МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ "МИФИ"

Т. И. Бухарова, В. Л. Камынин,
А. Б. Костин, Д. С. Ткаченко

Курс лекций по обыкновенным дифференциальным уравнениям

Рекомендовано УМО “Ядерные физика и технологии”
в качестве учебного пособия
для студентов высших учебных заведений

Москва 2011

УДК 517.9
ББК 22.161.6
Б94

Бухарова Т.И., Камынин В.Л., Костин А.Б., Ткаченко Д.С. **Курс лекций по обыкновенным дифференциальным уравнениям**: Учебное пособие. – М.: НИЯУ МИФИ, 2011. – 228 с.

Учебное пособие создано на основе курса лекций, читаемого авторами в Московском инженерно-физическом институте на протяжении многих лет. Предназначено для студентов НИЯУ МИФИ всех факультетов, а также для студентов вузов с повышенной математической подготовкой.

Пособие подготовлено в рамках Программы создания и развития НИЯУ МИФИ.

Рецензент: доктор физ.-мат. наук *Н.А. Кудряшов*.

ISBN 978-5-7262-1400-9

Оглавление

ПРЕДИСЛОВИЕ

При подготовке книги авторы ставили своей целью собрать в одном месте и изложить в доступной форме сведения по большинству вопросов, связанных с теорией обыкновенных дифференциальных уравнений. Поэтому помимо материала, входящего в обязательную программу курса обыкновенных дифференциальных уравнений, читаемого в НИЯУ МИФИ (и в других вузах), в пособие вошли и дополнительные вопросы, на которые, как правило, не хватает времени на лекциях, но которые будут полезны для лучшего понимания предмета и пригодятся нынешним студентам в их дальнейшей профессиональной деятельности.

Ко всем утверждениям предлагаемого пособия даны математически строгие доказательства. Эти доказательства, как правило, не являются оригинальными, но все переработаны в соответствии со стилем изложения математических курсов в МИФИ. По широко распространенному среди преподавателей и ученых мнению, математические дисциплины следует изучать с полными и подробными доказательствами, двигаясь постепенно от простого к сложному. Авторы данного пособия придерживаются такого же мнения.

Приводимые в книге теоретические сведения подкрепляются разбором достаточного количества примеров, что, как мы надеемся, упростит читателю изучение материала.

Пособие адресовано студентам вузов с повышенной математической подготовкой, в первую очередь, студентам НИЯУ МИФИ. При этом оно также будет полезно всем, кто интересуется теорией дифференциальных уравнений и использует этот раздел математики в своей работе.

Глава I.

Введение в теорию обыкновенных дифференциальных уравнений

1.1. Основные понятия

Всюду в пособии через $\langle a,\ b\rangle$ будем обозначать любое из множеств $(a,\ b)$, $[a,\ b]$, $(a,\ b]$, $[a,\ b)$, $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$.

Пусть Ω – некоторое множество в $\mathbb{R}^{n+2}$. Рассмотрим функцию $F(x,\, p_0,\, p_1, \ldots,\, p_n)$, заданную на Ω, $n \geqslant 1$.

Определение 1.1. Соотношение

$$F\left(x,\, y,\, y',\, \ldots,\, y^{(n)}\right) = 0 \tag{1.1}$$

при условии, что $\dfrac{\partial F}{\partial p_n} \not\equiv 0$ на Ω, называется **обыкновенным дифференциальным уравнением (ОДУ) n-го порядка** (не разрешенным относительно старшей производной).

Определение 1.2. Решением уравнения (1.1) на $\langle a,\ b\rangle$ называется функция $y = \varphi(x) \in C^n\big(\langle a,\ b\rangle\big)$ такая, что

1) $\big(x,\, \varphi(x),\, \varphi'(x),\, \ldots,\, \varphi^{(n)}(x)\big) \in \Omega \quad \forall\, x \in \langle a,\ b\rangle$;

2) $\forall\, x \in \langle a,\ b\rangle \quad F\left(x,\, \varphi(x),\, \varphi'(x),\, \ldots,\, \varphi^{(n)}(x)\right) \equiv 0$.

Другими словами, решением уравнения (1.1) называется функция $\varphi(x)$ $\big($класса $C^n\big(\langle a,\ b\rangle\big)\big)$, которая при подстановке ее в уравнение (1.1) обращает его в верное равенство $\forall\, x \in \langle a,\ b\rangle$.

Пример 1.1. Рассмотрим уравнение

$$y' = f(x), \quad x \in \langle a,\ b\rangle, \quad f(x) \in C\big(\langle a,\ b\rangle\big). \tag{1.2}$$

Очевидно, что функция

$$\varphi(x) \equiv \int f(x)\, dx + C$$

является решением этого уравнения. Это проверяется непосредственной подстановкой функции $\varphi(x)$ в уравнение (1.2).

Таким образом, решение уравнения (1.2) определено неоднозначно.

Данный факт, как мы увидим в дальнейшем, является общей ситуацией для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Если решение обыкновенного дифференциального уравнения выражается через интегралы от заданных функций (например, как примере 1.1), то говорят, что такое **уравнение решается в квадратурах**.

Чаще всего мы будем рассматривать частный случай уравнения (1.1) вида

$$y^{(n)} = f\left(x,\, y,\, y',\, \ldots,\, y^{(n-1)}\right). \tag{1.3}$$

Определение 1.3. Уравнение (1.3) называется **обыкновенным дифференциальным уравнением n-го порядка, разрешенным относительно старшей производной**.

При $n = 1$ имеем уравнение

$$y' = f\,(x,\, y)\,, \tag{1.4}$$

которое является ОДУ 1-го порядка, разрешенным относительно старшей производной.

На практических занятиях часто рассматривают ОДУ, заданные в дифференциалах

$$M(x,\ y)dx + N(x,\ y)dy = 0, \qquad (x,\ y) \in G, \tag{1.5}$$

где G – некоторая область в $\mathbb{R}^2$.

В этом случае переменные x и y являются равноправными: можно считать x – независимой переменной, а y – неизвестной функцией, а можно наоборот: y – независимой переменной, а x – неизвестной функцией.

Очевидно, что если $N(x,\ y) \neq 0$ в G, то уравнение (1.5) может быть переписано в виде

$$y' = -\,\frac{M(x,\ y)}{N(x,\ y)},$$

т.е. в виде (1.4).

Решением уравнения (1.5) является либо функция $y = \varphi(x) \in C^1\left(\langle a,\ b\rangle\right)$, такая, что

1) $\big(x,\ \varphi(x)\big) \in G \qquad \forall\, x \in \langle a,\ b\rangle$,

2) $M\big(x,\ \varphi(x)\big)dx + N\big(x,\ \varphi(x)\big)dy = 0, \qquad \forall\, x \in \langle a,\ b\rangle$;

либо функция $x = \psi(y) \in C^1\left(\langle c,\ d\rangle\right)$, такая, что

1) $\big(\psi(y),\ y\big) \in G \qquad \forall\, y \in \langle c,\ d\rangle$,

2) $M\big(\psi(y),\ y\big)dx + N\big(\psi(y),\ y\big)dy = 0, \qquad \forall\, y \in \langle c,\ d\rangle$.

Мы будем также рассматривать системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Ограничимся системами из ОДУ 1-го порядка.

Определение 1.4. Система уравнений вида

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x,\, y_1,\, \ldots,\, y_n), \\ \ldots \\ y_n' = f_n(x,\, y_1,\, \ldots,\, y_n) \end{cases} \tag{1.6}$$

называется **нормальной системой n-го порядка** (n – количество уравнений в системе).

Здесь $f_i(x,\, y_1,\, \ldots,\, y_n)$, $\quad i = 1,\, 2,\, \ldots,\, n,$ – функции $(n+1)$ переменной, определенные на некотором множестве $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

Вводя векторные обозначения

$$y = (y_1,\, \ldots,\, y_n), \qquad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \qquad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix},$$

систему (1.6) можно переписать в векторной форме

$$y\,' = f\big(x,\ y\big), \tag{1.6}$$

аналогичной по виду уравнению (1.4).

Определение 1.5. Аналогично случаю одного уравнения, **решением системы** (1.6) **на** $\langle a,\ b\rangle$ назовем вектор-функцию $y = \varphi(x) \in C^1\big(\langle a,\ b\rangle\big)$, такую, что при подстановке ее в (1.6) мы получим верное равенство $\forall\, x \in \langle a,\ b\rangle$.

Замечание 1.1. Нетрудно видеть, что одно уравнение n-го порядка, разрешенное относительно старшей производной (т.е. уравнение вида (1.3)), может быть сведено к нормальной системе n-го порядка.

Действительно, рассмотрим уравнение (1.3) и обозначим

$$y_1(x) = y(x), \quad y_2(x) = y\,'(x), \quad \ldots, \quad y_n(x) = y^{(n-1)}(x).$$

Тогда в силу очевидного равенства

$$y^{(n)}(x) = y_n'(x)$$

уравнению (1.3) можно сопоставить нормальную систему

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = y_3, \\ \ldots \\ y_{n-1}' = y_n, \\ y_n' = f(x,\, y_1,\, \ldots,\, y_n). \end{cases}$$

В силу данного замечания исследование уравнений высокого порядка, разрешенных относительно старшей производной, можно свести к исследованию нормальных систем (из уравнений 1-го порядка). Мы неоднократно будем пользоваться этим в дальнейшем. Рассмотрим несколько примеров на введенные выше понятия.

Пример 1. 2.

$$(y'')^3 + y' \cdot y^5 + \cos x = 0 \quad -$$

это ОДУ 2-го порядка, не разрешенное относительно старшей производной.

Пример 1. 3.

$$y''' = (y')^2 + \cos x \cdot y \cdot y' \quad -$$

это ОДУ 3-го порядка, разрешенное относительно старшей (третьей) производной.

Пример 1. 4.

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = y_3, \\ y_3' = y_2^2 + \cos x \cdot y_1 \cdot y_2 \end{cases} \quad -$$

это нормальная система 3-го порядка, соответствующая ОДУ 3-го порядка из примера 1. 3.

Определение 1. 6. Всякое решение $y(x) \equiv \big(y_1(x), \ldots, y_n(x)\big)$ системы (1.6) можно геометрически интерпретировать как кривую в $(n+1)$-мерном пространстве переменных $(x, y_1, \ldots, y_n)$, которая называется **интегральной кривой**.

Другими словами, интегральная кривая – это график решения системы (1.6) в пространстве переменных $(x, y_1, \ldots, y_n)$.

В дальнейшем мы, как правило, не будем различать понятия «решение» и «интегральная кривая».

Определение 1. 7. Пространство переменных $(y_1, \ldots, y_n)$ называется **фазовым пространством**, а проекция интегральной кривой на фазовое пространство – **фазовой траекторией**.

Замечание 1. 2. Пусть $n = 3$. Если переменную x интерпретировать как время, то решение системы (1.6) представляет собой закон движения материальной точки в зависимости от времени, а фазовая траектория – это ни что иное, как траектория движения этой материальной точки в пространстве.

Снова рассмотрим систему (1.6).

Пусть функции $f_i(x, y_1, \ldots, y_n)$, $\;i = 1, 2, \ldots, n$, определены в некоторой области $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ переменных $(x, y_1, \ldots, y_n)$. Тогда система (1.6) определяет в каждой точке $\left(x^0, y_1^0, \ldots, y_n^0\right) \in G$ направление, задаваемое вектором

$$\tau = \Big\{1,\ f_1\left(x^0, y_1^0, \ldots, y_n^0\right),\ \ldots,\ f_n\left(x^0, y_1^0, \ldots, y_n^0\right)\Big\}.$$

Совокупность точек области G и соответствующих им векторов τ определяет так называемое **поле направлений**.

Очевидно, интегральная кривая системы (1.6) касается направлений τ в каждой точке (рис. 1.1). Заметим, что поле направлений можно построить и не зная самого решения системы (1.6).

Данное обстоятельство позволяет получить представление о поведении решения системы (1.6), не находя самого решения. Для этого можно использовать метод изоклин, который помогает построить поле направлений.

Рассмотрим для простоты случай $n = 1$. Тогда система (1.6) переходит в уравнение (1.4).

Определение 1.8. Изоклиной (линией равного наклона) для уравнения (1.4) называют геометрическое место точек $(x,\ y)$, для которых

$$f(x,\ y) \equiv k = \text{const}.$$

Заметим, что для интегральной кривой уравнения (1.4), проходящей через точку $(x,\ y)$, k – это тангенс угла наклона касательной к этой интегральной кривой в данной точке.

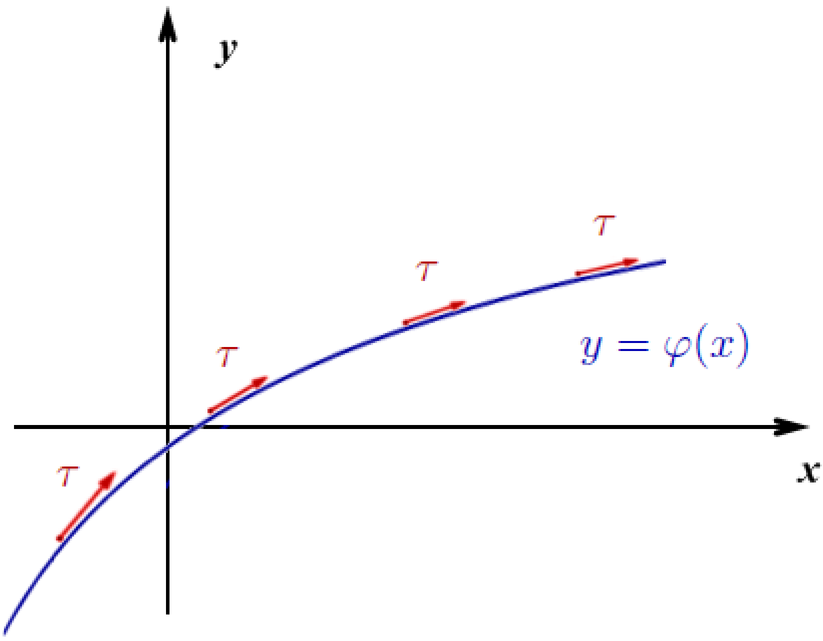

Рис. 1.1. $y = \varphi(x)$ – решение уравнения $y' = f(x,\ y)$ $(n = 1)$; $\tau = \left\{1,\ f(x,\ y)\right\}$ – касательный вектор к интегральной кривой в точке $(x,\ y)$.

Построим для некоторого множества чисел k изоклины $f(x,\ y) = k$. Затем через точки каждой изоклины проведем короткие отрезки под углом α к оси Ox, где $\operatorname{tg}\alpha = k$. Получим поле направлений.

По этому полю направлений строим (конечно, приближенно) интегральные кривые – графики решений уравнения (рис. 1.2).

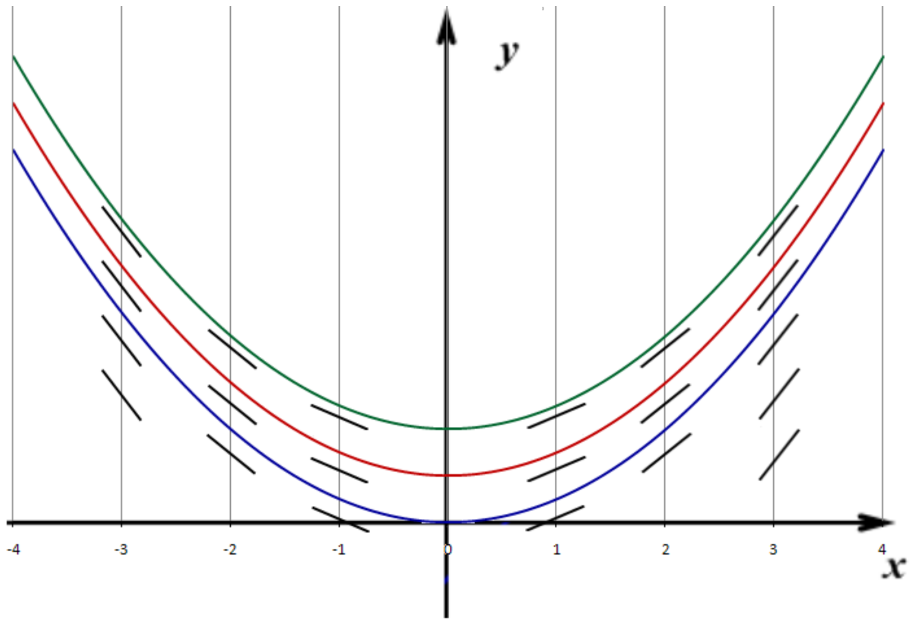

Рис. 1.2. Поле направлений уравнения $y' = x$.

Таким образом, мы получаем общее представление о поведении всех решений данного уравнения.

1.2. Задача Коши

Как было отмечено в примере 1.1, решение обыкновенного дифференциального уравнения (а также и системы ОДУ) определено, вообще говоря, неоднозначно.

Определение 1.9. Общим решением обыкновенного дифференциального уравнения (системы ОДУ) называется совокупность всех частных решений этого уравнения (этой системы).

Замечание 1.3. Рассмотрим уравнение

$$y' = f(x,\, y). \tag{1.7}$$

Как правило, общее решение этого уравнения может быть записано в виде $y = \varphi(x,\, c)$, где c – произвольная постоянная. Это означает:

1) $\forall\ c^* \in \mathbb{R} \quad y = \varphi(x,\, c^*)$ – является частным решением уравнения (1.7);

2) $\forall$ частного решения $y = \tilde{\varphi}(x)$ уравнения (1.7) $\ \exists\ \tilde{c} \in \mathbb{R}$ такая, что $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x,\, \tilde{c})$.

Пример 1.5. Рассмотрим уравнение

$$y' = 4x^2, \qquad x \in (0,\ 1).$$

Тогда $\varphi(x,\, c) \equiv \frac{4}{3}\,x^3 + C$ – общее решение этого уравнения.

Поставим вопрос о дополнительных условиях, с помощью которых можно выделить однозначно конкретное частное решение ОДУ или системы ОДУ.

Во многих случаях таким дополнительным условием является задание так называемых **начальных условий**. В частности, для системы

$$y' = f(x,\, y) \tag{1.8}$$

начальные условия задаются в виде

$$y(x_0) = y^0, \tag{1.9}$$

где $y^0 = \begin{pmatrix} y_1^0 \\ \vdots \\ y_n^0 \end{pmatrix}$ – заданный числовой вектор, $\left(x_0,\, y_1^0,\, \ldots,\, y_n^0\right) \in G$.

Определение 1. 10. Задача нахождения решения ОДУ или системы ОДУ с заданными начальными условиями называется **задачей Коши**.

Выпишем явно постановки задачи Коши в разных конкретных случаях.

1) В соответствии с определением 1. 10 задача Коши для системы (1.8) заключается в нахождении решения $y(x)$ этой системы, удовлетворяющего начальному условию (1.9). Коротко задача Коши в этом случае может быть записана в виде

$$\begin{cases} y' = f(x,\, y), \\ y(x_0) = y^{\,0}, \qquad \left(x_0,\, y_1^0,\, \ldots,\, y_n^0\right) \in G. \end{cases}$$

2) В частном случае одного уравнения первого порядка задача Коши на $\langle a,\, b\rangle$ записывается в виде

$$\begin{cases} y' = f(x,\, y), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

или в более общем случае

$$\begin{cases} F(x,\, y,\, y') = 0, \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

Здесь $x_0 \in \langle a,\, b\rangle$, а y_0 – заданное число.

В силу замечания 1. 1, связывающего одно уравнение n-го порядка, разрешенное относительно старшей производной, с некоторой нормальной системой n-го порядка, задача Коши на промежутке $\langle a,\, b\rangle$ для такого уравнения имеет вид

$$\begin{cases} y^{(n)} = f\left(x,\, y,\, y',\, \ldots,\, y^{(n-1)}\right), \\ y(x_0) = y_1^0, \\ y'(x_0) = y_2^0, \\ \ldots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_n^0; \end{cases}$$

здесь $x_0 \in \langle a,\ b\rangle$, $y_1^0,\ y_2^0,\ \ldots,\ y_n^0$ – некоторые заданные числа.

Замечание 1.4. Геометрическая интерпретация задачи Коши для системы (1.8) заключается в том, чтобы построить интегральную кривую этой системы, проходящую через заданную точку $\left(x_0,\ y_1^0,\ \ldots,\ y_n^0\right)$ (рис. 1.3) для случая $n = 1$ (т.е. для уравнения (1.7)).

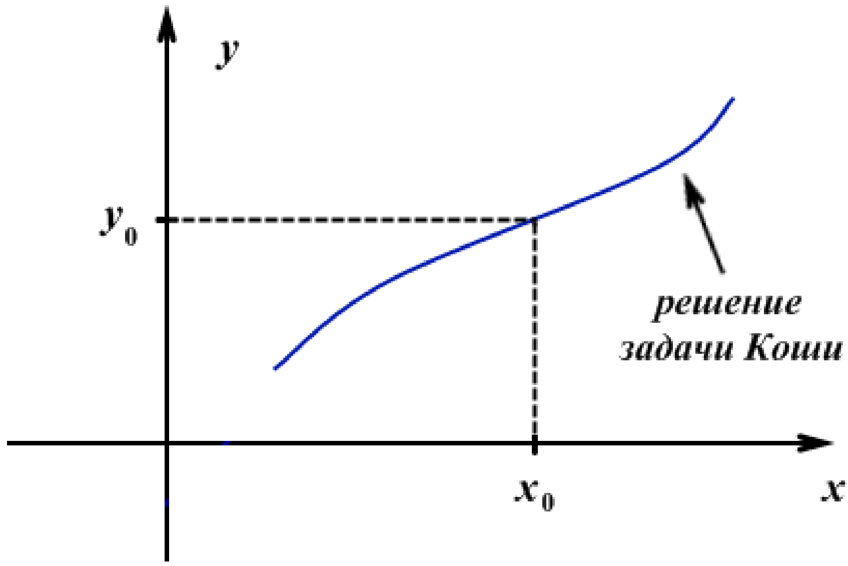

Рис. 1.3. Интегральная кривая

Глава II.

Существование и единственность решения задачи Коши для уравнения 1-го порядка

2. 1. Теорема единственности для ОДУ первого порядка

Рассмотрим задачу Коши для уравнения первого порядка, разрешенного относительно производной. Требуется найти функцию $y(x)$, удовлетворяющую уравнению:

$$y\,' = f(x,\, y), \qquad (x,\, y) \in G \tag{2.1}$$

и начальному условию

$$y(x_0) = y_0, \qquad (x_0,\, y_0) \in G, \tag{2.2}$$

где заданная функция $f(x,\, y)$ определена в области $G \subseteq \mathbb{R}^2$, а точка $(x_0,\, y_0) \in G$ – фиксированная точка этой области.

Напомним, что по определению, область – это открытое и связное множество. Замкнутая область – это область с присоединенной границей, т.е. $G = G \cup \partial G$. В этой главе через G будем обозначать область $\mathbb{R}^2$, открытую, замкнутую или содержащую часть точек границы G, сохранив название области.

Как отмечалось в главе 1, геометрически это означает, что мы ищем интегральную кривую уравнения (2.1), проходящую через заданную точку $(x_0,\, y_0)$ области G. Возникает вопрос: при каких условиях через $(x_0,\, y_0)$ проходит единственная интегральная кривая (график решения) уравнения (2.1)? Этот вопрос очень важен в прикладных задачах, т.е. задачах моделирования процессов природы. Если единственность решения задачи (2.1), (2.2) нарушается, а в природе мы этого не наблюдаем, то это говорит о несоответствии наших модельных представлений о процессе самому этому процессу. В этом случае требуется уточнение модели. Таким образом, единственность решения, как правило (но, конечно же, не всегда), является необходимым условием (атрибутом), присущим математической модели, адекватной реальному процессу.

Перейдем теперь к исследованию задачи (2.1), (2.2). Для этого сначала напомним некоторые определения, приведем примеры и докажем вспомогательные утверждения.

Определение 2.1. Решением задачи Коши на промежутке $\langle a,\ b\rangle$ называется определенная и дифференцируемая на $\langle a,\ b\rangle$ функция $\varphi(x)$, удовлетворяющая условиям:

1) $\forall\, x \in \langle a,\ b\rangle$ точка $(x,\ \varphi(x)) \in G$;

2) $\forall\, x \in \langle a,\ b\rangle \qquad \varphi'(x) = f\,(x,\ \varphi(x))$;

3) $\varphi(x_0) = y_0$.

Здесь, конечно, подразумевается, что $x_0 \in \langle a,\ b\rangle$.

Если для $\varphi(x)$ выполняются условия 1) и 2), то она называется решением уравнения (2.1) на $\langle a,\ b\rangle$.

Отметим, что без требований некоторой «гладкости» функции $f(x,\, y)$ в уравнении (2.1), его решения может не существовать. Если для частного случая функции $f = f(x)$, т.е. независящей от y, предположить, что $f(x)$ имеет разрыв первого рода в некоторой точке $(a,\ b)$, то уравнение $y' = f(x)$ не имеет решений в смысле определения 2.1 на $(a,\ b)$. Связано это с тем, что производная дифференцируемой на $(a,\ b)$ функции не может иметь разрыв первого рода $\big($на $(a,\ b)\big)$. В качестве примера возьмем

$$f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

и рассмотрим уравнение

$$y' = f(x) \quad \text{на интервале} \quad (-1,\ 1),$$

решением которого является любая первообразная $f(x) = \operatorname{sgn} x$ на $(-1,\ 1)$. Однако у этой функции не существует первообразной на указанном интервале. В самом деле, предположив, что существует дифференцируемая на $(-1,\ 1)$ функция $F(x)$, такая, что $F'(x) = \operatorname{sgn} x$ на $(-1,\ 1)$, получим:

$F'(x) = 1$ при $x > 0$, $F'(x) = -1$ при $x < 0$ и, следовательно,

$F(x) = x + C_1$ при $x > 0$, $F(x) = -x + C_2$ при $x < 0$.

Функция $F(x)$ – непрерывна на $(-1,\ 1)$ по необходимому условию дифференцируемости, поэтому

$$C_2 = \lim_{x\to 0-} F(x) = \lim_{x\to 0+} F(x) = C_1, \qquad \text{т.е. } C_1 = C_2 = C$$

и $F(x) = |x| + C$ на $(-1,\ 1)$, а у последней функции не существует $F'(0)$. Следовательно, уравнение $y' = \operatorname{sgn} x$ не имеет на $(-1,\ 1)$ дифференцируемого решения. Этот пример показывает, что даже для упрощенного уравнения (2.1), когда $f = f(x)$, требование непрерывности правой части, а точнее – отсутствия разрывов первого рода, является необходимым условием существования решения. Поэтому всюду в дальнейшем считаем, что $f(x,\, y) \in C(G)$.

Определение 2.2. Пусть $f(x, y)$ определена и непрерывна в области G. **Решением уравнения** (2.1) **на промежутке** $\langle a, \ b\rangle$ называется функция $y = \varphi(x)$, определенная и дифференцируемая на $\langle a, \ b\rangle$, удовлетворяющая условиям:

1) $\forall\, x \in \langle a, \ b\rangle$ точка $(x, \ \varphi(x)) \in G$;

2) $\forall\, x \in \langle a, \ b\rangle \qquad \varphi'(x) = f\,(x, \ \varphi(x))$.

Замечание 2.1. Если a или b принадлежат $\langle a, \ b\rangle$, то в определениях 2.1 и 2.2 подразумевается односторонняя производная в соответствующей точке.

Замечание 2.2. Из определения 2.2 следует, что $\varphi'(x) = f\big(x, \ \varphi(x)\big)$ – непрерывная на промежутке $\langle a, \ b\rangle$ функция, так как $f(x, y) \in C(G)$, а функция $\varphi(x) \in D\Big(\langle a, \ b\rangle\Big)$ и, следовательно, непрерывна на $\langle a, \ b\rangle$, т.е. $\varphi \in C^1\Big(\langle a, \ b\rangle\Big)$.

Замечание 2.3. Можно доказать, что условие $f \in C(G)$ является достаточным для существования решения уравнения (2.1). Однако только непрерывность $f(x, y)$ ещё не гарантирует единственности решения задачи Коши (2.1), (2.2). Например, рассмотрим следующую задачу:

$$y' = 3\sqrt[3]{y^2},$$

$$y(1) = 0,$$

а в качестве $\langle a, \ b\rangle$ возьмем $\mathbb{R}$. Общее решение этого уравнения включает в себя совокупность функций:

$$\left[\begin{array}{l} y = 0, \\ y = (x + C)^3. \end{array}\right.$$

Это получается при помощи следующего рассуждения, называемого «разделением переменных» (подробнее см. п. 4.1).

Пусть $y(x)$ – решение уравнения, не равное нулю хотя бы в одной точке $x_0 \in \mathbb{R}$. Тогда в окрестности этой точки справедливо равенство

$$\frac{dy(x)}{3\,y^{2/3}(x)} = dx,$$

интегрируя которое найдем, что $y = (x + C)^3$ в окрестности точки x_0. Непосредственной проверкой убеждаемся, что $y = (x+C)^3$ – это решение уравнения при всех $x \in \mathbb{R}$. Кроме того, функция $y \equiv 0$, очевидно, также является решением.

Подставляя начальное условие, найдем $C = -1$. Таким образом, имеем два решения задачи Коши: $y \equiv 0$ и $y = (x - 1)^3$, единственность нарушается.

В дальнейшем мы приведем некоторые достаточные условия единственности решения задачи Коши (2.1), (2.2), а сейчас докажем ряд вспомогательных утверждений.

Лемма 2.1 (Неравенство Гронуолла–Беллмана). *Пусть функции* $u(x),\ v(x) \in C\Big(\langle a,\ b\rangle\Big)$ *удовлетворяют условиям:*

$$u(x) \geqslant 0, \quad v(x) \geqslant 0, \quad \text{на } \langle a,\ b\rangle, \ \text{ а } C = \text{const} \geqslant 0,$$

x_0 *– фиксированная точка* $\langle a,\ b\rangle$. *Пусть при всех* $x \in [x_0,\ b\rangle$ *выполнено неравенство*

$$u(x) \leqslant C + \int\limits_{x_0}^{x} u(t)v(t)\,dt. \tag{2.3}$$

Тогда $\forall\, x \in [x_0,\ b\rangle$

$$u(x) \leqslant C \cdot \exp\left[\,\int\limits_{x_0}^{x} v(t)\,dt\right]. \tag{2.4}$$

Доказательство. Рассмотрим два возможных случая.
1. Пусть $C > 0$. Тогда при $x \geqslant x_0$

$$C + \int\limits_{x_0}^{x} u(t)v(t)\,dt > 0$$

и неравенство (2.3) равносильно неравенству $\frac{u(x)}{C+\int\limits_{x_0}^{x} u(t)v(t)\,dt} \leqslant 1$, умножив левую и правую часть которого на $v(x) \geqslant 0$, получим $\frac{u(x)v(x)}{C+\int\limits_{x_0}^{x} u(t)v(t)\,dt} \leqslant v(x)$ или $\frac{d}{dx}\ \ln\left[C + \int\limits_{x_0}^{x} u(t)v(t)\,dt\right] \leqslant v(x)$. Проинтегрировав по отрезку $[x_0,\ x]$, получим

$$\ln\left[C + \int\limits_{x_0}^{x} u(t)v(t)\,dt\right] - \ln C \leqslant \int\limits_{x_0}^{x} v(t)\,dt.$$

После потенцирования последнего неравенства и применения (2.3) имеем

$$u(x) \leqslant C + \int\limits_{x_0}^{x} u(t)v(t)\,dt \leqslant C \cdot \exp\left[\,\int\limits_{x_0}^{x} v(t)\,dt\right]$$

при всех $x \in [x_0,\ b\rangle$, т.е. (2.4) – выполнено.
2. Пусть теперь $C = 0$. Из неравенства (2.3) следует, что

$$u(x) \leqslant \int\limits_{x_0}^{x} u(t)v(t)\,dt < \varepsilon + \int\limits_{x_0}^{x} u(t)v(t)\,dt$$

$\forall\, \varepsilon > 0$ и $\forall\, x \in [x_0,\, b\rangle$.

По доказанному случаю 1 получаем, что

$$u(x) \leqslant \varepsilon \cdot \exp\left[\int\limits_{x_0}^{x} v(t)\, dt\right] \qquad \forall\, \varepsilon > 0.$$

Последнее возможно лишь при $u(x) \leqslant 0$, а по условию $u(x) \geqslant 0$, следовательно, $u(x) \equiv 0$ на $x \in [x_0,\, b\rangle$, и неравенство (2.4) выполнено. Лемма доказана. □

Замечание 2.4. В неравенство (2.3) функция $u(x)$ входит в обе части, а в (2.4) – только в левую часть. В таком случае неравенство вида (2.4) принято называть оценкой (оценкой сверху) для функции $u(x)$.

Определение 2.3. Пусть функция $F(x,\, y)$ определена и непрерывна в области $G \subseteq \mathbb{R}^2$. Говорят, что **функция F удовлетворяет условию Липшица по переменной y в** G, если

$$\exists\, L = \text{const} \geqslant 0: \quad \forall\, (x,\, y_1),\ (x,\, y_2) \in G$$

$$\text{выполняется неравенство} \quad |F(x,\, y_2) - F(x,\, y_1)| \leqslant L \cdot |y_2 - y_1|\, .$$

В этом случае L называется **константой Липшица** функции $F(x,\, y)$ в G.

Какие же функции удовлетворяют условию Липшица и как оценить константу Липшица?

Определение 2.4. Область $G \subseteq \mathbb{R}^2$ называется **выпуклой по** y, если $\forall\, (x_0,\, y_1),\ (x_0,\, y_2) \in G$ весь отрезок, соединяющий эти точки, лежит в G.

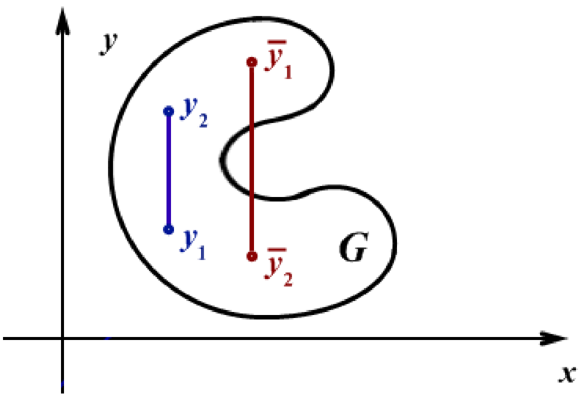

Рис. 2.1. G не является выпуклой по y

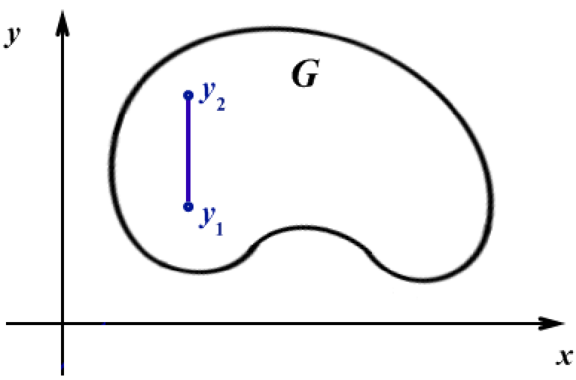

Рис. 2.2. G является выпуклой по y

Утверждение 2.1.
Если $F,\ F'_y \in C(G)$; $\exists\, L \geqslant 0: \left|\frac{\partial}{\partial y} F(x,\, y)\right| \leqslant L \quad \forall\, (x,\, y) \in G$, *а область* G $\big(G \subseteq \mathbb{R}^2\big)$ *является выпуклой по* y, *то функция* $F(x,\, y)$ *удовлетворяет условию Липшица по* y *с константой* L.

Доказательство. Запишем
$F(x,\, y_2) - F(x,\, y_1) = F_y{}'(x,\ \theta \cdot y_1 + (1-\theta) \cdot y_2) \cdot (y_2 - y_1)$ по теореме Лагранжа, а тогда из условия имеем

$$|F(x,\, y_2) - F(x,\, y_1)| = \left|\frac{\partial F}{\partial y}\right| \cdot |y_2 - y_1| \leqslant L \cdot |y_2 - y_1|\,.$$

Утверждение доказано. □

Следствие. *Если* $F,\ F_y{}' \in C\big(G\big)$, *а* G *– замкнутая ограниченная область (компакт) в* $\mathbb{R}^2$, *выпуклая по* y, *то функция* $F(x,\, y)$ *удовлетворяет условию Липшица по* y.

Доказательство. По условию $F_y{}'(x,\, y)$ – непрерывная функция на ограниченном замкнутом множестве G. По теореме Вейерштрасса $F_y{}'$ ограничена на G и достигает на нем своих точных граней.

Обозначим $L = \max\limits_G \big|F_y{}'(x,\, y)\big|$, $L \geqslant 0$. По утверждению 2.1 получим, что F удовлетворяет в G условию Липшица с константой L. Следствие доказано. □

Замечание 2.5. Существование непрерывной на компакте G производной $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ гарантирует, что $f(x,\, y)$ удовлетворяет условию Липшица по y в G, т.е. существование непрерывной $f_y{}'$ – это достаточное условие *липшицевости* по y функции $f(x,\, y)$. Это условие не является необходимым, т.е. не всякая функция, удовлетворяющая условию Липшица по y, имеет непрерывную производную $f_y{}'$. Приведем соответствующий пример. Рассмотрим функцию

$$f(x,\, y) = \sin x \cdot |y| \quad \text{на компакте} \quad G = [-1,\, 1] \times [-1,\, 1].$$

Оценим разность

$$\begin{aligned} |f(x,\, y_2) - f(x,\, y_1)| = \big|\sin x\big| \cdot \Big|\big|y_1\big| - \big|y_2\big|\Big| \leqslant \\ \leqslant \big|y_1 - y_2\big| \qquad \text{при всех} \quad (x,\, y) \in G. \end{aligned}$$

Таким образом, f удовлетворяет условию Липшица с $L = 1$ $\Big($на самом деле даже с $L = \sin 1\Big)$ по y. Однако производной $f_y{}'$ в точках $(x,\, 0) \neq (0,\, 0)$ даже не существует.

Следующая теорема, интересная сама по себе, позволит доказать единственность решения задачи Коши.

Теорема 2.1 (Об оценке разности двух решений). *Пусть* G *– область в* $\mathbb{R}^2$, *а* $f(x,\, y) \in C\big(G\big)$ *и удовлетворяет в* G *условию Липшица по* y *с константой* L. *Если* $y_1,\ y_2$ *– два решения уравнения* $y\,' = f(x,\, y)$ *на отрезке* $[x_0,\ x_1]$, *то справедливо неравенство (оценка):*

$$|y_2(x) - y_1(x)| \leqslant |y_2(x_0) - y_1(x_0)| \cdot \exp\big[L(x - x_0)\big]$$

при всех $x \in [x_0,\ x_1]$.

Доказательство. По определению 2.2 решения уравнения (2.1) получим, что $\forall\ x \in [x_0,\ x_1]$ точки $\big(x,\ y_1(x)\big)$ и $\big(x,\ y_2(x)\big) \in G$. Для всех $t \in [x_0,\ x_1]$ имеем верные равенства

$$y_1'(t) = f\big(t,\ y_1(t)\big) \quad \text{и} \quad y_2'(t) = f\big(t,\ y_2(t)\big),$$

которые проинтегрируем по t на отрезке $[x_0,\ x]$, где $x \in [x_0,\ x_1]$. Интегрирование законно, так как правая и левая части – это непрерывные на $[x_0,\ x_1]$ функции. Получим систему равенств

$$y_1(x) - y_1(x_0) = \int\limits_{x_0}^{x} f\big(t,\ y_1(t)\big)\, dt,$$
$$y_2(x) - y_2(x_0) = \int\limits_{x_0}^{x} f\big(t,\ y_2(t)\big)\, dt.$$

Вычитая одно из другого, имеем

$$|y_1(x) - y_2(x)| = \left| y_1(x_0) - y_2(x_0) + \int\limits_{x_0}^{x} \Big[f\big(t,\ y_1(t)\big) - f\big(t,\ y_2(t)\big) \Big]\, dt \right| \leqslant$$
$$\leqslant \Big| y_1(x_0) - y_2(x_0) \Big| + \int\limits_{x_0}^{x} \Big| f\big(t,\ y_1(t)\big) - f\big(t,\ y_2(t)\big) \Big|\, dt \leqslant$$
$$\leqslant \Big| y_1(x_0) - y_2(x_0) \Big| + \int\limits_{x_0}^{x} L \cdot \big| y_1(t) - y_2(t) \big|\, dt.$$

Обозначим $C = \Big| y_1(x_0) - y_2(x_0) \Big| \geqslant 0$, $v(t) = L \geqslant 0$, $u(t) = \Big| y_1(t) - y_2(t) \Big| \geqslant 0$. Тогда по неравенству Гронуолла–Беллмана получим оценку:

$$|y_2(x) - y_1(x)| \leqslant |y_2(x_0) - y_1(x_0)| \cdot \exp\big[L(x - x_0) \big]$$

при всех $x \in [x_0,\ x_1]$. Теорема доказана. □

В качестве следствия доказанной теоремы получим теорему единственности решения задачи Коши (2.1), (2.2).

Следствие 1. *Пусть функция* $f(x,\ y) \in C\big(G\big)$ *и удовлетворяет в* G *условию Липшица по* y, *а функции* $y_1(x)$ *и* $y_2(x)$ *– два решения уравнения* (2.1) *на одном и том же отрезке* $[x_1,\ x_2]$, *причем* $x_0 \in [x_1,\ x_2]$.
Если $y_1(x_0) = y_2(x_0)$, *то* $y_1(x) \equiv y_2(x)$ *на* $[x_1,\ x_2]$.

Доказательство. Рассмотрим два случая.

1. Пусть $x \geqslant x_0$, тогда из теоремы 2.1 следует, что

$$\bigl|y_1(x) - y_2(x)\bigr| \leqslant 0 \cdot \exp\Bigl[L(x - x_0)\Bigr], \qquad \text{т.е.} \quad y_1(x) \equiv y_2(x)$$

при $x \geqslant x_0$.

2. Пусть $x \leqslant x_0$, сделаем замену $t = -x$, тогда $y_i(x) = y_i(-t) \equiv \tilde{y}_i(t)$ при $i = 1, 2$. Поскольку $x \in [x_1,\ x_0]$, то $t \in [-x_0,\ -x_1]$ и выполнено равенство $\tilde{y}_1(-x_0) = \tilde{y}_2(-x_0)$. Выясним, какому уравнению удовлетворяют $\tilde{y}_i(t)$. Верна следующая цепочка равенств:

$$\frac{d}{dt}\,\tilde{y}_i(t) = -\,\frac{d\tilde{y}_i(x)}{dx} = -f\bigl(x,\ y_i(x)\bigr) = -f\left(-t,\ \tilde{y}_i(t)\right).$$

Здесь мы воспользовались правилом дифференцирования сложной функции и тем, что $y_i(x)$ – это решения уравнения (2.1).

Так как функция $\tilde{f}(t,\ y) \equiv -f(-t,\ y)$ непрерывна и удовлетворяет условию Липшица по y, то по теореме 2.1 имеем, что $\tilde{y}_1(t) \equiv \tilde{y}_2(t)$ на $[-x_0,\ -x_1]$, т.е. $y_1(x) \equiv y_2(x)$ на $[x_1,\ x_0]$.

