - \lambda E)^l = O$. В этом случае $\text{rang}(J_0 - \lambda E)^l = 0$. Утверждение 3.13 доказано.

Теорема 3.10 (о единственности жордановой нормальной формы матрицы линейного оператора). Жорданова нормальная форма матрицы линейного оператора определена однозначно с точностью до перестановок жордановых клеток.

Доказательство. Пусть V – линейное пространство над множеством $\mathbb{F}$, $\dim V = n$, J – жорданова матрица оператора $\varphi \in L(V, V)$ в некотором жордановом базисе

$$J = \text{diag}(J_1, J_2, \dots, J_d).$$

Здесь J_i – жорданова клетка

$$J_i = \begin{pmatrix} \alpha_i & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_i & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_i \end{pmatrix}, \alpha_i \in \mathbb{F}, i = 1, \dots, d.$$

Обозначим порядок матрицы J_i через m_i , $m_1 + m_2 + \dots + m_d = n$. Заметим, что в силу теоремы 3.6 числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d$ являются собственными значениями оператора φ . Следовательно, на диагонали матрицы J расположены собственные значения. Пусть λ_0 – одно из собственных значений оператора φ .

Обозначим через s_i количество жордановых клеток порядка i , в которых на диагонали стоит λ_0 , $i = 1, \dots, p$. Здесь p – максимальный порядок жордановой клетки, в которой на диагонали стоит число λ_0 . Положим $r_i = \text{rang}(J - \lambda_0 E)^i$, $i = 1, 2, \dots, p$. Так как матрица $(J - \lambda_0 E)^i$ является матрицей линейного оператора $(\varphi - \lambda_0 I)^i$, то по утверждению 2.2 ее ранг r_i не зависит от выбора базиса. Выразив числа $s_1, s_2, \dots, s_p$ через инварианты $r_1, r_2, \dots, r_p$, мы докажем, что они сами являются инвариантами.

Вычислим ранг матрицы:

$$J - \lambda_0 E = \text{diag}(J_1 - \lambda_0 E_1, J_2 - \lambda_0 E_2, \dots, J_d - \lambda_0 E_d),$$

здесь E_i – единичная матрица порядка m_i , $i = 1, \dots, d$.

В силу утверждения 3.8 имеем

$$\begin{aligned} r_1 = \text{rang}(J - \lambda_0 E) &= \text{rang}(J_1 - \lambda_0 E_1) + \text{rang}(J_2 - \lambda_0 E_2) + \\ &+ \dots + \text{rang}(J_m - \lambda_0 E_m). \end{aligned}$$

Согласно утверждениям 3.12 и 3.13 $\text{rang}(J_i - \lambda_0 E_i) = m_i$, если на диагонали жордановой клетки J_i не стоит число λ_0 , и $\text{rang}(J_i - \lambda_0 E_i) = m_i - 1$, если на диагонали жордановой клетки J_i стоит число λ_0 . По условию $m_1 + m_2 + \dots + m_d = n$. Следовательно, ранг матрицы $J - \lambda_0 E$ будет меньше ее порядка n на количество жордановых клеток, в которых на диагонали стоит число λ_0 (это число равно $s_1 + s_2 + \dots + s_p$), т.е.

$$r_1 = n - s_1 - s_2 - \dots - s_p. \quad (3.23)$$

Рассмотрим матрицу $(J - \lambda_0 E)^2$. По утверждению 3.9

$$(J - \lambda_0 E)^2 = \text{diag}\left((J_1 - \lambda_0 E_1)^2, (J_2 - \lambda_0 E_2)^2, \dots, (J_d - \lambda_0 E_d)^2\right).$$

В силу утверждения 3.8 ее ранг равен

$$\begin{cases} s_1 &= n & -2r_1 & +r_2 \\ s_2 &= r_1 & -2r_2 & +r_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_i &= r_{i-1} & -2r_i & +r_{i+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_{p-1} &= r_{p-2} & -2r_{p-1} & +r_p \\ s_p &= r_{p-1} & -r_p & \end{cases} \quad (3.24)$$

Таким образом, мы показали, что числа $s_1, s_2, \dots, s_p$ являются инвариантами. Теорема единственности жордановой нормальной формы доказана.

Следствие. Количество жордановых клеток, отвечающих собственному значению λ_0 , равно его геометрической кратности.

Доказательство. Действительно, с одной стороны из формулы (3.23) следует, что количество $s_1 + s_2 + \dots + s_p$ жордановых клеток, отвечающих собственному значению λ_0 равно $n - r_1$. С другой стороны в теореме 2.13 было доказано, что количество линейно независимых собственных векторов также равно $n - r_1$.

Замечание 3.7. В теореме 3.10 получен алгоритм, позволяющий записать жорданову нормальную форму матрицы линейного оператора φ , не находя жорданова базиса.

Он заключается в следующем:

- 1) находим собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ матрицы A линейного оператора φ ;
- 2) для каждого собственного значения λ_i последовательно находим ранги $r_1, r_2, \dots, r_p$ матриц $A - \lambda_i E, (A - \lambda_i E)^2, \dots, (A - \lambda_i E)^p$, число p находится из условий:

$$\begin{cases} \text{rang}(A - \lambda_i E)^p < \text{rang}(A - \lambda_i E)^{p-1} \\ \text{rang}(A - \lambda_i E)^{p+1} = \text{rang}(A - \lambda_i E)^p; \end{cases}$$

3) по формулам (3.24) вычисляем s_1 – количество жордановых клеток порядка 1, s_2 – количество жордановых клеток порядка 2, ..., s_p – количество жордановых клеток порядка p .

Пример 3.8. Пусть матрица оператора φ в некотором базисе равна

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 9 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Не находя жорданова базиса, записать жорданову нормальную форму матрицы этого оператора.

Решение. Составим и решим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 & -7 \\ 9 & -3-\lambda & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 4-\lambda & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 9 & -3-\lambda \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 4-\lambda & -8 \\ 2 & -4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\lambda^2 - 9 + 9)(\lambda^2 - 16 + 16) = 0 \Leftrightarrow \lambda^4 = 0.$$

Мы получили, что оператор φ имеет только одно собственное значение $\lambda = 0$. Следовательно, во всех клетках жордановой матрицы на диагонали будут стоять нули.

Найдем ранг r_1 матрицы $A - 0 \cdot E$:

$$A - 0 \cdot E \sim \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & -10 & 20 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что $r_1 = 2$. Вычислим общее количество жордановых клеток: $n - r_1 = 4 - 2 = 2$. Возведем матрицу $A - 0 \cdot E$ в квадрат:

$$(A - 0 \cdot E)^2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 9 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 9 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда получим, что $r_2 = 0$. Очевидно, что в этом случае $r_3 = 0$ и, следовательно, $p = 2$. Найдем s_1 (количество жордановых клеток порядка 1) и s_2 (количество жордановых клеток порядка 2):

$$s_1 = n - 2r_1 + r_2 = 4 - 4 + 0 = 0, \quad s_2 = r_1 - r_2 = 2 - 0 = 2.$$

Запишем жорданову нормальную форму матрицы оператора φ :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пример 3.9. Пусть A – матрица линейного оператора φ в некотором базисе

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & 5 \\ 0 & -4 & -3 & 6 \\ -1 & -5 & -5 & 9 \end{pmatrix}.$$

Не находя жорданова базиса, записать жорданову нормальную форму матрицы этого оператора.