Объединяя оба рассмотренных случая, получим утверждение следствия. $\square$

Следствие 2. (о непрерывной зависимости от начальных данных) *Пусть функция* $f(x,\ y) \in C\bigl(G\bigr)$ *и удовлетворяет в* G *условию Липшица по* y *с константой* L, *а функции* $y_1(x)$ *и* $y_2(x)$ *– это решения уравнения* (2.1), *определенные на* $[x_0,\ x_1]$. *Обозначим* $l = x_1 - x_0$ *и* $\delta = \bigl|y_1(x_0) - y_2(x_0)\bigr|$. *Тогда при* $\forall\, x \in [x_0,\ x_1]$ *справедливо неравенство*

$$\bigl|y_1(x) - y_2(x)\bigr| \leqslant \delta \cdot e^{L \cdot l}.$$

Доказательство следует сразу из теоремы 2.1.

Неравенство из следствия 2 называют **оценкой устойчивости решения по начальным данным**. Смысл его заключается в том, что если при $x = x_0$ решения «близки», то и на конечном отрезке $[x_0,\ x_1]$ они тоже «близки».

Теорема 2.1 дает важную для приложений оценку модуля разности двух решений, а следствие 1 – единственность решения задачи Коши (2.1), (2.2). Имеются также и другие достаточные условия единственности, одно из которых мы сейчас приведем. Как отмечалось выше, геометрически единственность решения задачи Коши означает, что через точку $(x_0,\ y_0)$ области G может проходить не более одной интегральной кривой уравнения (2.1).

Теорема 2.2 (Осгуда о единственности). *Пусть функция* $f(x,\ y) \in C\bigl(G\bigr)$ *и для* $\forall\,(x,\ y_1),\ (x,\ y_2) \in G$ *выполняется неравенство* $\bigl|f(x,\ y_1) - f(x,\ y_2)\bigr| \leqslant \varphi\bigl(|y_1 - y_2|\bigr)$, *где* $\varphi(u) > 0$ *при* $u \in (0, \beta]$, $\varphi(u)$ *непрерывна, а* $\displaystyle\int\limits_{\varepsilon}^{\beta} \frac{du}{\varphi(u)} \to +\infty$, *когда* $\varepsilon \to 0+$. *Тогда через точку* $(x_0,\ y_0)$ *области* G *проходит не более одной интегральной кривой* (2.1).

Доказательство. Пусть существует два решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ уравнения (2.1), такие, что $y_1(x_0) = y_2(x_0) = y_0$, обозначим $z(x) = y_2(x) - y_1(x)$.

Так как $\dfrac{dy_i}{dx} = f(x,\ y_i)$, при $i = 1,\ 2$, то для $z(x)$ справедливо равенство

$$\frac{dz}{dx} = f(x,\ y_2) - f(x,\ y_1).$$

Тогда $\left|z \cdot \dfrac{dz}{dx}\right| = \bigl|f(x,\ y_2) - f(x,\ y_1)\bigr| \cdot |z| \leqslant \varphi\bigl(|z|\bigr) \cdot |z|$, т.е. справедливо неравенство $\dfrac{1}{2}\left|\dfrac{d}{dx}\,|z|^2\right| \leqslant \varphi\bigl(|z|\bigr) \cdot |z|$, из которого при $|z| \neq 0$ следует такое двойное неравенство:

$$-\int\limits_{x_1}^{x_2} dx \leqslant \int\limits_{|z_1|}^{|z_2|} \frac{d\,|z|^2}{2 \cdot |z|\varphi\bigl(|z|\bigr)} \leqslant \int\limits_{x_1}^{x_2} dx, \tag{2.5}$$

где интегрирование проводится по любому отрезку $[x_1,\ x_2]$, на котором $\bigl|z(x)\bigr| > 0$, а $z_i = z(x_i)$, $i = 1,\ 2$. По предположению, $z(x) \not\equiv 0$ и, кроме того, непрерывна, поэтому такой отрезок найдется, выберем его и фиксируем. Рассмотрим множества

$$\mathrm{X}_1 = \Bigl\{x \Bigm| x < x_1 \ \text{ и } \ z(x) = 0\Bigr\},$$

$$\mathrm{X}_2 = \Bigl\{x \Bigm| x > x_2 \ \text{ и } \ z(x) = 0\Bigr\}.$$

Хотя бы одно из этих множеств не пусто, так как $z(x_0) = 0$ и $x_0 \notin [x_1,\ x_2]$.

Пусть, например, $\mathrm{X}_1 \neq \varnothing$, оно ограничено сверху, поэтому $\exists\ \alpha = \sup \mathrm{X}_1$. Отметим, что $z(\alpha) = 0$, т.е. $\alpha \in \mathrm{X}_1$, поскольку предположив, что $\bigl|z(\alpha)\bigr| > 0$, в силу непрерывности будем иметь $\bigl|z(x)\bigr| > 0$ на некотором интервале $\bigl(\alpha - \delta_1,\ \alpha + \delta_1\bigr)$, а это противоречит определению $\alpha = \sup \mathrm{X}_1$. Из условия $z(\alpha) = 0$ следует, что $\alpha < x_1$. По построению $\bigl|z(x)\bigr| > 0$ при всех $x \in (\alpha,\ x_2]$, а в силу непрерывности $\bigl|z(x)\bigr| \to 0+$ при $x \to \alpha + 0$.

Повторим рассуждения при выводе (2.5), интегрируя по отрезку $[\alpha + \delta,\ x_2]$, где x_2 выбрано выше и фиксировано, а $\delta \in (0,\ x_2 - \alpha)$ – произвольное, получим неравенство:

$$-\int\limits_{\alpha+\delta}^{x_2} dx \leqslant \int\limits_{|z(\alpha+\delta)|}^{|z_2|} \frac{d\,|z|^2}{2 \cdot |z|\varphi\bigl(|z|\bigr)} \leqslant \int\limits_{\alpha+\delta}^{x_2} dx.$$

В этом двойном неравенстве устремим $\delta \to 0+$, тогда $\bigl|z(\alpha+\delta)\bigr| \to \bigl|z(\alpha)\bigr| = 0$, из непрерывности $z(x)$, а тогда интеграл $\displaystyle\int\limits_{|z(\alpha+\delta)|}^{|z_2|} \frac{d\,|z|^2}{2 \cdot |z|\varphi\bigl(|z|\bigr)} \longrightarrow +\infty$, по условию теоремы.

Правая же часть неравенства $\int\limits_{\alpha+\delta}^{x_2} dx = x_2 - \alpha - \delta \leqslant x_2 - \alpha$ ограничена сверху конечной величиной, что одновременно невозможно.

Полученное противоречие доказывает теорему. □

2.2. Существование решения задачи Коши для ОДУ первого порядка

Напомним, что под задачей Коши (2.1), (2.2) понимается следующая задача нахождения функции $y(x)$:

$$\begin{cases} y' = f(x,\, y), & (x,\, y) \in G, \\ y(x_0) = y_0, & (x_0,\, y_0) \in G, \end{cases}$$

где $f(x,\, y) \in C\big(G\big)$ и $(x_0,\, y_0) \in G$; G – область в $\mathbb{R}^2$.

Лемма 2.2. *Пусть* $f(x,\; y) \in C\Big(G\Big)$. *Тогда имеют место следующие утверждения:*

1) *всякое решение* $\varphi(x)$ *уравнения* (2.1) *на промежутке* $\langle a,\; b\rangle$, *удовлетворяющее* (2.2) $\big(x_0 \in \langle a,\; b\rangle\big)$, *является решением на* $\langle a,\; b\rangle$ *интегрального уравнения*

$$y(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f\big(\tau,\; y(\tau)\big)\, d\tau; \tag{2.6}$$

2) *если* $\varphi(x) \in C\big(\langle a,\; b\rangle\big)$ *– решение интегрального уравнения* (2.6) *на* $\langle a,\; b\rangle$, *где* $x_0 \in \langle a,\; b\rangle$, *то* $\varphi(x) \in C^1\big(\langle a,\; b\rangle\big)$ *и является решением* (2.1), (2.2).

Доказательство.

1. Пусть $\varphi(x)$ решение (2.1), (2.2) на $\langle a,\; b\rangle$. Тогда по замечанию 2.2 $\varphi(x) \in C\big(\langle a,\; b\rangle\big)$ и $\forall\ \tau \in \langle a,\; b\rangle$ имеем равенство $\varphi'(\tau) = f\big(\tau,\; \varphi(\tau)\big)$, интегрируя которое от x_0 до x, получим (при любом $x \in \langle a,\; b\rangle$)
$\varphi(x) - \varphi(x_0) = \int\limits_{x_0}^{x} f\big(\tau,\; \varphi(\tau)\big)\, d\tau$, причем $\varphi(x_0) = y_0$, т.е. $\varphi(x)$ – решение (2.6).

2. Пусть $y = \varphi(x) \in C\big(\langle a,\; b\rangle\big)$ – решение (2.6). Так как $f\big(x,\; \varphi(x)\big)$ непрерывна на $\langle a,\; b\rangle$ по условию, то

$$\varphi(x) \equiv y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f\big(\tau,\; \varphi(\tau)\big)\, d\tau \;\in\; C^1\big(\langle a,\; b\rangle\big)$$

как интеграл с переменным верхним пределом от непрерывной функции. Дифференцируя последнее равенство по x, получим $\varphi'(x) = f\big(x,\; \varphi(x)\big)$ $\forall\ x \in \langle a,\; b\rangle$ и, очевидно, $\varphi(x_0) = y_0$, т.е. $\varphi(x)$ – решение задачи Коши (2.1), (2.2). (Как обычно, под производной на конце отрезка понимается соответствующая односторонняя производная.) □

Замечание 2.6. Лемму 2.2 называют **леммой об эквивалентности задачи Коши** (2.1), (2.2) **интегральному уравнению** (2.6). Если докажем, что решение уравнения (2.6) существует, то получим разрешимость и задачи Коши (2.1), (2.2). Этот план реализован в следующей теореме.

Теорема 2.3 (Локальная теорема существования)**.** *Пусть прямоугольник* $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ |x - x_0| \leqslant \alpha, \ |y - y_0| \leqslant \beta\}$ *целиком лежит в* G *– области определения функции* $f(x, y)$*. Функция* $f(x, y) \in C(G)$ *и удовлетворяет условию Липшица по* y *в* G *с константой* L*. Обозначим* $M = \max\limits_P \{|f(x, y)|\}$, $h = \min\left\{\alpha, \frac{\beta}{M}\right\}$*. Тогда на отрезке* $[x_0 - h, \ x_0 + h]$ *существует решение задачи Коши* (2.1), (2.2).

Доказательство. На отрезке $[x_0-h, \ x_0+h]$ установим существование решения интегрального уравнения (2.6). Для этого рассмотрим следующую последовательность функций:

$$y_0(x) = y_0, \qquad y_1(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f\big(\tau, \ y_0(\tau)\big)\, d\tau, \quad \ldots$$

$$y_n(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f\big(\tau, \ y_{n-1}(\tau)\big)\, d\tau, \quad \text{и т.д.}$$

1. Покажем, что $\forall\, n \in \mathbb{N}$ функции y_n (последовательные приближения) – определены, т.е. покажем, что при $\forall \ x \in [x_0 - h, \ x_0 + h]$ выполняется неравенство $\big|y_n(x) - y_0\big| \leqslant \beta$ для всех $n = 1, \ 2, \ \ldots$ Воспользуемся методом математической индукции (ММИ):

а) базис индукции: $n = 1$.

$$\big|y_1(x) - y_0\big| = \left|\int\limits_{x_0}^{x} f\big(\tau, \ y_0(\tau)\big)\, d\tau\right| \leqslant M_0 \cdot \big|x - x_0\big| \leqslant M \cdot h \leqslant \beta,$$

где $M_0 = \max\left\{\big|f(x, \ y_0)\big| \ \text{при} \ |x - x_0| \leqslant \alpha\right\}$, $M_0 \leqslant M$;

б) предположение и шаг индукции. Пусть неравенство верно для $y_{n-1}(x)$, докажем его для $y_n(x)$:

$$\big|y_n(x) - y_0\big| = \left|\int\limits_{x_0}^{x} f\big(\tau, \ y_{n-1}(\tau)\big)\, d\tau\right| \leqslant M \cdot \big|x - x_0\big| \leqslant M \cdot h \leqslant \beta.$$

Итак, если $|x - x_0| \leqslant h$, то $\big|y_n(x) - y_0\big| \leqslant \beta \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Нашей ближайшей целью будет доказательство сходимости последовательности $\{y_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$, для этого ее удобно представить в виде:

$$y_n = y_0 + \sum_{k=1}^{n} \big[y_k(x) - y_{k-1}(x)\big] = y_0 + y_1 - y_0 + y_2 - y_1 + \ldots + y_n - y_{n-1},$$

т.е. последовательности частичных сумм функционального ряда.

2. Оценим члены этого ряда, доказав следующие неравенства $\forall\, n \in \mathbb{N}$ и $\forall\, x \in [x_0 - h,\ x_0 + h]$:

$$\big|y_n(x) - y_{n-1}\big| \leqslant M_0 L^{n-1} \cdot \frac{|x - x_0|^n}{n!} \leqslant M_0 L^{n-1} \cdot \frac{h^n}{n!}. \tag{2.7}$$

Применим метод математической индукции:

а) базис индукции: $n = 1$.

$$\big|y_1(x) - y_0\big| \leqslant M_0 \cdot \big|x - x_0\big| \leqslant M_0 \cdot h,$$

доказано выше;

б) предположение и шаг индукции. Пусть неравенство верно для $n - 1$, докажем его для n:

$$\big|y_n(x) - y_{n-1}\big| = \left|\int\limits_{x_0}^{x} \Big|f\big(\tau,\ y_{n-1}(\tau)\big) - f\big(\tau,\ y_{n-2}(\tau)\big)\Big|\, d\tau\right| \leqslant$$

$$\leqslant \Big[\text{по условию Липшица}\Big] \leqslant L \left|\int\limits_{x_0}^{x} \big|y_{n-1} - y_{n-2}\big|\, d\tau\right| \leqslant$$

$$\leqslant \Big[\text{по предположению индукции}\Big] \leqslant L \left|\int\limits_{x_0}^{x} M_0 L^{n-2} \cdot \frac{|\tau - x_0|^{n-1}}{(n-1)!}\, d\tau\right| =$$

$$= \frac{M_0 L^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \left|\int\limits_{x_0}^{x} |\tau - x_0|^{n-1}\, d\tau\right| = \frac{M_0 L^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \frac{|x - x_0|^n}{n} \leqslant \frac{M_0 L^{n-1}}{n!} \cdot h^n.$$

Здесь мы воспользовались тем, что интеграл $I = \left|\int\limits_{x_0}^{x} |\tau - x_0|^{n-1}\, d\tau\right|$:

при $x > x_0$ $\qquad I = \int\limits_{x_0}^{x} (\tau - x_0)^{n-1}\, d\tau = \dfrac{(x - x_0)^n}{n}$ и

при $x < x_0$ $\qquad I = \int\limits_{x_0}^{x} (x_0 - \tau)^{n-1}\, d\tau = \frac{(x_0 - x)^n}{n} = \dfrac{|x - x_0|^n}{n}$.

Таким образом, неравенства (2.7) доказаны.

3. Рассмотрим тождество $y_n = y_0 + \sum\limits_{k=1}^{n} \big[y_k(x) - y_{k-1}(x)\big]$ и связанный с ним функциональный ряд: $y_0 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \big[y_k(x) - y_{k-1}(x)\big]$. Частичные суммы этого ряда равны $y_n(x)$, поэтому, доказав его сходимость, получим сходимость последовательности $\big\{y_k(x)\big\}_{k=0}^{\infty}$.

В силу неравенств (2.7) функциональный ряд мажорируется на отрезке $[x_0 - h,\ x_0 + h]$ числовым рядом $\sum\limits_{k=1}^{\infty} M_0 L^{k-1} \cdot \dfrac{h^k}{k!}$. Этот числовой ряд сходится по признаку Даламбера, так как

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{M_0 \cdot L^k \cdot h^{k+1}}{(k+1)!} \cdot \frac{k!}{M_0 \cdot L^{k-1} \cdot h^k} = \frac{h \cdot L}{k+1} \longrightarrow 0, \qquad k \to \infty.$$

Тогда по признаку Вейерштрасса о равномерной сходимости функциональный ряд $y_0 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \big[y_k(x) - y_{k-1}(x)\big]$ сходится абсолютно и равномерно на отрезке $[x_0 - h,\ x_0 + h]$, следовательно и функциональная последовательность $\big\{y_k(x)\big\}_{k=0}^{\infty}$ сходится равномерно на отрезке $[x_0 - h,\ x_0 + h]$ к некоторой функции $\varphi(x)$, а так как $y_n(x) \in C\big([x_0 - h,\ x_0 + h]\big)$, то и $\varphi(x) \in C\big([x_0 - h,\ x_0 + h]\big)$ как предел равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций.

4. Рассмотрим определение $y_n(x)$:

$$y_n(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f\big(\tau,\ y_{n-1}(\tau)\big)\, d\tau \tag{2.8}$$

– это верное равенство при всех $n \in \mathbb{N}$ и $x \in [x_0 - h,\ x_0 + h]$.

У левой части равенства (2.8) существует предел при $n \to \infty$, так как $y_n(x) \rightrightarrows \varphi(x)$ на $[x_0 - h,\ x_0 + h]$, поэтому и у правой части (2.8) тоже существует предел (тот же самый). Покажем, что он равен функции $y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f\big(\tau,\ \varphi(\tau)\big)\, d\tau$, используя для этого следующий критерий равномерной сходимости функциональной последовательности:

$$\left(y_n(x) \overset{\mathrm{X}}{\rightrightarrows} \varphi(x) \ \text{ при } \ n \to \infty\right) \Longleftrightarrow \left(\sup_{x \in \mathrm{X}} \big|y_n(x) - y(x)\big| \to 0 \ \text{ при } \ n \to \infty\right).$$

Напомним, что обозначение $y_n(x) \overset{\mathrm{X}}{\rightrightarrows} \varphi(x)$ при $n \to \infty$ принято использовать для равномерной на множестве X сходимости функциональной последовательности $\big\{y_k(x)\big\}_{k=0}^{\infty}$ к функции $\varphi(x)$.

Покажем, что $y_0+\int\limits_{x_0}^{x} f\bigl(\tau,\ y_{n-1}(\tau)\bigr)\ d\tau \overset{\mathrm{X}}{\rightrightarrows} y_0+\int\limits_{x_0}^{x} f\bigl(\tau,\ \varphi(\tau)\bigr)\ d\tau$, при $k\to\infty$ здесь $\mathrm{X}=[x_0-h,\ x_0+h]$. Для этого рассмотрим

$$\sup_{x\in\mathrm{X}}\left|\int\limits_{x_0}^{x}\Bigl(f\bigl(\tau,\ y_{n-1}(\tau)\bigr)-f\bigl(\tau,\ \varphi(\tau)\bigr)\Bigr)\ d\tau\right|\leqslant$$

$$\leqslant\Bigl[\text{по условию Липшица}\Bigr]\leqslant\sup_{x\in\mathrm{X}} L\left|\int\limits_{x_0}^{x}\bigl|y_{n-1}(\tau)-\varphi(\tau)\bigr|\ d\tau\right|\leqslant$$

$$\leqslant L\cdot h\cdot\sup_{\tau\in\mathrm{X}}\bigl|y_{n-1}(\tau)-\varphi(\tau)\bigr|\longrightarrow 0\quad\text{при}\ \ n\to\infty$$

в силу равномерной при $n\to\infty$ сходимости $y_n(x)\overset{\mathrm{X}}{\rightrightarrows}\varphi(x)$. Таким образом, переходя к пределу в (2.8), получим при всех $x\in[x_0-h,\ x_0+h]$ верное равенство

$$\varphi(x)=y_0+\int\limits_{x_0}^{x} f\bigl(\tau,\ \varphi(\tau)\bigr)\ d\tau,$$

в котором $\varphi(x)\in C\bigl([x_0-h,\ x_0+h]\bigr)$. По доказанной выше лемме 2. 2 $\varphi(x)$ – решение задачи Коши (2.1), (2.2). Теорема доказана. $\square$

Замечание 2. 7. В теореме 2. 3 установлено существование решения на отрезке $[x_0-h,\ x_0+h]$. По следствию 1 из теоремы 2. 1 это решение единственно в том смысле, что любое другое решение задачи Коши (2.1), (2.2), определенное на $[x_0-h,\ x_0+h]$ совпадает с ним на этом отрезке.

Замечание 2. 8. Представим прямоугольник P в виде объединения двух (пересекающихся) прямоугольников $P=P^-\cup P^+$, (рис. 2. 3) где

$$P^-=\Bigl\{(x,\,y)\ \Big|\ \ x\in[x_0-\alpha,\ x_0];\quad |y-y_0|\leqslant\beta\Bigr\},$$

$$P^+=\Bigl\{(x,\,y)\ \Big|\ \ x\in[x_0,\ x_0+\alpha];\quad |y-y_0|\leqslant\beta\Bigr\}.$$

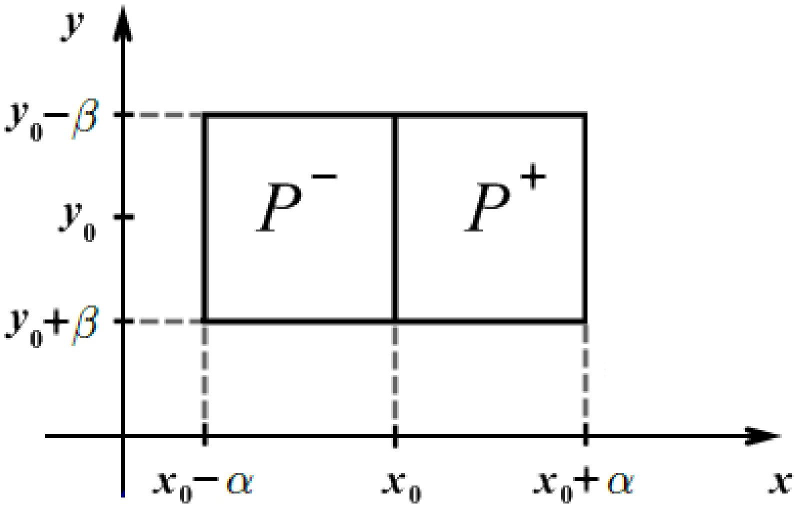

Рис. 2.3. Объединение прямоугольников

Обозначим

$$M^+ = \max_{P^+} \bigl|f(x,\, y\bigr|, \qquad M^- = \max_{P^-} \bigl|f(x,\, y\bigr|.$$

Повторяя, с очевидными изменениями, доказательство теоремы 2.3 отдельно для P^+ $\bigl($или $P^-\bigr)$, получим существование (и единственность) решения на отрезке

$[x_0,\ x_0+h^+]$, где $h^+ = \min\Bigl\{\alpha,\ \frac{\beta}{M^+}\Bigr\}$ $\Bigl($или, соответственно, на $[x_0-h^-,\ x_0]$, $h^- = \min\Bigl\{\alpha,\ \frac{\beta}{M^-}\Bigr\}\Bigr)$. Отметим, что при этом, вообще говоря, $h^+\neq h^-$, а h из теоремы 2.3 есть минимум из h^+ и h^-.

Замечание 2.9. Существование решения задачи (2.1), (2.2) теоремой 2.3 гарантируется лишь на некотором отрезке $[x_0-h,\ x_0+h]\subseteq[x_0-\alpha,\ x_0+\alpha]$. В таком случае говорят, что **теорема является локальной**. Возникает вопрос: не является ли локальный характер теоремы 2.3 следствием примененного метода ее доказательства? Может быть, используя другой метод доказательства, можно установить существование решения на всем отрезке $[x_0-\alpha,\ x_0+\alpha]$, т.е. **глобально**, как это было со свойством единственности решения задачи Коши (2.1), (2.2)?

Следующий пример показывает, что локальный характер теоремы 2.3 связан с «существом» задачи, а не с методом ее доказательства.

Пример 2.1. Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} y\,' = -y^2, \\ y(0) = 1 \end{cases} \tag{2.9}$$

в прямоугольнике $P = \Bigl\{(x,\, y)\ \Big|\ |x|\leqslant 2,\quad |y-1|\leqslant 1\Bigr\}$. Функция $f(x,\, y) = -y^2$ непрерывна в P и $f_y' = -2y\in C\bigl(P\bigr)$, поэтому все условия теоремы 2.3 выполнены, а $M = \max\limits_P \bigl|f(x,\, y)\bigr| = 4$. Тогда $h = \min\limits_P\left\{\dfrac{\beta}{M},\ \alpha\right\} = \dfrac{1}{4}$ и теорема 2.3 гарантирует существование решения на отрезке $\left[-\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4}\right]$. Решим эту задачу Коши, используя «разделение переменных»:

$$-\frac{dy}{y^2} = dx \quad \Longleftrightarrow \quad y(x) = \frac{1}{x+C}.$$

Подставляя $x = 0$, найдем $C = 1$ и $y(x) = \dfrac{1}{x+1}$ – решение задачи Коши (2.9).

График решения представлен на рис. (2.4), из которого видно, что решение при $x < x_* = -\dfrac{1}{2}$ покидает прямоугольник P, а при $x \leqslant -1$ даже не существует.

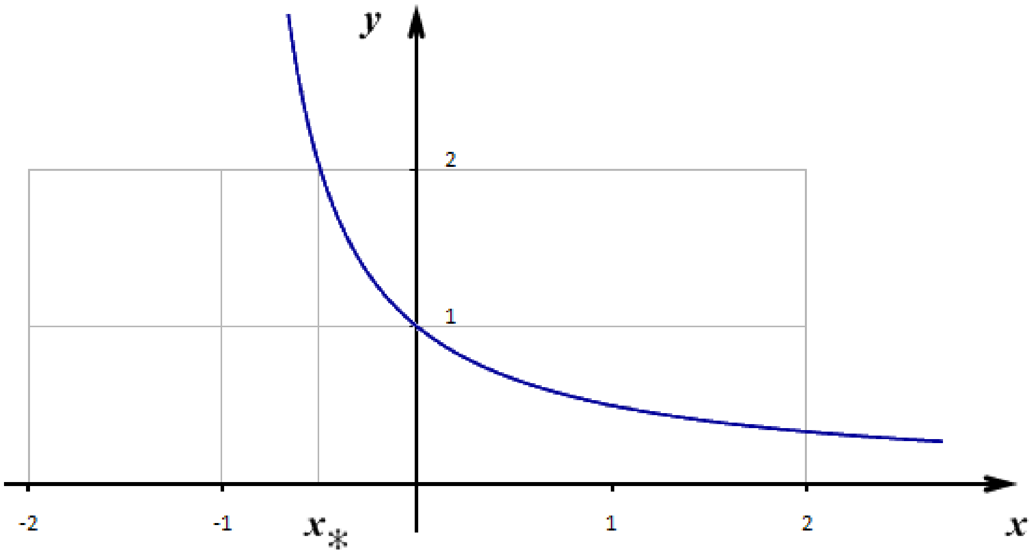

Рис. 2.4. Локальный характер разрешимости задачи Коши

В связи с этим возникает вопрос об условиях, обеспечивающих существование решения на всем отрезке $[x_0 - \alpha, \ x_0 + \alpha]$. На приведенном примере мы видим, что решение покидает прямоугольник P, пересекая его «верхнее» основание, поэтому можно попробовать вместо прямоугольника P в теореме 2.3 взять полосу:

$$\overline{Q} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ \middle| \ A \leqslant x \leqslant B \quad -\infty < y < +\infty\right\}, \qquad A, \ B \in \mathbb{R}.$$

Оказывается, что при этом решение существует на всем отрезке $[A, \ B]$, если $f(x, y)$ удовлетворяет условию Липшица по переменной y в $\overline{Q}$. А именно, имеет место следующая важная для приложений теорема.

Теорема 2.4. *Пусть функция* $f(x, y)$ *определена, непрерывна и удовлетворяет условию Липшица по* y *с константой* L *в полосе*

$$\overline{Q} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ A \leqslant x \leqslant B, \quad y \in \mathbb{R}\right\},$$

где $A,\, B \in \mathbb{R}$. *Тогда при любых начальных данных* $x_0 \in [A,\, B]$, $y_0 \in \mathbb{R}$ $\big($*т.е.* $(x_0\, y_0) \in \overline{Q}\big)$ *существует и притом единственное решение задачи Коши* (2.1), (2.2), *определенное на всем* $[A,\, B]$.

Доказательство. Будем считать, что $x_0 \in (A,\, B)$. Проведем рассуждения по схеме теоремы 2.3 отдельно для полосы

$$\overline{Q}^{+} = \Big\{ (x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \;\Big|\; x \in [x_0,\, B] \quad y \in \mathbb{R} \Big\} \quad \text{и}$$

$$\overline{Q}^{-} = \Big\{ (x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \;\Big|\; x \in [A,\, x_0] \quad y \in \mathbb{R} \Big\}.$$

Если $x_0 = A$ или $x_0 = B$, то один из этапов рассуждений (для $\overline{Q}^{+}$ или, соответственно, для $\overline{Q}^{-}$) отсутствует.

Возьмем полосу $\overline{Q}^{+}$ и построим последовательные приближения $y_n^{+}(x)$, как в теореме 2.3. Поскольку $\overline{Q}^{+}$ не содержит ограничений на размер по y, то пункт 1) доказательства теоремы 2.3 не проверяем. Далее, как в предыдущей теореме, от последовательности переходим к ряду с частичными суммами

$$y_n^{+}(x) = y_0 + \sum_{k=1}^{n} \big(y_k^{+}(x) - y_{k-1}^{+}(x) \big), \qquad \text{где } x \in [x_0,\, B].$$

Повторяя рассуждения, доказываем оценку вида (2.7)

$$\big| y_n^{+}(x) - y_{n-1}^{+} \big| \leqslant M_0 L^{n-1} \cdot \frac{|x - x_0|^n}{n!} \leqslant M_0 L^{n-1} \cdot \frac{(B - x_0)^n}{n!} \tag{2.10}$$

при всех $x \in [x_0,\, B]$; здесь $M_0 = \max \big\{ \big| f(x,\, y_0) \big| \text{ при } x \in [A,\, B] \big\}$, откуда как и выше в теореме 2.3 получим, что $y_n^{+}(x) \overset{[x_0,\, B]}{\rightrightarrows} \varphi^{+}(x)$, $n \to \infty$, причем $\varphi^{+}(x) \in C\big([x_0,\, B]\big)$, $\varphi^{+}(x)$ – решение интегрального уравнения (2.6) на $[x_0,\, B]$.

Возьмем полосу $\overline{Q}^{-}$ и построим последовательность $y_n^{-}(x)$. Действуя аналогично, получим, что $\exists\, \varphi^{-}(x) \in C\big([A,\, x_0]\big)$, $\varphi^{-}(x)$ – решение интегрального уравнения (2.6) на $[A,\, x_0]$.

Определим функцию $\varphi(x)$ как «сшивку» по непрерывности φ^{+} и φ^{-}, т.е.

$$\varphi(x) = \begin{cases} \varphi^{+}(x), & \text{при } x \in [x_0,\, B], \\ \varphi^{-}(x), & \text{при } x \in [A,\, x_0]. \end{cases}$$

Отметим, что $\varphi^{+}(x_0) = \varphi^{-}(x_0) = y_0$ и потому $\varphi(x) \in C\big([A,\, B]\big)$. Функции $\varphi^{\pm}(x)$ по построению удовлетворяют интегральному уравнению (2.6), т.е.

$$\varphi^{\pm}(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f\big(\tau,\, \varphi^{\pm}(\tau)\big)\, d\tau,$$

где $x \in [x_0,\, B]$ для $\varphi^+(x)$ и $x \in [A,\, x_0]$ для $\varphi^-(x)$, соответственно.

Следовательно, при любом $x \in [A,\, B]$ функция $\varphi(x)$ удовлетворяет интегральному уравнению (2.6). Тогда по лемме 2.2, $\varphi(x) \in C^1\big([A,\, B]\big)$ и является решением задачи Коши (2.1), (2.2). Теорема доказана. $\square$

Из доказанной теоремы 2.4 нетрудно получить следствие для интервала $(A,\, B)$ (открытой полосы).

Следствие. *Пусть функция* $f(x,\, y)$ *определена, непрерывна в открытой полосе*

$$Q = \big\{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 : \;\; x \in (A,\, B), \quad y \in \mathbb{R}\big\}\,,$$

причем A *и* $B \in \mathbb{R}$ *могут быть символами* $-\infty$ *и* $+\infty$ *соответственно. Предположим, что* $f(x,\, y)$ *удовлетворяет в полосе* Q *условию:*

$$\exists\, L(x) \in C(A,\, B), \quad \textit{такая, что}\; \forall\, x \in (A,\, B)\; \textit{и}\; \forall\, y_1,\; y_2 \in \mathbb{R}$$

выполняется неравенство $\big|f(x,\, y_2) - f(x,\, y_1)\big| \leqslant L(x) \cdot |y_2 - y_1|.$

Тогда при любых начальных данных $x_0 \in (A,\, B)$, $y_0 \in \mathbb{R}$ $\big($*т.е.* $(x_0\, y_0) \in Q\big)$ *существует и притом единственное решение задачи Коши* (2.1), (2.2), *определенное на всем* $(A,\, B)$.

Доказательство. Для любой полосы

$$\overline{Q}_1 = \big\{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 : \;\; x \in [A_1,\, B_1], \quad y \in \mathbb{R}\big\}\,,$$

где $A_1 > A$, $B_1 < B$, лежащей строго внутри Q и содержащей $(x_0,\, y_0)$, справедлива теорема 2.4, так как при доказательстве оценок вида (2.10), необходимых для обоснования равномерной на $[A_1,\, B_1]$ сходимости последовательности $\big\{y_n(x)\big\}$, используются постоянные $M_0 = \max\big\{\big|f(x,\, y_0)\big|\big\}$ при $x \in [A_1,\, B_1]$ и $L = \max\big\{L(x) \;\big|\;\; x \in [A_1,\, B_1]\big\}$. Эти постоянные не убывают при расширении $[A_1,\, B_1] \subset (A,\, B)$.

Возьмем последовательность расширяющихся отрезков $\big\{[A_k,\; B_k]\big\}$, удовлетворяющих условиям

1) $A < A_{k+1} < A_k, \quad B > B_{k+1} > B_k$ при всех $k \in \mathbb{N}$;

2) $x_0 \in [A_k,\; B_k]$ при всех $k \in \mathbb{N}$;

3) $A_k \to A, \quad B_k \to B$ при $k \to \infty$.

Заметим сразу, что $\bigcup\limits_k [A_k,\; B_k] = (A,\; B)$ и, более того, для любого $x \in (A,\; B)$ найдется номер $N(x) \in \mathbb{N}$, такой, что при всех $k > N$ выполняется $x \in [A_k,\; B_k]$.

Докажем это вспомогательное утверждение для случая $A,\ B \in \mathbb{R}$ (т.е. A и B конечны; если $A = -\infty$ или $B = +\infty$, то аналогично). Возьмем произвольный $x \in (A,\ B)$ и $\delta(x) = \min\left\{\dfrac{x-A}{2},\ \dfrac{B-x}{2}\right\}$, $\delta(x) > 0$. По числу δ из сходимости $A_k \to A$ и $B_k \to B$ получим, что

$$\exists\ N_1(\delta) \in \mathbb{N}: \qquad \forall\ k > N_1, \quad A < A_k < A + \delta < x,$$

$$\exists\ N_2(\delta) \in \mathbb{N}: \qquad \forall\ k > N_2, \quad x < B - \delta < B_k < B.$$

Тогда для $N = \max\left\{N_1,\ N_2\right\}$ справедливо доказываемое свойство.

Построим последовательность решений задачи Коши (2.1), (2.2) $Y_k(x)$, применяя теорему 2.4 к соответствующему отрезку $[A_k,\ B_k]$. Любые два из этих решений совпадают на общей области определения по следствию 1 из теоремы 2.1. Таким образом, два последовательных решения $Y_k(x)$ и $Y_{k+1}(x)$ совпадают на $[A_k,\ B_k]$, но $Y_{k+1}(x)$ определено на более широком отрезке $[A_{k+1},\ B_{k+1}]$.

Построим решение на всем $(A,\ B)$. Возьмем $[A_1,\ B_1]$ и построим $\varphi(x)$ – решение задачи (2.1), (2.2) на всем $[A_1,\ B_1]$ (по теореме 2.4). Затем продолжим это решение на $[A_2,\ B_2]$, ... $[A_k,\ B_k]$, ... Получим, что решение $\varphi(x)$ определено на всем $(A,\ B)$. Докажем его единственность.

Предположим, что существует решение $\psi(x)$ задачи Коши (2.1), (2.2), также определенное на всем $(A,\ B)$. Докажем, что $\varphi(x) \equiv \psi(x)$ при любом $x \in (A,\ B)$. Пусть x – произвольная точка $(A,\ B)$, найдется номер $N(x) \in \mathbb{N}$, такой, что $x \in [A_k,\ B_k]$ при всех $k > N$. Применяя следствие 1 п. 2.1(т.е. теорему единственности), получим, что $\varphi(t) \equiv \psi(t)$ при всех $t \in [A_k,\ B_k]$ и, в частности, при $t = x$. Так как x – произвольная точка $(A,\ B)$, то единственность решения, а вместе с ним и следствие, доказаны. □

Замечание 2.10. В доказанном следствии мы впервые встретились с понятием продолжения решения на более широкое множество. В следующем параграфе мы изучим его более подробно.

Приведем несколько примеров.

Пример 2.2. *Для уравнения* $y' = e^{|x|} \cdot \sqrt{x^2 + y^2}$ *выяснить, существует ли его решение на всем* $(A,\ B) = (-\infty,\ +\infty)$.

Рассмотрим это уравнение в «полосе» $Q = \mathbb{R}^2$, функция

$$f(x,\ y) = e^{|x|} \cdot \sqrt{x^2 + y^2}$$

определена и непрерывна в Q, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = e^{|x|} \cdot \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\left|f'_y\right| \leqslant e^{|x|} = L(x)$.

По утверждению 2.1 из п. 2.1 функция $f(x,\ y)$ удовлетворяет условию Липшица по y с «константой» $L = L(x)$, x – фиксировано. Тогда выполняются все условия следствия, и при любых начальных данных $(x_0,\ y_0) \in \mathbb{R}^2$ решение задачи Коши существует и притом единственное на $(-\infty,\ +\infty)$.

Отметим, что само уравнение в квадратурах не решается, но численно могут быть построены приближенные решения.

Пример 2.3. *Для уравнения* $y' = e^x \cdot y^2$ *выяснить, существуют ли его решения, определенные на* $\mathbb{R}$.

Если мы опять рассмотрим это уравнение в «полосе» $Q = \mathbb{R}^2$, где функция $f(x,\ y) = e^x \cdot y^2$ определена и непрерывна, а $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2ye^x$, то можем заметить, что условие следствия нарушается, а именно, не существует такой непрерывной функции $L(x)$, что

$$\big|f(x,\ y_2) - f(x,\ y_1)\big| \leqslant L(x) \cdot |y_2 - y_1|$$

при всех $y_1,\ y_2 \in \mathbb{R}$. В самом деле,

$$\big|f(x,\ y_2) - f(x,\ y_1)\big| = e^x \cdot |y_2 + y_1| \cdot |y_2 - y_1|,$$

а выражение $|y_2 + y_1|$ не является ограниченным при $y_1,\ y_2 \in \mathbb{R}$.

Таким образом, следствие неприменимо. Решим это уравнение «разделением переменных», получим общее решение:

$$\left[\begin{array}{l} y(x) = 0, \\ y(x) = -\dfrac{1}{e^x + C}. \end{array}\right.$$

Возьмем для определенности $x_0 = 0,\ y_0 \in \mathbb{R}$.

Если $y_0 = 0$, то $y(x) \equiv 0$ – решение задачи Коши на $\mathbb{R}$.

Если $y_0 \neq 0$, то $y(x) = \dfrac{1}{\frac{y_0+1}{y_0} - e^x}$ – решение задачи Коши. При $y_0 \in [-1,\ 0)$ оно определено при всех $x \in \mathbb{R}$, а при $y_0 \in (-\infty,\ -1) \cup (0,\ +\infty)$ решение не может быть продолжено через точку $x_* = \ln\dfrac{y_0+1}{y_0}$. Точнее, если $x_* > 0$, то решение $y(x) = \dfrac{1}{\frac{y_0+1}{y_0} - e^x}$ определено при $x \in (-\infty,\ x_*)$, а если $x_* < 0$ $\big(y_0 < -1\big)$, то решение определено при $x \in (x_*,\ +\infty)$. В первом случае $\lim\limits_{x \to x_* - 0} y(x) = +\infty$, а во втором – $\lim\limits_{x \to x_* + 0} y(x) = -\infty$.

Для наглядности нарисуем интегральные кривые при соответствующих значениях y_0 (рис. 2.5).

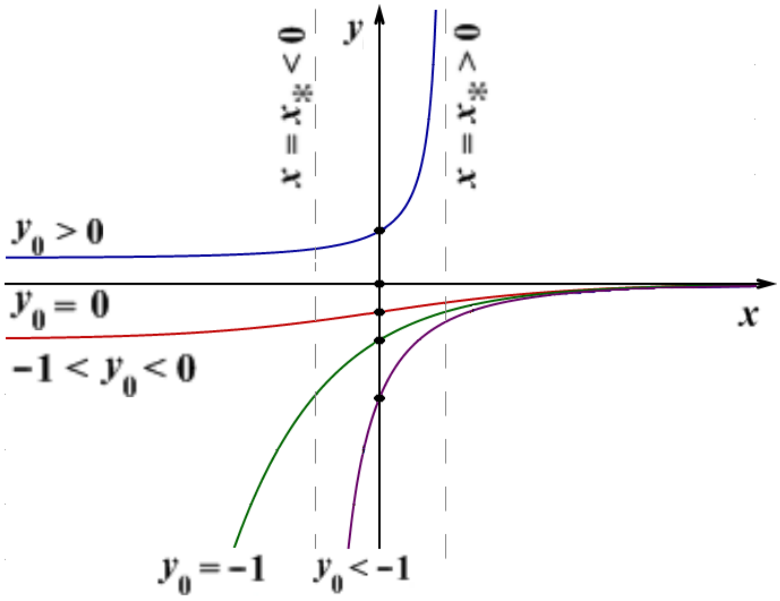

Рис. 2.5. Интегральные кривые уравнения $y' = e^x \cdot y^2$

Таким образом, для задачи Коши

$$\begin{cases} y' = e^x \cdot y^2, \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

имеем следующее:

1) если $y_0 \in [-1,\ 0]$, то решение существует при всех $x \in \mathbb{R}$;

2) если $y_0 < -1$, то решение существует лишь при $x \in \left(\ln \dfrac{y_0 + 1}{y_0};\ +\infty\right)$;

3) если $y_0 > 0$, то решение существует лишь при $x \in \left(-\infty;\ \ln \dfrac{y_0 + 1}{y_0}\right)$.

Этот пример показывает, что ограничение на рост функции $f(x, y)$ в доказанном выше следствии теоремы 2.4 существенно для продолжения решения на весь (A, B).

Аналогично получаются примеры с функцией $f(x, y) = f_1(x) \cdot y^{1+\varepsilon}$ при любом $\varepsilon > 0$, в приведенном примере взято $\varepsilon = 1$ лишь для удобства изложения.

2.3. Продолжение решения для ОДУ первого порядка

Определение 2.5. Рассмотрим уравнение $y' = f(x, y)$ и пусть $y(x)$ – его решение на $\langle a,\ b\rangle$, а $Y(x)$ – его решение на $\langle A,\ B\rangle$, причем $\langle a,\ b\rangle$ содержится в $\langle A,\ B\rangle$ и $Y(x) = y(x)$ на $\langle a,\ b\rangle$. Тогда $Y(x)$ называется **продолжением решения** $y(x)$ **на** $\langle A,\ B\rangle$, а про $y(x)$ говорят, что оно **продолжено на** $\langle A,\ B\rangle$.

В п. 2.2 мы доказали локальную теорему существования решения задачи Коши (2.1), (2.2). При каких условиях это решение может быть продолжено на более широкий промежуток? Этому вопросу и посвящен настоящий параграф. Основной его результат состоит в следующем.

Теорема 2. 5 (о продолжении решения в ограниченной замкнутой области)**.**

Пусть функция $f(x,\,y)\in C\big(\overline{G}\big)$ *и удовлетворяет условию Липшица по* y *в ограниченной замкнутой области* $\overline{G}\subset\mathbb{R}^2$, *а* $(x_0,\,y_0)$ *– внутренняя точка* G. *Тогда через точку* $(x_0,\,y_0)$ *проходит решение уравнения* $y\,'=f(x,\,y)$, *продолжаемое вплоть до* ∂G *– границы области* G, *т.е. оно может быть продолжено на такой отрезок* $[a,\,b]$, *что точки* $\big(a,\ y(a)\big)$ *и* $\big(b,\ y(b)\big)$ *лежат на* ∂G.

Замечание 2. 11. Напомним, что если $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,\,y)$ непрерывна в ограниченной, замкнутой, выпуклой по y области $\overline{G}$, то функция $f(x,\,y)$ удовлетворяет в G условию Липшица по переменной y. См. следствие из утверждения 2. 1 из п. 2.1. Поэтому данная теорема будет справедлива, если $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ непрерывна в $\overline{G}$.

Доказательство. Так как $(x_0,\,y_0)$ – внутренняя точка G, то найдется замкнутый прямоугольник

$$P=\Big\{(x,\,y)\in\mathbb{R}^2\ \Big|\ \ \big|x-x_0\big|\leqslant\alpha,\quad \big|y-y_0\big|\leqslant\beta\Big\},$$

целиком лежащий в G. Тогда по теореме 2. 3 из п. 2.2 найдется $h>0$ такое, что на отрезке $[x_0-h,\ x_0+h]$ существует (и притом единственное) решение $y=\varphi(x)$ уравнения $y\,'=f(x,\,y)$. Будем вначале продолжать это решение вправо вплоть до границы области G, разбив доказательство на отдельные шаги.

1. Рассмотрим множество $E\subset\mathbb{R}$:

$$E=\Big\{\alpha>0\ \Big|\text{решение } y=\varphi(x) \text{ продолжаемо на } [x_0,\ x_0+\alpha)\Big\}.$$

Так как $h\in E$, то $E\neq\varnothing$ и, кроме того, E ограничено, поскольку G – ограниченная область.

Отсюда следует, что существует $\alpha_0=\sup E$ (по теореме существования точных граней у непустого ограниченного множества в $\mathbb{R}$). Тогда, по определению α_0, решение $y=\varphi(x)$ продолжаемо на $[x_0,\ x_0+\alpha_0)$.

2. Обозначим $\tilde b=x_0+\alpha_0$, и докажем, что существует $\lim\limits_{x\to\tilde b-0}\varphi(x)$, для чего запишем критерий Коши существования предела функции:

$$\exists\lim_{x\to\tilde b-0}\varphi(x)\quad\Longleftrightarrow\quad\Big(\forall\,\varepsilon>0\ \exists\,\delta>0:\ \ \forall\,x',\,x'':\ \ x'\in\big(\tilde b-\delta,\ \tilde b\big)$$

$$\text{и} \quad x'' \in \left(\tilde{b}-\delta,\ \tilde{b}\right) \quad \Longrightarrow \quad \left|\varphi(x') - \varphi(x'')\right| < \varepsilon \Big).$$

Пусть $M = \max\limits_{(x,y)\in\overline{G}} \left|f(x,\,y)\right|$. Выберем произвольное $\varepsilon > 0$. Положим $\delta = \min\left\{\frac{\varepsilon}{M},\ \alpha_0\right\}$, $x',\ x'' \in \left(\tilde{b}-\delta,\ \tilde{b}\right)$, и оценим

$$\left|\varphi(x') - \varphi(x'')\right| = \left|\int\limits_{x'}^{x''} \frac{d\varphi(x)}{dx}\,dx\right| = \left|\int\limits_{x'}^{x''} f\big(x,\ \varphi(x)\big)\,dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{(x,y)\in\overline{G}} \left|f(x,\,y)\right| \cdot \left|x'' - x'\right| < M\cdot\delta \leqslant \varepsilon.$$

Таким образом, выполнено условие Коши, поэтому $\exists \lim\limits_{x\to\tilde{b}-0} \varphi(x)$, который обозначим $\varphi\big(\tilde{b}\big)$. Тогда $\varphi(x)$ определена и непрерывна на $\left[x_0, \tilde{b}\right]$, причем для $\forall\, x \in \left[x_0, \tilde{b}\right)$ $\exists\, \varphi'(x)$.

3. Докажем, что в точке $\tilde{b}$, существует левая производная

$$\varphi'_{\text{Л}}\big(\tilde{b}\big) = \lim_{\eta\to 0-} \frac{\varphi\big(\tilde{b}+\eta\big) - \varphi\big(\tilde{b}\big)}{\eta}$$

и выполнено равенство $\varphi'_{\text{Л}}\big(\tilde{b}\big) = f\left(\tilde{b},\ \varphi\big(\tilde{b}\big)\right)$. Рассмотрим $\eta \in (-\alpha_0,\ 0)$, составим разностное отношение и используем теорему Лагранжа

$$\frac{1}{\eta}\left(\varphi\big(\tilde{b}+\eta\big) - \varphi\big(\tilde{b}\big)\right) = \frac{1}{\eta}\cdot\varphi'\big(\tilde{b}+\eta^*\big)\cdot\eta = f\left(\tilde{b}+\eta^*,\ \varphi\big(\tilde{b}+\eta^*\big)\right),$$

где $\eta^* \in (\eta,\ 0)$. Если $\eta \to 0-$, то и $\eta^* \to 0-$, а следовательно, $\varphi\big(\tilde{b}+\eta^*\big) \to \varphi\big(\tilde{b}\big)$, в силу непрерывности $\varphi(x)$ на $\left[x_0,\ \tilde{b}\right]$. Отсюда следует, в силу непрерывности $f(x,\,y)$ в $\overline{G}$, что существует $\lim\limits_{\eta\to 0-} f\left(\tilde{b}+\eta^*,\ \varphi\big(\tilde{b}+\eta^*\big)\right) = f\left(\tilde{b},\ \varphi\big(\tilde{b}\big)\right)$. Отметим, что точка $\left(\tilde{b},\ \varphi\big(\tilde{b}\big)\right) \in \overline{G}$, как предельная точка G, так как $\left(\tilde{b}+\eta^*,\ \varphi\big(\tilde{b}+\eta^*\big)\right) \in \overline{G}$ и $\left(\tilde{b}+\eta^*,\ \varphi\big(\tilde{b}+\eta^*\big)\right) \longrightarrow \left(\tilde{b},\ \varphi\big(\tilde{b}\big)\right)$ при $\eta \to 0-$.

Итак, установлено, что $\varphi'_{\text{Л}}\big(\tilde{b}\big) = \lim\limits_{\eta\to 0-} \frac{\varphi\left(\tilde{b}+\eta\right) - \varphi\left(\tilde{b}\right)}{\eta} = f\left(\tilde{b},\ \varphi\big(\tilde{b}\big)\right)$, т.е. $\varphi(x)$ – решение уравнения на $\left[x_0,\ \tilde{b}\right]$.

Возможны два случая:

Случай 1. Точка $\left(\tilde{b},\ \varphi\big(\tilde{b}\big)\right) \in \partial G$ – границе G, тогда теорема о продолжении решения вправо доказана, $b = \tilde{b}$.

Случай 2. Точка $\left(\tilde{b},\ \varphi(\tilde{b})\right)$ – внутренняя точка G. Тогда существует прямоугольник P' с центром в точке $\left(\tilde{b},\ \varphi(\tilde{b})\right)$, целиком лежащий в G, рис. 2.6

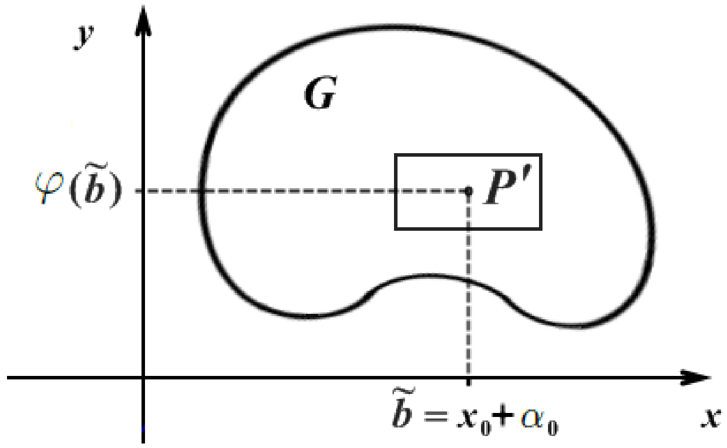

Рис. 2.6. Случай 2

По теореме 2.3 из п. 2.2 существует $h_1 > 0$, такое, что на отрезке $[\tilde{b} - h_1,\ \tilde{b} + h_1]$ существует решение $y = \varphi_1(x)$ уравнения $y' = f(x,\ y)$, удовлетворяющее условиям Коши $\varphi_1(\tilde{b}) = \varphi(\tilde{b})$.

Таким образом, $\varphi(x)$ и $\varphi_1(x)$ – это решения на отрезке

$$\left[\tilde{b} - h_1,\ \tilde{b}\right]$$

одного уравнения, совпадающие в точке $x = \tilde{b}$, поэтому они совпадают на всем отрезке $\left[\tilde{b} - h_1,\ \tilde{b}\right]$ и, следовательно, $\varphi_1(x)$ является продолжением решения $\varphi(x)$ с отрезка $\left[\tilde{b} - h_1,\ \tilde{b}\right]$ на $\left[\tilde{b} - h_1,\ \tilde{b} + h_1\right]$.

Рассмотрим функцию $\psi(x)$:

$$\psi(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \in \left[x_0,\ \tilde{b}\right], \\ \varphi_1(x), & x \in \left[\tilde{b} - h_1,\ \tilde{b} + h_1\right] \equiv \left[\tilde{b} - h_1,\ x_0 + \alpha_0 + h_1\right], \end{cases}$$

которая является решением уравнения $y' = f(x,\ y)$ и удовлетворяет условию Коши $\psi(x_0) = y_0$. Тогда число $\alpha_0 + h_1 \in E$, а это противоречит определению $\alpha_0 = \sup E$. Следовательно, случай 2 невозможен.

Аналогично решение $\varphi(x)$ продолжается влево, на отрезок $[a,\ x_0]$, где точка $\left(a,\ \varphi(a)\right) \in \partial G$.

Теорема полностью доказана. $\square$

Глава III.

Задача Коши для нормальной системы n-го порядка

3.1. Основные понятия и некоторые вспомогательные свойства вектор-функций

В этой главе будем рассматривать нормальную систему n-го порядка вида

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = f_1\big(t,\ y_1,\ \ldots,\ y_n\big), \\ \dot{y}_2 = f_2\big(t,\ y_1,\ \ldots,\ y_n\big), \\ \ldots \\ \dot{y}_n = f_n\big(t,\ y_1,\ \ldots,\ y_n\big), \end{cases} \tag{3.1}$$

где неизвестными (искомыми) являются функции $y_1(t),\ldots,y_n(t)$, а функции f_i – известны, $i=\overline{1,\ n}$, точка над функцией обозначает производную по t. Предполагается, что все f_i определены в области $G\subseteq\mathbb{R}^{n+1}$.

Удобно записывать систему (3.1) в векторной форме: $\dot{y}=f(t,\ y)$, где

$$y(t)\equiv\big(y_1(t)\ \ldots,\ y_n(t)\big),\quad f(t,\ y)\equiv\big(f_1(t,\ y)\ \ldots,\ f_n(t,\ y)\big);$$

стрелочки в обозначении векторов для краткости писать не будем. Такую запись также будем обозначать (3.1).

Пусть точка $\big(t_0,\ y_1^0,\ \ldots,\ y_n^0\big)$ лежит в G. **Задача Коши** для (3.1) заключается в нахождении решения $\varphi(t)$ системы (3.1), удовлетворяющего условию:

$$\varphi_1(t_0)=y_1^0,\quad \varphi_2(t_0)=y_2^0,\quad \ldots,\quad \varphi_n(t_0)=y_n^0, \tag{3.2}$$

или в векторной форме $\varphi(t_0)=y^0$.

Как отмечалось в главе 1, под решением системы (3.1) на промежутке $\langle a,\ b\rangle$ понимается вектор-функция $\varphi(t)=\big(\varphi_1(t),\ \ldots,\ \varphi_n(t)\big)$, удовлетворяющая условиям:

1) $\forall\, t\in\langle a,\ b\rangle$ точка $\big(t,\ \varphi(t)\big)$ лежит в G;

2) $\forall\, t\in\langle a,\ b\rangle$ $\exists\ \frac{d}{dt}\varphi(t)$;

3) $\forall\, t \in \langle a,\ b\rangle$ $\varphi(t)$ удовлетворяет (3.1).

Если такое решение дополнительно удовлетворяет (3.2), где $t_0 \in \langle a,\ b\rangle$, то оно называется **решением задачи Коши**. Условия (3.2) называют **начальными условиями** или **условиями Коши**, а числа $\big(t_0,\ y_1^0,\ \ldots,\ y_n^0\big)$ – **данными Коши** (**начальными данными**).

В частном случае, когда вектор-функция $f\,(t,\ y)$ $(n{+}1)$ переменной зависит от $y_1,\ \ldots,\ y_n$ линейным образом, т.е. имеет вид:

$$f\,(t,\ y) = A(t)\cdot y + g(t),$$

где $A(t) = \Big(a_{ij}(t)\Big)$ – $n\times n$ матрица, система (3.1) называется **линейной**.

В дальнейшем нам понадобятся свойства вектор-функций, которые мы здесь приведем для удобства ссылок.

Правила сложения и умножения на число для векторов известны из курса линейной алгебры, эти основные операции выполняются покоординатно.

Если в $\mathbb{R}^n$ ввести скалярное произведение $\big(x,\ y\big) = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n$, то получим евклидово пространство, которое тоже будем обозначать $\mathbb{R}^n$, с длиной вектора $|x| = \sqrt{\big(x,\ x\big)} = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2}$ (или евклидовой нормой). Для скалярного произведения и длины справедливы два основных неравенства:

1) $\forall\, x,\ y \in \mathbb{R}^n$ $\quad \big|x+y\big| \leqslant \big|x\big| + \big|y\big|$ (**неравенство треугольника**);

2) $\forall\ x,\ y \in \mathbb{R}^n$ $\quad \big|\big(x,\ y\big)\big| \leqslant \big|x\big|\cdot\big|y\big|$ (**неравенство Коши–Буняковского**).

Из курса математического анализа второго семестра известно, что сходимость последовательности точек (векторов) в евклидовом пространстве (конечномерном) равносильна сходимости последовательностей координат этих векторов, говорят, равносильна покоординатной сходимости. Это легко следует из неравенств:

$$\max_{1\leqslant k\leqslant n} \big|x\big| \leqslant \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} = |x| \leqslant \sqrt{n}\cdot \max_{1\leqslant k\leqslant n} \big|x_k\big|.$$

Аналогично скалярному случаю определяются производная и интеграл вектор-функции, а свойства легко доказываются с помощью перехода к координатам. Приведем некоторые неравенства для вектор-функций, применяемые в дальнейшем.

1. *Для любой вектор-функции* $y(t) = \big(y_1(t),\ \ldots,\ y_n(t)\big)$, *интегрируемой (например, непрерывной) на* $[a,\ b]$, *справедливо неравенство*

$$\left|\int\limits_a^b y(t)\,dt\right| \leqslant \left|\int\limits_a^b \big|y(t)\big|\,dt\right| \tag{3.3}$$

или в координатной форме

$$\left|\left(\int\limits_a^b y_1(t)\,dt,\ \int\limits_a^b y_2(t)\,dt,\ \ldots\ ,\ \int\limits_a^b y_n(t)\,dt\ \right)\right| \leqslant \left|\int\limits_a^b \sqrt{y_1^2(t)+\ldots y_n^2(t)}\ dt\right|.$$

Доказательство. Заметим во-первых, что в неравенстве не исключается случай $b < a$, для этого случая в правой части присутствует знак внешнего модуля. По определению, интеграл от вектор-функции – это предел интегральных сумм $\sigma_\tau(y) = \sum\limits_{k=1}^{n} y(\xi_k)\cdot\Delta t_k$ при характеристике («мелкости») разбиения $\lambda(\tau) = \max\limits_{k=\overline{1,\,N}} \Delta t_k$ стремящейся к нулю. По условию $\left|\sigma_\tau\right| \to \left|\int\limits_a^b y(t)\,dt\right|$, а по неравенству треугольника получим

$$\left|\sigma_\tau\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \left|y(\xi_k)\right|\cdot\Delta t_k \to \int\limits_a^b \left|y(t)\right|dt, \qquad \text{при} \quad \lambda(\tau)\to 0$$

(здесь мы для определенности считаем $a < b$). По теореме о переходе к пределу в неравенстве получим доказываемое. Случай $b < a$ сводится к изученному, так как $\int\limits_a^b = -\int\limits_b^a$. □

Аналоги теорем Ролля и Лагранжа отсутствуют для вектор-функций, однако можно получить оценку, напоминающую теорему Лагранжа.

2. *Для любой вектор-функции* $x(t)$, *непрерывно дифференцируемой на* $[a,\,b]$, *имеет место оценка «приращения»:*

$$\left|x(b)-x(a)\right| \leqslant \max_{[a,\,b]}\left|x'(t)\right|\cdot\left|b-a\right|. \tag{3.4}$$

Доказательство. Неравенство (3.4) сразу получается из (3.3) при $y(t) = x'(t)$. □

При доказательстве теоремы разрешимости для линейных систем нам понадобятся оценки с $n\times n$ матрицами, которые мы сейчас и рассмотрим.

3. *Пусть* $A(t) = \Big(a_{ij}(t)\Big)$ – $n\times n$ *матрица, обозначим произведение* Ax *через* y. Как оценить $\left|y\right|$ через матрицу A и $\left|x\right|$? Оказывается, *справедливо неравенство*

$$\left|Ax\right| \leqslant \left\|A\right\|_2\cdot\left|x\right|, \tag{3.5}$$

где $\left|x\right| = \sqrt{|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2}\,,\;\; \left\|A\right\|_2 = \left(\sum\limits_{i,j=1}^{n} \left|a_{ij}^2\right|\right)^{\frac{1}{2}}$, *а элементы матрицы* A *и координаты вектора* x *могут быть комплексными.*

Доказательство. Для любого $i = \overline{1,\ n}$, $a_{i\cdot}$ – i-я строка матрицы A, тогда:

$$\left|y_i\right|^2 = \left|a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n\right|^2 = \left|\left(a_{i\cdot},\ x\right)\right|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \Big[\text{по неравенству Коши-Буняковского}\Big] \leqslant |a_{i\cdot}|^2 \cdot \left|x\right|^2 =$$
$$= \left(\sum_{k=1}^{n} \left|a_{ik}\right|^2\right) \cdot \left(\sum_{l=1}^{n} \left|x_l\right|^2\right),$$

суммируя эти неравенства по $i = \overline{1,\ n}$, имеем:

$$\left|y\right|^2 \leqslant \left(\sum_{k,i=1}^{n} \left|a_{ik}\right|^2\right) \cdot \left|x\right|^2 = \left\|A\right\|_2^2 \cdot \left|x\right|^2,$$

откуда следует (3.5). □

Определение 3. 1. Будем говорить, что **вектор-функция** $f(t,\ y)$ **удовлетворяет условию Липшица по векторной переменной** y **на множестве** G **переменных** $(t,\ y)$, если $\exists\ L > 0$ такая, что при любых $\left(t,\ y^1\right)$, $\left(t,\ y^2\right) \in G$ выполняется неравенство

$$\left|f\left(t,\ y^2\right) - f\left(t,\ y^1\right)\right| \leqslant L \cdot \left|y^2 - y^1\right|.$$

Как и в случае функции двух переменных (см. утверждение 2.1) достаточным условием липшицевости в «выпуклой по y» области G является ограниченность частных производных. Дадим точное определение.

Определение 3. 2. Область G переменных $(t,\ y)$ называется **выпуклой по** y, если для любых двух точек $\left(t,\ y^1\right)$ и $\left(t,\ y^2\right)$, лежащих в G, ей целиком принадлежит и отрезок, соединяющий эти две точки, т.е. множество

$$\left\{\left(t,\ y\right) \;\Big|\;\; y = y^1 + \tau\left(y^2 - y^1\right),\quad \text{где}\ \tau \in [0,\ 1]\right\}.$$

Утверждение 3. 1. *Если область* G *переменных* $(t,\ y)$ *выпукла по* y, *а частные производные* $\dfrac{\partial f_i}{\partial y_j}$ *непрерывны и ограничены константой* l *в* G *при всех* $i, j = \overline{1,\ n}$, *то вектор-функция* $f\left(t, y\right)$ *удовлетворяет в* G *условию Липшица по* y *с константой* $L = n \cdot l$.

Доказательство. Рассмотрим произвольные точки $\left(t,\ y^1\right)$ и $\left(t,\ y^2\right)$ из G и отрезок, их соединяющий, т.е. множество $\left(t,\ y\right)$, где $y = y^1 + \tau\left(y^2 - y^1\right)$, t – фиксировано, а $\tau \in [0,\ 1]$.

Введем вектор функцию одного скалярного аргумента $g(\tau) = f\big(t,\ y(\tau)\big)$, тогда $g(1) - g(0) = f\big(t,\ y^2\big) - f\big(t,\ y^1\big)$, а с другой стороны –

$$g(1) - g(0) = \int\limits_0^1 \frac{d}{d\tau}\, g(\tau)\, d\tau = \int\limits_0^1 A(\tau)\, \frac{d}{d\tau}\, y(\tau)\, d\tau =$$

$$= \Big[\text{в силу } y = y^1 + \tau\left(y^2 - y^1\right)\Big] = \int\limits_0^1 A(\tau)\ \left(y^2 - y^1\right)\ d\tau,$$

где $A(\tau)$ – матрица с элементами $\left(\dfrac{\partial f_i}{\partial y_j}\right)$, а $\left(y^2 - y^1\right)$ – соответствующий столбец.

Здесь мы воспользовались правилом дифференцирования сложной функции, а именно,

> при всех $i = \overline{1,\ n}$, t – фиксировано, имеем:
>
> $$g_i{}'(\tau) = \frac{d}{d\tau}\, f_i\big(t,\ y(\tau)\big) = \frac{\partial f_i}{\partial y_1}\cdot\frac{\partial y_1}{\partial \tau} + \frac{\partial f_i}{\partial y_2}\cdot\frac{\partial y_2}{\partial \tau} + \ldots + \frac{\partial f_i}{\partial y_n}\cdot\frac{\partial y_n}{\partial \tau} =$$
> $$= \left(\left\{\frac{\partial f_i}{\partial y_1},\ \ldots,\ \frac{\partial f_i}{\partial y_n}\right\},\ \ y^2 - y^1\right).$$
>
> Записывая это в матричном виде, получим:
> $g\,'(\tau) = A(\tau)\ \left(y^2 - y^1\right)$ с $n \times n$ матрицей $A(\tau) = \Big(a_{ij}(\tau)\Big) \equiv \left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}\right)$.

Используя оценку интеграла (3.3) и неравенство (3.5), после подстановки получим:

$$\left|f\big(t,\ y^2\big) - f\big(t,\ y^1\big)\right| = \left|\int\limits_0^1 g\,'(\tau)\, d\tau\right| = \left|\int\limits_0^1 A(\tau)\ \left(y^2 - y^1\right)\ d\tau\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^1 \left|A(\tau)\ \left(y^2 - y^1\right)\right| d\tau \leqslant \int\limits_0^1 \big\|A(\tau)\big\|_2\, d\tau \cdot \left|y^2 - y^1\right| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{[0,\ 1]} \big\|A(\tau)\big\|_2 \cdot \left|y^2 - y^1\right| \leqslant n\cdot l\cdot\left|y^2 - y^1\right|,$$

поскольку $\big\|A(\tau)\big\|_2^2 = \sum\limits_{i,j=1}^{n} \left|\dfrac{\partial f_i}{\partial y_j}\right|^2 \leqslant n^2\cdot l^2$ при $\forall\ \tau \in [0,\ 1]$. Утверждение доказано. $\square$

3.2. Единственность решения задачи Коши для нормальной системы

Теорема 3.1 (об оценке разности двух решений). *Пусть G – некоторая область $\mathbb{R}^{n+1}$, а вектор-функция $f(x,\ y)$ непрерывна в G и удовлетворяет условию Липшица по векторной переменной y на множестве G с константой L. Если $y^1,\ y^2$ – два решения нормальной системы* (3.1) $\dot{y} = f(x,\ y)$ *на отрезке $[t_0,\ t_1]$, то справедлива оценка*

$$\left|y^2(t) - y^1(t)\right| \leqslant \left|y^2(t_0) - y^1(t_0)\right| \cdot \exp\left[L(t - t_0)\right]$$

при всех $t \in [t_0,\ t_1]$.

Доказательство дословно, с учетом очевидных переобозначений, повторяет доказательство теоремы 2.1 из п. 2.1.

□

Отсюда легко получить теорему единственности и устойчивости решения по начальным данным.

Следствие 3.1. *Пусть вектор-функция $f(t,\ y)$ непрерывна в области G и удовлетворяет в G условию Липшица по y, а функции $y^1(t)$ и $y^2(t)$ – два решения нормальной системы* (3.1) *на одном и том же отрезке $[t_1,\ t_2]$, причем $t_0 \in [t_1,\ t_2]$.*
Если $y^1(t_0) = y^2(t_0)$, то $y^1(t) \equiv y^2(t)$ на $[t_1,\ t_2]$.

Следствие 3.2. (о непрерывной зависимости от начальных данных). *Пусть вектор-функция $f(t,\ y)$ непрерывна в области G и удовлетворяет в G условию Липшица по y с константой $L > 0$, а вектор-функции $y^1(t)$ и $y^2(t)$ – это решения нормальной системы* (3.1), *определенные на $[t_0,\ t_1]$. Тогда при $\forall\, t \in [t_0,\ t_1]$ справедливо неравенство*

$$\left|y^1(t) - y^2(t)\right| \leqslant \delta \cdot e^{L \cdot l},$$

где $\delta = \left|y^1(t_0) - y^2(t_0)\right|$, а $l = t_1 - t_0$.

Доказательство следствий дословно, с учетом очевидных переобозначений, повторяет доказательство следствий 2.1 и 2.2.

□

Исследование разрешимости задачи Коши (3.1), (3.2), как и в одномерном случае, сводится к разрешимости интегрального уравнения (векторного).

Лемма 3.1.
Пусть $f(t,\ y) \in C\big(G;\ \mathbb{R}^n\big)$[1]*. Тогда имеют место следующие утверждения:*

1) *всякое решение $\varphi(t)$ уравнения* (3.1) *на промежутке $\langle a,\ b\rangle$, удовлетворяющее* (3.2) $\big(t_0 \in \langle a,\ b\rangle\big)$, *является непрерывным решением на $\langle a,\ b\rangle$*

[1] Через $C(G;\ H)$ принято обозначать множество всех непрерывных в области G функций со значениями в пространстве H. Например, $f(t,\ y) \in C\Big(G;\ \mathbb{R}^n\Big)$ – множество всех непрерывных вектор-функций (с n компонентами), определенных на множестве G.

интегрального уравнения

$$y(t) = y^0 + \int\limits_{t_0}^{t} f\big(\tau,\ y(\tau)\big)\, d\tau; \tag{3.6}$$

2) если вектор-функция $\varphi(t) \in C\big(\langle a,\ b\rangle\big)$ *является непрерывным решением интегрального уравнения* (3.6) *на* $\langle a,\ b\rangle$, *где* $t_0 \in \langle a,\ b\rangle$, *то* $\varphi(t)$ *имеет непрерывную производную на* $\langle a,\ b\rangle$ *и является решением* (3.1), (3.2).

Доказательство. **1.** Пусть $\forall\ \tau \in \langle a,\ b\rangle$ выполняется равенство $\dfrac{d\varphi(\tau)}{d\tau} = f\big(\tau,\ \varphi(\tau)\big)$. Тогда интегрируя от t_0 до t, с учетом (3.2), получим, что $\varphi(t) = y^0 + \int\limits_{t_0}^{t} f\big(\tau,\ \varphi(\tau)\big)\, d\tau$, т.е. $\varphi(t)$ удовлетворяет уравнению (3.6).

2. Пусть непрерывная вектор-функция $\varphi(t)$ удовлетворяет уравнению (3.6) на $\langle a,\ b\rangle$, тогда $f\big(t,\ \varphi(t)\big)$ непрерывна на $\langle a,\ b\rangle$ по теореме о непрерывности сложной функции, а поэтому правая часть (3.6) (и, следовательно, левая часть) имеет непрерывную производную по t на $\langle a,\ b\rangle$. При $t = t_0$ из (3.6) $\varphi(t_0) = y^0$, т.е. $\varphi(t)$ – решение задачи Коши (3.1), (3.2). Заметим, что как обычно, под производной на конце отрезка (если он ему принадлежит) понимается односторонняя производная функции. Лемма доказана. □

Замечание 3.1. Пользуясь аналогией с одномерным случаем (см. главу 2) и доказанными выше утверждениями, можно доказать терему о существовании и продолжении решения задачи Коши, построив итерационную последовательность, сходящуюся к решению интегрального уравнения (3.6) на некотором отрезке $\big[t_0 - h,\ t_0 + h\big]$. Мы здесь приведем другое доказательство теоремы существования (и единственности) решения, опирающееся на принцип сжимающих отображений. Делаем мы это для знакомства читателя с более современными методами теории, которые будут применяться в дальнейшем, в курсах интегральных уравнений и уравнений математической физики. Для осуществления нашего плана понадобится ряд новых понятий и вспомогательных утверждений, к рассмотрению которых мы и перейдем.

3.3. Понятие метрического пространства. Принцип сжимающих отображений

Важнейшее понятие предела в математике опирается на понятие «близости» точек, т.е. на возможность находить расстояние между ними. На числовой оси расстояние – это модуль разности двух чисел, на плоскости – это хорошо известная формула евклидова расстояния и т.д. Многие факты анализа не используют алгебраических свойств элементов, а опираются лишь на понятие расстояния меду ними. Развитие этого подхода, т.е. выделение «существа», относящегося к понятию предела, приводит к понятию метрического пространства.

Определение 3. 3. Пусть X – множество произвольной природы, а $\rho(x,\,y)$ – действительная функция двух переменных $x,\ y \in \mathrm{X}$, удовлетворяющая трем аксиомам:

1) $\rho(x,\,y) \geqslant 0\ \ \forall\, x,\ y \in \mathrm{X}$, причем $\rho(x,\,y) = 0$ лишь при $x = y$;

2) $\rho(x,\,y) = \rho(y,\,x)$ (**аксиома симметрии**);

3) $\rho(x,\,z) \leqslant \rho(x,\,y) + \rho(y,\,z)$ (**неравенство треугольника**).

В этом случае множество X с заданной функцией $\rho(x,\,y)$ называют **метрическим пространством (МП)**, а функцию $\rho(x,\,y)\ :\ \ \mathrm{X}\times\mathrm{X} \mapsto \mathbb{R}$, удовлетворяющую 1) – 3), – **метрикой** или **расстоянием**.

Приведем некоторые примеры метрических пространств.

Пример 3. 1. Пусть $\mathrm{X} = \mathbb{R}$ с расстоянием $\rho(x,\,y) = \bigl|x-y\bigr|$, получим МП $\mathbb{R}^1$.

Пример 3. 2. Пусть $\mathrm{X} = \mathbb{R}^n = \Bigl\{\bigl(x_1,\ \ldots,\ x_n\bigr)\ \Bigm|\ x_i \in \mathbb{R},\quad i = \overline{1,\ n}\Bigr\}$ есть множество упорядоченных наборов из n действительных чисел $x = \bigl(x_1,\ \ldots,\ x_n\bigr)$ с расстоянием $\rho(x,\,y) = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n}\bigl(x_k - y_k\bigr)^2}$, получим n-мерное евклидово пространство $\mathbb{R}^n$.

Пример 3. 3. Пусть $\mathrm{X} = C\left(\bigl[a,\ b\bigr];\ \mathbb{R}^n\right)$ – множество всех непрерывных на $\bigl[a,\ b\bigr]$ функций со значениями в $\mathbb{R}^n$, т.е. непрерывных вектор-функций, с расстоянием $\rho(f,\,g) = \max\limits_{t\in[a,\,b]}\bigl|f(t) - g(t)\bigr|$, где $f = f(t) = \bigl(f_1(t),\ \ldots,\ f_n(t)\bigr)$,

$$g = g(t) \equiv \bigl(g_1(t),\ \ldots,\ g_n(t)\bigr),\ \ \bigl|f-g\bigr| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n}\bigl(f_k(t) - g_k(t)\bigr)^2}\,.$$

Для примеров 3. 1 –3. 3 аксиомы МП проверяются непосредственно, оставим это в качестве упражнения для добросовестного читателя.

Как обычно, если каждому натуральному n поставлен в соответствие элемент $x_n \in \mathrm{X}$, то говорят, что задана **последовательность точек** $\bigl\{x_n\bigr\}$ **МП** X.

Определение 3. 4. Последовательность точек $\bigl\{x_n\bigr\}$ МП X называется **сходящейся к точке** $x \in \mathrm{X}$, если $\lim\limits_{n\to\infty}\rho\bigl(x_n,\,x\bigr) = 0$.

Определение 3. 5. Последовательность $\bigl\{x_n\bigr\}$ называется **фундаментальной**, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное число $N(\varepsilon)$, что для всех $n > N$ и $m > N$ выполняется неравенство $\rho\bigl(x_n,\,x_m\bigr) < \varepsilon$.

Определение 3. 6. МП X называется **полным (ПМП)**, если любая его фундаментальная последовательность сходится к элементу этого пространства.

Полнота пространств из примеров 3.1 и 3.2 доказана в курсе математического анализа. Докажем полноту пространства $\mathrm{X} = C\left(\left[a,\ b\right];\ \mathbb{R}^n\right)$ из примера 3.3. Пусть последовательность вектор-функций $\left\{f_n(t)\right\}$ фундаментальна в X. Это означает, что $\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ N(\varepsilon) \in \mathbb{N}:\ \forall m,\ n > N \implies \max\limits_{[a,\, b]} \left|f_m(t) - f_n(t)\right| < \varepsilon$.

Поэтому выполнены условия критерия Коши равномерной на $\left[a,\ b\right]$ сходимости функциональной последовательности, т.е. $f_n(t) \overset{[a,\, b]}{\rightrightarrows} f(t)$ при $n \to \infty$. Как известно, предел $f(t)$ в этом случае – непрерывная функция. Докажем, что $f(t)$ – это предел $\left\{f_n(t)\right\}$ в метрике пространства $C\left(\left[a,\ b\right];\ \mathbb{R}^n\right)$. Из равномерной сходимости получим, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер $N(\varepsilon)$ такой, что для всех $n > N$ и для всех $t \in \left[a,\ b\right]$ выполняется неравенство $\left|f_n(t) - f(t)\right| < \varepsilon$, а так как в левой части неравенства стоит непрерывная функция, то и $\max\limits_{[a,\, b]} \left|f_n(t) - f(t)\right| < \varepsilon$. Это и есть сходимость в $C\left(\left[a,\ b\right];\ \mathbb{R}^n\right)$, следовательно, полнота установлена.

В заключение приведем пример МП, не являющегося полным.

Пример 3.4. Пусть $\mathrm{X} = \mathbb{Q}$ – множество рациональных чисел, а расстояние $\rho(x,\ y) = \left|x - y\right|$ – модуль разности двух чисел. Если взять последовательность десятичных приближений числа $\sqrt{2}$, т.е. $x_1 = 1$; $x_2 = 1,4$; $x_3 = 1,41$; $\ldots$, то, как известно, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. При этом данная последовательность сходится в $\mathbb{R}$, значит она фундаментальна в $\mathbb{R}$, а следовательно, она фундаментальна и в $\mathbb{Q}$. Итак, последовательность фундаментальна в $\mathbb{Q}$, но предела, лежащего в $\mathbb{Q}$, не имеет. Пространство не является полным.

Определение 3.7. Пусть X – метрическое пространство. Отображение $A:\ \mathrm{X} \mapsto \mathrm{X}$ называется **сжимающим отображением** или **сжатием**, если $\exists\ \alpha < 1$ такое, что для любых двух точек $x,\ y \in \mathrm{X}$ выполняется неравенство:

$$\rho\big(Ax,\ Ay\big) \leqslant \alpha\, \rho(x,\ y). \tag{3.7}$$

Определение 3.8. Точка $x^* \in \mathrm{X}$ называется **неподвижной точкой отображения** $A:\ \mathrm{X} \mapsto \mathrm{X}$, если $Ax^* = x^*$.

Замечание 3.2. Всякое сжимающее отображение является **непрерывным**, т.е. любую сходящуюся последовательность $x_n \to x$, $n \to \infty$, переводит в сходящуюся последовательность $Ax_n \to Ax$, $n \to \infty$, а предел последовательности – в предел ее образа.

Действительно, если A – сжимающий оператор, то положив в (3.7) $y = x_n \xrightarrow{\mathrm{X}} x$, $n \to \infty$, получим, что $Ax_n \xrightarrow{\mathrm{X}} Ax$, $n \to \infty$.

Теорема 3.2 (Принцип сжимающих отображений). *Пусть* X *– полное метрическое пространство, а отображение* $A:\ \mathrm{X} \mapsto \mathrm{X}$ *является сжатием. Тогда* A *имеет и притом единственную неподвижную точку.*

Доказательство этого фундаментального факта см. [4], [5].

Приведем обобщение теоремы 3.2, часто встречающееся в приложениях.

Теорема 3.3 (Принцип сжимающих отображений). *Пусть* X *– полное метрическое пространство, а отображение* $A: \mathrm{X} \mapsto \mathrm{X}$ *таково, что оператор* $B = A^m$ *с некоторым* $m \in \mathbb{N}$ *является сжатием. Тогда* A *имеет и притом единственную неподвижную точку.*

Доказательство. При $m = 1$ получаем теорему 3.2.

Пусть $m > 1$. Рассмотрим $B = A^m$, $B: \mathrm{X} \mapsto \mathrm{X}$, B – сжатие. По теореме 3.2 оператор B имеет единственную неподвижную точку x^*. Так как A и B перестановочны $\big(AB = BA\big)$ и так как $Bx^* = x^*$, имеем $B\big(Ax^*\big) = A\big(Bx^*\big) = Ax^*$, т.е. $y^* = Ax^*$ – это тоже неподвижная точка B, а поскольку такая точка по теореме 3.2 единственна, то $y^* = x^*$ или $Ax^* = x^*$. Отсюда x^* – неподвижная точка оператора A.

Докажем единственность. Предположим, что $\tilde{x} \in \mathrm{X}$ и $A\tilde{x} = \tilde{x}$, тогда $B\tilde{x} = A^m\tilde{x} = A^{m-1}\tilde{x} = \ldots = \tilde{x}$, т.е. $\tilde{x}$ – также неподвижная точка для B, откуда $\tilde{x} = x^*$. Теорема доказана. □

Частным случаем метрического пространства является линейное нормированное пространство. Приведем точное определение.

Определение 3.9. Пусть X – линейное пространство (действительное или комплексное), на котором определена числовая функция $\|x\|$, действующая из X в $\mathbb{R}$ и удовлетворяющая аксиомам:

1) $\forall\, x \in \mathrm{X}$, $\|x\| \geqslant 0$, причем $\|x\| = 0$ лишь при $x = \theta$;

2) $\forall\, x \in \mathrm{X}$ и для $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$) выполняется $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$;

3) $\forall\, x,\ y \in \mathrm{X}$ выполняется $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ (**неравенство треугольника**).

Тогда X называется **нормированным пространством**, а функция $\|x\|: \ \mathrm{X} \mapsto \mathbb{R}$, удовлетворяющая 1) – 3), – **нормой**.

В нормированном пространстве можно ввести расстояние между элементами по формуле $\rho\big(x,\ y\big) = \|x - y\|$. Выполнение аксиом МП легко проверяется. Если полученное метрическое пространство полно, то соответствующее нормированное пространство называется **банаховым пространством**.

Часто на одном и том же линейном пространстве можно по-разному ввести норму. В связи с этим возникает такое понятие.

Определение 3.10. Пусть X – линейное пространство, а $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ – две нормы, введенные на нем. Нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ называются **эквивалентными нормами**, если $\exists\, C_1 > 0$ и $C_2 > 0: \ \ \forall\, x \in \mathrm{X} \ \ C_1\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant C_2\|x\|_1$.

Замечание 3.3. Если $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ – две эквивалентные нормы на X, и пространство X является полным по одной из них, то оно полно и по другой норме. Это легко следует из того, что последовательность $\{x^n\} \subset \mathrm{X}$, фундаментальная по $\|\cdot\|_1$, фундаментальна также и по $\|\cdot\|_2$, причем сходится к тому же элементу $x \in \mathrm{X}$.

Замечание 3.4. Часто теорема 3.2 (или 3.3) применяется когда в качестве полного пространства берут замкнутый шар этого пространства $\mathrm{B}_r(a) = \Big\{x \in \mathrm{X} \,\Big|\, \rho\big(x,\ a\big) \leqslant r\Big\}$, где $r > 0$ и $a \in \mathrm{X}$ фиксированы. Отметим, что замкнутый шар в ПМП сам является ПМП с тем же расстоянием. Доказательство этого факта оставляем читателю в качестве упражнения.

Замечание 3.5. Выше была установлена полнота пространства из примера 3.3. Заметим, что в линейном пространстве $\mathrm{X} = C\Big(\big[0,\ T\big],\ \mathbb{R}^n\Big)$ можно ввести норму $\|x\| = \max\limits_{[0,\,T]}\big|x(t)\big|$ так, что полученное нормированное пространство будет банаховым. На этом же множестве непрерывных на $\big[0,\ T\big]$ вектор-функций можно ввести эквивалентную норму по формуле $\|x\|_\alpha = \max\limits_{[0,\,T]} e^{-\alpha t}\cdot\big|x(t)\big|$ при любом $\alpha \in \mathbb{R}$. При $\alpha \geqslant 0$ эквивалентность следует из неравенств $e^{-\alpha T}\cdot\big|x(t)\big| \leqslant e^{-\alpha t}\cdot\big|x(t)\big| \leqslant \big|x(t)\big|$ при всех $t \in \big[0,\ T\big]$, откуда $e^{-\alpha T}\|x\| \leqslant \|x\|_\alpha \leqslant \|x\|$.