Решение. Составим характеристическое уравнение и найдем собственные значения оператора φ :

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & -2 & -3 & 5 \\ 0 & -3-\lambda & -3 & 5 \\ 0 & -4 & -3-\lambda & 6 \\ -1 & -5 & -5 & 9-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (\lambda+1) \cdot (\lambda-1)^3 = 0.$$

Таким образом, оператор φ имеет два различных собственных значения: $\lambda_1 = -1$ и $\lambda_2 = 1$.

Так как $\lambda_1 = -1$ имеет алгебраическую кратность 1, то ему отвечает одна жорданова клетка порядка 1 (она состоит из одного числа -1).

Рассмотрим $\lambda_2 = 1$. Оно имеет алгебраическую кратность 3.

Вычислим ранг r_1 матрицы $A - 1 \cdot E$

$$A - 1 \cdot E = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -3 & 5 \\ 0 & -4 & -3 & 5 \\ 0 & -4 & -4 & 6 \\ -1 & -5 & -5 & 8 \end{pmatrix} \sim \dots \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 & 5 & -8 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что $r_1 = 3$. Вычислим общее количество жордановых клеток, отвечающих собственному значению $\lambda_2 = 1$: $n - r_1 = 4 - 3 = 1$. Так как получилась одна клетка, то ее порядок равен 3 — алгебраической кратности собственного значения $\lambda_2 = 1$. В этом случае вычислять r_2 не требуется.

Запишем жорданову нормальную форму матрицы оператора φ :

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Глава 4. ФУНКЦИИ ОТ МАТРИЦ И ОПЕРАТОРОВ

4.1. Многочлен от матрицы

Пусть V – линейное пространство над множеством $\mathbb{F}$ (где $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ или $\mathbb{F}=\mathbb{C}$), $\dim V = n$, $\varphi \in L(V, V)$ – линейный оператор. Пусть

$p(t) \equiv p_m(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_m t^m$ – числовой многочлен, $a_i \in \mathbb{F}$.

Определение 4.1. Многочленом от оператора φ назовем оператор $p_m(\varphi) = a_0 I + a_1 \varphi + \dots + a_m \varphi^m \in L(V, V)$, где по определению $\varphi^0 = I$ – тождественный оператор, а $\varphi^k = \underbrace{\varphi \cdot \varphi \cdot \dots \cdot \varphi}_{k \text{ раз}}$.

Замечание 4.1. Нетрудно проверить, что если $p(\varphi)$, $q(\varphi)$ – два многочлена от одного и того же оператора, то $p(\varphi)q(\varphi) = q(\varphi)p(\varphi)$, т.е. два многочлена от одного и того же оператора коммутируют между собой.

Определение 4.2. Пусть матрица A является квадратной матрицей порядка n ($A \in \text{Mat}(n)$), тогда многочленом от матрицы A назовем матрицу $p(A) = a_0 E + a_1 A + \dots + a_m A^m \in \text{Mat}(n)$, где полагаем $A^0 = E \in \text{Mat}(n)$ – единичная матрица порядка n .

Замечание 4.2. Если A_φ^ε – матрица оператора φ в базисе ε , то

$$A_{p(\varphi)}^\varepsilon = p(A_\varphi^\varepsilon). \quad (4.1)$$

Определение 4.3. Будем говорить, что многочлен $p(t)$ аннулирует оператор φ (или матрицу A), если $p(\varphi) = \theta$ (или, соответственно, $p(A) = O$, здесь $O \in Mat(n)$ – нулевая матрица).

Замечание 4.3. Из соотношения (4.1) следует, что $p(t)$ аннулирует оператор φ тогда и только тогда, когда $p(t)$ аннулирует A_φ^ε .

Рассмотрим линейное пространство квадратных матриц $Mat(n)$, тогда $\dim Mat(n) = n^2$. Пусть матрица $A \in Mat(n)$ – произвольная матрица этого пространства. Рассмотрим матрицы $E, A, A^2, \dots, A^{n^2}$. Их количество равно $n^2 + 1 > n^2$, поэтому они образуют линейно зависимую систему матриц. Следовательно, существуют числа $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n^2}$ не все равные нулю, такие, что $\alpha_0 E + \alpha_1 A + \dots + \alpha_{n^2} A^{n^2} = O$. Это означает, что матрица A аннулируется многочленом $q(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \dots + \alpha_{n^2} t^{n^2}$, который не равен нулю тождественно.

Среди всех не равных тождественно нулю многочленов, аннулирующих A , выберем многочлен минимальной степени. Приходим к определению.

Определение 4.4. Минимальным многочленом матрицы A (оператора φ) называется многочлен наименьшей степени со старшим коэффициентом 1, аннулирующий матрицу A (оператор φ).

Будем обозначать через $m_A(t)$ минимальный многочлен матрицы A и через $m_\varphi(t)$ – минимальный многочлен оператора φ . Очевидно, $m_\varphi(t) = m_{A_\varphi^\varepsilon}(t)$, где A_φ^ε – матрица оператора φ в базисе ε . Отсюда следует, что минимальный многочлен матрицы оператора φ не зависит от выбора базиса.

Теорема 4.1. Всякий аннулирующий многочлен делится на минимальный.

Доказательство. Пусть $p(t)$ – аннулирующий многочлен матрицы A , т.е. $p(A) = O$. Разделим $p(t)$ на $m_A(t)$ с остатком:

$p(t) = q(t)m_A(t) + r(t)$, степень многочлена $r(t)$ меньше степени многочлена $m_A(t)$. Подставим в это равенство матрицу A . Тогда получим $r(A) = O$, т.е. $r(t)$ аннулирует матрицу A . Но тогда $r(t) \equiv 0$, т.к. иначе он ненулевой, аннулирующий многочлен, со степенью, меньшей, чем степень минимального многочлена $m_A(t)$, что противоречит определению минимального многочлена. Теорема доказана.

Следствие. Минимальный многочлен $m_A(t)$ единственен.

Доказательство. Пусть $m'_A(t)$ и $m''_A(t)$ – два минимальных многочлена. У них старший коэффициент равен 1 и они делятся друг на друга, поэтому, очевидно, они совпадают.

Теорема 4.2 (Гамильтона–Кэли). Всякая матрица $A \in Mat(n)$ аннулируется своим характеристическим многочленом $P_n(\lambda) = \det(A - \lambda E)$.