Этим свойством эквивалентных норм мы воспользуемся при доказательстве теоремы об однозначной разрешимости задачи Коши для линейных (нормальных) систем.

3.4. Теоремы существования и единственности решения задачи Коши для нормальных систем

Рассмотрим задачу Коши (3.1) – (3.2), где начальные данные $\big(t_0,\ y^0\big) \in G$, $G \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ – область определения вектор-функции $f(t,\ y)$. В этом параграфе будем предполагать, что G имеет вид $G = \big[a,\ b\big]\times\Omega$, где Ω – некоторая область $\mathbb{R}^n$, а шар $\mathrm{B}_R(y^0) = \Big\{y \in \mathbb{R}^n \,\Big|\, \big|y - y^0\big| \leqslant R\Big\}$ целиком лежит в Ω. Имеет место теорема.

Теорема 3.4. *Пусть вектор-функция* $f(t,\ y) \in C\big(G;\ \mathbb{R}^n\big)$, *причем* $\exists\, M > 0$ *и* $L > 0$ *такие, что выполняются условия*

1) $\forall\,(t,\ y) \in G = \big[a,\ b\big]\times\Omega \qquad \big|f(t,\ y)\big| \leqslant M$;

2) $\forall\,(t,\ y^1),\ (t,\ y^2) \in G \qquad \big|f\big(t,\ y^2\big) - f\big(t,\ y^1\big)\big| \leqslant L\cdot\big|y^2 - y^1\big|$.

Фиксируем число $\delta \in (0,\,1)$ *и пусть* $t_0 \in (a,\,b)$. *Тогда*

$$\exists\, h = \min\left\{\frac{R}{M};\ \ \frac{1-\delta}{L};\ \ t_0 - a;\ \ b - t_0\right\} > 0$$

такое, что существует и притом единственное решение задачи Коши (3.1), (3.2) $y(t)$ *на отрезке* $J_h = \big[t_0 - h,\ t_0 + h\big]$, *причем* $\big|y(t) - y^0\big| \leqslant R$ *при всех* $t \in J_h$.

Доказательство. По лемме 3.1 задача Коши (3.1), (3.2) эквивалентна интегральному уравнению (3.6) на отрезке $[a, b]$, а следовательно, и на $J_h \subseteq [a, b]$, где h выбрано выше. Рассмотрим банахово пространство $\mathrm{X} = C\,(J_h;\, \mathbb{R}^n)$ – множество непрерывных на отрезке J_h вектор-функций $x(t)$ с нормой $\|x\| = \max\limits_{t\in J_h}\big|x(t)\big|$ и введем в X замкнутое множество:

$$S_R\big(y^0\big) = \Big\{y(t)\in \mathrm{X}\;\Big|\;\forall\, t\in J_h\quad \big|y(t)-y^0\big|\leqslant R\Big\} =$$
$$= \Big\{y(t)\in \mathrm{X}\;\Big|\;\;\big\|y(t)-y^0\big\|\leqslant R\Big\}\; - \;\text{ замкнутый шар в X.}$$

Оператор A, определенный по правилу:

$$Ay = y^0 + \int\limits_{t_0}^{t} f\big(\tau,\; y(\tau)\big)\,d\tau, \qquad t\in J_h,$$

переводит $S_R\big(y^0\big)$ в себя, так как

$$\big\|Ay - y^0\big\| = \max_{t\in J_h}\left|\int\limits_{t_0}^{t} f\big(\tau,\; y(\tau)\big)\,d\tau\right| \leqslant h\cdot M\leqslant R$$

по условию 1 теоремы и определению h.

Докажем, что A является на S_R оператором сжатия. Возьмем произвольные $y^1(t),\; y^2(t)\in S_R\big(y^0\big)$ и оценим величину:

$$\big\|Ay^2 - Ay^1\big\| = \max_{t\in J_h}\left|\int\limits_{t_0}^{t}\Big[f\big(\tau,\; y^2(\tau)\big) - f\big(\tau,\; y^1(\tau)\big)\Big]\,d\tau\right| \leqslant$$
$$\leqslant \max_{t\in J_h}\left|\int\limits_{t_0}^{t}\Big|f\big(\tau,\; y^2(\tau)\big) - f\big(\tau,\; y^1(\tau)\big)\Big|\,d\tau\right| \leqslant$$
$$\leqslant h\cdot L\cdot\big\|y^2 - y^1\big\| = q\cdot\big\|y^2-y^1\big\|,$$

где $q = h\cdot L\leqslant 1-\delta < 1$ по условию теоремы.

Отметим (см. замечание 3.4), что замкнутый шар $S_R\big(y^0\big)$ в банаховом пространстве X является ПМП. Поэтому применим принцип сжимающих отображений (теорема 3.2), по которому существует единственное решение $y(t)\in\mathrm{X}$ интегрального уравнения (3.6) на отрезке $J_h = \big[t_0 - h,\; t_0 + h\big]$. Теорема доказана. $\square$

Замечание 3.6. Если $t_0 = a$ или $t_0 = b$, то утверждение теоремы сохраняется с небольшими изменениями в формуле для h и отрезка J_h. Приведем эти изменения для случая $t_0 = a$. В этом случае число $h > 0$ выбираем по формуле $h = \min\big\{\frac{R}{M};\;\; \frac{1-\delta}{L};\;\; b-a\big\}$, а в качестве отрезка J_h всюду надо взять

$J_h = \big[t_0,\ t_0 + h\big] = \big[a,\ a + h\big]$. Все остальные условия теоремы не изменяются, ее доказательство, с учетом переобозначений, сохраняется.

Для случая $t_0 = b$, аналогично, $h = \min\left\{\frac{R}{M};\ \frac{1-\delta}{L};\ b - a\right\}$, а $J_h = \big[b - h,\ b\big]$.

Замечание 3.7. В теореме 3.4 условие $f(t, y) \in C\big(G;\ \mathbb{R}^n\big)$, где $G = \big[a,\ b\big] \times D$, можно ослабить, заменив на требование непрерывности $f(t, y)$ по переменной t при каждом $y \in \Omega$, с сохранением условий 1 и 2. Доказательство не изменится.

Замечание 3.8. Достаточно, чтобы условия 1 и 2 теоремы 3.4 выполнялись при всех $\big(t,\ y\big) \in \big[a,\ b\big] \times B_R\big(y^0\big)$, при этом константы M и L зависят, вообще говоря, от y^0 и R.

При более жестких ограничениях на вектор-функцию $f\big(t,\ y\big)$, аналогично теореме 2.4 справедлива теорема существования и единственности решения задачи Коши (3.1), (3.2) на всем отрезке $\big[a,\ b\big]$.

Теорема 3.5. *Пусть вектор-функция* $f\big(x, y\big) \in C\big(G,\ \mathbb{R}^n\big)$, *где* $G = \big[a,\ b\big] \times \mathbb{R}^n$, *и существует* $L > 0$, *такое, что выполняется условие*

$$\forall\ \big(t,\ y^1\big),\ \big(t,\ y^2\big) \in G \qquad \big|f\big(t,\ y^2\big) - f\big(t,\ y^1\big)\big| \leqslant L \cdot \big|y^2 - y^1\big|\,.$$

Тогда при любых $t_0 \in [a, b]$ *и* $y^0 \in \mathbb{R}^n$ *на* $\big[a,\ b\big]$ *существует и притом единственное решение задачи Коши* (3.1), (3.2).

Доказательство. Возьмем произвольные $t_0 \in [a, b]$ и $y^0 \in \mathbb{R}^n$ и фиксируем их. Множество $G = \big[a,\ b\big] \times \mathbb{R}^n$ представим в виде: $G = G^- \cup G^+$, где $G^- = \big[a,\ t_0\big] \times \mathbb{R}^n$, а $G^+ = \big[t_0,\ b\big] \times \mathbb{R}^n$, считая, что $t_0 \in \big(a,\ b\big)$, иначе один из этапов доказательства будет отсутствовать.

Проведем рассуждения для полосы G^+. На отрезке $\big[t_0,\ b\big]$ задача Коши (3.1), (3.2) эквивалентна интегральному уравнению (3.6). Введем оператор $A:\ \ \mathrm{X} \mapsto \mathrm{X}$, где $\mathrm{X} = C\left(\big[t_0,\ b\big];\ \mathbb{R}^n\right)$, по формуле

$$Ay = y^0 + \int\limits_{t_0}^{t} f\big(\tau,\ y(\tau)\big)\,d\tau.$$

Тогда интегральное уравнение (3.6) можно записать в виде операторного уравнения

$$Ay = y. \tag{3.8}$$

Если мы докажем, что операторное уравнение (3.8) имеет решение в ПМП X, то получим разрешимость задачи Коши на $\big[t_0,\ b\big]$ $\Big($или на $\big[a,\ t_0\big]$ для $G^-\Big)$. Если это решение будет единственно, то в силу эквивалентности, единственным будет и решение задачи Коши.

Приведем два доказательства однозначной разрешимости уравнения (3.8).

Доказательство 1. Рассмотрим произвольные вектор-функции $y^1,\ y^2 \in \mathrm{X} = C\left(\big[t_0,\ b\big];\ \mathbb{R}^n\right)$, тогда справедливы оценки $\Big($при любом

$t \in \big[t_0,\ b\big]\Big)$:

$$\big|Ay^2 - Ay^1\big| = \left|\int\limits_{t_0}^{t} \Big[f\big(\tau,\ y^2(\tau)\big) - f\big(\tau,\ y^1(\tau)\big)\Big]\, d\tau\right| \leqslant$$

$$\leqslant L \cdot \int\limits_{t_0}^{t} \big|y^2(\tau) - y^1(\tau)\big|\, d\tau \leqslant L \cdot \big(t - t_0\big) \cdot \max_{\tau \in [t_0,\, t]} \big|y^2(\tau) - y^1(\tau)\big| \leqslant$$

$$\leqslant L \cdot \big(t - t_0\big) \cdot \big\|y^2 - y^1\big\|.$$

Напомним, что в X норма вводится так: $\|x\| = \max\limits_{[t_0,\, b]} \big|x(\tau)\big|$. Из полученного неравенства будем иметь:

$$\big|A^2y^2 - A^2y^1\big| = \left|\int\limits_{t_0}^{t} \Big[f\big(\tau,\ Ay^2(\tau)\big) - f\big(\tau,\ Ay^1(\tau)\big)\Big]\, d\tau\right| \leqslant$$

$$\leqslant L^2 \cdot \int\limits_{t_0}^{t} \big|Ay^2(\tau) - Ay^1(\tau)\big|\, d\tau \leqslant L^2 \cdot \int\limits_{t_0}^{t} \big(\tau - t_0\big)\, d\tau \cdot \big\|y^2 - y^1\big\| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{L^2 \cdot \big(t - t_0\big)^2}{2!} \cdot \big\|y^2 - y^1\big\|.$$

Продолжая этот процесс, по индукции можно доказать, что $\forall\, k \in \mathbb{N}$

$$\big|A^ky^2 - A^ky^1\big| \leqslant \frac{\big(L \cdot \big(t - t_0\big)\big)^k}{k!} \cdot \big\|y^2 - y^1\big\|.$$

Отсюда, окончательно, получим оценку

$$\big\|A^ky^2 - A^ky^1\big\| = \max_{[t_0,\, b]} \big|A^ky^2 - A^ky^1\big| \leqslant \frac{\big(L \cdot \big(b - t_0\big)\big)^k}{k!} \cdot \big\|y^2 - y^1\big\|.$$

Поскольку $\alpha(k) = \frac{\left(L \cdot \left(b - t_0\right)\right)^k}{k!} \to 0$ при $k \to \infty$, то найдется k_0 такое, что $\alpha(k_0) < 1$. Применим теорему 3.3 с $m = k_0$, получим, что A имеет в X неподвижную точку, причем единственную.

Доказательство 2. В банаховом пространстве $\mathrm{X} = C\left(\big[t_0,\ b\big];\ \mathbb{R}^n\right)$ введем семейство эквивалентных норм, при $\alpha \geqslant 0$ (см. замечание 3.5) по формуле:

$$\big\|x\big\|_\alpha = \max_{[t_0,\, b]} e^{-\alpha t} \cdot \big|x(t)\big|.$$

Покажем, что можно выбрать α так, что оператор A в пространстве X с нормой $\|\cdot\|_\alpha$ при $\alpha \geqslant L$ будет сжимающим. Действительно,

$$\left\|Ay^2 - Ay^1\right\|_\alpha = \max_{[t_0,\, b]} e^{-\alpha t} \cdot \left| \int\limits_{t_0}^{t} \Big[f\big(\tau,\ y^2(\tau)\big) - f\big(\tau,\ y^1(\tau)\big) \Big]\, d\tau \right| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{[t_0,\, b]} e^{-\alpha t} \cdot L \cdot \int\limits_{t_0}^{t} \left|y^2(\tau) - y^1(\tau)\right| d\tau =$$

$$= L \cdot \max_{[t_0,\, b]} e^{-\alpha t} \cdot \int\limits_{t_0}^{t} e^{-\alpha\tau} \left|y^2(\tau) - y^1(\tau)\right| \cdot e^{\alpha\tau}\, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant L \cdot \max_{[t_0,\, b]} e^{-\alpha t} \cdot \int\limits_{t_0}^{t} e^{\alpha\tau}\, d\tau \cdot \max_{[t_0,\, b]} e^{-\alpha\tau} \cdot \left|y^2(\tau) - y^1(\tau)\right| =$$

$$= L \cdot \max_{[t_0,\, b]} e^{-\alpha t} \cdot \frac{1}{\alpha}\left(e^{\alpha t} - e^{\alpha t_0}\right) \cdot \left\|y^2 - y^1\right\|_\alpha =$$

$$= \frac{L}{\alpha} \cdot \left\|y^2 - y^1\right\|_\alpha \cdot \left(1 - e^{-\alpha\left(b - t_0\right)}\right).$$

Так как $\alpha \geqslant L$, то $q = \frac{L}{\alpha} \cdot \left(1 - e^{-\alpha\left(b - t_0\right)}\right) < 1$ и оператор A – сжимающий (например, с $\alpha = L$).

Таким образом, доказано, что существует и притом единственная вектор-функция $\varphi^+(t)$ – решение задачи Коши (3.1), (3.2) на $\big[t_0,\ b\big]$.

Для полосы $G^- = \big[a,\ t_0\big] \times \mathbb{R}^n$ задачу Коши сведем к предыдущей при помощи линейной замены $\tau = 2t_0 - t$. В самом деле, для вектор-функция $y(t) = y\big(2t_0 - \tau\big) = \tilde{y}(t)$, задача Коши (3.1), (3.2) запишется в виде:

$$\tfrac{d}{d\tau}\, \tilde{y}(\tau) = -f\left(2t_0 - \tau,\ \tilde{y}(\tau)\right) \equiv \tilde{f}\left(\tau,\ \tilde{y}(\tau)\right), \tilde{y}(t_0) = y^0$$

на отрезке $\tau \in \big[t_0,\ 2t_0 - a\big]$. Поэтому можно применить предыдущие рассуждения, взяв $b = 2t_0 - a$.

Итак, существует и притом единственное решение задачи Коши $\tilde{y}(\tau)$ на всем отрезке $\tau \in \big[t_0,\ 2t_0 - a\big]$ и, следовательно, $\varphi^-(t) = \tilde{y}\big(2t_0 - t\big)$ – решение задачи Коши (3.1), (3.2) на $\big[a,\ t_0\big]$.

Возьмем «сшивку» вектор-функций $\varphi^-(t)$ и $\varphi^+(t)$, т.е. вектор-функцию

$$\varphi(t) = \begin{cases} \varphi^-(t), & \text{при } t \in \big[a,\, t_0\big]; \\ \varphi^+(t), & \text{при } t \in \big[t_0,\, b\big]. \end{cases}$$

Как при доказательстве теоремы 2.4, устанавливаем, что $\varphi(t)$ – это решение задачи Коши (3.1), (3.2) на $\big[a,\ b\big]$. Единственность его следует из следствия 3.1. Теорема доказана. □

Замечание 3. 9. Утверждение 3. 1 дает достаточное условие того, что вектор-функция $f\big(t,\, y\big)$ в выпуклой по y области G удовлетворяет условию Липшица. А именно, для этого достаточно, чтобы все частные производные $\dfrac{\partial f_i}{\partial y_j}$ были непрерывны и ограничены некоторой константой в G.

Аналогично следствию из теоремы 2.4 получаем такое утверждение для нормальных систем.

Следствие 3.3. *Пусть вектор-функция* $f(t,\, y)$ *определена, непрерывна в открытой полосе*

$$Q = \Big\{(t,\, y) \;\Big|\; t \in (A,\, B), \quad y \in \mathbb{R}^n\Big\},$$

причем A *и* B *могут быть символами* $-\infty$ *и* $+\infty$ *соответственно. Предположим, что вектор-функция* $f(t,\, y)$ *удовлетворяет в полосе* Q *условию:* $\exists\ L(t) \in C(A,\, B)$ *такая, что* $\forall\ t \in (A,\, B)$ *и* $\forall\ y^1,\ y^2 \in \mathbb{R}^n$ *выполняется неравенство* $\big|f\big(t,\, y^2\big) - f\big(t,\, y^1\big)\big| \leqslant L(t) \cdot \big|y^2 y^1\big|$. *Тогда при любых начальных данных* $t_0 \in (A,\, B)$, $y^0 \in \mathbb{R}^n$ *существует и притом единственное решение задачи Коши* (3.1), (3.2) *на всем интервале* $(A,\, B)$.

Доказательство проводится повторением соответствующих рассуждений из п. 2.2, оставляем его добросовестному читателю.

В качестве других следствий из доказанной теоремы 3. 5 получим теорему о существовании и единственности решения задачи Коши для линейной системы. Речь идет о задаче нахождения вектор-функции $y(t) = (y_1(t),\ \ldots,\ y_n(t))$ из условий:

$$\frac{d}{dt}\, y(t) = A(t)y(t) + f^0(t), \qquad t \in \big[a,\ b\big], \tag{3.9}$$

$$y(t_0) = y^0, \tag{3.10}$$

где $A(t) = \Big(a_{ij}(t)\Big)$ – $n \times n$ матрица, $f^0(t)$ – вектор-функция переменной t, $t_0 \in \big[a,\, b\big]$, $y^0 \in \mathbb{R}^n$ – заданы.

Теорема 3. 6. *Пусть* $a_{ij}(t) \in C\left(\big[a,\, b\big]\right)$, $f^0(t) \in C\left(\big[a,\, b\big];\, \mathbb{R}^n\right)$, $t_0 \in \big[a,\, b\big]$, $y^0 \in \mathbb{R}^n$ *– заданы. Тогда существует и притом единственное решение задачи Коши* (3.9), (3.10) *на всем отрезке* $\big[a,\, b\big]$.

Доказательство. Проверим, что для функции $f\big(t,\ y\big) = A(t)y + f^0(t)$ выполнены условия теоремы 3. 5. Во-первых, $f\big(t,\ y\big) \in C\big(G;\ \mathbb{R}^n\big)$, где $G = \big[a,\, b\big] \times \mathbb{R}^n$, как сумма двух непрерывных функций. Во-вторых, (см. неравенство (3.5)):

$$\big|Ay^2 - Ay^1\big| = \big|A(t) \cdot \big(y^2 - y^1\big)\big| \leqslant \big\|A\big\|_2 \cdot \big|y^2 - y^1\big| \leqslant L \cdot \big|y^2 - y^1\big|,$$

поскольку $\|A\|_2 \equiv \left(\sum\limits_{i,j=1}^{n} \left| a_{ij}(t) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ – непрерывная на $[a,\, b]$ функция. Тогда по теореме 3.5 получим доказываемое утверждение. $\square$

Теорема 3.7. *Пусть* $a_{ij}(t) \in C(\mathbb{R})$, $f^0(t) \in C(\mathbb{R};\, \mathbb{R}^n)$ *– заданы. Тогда при любых начальных данных* $t_0 \in \mathbb{R}$, $y^0 \in \mathbb{R}^n$ *существует и притом единственное решение задачи Коши* (3.9), (3.10) *на всей числовой прямой.*

Доказательство. Проверим, что выполнены все условия следствия из теоремы 3.5 с $A = -\infty$, $B = +\infty$. Вектор-функция $f(t,\ y) = A(t)y + f^0(t)$ непрерывна в полосе $Q = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ как функция $(n+1)$ переменной. Кроме того,

$$\left| f(t,\ y^2) - f(t,\ y^1) \right| \leqslant \left\| A(t) \right\|_2 \cdot \left| y^2 - y^1 \right| \equiv L(t) \cdot \left| y^2 - y^1 \right|,$$

где $L(t)$ – непрерывная по условию теоремы на $(A,\, B) = (-\infty,\ +\infty)$ функция. Таким образом, все условия следствия выполнены, и теорема доказана. $\square$

Глава IV.

Некоторые классы обыкновенных дифференциальных уравнений, решаемых в квадратурах

В ряде случаев дифференциальное уравнение может быть решено в квадратурах, т.е. для его решения может быть получена явная формула.

В таких случаях методика решения, как правило, следующая.

1. Предполагая, что решение существует, находят формулу, по которой решение выражается.

2. Существование решения затем доказывается непосредственной проверкой, т.е. подстановкой найденной формулы в исходное уравнение.

3. Используя дополнительные данные, (например, задавая начальные данные Коши) выделяют конкретное решение.

4.1. Уравнение с разделяющимися переменными

В данном параграфе применим уже использовавшуюся выше методику для решения **уравнений с разделяющимися переменными**, т.е. уравнений вида

$$y\,'(x) = f_1(x) \cdot f_2(y), \qquad x \in \langle a,\ b\rangle, \quad y \in \langle c,\ d\rangle. \tag{4.1}$$

Будем предполагать, что

$$f_1(x) \in C\left(\langle a,\ b\rangle\right), \quad f_2(y) \in C\left(\langle c,\ d\rangle\right), \quad f_2(y) \neq 0 \text{ на } \langle c,\ d\rangle$$

$\big($а следовательно, в силу непрерывности функции $f_2(y)$, она сохраняет знак на $\langle c,\ d\rangle\big)$.

Итак, предположим, что в окрестности $\mathrm{U}(x_0)$ точки $x_0 \in \langle a,\ b\rangle$ существует решение $y = \varphi(x)$ уравнения (4.1).

Тогда имеем тождество

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x) \cdot f_2(y), \qquad y = \varphi(x), \quad x \in \mathrm{U}(x_0).$$

Но тогда равны дифференциалы

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)\,dx$$

$\big($мы учли, что $f_2(y) \neq 0\big)$.

Из равенства дифференциалов вытекает равенство первообразных с точностью до постоянного слагаемого:

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)\,dx + C. \tag{4.2}$$

После введения обозначений

$$F_2(y) = \int \frac{dy}{f_2(y)}, \qquad F_1(x) = \int f_1(x)\,dx,$$

получаем равенство

$$F_2(y) = F_1(x) + C. \tag{4.3}$$

Заметим, что $F_2{}'(y) = 1/f_2(y) \neq 0$, поэтому к соотношению (4.3) можно применить теорему об обратной функции, в силу которой равенство (4.3) можно разрешить относительно y и получить формулу

$$y(x) = F_2^{-1}\big(F_1(x) + C\big), \tag{4.4}$$

справедливую в окрестности точки x_0.

Покажем, что равенство (4.4) дает решение уравнения (4.1) в окрестности точки x_0. Действительно, используя теорему о дифференцировании обратной функции и учитывая соотношение $F_1{}'(x) = f_1(x)$, получим

$$y\,'(x) = \frac{dF_2^{-1}(z)}{dz}\Big|_{z=F_1(x)+C} \cdot F_1{}'(x) = \frac{1}{F_2{}'(y)}\Big|_{y=y(x)} \cdot F_1{}'(x) = f_2\big(y(x)\big) \cdot f_1(x),$$

откуда следует, что функция $y(x)$ из (4.4) является решением уравнения (4.1).

Рассмотрим теперь задачу Коши для уравнения (4.1) с начальным условием

$$y(x_0) = y_0. \tag{4.5}$$

Формулу (4.2) можно записать в виде

$$\int\limits_{y_0}^{y} \frac{d\xi}{f_2(\xi)} = \int\limits_{x_0}^{x} f_1(x)\,dx + C.$$

Подставляя сюда начальное условие (4.5), находим, что $C = 0$, т.е. решение задачи Коши определяется из соотношения

$$\int\limits_{y_0}^{y} \frac{d\xi}{f_2(\xi)} = \int\limits_{x_0}^{x} f_1(x)\,dx. \tag{4.6}$$

Очевидно, оно определяется однозначно.

Итак, общее решение уравнения (4.1) задается формулой (4.4), а решение задачи Коши (4.4), (4.5) находится из соотношения (4.6).

Замечание 4.1. Если $f_2(y) = 0$ при некоторых $y = y_j$, $(j = 1, 2, \ldots, s)$, то, очевидно, решениями уравнения (4.1) являются также функции

$$y(x) \equiv y_j, \qquad j = 1, 2, \ldots, s,$$

что доказывается непосредственной подстановкой этих функций в уравнение (4.1).

Замечание 4.2. Для уравнения (4.1) общее решение определяем из соотношения

$$F_2(y) - F_1(x) = C. \tag{4.7}$$

Таким образом, левая часть соотношения (4.7) постоянна на каждом решении уравнения (4.1).

Соотношения типа (4.7) можно записать и при решении других ОДУ. Такие соотношения принято называть **интегралами (общими интегралами)** соответствующего ОДУ. Дадим точное определение.

Определение 4.1. Рассмотрим уравнение

$$y\,'(x) = f(x, y). \tag{4.8}$$

Соотношение

$$\Phi(x, y) = C, \tag{4.9}$$

где $\Phi(x, y)$ – функция класса C^1, называется **общим интегралом уравнения** (4.8)**,** если это соотношение не выполняется тождественно, но выполняется на каждом решении уравнения (4.8).

При каждом конкретном значении $C \in \mathbb{R}$ мы получаем **частный интеграл**.

Общее решение уравнения (4.8) получается из общего интеграла (4.9) с использованием теоремы о неявной функции.

Пример 4.1. Рассмотрим уравнение

$$y\,'(x) = \frac{x}{y} \tag{4.10}$$

и начальное условие

$$y(2) = 4. \tag{4.11}$$

Применяя для решения уравнения (4.10) описанный выше **метод разделения переменных**, получаем $y\,dy = x\,dx$, откуда находим общий интеграл для уравнения (4.10)

$$y^2 - x^2 = C.$$

Общее решение уравнения (4.10) запишется по формуле

$$y = \pm\sqrt{C + x^2}\,,$$

а решение задачи Коши (4.10), (4.11) – по формуле

$$y = \sqrt{12 + x^2}\,.$$

4.2. Линейные ОДУ первого порядка

Линейным ОДУ первого порядка называется уравнение

$$y'(x) + p(x)y(x) = q(x), \qquad x \in \langle a,\ b\rangle. \tag{4.12}$$

Если $q(x) \not\equiv 0$, то уравнение называется **неоднородным**.
Если $q(x) \equiv 0$, то уравнение называется **однородным**:

$$y'(x) + p(x)y(x) = 0. \tag{4.12$_0$}$$

Теорема 4.1.

1) *Если* $y_1(x)$, $y_2(x)$ *– решения однородного уравнения* (4.12$_0$), α, β *– произвольные числа, то функция* $y^*(x) \equiv \alpha y_1(x) + \beta y_2(x)$ *также является решением уравнения* (4.12$_0$).

2) *Для общего решения неоднородного уравнения* (4.12) *имеет место формула*

$$y_{он} = y_{оо} + y_{чн}; \tag{4.13}$$

здесь $y_{он}$ *–* ***общее решение неоднородного уравнения*** (4.12), $y_{чн}$ *–* ***частное решение неоднородного уравнения*** (4.12), $y_{оо}$ *–* ***общее решение однородного уравнения*** (4.12$_0$).

Доказательство. Первое утверждение теоремы доказывается непосредственной проверкой: имеем

$$y^{*\,\prime} \equiv \alpha y_1' + \beta y_2' = -\alpha p(x)y_1 - \beta p(x)y_2 = -p(x)\big(\alpha y_1 + \beta y_2\big) = -p(x)y^*.$$

Докажем второе утверждение. Пусть y_0 – произвольное решение уравнения (4.12$_0$), тогда $y_0' = -p(x)y_0$. С другой стороны,

$$y_{чн}' = -p(x)y_{чн} + q(x).$$

Следовательно,

$$\big(y_0 + y_{чн}\big)' = -p(x)\big(y_0 + y_{чн}\big) + q(x),$$

а значит $y^* \equiv y_0 + y_{чн}$ является решением уравнения (4.12). Таким образом, формула (4.13) дает решение неоднородного уравнения (4.12).

Покажем, что по этой формуле могут быть получены *все* решения уравнения (4.12). Действительно, пусть $\hat{y}(x)$ – решение уравнения (4.12). Положим

$$\tilde{y}(x) = \hat{y}(x) - y_{чн}.$$

Имеем

$$\tilde{y}'(x) = \hat{y}'(x) - y_{чн}'(x) = -p(x)\hat{y}(x) + q(x) + p(x)y_{чн}(x) - q(x) =$$
$$= -p(x)\left(\hat{y}(x) - y_{чн}(x)\right) = -p(x)\tilde{y}(x).$$

Таким образом, $\tilde{y}(x)$ – решение однородного уравнения (4.12$_0$), и мы имеем

$$\hat{y}(x) = \tilde{y}(x) + y_{чн},$$

что соответствует формуле (4.13). Теорема доказана. □

Ниже будем рассматривать задачи Коши для уравнений (4.12) и (4.12_0) с начальным условием

$$y(x_0) = y_0, \qquad x_0 \in \langle a,\ b\rangle. \tag{4.14}$$

Относительно функций $p(x)$ и $q(x)$ из (4.12) будем предполагать, что $p(x),\ q(x) \in C\left(\langle a,\ b\rangle\right)$.

Замечание 4.3. Положим $F(x,\ y) = -p(x)y + q(x)$. Тогда в силу наложенных выше условий на $p(x)$ и $q(x)$ имеем

$$F(x,\ y),\ \frac{\partial F}{\partial y}(x,\ y) \in C\bigl(G\bigr), \qquad G = \langle a,\ b\rangle \times \mathbb{R}^1,$$

а следовательно, для задачи Коши (4.12), (4.14) справедливы теоремы существования и единственности решения, доказанные в главе 2.

В доказанных ниже теоремах 4.2, 4.3 будут получены явные формулы для решений уравнений (4.12_0) и (4.12) и будет показано, что эти решения существуют на всем промежутке $\langle a,\ b\rangle$.

Рассмотрим сначала однородное уравнение (4.12_0).

Теорема 4.2. *Пусть* $p(x) \in C\left(\langle a,\ b\rangle\right)$*. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *любое решение уравнения* (4.12_0) *определено на всем промежутке* $\langle a,\ b\rangle$*;*

2) *общее решение однородного уравнения* (4.12_0) *задается формулой*

$$y(x) = C\ e^{-\int p(x)\,dx}, \tag{4.15}$$

где C *– произвольная константа;*

3) *решение задачи Коши* (4.12_0), (4.14) *задается формулой*

$$y(x) = y_0\ e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p(\xi)\,d\xi}. \tag{4.16}$$

Доказательство. Выведем формулу (4.15) в соответствии с данной в начале главы методикой. Прежде всего заметим, что функция $y \equiv 0$ является решением уравнения (4.12_0).

Пусть $y(x)$ – решение уравнения (4.12_0), причем $y \not\equiv 0$ на $\langle a,\ b\rangle$. Тогда $\exists\, x_1 \in \langle a,\ b\rangle$ такая, что $y(x_1) = y_0 \neq 0$.

Рассмотрим уравнение (4.12_0) в окрестности точки x_1. Это уравнение с разделяющимися переменными, причем $y(x) \neq 0$ в некоторой окрестности точки x_1.

Тогда, следуя результатам предыдущего параграфа, получим явную формулу для решения

$$\frac{dy}{y} = -p(x)\,dx, \qquad \ln|y| = -\int p(x)\,dx + C,$$

откуда
$$y(x) = C\, e^{-\int p(x)\,dx}, \qquad c \neq 0,$$
что соответствует формуле (4.15). Более того, решение $y \equiv 0$ также задается формулой (4.15) при $C = 0$.

Непосредственной подстановкой в уравнение (4.12_0) убеждаемся, что функция $y(x)$, задаваемая по формуле (4.15) при любом C, является решением уравнения (4.12_0), причем на всем промежутке $\langle a,\ b\rangle$.

Покажем, что формула (4.15) задает общее решение уравнения (4.12_0). Действительно, пусть $\hat{y}(x)$ – произвольное решение уравнения (4.12_0). Если $\hat{y}(x) \neq 0$ на $\langle a,\ b\rangle$, то повторяя предыдущие рассуждения, получим, что эта функция задается формулой (4.15) при некотором C: именно, если $\hat{y}(x_0) = \hat{y}_0$, то
$$\hat{y}(x) = \hat{y}_0\, e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p(\xi)\,d\xi}.$$
Если же $\exists x_1 \in \langle a,\ b\rangle$ такая, что $\hat{y}(x_1) = 0$, то задача Коши для уравнения (4.12_0) с начальным условием $y(x_1) = 0$ имеет два решения $\hat{y}(x)$ и $y(x) \equiv 0$. В силу замечания 4.3 решение задачи Коши единственно, поэтому $\hat{y}(x) \equiv 0$, а следовательно, задается формулой (4.15) при $C = 0$.

Итак, доказано, что общее решение уравнения (4.12_0) определено на всем $\langle a,\ b\rangle$ и задается формулой (4.15).

Формула (4.16), очевидно, является частным случаем формулы (4.15), поэтому задаваемая ею функция $y(x)$ является решением уравнения (4.12_0). Кроме того,
$$y(x_0) = y_0\, e^{-\int\limits_{x_0}^{x_0} p(\xi)\,d\xi} = y_0,$$
поэтому формула (4.16) действительно задает решение задачи Коши (4.12_0), (4.14). Теорема 4.2 доказана. □

Рассмотрим теперь неоднородное уравнение (4.12).

Теорема 4.3. *Пусть* $p(x),\ q(x) \in C\,(\langle a,\ b\rangle)$. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) любое решение уравнения (4.12) *определено на всем промежутке* $\langle a,\ b\rangle$*;*

2) общее решение неоднородного уравнения (4.12) *задается формулой*
$$y(x) = Ce^{-\int p(x)\,dx} + e^{-\int p(x)\,dx} \cdot \int q(x) e^{\int p(x)\,dx}\,dx, \tag{4.17}$$
где C *– произвольная константа;*

3) решение задачи Коши (4.12), (4.14) *задается формулой*
$$y(x) = y_0 e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p(\xi)\,d\xi} + \int\limits_{x_0}^{x} q(\xi) e^{-\int\limits_{\xi}^{x} p(\theta)\,d\theta}\,d\xi. \tag{4.18}$$

Доказательство. В соответствии с теоремой 4.1 и формулой (4.13) $\big(y_{он} = y_{оо} + y_{чн}\big)$ требуется найти частное решение уравнения (4.12). Для его нахождения применим так называемый **метод вариации произвольной постоянной**. Суть этого метода заключается в следующем: берем формулу (4.15), заменяем в ней константу C на неизвестную функцию $C(x)$ и ищем частное решение уравнения (4.12) в виде

$$y_{чн}(x) = C(x)\, e^{-\int p(x)\,dx}. \tag{4.19}$$

Подставим $y_{чн}(x)$ из (4.19) в уравнение (4.12) и найдем $C(x)$ так, чтобы это уравнение удовлетворялось. Имеем

$$y'_{чн}(x) = C'(x)\, e^{-\int p(x)\,dx} + C(x)\, e^{-\int p(x)\,dx} \cdot \big(-p(x)\big).$$

Подставляя в (4.12), получим

$$C'(x)\;\, e^{-\int p(x)\,dx} + C(x)\;\, e^{-\int p(x)\,dx} \cdot \big(-p(x)\big) + C(x)p(x)\;\, e^{-\int p(x)\,dx} \;=\; q(x),$$

откуда

$$C'(x) = q(x)\, e^{\int p(x)\,dx}.$$

Интегрируя последнее соотношение и подставляя найденное $C(x)$ в формулу (4.19), получим, что

$$y_{чн}(x) = e^{-\int p(x)\,dx} \cdot \int q(x)\, e^{\int p(x)\,dx}\, dx.$$

Кроме того, в силу теоремы 4.2

$$y_{оо} = C\, e^{-\int p(x)\,dx}.$$

Поэтому используя формулу (4.13) из теоремы 4.1, получаем, что

$$y(x) = y_{оо} + y_{чн} = Ce^{-\int p(x)\,dx} + e^{-\int p(x)\,dx} \cdot \int q(x) e^{\int p(x)\,dx}\, dx,$$

что совпадает с формулой (4.17).

Очевидно, что формула (4.17) задает решение на всем промежутке $\langle a,\, b\rangle$.

Наконец, решение задачи Коши (4.12), (4.14) задается формулой

$$y(x) = y_0 e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p(\xi)\,d\xi} + e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p(\theta)\,d\theta} \cdot \int\limits_{x_0}^{x} q(\xi) e^{\int\limits_{x_0}^{\xi} p(\theta)\,d\theta}\, d\xi. \tag{4.20}$$

Действительно, формула (4.20) является частным случаем формулы (4.17) при $C = y_0$, поэтому она задает решение уравнения (4.12). Кроме того,

$$y(x_0) = y_0 e^{-\int\limits_{x_0}^{x_0} p(\xi)\,d\xi} + e^{-\int\limits_{x_0}^{x_0} p(\theta)\,d\theta} \cdot \int\limits_{x_0}^{x_0} q(\xi) e^{\int\limits_{x_0}^{\xi} p(\theta)\,d\theta}\, d\xi = y_0,$$

поэтому удовлетворяются начальные данные (4.14).

Приведем формулу (4.20) к виду (4.18). Действительно, из (4.20) имеем

$$y(x) = y_0 e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p(\xi)\,d\xi} + \int\limits_{x_0}^{x} q(\xi) e^{\int\limits_{x}^{\xi} p(\theta)\,d\theta}\,d\xi = y_0 e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p(\xi)\,d\xi} + \int\limits_{x_0}^{x} q(\xi) e^{-\int\limits_{\xi}^{x} p(\theta)\,d\theta}\,d\xi,$$

что совпадает с формулой (4.18). Теорема 4.3 доказана. □

Следствие(об оценке решения задачи Коши для линейной системы). *Пусть* $x_0 \in \langle a,\ b\rangle,\ \ p(x),\ q(x) \in C\,(\langle a,\ b\rangle),$ *причем*

$$\bigl|p(x)\bigr| \leqslant K, \quad \bigl|q(x)\bigr| \leqslant M \qquad \forall\, x \in \langle a,\ b\rangle.$$

Тогда для решения задачи Коши (4.12), (4.14) *справедлива оценка*

$$\bigl|y(x)\bigr| \leqslant \bigl|y_0\bigr|\ e^{K|x-x_0|} + \frac{M}{K}\left(e^{K|x-x_0|} - 1\right). \tag{4.21}$$

Доказательство. Пусть сначала $x \geqslant x_0$. В силу (4.18) имеем

$$\bigl|y(x)\bigr| \leqslant \bigl|y_0\bigr|\ e^{\int\limits_{x_0}^{x} K\,d\xi} + \int\limits_{x_0}^{x} M\ e^{\int\limits_{\xi}^{x} K\,d\theta}\,d\xi = \bigl|y_0\bigr|\ e^{K(x-x_0)} + M\int\limits_{x_0}^{x} e^{K(x-\xi)}\,d\xi =$$

$$= \bigl|y_0\bigr|\ e^{K(x-x_0)} + \frac{M}{K}\left[-e^{K(x-\xi)}\Bigr|_{\xi=x_0}^{\xi=x}\right] = \bigl|y_0\bigr|\ e^{K|x-x_0|} + \frac{M}{K}\left(e^{K|x-x_0|} - 1\right).$$

Пусть теперь $x < x_0$. Тогда, аналогично, получаем

$$\bigl|y(x)\bigr| \leqslant \bigl|y_0\bigr|\ e^{\int\limits_{x}^{x_0} K\,d\xi} + \int\limits_{x}^{x_0} M\ e^{\int\limits_{x}^{\xi} K\,d\theta}\,d\xi = \bigl|y_0\bigr|\ e^{K(x_0-x)} + M\int\limits_{x}^{x_0} e^{K(\xi-x)}\,d\xi =$$

$$= \bigl|y_0\bigr|\ e^{K(x_0-x)} + \frac{M}{K}\left[e^{K(\xi-x)}\Bigr|_{\xi=x}^{\xi=x_0}\right] = \bigl|y_0\bigr|\ e^{K(x_0-x)} + \frac{M}{K}\left[e^{K(x_0-x)} - 1\right] =$$

$$= \bigl|y_0\bigr|\ e^{K|x-x_0|} + \frac{M}{K}\left(e^{K|x-x_0|} - 1\right).$$

Таким образом, оценка (4.21) справедлива $\forall\, x \in \langle a,\ b\rangle$. □

Пример 4.2. Решим уравнение

$$y\,' - \frac{y}{x} = x^2.$$

Решаем сначала однородное уравнение:

$$y\,' - \frac{y}{x} = 0, \qquad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}, \qquad \ln|y| = \ln|x| + C, \qquad y = C\,x.$$

Решение неоднородного уравнения ищем методом вариации произвольной постоянной:

$$y_{чн} = C(x)\,x, \qquad C'\,x + C - \frac{C\,x}{x} = x^2, \qquad C' = x, \qquad C(x) = \frac{x^2}{2},$$

откуда

$$y_{чн} = \frac{x^3}{2},$$

а общее решение исходного уравнения

$$y = C\,x + \frac{x^3}{2}.$$

4. 3. Однородные уравнения

Однородным уравнением называется уравнение вида

$$y'(x) = f\left(\frac{y}{x}\right), \qquad (x,\ y) \in G, \tag{4.22}$$

G – некоторая область в $\mathbb{R}^2$.

Будем предполагать, что $f(t)$ – непрерывная функция, $x \neq 0$ при $(x,\ y) \in G$.

Однородное уравнение заменой $y = xz$, где $z(x)$ – новая искомая функция, сводится к уравнению с разделяющимися переменными.

В силу данной замены имеем

$$y' = xz' + z.$$

Подставляя в уравнение (4.22), получим $xz' + z = f(z)$, откуда

$$z'(x) = \frac{1}{x} \cdot \big(f\,(z) - z\big). \tag{4.23}$$

Уравнение (4.23) представляет собой частный случай уравнения с разделяющимися переменными, рассмотренного в п. 4.1.

Пусть $z = \varphi(x)$ – решение уравнения (4.23). Тогда функция $y = x\varphi(x)$ является решением исходного уравнения (4.22).

Действительно,

$$y' = x\varphi'(x) + \varphi(x) = x \cdot \frac{1}{x} \cdot \big(f\,(\varphi(x)) - \varphi(x)\big) + \varphi(x) =$$

$$= f\big(\varphi(x)\big) = f\left(\frac{x\varphi(x)}{x}\right) = f\left(\frac{y(x)}{x}\right).$$

Пример 4. 3. *Решим уравнение*

$$y' = \frac{y}{x} - e^{y/x}.$$

Положим $y = zx$. Тогда

$$xz' + z = z - e^z, \qquad z' = -\frac{1}{x}e^z,$$

$$-\frac{dz}{e^z} = \frac{dx}{x}, \qquad e^{-z} = \ln|z| + C,$$

$$-z = \ln\big(\ln Cx\big), \qquad c \neq 0,$$

откуда $y(x) = -x\ln\big(\ln Cx\big), \qquad c \neq 0.$

4.4. Уравнение Бернулли

Уравнением Бернулли называется уравнение вида

$$y' = a(x)y + b(x)y^{\alpha}, \qquad x \in \langle a,\ b\rangle \quad \big(\alpha \neq 0,\ \ \alpha \neq 1\big). \tag{4.24}$$

При $\alpha = 0$ или $\alpha = 1$ получаем линейное уравнение, которое было рассмотрено в п. 4.2.

Будем предполагать, что $a(x),\ b(x) \in C\left(\langle a,\ b\rangle\right)$.

Замечание 4.4. Если $\alpha > 0$, то, очевидно, функция $y(x) \equiv 0$ является решением уравнения (4.24).

Для решения уравнения Бернулли (4.24) $\big(\alpha \neq 0, \quad \alpha \neq 1\big)$ разделим обе части уравнения на y^{α}.

При $\alpha > 0$ надо учесть, что в силу замечания 4.4 функция $y(x) \equiv 0$, является решением уравнения (4.24), которое при таком делении будет потеряно. Следовательно, в дальнейшем его надо будет добавить в общее решение.

После деления получаем соотношение

$$y^{-\alpha}y' = a(x)y^{1-\alpha} + b(x).$$

Введём новую искомую функцию $z = y^{1-\alpha}$, тогда $z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$, а следовательно, приходим к уравнению относительно z

$$z' = (1-\alpha)a(x)z + (1-\alpha)b(x). \tag{4.25}$$

Уравнение (4.25) представляет собой линейное уравнение.

Такие уравнения рассмотрены в п. 4.2, где получена формула общего решения, в силу которой решение $z(x)$ уравнения (4.25) записывается в виде

$$z(x) = Ce^{-(\alpha-1)\int a(x)\,dx} + \\ + (1-\alpha)e^{-(\alpha-1)\int a(x)\,dx}\int b(x)e^{-(\alpha-1)\int a(x)\,dx}dx. \tag{4.26}$$

Тогда функция $y(x) = z^{\frac{1}{1-\alpha}}(x)$, где $z(x)$ определена в (4.26), является решением уравнения Бернулли (4.24).

Кроме того, как указано выше, при $\alpha > 0$ решением также является функция $y(x) \equiv 0$.

Пример 4. 4. *Решим уравнение*

$$y' + 2y = y^2 e^x. \tag{4.27}$$

Разделим уравнение (4.27) на y^2 и сделаем замену $z = \frac{1}{y}$. В результате получим линейное неоднородное уравнение

$$-z' + 2z = e^x. \tag{4.28}$$

Решаем сначала однородное уравнение:

$$-z' + 2z = 0, \qquad \frac{dz}{z} = 2dx, \qquad \ln|z| = 2x + c,$$

$$z = Ce^{2x}, \quad C \in \mathbb{R}^1.$$

Решение неоднородного уравнения (4.28) ищем методом вариации произвольной постоянной:

$$z_{\text{чн}} = C(x)e^{2x}, \qquad -C'e^{2x} - 2Ce^{2x} + 2Ce^{2x} = e^x,$$

$$C' = -e^{-x}, \qquad C(x) = e^{-x},$$

откуда $z_{\text{чн}} = e^x$, а общее решение уравнения (4.28) $z(x) = Ce^{2x} + e^x$.

Следовательно, решение уравнения Бернулли (4.24) запишется в виде

$$y(x) = \frac{1}{e^x + Ce^{2x}}.$$

Кроме того, решением уравнения (4.24) является также функция $y(x) \equiv 0$. Это решение мы потеряли при делении этого уравнения на y^2.

4. 5. Уравнение в полных дифференциалах

Рассмотрим уравнение в дифференциалах

$$M(x,\ y)dx + N(x,\ y)dy = 0, \qquad (x,\ y) \in G, \tag{4.29}$$

G – некоторая область в $\mathbb{R}^2$.

Такое уравнение называется **уравнением в полных дифференциалах**, если существует функция $F(x,\ y) \in C^1(G)$, называемая **потенциалом**, такая, что

$$dF(x,\ y) = M(x,\ y)dx + N(x,\ y)dy, \qquad (x,\ y) \in G.$$

Будем для простоты предполагать, что $M(x,\ y),\ N(x,\ y) \in C^1(G)$, а область G является односвязной.

В этих предположениях в курсе математического анализа (см., например, [3]) доказывается, что потенциал $F(x,\ y)$ для уравнения (4.29) существует (т.е. (4.29) – уравнение в полных дифференциалах) тогда и только тогда, когда

$$M_y(x,\ y) = N_x(x,\ y) \qquad \forall\ (x,\ y) \in G.$$

При этом

$$F(x,\ y) = \int\limits_{(x_0,\ y_0)}^{(x,\ y)} M(x,\ y)dx + N(x,\ y)dy, \tag{4.30}$$

где точка $(x_0,\ y_0)$ – некоторая фиксированная точка из $G,$ $(x,\ y)$ – текущая точка в $G,$ а криволинейный интеграл берется по любой кривой, соединяющей точки $(x_0,\ y_0)$ и $(x,\ y)$ и целиком лежащей в области $G.$

Если уравнение (4.29) является уравнением в полных дифференциалах, то общее решение этого уравнения записывается в виде общего интеграла

$$F(x,\ y) = C, \tag{4.31}$$

где $F(x,\ y)$ – потенциал, вычисляемый по формуле (4.30).

Пример 4. 5. *Решим уравнение*

$$\left(y^2 - \frac{y}{x^2}\right)dx + \left(2xy + \frac{1}{x}\right)dy = 0. \tag{4.32}$$

Здесь $M(x,\ y) = y^2 - \frac{y}{x^2},$ $N(x,\ y) = 2xy + \frac{1}{x},$

$$M_y \equiv N_x = y^2 - \frac{y}{x^2},$$

поэтому (4.32) – это уравнение в полных дифференциалах.

Найдём потенциал $F(x,\ y)$:
$F_x = M(x,\ y),$ поэтому

$$F(x,\ y) = \int M(x,\ y)dx = y^2x + \frac{y}{x} + \varphi(y), \tag{4.33}$$

где $\varphi(y)$ – пока произвольная функция от $y,$ играющая роль константы интегрирования. В самом деле, ведь при дифференцировании по x пропадет не только аддитивная константа, а любая функция, зависящая только от $y.$

С другой стороны, $F_y = N(x,\ y),$ поэтому

$$F_y(x,\ y) \equiv 2yx + \frac{1}{x} + \varphi\,'(y) = N(x,\ y) \equiv 2xy + \frac{1}{x},$$

откуда $\varphi\,'(y) = 0,$ а следовательно, $\varphi(y) \equiv C_1.$

Из (4.33) получаем окончательный вид потенциала:

$$F(x,\ y) = y^2x + \frac{y}{x} + C_1.$$

Поэтому общее решение уравнения (4.32) запишется в виде

$$y^2x + \frac{y}{x} = C.$$

Глава V.

Уравнения первого порядка, не разрешенные относительно производной

5.1. Теорема существования и единственности решения ОДУ, не разрешенного относительно производной

Рассмотрим уравнение

$$F\big(x,\ y,\ y'\big) = 0, \qquad x \in \langle a,\ b\rangle. \tag{5.1}$$

Поставим для него задачу Коши с начальным условием

$$y(x_0) = y_0, \qquad x_0 \in \big(a,\ b\big). \tag{5.2}$$

Выясним достаточные условия существования и единственности решения задачи Коши (5.1), (5.2).

Если уравнение (5.1) можно разрешить относительно y', то мы получим одно или несколько дифференциальных уравнений, разрешенных относительно y' вида

$$y' = f_k\big(x,\ y\big), \qquad k = 1,\ 2,\ \ldots$$

и тогда можно использовать теоремы существования и единственности решения задачи Коши для ОДУ, разрешенного относительно производной, из главы 2.

Наряду с дифференциальным уравнением (5.1) рассмотрим функциональное уравнение

$$F\big(x,\ y,\ p\big) = 0 \tag{5.3}$$

относительно переменной p.

Предположим, что $\exists\, p_0$ такое, что

$$F\big(x_0,\ y_0,\ p_0\big) = 0, \tag{5.4}$$

т.е. p_0 – решение уравнения (5.3) при $\big(x,\ y\big) = \big(x_0,\ y_0\big)$ (такое решение может быть и не одно).

По теореме о неявной функции, функциональное уравнение (5.3) можно разрешить относительно p в некоторой окрестности точки $\bigl(x_0,\ y_0,\ p_0\bigr)$, если

$$\frac{\partial F}{\partial p}\bigg|_{\left(x_0,\, y_0,\, p_0\right)} \neq 0. \tag{5.5}$$

А если ещё предположить, что функция $F\bigl(x,\ y,\ p\bigr)$ является гладкой, то мы сможем получить теорему существования и единственности решения задачи Коши для уравнения (5.1).

Сформулируем и докажем соответствующую теорему.

Теорема 5.1. *Пусть* $F\bigl(x,\ y,\ p\bigr)$, $\dfrac{\partial F}{\partial y}\bigl(x,\ y,\ p\bigr)$, $\dfrac{\partial F}{\partial p}\bigl(x,\ y,\ p\bigr)$ *непрерывны в некоторой области* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. *Пусть точка* $\bigl(x_0,\ y_0,\ p_0\bigr) \in \Omega$ *такова, что*

а) $F\bigl(x_0,\ y_0,\ p_0\bigr) = 0$, *т.е. выполнено* (5.4)*;*

б) $\frac{\partial F}{\partial p}\Big|_{\left(x_0,\, y_0,\, p_0\right)} \neq 0$, *т.е. выполнено* (5.5)*.*

Тогда существует достаточно малый интервал $\bigl(x_0 - d,\ x_0 + d\bigr) \subset \bigl(a,\ b\bigr)$, *в котором существует решение задачи Коши* (5.1), (5.2), *удовлетворяющее дополнительному условию*

$$y\,'\bigl(x_0\bigr) = p_0, \tag{5.6}$$

причем такое решение единственно.

Замечание 5.1. Подчеркнем, что (5.6) является необходимым условием разрешимости задачи Коши (5.1), (5.2).

Доказательство. В силу условий а), б) теоремы 5.1 в окрестности точки $\bigl(x_0,\ y_0,\ p_0\bigr)$ выполнены условия теоремы о неявной функции из курса математического анализа. В силу указанной теоремы в некоторой окрестности U точки $\bigl(x_0,\ y_0\bigr)$ существует единственная функция $p = f(x,\ y)$ такая, что $\forall\ \bigl(x,\ y\bigr) \in \mathrm{U}$

$$F\left(x,\ y,\ f\bigl(x,\ y\bigr)\right) \equiv 0, \qquad f\bigl(x_0,\ y_0\bigr) = p_0. \tag{5.7}$$

При этом по той же теореме о неявной функции

$$f,\ \ \frac{\partial f}{\partial y} \in C\bigl(\mathrm{U}\bigr). \tag{5.8}$$

Рассмотрим задачу Коши для уравнения

$$y\,' = f\bigl(x,\ y\bigr), \qquad \bigl(x,\ y\bigr) \in \mathrm{U}, \tag{5.9}$$

с начальным условием (5.2).

В силу (5.8) эта задача Коши имеет единственное решение $y = \varphi(x)$ на некотором отрезке $\bigl[x_0 - d_1,\ x_0 + d_1\bigr]$. Здесь мы применили следствие 1 к теореме 2.1 и теорему 2.3.

Но тогда $\varphi'(x) \equiv f\big(x,\ \varphi(x)\big)$, а следовательно в силу (5.7)

$$F\,(x,\ \varphi(x),\ \varphi'(x)) \equiv 0.$$

Кроме того, $\varphi'(x_0) = f\big(x_0,\ \varphi(x_0)\big) = f\big(x_0,\ y_0\big) = p_0$. Таким образом, функция $y = \varphi(x)$ является единственным решением задачи Коши (5.1), (5.2) на $\big[x_0 - \alpha_1,\ x_0 + \alpha_1\big]$ и при этом дополнительно удовлетворяет условию (5.6). $\square$

Замечание 5.2. В формулировке достаточных условий существования и единственности решения уравнения (5.1) (теорема 5.1) помимо дополнительной информации (5.2) дается еще и информация (5.6), что связано с единственностью нахождения неявной функции, т.е. единственностью решения функционального уравнения (5.3), поскольку вполне возможно, что уравнение

$$F\big(x_0,\ y_0,\ p\big) = 0 \tag{5.10}$$

при фиксированных $\big(x_0,\ y_0\big)$ имеет несколько корней.

Если этих корней p_i ровно m штук $\big(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m\big)$ и, например, известно, что $\dfrac{\partial F\big(x_0,\ y_0,\ p\big)}{\partial p} \neq 0$ в каждой из точек $p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_m$, то в окрестности точки $\big(x_0,\ y_0\big)$ существует ровно m различных решений $y_i(x)$ задачи Коши (5.1), (5.2), причем

$$y_i'(x_0) = p_i, \qquad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m.$$

Пример 5.1. Решим уравнение

$$y'^{\,2} = 1. \tag{5.11}$$

Положим $F\big(x,\ y,\ p\big) = p^2 - 1$. Тогда $F\big(x,\ y,\ p\big)$ – гладкая функция, $\dfrac{\partial F}{\partial p} = 2p \neq 0$ при $p \neq 0$.

Уравнение (5.11) разрешается двумя способами:

$$y' = 1, \qquad \text{и} \qquad y' = -1.$$

Таким образом, через каждую точку плоскости переменных $\big(x,\ y\big)$ проходит две интегральные кривые. Имеем неединственность решения задачи Коши для уравнения (5.11), но это связано с тем, функциональное уравнение

$$F\big(x_0,\ y_0,\ p\big) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad p^2 - 1 = 0$$

имеет два решения (рис. 5.1).

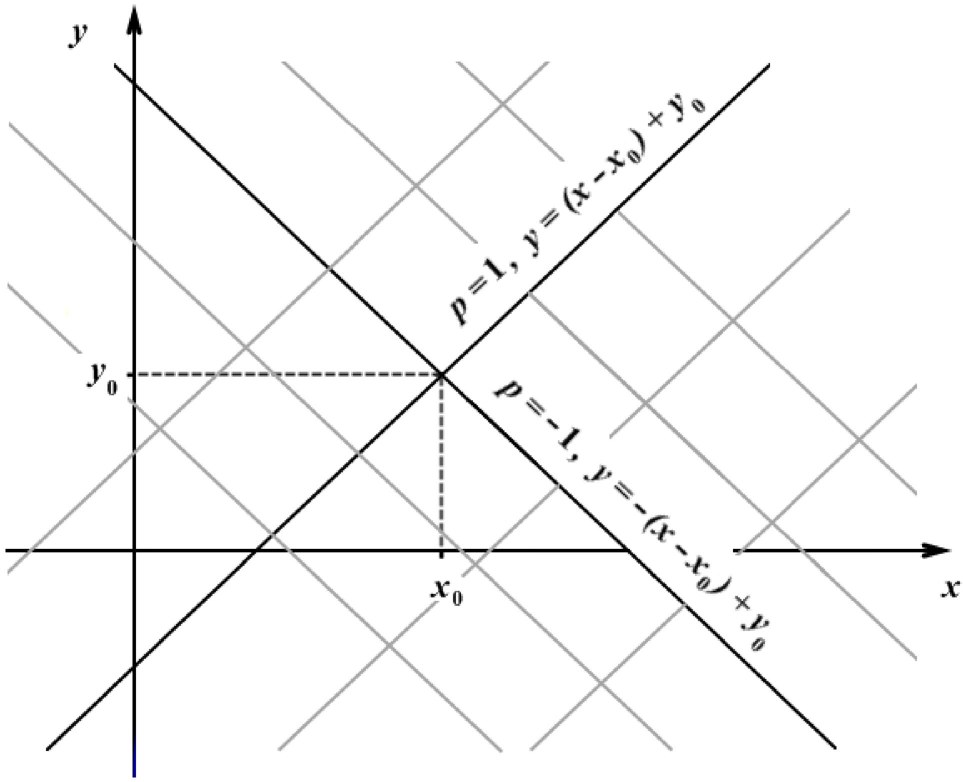

Рис. 5.1. Интегральные кривые уравнения $y'^{\,2}=1$

В замечании 5.2 рассмотрен случай неединственности решения задачи Коши (5.1), (5.2), связанный с неединственностью решения функционального уравнения (5.17). При этом для всех решений задачи Коши значения $y'(x_0)$ будут различны. Но имеется другой случай нарушения единственности решения задачи Коши (5.1), (5.2), связанный с нарушением условия

$$\frac{\partial F}{\partial p}\Big|_{\left(x_0,\, y_0,\, p_0\right)} \neq 0.$$

Если $\frac{\partial F}{\partial p}\Big|_{\left(x_0,\, y_0,\, p_0\right)} = 0$, то решения задачи Коши (5.1), (5.2) может вообще не существовать, или оно может быть неединственным даже при выполнении условия (5.6). Т.е. может существовать несколько решений задачи Коши (5.1), (5.2), для которых и производные $y'(x_0)$ также одинаковы. Может появиться так называемое *особое решение*. Этот случай мы обсудим в следующем параграфе.

5.2. Особое решение. Дискриминантная кривая. Огибающая

Рассмотрим уравнение (5.1)

$$F\big(x,\ y,\ y'\big) = 0, \qquad x \in \big(a,\ b\big).$$

Определение 5.1. Функция $y=\varphi(x)$, $x \in \big(a,\ b\big)$, называется **особым решением уравнения** (5.1) **на** $\big(a,\ b\big)$, если выполнены следующие условия:

1) $\varphi(x)$ – решение уравнения (5.1), т.е. $F\big(x,\ \varphi(x),\ \varphi'(x)\big) \equiv 0\ \ \forall\, x \in \big(a,\ b\big)$;

2) в каждой точке $\big(x_0,\ \varphi(x_0)\big)$, $x_0 \in \big(a,\ b\big)$, нарушается единственность решение задачи Коши для уравнения (5.1), т.е. через каждую точку $\big(x_0,\ \varphi(x_0)\big)$ проходит еще одна интегральная кривая уравнения (5.1), задаваемая функцией $y = \psi(x)$; более того, $\varphi(x) \not\equiv \psi(x)$ ни в какой окрестности точки x_0;

3) $\forall\ x \in \big(a,\ b\big)$ $\varphi'(x_0) = \psi'(x_0)$, т.е. интегральные кривые касаются друг друга.

Пример 5. 2. Рассмотрим уравнение

$$y'^{\,3} = y^2. \tag{5.12}$$

Это уравнение сводится к уравнению с разделяющимися переменными. Решая его при $y \neq 0$, получим

$$y' = y^{\frac{2}{3}}, \qquad \int \frac{dy}{y^{\frac{2}{3}}} = \int dx, \qquad y^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\big(x + C\big), \qquad y = \frac{1}{27}\big(x + C\big)^3.$$

Кроме того, имеется еще решение $\hat{y} \equiv 0$. Оно является особым решением уравнения (5.12).

Действительно, через каждую точку $\big(x_0,\ 0\big)$, помимо решения $\hat{y} \equiv 0$, проходит еще не совпадающее с ним решение $y^*(x) = \frac{1}{27}\big(x - x_0\big)^3$, причем $y^{*\prime}(x_0) = 0 = \hat{y}'(x_0)$, т.е. эти решения касаются друг друга (рис. 5. 2).

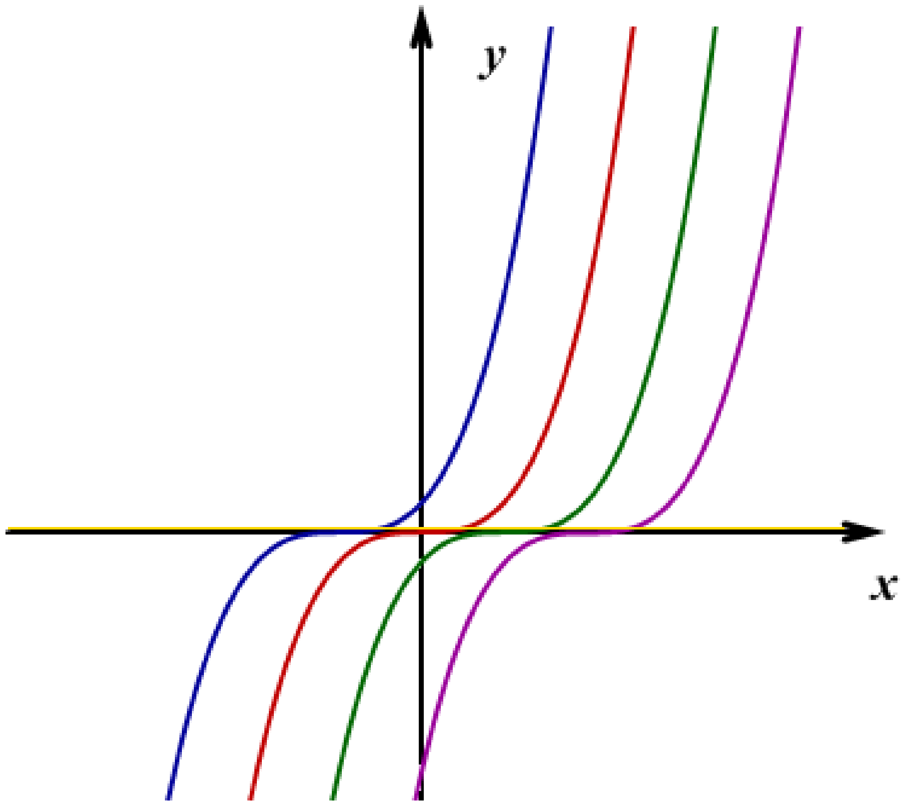

Рис. 5. 2. Интегральные кривые уравнения (5.12)

Пусть $F(x,\ y,\ p) \in C^1(\Omega)$, Ω – область в $\mathbb{R}^3$. Пусть $(x_0,\ y_0)$ – некоторая точка. Пусть p_0 – решение функционального уравнения $F(x_0,\ y_0,\ p) = 0$, т.е. $F(x_0,\ y_0,\ p_0) = 0$, $(x_0,\ y_0,\ p_0) \in \Omega$.

Если $\left.\dfrac{\partial F}{\partial p}\right|_{(x_0,\, y_0,\, p_0)} \neq 0$, то по доказанной выше теореме 5.1 через $(x_0,\ y_0)$ проходит единственная интегральная кривая с угловым коэффициентом p_0, а следовательно, особого решения нет. Таким образом, особое решение уравнения (5.1) может существовать только если

$$\left.\frac{\partial F}{\partial p}\right|_{(x_0,\, y_0,\, p_0)} = 0.$$

Точка $(x_0,\ y_0)$ выбиралась произвольно, поэтому, убирая индексы, можно утверждать, что особое решение уравнения (5.1) может существовать только в том случае, если одновременно

$$\begin{cases} F(x,\ y,\ p) = 0, \\ \left.\frac{\partial F}{\partial p}\right|_{(x,\, y,\, p)} = 0. \end{cases} \tag{5.13}$$

Исключим p из этой системы (предположим, что это возможно). Получим уравнение

$$\Phi(x,\ y) = 0, \tag{5.14}$$

определяющее некоторое множество на плоскости $(x,\ y)$.

Определение 5.2. Множество точек $(x,\ y)$, удовлетворяющее уравнению (5.14), называется **дискриминантной кривой**.

Таким образом, если существует особое решение уравнения (5.1), то его график входит в дискриминантную кривую. При этом дискриминантная кривая может содержать и другие точки.

Из сказанного выше вытекает следующий **алгоритм нахождения особого решения уравнения** (5.1)**.**

1) Рассматриваем систему уравнений

$$\begin{cases} F(x,\ y,\ p) = 0, \\ \left.\frac{\partial F}{\partial p}\right|_{(x,\, y,\, p)} = 0. \end{cases}$$

2) Исключаем из нее p, находим дискриминантную кривую. (Она может и не существовать).

3) Пусть эта дискриминантная кривая (или ее часть) задается уравнением $y = \varphi(x)$. Проверяем, что эта функция является решением уравнения (5.1).

4) Если найденная функция является решением уравнения (5.1), то проверяем, является ли она особым решением.

Примечание: проверка пункта 4 может быть достаточно сложна, и общих методов нет.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 5. 3. Рассмотрим уравнение $y'^2 = 1$.

Попытаемся найти дискриминантную кривую. Для этого запишем систему

$$\begin{cases} p^2 - 1 = 0, \\ 2p = 0. \end{cases}$$

Мы видим, что эта система не имеет решения, а следовательно, нет ни дискриминантной кривой, ни особого решения.

Пример 5. 4. Рассмотрим уравнение $y'^2 = y^2 - x^2$.

Для нахождения дискриминантной кривой имеем систему

$$\begin{cases} p^2 - y^2 + x^2 = 0, \\ 2p = 0. \end{cases}$$

Исключая p, получаем дискриминантную кривую

$$y = \pm x,$$

содержащую две ветви, но ни одна их ветвей не удовлетворяет уравнению.

Дискриминантная кривая есть, но она не является решением ОДУ, и поэтому особого решения нет.

Пример 5. 5. Рассмотрим уравнение $y'^2 = y^2$.

Для нахождения дискриминантной кривой имеем систему

$$\begin{cases} p^2 - y^2 = 0, \\ 2p = 0. \end{cases}$$

Получаем дискриминантную кривую $\hat{y} \equiv 0$. Очевидно, она является решением исходного уравнения. Но это не особое решение, поскольку единственность решения задачи Коши не нарушается.

Действительно, исходное уравнение можно переписать в виде

$$y' = \pm y.$$

Это – уравнения с разделяющимися переменными, решая которые мы получим два семейства решений:

$$y' = \pm y \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \frac{dy}{y} = \pm dx, \\ y = 0 \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \ln|y| = \pm x + \ln\left|C\right|, \quad C \neq 0, \\ y = 0 \end{array} \right. \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad y = C\, e^{\pm x}.$$

При $C = 0$ $y(x) = \hat{y}(x) \equiv 0$; при $C \neq 0$ $y(x) \neq 0$, и единственность на интегральной кривой $\hat{y}(x) \equiv 0$ не нарушается (рис. 5.3).

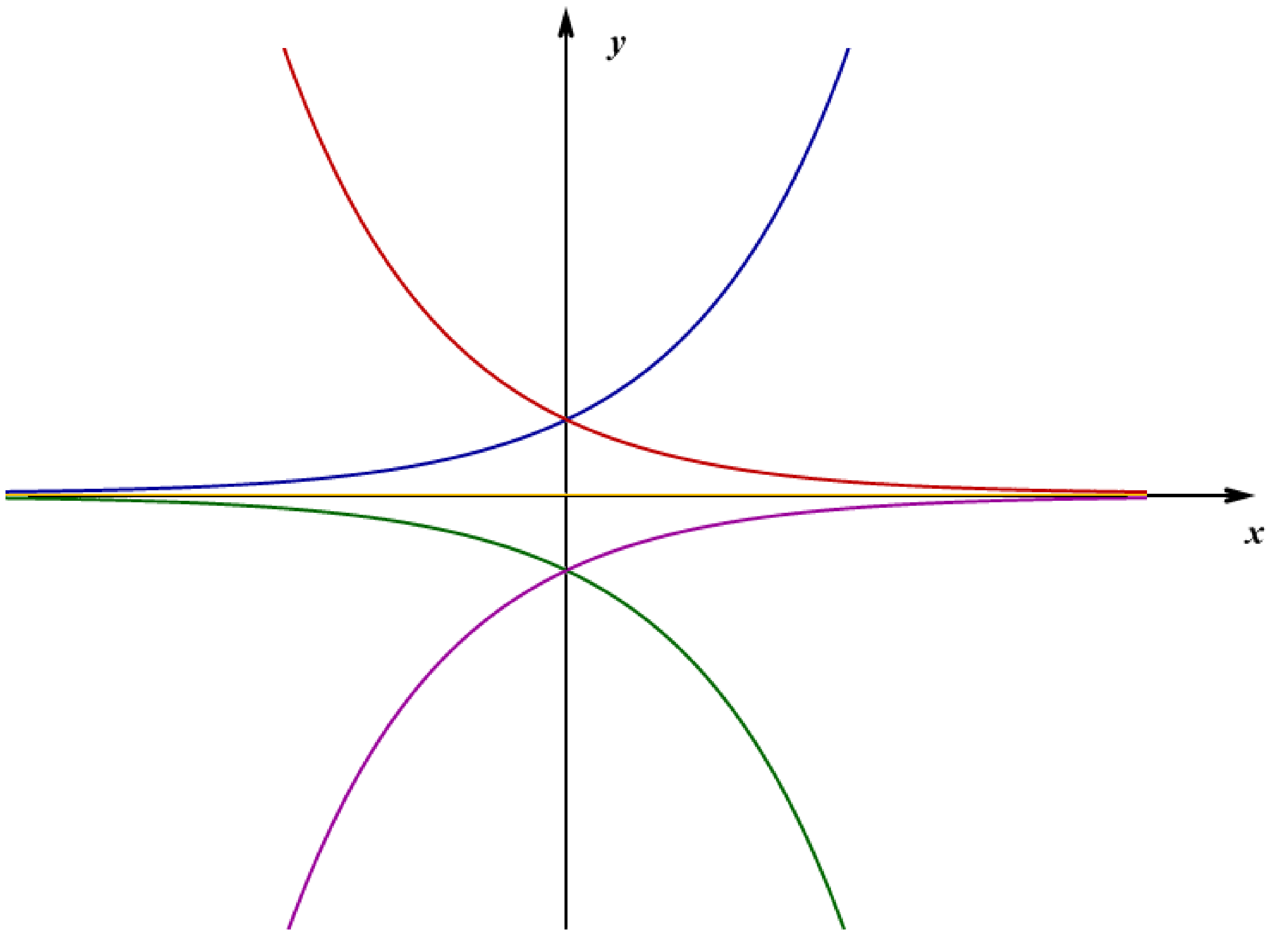

Рис. 5.3. Графика решения $\hat{y} \equiv 0$ не касаются графики других решений

Пример 5.6. Рассмотрим уравнение

$$y'^2 - 4y^3\big(1 - y\big) = 0. \tag{5.15}$$

Для нахождения дискриминантной кривой имеем систему

$$\begin{cases} p^2 - 4y^3\big(1 - y\big) = 0, \\ 2p = 0. \end{cases}$$

Получаем две ветви дискриминантной кривой

$$y_1 \equiv 0, \qquad y_2 \equiv 1.$$

Обе ветви, очевидно, являются решениями исходного уравнения (5.15). Чтобы проверить, являются ли они особыми решениями уравнения (5.15), найдем другие решения уравнения (5.15), которое для этого перепишем в виде

$$y' = \pm 2y\sqrt{y\big(1 - y\big)}\ .$$

Решая эти уравнения с разделяющимися переменными при $y \neq 0$, $y \neq 1$, получим семейство решений

$$y(x) = \frac{1}{\left(x + C\right)^2 + 1}.$$

Очевидно, что $y(x) \neq 0$, поэтому функция $y_1(x) \equiv 0$ не является особым решением уравнения (5.15) (рис. 5.4).

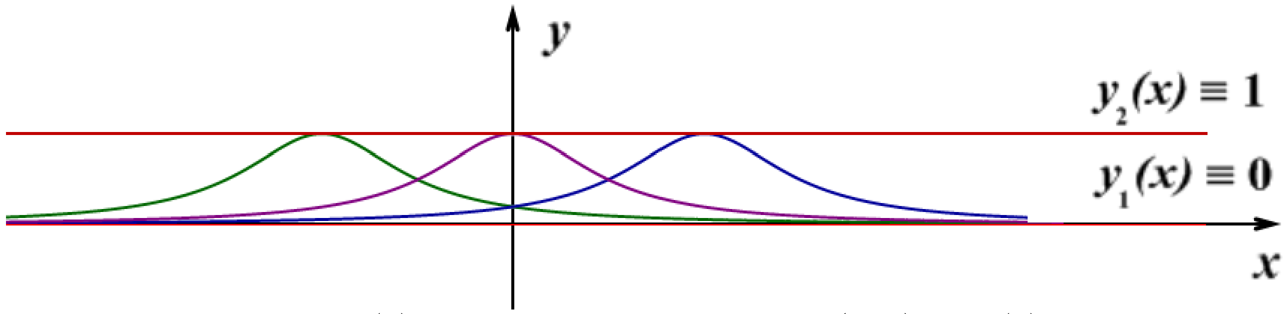

Рис. 5.4. $y_2(x)$ – особое решение уравнения (5.15), а $y_1(x)$ – нет

Рассмотрим теперь точку $\left(x_0,\ 1\right)$, лежащую на другой ветви дискриминантной кривой $y_2(x) \equiv 1$. Найдем C, при котором интегральная кривая $y(x) = \frac{1}{\left(x+C\right)^2+1}$ проходит через точку $\left(x_0,\ 1\right)$:

$$\frac{1}{\left(x + C\right)^2 + 1} = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad x_0 = -C.$$

Значит, через каждую точку $\left(x_0,\ 1\right)$ проходит две интегральные кривые уравнения (5.15): $y_2(x) \equiv 1$ и $y^*(x) = \frac{1}{\left(x-x_0\right)^2+1}$.

Найдем производную $y^{*\,\prime}(x_0)$:

$$y^{*\,\prime}(x_0) = -\left.\frac{2\left(x - x_0\right)}{\left(x - x_0\right)^2 + 1}\right|_{x_0} = 0 = y_2'(x_0).$$

Таким образом, интегральные кривые $y_2(x)$ и $y^*(x)$ касаются друг друга в точке $\left(x_0,\ 1\right)$ и, очевидно, не совпадают ни в какой окрестности этой точки.

Следовательно, $y_2(x) \equiv 1$ – особое решение уравнения (5.15) (рис. 5.4).

Выше мы познакомились с одним из способов нахождения особого решения с использованием дискриминантной кривой. Одновременно на примерах мы убедились, что не всегда дискриминантная кривая дает особое решение. В ряде случаев даже может не быть решением уравнения.

Другой способ нахождения особого решения связан с понятием **огибающей**.

Определение 5.3. Пусть дано семейство кривых γ_C, задаваемое уравнением $\Phi\left(x,\ y,\ C\right) = 0$, зависящее от числового параметра C.

Огибающей этого семейства кривых называется кривая Γ, которая в каждой своей точке касается одной из кривых семейства γ_C и при этом не совпадает с ней тождественно ни в какой окрестности этой точки.

Теорема 5.2. *Функция* $y = \psi(x)$ *является особым решением уравнения* (5.1) *тогда и только тогда, когда ее график является огибающей семейства интегральных кривых этого уравнения.*

Доказательство.

Необходимость. Пусть $y = \psi(x)$ – особое решение уравнения (5.1). Тогда по определению особого решения в каждой точке $\big(x,\ \psi(x)\big)$ его график касается одной из интегральных кривых уравнения (5.1), не совпадая с ней ни в какой окрестности. Следовательно, график особого решения является огибающей.

Достаточность. Пусть график функции $y = \psi(x)$ является огибающей семейства решений уравнения (5.1), задаваемых функциями $y = \varphi\big(x,\ C\big)$. Тогда в каждой своей точке $\big(x^*,\ y^*\big)$ $\big(y^* = \psi\big(x^*\big)\big)$ этот график касается графика функции $y = \varphi\big(x,\ C\big)$ при некотором C.

Это означает, что при $x = x^*$

$$\psi\,(x^*) = \varphi\,(x^*,\ C)\,, \qquad \psi\,'\,(x^*) = \varphi\,'\,(x^*,\ C)\,. \tag{5.16}$$

Но $\varphi\big(x,\ C\big)$ – решения уравнения (5.1), следовательно,

$$F\,\Big(x^*,\ \varphi\big(x^*,\ C\big),\ \varphi\,'\big(x^*,\ C\big)\Big) = 0.$$

Но тогда в силу (5.16) и

$$F\,\Big(x^*,\ \psi\big(x^*\big),\ \psi\,'\big(x^*\big)\Big) = 0.$$

В силу произвольности выбора x^* получаем, что функция $y = \psi(x)$ является решением уравнения (5.1). Кроме того, поскольку график функции $y = \psi(x)$ является огибающей семейства решений уравнения (5.1), он в каждой точке касается какого-то другого решения уравнения, не совпадая с ним тождественно ни в какой окрестности точки касания. Следовательно, $y = \psi(x)$ – особое решение уравнения (5.1). □

Замечание 5.3. Для отыскания огибающей семейства линий $\Phi\big(x,\ y,\ C\big) = 0$ $\big(\Phi \in C^1\big)$ надо исключить C из уравнений

$$\Phi\big(x,\ y,\ C\big) = 0, \qquad \frac{\partial\Phi\big(x,\ y,\ C\big)}{\partial C} = 0 \tag{5.17}$$

и проверить, является ли полученная линия огибающей, т.е. проверить определение 5.3.

5.3. Метод введения параметра

Доказанная ранее теорема 5.1 позволяет при выполнении определенных условий свести уравнение $F\big(x,\ y,\ y'\big) = 0$ к уравнению

$$y' = f\big(x,\ y\big), \tag{5.18}$$

разрешенному относительно производной.

Для решения последнего уравнения, в зависимости от его вида, можно применить те или иные известные методы. Однако практическая реализация этой возможности очень часто вызывает значительные трудности.

Поэтому в ряде случаев представляются более удобными другие способы интегрирования уравнения (5.1), одним из которых является **метод введения параметра.**

Опишем здесь, в чем заключается этот метод без строгого его обоснования.

Итак, обозначим $y' = p$ и запишем уравнение (5.1) в виде

$$F\big(x,\ y,\ p\big) = 0. \tag{5.19}$$

Если $F\big(x,\ y,\ p\big)$ – гладкая функция, то как известно из курса аналитической геометрии, уравнение (5.19) определяет поверхность в трехмерном пространстве переменных $\big(x,\ y,\ p\big)$. Эту поверхность можно задать в параметрическом виде

$$x = \varphi\big(u,\ v\big), \qquad y = \psi\big(u,\ v\big), \qquad p = \chi\big(u,\ v\big), \tag{5.20}$$

где $u,\ v$ – параметры и изменяются в некоторой области G_{uv}.

На решении уравнения (5.1) имеем

$$dy = p\,dx. \tag{5.21}$$

Поэтому из (5.20), (5.21) получаем, что

$$\frac{\partial\psi}{\partial u}du + \frac{\partial\psi}{\partial v}dv = \chi\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}du + \frac{\partial\varphi}{\partial v}dv\right). \tag{5.22}$$

Соотношение (5.22) дает связь между параметрами u и v, представляющую собой ОДУ, которое может быть разрешимо относительно производной $\dfrac{dv}{du}$:

$$\frac{dv}{du} = \frac{\chi(u,\ v)\dfrac{\partial\varphi}{\partial u} - \dfrac{\partial\psi}{\partial u}}{\frac{\partial\psi}{\partial v} - \chi(u,\ v)\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}}. \tag{5.23}$$

Допустим, мы смогли решить последнее уравнение и записать его общее решение в виде

$$v = w\big(u,\ C\big), \tag{5.24}$$

что дает связь между параметрами u и v на интегральной кривой уравнения (5.1).

Используя представление (5.20), мы можем записать решение уравнения (5.1) в параметрической форме

$$\begin{cases} x = \varphi\big(u,\ w(u,\ C)\big), \\ y = \psi\big(u,\ w(u,\ C)\big), \end{cases}$$

где u – параметр, C – произвольная постоянная.

Рассмотрим некоторые характерные частные случаи.

I. Уравнение (5.1) можно разрешить относительно y и записать в виде

$$y = g\big(x,\ y'\big). \tag{5.25}$$

В этом случае в качестве параметров u и v можно взять $u = x$, $v = p(= y')$. Тогда $y = g\big(x,\ y'\big)$ и дифференциальное уравнение (5.22) запишется в виде

$$\frac{\partial g}{\partial x}dx + \frac{\partial g}{\partial p}dp = pdx. \tag{5.26}$$

Заметим, что соотношение (5.26) получается путем взятия дифференциала от соотношения

$$y = g\big(x,\ p\big) \tag{5.27}$$

и последующей замены $dy = p\,dx$.

Отсюда следует **алгоритм решения уравнения** (5.25) (мы не останавливаемся здесь на вопросах существования решения этого уравнения и его единственности):

1) обозначим $y' = p$;

2) записываем уравнение (5.25) в виде (5.27):
$$y = g\big(x,\ p\big);$$

3) берем полный дифференциал от обеих частей соотношения (5.27):
$$dy = \frac{\partial g}{\partial x}dx + \frac{\partial g}{\partial p}dp;$$

4) заменяем здесь $dy = p\,dx$;

5) получаем уравнение
$$\frac{\partial g}{\partial p}dp = \left(-\frac{\partial g}{\partial x} + p\right)dx,$$
разрешенное относительно производной $\frac{dp}{dx}$;

6) решаем его и находим
$$p = P\big(x,\ C\big);$$

7) получаем решение исходного уравнения в виде

$$y = g\big(x,\ P(x,\ C)\big)\,.$$

Замечание 5.4. Переменная p в данной схеме является параметром; будет ошибкой на шаге 6) записать соотношение $p = P\big(x,\ C\big)$ в виде ОДУ $y' = P\big(x,\ C\big)$ и интегрировать его. Если это сделать, то мы получим решение другого уравнения – уравнения 2-го порядка.

II. Если уравнение (5.1) можно разрешить относительно x и записать в виде

$$x = h\big(y,\ y'\big),$$

то в качестве параметров u и v можно взять $u = y$, $v = y'$ и повторить предыдущую схему.

5.4. Уравнение Лагранжа

Метод введения параметра, изложенный в предыдущем параграфе, позволяет свести уравнение, не разрешенное относительно производной, к другому уравнению, которое уже разрешено относительно производной (см. уравнение (5.26)). Однако это новое уравнение, вообще говоря, может не интегрироваться в квадратурах.

Теперь мы рассмотрим тип уравнений, не разрешенных относительно производной, в применении к которым метод введения параметра всегда приводит к уравнению, интегрируемому в квадратурах.

Определение 5.4. Уравнение вида

$$A\big(y'\big)y + B\big(y'\big)x = C\big(y'\big), \tag{5.28}$$

где $A(p)$, $B(p)$, $C(p)$ – дифференцируемые функции и $A^2(p) + B^2(p) \neq 0$, называется **уравнением Лагранжа**.

Это уравнение является линейным относительно x и y.

Предположим, что в (5.28) $A(p) \neq 0$. Тогда это уравнение можно привести к виду

$$y = \psi\big(y'\big)x + \varphi\big(y'\big). \tag{5.29}$$

Для решения этого уравнения применим метод введения параметра из предыдущего параграфа.