Доказательство. Пусть $B \in Mat(n)$ – матрица с элементами b_{ij} , которые равны алгебраическим дополнениям элементов c_{ji} матрицы $A - \lambda E$. Значит b_{ij} – многочлен от λ степени $\leq n-1$. Тогда матрица $B \equiv B(\lambda)$ запишется в виде

$$B(\lambda) = B^{(0)} + B^{(1)}\lambda + \dots + B^{(n-1)}\lambda^{n-1},$$

где $B^{(i)} \in Mat(n)$ – числовые матрицы порядка n . По построению матрицы B

$$(A - \lambda E)^{-1} = \frac{1}{\det(A - \lambda E)} B(\lambda) \text{ при } \lambda \neq \lambda_i,$$

где λ_i – собственные значения матрицы A . Следовательно,

$$B(\lambda)(A - \lambda E) = P_n(\lambda)E, \quad \lambda \neq \lambda_i.$$

Пусть $P_n(\lambda) = \alpha_0 + \alpha_1\lambda + \dots + (-1)^n \lambda^n$. Тогда имеем равенство

$$\begin{aligned} (B^{(0)} + B^{(1)}\lambda + \dots + B^{(n-1)}\lambda^{n-1})(A - \lambda E) = \\ = (\alpha_0 + \alpha_1\lambda + \dots + (-1)^n \lambda^n)E, \quad \lambda \neq \lambda_i. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Матричное равенство (4.2) влечет за собой поэлементное равен-

ство соответствующих многочленов при всех λ , кроме λ_i . Но тогда, очевидно, многочлены равны при всех λ , а, следовательно, равны коэффициенты при одинаковых степенях λ . Поэтому справедлива система равенств

$$\begin{aligned} B^{(0)}A &= \alpha_0 E, \\ B^{(1)}A - B^{(0)}E &= \alpha_1 E, \\ &\dots\dots\dots \\ B^{(n-1)}A - B^{(n-2)}E &= \alpha_{n-1} E, \\ -B^{(n-1)}E &= (-1)^n E. \end{aligned}$$

Умножим первое из этих равенств справа на $A^0 = E$, второе на A^1 и т.д., последнее равенство умножим справа на A^n . Сложив все полученные равенства, получим следующее выражение:

$$0 = \alpha_0 E + \alpha_1 A + \dots + (-1)^n A^n \equiv P_n(A),$$

т.е. многочлен $P_n(\lambda)$ аннулирует матрицу A . Теорема доказана.

Следствие 1. Характеристический многочлен $P_n(\lambda)$ делится на минимальный.

Следствие 2. Если все корни характеристического многочлена лежат в $\mathbb{F}$, то и все корни минимального многочлена лежат в $\mathbb{F}$, а, следовательно, минимальный многочлен разлагается на линейные множители.

4.2. Минимальный многочлен жордановой нормальной формы

Пусть J_0 – жорданова клетка порядка h , соответствующая собственному значению λ_0 , т.е.

$$J_0 = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix} = \lambda_0 E + B \in Mat(h),$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Теорема 4.3. Для минимального многочлена жордановой клетки J_0 справедливо соотношение $\mathcal{M}_{J_0}(t) = (t - \lambda_0)^h$, где h – размер жордановой клетки.

Доказательство. Матрица $J_0 - \lambda_0 E = B$ является нильпотентной матрицей порядка h и тогда в силу утверждения 3.11 матрица $(J_0 - \lambda_0 E)^h$ – нулевая матрица, но в то же время матрица $(J_0 - \lambda_0 E)^{h-1} \neq O$. Следовательно, $(t - \lambda_0)^h$ аннулирует матрицу J_0 , поэтому $\mathcal{M}_{J_0}(t)$ должен быть его делителем, а значит $\mathcal{M}_{J_0}(t) = (t - \lambda_0)^m$, $m \leq h$. Однако, $(t - \lambda_0)^{h-1}$ не аннулирует матрицу J_0 , поэтому $\mathcal{M}_{J_0}(t) = (t - \lambda_0)^h$. Теорема доказана.

Приведем без доказательства следующее утверждение.

Утверждение 4.1. Пусть матрица является блочно-диагональной матрицей, т.е.

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & A_{d-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & A_d \end{pmatrix},$$

и пусть $m_{A_i}(t)$ – минимальный многочлен клетки A_i . Тогда справедливо равенство $m_A(t) = \text{НОК} \{ m_{A_i}(t), i = 1, 2, \dots, d \}$.

Теорема 4.4. Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ – корни характеристического многочлена матрицы A и все они лежат в F , т.е. являются собственными значениями матрицы A . Приведем матрицу A к жордановой форме J . Пусть h_j – максимальный размер жордановой клетки, отвечающей собственному значению λ_j , $j = 1, 2, \dots, k$, тогда для минимального многочлена матрицы A справедливо равенство

$$m_A(t) = (t - \lambda_1)^{h_1} \cdot \dots \cdot (t - \lambda_k)^{h_k}.$$

Доказательство. Действительно, $m_A(t) = m_J(t)$ и в силу утверждения 4.1 равно наименьшему общему кратному (НОК) минимальных многочленов всех жордановых клеток. В то же время в силу теоремы 4.3 минимальный многочлен клетки, отвечающий λ_j и размера m_i равен $(t - \lambda_j)^{m_i}$, откуда и следует справедливость утверждения теоремы 4.4.

Следствие. Пусть корни характеристического многочлена матрицы A принадлежат F . Жорданова форма матрицы A имеет диагональный вид тогда и только тогда, когда минимальный многочлен не имеет кратных корней.

4.3. Вычисление многочлена от матрицы с использованием жордановой нормальной формы

Вычисление многочлена от любой квадратной матрицы A возможно выполнить непосредственно, используя операции сложения и умножения матриц. Однако это вычисление значительно упрощается, если известна жорданова форма J матрицы A .

Всюду ниже будем предполагать, что корни характеристического многочлена матрицы A принадлежат $\mathbb{F}$, а следовательно, жорданова форма матрицы A существует.

Напомним, что если в линейном пространстве V фиксирован некоторый базис, то всякая матрица $A \in \text{Mat}(n)$ является матрицей некоторого линейного оператора $\varphi \in L(V, V)$. В силу сделанных предположений для оператора φ существует жорданов базис.

Пусть T – матрица перехода от исходного базиса к жорданову, т.е. $J = T^{-1}AT$, $A = TJT^{-1}$.

Утверждение 4.2. $\forall k \in \mathbb{N}, \quad A^k = TJ^kT^{-1}$.

Доказательство проведем по индукции. При $k = 1$ $A = TJT^{-1}$, т.е. утверждение справедливо. Предположим, что оно справедливо при $k = s$, т.е. справедливо выражение $A^s = TJ^sT^{-1}$, и покажем его справедливость для $k = s + 1$. Действительно:

$$A^{s+1} = AA^s = (TJT^{-1})(TJ^sT^{-1}) = TJ(T^{-1}T)J^sT^{-1} = TJ^{s+1}T^{-1}.$$

Утверждение 4.2 доказано.

Следствие.

$$A^r A^s = (TJT^{-1})^r (TJT^{-1})^s = (TJ^r T^{-1})(TJ^s T^{-1}) = TJ^{r+s} T^{-1}.$$

Замечание 4.4. По определению полагаем $A^0 = E (= TJ^0 T^{-1})$.

Пусть J – блочно-диагональная матрица, у которой диагональные блоки – жордановы клетки:

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & J_{d-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & J_d \end{pmatrix} \equiv \text{diag}(J_1, \dots, J_d) -$$

жорданова нормальная форма матрицы A ; $J_1, \dots, J_d$ – ее жордановы клетки. Поскольку при возведении в степень блочно-диагональной матрицы ее блоки возводятся в степень независимо друг от друга (см. следствие к утверждению 3.9), т.е.

$$J^s = \begin{pmatrix} J_1^s & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & J_2^s & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & J_{d-1}^s & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & J_d^s \end{pmatrix} \equiv \text{diag}(J_1^s, \dots, J_d^s), \quad (4.2)$$

то для возведения в степень жордановой матрицы надо уметь возводить в степень отдельную жорданову клетку.