Полагая $y' = p$ и беря дифференциалы от обеих частей соотношения (5.29), приходим к уравнению

$$p\,dx = \psi(p)\,dx + \big(\psi'(p)x + \varphi'(p)\big)dp. \tag{5.30}$$

Если здесь рассматривать x как искомую функцию, а p – как независимую переменную, то получаем линейное уравнение

$$\frac{dx}{dp} + \frac{\psi'(p)}{\psi(p) - p}\,x = \frac{\varphi'(p)}{p - \psi(p)}. \tag{5.31}$$

Уравнение (5.31), как известно, решается в квадратурах, и мы можем найти его решение
$$x = \mathrm{X}\big(C,\ p\big).$$
В результате получаем решение исходного уравнения (5.29) в параметрической форме
$$\begin{cases} y = \psi(p)\mathrm{X}\big(C,\ p\big) + \varphi(p), \\ x = \mathrm{X}\big(C,\ p\big). \end{cases} \tag{5.32}$$

Замечание 5. 5. Переход от (5.30) к (5.31) возможен, только если $\psi(p) - p \neq 0$.

Случай $\psi(p) \equiv p$ будет рассмотрен в следующем параграфе. Сейчас рассмотрим случай, когда уравнение
$$\psi(p) - p = 0$$
не выполняется тождественно, но имеет корни, например, p_0.

Рассмотрим функцию $y(x) = \psi\big(p_0\big)x + \varphi\big(p_0\big)$, $p_0 = \psi\big(p_0\big)$. Тогда $y\,' = \psi\big(p_0\big) \equiv p_0$, и, очевидно, функция $y(x)$ является решением уравнения (5.29). Можно проверить, что при этом данная функция не содержится в семействе решений уравнения (5.31), задаваемом формулой (5.32).

Пример 5. 7. Решим уравнение Лагранжа
$$y = 2xy\,' + y\,'^2. \tag{5.33}$$
Применим метод введения параметра. Положим $y\,' = p$, тогда имеем
$$y = 2xp + p^2. \tag{5.34}$$
Возьмем дифференциал от обеих частей этого соотношения и заменим $dy = p\,dx$. Получим
$$p\,dx = 2p\,dx + 2x\,dp + 2p\,dp,$$
откуда приходим к линейному уравнению (при условии $p \neq 0$):
$$\frac{dx}{dp} = -\,\frac{2x}{p} - 2.$$
Решением этого последнего уравнения является
$$x = \frac{C}{p^2} - \frac{2p}{3}.$$
Следовательно, получаем семейство решений уравнения (5.33) в параметрической форме
$$\begin{cases} y = \dfrac{2C}{p} - \dfrac{p^2}{3}, \\[2ex] x = \dfrac{C}{p^2} - \dfrac{2p}{3}. \end{cases}$$

В процессе решения мы могли потерять решение при делении на p. Если $p = 0$, то из (5.34) имеем $y = 0$. Очевидно, $y \equiv 0$ также является решением уравнения (5.33). Выясним, имеет ли уравнение (5.33) особое решение.

Для этого отыщем дискриминантную кривую. В соответствии с § 2 она может быть найдена путем исключения p из системы

$$\begin{cases} y = 2xp + p^2, \\ 0 = 2x + 2p. \end{cases}$$

Имеем $p = -x$, $y = -2x^2 + x^2 = -x^2$. Однако, функция $y = -x^2$ не является решением уравнения (5.33), следовательно, особого решения нет.

5.5. Уравнение Клеро

Определение 5.5. Уравнение вида

$$y = xy' + \varphi\big(y'\big), \tag{5.35}$$

где $\varphi(p)$ – дифференцируемая на $\mathbb{R}^1$ функция, называется **уравнением Клеро**.

Замечание 5.6. Уравнение Клеро является частным случаем уравнения Лагранжа при $\psi(p) \equiv p$.

Всюду ниже будем предполагать, что $\varphi(p) \in C^2\left(\mathbb{R}^1\right)$ (от этого ограничения, в принципе, можно избавиться).

Для простоты предположим, что $\varphi''(p) \neq 0$. Найдем общее решение уравнения Клеро. Снова применим метод введения параметра.

Положим $y' = p$ и, дифференцируя соотношение

$$y = xp + \varphi\big(p\big), \tag{5.36}$$

приходим к уравнению

$$p\,dx = p\,dx + x\,dp + \varphi'(p)\,dp,$$

или

$$\Big(x + \varphi\big(y'\big)\Big)\,dp = 0.$$

Отсюда имеем

$$dp = 0 \qquad \text{или} \qquad x + \varphi'(p) = 0.$$

1-й случай.

$$dp = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad p = C,$$

$$y = Cx + \varphi(C), \qquad C = \mathrm{const}. \tag{5.37}$$

Получаем семейство прямых, зависящих от параметра C.

Проверим, что формула (5.37) действительно дает решение уравнения (5.35). В самом деле, из (5.37) имеем $y' = C$, и подставляя $y(x)$ из (5.37) в уравнение (5.35), получаем тождество

$$Cx + \varphi(x) \equiv Cx + \varphi(x).$$

2-й случай.

$$x + \varphi'(p) = 0. \tag{5.38}$$

Поскольку мы предположили, что $\varphi''(p) \neq 0$, то $\varphi'(p)$ является строго монотонной функцией, следовательно имеет обратную, а тогда соотношение (5.38) позволяет записать p как функцию от x:

$$p = w(x) \equiv \varphi'^{-1}(-x). \tag{5.39}$$

Подставляя в соотношение (5.36), получаем функцию

$$y = xw(x) + \varphi\big(w(x)\big). \tag{5.40}$$

В параметрической форме эту же функцию можно записать в виде

$$\begin{cases} x = -\varphi'(p), \\ y = -p\varphi'(p) + \varphi(p). \end{cases} \tag{5.41}$$

Покажем, что полученная функция тоже является решением уравнения Клеро.

Действительно, пользуясь представлением (5.41), имеем:

$$dx = -\varphi''(p)\, dp,$$

$$dy = \left(-\varphi'(p) - p\varphi''(p) + \varphi'(p)\right)\, dp = -p\varphi''(p)\, dp,$$

откуда $y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-p\varphi''(p)\, dp}{-\varphi''(p)\, dp} = p.$

Подставляя значения y и y' в уравнение (5.35), получаем тождество

$$-p\varphi'(p) + \varphi(p) = -\varphi'(p) \cdot p + \varphi(p).$$

Итак, функция $y(p)$, определяемая формулами (5.40) или (5.41), также является решением уравнения Клеро (5.35).

Покажем, что это решение не входит в семейство решений, определяемых формулой (5.37). Действительно, решения из семейства (5.37) являются линейными функциями по переменной x. Покажем, что функция y, определяемая формулой (5.40), линейной не является.

Предположим от противного, что

$$x \cdot w(x) + \varphi\big(w(x)\big) = \alpha x + \beta, \qquad \alpha,\ \beta = \text{const}.$$

Дифференцируя это соотношение по x, получаем

$$w(x) + xw'(x) + \varphi'\big(w(x)\big) \cdot w'(x) = \alpha. \tag{5.42}$$

Но по определению функции $w(x)$ (см. (5.38)) имеем

$$\varphi'\big(w(x)\big) = -x$$

и тогда соотношение (5.42) перепишется в виде

$$w(x) = \alpha,$$

что противоречит определению $w(x)$ как ${\varphi'}^{-1}(-x)$ $\big(w(x)$ – строго монотонна, поскольку $\varphi'(p)$ – строго монотонна по условию$\big)$. Итак, решение $y^*(x) = x \cdot w(x) + \varphi\big(w(x)\big)$ не входит в семейство (5.37). Покажем, что это – особое решение уравнения Клеро.

Пусть точка $\big(x_0,\ y_0\big)$ лежит на этой интегральной кривой. Поскольку решение $y^*(x)$ может быть задано в параметрической форме (5.41), то существует значение параметра $p = p_0$, такое, что

$$\begin{cases} x_0 = -\varphi'(p_0), \\ y_0 = -p_0\varphi'(p_0) + \varphi(p_0). \end{cases} \tag{5.43}$$

Рассмотрим кривую из семейства решений уравнения Клеро (5.37) с $C = p_0$:

$$\tilde{y} = p_0 x + \varphi(p_0).$$

Тогда $\tilde{y}(x_0) = p_0 x_0 + \varphi(p_0)$. Но в силу (5.43) $x_0 = -\varphi'(p_0)$, поэтому $\tilde{y}(x_0) = -p_0\varphi'(p_0) + \varphi(p_0) = y_0$. Таким образом, решение $\tilde{y}(x)$ также проходит через точку $\big(x_0,\ y_0\big)$.

Кроме того,

$$\tilde{y}'(x_0) = p_0.$$

Но, как показано выше, ${y^*}'(x) = p$, т.е.

$${y^*}'(x_0) = p_0 = \tilde{y}'(x_0).$$

Следовательно, обе кривые $\tilde{y}(x)$ и $y^*(x)$ проходят через точку $\big(x_0,\ y_0\big)$ и касаются в ней друг друга.

Таким образом, согласно определению 5.1 решение $y^*(x)$ является особым решением уравнения Клеро.

Замечание 5.7. Положим $F\big(x,\ y,\ p\big) = y - xp - \varphi(p)$.

Построим особое решение уравнения Клеро в соответствии с алгоритмом, описанным в п. 5.2. Для этого надо найти дискриминантную кривую.

В соответствии с формулами (5.13) из п. 5.2 дискриминантная кривая для уравнения Клеро в параметрической форме запишется в виде

$$\begin{cases} y - xp - \varphi(p) = 0, \\ -x - \varphi'(p) = 0, \end{cases}$$

т.е.

$$\begin{cases} y = p\varphi'(p) + \varphi(p), \\ x = -\varphi'(p), \end{cases}$$

а это и есть параметрическая запись особого решения $y^*(x)$.

Таким образом, как и следовало ожидать, особое решение уравнения Клеро представляет собой дискриминантную кривую.

Замечание 5.8. В соответствии с формулами (5.17) из § 2 для построения огибающей семейства (5.37) решений уравнения Клеро, надо исключить C из этой системы

$$\begin{cases} y = Cx + \varphi(C), \\ 0 = x + \varphi'(C), \end{cases}$$

которая опять же совпадает с параметрическим представлением особого решения $y^*(x)$.

Таким образом, особое решение $y^*(x)$ является огибающей семейства решений (5.37), что в точности соответствует теореме 5.2.

Рассмотрим теперь вопрос о существовании и единственности решения задачи Коши для уравнения Клеро.

Задача Коши имеет вид

$$\begin{cases} y = xy' + \varphi\big(y'\big), \\ y\big(x_0\big) = y_0. \end{cases} \tag{5.44}$$

Выясним, при каких условиях функции из семейства (5.37) будут решениями этой задачи Коши.

Если функция $y = Cx + \varphi(C)$ является решением задачи Коши (5.44), то константа C должна удовлетворять соотношению

$$y_0 = Cx_0 + \varphi\big(C\big). \tag{5.45}$$

Таким образом, с одной стороны, задача Коши (5.44) не всегда имеет решение: ее разрешимость связана с разрешимостью уравнения (5.45) относительно C. С другой стороны, задача Коши (5.44) может иметь более одного решения из семейства (5.37), если не единственное решение имеет уравнение (5.45).

Пример 5.8. Рассмотрим уравнение Клеро

$$y = xy' + y'^2 - 1.$$

В соответствии с формулой (5.37) получаем семейство решений

$$y = Cx + C^2 - 1. \tag{5.46}$$

Найдем особое решение:

$$\begin{cases} y = px + p^2 - 1, \\ 0 = x + 2p. \end{cases}$$

Здесь p легко исключается: $p = -\frac{x}{2}$, следовательно особое решение

$$y^*(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{4} - 1 = -\frac{x^2}{4} - 1.$$

Найдем еще решение задачи Коши с начальным условием $y(0) = 1$.

Очевидно, особое решение не удовлетворяет начальному условию.

Попытаемся найти решение задачи Коши из семейства (5.46).

Для нахождения C имеем соотношение (5.45) в виде

$$1 = C^2 - 1.$$

Получаем два значения C: $C_{1,2} = \pm\sqrt{2}$, и соответственно, два решения задачи Коши:

$$y_1(x) = \sqrt{2}\,x + 1, \qquad y_2(x) = -\sqrt{2}\,x + 1,$$

задаваемые формулами (5.46).

Глава VI.

Системы линейных ОДУ

6. 1. Основные понятия. Теорема существования и единственности решения задачи Коши

Определение 6. 1. Нормальная система ОДУ n-го порядка вида

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = a_{11}(t)y_1 + \dots + a_{1n}(t)y_n + f_1(t), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dot{y}_n = a_{n1}(t)y_1 + \dots + a_{nn}(t)y_n + f_n(t), \end{cases} \tag{6.1}$$

где $a_{ij}(t)$, $f_i(t)$ – заданные на промежутке $\langle a,\ b\rangle$ $(-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty)$ функции, называется системой линейных ОДУ n-го порядка; однородной, если все $f_i(t) \equiv 0$ на $\langle a,\ b\rangle$, и неоднородной в противном случае.

Введём обозначения

$$\underset{\downarrow}{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \underset{\downarrow}{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}, \quad A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ & \dots\dots\dots & \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

и запишем систему ((6.1)) в векторной форме

$$\underset{\downarrow}{\dot{y}} = A(t)\underset{\downarrow}{y} + \underset{\downarrow}{f}(t). \tag{1}$$

В дальнейшем будем предполагать, что функции $a_{ij}(t)$, $f_i(t)$ – вещественные непрерывные на $\langle a,\ b\rangle$ функции. Для системы ((6.1)) будем рассматривать задачу Коши с начальными условиями

$$\underset{\downarrow}{y}(t_0) = \underset{\downarrow}{y}^0, \tag{6.2}$$

где $t_0 \in \langle a,\ b\rangle$, $\overrightarrow{y}^{\,0} = (y_1^0, \dots, y_n^0) \in \mathbb{R}^n$.

Напомним формулировку теоремы существования и единственности решения задачи Коши для системы (6.1) из главы 3 (см. теоремы 3.6 и 3.7).

Теорема 6. 1. *Пусть $a_{ij}(t),\ f_i(t) \in C(\langle a,\ b\rangle)$. Тогда при любом начальном условии (6.2) задача Коши (6.1), (6.2) имеет и притом единственное решение $\overrightarrow{\varphi}(t) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$, определённое на всём промежутке $\langle a,\ b\rangle$.*

В этой главе наряду с вещественными решениями будут рассматриваться комплексные решения системы (6.1). Покажем, что и в этом случае задача Коши (6.1), (6.2) имеет единственное решение. Пусть $\overrightarrow{y} = \overrightarrow{u} + i\overrightarrow{v}$ – комплексное решение задачи Коши (6.1), (6.2) с вещественной матрицей $A(t)$, комплексной вектор-функцией $\overrightarrow{f}(t) = \overrightarrow{g}(t) + i\overrightarrow{h}(t)$ и комплексным начальным условием $\overrightarrow{y}^{\,0} = \overrightarrow{u}^{\,0} + i\overrightarrow{v}^{\,0}$. Подставим $\overrightarrow{y} = \overrightarrow{u} + i\overrightarrow{v}$ в систему (6.1):

$$\frac{d}{dt}(\underset{\downarrow}{u} + i\underset{\downarrow}{v}) = A(t)(\underset{\downarrow}{u} + i\underset{\downarrow}{v}) + \underset{\downarrow}{g}(t) + i\underset{\downarrow}{h}(t).$$

Применяя правила дифференцирования и умножения матриц, имеем

$$\underset{\downarrow}{\dot{u}} + i\underset{\downarrow}{\dot{v}} = A(t)\underset{\downarrow}{u} + iA(t)\underset{\downarrow}{v} + \underset{\downarrow}{g}(t) + i\underset{\downarrow}{h}(t).$$

Отделяя вещественную и мнимую часть в этой системе и в начальных условиях, получаем, что $\overrightarrow{u}(t)$ является решением задачи Коши

$$\underset{\downarrow}{\dot{u}} = A(t)\underset{\downarrow}{u} + \underset{\downarrow}{g}(t), \tag{6.3}$$

$$\underset{\downarrow}{u}(t_0) = \underset{\downarrow}{u}^0, \tag{6.4}$$

а $\overrightarrow{v}(t)$ – решением задачи Коши

$$\underset{\downarrow}{\dot{v}} = A(t)\underset{\downarrow}{v} + \underset{\downarrow}{h}(t), \tag{6.5}$$

$$\underset{\downarrow}{v}(t_0) = \underset{\downarrow}{v}^0. \tag{6.6}$$

В силу теоремы 6.1 обе задачи Коши имеют единственные решения, следовательно, и комплексное решение $\overrightarrow{y} = \overrightarrow{u} + i\overrightarrow{v}$ единственно.

Докажем теперь существование решения. Пусть $\overrightarrow{u}(t)$ – решение задачи Коши (6.3), (6.4), а $\overrightarrow{v}(t)$ – решение задачи Коши (6.5), (6.6) (они существуют в силу теоремы 6.1). Положим $\overrightarrow{y}(t) = \overrightarrow{u}(t) + i\overrightarrow{v}(t)$. Тогда

$$\begin{aligned}\underset{\downarrow}{\dot{y}} &= \underset{\downarrow}{\dot{u}} + \underset{\downarrow}{\dot{v}} = A(t)\underset{\downarrow}{u} + \underset{\downarrow}{g}(t) + A(t)\cdot i\underset{\downarrow}{v} + i\underset{\downarrow}{h}(t) = \\ &= A(t)(\underset{\downarrow}{u} + i\underset{\downarrow}{v}) + \underset{\downarrow}{g}(t) + i\underset{\downarrow}{h}(t) = A(t)\underset{\downarrow}{y} + \underset{\downarrow}{f}(t);\end{aligned}$$

следовательно, $\overrightarrow{y}(t)$ удовлетворяет системе (6.1). Кроме того,

$$\overrightarrow{y}(t_0) = \overrightarrow{u}(t_0) + i\overrightarrow{v}(t_0) = \overrightarrow{u}^{\,0} + i\overrightarrow{v}^{\,0} = \overrightarrow{y}^{\,0},$$

то есть $\overrightarrow{y}(t)$ удовлетворяет начальному условию (6.1). Таким образом, построенная вектор-функция $\overrightarrow{y}(t)$ является решением задачи Коши (6.1), (6.2).

6.2. Однородные системы линейных ОДУ

Рассмотрим однородную систему линейных ОДУ n-го порядка

$$\underset{\downarrow}{\dot{y}} = A(t)\underset{\downarrow}{y}, \tag{6.7}$$

Напомним, что $A(t) = (a_{ij}(t))$ – $n \times n$ – матрица и $a_{ij}(t) \in C(\langle a,\ b\rangle)$.

Утверждение 6.1. *Множество вещественных (комплексных) решений системы (6.7) образуют вещественное (комплексное) линейное пространство.*

Доказательство. Надо показать, что для любых двух решений $\overrightarrow{y}^{\,1}$ и $\overrightarrow{y}^{\,2}$ системы (6.7) их линейная комбинация $\alpha\overrightarrow{y}^{\,1} + \beta\overrightarrow{y}^{\,2}$ также является решением системы (6.7) ($\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$, если рассматривается множество вещественных решений и $\alpha,\ \beta \in \mathbb{C}$, если рассматривается множество комплексных решений).

Пусть

$$\underset{\downarrow}{\dot{y}}{}^1 = A(t)\underset{\downarrow}{y}{}^1 \quad \text{и} \quad \underset{\downarrow}{\dot{y}}{}^2 = A(t)\underset{\downarrow}{y}{}^2,$$

тогда

$$\frac{d}{dt}(\alpha \underset{\downarrow}{y}{}^1 + \beta \underset{\downarrow}{y}{}^2) = \alpha\underset{\downarrow}{\dot{y}}{}^1 + \beta\underset{\downarrow}{\dot{y}}{}^2 = \alpha A(t)\underset{\downarrow}{y}{}^1 + \beta A(t)\underset{\downarrow}{y}{}^2 = A(t)(\alpha \underset{\downarrow}{y}{}^1 + \beta \underset{\downarrow}{y}{}^2).$$

Утверждение 6.1 доказано. □

Далее будем изучать свойства вещественных решений системы (6.7) (для комплексных решений все свойства сохраняются, доказательства не меняются).

Утверждение 6.2. *Если в некоторой точке $t_0 \in \langle a,\ b\rangle$ решение системы (6.7) $\overrightarrow{y} = \overrightarrow{\varphi}$ принимает нулевое значение ($\overrightarrow{\varphi}(t_0) = \overrightarrow{0}$), то $\overrightarrow{\varphi} \equiv \overrightarrow{0}$ на $\langle a,\ b\rangle$.*

Доказательство. Заметим, что $\overrightarrow{y} \equiv \overrightarrow{0}$ является решением задачи Коши

$$\begin{cases} \underset{\downarrow}{\dot{y}} = A(t)\underset{\downarrow}{y}, \\ \underset{\downarrow}{y}(t_0) = \underset{\downarrow}{0}, \end{cases}$$

а в силу единственности решения задачи Коши других решений быть не может, следовательно, $\overrightarrow{\varphi} \equiv \overrightarrow{0}$ на $\langle a,\ b\rangle$. Утверждение 6.2 доказано. □

Определение 6.2. Вектор-функции $\overrightarrow{\varphi}^{\,1}, \ldots, \overrightarrow{\varphi}^{\,m} : \langle a,\ b\rangle \to \mathbb{R}^n$ называются линейно зависимыми на $\langle a,\ b\rangle$, если существуют вещественные числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ не все равные нулю, такие, что при всех $t \in \langle a,\ b\rangle$

$$\alpha_1\overrightarrow{\varphi}^{\,1}(t) + \cdots + \alpha_m\overrightarrow{\varphi}^{\,m}(t) \equiv \overrightarrow{0}.$$

В противном случае вектор-функции $\overrightarrow{\varphi}^{\,1}(t), \ldots, \overrightarrow{\varphi}^{\,m}(t)$ называются линейно независимыми на $\langle a,\ b\rangle$.

Пример 6.1. *Даны вектор-функции*

$$\overrightarrow{\varphi}^{\,1}(t) = (2, t), \quad \overrightarrow{\varphi}^{\,2}(t) = (t, 1), \quad \overrightarrow{\varphi}^{\,3}(t) = (t-2, 1-t).$$

Показать, что они линейно зависимы при $t \in (-\infty, +\infty)$.

Составим линейную комбинацию этих вектор-функций и приравняем нулевой вектор-функции:

$$\alpha_1(2, t) + \alpha_2(t, 1) + \alpha_3(t-2, 1-t) = (0, 0) \quad \text{или}$$

$$(2\alpha_1 + \alpha_2 t + \alpha_3 t - 2\alpha_3, \alpha_1 t + \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_3 t) = (0, 0),$$

откуда

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + \alpha_2 t + \alpha_3 t - 2\alpha_3 = 0, \\ \alpha_1 t + \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_3 t = 0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 2\alpha_1 - 2\alpha_3 + t(\alpha_2 + \alpha_3) = 0, \\ \alpha_2 + \alpha_3 + t(\alpha_1 - \alpha_3) = 0. \end{cases}$$

Эта система будет совместна при любом $t \in (-\infty, +\infty)$, если

$$\alpha_1 = \alpha_3, \quad \alpha_2 = -\alpha_3.$$

Полагаем $\alpha_3 = 1$, тогда $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = -1$, и мы получаем нетривиальную линейную комбинацию вектор-функций $\overrightarrow{\varphi}^{\,1}(t)$, $\overrightarrow{\varphi}^{\,2}(t)$, $\overrightarrow{\varphi}^{\,3}(t)$, равную нулевой вектор-функции:

$$\overrightarrow{\varphi}^{\,1}(t) - \overrightarrow{\varphi}^{\,2}(t) + \overrightarrow{\varphi}^{\,3}(t) \equiv \overrightarrow{0}, \quad t \in (-\infty, +\infty).$$

Следовательно, эти вектор-функции линейно зависимы на $(-\infty, +\infty)$.

Пример 6.2. *Даны вектор-функции*

$$\overrightarrow{\varphi}^{\,1}(t) = (2, t), \quad \overrightarrow{\varphi}^{\,2}(t) = (t, 1), \quad \overrightarrow{\varphi}^{\,3}(t) = (t, t+3).$$

Показать, что они линейно независимы при $t \in (-\infty, +\infty)$.

Рассмотрим линейную комбинацию этих вектор-функций и приравняем её нулевой вектор-функции:

$$\alpha_1(2, t) + \alpha_2(t, 1) + \alpha_3(t, t+3) = (0, 0),$$

откуда

$$(2\alpha_1 + \alpha_2 t + \alpha_3 t, \alpha_1 t + \alpha_2 + \alpha_3 t + 3\alpha_3) = (0, 0),$$

следовательно,

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + t(\alpha_2 + \alpha_3) = 0, \\ \alpha_2 + 3\alpha_3 + t(\alpha_1 + \alpha_3) = 0. \end{cases}$$

Имеем:

$$\begin{cases} \alpha_1 = 0, \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0, \\ \alpha_2 + 3\alpha_3 = 0, \\ \alpha_1 + \alpha_3 = 0, \end{cases}$$

что верно, только если $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Следовательно, вектор-функции $\overrightarrow{\varphi}^{\,1}(t)$, $\overrightarrow{\varphi}^{\,2}(t)$, $\overrightarrow{\varphi}^{\,3}(t)$ линейно независимы на $(-\infty, +\infty)$.

Утверждение 6.3. *Любые* $(n+1)$ *решений системы (6.7) линейно зависимы на* $\langle a,\ b \rangle$.

Доказательство. Пусть $\overrightarrow{y}^1(t), \ldots, \overrightarrow{y}^{n+1}(t)$ – решения системы (6.7) на $\langle a,\ b\rangle$. Зафиксируем $t = t_0 \in \langle a,\ b\rangle$. Тогда $\overrightarrow{y}^1(t_0), \ldots, \overrightarrow{y}^{n+1}(t_0)$ – $(n+1)$ векторов n-мерного линейного пространства $\mathbb{R}^n$, а следовательно, они линейно зависимы, то есть существуют числа $\tilde{\alpha}_1,\ \ldots,\ \tilde{\alpha}_{n+1}$, не все равные нулю, такие, что

$$\tilde{\alpha}_1 \overrightarrow{y}^1(t_0) + \cdots + \tilde{\alpha}_{n+1} \overrightarrow{y}^{n+1}(t_0) = \overrightarrow{0}.$$

Рассмотрим вектор-функцию

$$\overrightarrow{\varphi}(t) = \tilde{\alpha}_1 \overrightarrow{y}^1(t) + \cdots + \tilde{\alpha}_{n+1} \overrightarrow{y}^{n+1}(t).$$

Она является решением однородной системы (6.7) как линейная комбинация решений этой системы и при $t = t_0$ принимает нулевое значение: $\overrightarrow{\varphi}(t_0) = \overrightarrow{0}$. Следовательно, по утверждению 6.2 $\overrightarrow{\varphi}(t) \equiv \overrightarrow{0}$ на $\langle a,\ b\rangle$, что и означает линейную зависимость вектор-функций $\overrightarrow{y}^1(t), \ldots, \overrightarrow{y}^{n+1}(t)$ на промежутке $\langle a,\ b\rangle$. Утверждение 6.3 доказано. □

Утверждение 6. 4. *У системы (6.7) существует n линейно независимых решений на $\langle a,\ b\rangle$.*

Доказательство. Пусть $\overrightarrow{y}^1(t), \ldots, \overrightarrow{y}^n(t)$ – n решений системы (6.7), удовлетворяющих следующим начальным условиям:

$$\overrightarrow{y}^1(t_0) = (1, 0, \ldots, 0),\ \overrightarrow{y}^2(t_0) = (0, 1, \ldots, 0),\ \ldots,\ \overrightarrow{y}^n(t_0) = (0, 0, \ldots, 1),$$

где $t_0 \in \langle a,\ b\rangle$ (в силу теоремы 6.1 такие решения существуют). Составим их линейную комбинацию и приравняем её к нулевой вектор-функции:

$$\alpha_1 \overrightarrow{y}^1(t) + \cdots + \alpha_n \overrightarrow{y}^n(t) = \overrightarrow{0}, \quad t \in \langle a,\ b\rangle.$$

Подставим $t = t_0$:

$$\alpha_1 \overrightarrow{y}^1(t_0) + \cdots + \alpha_n \overrightarrow{y}^n(t_0) = \overrightarrow{0},$$

то есть

$$\alpha_1(1, 0, \ldots, 0) + \alpha_2(0, 1, \ldots, 0) + \cdots + \alpha_n(0, 0, \ldots, 1) = (0, 0, \ldots, 0).$$

Отсюда $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$. Утверждение 6.4 доказано. □

Из утверждений 6.3 и 6.4 вытекает теорема.

Теорема 6. 2. *Размерность пространства решений однородной системы линейных ОДУ n-го порядка равно n.*

Определение 6. 3. Любые n линейно независимых и упорядоченных решений однородной системы линейных ОДУ n-го порядка называются фундаментальной системой решений (ФСР) этой системы ОДУ.

Известно, что в n-мерном линейном пространстве любые n линейно независимых и упорядоченных элементов образуют базис. Следовательно, ФСР является базисом в пространстве решений однородной системы линейных ОДУ. Из определения базиса вытекает теорема об общем решении однородной системы линейных ОДУ.

Теорема 6. 3. *Пусть $\overrightarrow{y}^1(t), \ldots, \overrightarrow{y}^n(t)$ – ФСР системы (6.7), тогда общее решение этой системы есть*

$$\overrightarrow{y}(t) = C_1\overrightarrow{y}^1(t) + \cdots + C_n\overrightarrow{y}^n(t), \tag{6.8}$$

где $C_1, \ldots, C_n$ – произвольные вещественные постоянные.

Определение 6. 4. Матрица $Y(t)$, столбцами которой являются решения ФСР $\overrightarrow{y}^1(t), \ldots, \overrightarrow{y}^n(t)$:

$$Y(t) = (\underset{\downarrow}{y}^1(t) \ldots \underset{\downarrow}{y}^n(t))$$

называется фундаментальной матрицей системы (6.7).

С помощью фундаментальной матрицы формулу (6.8) для общего решения системы (6.7) можно переписать в векторной форме:

$$\underset{\downarrow}{y}(t) = Y(t) \cdot \underset{\downarrow}{C}, \tag{6.9}$$

где $\underset{\downarrow}{C} = \begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix}$, $C_i \in \mathbb{R}$.

Утверждение 6. 5. *Определитель фундаментальной матрицы не обращается в нуль ни в одной точке промежутка $\langle a,\ b\rangle$.*

Доказательство. Будем доказывать от противного. Пусть существует $t_0 \in \langle a,\ b\rangle$, такое, что $\det Y(t_0) = 0$. Но определитель матрицы равен нулю тогда и только тогда, когда его столбцы линейно зависимы, следовательно, $\overrightarrow{y}^1(t_0), \ldots, \overrightarrow{y}^n(t_0)$ линейно зависимы, а тогда существуют числа $\tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_n$, не все равные нулю, такие, что

$$\tilde{\alpha}_1\overrightarrow{y}^1(t_0) + \cdots + \tilde{\alpha}_n\overrightarrow{y}^n(t_0) = \overrightarrow{0}.$$

Введём вектор-функцию

$$\overrightarrow{\varphi}(t) = \tilde{\alpha}_1\overrightarrow{y}^1(t) + \cdots + \tilde{\alpha}_n\overrightarrow{y}^n(t).$$

Эта вектор-функция является решением системы (6.7) как линейная комбинация решений и кроме того, $\overrightarrow{\varphi}(t_0) = \overrightarrow{0}$. В силу утверждения 6.2 $\overrightarrow{\varphi}(t) \equiv \overrightarrow{0}$ на промежутке $\langle a,\ b\rangle$, то есть

$$\tilde{\alpha}_1\overrightarrow{y}^1(t) + \cdots + \tilde{\alpha}_n\overrightarrow{y}^n(t) = \overrightarrow{0} \quad \text{для любого } t \in \langle a,\ b\rangle.$$

Следовательно, $\overrightarrow{y}^1(t), \ldots, \overrightarrow{y}^n(t)$ линейно зависимы. Получили противоречие, так как по определению ФСР это система линейно независимых решений. Утверждение 6.5 доказано. $\square$

Следствие 6.1. *Фундаментальная матрица $Y(t)$ обратима при любом t из промежутка $\langle a,\ b\rangle$.*

Рассмотрим для системы (6.7) задачу Коши с начальным условием (6.2). Подставляя начальное условие (6.2) в (6.9), получим

$$\underset{\downarrow}{y}^0 = Y(t_0)\cdot \underset{\downarrow}{C}.$$

Отсюда $\underset{\downarrow}{C} = Y^{-1}(t_0)\underset{\downarrow}{y}^0$. Следовательно, решение задачи Коши (6.7), (6.2) есть

$$\underset{\downarrow}{y}(t) = Y(t)\cdot Y^{-1}(t_0)\underset{\downarrow}{y}^0.$$

6. 3. Определитель Вронского

Определение 6. 5. Определителем Вронского n-мерных вектор-функций $\overrightarrow{\varphi}^{\,1}(t),\ldots,\overrightarrow{\varphi}^{\,n}(t)$, $t\in\langle a,\ b\rangle$ называется определитель n-го порядка, столбцы которого состоят из координат этих вектор-функций, то есть

$$W(t)\equiv\left|\underset{\downarrow}{\varphi}^1(t)\ldots\underset{\downarrow}{\varphi}^n(t)\right| = \left|\begin{array}{c}\varphi_1^1(t)\ \ldots\ \varphi_1^n(t)\\ \ldots\ldots\ldots\\ \varphi_n^1(t)\ \ldots\ \varphi_n^n(t)\end{array}\right|.$$

Утверждение 6. 6. *Если $\overrightarrow{\varphi}^{\,1}(t),\ldots,\overrightarrow{\varphi}^{\,n}(t)$ линейно зависимы на $\langle a,\ b\rangle$, то $W(t)\equiv 0$ на $\langle a,\ b\rangle$.*

Доказательство. Так как $\overrightarrow{\varphi}^{\,1}(t),\ldots,\overrightarrow{\varphi}^{\,n}(t)$ линейно зависимы на $\langle a,\ b\rangle$, то столбцы определителя Вронского линейно зависимы, а тогда, как известно, он равен нулю. Утверждение 6.6 доказано. □

Следствие 6.2. *Если $W(t)\neq 0$ хотя бы в одной точке $t\in\langle a,\ b\rangle$, то вектор-функции $\overrightarrow{\varphi}^{\,1}(t),\ldots,\overrightarrow{\varphi}^{\,n}(t)$ линейно независимы на $\langle a,\ b\rangle$.*

Доказательство. Будем доказывать от противного. Пусть вектор-функции $\overrightarrow{\varphi}^{\,1}(t),\ldots,\overrightarrow{\varphi}^{\,n}(t)$ линейно зависимы на $\langle a,\ b\rangle$. Тогда по утверждению 6.6 $W(t)\equiv 0$ на $\langle a,\ b\rangle$. Получили противоречие. Следствие доказано. □

Замечание 6.1. Если $W(t)\equiv 0$ на $\langle a,\ b\rangle$, то вектор-функции, входящие в $W(t)$, могут оказаться как линейно зависимыми, так и линейно независимыми на $\langle a,\ b\rangle$.

Пример 6.3. Рассмотрим вектор-функции

$$\overrightarrow{\varphi}^{\,1}(t) = (t,0)\quad\text{и}\quad\overrightarrow{\varphi}^{\,2}(t) = (t^2,0).$$

Очевидно, они линейно независимы на $(-\infty,+\infty)$, а $W(t) = \begin{vmatrix} t & t^2\\ 0 & 0\end{vmatrix}\equiv 0$ на $(-\infty,+\infty)$.

В том случае, когда $\overrightarrow{\varphi}^{\,1}(t), \ldots, \overrightarrow{\varphi}^{\,n}(t)$ не произвольные n-мерные вектор-функции, а решения однородной системы линейных ОДУ (6.7), ситуация меняется.

Теорема 6. 4. *Решения $\overrightarrow{y}^{\,1}, \ldots, \overrightarrow{y}^{\,n}$ системы (6.7) линейно зависимы на $\langle a,\ b\rangle$ тогда и только тогда, когда существует $t_0 \in \langle a,\ b\rangle$, в которой $W(t_0) = 0$.*

Доказательство. **Необходимость.** Пусть решения $\overrightarrow{y}^{\,1}, \ldots, \overrightarrow{y}^{\,n}$ системы (6.7) линейно зависимы на $\langle a,\ b\rangle$, тогда по утверждению 6. 6 $W(t) \equiv 0$ на $\langle a,\ b\rangle$.

Достаточность. Пусть существует $t_0 \in \langle a,\ b\rangle$, в которой $W(t_0) = 0$. Докажем, что в этом случае решения $\overrightarrow{y}^{\,1}, \ldots, \overrightarrow{y}^{\,n}$ системы (6.7) линейно зависимы на $\langle a,\ b\rangle$. Будем доказывать от противного. Пусть $\overrightarrow{\varphi}^{\,1}(t), \ldots, \overrightarrow{\varphi}^{\,n}(t)$ линейно независимы на $\langle a,\ b\rangle$, тогда они образуют ФСР системы (6.7) и в силу утверждения 6. 5, $W(t) = \det Y(t) \neq 0$, $\forall t \in \langle a,\ b\rangle$, а значит $W(t_0) \neq 0$. Получили противоречие. Следовательно, решения $\overrightarrow{y}^{\,1}, \ldots, \overrightarrow{y}^{\,n}$ системы (6.7) линейно зависимы на $\langle a,\ b\rangle$. Теорема 6.4 доказана. □

Теорема 6. 5 (Критерий линейной независимости решений однородной системы линейных ОДУ)**.** *Решения $\overrightarrow{y}^{\,1}, \ldots, \overrightarrow{y}^{\,n}$ системы (6.7) линейно независимы на промежутке $\langle a,\ b\rangle$ тогда и только тогда, когда существует точка $t_0 \in \langle a,\ b\rangle$, в которой определитель Вронского $W(t_0) \neq 0$.*

Доказательство. **Необходимость.** Пусть $\overrightarrow{y}^{\,1}, \ldots, \overrightarrow{y}^{\,n}$ линейно независимые решения системы (6.7) на $\langle a,\ b\rangle$, тогда они образуют ФСР этой системы и в силу утверждения 6. 5, их определитель Вронского $W(t) \equiv \det Y(t)$ не обращается в нуль ни в одной точке промежутка $\langle a,\ b\rangle$.

Достаточность. Пусть существует $t_0 \in \langle a,\ b\rangle$, в которой $W(t_0) \neq 0$. Доказываем от противного. Предположим, что вектор-функции $\overrightarrow{y}^{\,1}, \ldots, \overrightarrow{y}^{\,n}$ линейно зависимы на $\langle a,\ b\rangle$, тогда в силу утверждения 6. 6, $W(t) \equiv 0$ на $\langle a,\ b\rangle$. Получили противоречие. Следовательно, $\overrightarrow{y}^{\,1}, \ldots, \overrightarrow{y}^{\,n}$ линейно независимы на $\langle a,\ b\rangle$. Теорема 6.5 доказана. □

Теорема 6. 6 (Формула Лиувилля – Остроградского)**.** *Пусть $W(t)$ определитель Вронского любых n решений $\overrightarrow{y}^{\,1}, \ldots, \overrightarrow{y}^{\,n}$ системы (6.7), тогда*

$$W(t) = W(t_0) \cdot \exp\left\{ \int\limits_{t_0}^{t} \operatorname{tr} A(\tau)\, d\tau \right\}, \tag{6.10}$$

где $\operatorname{tr} A(\tau) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii}(\tau)$, *$t_0$ – некоторая точка из промежутка $\langle a,\ b\rangle$.*

Доказательство. Напомним следующие свойства определителей, которые нам понадобятся при доказательстве теоремы.

1) Производная определителя n-го порядка $D(t)$ равна сумме n определителей $D_1(t)$, …, $D_n(t)$, где $D_i(t)$ получается из $D(t)$ заменой всех элементов i-й строки на их производные.

2) Если i-ая строка $\overrightarrow{d}_i(t)$ определителя $D(t)$ является линейной комбинацией некоторых строк, то есть $\overrightarrow{d}_i(t) = \alpha_1 \overrightarrow{d}_i^{\,1}(t) + \cdots + \alpha_k \overrightarrow{d}_i^{\,k}(t)$, то

$$D(t) \equiv \begin{vmatrix} \overrightarrow{d}_1(t) \\ \vdots \\ \overrightarrow{d}_i(t) \\ \vdots \\ \overrightarrow{d}_n(t) \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \begin{vmatrix} \overrightarrow{d}_1(t) \\ \vdots \\ \overrightarrow{d}_i^{\,j}(t) \\ \vdots \\ \overrightarrow{d}_n(t) \end{vmatrix}.$$

3) Если в определителе есть две одинаковые строки, то он равен нулю.

Продифференцируем определитель Вронского

$$W(t) = \left| \underset{\downarrow}{y}^1(t) \dots \underset{\downarrow}{y}^n(t) \right| \equiv \begin{vmatrix} y_1^1(t) & \dots & y_1^n(t) \\ & \dots\dots\dots & \\ y_n^1(t) & \dots & y_n^n(t) \end{vmatrix} \quad \text{по } t\text{:}$$

$$\dot{W}(t) = W_1(t) + \cdots + W_n(t),$$

здесь

$$W_i(t) = \begin{vmatrix} y_1^1(t) & \dots & y_1^n(t) \\ & \dots\dots\dots & \\ \dot{y}_i^1(t) & \dots & \dot{y}_i^n(t) \\ & \dots\dots\dots & \\ y_n^1(t) & \dots & y_n^n(t) \end{vmatrix}.$$

Рассмотрим определитель $W_i(t)$. Поскольку

$$\underset{\downarrow}{\dot{y}}^k(t) = A(t)\underset{\downarrow}{y}^k(t),$$

то

$$\dot{y}_i^k(t) = (a_{i1}(t) \dots a_{in}(t)) \begin{pmatrix} y_1^k(t) \\ \vdots \\ y_n^k(t) \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t) y_j^k(t), \quad i, k = 1, 2, \dots, n.$$

Подставляя выражения $\dot{y}_i^1(t)$, …, $\dot{y}_i^n(t)$ в $W_i(t)$, получаем

$$W_i(t)=\begin{vmatrix} y_1^1(t) & \dots & y_1^n(t) \\ \multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots} \\ \sum\limits_{j=1}^n a_{ij}(t)y_j^1(t) & \dots & \sum\limits_{j=1}^n a_{ij}(t)y_j^n(t) \\ \multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots} \\ y_n^1(t) & \dots & y_n^n(t) \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)\begin{vmatrix} y_1^1(t) \dots y_1^n(t) \\ \dots\dots\dots \\ y_j^1(t) \dots y_j^n(t) \\ \dots\dots\dots \\ y_n^1(t) \dots y_n^n(t) \end{vmatrix} =$$

$$= a_{ii}(t)\begin{vmatrix} y_1^1(t) \dots y_1^n(t) \\ \dots\dots\dots \\ y_i^1(t) \dots y_i^n(t) \\ \dots\dots\dots \\ y_n^1(t) \dots y_n^n(t) \end{vmatrix} = a_{ii}(t)W(t).$$

Здесь мы учли, что

$$\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}(t)y_j^1(t),\dots,\sum_{j=1}^n a_{ij}(t)y_j^n(t)\right) = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)\left(y_j^1(t),\dots,y_j^n(t)\right)$$

и что при $j \neq i$ определители, входящие в сумму, равны нулю, так как они имеют две одинаковые строки, а при $j = i$ определитель совпадает с определителем Вронского $W(t)$.

В результате имеем $\dot{W}(t) = a_{11}(t)W(t) + \dots + a_{nn}(t)W(t)$, или

$$\dot{W}(t) = \operatorname{tr} A(t)W(t), \tag{6.11}$$

где $\operatorname{tr} A(t) = \sum\limits_{i=1}^n a_{ii}(t)$.

Если $W(t_0) \neq 0$, то по теореме 6.5 решения $\overrightarrow{y}^{\,1},\dots,\overrightarrow{y}^{\,n}$ линейно независимы на $\langle a,\ b\rangle$ и, следовательно, $W(t)$ не обращается в нуль на $\langle a,\ b\rangle$.

Решая уравнение (6.11) как уравнение с разделяющимися переменными, получим искомую формулу

$$W(t) = W(t_0)\cdot\exp\left\{\int_{t_0}^t \operatorname{tr} A(\tau)\,d\tau\right\},$$

которая и называется формулой Лиувилля – Остроградского.

Если $W(t_0) = 0$, то по теореме 6.4 решения $\overrightarrow{y}^{\,1},\dots,\overrightarrow{y}^{\,n}$ линейно зависимы на $\langle a,\ b\rangle$ и тогда, в силу утверждения 6.6, $W(t) \equiv 0$ на $\langle a,\ b\rangle$, поэтому и в этом случае справедлива формула Лиувилля – Остроградского. Теорема 6.6 доказана. □

Теорема 6.7 (О построении нормальной системы ОДУ с заданными решениями)**.** *Пусть $\overrightarrow{\varphi}^{\,1}(t),\dots,\overrightarrow{\varphi}^{\,n}(t) \in C^1(\langle a,\ b\rangle)$ – некоторая система вектор-функций, для которой определитель Вронского $W(t) \neq 0$ для всех $t \in \langle a,\ b\rangle$. Тогда существует нормальная однородная система ОДУ n-го порядка, для которой данные вектор-функции образуют ФСР.*

Доказательство. Запишем следующую систему ОДУ:

$$\left\{\begin{array}{l} \begin{vmatrix} \varphi_1^1(t) & \varphi_1^2(t) & \ldots & \varphi_1^n(t) & y_1 \\ & & \ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ \varphi_n^1(t) & \varphi_n^2(t) & \ldots & \varphi_n^n(t) & y_n \\ \dot\varphi_1^1(t) & \dot\varphi_1^2(t) & \ldots & \dot\varphi_1^n(t) & \dot y_1 \end{vmatrix} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \begin{vmatrix} \varphi_1^1(t) & \varphi_1^2(t) & \ldots & \varphi_1^n(t) & y_1 \\ & & \ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ \varphi_n^1(t) & \varphi_n^2(t) & \ldots & \varphi_n^n(t) & y_n \\ \dot\varphi_n^1(t) & \dot\varphi_n^2(t) & \ldots & \dot\varphi_n^n(t) & \dot y_n \end{vmatrix} = 0. \end{array}\right. \tag{6.12}$$

Покажем, что система (6.12) может быть записана как нормальная однородная система ОДУ n-го порядка. Для этого разложим каждый определитель по последнему столбцу. В результате система (6.12) запишется в виде

$$\left\{\begin{array}{l} W(t)\dot y_1 = -\sum\limits_{j=1}^{n} b_{1j} y_j, \\ \qquad\ldots\ldots\ldots\ldots \\ W(t)\dot y_n = -\sum\limits_{j=1}^{n} b_{nj} y_j, \end{array}\right. \tag{6.13}$$

где $b_{ij}(t)$ – алгебраические дополнения элементов последних столбцов, которые составлены из известных функций $\varphi_j^i(t)$, а $W(t)$ – определитель Вронского системы вектор-функций $\left\{\overrightarrow{\varphi}^{\,1}(t), \ldots, \overrightarrow{\varphi}^{\,n}(t)\right\}$. По условию теоремы $W(t) \neq 0\ \forall t \in \langle a,\ b\rangle$, поэтому в уравнениях системы (6.13) на него можно разделить и система (6.13), а следовательно, и система (6.12) будет записана в нормальном виде.

Покажем теперь, что вектор-функции $\overrightarrow{\varphi}^{\,i}(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, являются решениями системы (6.12). Подставим в последние столбцы $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \\ \dot y_j \end{pmatrix}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, каждого из определителей, составляющих систему (6.12), соответственно, столбцы $\begin{pmatrix} \varphi_1^1 \\ \vdots \\ \varphi_n^1 \\ \dot\varphi_j^1 \end{pmatrix}$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Получаем во всех определителях два одинаковых столбца; следовательно, по свойству определителей они равны нулю. Таким образом, вектор-функция $\overrightarrow{\varphi}^{\,1}(t)$ является решением системы (6.12), $t \in \langle a,\ b\rangle$. Аналогично проверяем, что и остальные вектор-функции $\overrightarrow{\varphi}^{\,2}(t), \ldots, \overrightarrow{\varphi}^{\,n}(t)$ также удовлетворяют системе (6.12). По условию теоремы определитель Вронского $W(t)$ решений $\overrightarrow{\varphi}^{\,1}, \ldots, \overrightarrow{\varphi}^{\,n}$ системы (6.12) не равен нулю на $\langle a,\ b\rangle$. Поэтому согласно теореме 6.5 эти решения линейно независимы на $\langle a,\ b\rangle$, а следовательно, они образуют ФСР системы (6.12). Теорема доказана. □

6.4. Комплексные решения однородной системы. Переход к вещественной ФСР

Определение 6.6. ФСР $\overrightarrow{y}^{\,1}(t), \ldots, \overrightarrow{y}^{\,n}(t)$ однородной системы линейных ОДУ (6.7) называется комплексной, если среди вектор-функций $\overrightarrow{y}^{\,1}(t), \ldots, \overrightarrow{y}^{\,n}(t)$ есть комплекснозначные, и вещественной, если все вектор-функции, входящие в ФСР, вещественнозначные.

Теорема 6.8. *Если $\overrightarrow{y} = \overrightarrow{u} + i\overrightarrow{v}$ – комплексное решение системы (6.7) с вещественной матрицей $A(t)$, то его вещественная часть $\overrightarrow{u}$ и мнимая часть $\overrightarrow{v}$ являются вещественными решениями этой системы.*

Доказательство. Имеем тождество

$$\frac{d}{dt}(\underset{\downarrow}{u} + i\underset{\downarrow}{v}) \equiv A(t)(\underset{\downarrow}{u} + i\underset{\downarrow}{v}).$$

Применяя правила дифференцирования и умножения матриц, перепишем его в виде

$$\underset{\downarrow}{\dot{u}} + i\underset{\downarrow}{\dot{v}} \equiv A(t)\underset{\downarrow}{u} + iA(t)\underset{\downarrow}{v}.$$

Отделяя вещественную и мнимую часть, получаем два тождества

$$\underset{\downarrow}{\dot{u}} \equiv A(t)\underset{\downarrow}{u} \quad \text{и} \quad \underset{\downarrow}{\dot{v}} \equiv A(t)\underset{\downarrow}{v}.$$

Следовательно, $\overrightarrow{u}$ и $\overrightarrow{v}$ – вещественные решения системы (6.7). Теорема 6.8 доказана. □

Следствие 6.3. *Если $\underset{\downarrow}{y} = \underset{\downarrow}{u} + i\underset{\downarrow}{v}$ – комплексное решение системы (6.7), то $\underset{\downarrow}{\overline{y}} = \underset{\downarrow}{u} - i\underset{\downarrow}{v}$ – тоже решение этой системы.*

Доказательство. $\underset{\downarrow}{\overline{y}}$ – решение системы (6.7) как линейная комбинация его решений $\underset{\downarrow}{u}$ и $\underset{\downarrow}{v}$. □

Теорема 6.9. *Пусть $\underset{\downarrow}{y^j} = \underset{\downarrow}{u^j} + i\underset{\downarrow}{v^j}$, $\underset{\downarrow}{\overline{y}^j} = \underset{\downarrow}{u^j} - i\underset{\downarrow}{v^j}$, $j = 1, \ldots, k$, $\underset{\downarrow}{y^{2k+1}}, \ldots, \underset{\downarrow}{y^n}$ – комплексная ФСР системы (6.7) с вещественной матрицей $A(t)$, здесь $\underset{\downarrow}{y^{2k+1}}, \ldots, \underset{\downarrow}{y^n}$ – вещественные вектор-функции, тогда $\underset{\downarrow}{u^j}$, $\underset{\downarrow}{v^j}$, $j = 1, \ldots, k$, $\underset{\downarrow}{y^{2k+1}}, \ldots, \underset{\downarrow}{y^n}$ – вещественная ФСР этой системы.*

Доказательство. Вектор-функции $\overrightarrow{y}^{\,2k+1}, \ldots, \overrightarrow{y}^{\,n}$ являются вещественными решениями системы (6.7) по условию, а $\overrightarrow{u}^{\,j}$ и $\overrightarrow{v}^{\,j}$, $j = 1, \ldots, k$, являются вещественными решениями этой системы по теореме 6.8. В результате мы имеем n вещественных решений системы (6.7). Покажем их линейную независимость.

Для этого докажем, что определитель Вронского этой системы решений не равен нулю. При доказательстве будем использовать следующие свойства определителя.

1) Если к столбцу определителя прибавить другой столбец, умноженный на произвольное число, то определитель не меняется.

2) Общий множитель столбца можно выносить за определитель.

Имеем

$$W(t) = \left|\underset{\downarrow}{u^1}\underset{\downarrow}{v^1}\underset{\downarrow}{u^2}\underset{\downarrow}{v^2}\ldots\underset{\downarrow}{y^n}\right| = \left|\underset{\downarrow}{u^1} + i\underset{\downarrow}{v^1}\,\underset{\downarrow}{v^1}\underset{\downarrow}{u^2}\underset{\downarrow}{v^2}\ldots\underset{\downarrow}{y^n}\right| =$$

$$= \frac{1}{-2i}\left|\underset{\downarrow}{u^1} + i\underset{\downarrow}{v^1} - 2i\underset{\downarrow}{v^1}\underset{\downarrow}{u^2}\underset{\downarrow}{v^2}\ldots\underset{\downarrow}{y^n}\right| = \frac{1}{-2i}\left|\underset{\downarrow}{u^1} + i\underset{\downarrow}{v^1}\,\underset{\downarrow}{u^1} - i\underset{\downarrow}{v^1}\underset{\downarrow}{u^2}\underset{\downarrow}{v^2}\ldots\underset{\downarrow}{y^n}\right| =$$

$$= \frac{1}{-2i}\left|\underset{\downarrow}{y^1}\underset{\downarrow}{\overline{y}^1}\underset{\downarrow}{u^2}\underset{\downarrow}{v^2}\ldots\underset{\downarrow}{y^n}\right|$$

(мы к первому столбцу прибавили второй, умноженный на число i, затем второй столбец умножили на число $-2i$ и, соответственно, разделили определитель на это число, а затем к полученному второму столбцу добавили первый).

Повторяя эту процедуру k раз, получаем

$$W(t) = \frac{1}{(-2i)^k}\left|\underset{\downarrow}{y^1}\underset{\downarrow}{\overline{y}^1}\underset{\downarrow}{y^2}\underset{\downarrow}{\overline{y}^2}\ldots\underset{\downarrow}{y^n}\right|.$$

Так как $\underset{\downarrow}{y^1},\ \underset{\downarrow}{\overline{y}^1},\ \underset{\downarrow}{y^2},\ \underset{\downarrow}{\overline{y}^2},\ldots,\underset{\downarrow}{y^n}$ – комплексная ФСР системы (6.7), то $W(t) \neq 0$. Теорема 6.9 доказана. □

6.5. Неоднородные системы линейных ОДУ. Метод вариации постоянных

Рассмотрим теперь неоднородную систему (6.1) и соответствующую ей однородную систему (6.7).

Теорема 6.10. *Общее решение неоднородной системы линейных ОДУ (6.1) может быть представлено как сумма её частного решения и общего решения соответствующей ей однородной системы (6.7):*

$$\overrightarrow{y}_{он}(t) = \overrightarrow{y}_{чн}(t) + \overrightarrow{y}_{оо}(t), \quad t \in \langle a,\ b\rangle. \tag{6.14}$$

Доказательство. Сначала проверим, что формула (6.14) задаёт решение неоднородной системы (6.1):

$$\frac{d}{dt}(\underset{\downarrow}{y_{\text{чн}}} + \underset{\downarrow}{y_{\text{оо}}}) = \underset{\downarrow}{\dot{y}_{\text{чн}}} + \underset{\downarrow}{\dot{y}_{\text{оо}}} = A(t)\underset{\downarrow}{y_{\text{чн}}} + \underset{\downarrow}{f}(t) + A(t)\underset{\downarrow}{y_{\text{оо}}} = A(t)(\underset{\downarrow}{y_{\text{чн}}} + \underset{\downarrow}{y_{\text{оо}}}) + \underset{\downarrow}{f}(t).$$

Теперь покажем, что эта формула содержит все решения системы (6.1). Пусть $\overrightarrow{\varphi}(t)$ – любое решения системы (6.1). Заметим, что разность двух частных решений неоднородной системы (6.1) является решением соответствующей ей однородной системы (6.7):

$$\frac{d}{dt}(\underset{\downarrow}{\varphi}-\underset{\downarrow}{y_{\text{чн}}})=\underset{\downarrow}{\dot\varphi}-\underset{\downarrow}{\dot y_{\text{чн}}}=A(t)\underset{\downarrow}{\varphi}+\underset{\downarrow}{f}(t)-A(t)\underset{\downarrow}{y_{\text{чн}}}-\underset{\downarrow}{f}(t)=A(t)(\underset{\downarrow}{\varphi}-\underset{\downarrow}{y_{\text{чн}}}),$$

и, значит, содержится в $\overrightarrow{y}_{\text{оо}}$. Теорема 6.10 доказана. □

Пусть $\overrightarrow{y}^{\,1}(t),\dots,\overrightarrow{y}^{\,n}(t)$ – ФСР однородной системы (6.7), а $\overrightarrow{y}_{\text{оо}}=$ $=C_1\overrightarrow{y}^{\,1}(t)+\dots+C_n\overrightarrow{y}^{\,n}(t)$ – общее решение этой системы. Для нахождения частного решения неоднородной системы (6.1) используется метод вариации постоянных. Он заключается в следующем.

Ищем $\overrightarrow{y}_{\text{чн}}$ в виде

$$\overrightarrow{y}_{\text{чн}}=C_1(t)\overrightarrow{y}^{\,1}(t)+\dots+C_n(t)\overrightarrow{y}^{\,n}(t). \tag{6.15}$$

Здесь $C_1(t)$, …, $C_n(t)$ неизвестные пока функции. Для их нахождения подставим (6.15) в систему (6.1):

$$\frac{d}{dt}\Big(C_1(t)\underset{\downarrow}{y}^1+\dots+C_n(t)\underset{\downarrow}{y}^n\Big)=A(t)\Big(C_1(t)\underset{\downarrow}{y}^1+\dots+C_n(t)\underset{\downarrow}{y}^n\Big)+\underset{\downarrow}{f}(t).$$

Откуда

$$\begin{gathered}\dot C_1(t)\underset{\downarrow}{y}^1+\dots+\dot C_n(t)\underset{\downarrow}{y}^n+C_1(t)\underset{\downarrow}{\dot y}^1+\dots+C_n(t)\underset{\downarrow}{\dot y}^n=\\=C_1(t)A(t)\underset{\downarrow}{y}^1+\dots+C_n(t)A(t)\underset{\downarrow}{y}^n+\underset{\downarrow}{f}(t).\end{gathered}$$

Учитывая, что $\underset{\downarrow}{\dot y}^i=A(t)\underset{\downarrow}{y}^i$, $i=1,\dots,n$, получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных функций $\dot C_1(t)$, …, $\dot C_n(t)$:

$$\dot C_1(t)\underset{\downarrow}{y}^1+\dots+\dot C_n(t)\underset{\downarrow}{y}^n=\underset{\downarrow}{f}(t). \tag{6.16}$$

Определитель этой системы $\Delta(t)=\left|\underset{\downarrow}{y}^1\dots\underset{\downarrow}{y}^n\right|$ является определителем фундаментальной матрицы однородной системы (6.7), следовательно, по утверждению 6.5, он не обращается в нуль ни в одной точке промежутка $\langle a,\ b\rangle$. Это означает, что система (6.16) имеет единственное решение, которое может быть получено, например, по формулам Крамера

$$\dot C_i(t)=\frac{\Delta_i(t)}{\Delta(t)},\quad i=1,\dots,n. \tag{6.17}$$

Здесь $\Delta_i(t)$ – определитель, полученный из определителя $\Delta(t)$ заменой i-го столбца на столбец $\underset{\downarrow}{f}(t)$:

$$\Delta_i(t)=\Bigg|\underset{\downarrow}{y}^1\dots\dots\underset{\substack{\downarrow\\ i\text{-й столбец}}}{f(t)}\dots\dots\underset{\downarrow}{y}^n\Bigg|.$$

Интегрируя (6.17), находим функции $C_1(t)$, ..., $C_n(t)$:

$$C_i(t) = \int \frac{\Delta_i(t)}{\Delta(t)}\,dt. \tag{6.18}$$

Подставляя их в (6.15), получаем $\overrightarrow{y}_{\text{чн}}$.

Пример 6.4. *Зная общее решение*

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} + C_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t} \tag{6.19}$$

однородной системы

$$\begin{cases} \dot y_1 = \ 2y_1 + 3y_2, \\ \dot y_2 = -y_1 - 2y_2, \end{cases} \tag{6.20}$$

найти общее решение неоднородной системы

$$\begin{cases} \dot y_1 = 2y_1 + 3y_2 + 3t + 2, \\ \dot y_2 = -y_1 - 2y_2 + t. \end{cases} \tag{6.21}$$

Из (6.19) следует, что $\underset{\downarrow}{y}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}$, $\underset{\downarrow}{y}^2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t}$ – ФСР однородной системы (6.20). Ищем $\overrightarrow{y}_{\text{чн}}$ в виде (6.15). Для нахождения $\dot C_1(t)$, ..., $\dot C_n(t)$ составляем систему (6.16)

$$\dot C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} + \dot C_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t} = \begin{pmatrix} 3t+2 \\ t \end{pmatrix}.$$

Вычислим определители $\Delta(t)$, $\Delta_1(t)$, $\Delta_2(t)$:

$$\begin{aligned}
\Delta(t) \ &= \begin{vmatrix} e^{-t} & -3e^{t} \\ -e^{-t} & e^{t} \end{vmatrix} = 1 - 3 = -2, \\
\Delta_1(t) &= \begin{vmatrix} 3t+2 & -3e^{t} \\ t & e^{t} \end{vmatrix} = (3t+2)e^{t} + 3te^{t} = (6t+2)e^{t}, \\
\Delta_2(t) &= \begin{vmatrix} e^{-t} & 3t+2 \\ -e^{-t} & t \end{vmatrix} = te^{-t} + (3t+2)e^{-t} = (4t+2)e^{-t}.
\end{aligned}$$

Применяя формулы Крамера, находим $\dot C_1(t)$ и $\dot C_2(t)$:

$$\begin{aligned}
\dot C_1(t) &= \frac{\Delta_1(t)}{\Delta(t)} = -(3t+1)e^{t}, \\
\dot C_2(t) &= \frac{\Delta_2(t)}{\Delta(t)} = -(2t+1)e^{-t}.
\end{aligned}$$

Интегрируя $\dot C_1$ и $\dot C_2$, получаем $C_1(t)$ и $C_2(t)$:

$$\begin{aligned}
C_1(t) &= -(3t-2)e^{t} + \tilde C_1, \\
C_2(t) &= \ (2t+3)e^{-t} + \tilde C_2.
\end{aligned}$$

Выберем $\tilde{C}_1 = \tilde{C}_2 = 0$, так как нас интересует одно частное решение системы (6.21) и подставим найденные $C_1(t)$ и $C_2(t)$ в (6.15):

$$\underset{\downarrow}{y_{\text{чн}}}(t) = -(3t-2)e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} + (2t+3)e^{-t} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} e^t =$$

$$= \begin{pmatrix} -3t+2 \\ 3t-2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6t-9 \\ 2t+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9t-7 \\ 5t+1 \end{pmatrix}.$$

Записываем общее решение неоднородной системы (6.21)

$$\underset{\downarrow}{y_{\text{он}}}(t) = \begin{pmatrix} -9t-7 \\ 5t+1 \end{pmatrix} + C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} + C_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} e^t.$$

6.6. Однородные системы линейных ОДУ с постоянными коэффициентами

Рассмотрим однородную систему линейных ОДУ с постоянными коэффициентами:

$$\underset{\downarrow}{\dot{y}} = A\underset{\downarrow}{y}, \tag{6.22}$$

где $A = (a_{ij})$ – $n \times n$ - матрица, a_{ij} – вещественные числа.

Нам понадобятся следующие сведения из линейной алгебры.

Определение 6.7. Число $\lambda \in \mathbb{C}$ называется **собственным значением (собственным числом) матрицы** A, если существует ненулевой вектор $\overrightarrow{h}$ такой, что

$$A\underset{\downarrow}{h} = \lambda \underset{\downarrow}{h}, \tag{6.23}$$

при этом вектор $\overrightarrow{h}$ называется **собственным вектором матрицы** A**, отвечающим собственному значению** λ.

Определение 6.8. Уравнение

$$\det(A - \lambda E) = 0 \tag{6.24}$$

называется **характеристическим уравнением матрицы** A, а многочлен n-й степени $P_n(\lambda) \equiv |A - \lambda E|$ относительно λ называется **характеристическим многочленом матрицы** A. Здесь E – единичная матрица порядка n.

Как известно, число λ_0 является собственным значением матрицы A тогда и только тогда, когда оно является корнем характеристического уравнения (6.24). При этом собственные векторы, отвечающие собственному значению λ_0 – это все ненулевые решения однородной системы линейных алгебраических уравнений

$$(A - \lambda_0 E)\underset{\downarrow}{h} = \underset{\downarrow}{0}. \tag{6.25}$$

Определение 6.9. Число n_0, равное кратности собственного значения λ_0 как корня характеристического уравнения, называется его алгебраической кратностью, а число l_0, равное количеству линейно независимых собственных векторов, отвечающих λ_0, называется его геометрической кратностью.

Пусть $\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_k,\ k \leqslant n$ – все собственные значения матрицы A, n_i, l_i, $i = 1, \ldots, k$ – их алгебраические и геометрические кратности соответственно. Известно, что

1) $n_1 + \cdots + n_k = n$;

2) $l_i \leqslant n_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$;

3) собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям, линейно независимы.

Теорема 6.11. *Пусть λ_0 – собственное значение матрицы A, а $\overrightarrow{h}^{\,0}$ – отвечающий ему собственный вектор, тогда $\overrightarrow{y}^{\,0} = e^{\lambda_0 t}\overrightarrow{h}^{\,0}$ является решением системы (6.22).*

Доказательство. Действительно, подставляя $\overrightarrow{y}^{\,0}$ в систему (6.22), получаем

$$\underset{\downarrow}{\dot{y}}^0 \equiv \frac{d}{dt}\Big(e^{\lambda_0 t}\underset{\downarrow}{h}^0\Big) = \lambda_0 e^{\lambda_0 t}\underset{\downarrow}{h}^0 = \lambda_0 \underset{\downarrow}{h}^0 e^{\lambda_0 t} = \big(A\underset{\downarrow}{h}^0\big)e^{\lambda_0 t} = A\big(\underset{\downarrow}{h}^0 e^{\lambda_0 t}\big) = A\underset{\downarrow}{y}^0,$$

откуда следует, что $\overrightarrow{y}^{\,0} = e^{\lambda_0 t}\overrightarrow{h}^{\,0}$ является решением системы (6.22). Теорема 6.11 доказана. □

Теорема 6.12. *Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ – n различных собственных значений матрицы A, а $\overrightarrow{h}^{\,1},\ \ldots,\ \overrightarrow{h}^{\,n}$ – отвечающие им собственные векторы, тогда $\overrightarrow{y}^{\,1} = e^{\lambda_1 t}\overrightarrow{h}^{\,1},\ \ldots,\ \overrightarrow{y}^{\,n} = e^{\lambda_n t}\overrightarrow{h}^{\,n}$ – ФСР системы (6.22).*

Доказательство. В силу теоремы 6.11 $\overrightarrow{y}^{\,1},\ \ldots,\ \overrightarrow{y}^{\,n}$ являются решениями системы (6.22). Покажем, что они линейно независимы. Для этого рассмотрим определитель Вронского этой системы вектор-функций при $t = 0$

$$W(0) = \Big|\underset{\downarrow}{y}^1(0) \ldots \underset{\downarrow}{y}^n(0)\Big| = \Big|\underset{\downarrow}{h}^1 \ldots \underset{\downarrow}{h}^n\Big|.$$

Столбцы этого определителя линейно независимы как собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям, поэтому $W(0) \neq 0$. Тогда по теореме 6.5 решения $\overrightarrow{y}^{\,1},\ \ldots,\ \overrightarrow{y}^{\,n}$ линейно независимы и, следовательно, они образуют ФСР системы (6.22). Теорема 6.12 доказана. □

Пример 6.5. *Решить систему*

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = 2y_1 + \ \ y_2, \\ \dot{y}_2 = \ \ y_1 + 2y_2. \end{cases} \tag{6.26}$$

Записываем матрицу системы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Составляем и решаем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad (2-\lambda)^2 - 1 = 0.$$

Отсюда $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1$.

Для $\lambda_1 = 3$ ищем собственный вектор $\underset{\downarrow}{h}^1$ как решение однородной системы:

$$(A - 3E)\underset{\downarrow}{h} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Полагая $\underset{\downarrow}{h} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$, имеем

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

или $\begin{cases} -\alpha + \beta = 0, \\ \alpha - \beta = 0, \end{cases}$ следовательно, $\alpha = \beta$. Выберем $\beta = 1$, тогда $\underset{\downarrow}{h}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Аналогично ищем собственный вектор $\underset{\downarrow}{h}^2$, отвечающий собственному значению $\lambda_2 = 1$:

$$(A - E)\underset{\downarrow}{h} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

или $\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha + \beta = 0, \end{cases}$ следовательно $\alpha = -\beta$. Выберем $\beta = 1$, тогда $\underset{\downarrow}{h}^2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. В результате мы получили ФСР системы (6.26)

$$\underset{\downarrow}{y}^1(t) = e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \underset{\downarrow}{y}^2(t) = e^{t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Записываем общее решение системы (6.26) как линейную комбинацию ФСР

$$\underset{\downarrow}{y}(t) = C_1 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Теорема 6.13. *Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, $(k < n)$ – собственные значения матрицы A, причем алгебраические кратности равны геометрическим ($n_i = l_i$), а $\overrightarrow{h}^{1,i}, \ldots, \overrightarrow{h}^{n_i,i}$ – n_i линейно независимых собственных векторов, отвечающих собственному значению λ_i, $i = 1, \ldots, k$, $n_1 + \cdots + n_k = n$, тогда $\overrightarrow{y}^1 = e^{\lambda_1 t}\overrightarrow{h}^{1,1}$, $\ldots$, $\overrightarrow{y}^n = e^{\lambda_k t}\overrightarrow{h}^{n_k,k}$ – ФСР системы (6.22).*

Доказательство. Как и в случае теоремы 6.12, мы имеем n решений системы (6.22), определитель Вронского которых при $t = 0$

$$W(0) = \begin{vmatrix} \underset{\downarrow}{h}^{1,1} \dots \underset{\downarrow}{h}^{n_k,k} \end{vmatrix}$$

отличен от нуля, так как его столбцы линейно независимы (собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям, линейно независимы всегда, а собственные векторы, отвечающие одному собственному значению, линейно независимы по условию теоремы). Следовательно, $\overrightarrow{y}^{\,1}, \dots, \overrightarrow{y}^{\,n}$ – ФСР системы (6.22). Теорема 6.13 доказана. $\square$

Пример 6.6. *Решим систему*

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = 3y_1 - 2y_2 - \ \ y_3, \\ \dot{y}_2 = 3y_1 - 4y_2 - 3y_3, \\ \dot{y}_3 = 2y_1 - 4y_2. \end{cases} \tag{6.27}$$

Записываем матрицу системы (6.27)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 3 & -4 & -3 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Составляем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 & -1 \\ 3 & -4-\lambda & -3 \\ 2 & -4 & -\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Преобразуем левую часть уравнения

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 & -1 \\ 3 & -4-\lambda & -3 \\ 2 & -4 & -\lambda \end{vmatrix} \underset{\underset{\downarrow}{1}+\underset{\downarrow}{3}}{=} \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & -1 \\ 0 & -4-\lambda & -3 \\ 2-\lambda & -4 & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (2-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -4-\lambda & -3 \\ 1 & -4 & -\lambda \end{vmatrix} \underset{\overrightarrow{3}-\overrightarrow{1}}{=} (2-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -4-\lambda & -3 \\ 0 & -2 & -\lambda+1 \end{vmatrix} =$$

$$= (2-\lambda)\begin{vmatrix} -4-\lambda & -3 \\ -2 & -\lambda+1 \end{vmatrix} = (2-\lambda)\Big((-4-\lambda)(-\lambda+1) - 6\Big) =$$

$$= (2-\lambda)(\lambda^2 + 3\lambda - 10) = (2-\lambda)(\lambda-2)(\lambda+5) = -(\lambda+5)(\lambda-2)^2$$

(мы к первому столбцу определителя добавили третий столбец, вынесли общий множитель из полученного первого столбца за определитель, затем из третьей строки определителя вычли первую строку, разложили определитель по первому столбцу и вычислили полученный определитель второго порядка). Приравнивая её нулю, находим собственные значения $\lambda_1 = -5$ и $\lambda_2 = 2$. Их алгебраические кратности равны $n_1 = 1$ и $n_2 = 2$ соответственно.

Ищем собственный вектор, отвечающий простому собственному значению $\lambda_1 = -5$:

$$(A + 5E)\underset{\downarrow}{h} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} 8 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & -3 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(мы обозначили $\underset{\downarrow}{h} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$). Решаем эту однородную систему линейных алгебраических уравнений методом Гаусса. Для этого записываем матрицу системы и с помощью элементарных преобразований приводим её к ступенчатому виду

$$\begin{pmatrix} 8 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & -3 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 8 & -2 & -1 \\ 1 & 5 & -8 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 & -8 \\ 0 & -42 & 63 \\ 0 & -14 & 21 \end{pmatrix} \sim$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 5 & -8 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 & -8 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, собственный вектор является решением системы

$$\begin{cases} \alpha + 5\beta - 8\gamma = 0, \\ \qquad 2\beta - 3\gamma = 0. \end{cases}$$

Полагая во втором уравнении $\gamma = 2$, получаем $\beta = 3$. Подставляя β и γ в первое уравнение, находим $\alpha = 1$. Следовательно, собственный вектор, отвечающий собственному значению $\lambda_1 = -5$, равен

$$\underset{\downarrow}{h}^{1,1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Теперь ищем линейно независимые собственные векторы, отвечающие кратному собственному значению $\lambda_2 = 2$:

$$(A - 2E)\underset{\downarrow}{h} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & -6 & -3 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Решая эту систему методом Гаусса, получаем

$$\alpha - 2\beta - \gamma = 0 \quad \text{или} \quad \alpha = 2\beta + \gamma.$$

Выбирая $\beta = 1$, $\gamma = 0$, а затем $\beta = 0$, $\gamma = 1$ находим два линейно независимых собственных вектора, отвечающих собственному значению $\lambda_2 = 2$:

$$\underset{\downarrow}{h}^{1,2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \underset{\downarrow}{h}^{2,2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

В результате мы построили ФСР системы (6.27)

$$\underset{\downarrow}{y}^1(t) = e^{-5t}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \quad \underset{\downarrow}{y}^2(t) = e^{2t}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \underset{\downarrow}{y}^3(t) = e^{2t}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Общее решение системы (6.27) есть

$$\underset{\downarrow}{y}(t) = C_1e^{-5t}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + C_2e^{2t}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + C_3e^{2t}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Теперь рассмотрим общий случай, когда геометрические кратности l_i собственных значений $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ могут быть меньше их алгебраических кратностей n_i, $i = 1, \ldots, k$. Из линейной алгебры известно, что существует базис, в котором матрица A имеет жорданову форму

$$J = \begin{pmatrix} \boxed{J^1} & & & 0 \\ & \boxed{J^2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{J^k} \end{pmatrix},$$

где $J^i = \begin{pmatrix} \boxed{J^i_{p_1}} & & & 0 \\ & \boxed{J^i_{p_2}} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{J^i_{p_{l_i}}} \end{pmatrix}$ – матрица размером $n_i \times n_i$, причём количество клеток в J^i равно геометрической кратности l_i собственного значения λ_i, а $J^i_{p_j} = \big(\lambda_i\big)$ – матрица размером 1×1, если $p_j = 1$ и

$$J^i_{p_j} = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & & 0 \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_i & 1 \\ 0 & & & & \lambda_i \end{pmatrix}$$ – матрица размером $p_j \times p_j$, если $p_j > 1$,

$p_1 + \cdots + p_{l_i} = n_i$.

Этот базис называется жордановым базисом. Он является объединением циклических базисов $\left\{\overrightarrow{h}^{1,i}_j, \ldots, \overrightarrow{h}^{p_j,i}_j\right\}$, отвечающих клеткам $\left\{J^i_{p_j}\right\}$, $i = 1, \ldots, k$, $j = 1, \ldots, l_i$, которые находятся из условий

$$A\underset{\downarrow}{h}^{1,i}_j = \lambda_i \underset{\downarrow}{h}^{1,i}_j,\ A\underset{\downarrow}{h}^{2,i}_j = \lambda_i \underset{\downarrow}{h}^{2,i}_j + \underset{\downarrow}{h}^{1,i}_j, \ldots, A\underset{\downarrow}{h}^{p_j,i}_j = \lambda_i \underset{\downarrow}{h}^{p_j,i}_j + \underset{\downarrow}{h}^{p_j-1,i}_j.$$

Подробнее о нахождении жорданова базиса см., например, [1].

Теорема 6.14. *Пусть* $\bigcup\limits_{i=1}^{k}\bigcup\limits_{j=1}^{l_i}\left\{\overrightarrow{h}^{1,i}_j, \ldots, \overrightarrow{h}^{p_j,i}_j\right\}$ *– жорданов базис матрицы A. Для каждого циклического базиса* $\left\{\overrightarrow{h}^{1,i}, \ldots, \overrightarrow{h}^{p_j,i}\right\}$ *(нижний индекс j* *для краткости опускаем) введём серию вектор-функций*

$$\underset{\downarrow}{y}^{1,i} = \underset{\downarrow}{h}^{1,i} e^{\lambda_i t},$$
$$\underset{\downarrow}{y}^{2,i} = \left(\frac{t}{1!}\underset{\downarrow}{h}^{1,i} + \underset{\downarrow}{h}^{2,i}\right) e^{\lambda_i t},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\underset{\downarrow}{y}^{p_j,i} = \left(\frac{t^{p_j-1}}{(p_j-1)!}\underset{\downarrow}{h}^{1,i} + \frac{t^{p_j-2}}{(p_j-2)!}\underset{\downarrow}{h}^{2,i} + \dots + \underset{\downarrow}{h}^{p_j,i}\right) e^{\lambda_i t}.$$

Тогда совокупность этих вектор-функций образует ФСР системы (6.22).

Доказательство. Всего этих вектор-функций n штук. Покажем, что они действительно являются решениями системы (6.22), то есть при подстановке в систему превращают её в тождество. Имеем

$$\underset{\downarrow}{\dot y}^{1,i} \equiv \frac{d}{dt}\Big(\underset{\downarrow}{h}^{1,i} e^{\lambda_i t}\Big) = \lambda_i \underset{\downarrow}{h}^{1,i} e^{\lambda_i t} = \Big(A\underset{\downarrow}{h}^{1,i}\Big) e^{\lambda_i t} = A\Big(\underset{\downarrow}{h}^{1,i} e^{\lambda_i t}\Big) = A\underset{\downarrow}{y}^{1,i}.$$

Таким образом, $\overrightarrow{y}^{\,1,i}$ – решение системы (6.22). Аналогично

$$\underset{\downarrow}{\dot y}^{s,i} \equiv \frac{d}{dt}\left[\left(\frac{t^{s-1}}{(s-1)!}\underset{\downarrow}{h}^{1,i} + \frac{t^{s-2}}{(s-2)!}\underset{\downarrow}{h}^{2,i} + \dots + \underset{\downarrow}{h}^{s,i}\right) e^{\lambda_i t}\right] =$$
$$= \left(\frac{t^{s-2}}{(s-2)!}\underset{\downarrow}{h}^{1,i} + \frac{t^{s-3}}{(s-3)!}\underset{\downarrow}{h}^{2,i} + \dots + \underset{\downarrow}{h}^{s-1,i}\right) e^{\lambda_i t} +$$
$$+\lambda_i \left(\frac{t^{s-1}}{(s-1)!}\underset{\downarrow}{h}^{1,i} + \frac{t^{s-2}}{(s-2)!}\underset{\downarrow}{h}^{2,i} + \dots + \underset{\downarrow}{h}^{s,i}\right) e^{\lambda_i t} =$$
$$= \left[\frac{t^{s-1}}{(s-1)!}\lambda_i \underset{\downarrow}{h}^{1,i} + \frac{t^{s-2}}{(s-2)!}\Big(\underset{\downarrow}{h}^{1,i} + \lambda_i \underset{\downarrow}{h}^{2,i}\Big) + \dots + \Big(\underset{\downarrow}{h}^{s-1,i} + \lambda_i \underset{\downarrow}{h}^{s,i}\Big)\right] e^{\lambda_i t} =$$
$$= \left(\frac{t^{s-1}}{(s-1)!}A\underset{\downarrow}{h}^{1,i} + \frac{t^{s-2}}{(s-2)!}A\underset{\downarrow}{h}^{2,i} + \dots + A\underset{\downarrow}{h}^{s,i}\right) e^{\lambda_i t} =$$
$$= A\left[\left(\frac{t^{s-1}}{(s-1)!}\underset{\downarrow}{h}^{1,i} + \frac{t^{s-2}}{(s-2)!}\underset{\downarrow}{h}^{2,i} + \dots + \underset{\downarrow}{h}^{s,i}\right) e^{\lambda_i t}\right] = A\underset{\downarrow}{y}^{s,i}, \quad s = 2, \dots, p_j.$$

Определитель Вронского предложенной нами системы вектор-функций при $t = 0$ отличен от нуля в силу того, что его столбцы линейно независимы как координаты элементов жорданова базиса. Следовательно, эта система n решений линейно независима и, значит, образует ФСР системы (6.22). Теорема 6.14 доказана. □

Пример 6.7. Решим систему

$$\begin{cases} \dot y_1 = 2y_1 - 2y_2, \\ \dot y_2 = \qquad - \ y_2 + y_3, \\ \dot y_3 = 2y_1 \qquad\quad - y_3. \end{cases} \tag{6.28}$$

Записываем матрицу системы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Составляем и решаем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 1 \\ 2 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} \equiv -\lambda^3 + 3\lambda - 2 \equiv -(\lambda+2)(\lambda-1)^2 = 0.$$

Отсюда $\lambda_1 = -2$, $n_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$, $n_2 = 2$.

Ищем собственный вектор, отвечающий простому собственному значению $\lambda_1 = -2$:

$$(A+2E)\underset{\downarrow}{h} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

здесь $\underset{\downarrow}{h} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$. Решаем эту систему методом Гаусса:

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$\begin{cases} 2\alpha \qquad + \gamma = 0, \\ \qquad \beta + \gamma = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \alpha = -\dfrac{1}{2}\gamma, \\ \beta = \quad -\gamma. \end{cases}$$

Полагая $\gamma = 2$, получаем $\alpha = -1$, $\beta = -2$. Таким образом,

$$\overrightarrow{h}^{1,1} = (-1, -2, 2).$$

Теперь ищем линейно независимые собственные векторы, отвечающие кратному собственному значению $\lambda_2 = 1$:

$$(A-E)\underset{\downarrow}{h} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \underset{\downarrow}{h} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Имеем $\begin{cases} \alpha = 2\beta, \\ \gamma = 2\beta. \end{cases}$ Следовательно, система имеет только одно линейно независимое решение. Например, полагая $\beta = 1$, получаем собственный вектор $(2, 1, 2)$. Таким образом, геометрическая кратность собственного значения

$\lambda_2 = 1$ равна 1. Это означает, что собственному значению $\lambda_2 = 1$ будет отвечать жорданова клетка вида
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Строим циклический базис $\overrightarrow{h}^{\,1,2}$, $\overrightarrow{h}^{\,2,2}$ из условий
$$\begin{aligned} A\underset{\downarrow}{h}^{1,2} &= 1 \cdot \underset{\downarrow}{h}^{1,2}, \\ A\underset{\downarrow}{h}^{2,2} &= 1 \cdot \underset{\downarrow}{h}^{2,2} + \underset{\downarrow}{h}^{1,2}. \end{aligned}$$

Так как $\underset{\downarrow}{h}^{1,2}$ – собственный вектор матрицы A, отвечающий собственному значению $\lambda_2 = 1$, то в качестве него возьмём вектор, найденный выше: $\underset{\downarrow}{h}^{1,2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Для нахождения $\underset{\downarrow}{h}^{2,2}$ решаем неоднородную систему
$$(A - E)\underset{\downarrow}{h}^{2,2} = \underset{\downarrow}{h}^{1,2}$$
или
$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right),$$
отсюда
$$\begin{cases} \alpha - 2\beta \phantom{{}+\gamma} = 2, \\ -2\beta + \gamma = 1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \alpha = 2\beta + 2, \\ \gamma = 2\beta + 1. \end{cases}$$

Выберем $\beta = 0$, тогда $\alpha = 2$, $\gamma = 1$ и, следовательно, $\underset{\downarrow}{h}^{2,2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. В силу теоремы 6.14 ФСР системы (6.28) имеет вид
$$\underset{\downarrow}{y}^1 = e^{-2t}\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \underset{\downarrow}{y}^2 = e^{t}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$
$$\underset{\downarrow}{y}^3 = e^{t}t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + e^{t}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e^{t}\begin{pmatrix} 2t+2 \\ t \\ 2t+1 \end{pmatrix}.$$
Общее решение системы (6.28) есть
$$\underset{\downarrow}{y}(t) = C_1 e^{-2t}\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 e^{t}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_3 e^{t}\begin{pmatrix} 2t+2 \\ t \\ 2t+1 \end{pmatrix}.$$

В заключение заметим, что если среди собственных значений $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ вещественной матрицы A есть комплексные числа, то построенная нами ФСР окажется комплексной. Для того чтобы воспользоваться теоремой 6.8 о переходе от комплексной ФСР к вещественной, надо показать, что в комплексной ФСР каждая комплексная вектор-функция встречается в паре с комплексно-сопряженной к ней вектор-функцией.