Итак, пусть $J_h(\lambda) \in \text{Mat}(h)$ – жорданова клетка порядка h , отвечающая собственному значению λ .

Рассмотрим отдельно степени жордановых клеток.

1. Если $h=1$, $J_h(\lambda) = (\lambda)$, то $(J_h(\lambda))^s = (\lambda^s) \in \text{Mat}(1)$.

2. Если $h > 1$, то $J_h(\lambda)$ можно представить в виде суммы $J_h(\lambda) = \lambda E + B \in \text{Mat}(h)$, здесь B – нильпотентная матрица, содержащая отличные от нуля элементы, равные единице только на первой диагонали, лежащей выше главной, т.е.

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } j-i=1 \\ 0, & \text{если } j-i \neq 1 \end{cases}.$$

Например, при h равных 2, 3, 4 имеем, соответственно:

$$B_{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_{(4)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда для жордановой клетки $J_h(\lambda) = \lambda E + B \in \text{Mat}(h)$ имеем

$$(J_h(\lambda))^2 = (\lambda E + B)^2 = \lambda^2 E + 2\lambda B + B^2 \in \text{Mat}(h),$$

$$(J_h(\lambda))^3 = (\lambda E + B)^3 = \lambda^3 E + 3\lambda^2 B + 3\lambda B^2 + B^3 \in \text{Mat}(h),$$

$$(J_h(\lambda))^4 = (\lambda E + B)^4 = \lambda^4 E + 4\lambda^3 B + 6\lambda^2 B^2 + 4\lambda B^3 + B^4 \in \text{Mat}(h),$$

и т.д. Здесь мы использовали коммутативность произведения $EB = BE$. Вид результата возведения матрицы $J_h(\lambda)$ в степень s зависит от соотношения между s и ее порядком h (показателем нильпотентности матрицы B). Так, при $s < h$

$$\begin{aligned} (J_h(\lambda))^s &= (\lambda E + B)^s = \\ &= \lambda^s E + s\lambda^{s-1}B + \frac{s(s-1)}{2} \lambda^{s-2}B^2 + \dots + s\lambda B^{s-1} + B^s = \\ &= \sum_{r=0}^s C_s^r \lambda^{s-r} B^r \in \text{Mat}(h), \quad C_s^r = \frac{s!}{r!(s-r)!}; \end{aligned} \quad (4.3)$$

покомпонентно это выглядит следующим образом

$$\begin{aligned} &(J_h(\lambda))^s = \\ &= \begin{pmatrix} \lambda^s & s\lambda^{s-1} & \frac{s(s-1)}{2!} \lambda^{s-2} & \dots & s\lambda & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^s & s\lambda^{s-1} & \frac{s(s-1)}{2!} \lambda^{s-2} & \dots & s\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^s & s\lambda^{s-1} & \frac{s(s-1)}{2!} \lambda^{s-2} & \dots & s\lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda^s & s\lambda^{s-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda^s & \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Количество слагаемых $(s+1)$ в разложении бинома (4.3) не превышает длину h строки матрицы $(J_h(\lambda))^s$, и поэтому все ненулевые элементы заведомо «помещаются» в первой строке.

В случае, когда $s \geq h$, формально число слагаемых в разложении бинома (4.3) превышает число элементов строки матрицы $(J_\lambda)^s$, однако число ненулевых элементов равно h (в силу того, что для целых $r \geq h$ $B^r = O$ – см. утверждение 3.11). Поэтому в этом случае степень жордановой клетки $(J_h(\lambda))^s$ будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} (J_h(\lambda))^s &= (\lambda E + B)^s = \\ &= \lambda^s E + s\lambda^{s-1}B + \frac{s(s-1)}{2!}\lambda^{s-2}B^2 + \dots + \frac{s(s-1)\dots(s-(h-1))}{(h-1)!}\lambda^{s-h+1}B^{h-1} = \\ &= \sum_{r=0}^{h-1} C_s^r \lambda^{s-r} B^r \in \text{Mat}(h), \end{aligned} \quad (4.4)$$

или в развернутой форме, имеем:

$$\begin{aligned} &(J_h(\lambda))^s = \\ &= \begin{pmatrix} \lambda^s & s\lambda^{s-1} & \frac{s(s-1)}{2!}\lambda^{s-2} & \frac{s(s-1)(s-2)}{3!}\lambda^{s-3} & \dots & \frac{s\dots(s-(h-2))}{(h-2)!}\lambda^{s-h+2} & \frac{s\dots(s-(h-1))}{(h-1)!}\lambda^{s-h+1} \\ 0 & \lambda^s & s\lambda^{s-1} & \frac{s(s-1)}{2!}\lambda^{s-2} & \dots & \frac{s\dots(s-(h-3))}{(h-3)!}\lambda & \frac{s\dots(s-(h-2))}{(h-2)!}\lambda^{s-h+2} \\ 0 & 0 & \lambda^s & s\lambda^{s-1} & \dots & \frac{s\dots(s-(h-4))}{(h-4)!}\lambda & \frac{s\dots(s-(h-3))}{(h-3)!}\lambda^{s-h+3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda^s & s\lambda^{s-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda^s \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Вернемся к рассмотрению многочлена от матрицы

$$p_m(A) = \sum_{r=0}^m a_r A^r.$$

С учетом утверждения 4.2, имеем

$$\begin{aligned}
 p_m(A) &= \sum_{r=0}^m a_r A^r = \sum_{r=0}^m a_r (TJT^{-1})^r = \sum_{r=0}^m a_r TJ^r T^{-1} = \\
 &= T \left(\sum_{r=0}^m a_r J^r \right) T^{-1} = T \cdot p_m(J) \cdot T^{-1}.
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Учитывая представление (4.2) жордановой нормальной формы J матрицы A через ее жордановы клетки, получаем выражение для многочлена от жордановой формы матрицы $p_m(J)$:

$$p_m(J) = \text{diag}(p_m(J_1), \dots, p_m(J_d)).$$

Как и выше, рассмотрим вначале вычисление значения многочлена $p_m(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_m t^m$ от одной жордановой клетки, соответствующей собственному значению λ и размера h ($J_h(\lambda) = \lambda E + B \in \text{Mat}(h)$). Для этого представим многочлен $p_m(t)$ в виде точного разложения по формуле Тейлора в окрестности точки $t = \lambda$:

$$p_m(t) = p_m(\lambda) + \frac{p'_m(\lambda)}{1!} (t - \lambda) + \frac{p''_m(\lambda)}{2!} (t - \lambda)^2 + \dots + \frac{p_m^{(m)}(\lambda)}{m!} (t - \lambda)^m.$$

Отметим, что при вычислении $p_m(J_h(\lambda))$ сомножитель $(t - \lambda)$ формально заменяется на $J - \lambda E \equiv B$. Следовательно,

$$\begin{aligned}
 p_m(J_h(\lambda)) &= p_m(\lambda)E + \frac{p'_m(\lambda)}{1!} B + \frac{p''_m(\lambda)}{2!} B^2 + \dots \\
 &\dots + \frac{p_m^{(m)}(\lambda)}{m!} B^m.
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

При $m < h - 1$ представление (4.6) в развернутом виде запишется следующим образом:

$$p_m(J_h(\lambda)) =$$

$$= \begin{pmatrix} p_m(\lambda) & \frac{p'_m(\lambda)}{1!} & \frac{p''_m(\lambda)}{2!} & \dots & \frac{p_m^{(m)}(\lambda)}{m!} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & p_m(\lambda) & \frac{p'_m(\lambda)}{1!} & \dots & \frac{p_m^{(m-1)}(\lambda)}{(m-1)!} & \frac{p_m^{(m)}(\lambda)}{m!} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_m(\lambda) & \dots & \frac{p_m^{(m-2)}(\lambda)}{(m-2)!} & \frac{p_m^{(m-1)}(\lambda)}{(m-1)!} & \frac{p_m^{(m)}(\lambda)}{m!} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & p_m(\lambda) & \frac{p'_m(\lambda)}{1!} & \frac{p''_m(\lambda)}{2!} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & p_m(\lambda) & \frac{p'_m(\lambda)}{1!} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & p_m(\lambda) \end{pmatrix}.$$

Если же $m \geq h-1$, то в силу нильпотентности матрицы B имеем $B^r = O$ для всех целых $r \geq h$ (см. утверждение 3.11), поэтому формула (4.6) запишется в виде

$$p_m(J_h(\lambda)) = p_m(\lambda)E + \frac{p'_m(\lambda)}{1!}B + \dots + \frac{p_m^{(h-1)}(\lambda)}{(h-1)!}B^{(h-1)}, \quad (4.7)$$

и в развернутой форме имеем:

$$p_m(J_h(\lambda)) =$$

$$= \begin{pmatrix} p_m(\lambda) & \frac{p_m'(\lambda)}{1!} & \frac{p_m''(\lambda)}{2!} & \frac{p_m'''(\lambda)}{3!} & \dots & \frac{p_m^{(h-1)}(\lambda)}{(h-1)!} \\ 0 & p_m(\lambda) & \frac{p_m'(\lambda)}{1!} & \frac{p_m''(\lambda)}{2!} & \dots & \frac{p_m^{(h-2)}(\lambda)}{(h-2)!} \\ 0 & 0 & p_m(\lambda) & \frac{p_m'(\lambda)}{1!} & \dots & \frac{p_m^{(h-3)}(\lambda)}{(h-3)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & p_m(\lambda) & \frac{p_m'(\lambda)}{1!} & \frac{p_m''(\lambda)}{2!} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & p_m(\lambda) & \frac{p_m'(\lambda)}{1!} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & p_m(\lambda) \end{pmatrix}.$$

Таким образом, для определения значения многочлена от одной жордановой клетки размером h , отвечающей собственному значению λ , достаточно знать значение многочлена и всех его производных до порядка $r = \min\{m, (h-1)\}$ включительно в точке $t = \lambda$. В результате мы приходим к следующей теореме.

Теорема 4.5. Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ – корни характеристического многочлена $p_m(t)$ матрицы A (собственные значения матрицы A). Приведем матрицу A к жордановой нормальной форме J . Пусть $h_1, \dots, h_k$ – максимальные размеры жордановых клеток, отвечающих собственным значениям $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, соответственно. Тогда элементы матрицы $p_m(J)$ однозначно определяются значениями многочлена $p_m(t)$ и его производных до порядка $r_j = \min\{m, (h_j - 1)\}$ включительно в точках λ_j , $j = 1, \dots, k$.

Замечание 4.5. Добавляя в многочлен $p_m(t)$ нулевые слагаемые, всегда можно считать, что $m \geq h_j - 1$, и тогда числа r_j в теореме 4.5 можно считать равными $h_j - 1$, $j = 1, \dots, k$.

Из теоремы 4.5 вытекает, что из равенства $p(A) = q(A)$ не следует тождественного равенства двух многочленов $p(t)$ и $q(t)$, а следуют лишь равенства

$$p(\lambda_j) = q(\lambda_j), \dots, p^{(h_j-1)}(\lambda_j) = q^{(h_j-1)}(\lambda_j), \quad j = 1, 2, \dots, k, \quad (4.8)$$

для всех собственных значений $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ матрицы, где $h_1, \dots, h_k$ – максимальные размеры жордановых клеток, отвечающих собственным значениям $\lambda_1, \dots, \lambda_k$.

Определение 4.5. Два многочлена $p(t)$ и $q(t)$ называются *совпадающими на спектре* матрицы A , если для них выполняются равенства (4.8).

4.4. Функции от матриц. Многочлен Лагранжа–Сильвестра

Рассмотрим матрицу $A \in \text{Mat}(n)$. Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ – корни характеристического многочлена матрицы A и все они лежат в $\mathbb{F}$, т.е. являются собственными значениями матрицы A . Пусть $h_1, \dots, h_k$ – максимальные размеры жордановых клеток, отвечающих собственным значениям $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, соответственно.

Определение 4.6. Рассмотрим функцию $f(t) : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}$. Будем говорить, что $f(t)$ определена на спектре матрицы A , если определены значения

$$f(\lambda_j), f'(\lambda_j), \dots, f^{(h_j-1)}(\lambda_j), \quad j = 1, \dots, k, \quad (4.9)$$

которые будем называть значениями функции $f(t)$ на спектре матрицы A .

Определение 4.7. Пусть задана функция $f(t) : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}$, определенная на спектре матрицы A , и пусть $p(t)$ – многочлен, значения

которого на спектре матрицы A совпадают с соответствующими значениями $f(t)$ на спектре матрицы A . Тогда положим $f(A) = p(A)$.

Таким образом, если $f(t)$ определена на спектре матрицы A и $A = TJT^{-1}$, то $f(A) = Tf(J)T^{-1}$, где $f(J) = \text{diag}(f(J_1), \dots, f(J_d))$ и для каждой жордановой клетки $J \equiv J_h(\lambda)$ размера h , отвечающей собственному значению λ имеем:

$$f(J_h(\lambda)) = \begin{pmatrix} f(\lambda) & \frac{f'(\lambda)}{1!} & \frac{f''(\lambda)}{2!} & \frac{f'''(\lambda)}{3!} & \dots & \frac{f^{(h-1)}(\lambda)}{(h-1)!} \\ 0 & f(\lambda) & \frac{f'(\lambda)}{1!} & \frac{f''(\lambda)}{2!} & \dots & \frac{f^{(h-2)}(\lambda)}{(h-2)!} \\ 0 & 0 & f(\lambda) & \frac{f'(\lambda)}{1!} & \dots & \frac{f^{(h-3)}(\lambda)}{(h-3)!} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & 0 & f(\lambda) & \frac{f'(\lambda)}{1!} & \frac{f''(\lambda)}{2!} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & f(\lambda) & \frac{f'(\lambda)}{1!} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & f(\lambda) \end{pmatrix}. \quad (4.10)$$

Отметим, что для вычисления функции от матрицы A по формулам (4.9), (4.10) необходимо знать жорданову нормальную форму матрицы A и матрицу T перехода к жорданову базису.

В силу определения 4.7 для вычисления функции f от матрицы заменяем эту функцию многочленом, совпадающим с функцией f на спектре матрицы.

Существует много многочленов, совпадающих с заданной функцией на спектре матрицы. Среди них выделим так называемый интерполяционный многочлен Лагранжа–Сильвестра.

Определение 4.8. Пусть функция $f(t)$ определена на спектре матрицы A . Многочлен $r_f(t)$, степени меньшей, чем степень минимального многочлена $m_A(t)$ матрицы A , и совпадающий на спектре матрицы A с функцией $f(t)$, называется интерполяционным многочленом Лагранжа–Сильвестра функции $f(t)$.

Теорема 4.6. Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ – корни характеристического многочлена матрицы A , и все они лежат в $\mathbf{F}$, т.е. являются собственными значениями матрицы A . Пусть функция $f(t)$ определена на спектре матрицы A . Тогда интерполяционный многочлен Лагранжа–Сильвестра функции $f(t)$ существует и единственен.

Доказательство. В силу теоремы 4.4 минимальный многочлен матрицы A имеет вид $m_A(t) = (t - \lambda_1)^{h_1} \cdot \dots \cdot (t - \lambda_k)^{h_k}$, где $h_1, \dots, h_k$ – максимальные размеры жордановых клеток, отвечающих собственным значениям $\lambda_1, \dots, \lambda_k$. Таким образом, степень минимального многочлена равна $h_1 + \dots + h_k \equiv s$.

Значение многочлена и его производных в фиксированной точке – это линейная комбинация его коэффициентов. Поэтому условия того, что многочлен принимает на спектре матрицы A заданные значения, определяют систему линейных алгебраических уравнений относительно его коэффициентов. Количество таких уравнений в силу (4.8) равно $h_1 + \dots + h_k = s$, т.е. равно степени минимального многочлена.

В теореме требуется найти многочлен $r_f(t)$, степень которого не превышает значения $s - 1$, поэтому неизвестных коэффициентов будет тоже s .

Таким образом, для нахождения интерполяционного многочлена Лагранжа–Сильвестра $r_f(t)$ функции $f(t)$ имеем систему линейных алгебраических уравнений порядка s . Теорема 4.6 будет доказана, если мы докажем, что эта система имеет и притом только единственное решение. В силу известной теоремы Крамера для этого достаточно доказать, что определитель матрицы системы отличен от нуля, что, в свою очередь, эквивалентно тому, что однородная система имеет только нулевое решение. Докажем последнее утверждение.

Действительно, однородная система соответствует случаю, когда искомым многочлен принимает на спектре матрицы A нулевые значения. Но тогда в силу теоремы 4.5 он будет аннулирующим для матрицы A . Поскольку его степень меньше степени минимального многочлена, то он должен равняться нулю. Теорема доказана.

Теорема 4.7. Пусть характеристический многочлен $P_n(t)$ матрицы A имеет n корней, лежащих в $\mathbb{F}$, кратности 1, т.е. имеет вид

$$P_n(t) = (t - \lambda_1) \cdots (t - \lambda_n),$$

$\lambda_1, \dots, \lambda_n$ – собственные значения матрицы A . Пусть функция $f(t)$ определена на спектре матрицы A . Тогда интерполяционный многочлен Лагранжа–Сильвестра для $f(t)$ имеет вид

$$\begin{aligned} r_f(t) &= \sum_{j=1}^n [f(\lambda_j) \cdot \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \frac{t - \lambda_i}{\lambda_j - \lambda_i}] \equiv \\ &\equiv \sum_{j=1}^n f(\lambda_j) \frac{(t - \lambda_1) \cdots (t - \lambda_{j-1})(t - \lambda_{j+1}) \cdots (t - \lambda_n)}{(\lambda_j - \lambda_1) \cdots (\lambda_j - \lambda_{j-1})(\lambda_j - \lambda_{j+1}) \cdots (\lambda_j - \lambda_n)}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Доказательство. В рассматриваемом случае минимальный многочлен $m_A(t) = (t - \lambda_1) \cdots (t - \lambda_n)$ имеет степень n . Многочлен, определенный по формуле (4.11), имеет степень не больше чем $n-1$. Условие равенства $r_f(t)$ и $f(t)$ на спектре матрицы A в нашем случае имеет вид

$$r_f(\lambda_i) = f(\lambda_i), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.12)$$

Проверим, что условия (4.12) для многочлена, определенного в (4.11), выполняются. Действительно,

$$r_f(\lambda_i) = \sum_{j=1}^n f(\lambda_j) \frac{(\lambda_i - \lambda_1) \cdots (\lambda_i - \lambda_{j-1})(\lambda_i - \lambda_{j+1}) \cdots (\lambda_i - \lambda_n)}{(\lambda_j - \lambda_1) \cdots (\lambda_j - \lambda_{j-1})(\lambda_j - \lambda_{j+1}) \cdots (\lambda_j - \lambda_n)}. \quad (4.13)$$

Все слагаемые в правой части (4.13) при $j \neq i$ равны нулю, поскольку в числителе одна из скобок обращается в нуль. Таким образом, в сумме остается только одно слагаемое при $j = i$:

$$r_f(\lambda_i) = \left[f(\lambda_j) \frac{(\lambda_i - \lambda_1) \cdots (\lambda_i - \lambda_{i-1})(\lambda_i - \lambda_{i+1}) \cdots (\lambda_i - \lambda_n)}{(\lambda_j - \lambda_1) \cdots (\lambda_j - \lambda_{i-1})(\lambda_j - \lambda_{i+1}) \cdots (\lambda_j - \lambda_n)} \right] \Bigg|_{j=i} = f(\lambda_i).$$

Итак, многочлен $r_f(t)$, определенный по формуле (4.11), равен функции $f(t)$ на спектре матрицы A , имеет степень меньшую, чем степень минимального многочлена, поэтому это искомым многочлен Лагранжа–Сильвестра. Теорема доказана.

Замечание 4.6. Положим $\omega_j(t) = m_A(t)(t - \lambda_j)^{-1}$, тогда формула (4.11) принимает более компактный вид

$$r_f(t) = \sum_{j=1}^n \omega_j(t) \frac{f(\lambda_j)}{\omega_j(\lambda_j)}, \quad (4.14)$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ – простые (не кратные) корни характеристического уравнения.

Теорема 4.8. Пусть минимальный многочлен $m_A(t)$ имеет вид

$$m_A(t) = \prod_{i=1}^k (t - \lambda_i)^{h_i} = (t - \lambda_1)^{h_1} \cdots (t - \lambda_k)^{h_k},$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbf{F}$ – все собственные числа матрицы A . Обозначим

$$\begin{aligned} \omega_j(t) &= \frac{m_A(t)}{(t - \lambda_j)^{h_j}} = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^k (t - \lambda_i)^{h_i} = \\ &= (t - \lambda_1)^{h_1} \cdots (t - \lambda_{j-1})^{h_{j-1}} (t - \lambda_{j+1})^{h_{j+1}} \cdots (t - \lambda_k)^{h_k}, \quad j = 1, \dots, k. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Пусть функция $f(t)$ определена на спектре матрицы A , тогда интерполяционный многочлен Лагранжа–Сильвестра для $f(t)$ имеет вид

$$r_f(t) = \sum_{j=1}^k \omega_j(t) \left\{ \frac{f(\lambda_j)}{\omega_j(\lambda_j)} + \frac{1}{1!} \left(\frac{f(t)}{\omega_j(t)} \right)' \Big|_{t=\lambda_j} \cdot (t - \lambda_j) + \dots + \right. \\ \left. + \frac{1}{(h_j - 1)!} \left(\frac{f(t)}{\omega_j(t)} \right)^{(h_j - 1)} \Big|_{t=\lambda_j} \cdot (t - \lambda_j)^{h_j - 1} \right\}. \quad (4.16)$$

Доказательство. Пусть $r_f(t)$ – интерполяционный многочлен Лагранжа–Сильвестра функции $f(t)$. Покажем, что он задается формулой (4.16). Поскольку степень интерполяционного многочлена Лагранжа–Сильвестра меньше степени интерполяционного многочлена $m_A(t)$, то дробь $\frac{r_f(t)}{m_A(t)}$ является правильной, и, следовательно, ее можно представить в виде суммы элементарных дробей:

$$\frac{r_f(t)}{m_A(t)} = \sum_{j=1}^k \left[\frac{\alpha_{j1}}{(t - \lambda_j)^{h_j}} + \frac{\alpha_{j2}}{(t - \lambda_j)^{h_j - 1}} + \dots + \frac{\alpha_{jh_j}}{(t - \lambda_j)} \right]. \quad (4.17)$$

Фиксируем $j = 1, \dots, k$ и выясним, чему равны числа α_{js} , $s = 1, 2, \dots, h_j$ при данном фиксированном j . Для этого умножим (4.17) на $(t - \lambda_j)^{h_j}$, и воспользуемся тем, что из определения функции $\omega_j(t)$ в (4.15) следует соотношение

$$m_A(t) = (t - \lambda_j)^{h_j} \omega_j(t).$$

Поэтому получаем

$$\begin{aligned}
\frac{r_f(t)}{\omega_j(t)} &= \alpha_{j1} + \alpha_{j2}(t - \lambda_j) + \dots + \alpha_{jh_j}(t - \lambda_j)^{h_j-1} + \\
&+ (t - \lambda_j)^{h_j} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^k \left[\frac{\alpha_{i1}}{(t - \lambda_i)^{h_i}} + \frac{\alpha_{i2}}{(t - \lambda_i)^{h_i-1}} + \dots + \frac{\alpha_{ih_i}}{(t - \lambda_i)} \right] \equiv \quad (4.18) \\
&\equiv \alpha_{j1} + \alpha_{j2}(t - \lambda_j) + \dots + \alpha_{jh_j}(t - \lambda_j)^{h_j-1} + \rho_j(t),
\end{aligned}$$

$$\text{где } \rho_j(t) = (t - \lambda_j)^{h_j} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^l \left[\frac{\alpha_{i1}}{(t - \lambda_i)^{h_i}} + \frac{\alpha_{i2}}{(t - \lambda_i)^{h_i-1}} + \dots + \frac{\alpha_{ih_i}}{(t - \lambda_i)} \right].$$

При этом из вида $\rho_j(t)$ следует, что $\rho_j(\lambda_j) = \dots = \rho_j^{(h_j-1)}(\lambda_j) = 0$.

Но тогда из (4.18) с учетом формулы Лейбница (правила дифференцирования произведения функций) получаем

$$\begin{aligned}
\alpha_{j1} &= \frac{r_f(t)}{\omega_j(t)} \Big|_{t=\lambda_j}, \\
\alpha_{j2} &= \frac{1}{1!} \left(\frac{r_f(t)}{\omega_j(t)} \right)' \Big|_{t=\lambda_j} \equiv \frac{1}{1!} \left\{ r_f(\lambda_j) \left(\frac{1}{\omega_j(t)} \right)' \Big|_{t=\lambda_j} + \frac{r'_f(\lambda_j)}{\omega_j(\lambda_j)} \right\}, \quad (4.19)
\end{aligned}$$

$$\alpha_{jh_j} = \frac{1}{(h_j-1)!} \left(\frac{r_f(t)}{\omega_j(t)} \right)^{(h_j-1)} \Big|_{t=\lambda_j} = \sum_{s=0}^{h_j-1} C_{h_j-1}^s r_f^{(s)}(\lambda_j) \left(\frac{1}{\omega_j(t)} \right)^{(h_j-1-s)} \Big|_{t=\lambda_j},$$

где $C_{h_j-1}^s$ — биномиальные коэффициенты.

Формулы (4.19) показывают, что числа α_{js} выражаются через значения $r_f(t)$ на спектре матрицы A , т.е. через числа $r_f(\lambda_j)$, $r'_f(\lambda_j)$, ..., $r_f^{(h_j-1)}(\lambda_j)$. Но многочлен $r_f(t)$ совпадает с функцией $f(t)$ на спектре матрицы A , поэтому получаем, что

$$\alpha_{j1} = \frac{f(t)}{\omega_k(t)} \Big|_{t=\lambda_j}, \quad \alpha_{j2} = \frac{1}{1!} \left(\frac{f(t)}{\omega_j(t)} \right)' \Big|_{t=\lambda_j}, \dots, \quad (4.20)$$

$$\alpha_{jh_j} = \frac{1}{(h_j-1)!} \left(\frac{f(t)}{\omega_j(t)} \right)^{(h_j-1)} \Big|_{t=\lambda_j}.$$

Формулы (4.20) справедливы для всех $j = 1, 2, \dots, k$. Тогда из (4.17) с учетом полученных для чисел α_{js} выражений (4.20) имеем представление для $r_f(t)$:

$$\begin{aligned} r_f(t) &= \sum_{j=1}^k \left[\frac{\alpha_{j1}}{(t-\lambda_j)^{h_j}} + \frac{\alpha_{j2}}{(t-\lambda_j)^{h_j-1}} + \dots + \frac{\alpha_{jh_j}}{(t-\lambda_j)} \right] m_A(t) = \\ &= \sum_{j=1}^k \left[\frac{\alpha_{j1}}{(t-\lambda_j)^{h_j}} + \frac{\alpha_{j2}}{(t-\lambda_j)^{h_j-1}} + \dots + \frac{\alpha_{jh_j}}{(t-\lambda_j)} \right] (t-\lambda_j)^{h_j} \omega_j(t) = \\ &= \sum_{j=1}^k \left[\alpha_{j1} + \alpha_{j2}(t-\lambda_j) + \dots + \alpha_{jh_j}(t-\lambda_j)^{h_j-1} \right] \omega_j(t) = \\ &= \sum_{j=1}^k \omega_j(t) \left\{ \frac{f(\lambda_j)}{\omega_j(\lambda_j)} + \frac{1}{1!} \left(\frac{f(t)}{\omega_j(t)} \right)' \Big|_{t=\lambda_j} \cdot (t-\lambda_j) + \dots + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{(h_j-1)!} \left(\frac{f(t)}{\omega_j(t)} \right)^{(h_j-1)} \Big|_{t=\lambda_j} \cdot (t-\lambda_j)^{h_j-1} \right\}, \end{aligned}$$

что совпадает с формулой (4.16). Теорема 4.8 доказана.

Замечание 4.7. Легко видеть, что формула (4.14) для представления интерполяционного многочлена Лагранжа–Сильвестра в случае простых корней характеристического многочлена является частным случаем общей формулы (4.15).

Пример 4.1. Найти e^A , если $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение.

1 способ

Из характеристического уравнения $\det(A - \lambda E) = 0$ находим собственные значения матрицы A : $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$.

Жорданова нормальная форма J матрицы A , матрица перехода T к жорданову базису и обратная матрица T^{-1} имеют вид

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\text{тогда } e^A = T \cdot e^J \cdot T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^2 & e-e^2 \\ 0 & e \end{pmatrix}.$$

2 способ

$$\begin{aligned} r_f(t) &= \sum_{j=1}^2 [e^{\lambda_j} \cdot \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^2 \frac{t - \lambda_i}{\lambda_j - \lambda_i}] = e^{\lambda_1} \frac{(t - \lambda_2)}{(\lambda_1 - \lambda_2)} + e^{\lambda_2} \frac{(t - \lambda_1)}{(\lambda_2 - \lambda_1)} \equiv \\ &\equiv e \frac{(t-2)}{(1-2)} + e^2 \frac{(t-1)}{(2-1)} = -e(t-2) + e^2(t-1) = (e^2 - e)t + (2e - e^2), \end{aligned}$$

тогда

$$\begin{aligned} e^A &= (e^2 - e)A + (2e - e^2)E = (e^2 - e) \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + (2e - e^2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2(e^2 - e) + (2e - e^2) & -(e^2 - e) \\ 0 & (e^2 - e) + (2e - e^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^2 & e - e^2 \\ 0 & e \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\text{Пример 4.2. Найти } e^A, \text{ если } A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение.

1 способ

Из характеристического уравнения $\det(A - \lambda E) = 0$ находим собственные значения матрицы A : $\lambda_1 = 1$ алгебраической кратности 2 и $\lambda_2 = 2$ тоже алгебраической кратности 2. Жорданова нормальная форма J матрицы A , матрица перехода T к жорданову базису и обратная матрица T^{-1} имеют, соответственно, вид:

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$f(J) = \begin{pmatrix} f(1) & \frac{f'(1)}{1!} & 0 & 0 \\ 0 & f(1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f(2) & \frac{f'(2)}{1!} \\ 0 & 0 & 0 & f(2) \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что $f(t) = e^t$ определена на спектре матрицы A , тогда

$$\begin{aligned} e^A &= T e^J T^{-1} = T \begin{pmatrix} e & e & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^2 & e^2 \\ 0 & 0 & 0 & e^2 \end{pmatrix} T^{-1} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & e & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^2 & e^2 \\ 0 & 0 & 0 & e^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} e & 2e & e^2 & 2e^2 \\ e & 2e & e^2 & e^2 \\ e & 2e & 0 & 0 \\ e & e & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^2 & -e^2 & 2e-e^2 & -e \\ e^2 & 0 & 2e-e^2 & -e \\ 0 & 0 & 2e & -e \\ 0 & 0 & e & 0 \end{pmatrix}.$$

2 способ

Из характеристического уравнения $\det(A - \lambda E) = 0$ находим собственные значения матрицы A : $\lambda_1 = 1$, алгебраической кратности 2 и $\lambda_2 = 2$ алгебраической кратности 2.

По формуле (4.16) имеем

$$r_f(t) = \sum_{j=1}^2 \omega_j(t) \left\{ \frac{f(\lambda_j)}{\omega_j(\lambda_j)} + \frac{1}{1!} \left(\frac{f(t)}{\omega_j(t)} \right)' \right|_{t=\lambda_j} \cdot (t - \lambda_j) \right\},$$

здесь

$$\omega_j(t) = \frac{m_A(t)}{(t - \lambda_j)^{h_j}} = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^2 (t - \lambda_i)^2, \quad j = 1, 2;$$

$$m_A(t) = (t - \lambda_1)^2 (t - \lambda_2)^2.$$

Тогда $\omega_1(t) = (t - \lambda_2)^2 = (t - 2)^2$, $\omega_2(t) = (t - \lambda_1)^2 = (t - 1)^2$,

$$\begin{aligned} r_f(t) &= \sum_{j=1}^2 \omega_j(t) \left\{ \frac{e^{\lambda_j}}{\omega_j(\lambda_j)} + \frac{1}{1!} \left(\frac{e^t}{\omega_j(t)} \right)' \right|_{t=\lambda_j} \cdot (t - \lambda_j) \right\} = \\ &= \omega_1(t) \left\{ \frac{e^{\lambda_1}}{\omega_1(\lambda_1)} + \frac{1}{1!} \left(\frac{e^t}{\omega_1(t)} \right)' \right|_{t=\lambda_1} \cdot (t - \lambda_1) \right\} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\omega_2(t) \left\{ \frac{e^{\lambda_2}}{\omega_2(\lambda_2)} + \frac{1}{1!} \left(\frac{e^t}{\omega_2(t)} \right)' \right\} \bigg|_{t=\lambda_2} \cdot (t-\lambda_2) \Bigg\} = \\
& = (t-2)^2 \left\{ \frac{e^1}{(1-2)^2} + \frac{1}{1!} \left(\frac{e^t}{(t-2)^2} \right)' \right\} \bigg|_{t=1} \cdot (t-1) \Bigg\} + \\
& + (t-1)^2 \left\{ \frac{e^2}{(2-1)^2} + \frac{1}{1!} \left(\frac{e^t}{(t-1)^2} \right)' \right\} \bigg|_{t=1} \cdot (t-2) \Bigg\} = \\
& = (t-2)^2 \{e + 3e(t-1)\} + (t-1)^2 \{e^2 - e^2(t-2)\}.
\end{aligned}$$

Раскрывая скобки и приводя подобные, имеем

$$r_f(t) = t^3(3e - e^2) + t^2(-14e + 5e^2) + t(20e - 7e^2) - 8e + 3e^2.$$

Подставляя вместо t матрицу A , с учетом того, что

$$A^2 = \begin{pmatrix} 8 & -4 & -1 & -2 \\ 4 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 20 & -12 & -4 & -3 \\ 12 & -4 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \end{pmatrix},$$

получили:

$$e^A = \begin{pmatrix} 2e^2 & -e^2 & 2e-e^2 & -e \\ e^2 & 0 & 2e-e^2 & -e \\ 0 & 0 & 2e & -e \\ 0 & 0 & e & 0 \end{pmatrix}.$$

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М.: Наука, 1987.
2. Беклемишев Д.В. Дополнительные главы линейной алгебры. – М.: Наука, 1983.
3. Беллман Р. Введение в теорию матриц. – М.: Наука, 1977.
4. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Физматлит, 2010.
5. Ланкастер П. Теория матриц. – М.: Наука, 1978.
6. Лаппо-Данилевский И.А. Применение функций от матриц к теории линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: ГИТТЛ, 1957.
7. Пароди М. Локализация характеристических чисел матриц и ее применения – М.: ИЛ, 1960.
8. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1974.
9. Сандаков Е.Б. Основы аналитической геометрии и линейной алгебры. – М.: МИФИ, 2005.
10. Шилов Г.Е. Математический анализ. Конечномерные линейные пространства. – М.: Наука, 1969.

Редактор Е.К. Коцарева

Подписано в печать 15.11.2013. Формат 60х84 1/16.

Уч.-изд.л. 11,25. Печ. л. 11,25. Тираж 400 экз.

Изд. № 1/38. Заказ № 34

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ».
115409, Москва, Каширское ш., 31.

ООО «Полиграфический комплекс «Курчатовский».
144000, Московская область, г. Электросталь, ул. Красная, 42.