Утверждение 6. 7. *Пусть λ_0 – комплексное собственное значение вещественной матрицы A алгебраической кратности k и ему отвечает комплексный собственный вектор $\underset{\downarrow}{h}^0$, тогда $\overline{\lambda}_0$ тоже собственное значение матрицы A (той же алгебраической кратности k), а $\overline{\underset{\downarrow}{h}}^0$ – отвечающий ему собственный вектор.*

Доказательство. Рассмотрим характеристическое уравнение

$$|A-\lambda E| \equiv \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & \dots & a_{1n} \\ & \dots\dots\dots\dots & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Так как все элементы a_{ij}, $i,j = 1,\dots,n$ матрицы A вещественные числа, то после раскрытия определителя получим уравнение n-го порядка относительно λ с некоторыми заданными вещественными коэффициентами

$$P_n(\lambda) \equiv (-1)^n\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0.$$

Так как λ_0 – собственное значение матрицы A алгебраической кратности k, то $P_n(\lambda) = (\lambda-\lambda_0)^k\tilde{P}_{n-k}(\lambda)$, $\tilde{P}_{n-k}(\lambda_0) \neq 0$. Рассмотрим комплексно-сопряжённое уравнение

$$\overline{(-1)^n\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n} = \overline{0}.$$

Учитывая свойства комплексных чисел – $\overline{z_1+z_2} = \overline{z_1}+\overline{z_2}$, $\overline{z_1\cdot z_2} = \overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$ и тот факт, что $\overline{a_i} = a_i$, $i = 1,\dots,n$, получаем

$$P_n(\overline{\lambda}) \equiv (-1)^n\overline{\lambda}^n + a_1\overline{\lambda}^{n-1} + \dots + a_n = 0, \quad \text{или} \quad \left(\overline{\lambda}-\lambda_0\right)^k\tilde{P}_{n-k}(\overline{\lambda}) = 0,$$

а это и означает, что $\overline{\lambda}_0$ – собственное значение матрицы A алгебраической кратности k.

Пусть $\underset{\downarrow}{h}^0$ – собственный вектор, отвечающий собственному значению λ_0, то есть он является решением системы уравнений

$$(A-\lambda_0E)\underset{\downarrow}{h}^0 \equiv \underset{\downarrow}{0}.$$

Рассмотрим комплексно-сопряжённую систему уравнений

$$\overline{(A-\lambda_0E)\underset{\downarrow}{h}^0} \equiv \overline{\underset{\downarrow}{0}}.$$

Учитывая свойства комплексных матриц – $\overline{B+C} = \overline{B}+\overline{C}$, $\overline{B\cdot C} = \overline{B}\cdot\overline{C}$, имеем

$$\overline{(A-\lambda_0E)\underset{\downarrow}{h}^0} = \overline{(A-\lambda_0E)}\cdot\overline{\underset{\downarrow}{h}}^0 \equiv \left(\overline{A}-\overline{\lambda}_0\overline{E}\right)\overline{\underset{\downarrow}{h}}^0 \equiv (A-\overline{\lambda}_0E)\overline{\underset{\downarrow}{h}}^0 \equiv \underset{\downarrow}{0},$$

следовательно, $\overline{\underset{\downarrow}{h}}^0$ – собственный вектор матрицы A, отвечающий собственному значению $\overline{\lambda}_0$. Утверждение 6.7 доказано. $\square$

Следствие 6.4. *Если $\underset{\downarrow}{y}^0 = e^{\lambda_0 t}\underset{\downarrow}{h}^0$ – комплексное решение системы (6.22), отвечающее комплексному собственному значению λ_0, то $\overline{\underset{\downarrow}{y}}^0$ тоже решение системы (6.22), отвечающее собственному значению $\overline{\lambda}_0$, а $\underset{\downarrow}{u}^0 = \operatorname{Re}\underset{\downarrow}{y}^0$ и $\underset{\downarrow}{v}^0 = \operatorname{Im}\underset{\downarrow}{y}^0$ – два вещественных решения этой системы.*

Доказательство. Пусть $\lambda_0 = \alpha + i\beta$, тогда

$$\overline{e^{\lambda_0 t}} = \overline{e^{(\alpha+i\beta)t}} = \overline{e^{\alpha t}\cdot e^{i\beta t}} = \overline{e^{\alpha t}\cdot(\cos\beta t + i\sin\beta t)} =$$
$$= e^{\alpha t}\cdot(\cos\beta t - i\sin\beta t) = e^{\alpha t}\cdot e^{-i\beta t} = e^{(\alpha-i\beta)t} = e^{\overline{\lambda_0}t}.$$

Здесь мы воспользовались формулами Эйлера

$$\begin{aligned} e^{i\varphi} &= \cos\varphi + i\sin\varphi,\\ e^{-i\varphi} &= \cos\varphi - i\sin\varphi. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\overline{\underset{\downarrow}{y}}^0 = \overline{e^{\lambda_0 t}\underset{\downarrow}{h}^0} = \overline{e^{\lambda_0 t}}\cdot\overline{\underset{\downarrow}{h}}^0 = e^{\overline{\lambda_0}t}\overline{\underset{\downarrow}{h}}^0,$$

а это и означает, что $\overline{\underset{\downarrow}{y}}^0$ – решение системы (6.22), отвечающее собственному значению $\overline{\lambda}_0$. Вторая часть следствия вытекает из теоремы 6.8. Следствие доказано. $\square$

В результате мы имеем следующий алгоритм построения вещественной ФСР: из каждой пары комплексно-сопряжённых собственных значений выбираем одно, находим все отвечающие ему линейно независимые комплексные решения системы (6.22), затем берем их вещественные и мнимые части; добавляем к ним (вещественные) решения, отвечающие вещественным собственным значениям. Вещественная ФСР построена.

Пример 6.8. Решим систему

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = 2y_1 + \ \ y_2,\\ \dot{y}_2 = -y_1 + 2y_2. \end{cases} \tag{6.29}$$

Записываем матрицу системы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1\\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Составляем и решаем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1\\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \equiv (2-\lambda)^2 + 1 = 0, \quad \text{отсюда} \quad \lambda_1 = 2+i,\ \lambda_2 = 2-i.$$

Выбираем одно из двух комплексно-сопряжённых значений, например, $\lambda_1 = 2+i$ и ищем отвечающий ему собственный вектор:

$$\begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} \underset{\downarrow}{h} = \underset{\downarrow}{0}.$$

Полагая $\underset{\downarrow}{h} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$, имеем $\begin{cases} -i\alpha + \ \beta = 0 \\ -\alpha - i\beta = 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} \alpha = \dfrac{\beta}{i} = -i\beta \\ \alpha = -i\beta \end{cases}$ следовательно, $\alpha = -i\beta$. Берём $\beta = 1$, тогда $\alpha = -i$ и $\underset{\downarrow}{h}^1 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$. Записываем комплексное решение

$$\underset{\downarrow}{y} = e^{\lambda_1 t}\underset{\downarrow}{h}^1 = e^{(2+i)t}\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} = e^{2t}\cdot e^{it}\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} = e^{2t}\cdot(\cos t + i\sin t)\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= e^{2t}\begin{pmatrix} -i\cos t + \ \sin t \\ \cos t + i\sin t \end{pmatrix} = e^{2t}\begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + ie^{2t}\begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

Берем вещественную и мнимую части этого решения и получаем вещественную ФСР системы (6.29):

$$\underset{\downarrow}{y}^1(t) = e^{2t}\begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, \qquad \underset{\downarrow}{y}^2(t) = e^{2t}\begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

Записываем общее решение системы (6.29):

$$\underset{\downarrow}{y}(t) = C_1 e^{2t}\begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + C_2 e^{2t}\begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

6.7. Показательная функция от матрицы

Пусть $A(t)$ – квадратная матрица порядка n с комплексными элементами $a_{ij}(t)$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$; $t \in \langle a,\ b\rangle$. Напомним некоторые сведения из курса линейной алгебры.

Определение 6.10. Евклидовой нормой матрицы $A(t)$ при каждом $t \in \langle a,\ b\rangle$ называется число

$$\|A(t)\|_2 = \Big(\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}(t)|^2\Big)^{1/2}.$$

Определение 6.11. Пусть $\forall i, j = 1, \ldots, n$ $\lim\limits_{t\to t_0} a_{ij}(t) = \hat{a}_{ij}$. Пусть $\hat{A}$ – матрица с элементами $\hat{a}_{ij}$. Тогда будем говорить, что $\hat{A} = \lim\limits_{t\to t_0} A(t)$.

Аналогично даются определения производной матрицы $A(t)$ и интеграла от $A(t)$.

Определим сходимость матричного ряда.

Определение 6.12. Пусть $A^{(k)} = \left(a_{ij}^{(k)}\right)$, $\hat{A} = (\hat{a}_{ij})$ и $\forall i, j = 1, 2, \ldots, n$ $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{ij}^{(k)} = \hat{a}_{ij}$. Тогда будем говорить, что

$$\hat{A} = \sum_{k=1}^{\infty} A^{(k)}.$$

Аналогично определяются абсолютная сходимость ряда матриц и равномерная сходимость ряда матриц $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A^{(k)}(t)$, зависящих от t. При этом теоремы о непрерывности суммы ряда, о почленном дифференцировании и интегрировании, доказанные в курсе математического анализа для обычных функциональных рядов, остаются справедливыми и для рядов из матриц. Это следует из данных выше определений сходимости рядов из матриц.

Лемма 6.1. *Пусть* $\|A^{(k)}(t)\|_2 \leqslant \alpha_k$, $k = 1, 2, \ldots; t \in \langle a,\ b\rangle$. *Пусть числовой ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ *сходится. Тогда ряд из матриц* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A^{(k)}(t)$ *сходится абсолютно и равномерно на* $\langle a,\ b\rangle$.

Доказательство. $\forall i, j = 1, \ldots, n$, $\forall t \in \langle a,\ b\rangle$ имеем

$$|a_{ij}^{(k)}(t)| \leqslant \|A^{(k)}(t)\|_2 \leqslant \alpha_k.$$

Следовательно, $\forall i, j = 1, \ldots, n$ ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{ij}^{(k)}(t)$ сходятся абсолютно и равномерно на $\langle a,\ b\rangle$. Но тогда абсолютно и равномерно на $\langle a,\ b\rangle$ сходится и ряд из матриц $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A^{(k)}(t)$. □

Лемма 6.2. *Для любой квадратной матрицы* A *и любого* $t_1 > 0$ *ряд из матриц*

$$E + \frac{tA}{1!} + \frac{t^2A^2}{2!} + \cdots + \frac{t^mA^m}{m!} + \cdots \tag{6.30}$$

сходится абсолютно и равномерно на $[-t_1, t_1]$.

Доказательство. $\forall m \geqslant 1$ имеем

$$\left\|\frac{t^mA^m}{m!}\right\|_2 = \frac{|t|^m}{m!}\ \|A^m\|_2 \leqslant \frac{t_1^m}{m!}\,\|A\|_2^m \equiv \alpha_m.$$

Но $\sum\limits_{m=1}^{\infty} \alpha_m = \sum\limits_{m=1}^{\infty} \dfrac{(t_1^m\|A\|_2)^m}{m!} = e^{t_1\|A\|_2} - 1 < \infty$. Поэтому применяя лемму 6.1, получаем, что ряд (6.30) сходится абсолютно и равномерно на отрезке $[-t_1, t_1]$. Лемма 6.2 доказана. □

Определение 6. 13. Показательной функцией e^A матрицы A называется сумма степенного ряда

$$e^A = E + \frac{1}{1!}\,A + \frac{1}{2!}\,A^2 + \cdots + \frac{1}{m!}\,A^m + \cdots\,. \tag{6.31}$$

Таким образом, сумма ряда (6.30) равна e^{tA} и в силу леммы 6.2 показательная функция e^{tA} определена для любых квадратных матриц A и любых $t \in \mathbb{R}$.

Утверждение 6. 8.
Если A, B – две квадратные матрицы порядка n, коммутирующие между собой (то есть $AB = BA$), то

$$e^{A+B} = e^A \cdot e^B.$$

Доказательство. С одной стороны, имеем

$$\begin{aligned} e^A \cdot e^B = \left(E + \frac{1}{1!}\,A + \frac{1}{2!}\,A^2 + \cdots\right)\left(E + \frac{1}{1!}\,B + \frac{1}{2!}\,B^2 + \cdots\right) = \\ = \sum_{k,m=0}^{\infty} c_{km} A^k B^m. \end{aligned} \tag{6.32}$$

С другой стороны, в силу коммутируемости A и B

$$e^{A+B} = E + \frac{1}{1!}(A+B) + \frac{1}{2!}(A+B)^2 + \cdots = \sum_{k,m=0}^{\infty} d_{km} A^k B^m. \tag{6.33}$$

Если A и B числа, то $e^A \cdot e^B = e^{A+B}$, то есть для чисел A и B (A и B – произвольные)

$$\sum_{k,m=0}^{\infty} c_{km} A^k B^m = \sum_{k,m=0}^{\infty} d_{km} A^k B^m.$$

Одна и та же функция не может разлагаться в два различных степенных ряда, поэтому $c_{km} = d_{km}$ для всех k и m.

Если A и B – матрицы, то в выражениях (6.32) и (6.33) числа c_{km} и d_{km} те же, что и для чисел, но тогда выражения (6.32) и (6.33) равны между собой и для матриц. □

Утверждение 6. 9.

$$\frac{d}{dt} e^{tA} = A e^{tA}.$$

Доказательство. Продифференцируем формально почленно ряд (6.30):

$$A + \frac{t}{1!}\,A^2 + \frac{t^2}{2!}\,A^3 + \cdots = A\left(E + \frac{t}{1!}\,A^2 + \frac{t^2}{2!}\,A^3 + \cdots\right) = Ae^{tA}. \tag{6.34}$$

При $t \in [-t_1, t_1]$ в силу леммы 6.2 имеем

$$\left\| \frac{t^m}{m!} A^{m+1} \right\| \leqslant \|A\| \alpha_m, \quad m = 1, 2, \ldots,$$

и ряд $\sum\limits_{m=1}^{\infty} \|A\| \alpha_m$, как доказано в лемме 6.2, сходится, поэтому сходится и ряд в левой части (6.34), причём равномерно на $[-t_1, t_1]$. Таким образом, почленное дифференцирование ряда (6.30) было законным и $\dfrac{d}{dt} e^{tA} = Ae^{tA}$. □

Следствие 6.5. *Матрица $Y(t) \equiv e^{tA}$ является фундаментальной матрицей системы*

$$\underset{\downarrow}{\dot{y}} = A\underset{\downarrow}{y}, \tag{6.35}$$

причём $Y(0) = E$.

Доказательство. Из утверждения 6. 9 следует, что столбцы матрицы $Y(t) \equiv e^{tA}$ являются решениями системы (6.35). Заметим, что из определения e^{tA} (см. (6.30) и (6.31)) вытекает, что $Y(0) = e^{0A} = E$, а следовательно, столбцы матрицы $Y(t)$ линейно независимы. Таким образом, они образуют ФСР системы (6.35). Это и означает по определению, что $Y(t)$ – фундаментальная матрица системы (6.35). □

Следствие 6.6. *Для нахождения матрицы e^{tA} надо построить ФСР системы (6.35) $\underset{\downarrow}{y}^1(t)$, …, $\underset{\downarrow}{y}^n(t)$ такую, что $\underset{\downarrow}{y}^k(0)$ совпадает с вектором $\underset{\downarrow}{e}^k = (0 \ \ldots \ 0 \ 1 \ 0 \ \ldots \ 0)^T$, где 1 стоит на k-ом месте.*

Следствие 6.7. $\det e^{tA} = e^{st}$, *где $s = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$ – след матрицы A.*

Доказательство. В силу теоремы Лиувилля – Остроградского

$$\det e^{tA} = W(t) = W(0)e^{st} = e^{st},$$

поскольку $W(0) = \det E = 1$. □

Следствие 6.5 позволяет находить общее решение линейной однородной системы с постоянными коэффициентами (6.35) с помощью показательной функции от матрицы. Действительно, столбцы показательной функции e^{tA} образуют ФСР системы (6.35), поэтому для построения общего решения системы (6.35) следует взять линейную комбинацию столбцов с произвольными коэффициентами C_1, C_2, …, C_n, то есть общее решение системы (6.35) задаётся формулой

$$\underset{\downarrow}{y_{\text{оо}}} = e^{tA}\underset{\downarrow}{C}, \tag{6.36}$$

где $\overrightarrow{C} = (C_1, \ldots, C_n)$, $C_i \in \mathbb{R}$.

Пример 6.9. *Найдем общее решение линейной однородной системы*

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = 3y_1 + y_2 + y_3, \\ \dot{y}_2 = y_1 + 3y_2, \\ \dot{y}_3 = -y_1 + 3y_3. \end{cases} \tag{6.37}$$

Матрица системы (6.37) равна

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Составим характеристическое уравнение матрицы tA:

$$\begin{vmatrix} 3t-\lambda & t & t \\ t & 3t-\lambda & 0 \\ -t & 0 & 3t-\lambda \end{vmatrix} = (3t-\lambda)^3 + t^2(3t-\lambda) - t^2(3t-\lambda) = (3t-\lambda)^3 = 0.$$

Таким образом, мы имеем одно собственное значение матрицы tA $\lambda_1 = 3t$ кратности 3. Очевидно,

$$\operatorname{rang}(tA - \lambda_1 E) = \operatorname{rang} \begin{pmatrix} 0 & t & t \\ t & 0 & 0 \\ -t & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2,$$

поэтому жорданова форма матрицы tA представляет собой одну жорданову клетку размера 3×3.

Таким образом, минимальный многочлен матрицы tA

$$m_{tA} = (\lambda - 3t)^3.$$

Как известно из курса линейной алгебры, функция от матрицы $f(B)$ вычисляется через интерполяционный многочлен Лагранжа–Сильвестра $r_f(\lambda)$ следующим образом.

> Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ – собственные числа матрицы B. Пусть p_i – минимальный размер жордановой клетки с λ_i на диагонали при приведении матрицы B к жордановой форме, $i = 1, 2, \ldots, k$. Тогда минимальный многочлен матрицы B равен
>
> $$m_B(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{p_1} \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_k)^{p_k}.$$
>
> Положим
>
> $$\psi_i(\lambda) = \frac{m_B(\lambda)}{(\lambda - \lambda_i)^{p_i}}, \quad i = 1, 2, \ldots, k.$$
>
> Тогда
>
> $$r_f(\lambda) = \sum_{i=1}^{k} \psi_i(\lambda) \left[\left.\frac{f(\lambda)}{\psi_i(\lambda)}\right|_{\lambda=\lambda_i} + \left.\left(\frac{f(\lambda)}{\psi_i(\lambda)}\right)'\right|_{\lambda=\lambda_i} \cdot (\lambda - \lambda_i) + \right.$$
> $$\left. + \cdots + \frac{1}{(p_i-1)!} \left.\left(\frac{f(\lambda)}{\psi_i(\lambda)}\right)^{(p_i-1)}\right|_{\lambda=\lambda_i} \cdot (\lambda - \lambda_i)^{p_i - 1} \right].$$

В условиях нашего примера $k = 1$, $\lambda_1 = 3t$, $p_1 = 3$, $m_{tA}(\lambda) = (\lambda - 3t)^3$, $\psi_1(\lambda) = 1$, $f(\lambda) = e^{\lambda}$, $r_f(\lambda) = e^{3t} + e^{3t}(\lambda - 3t) + \dfrac{1}{2}e^{3t}(\lambda - 3t)^2$. Следовательно,

$$e^{At} = e^{3t}\left[E + tA - 3tE + \frac{1}{2}(tA - 3tE)^2\right] =$$

$$= e^{3t}\left[\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0&t&t\\t&0&0\\-t&0&0\end{pmatrix} + \frac{1}{2}t^2\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix}^2\right] =$$

$$= e^{3t}\left[\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0&t&t\\t&0&0\\-t&0&0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0&0&0\\0&t^2/2&t^2/2\\0&-t^2/2&-t^2/2\end{pmatrix}\right] =$$

$$= e^{3t}\begin{pmatrix}1&t&t\\t&1+t^2/2&t^2/2\\-t&-t^2/2&1-t^2/2\end{pmatrix},$$

откуда

$$\underset{\downarrow}{y_{\text{оо}}} = C_1\begin{pmatrix}1\\t\\-t\end{pmatrix}e^{3t} + C_2\begin{pmatrix}t\\1+t^2/2\\-t^2/2\end{pmatrix}e^{3t} + C_3\begin{pmatrix}t\\t^2/2\\1-t^2/2\end{pmatrix}e^{3t}.$$

6.8. Неоднородные системы линейных ОДУ с постоянными коэффициентами

Рассмотрим неоднородную систему линейных ОДУ с постоянными коэффициентами:

$$\underset{\downarrow}{\dot{y}} = A\underset{\downarrow}{y} + \underset{\downarrow}{f}(t), \tag{6.38}$$

$A = (a_{ij})_n^n$, a_{ij} – заданные вещественные числа, $\overrightarrow{f}(t) = (f_1(t), \ldots, f_n(t))$, $f_i(t)$ – заданные непрерывные на промежутке $\langle a,\ b\rangle$ функции.

В п. 6.5 мы доказали, что общее решение неоднородной системы линейных ОДУ есть сумма её частного решения и общего решения соответствующей ей однородной системы

$$\overrightarrow{y}_{\text{он}}(t) = \overrightarrow{y}_{\text{чн}}(t) + \overrightarrow{y}_{\text{оо}}(t).$$

Способы нахождения $\overrightarrow{y}_{\text{оо}}$ однородной системы ОДУ с постоянными коэффициентами приведены в п. 6.6 и в п. 6.7. Универсальным методом нахождения $\overrightarrow{y}_{\text{чн}}$ неоднородной системы линейных ОДУ является метод вариации постоянных, изложенный в п. 6.5. В случае, когда A постоянная матрица, частное решение можно выписать в явном виде.

Теорема 6.15. *Частное решение системы (6.38) может быть найдено по формуле*

$$\underset{\downarrow}{y_{\text{чн}}}(t) = \int\limits_{t_0}^{t} e^{(t-\tau)A}\cdot \underset{\downarrow}{f}(\tau)\,d\tau, \tag{6.39}$$

здесь $t_0 \in \langle a,\ b\rangle$.

Доказательство. Действительно,

$$\frac{d}{dt}\underset{\downarrow}{y}_{\text{чн}} = \frac{d}{dt}\left(\int\limits_{t_0}^{t} e^{(t-\tau)A}\cdot \underset{\downarrow}{f}(\tau)\,d\tau\right) = e^{(t-t)A}\underset{\downarrow}{f}(t) + \int\limits_{t_0}^{t} Ae^{(t-\tau)A}\underset{\downarrow}{f}(\tau)\,d\tau =$$

$$= \underset{\downarrow}{f}(t) + A\int\limits_{t_0}^{t} e^{(t-\tau)A}\underset{\downarrow}{f}(\tau)\,d\tau = \underset{\downarrow}{f}(t) + A\underset{\downarrow}{y}_{\text{чн}}\,.$$

Таким образом, вектор-функция (6.39) – решение системы (6.38). Здесь мы воспользовались формулами дифференцирования функции от матрицы и интеграла с переменным верхним пределом от таких функций. Теорема 6.15 доказана. □

Используя формулу (6.36) для $\underset{\downarrow}{y}_{\text{оо}}$ и формулу (6.39) для $\underset{\downarrow}{y}_{\text{чн}}$, получаем формулу для общего решения неоднородной системы с постоянными коэффициентами

$$\underset{\downarrow}{y}_{\text{он}} = e^{tA}\cdot \underset{\downarrow}{C} + \int\limits_{t_0}^{t} e^{(t-\tau)A}\underset{\downarrow}{f}(\tau)\,d\tau, \tag{6.40}$$

здесь $\underset{\downarrow}{C} = \begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix}$, C_i – произвольные постоянные.

Поставим для системы (6.38) задачу Коши с начальными условиями (6.2):

$$\underset{\downarrow}{y}(t_0) = \underset{\downarrow}{y}^0.$$

Подставляя это начальное условие в (6.40), имеем

$$\underset{\downarrow}{y}^0 = e^{t_0A}\underset{\downarrow}{C}.$$

Умножим это равенство слева на e^{-t_0A} и воспользуемся утверждением 6.8 из п. 6.7. Тогда получим

$$\underset{\downarrow}{C} = e^{-t_0A}\underset{\downarrow}{y}^0.$$

Подставляя найденный вектор-столбец $\underset{\downarrow}{C}$ в формулу (6.40), получаем формулу, задающую решение задачи Коши (6.38), (6.2)

$$\underset{\downarrow}{y}(t) = e^{(t-t_0)A}\underset{\downarrow}{y}^0 + \int\limits_{t_0}^{t} e^{(t-\tau)A}\underset{\downarrow}{f}(\tau)\,d\tau. \tag{6.41}$$

Формула (6.41) называется формулой Коши. Эта формула позволяет получить оценку решения неоднородной системы (6.38) через начальные данные и правую часть. В этой оценке нам понадобится следующее определение нормы матрицы.

Определение 6. 14.

$$\|A\| = \sup_{|\underset{\downarrow}{y}|=1} |A\underset{\downarrow}{y}| = \sup_{|\underset{\downarrow}{y}|=1} \sqrt{(A\underset{\downarrow}{y}, A\underset{\downarrow}{y})}\,.$$

Можно показать, что при таком определении $\|A\| = \sqrt{\lambda_{\max}}$, где $\lambda_{\max}$ – максимальное собственное значение симметричной неотрицательной матрицы $A^T A$, где A^T – матрица, транспонированная к A. В связи с последним равенством данную норму часто называют спектральной нормой матрицы A в отличие от евклидовой нормы $\|A\|_2$, рассмотренной в п. 6.7 (см. определение 6.10).

Из определения нормы матрицы A легко следуют такие её свойства:

$$|A\underset{\downarrow}{y}| \leqslant \|A\||\underset{\downarrow}{y}|, \quad |(A\cdot B)\underset{\downarrow}{y}| = |A(B\underset{\downarrow}{y})| \leqslant \|A\|\cdot|B\underset{\downarrow}{y}| \leqslant \|A\|\cdot\|B\|\cdot|\underset{\downarrow}{y}|,$$

откуда

$$\|A\cdot B\| \leqslant \|A\|\cdot\|B\|,$$

в частности,

$$\|A^n\| \leqslant \|A\|^n \qquad \text{и} \qquad \|e^A\| \leqslant e^{\|A\|}.$$

Утверждение 6. 10. *Для решения задачи (6.38), (6.2) справедливо неравенство*

$$|\underset{\downarrow}{y}(t)| \leqslant \exp\left(|t-t_0|\cdot\|A\|\right)\cdot|\underset{\downarrow}{y}^0| + \frac{\exp\left(|t-t_0|\|A\|\right)-1}{\|A\|}\cdot \max_{\tau\in[t_0,t_1]} |\underset{\downarrow}{f}(\tau)|. \tag{6.42}$$

Доказательство. Из формулы (6.41) следует:

$$|\underset{\downarrow}{y}(t)| \leqslant |e^{(t-t_0)A}\cdot\underset{\downarrow}{y}^0| + \left|\int\limits_{t_0}^{t} |e^{(t-\tau)A}\underset{\downarrow}{f}(\tau)|\,d\tau\right| \leqslant$$

$$\leqslant \|e^{(t-t_0)A}\|\cdot|\underset{\downarrow}{y}^0| + \left|\int\limits_{t_0}^{t} \|e^{(t-\tau)A}\|\cdot|\underset{\downarrow}{f}(\tau)|\,d\tau\right| \leqslant$$

$$\leqslant \exp\left[|t-t_0|\|A\|\right]|\underset{\downarrow}{y}^0| + \max_{\tau\in[t_0,t]}|\underset{\downarrow}{f}(\tau)|\cdot\left|\int\limits_{t_0}^{t} e^{|t-\tau|\|A\|}d\tau\right| =$$

$$= \exp\left[|t-t_0|\cdot\|A\|\right]\cdot|\underset{\downarrow}{y}^0| + \frac{\exp\left[|t-t_0|\cdot\|A\|\right]-1}{\|A\|}\cdot\max_{\tau\in[t_0,t]}|\underset{\downarrow}{f}(\tau)|.$$

Неравенство (6.42) доказано при условии, что $\|A\| \neq 0$, то есть матрица A отлична от нулевой. Если $A = \mathcal{O}$ – нуль-матрица, то решение (6.38), (6.2) запишется в виде:

$$\underset{\downarrow}{y}(t) = \underset{\downarrow}{y}^0 + \int\limits_{t_0}^{t} \underset{\downarrow}{f}(\tau)\, d\tau$$

и его оценка будет такой:

$$|\underset{\downarrow}{y}(t)| \leqslant |\underset{\downarrow}{y}^0| + |t - t_0| \cdot \max_{\tau} |\underset{\downarrow}{f}(\tau)|.$$

Такая же оценка получается из (6.42) предельным переходом при $\|A\| \to 0$. Утверждение 6.10 доказано. $\square$

Рассмотрим пример решения задачи Коши для неоднородной системы по формуле (6.41).

Пример 6.10. *Найти общее решение неоднородной системы*

$$\dot{\underset{\downarrow}{y}} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \underset{\downarrow}{y} + \begin{pmatrix} te^t \\ 1 + e^{2t} \end{pmatrix}. \tag{6.43}$$

1. Найдём e^{tA}, для этого построим фундаментальную матрицу $Y(t)$ соответствующей однородной системы, то есть матрицу, по столбцам которой стоят решения из ФСР, удовлетворяющие условию $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$.

а) Решаем характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 4 - \lambda & -3 \\ 2 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \iff \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0, \ \text{ отсюда } \ \lambda_1 = 1, \ \lambda_2 = 2.$$

б) Находим собственные векторы:

$$\lambda_1 = 1, \ (A - E)\underset{\downarrow}{h} = \underset{\downarrow}{0}, \ \text{ то есть } \ \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда $\underset{\downarrow}{h}^1 = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\lambda_1 = 2, \ (A - 2E)\underset{\downarrow}{h} = \underset{\downarrow}{0}, \ \text{ то есть } \ \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда $\underset{\downarrow}{h}^2 = C_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Общее решение однородной системы запишем в виде

$$\underset{\downarrow}{y}_{\text{оо}}(t) = C_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + C_2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} e^{2t}.$$

Найдём первый столбец e^{tA}:

$$\underset{\downarrow}{y}^1(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = C_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}. \quad \text{Отсюда} \quad C_1 = -2,\ C_2 = 1.$$

Следовательно, $\underset{\downarrow}{y}^1(t) = \begin{pmatrix} 3e^{2t} - 2e^t \\ 2e^{2t} - 2e^t \end{pmatrix}$.

Найдём второй столбец e^{tA}:

$$\underset{\downarrow}{y}^2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = C_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}. \quad \text{Отсюда} \quad C_1 = 3,\ C_2 = -1.$$

Следовательно, $\underset{\downarrow}{y}^2(t) = \begin{pmatrix} 3e^t - 3e^{2t} \\ 3e^t - 2e^{2t} \end{pmatrix}$. Тогда

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} \underset{\downarrow}{y}^1(t) & \underset{\downarrow}{y}^2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3e^{2t} - 2e^t & 3e^t - 3e^{2t} \\ 2e^{2t} - 2e^t & 3e^t - 2e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Найдём частное решение неоднородной системы (6.43). Пусть для краткости $t_0 = 0$, тогда

$$\underset{\downarrow}{y}_{\text{чн}}(t) = \int\limits_0^t e^{(t-\tau)A} \underset{\downarrow}{f}(\tau)\, d\tau,$$

где

$$\underset{\downarrow}{f}(\tau) = \begin{pmatrix} \tau e^{\tau} \\ 1 + e^{2\tau} \end{pmatrix}, \quad e^{(t-\tau)A} = \begin{pmatrix} 3e^{2(t-\tau)} - 2e^{t-\tau} & 3e^{t-\tau} - 3e^{2(t-\tau)} \\ 2e^{2(t-\tau)} - 2e^{t-\tau} & 3e^{t-\tau} - 2e^{2(t-\tau)} \end{pmatrix}.$$

Вычисляя подынтегральное выражение

$$e^{(t-\tau)A} \cdot \underset{\downarrow}{f}(\tau) = \begin{pmatrix} 3 \cdot e^{2t} \cdot \tau e^{-\tau} - 2 \cdot e^t \tau + 3 \cdot e^{t-\tau} - 3e^{2(t-\tau)} + 3e^t e^{\tau} - 3e^{2t} \\ 2e^{2t} \cdot \tau e^{-\tau} - 2e^t \cdot \tau + 3e^{t-\tau} - 2e^{2(t-\tau)} + 3e^t e^{\tau} - 2e^{2t} \end{pmatrix}$$

и интегрируя его покоординатно по отрезку $[0, t]$, получаем

$$\underset{\downarrow}{y}_{\text{чн}}(t) = \begin{pmatrix} -t^2 e^t - 3 \cdot t \cdot e^t(e^t + 1) - 3e^t + \dfrac{9}{2}\, e^{2t} - \dfrac{3}{2} \\ -t^2 \cdot e^t - 2 \cdot t \cdot e^t(e^t + 1) + 4e^{2t} - 2e^t - 2 \end{pmatrix}.$$

Записываем общее решение неоднородной системы (6.43)

$$\underset{\downarrow}{y}_{\text{он}}(t) = C_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + C_2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} e^{2t} + \begin{pmatrix} t^2 \cdot e^t - 3te^t(e^t + 1) + 4{,}5 \cdot e^{2t} - 3e^t - 1{,}5 \\ t^2 \cdot e^t - 2t \cdot e^t(e^t + 1) + 4e^{2t} - 2e^t - 2 \end{pmatrix}.$$

При нахождении частного решения неоднородной системы (6.38) методом вариации постоянных и по формуле (6.39) используется интегрирование (см. примеры 6.4 и 6.10). Однако в случае, когда неоднородности $f_i(t)$ выражаются только через суммы и произведения функций t^m, $e^{\alpha t}$, $\cos \beta t$, $\sin \beta t$, частное решение системы (6.38) можно найти без интегрирования – методом неопределённых коэффициентов, как показывается ниже.

Определение 6.15. Выражение вида

$$e^{\alpha t}\left[\cos\beta t P_m(t) + \sin\beta t\cdot Q_l(t)\right],$$

где $P_m(t) = p_0t^m + p_1t^{m-1} + \cdots + p_m$ и $Q_l(t) = q_0t^l + q_1t^{l-1} + \cdots + q_l$ – многочлены степени m и l соответственно, а α, β – вещественные числа, называется квазимногочленом.

Поставим в соответствие этому квазимногочлену комплексное число $\gamma = \alpha+i\beta$.

Если одно из чисел α или β равно нулю, то квазимногочлен принимает более простой вид:

$$P_m(t)\cos\beta t + Q_l(t)\sin\beta t, \quad \text{если} \quad \alpha = 0,\ \ \beta \neq 0\ \ (\gamma = i\beta)$$

и

$$e^{\alpha t}P_m(t), \quad \text{если} \quad \alpha \neq 0,\ \ \beta = 0\ \ (\gamma = \alpha).$$

А если $\alpha = \beta = 0$ $(\gamma = 0)$, то квазимногочлен становится обычным многочленом $P_m(t)$.

Определение 6.16. Вектор-функция $\overrightarrow{f}(t) = \big(f_1(t), \dots, f_n(t)\big)$, у которой все координаты являются квазимногочленами с одним и тем же числом γ, называется векторным квазимногочленом.

Теорема 6.16. *Рассмотрим неоднородную систему с постоянными коэффициентами, у которой $\overrightarrow{f}(t)$ – векторный квазимногочлен*

$$\underset{\downarrow}{\dot{y}} = A\underset{\downarrow}{y} + \begin{pmatrix} P^{(1)}_{m_1}(t) \\ \vdots \\ P^{(n)}_{m_n}(t)\end{pmatrix} e^{\alpha t}\cos\beta t + \begin{pmatrix} Q^{(1)}_{l_1}(t) \\ \vdots \\ Q^{(n)}_{l_n}(t)\end{pmatrix} e^{\alpha t}\sin\beta t,$$

тогда частное решение этой системы может быть найдено в виде

$$\underset{\downarrow}{y_{\text{чн}}}(t) = \begin{pmatrix} R^{(1)}_{m+s}(t) \\ \vdots \\ R^{(n)}_{m+s}(t)\end{pmatrix} e^{\alpha t}\cos\beta t + \begin{pmatrix} H^{(1)}_{m+s}(t) \\ \vdots \\ H^{(n)}_{m+s}(t)\end{pmatrix} e^{\alpha t}\sin\beta t,$$

где $R^{(i)}_{m+s}(t)$, $H^{(i)}_{m+s}(t)$, $i = 1, \dots, n$ – многочлены степени $m + s$.

Здесь $m = \max(m_1, \dots, m_n, l_1, \dots, l_n)$, s равно нулю, если число $\gamma = \alpha + i\beta$ не является собственным значением матрицы A, и s равно алгебраической кратности γ, если γ – собственное значение матрицы A.

Доказательство этой теоремы см. [6].

Пример 6.11. *Решить систему*

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = 2y_1 + \ \ y_2 + 3t - 2, \\ \dot{y}_2 = \ \ y_1 + 2y_2 + 7. \end{cases} \tag{6.44}$$

Матрица системы (6.44)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

совпадает с матрицей системы (6.26) примера 6.5, поэтому $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1$ и

$$\underset{\downarrow}{y}_{\text{оо}}(t) = C_1 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Правая часть $\underset{\downarrow}{f}(t) = \begin{pmatrix} 3t-2 \\ 7 \end{pmatrix}$ является векторным квазимногочленом с $\gamma = 0$ и $m = \max(1, 0) = 1$. Так как $\gamma = 0$ не собственное значение матрицы A, то $s = 0$ и, значит, $m + s = 1$. Согласно теореме 6.16 ищем частное решение в виде

$$\begin{cases} y_1(t) = at + b, \\ y_2(t) = ct + d \end{cases}$$

(мы учли, что $\cos 0t = 1$, $\sin 0t = 0$, $e^{0t} = 1$). Для нахождения коэффициентов a, b, c и d подставляем y_1 и y_2 в неоднородную систему (6.44):

$$\begin{cases} a = 2(at + b) + ct + d + 3t - 2, \\ c = at + b + 2(ct + d) + 7. \end{cases}$$

Приравнивая коэффициенты при t^0 и t^1 в первом, а затем во втором уравнении, получаем

$$\begin{cases} a = 2b + d - 2, \\ 0 = 2a + c + 3, \\ c = b + 2d + 7, \\ 0 = a + 2c. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим $a = -2$, $b = 2$, $c = 1$, $d = -4$. Таким образом,

$$\underset{\downarrow}{y}_{\text{чн}}(t) = \begin{pmatrix} -2t + 2 \\ t - 4 \end{pmatrix}.$$

Записываем общее решение неоднородной системы (6.44)

$$\underset{\downarrow}{y}_{\text{он}}(t) = \begin{pmatrix} -2t + 2 \\ t - 4 \end{pmatrix} + C_1 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Следующая теорема позволяет распространить предложенный выше способ нахождения частного решения неоднородной системы линейных ОДУ с постоянными коэффициентами на случай, когда $\overrightarrow{f}(t)$ является суммой нескольких квазимногочленов.

Теорема 6. 17 (принцип суперпозиции). *Пусть в системе*

$$\underset{\downarrow}{\dot{y}} = A\underset{\downarrow}{y} + \underset{\downarrow}{f}(t) \tag{6.45}$$

$\underset{\downarrow}{f}(t) = \sum\limits_{j=1}^{m} \underset{\downarrow}{f^j}(t)$, *тогда*

$$\underset{\downarrow}{y_{\text{чн}}} = \sum_{j=1}^{m} \underset{\downarrow}{y^j_{\text{чн}}}, \tag{6.46}$$

где $\underset{\downarrow}{y^j_{\text{чн}}}$ *– частное решение системы*

$$\underset{\downarrow}{\dot{y}} = A\underset{\downarrow}{y} + \underset{\downarrow}{f^j}(t), \quad j = 1, \ldots, m. \tag{6.47}$$

Доказательство. Действительно, подставляя $\overrightarrow{y}_{\text{чн}}$ в виде (6.46) в систему (6.45) и учитывая, что $\overrightarrow{y}^{j}_{\text{чн}}$ являются решениями системы (6.47), получаем тождество

$$\underset{\downarrow}{\dot{y}_{\text{чн}}} = \frac{d}{dt}\Big(\sum_{j=1}^{m} \underset{\downarrow}{y^j_{\text{чн}}}\Big) = \sum_{j=1}^{m} \underset{\downarrow}{\dot{y}^j_{\text{чн}}} = \sum_{j=1}^{m}\Big(A(t)\underset{\downarrow}{y^j_{\text{чн}}} + \underset{\downarrow}{f^j}(t)\Big) =$$
$$= A(t)\Big(\sum_{j=1}^{m} \underset{\downarrow}{y^j_{\text{чн}}}\Big) + \sum_{j=1}^{m} \underset{\downarrow}{f^j}(t) = A(t)\underset{\downarrow}{y_{\text{чн}}} + \underset{\downarrow}{f}(t).$$

Следовательно, $\overrightarrow{y}_{\text{чн}}$ является решением системы (6.45). Теорема 6.17 доказана. $\square$

Пример 6.12. *Решить систему*

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = 2y_1 + y_2 + 3t - 2 - 15\cos 2t, \\ \dot{y}_2 = y_1 + 2y_2 + 7 - 10\sin 2t \end{cases} \tag{6.48}$$

Решение примера. Записываем матрицу A и неоднородность $\underset{\downarrow}{f}(t)$ системы (6.48)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \underset{\downarrow}{f}(t) = \underset{\downarrow}{f^1}(t) + \underset{\downarrow}{f^2}(t),$$

где

$$\underset{\downarrow}{f^1}(t) = \begin{pmatrix} 3t - 2 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \underset{\downarrow}{f^2}(t) = \begin{pmatrix} -15\cos 2t \\ -10\sin 2t \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $\underset{\downarrow}{f}(t)$ является суммой двух векторных квазимногочленов. Согласно теореме 6.16

$$\underset{\downarrow}{y_{\text{он}}}(t) = \underset{\downarrow}{y_{\text{оо}}}(t) + \underset{\downarrow}{y^1_{\text{чн}}} + \underset{\downarrow}{y^2_{\text{чн}}},$$

где $\underset{\downarrow}{y^1_{\text{чн}}}$ и $\underset{\downarrow}{y^2_{\text{чн}}}$ – частные решения неоднородной системы линейных ОДУ с заданной матрицей A и неоднородностями $\underset{\downarrow}{f^1}(t)$ и $\underset{\downarrow}{f^2}(t)$ соответственно.

Матрица A и $\underset{\downarrow}{f}^1(t)$ совпадают с матрицей системы и неоднородностью из предыдущего примера. Поэтому $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1$ и

$$\underset{\downarrow}{y}_{\text{оо}}(t) = C_1 e^{3t}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + C_2 e^t\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}, \quad \underset{\downarrow}{y}^1_{\text{чн}} = \begin{pmatrix}-2t+2\\t-4\end{pmatrix}.$$

Неоднородность $\underset{\downarrow}{f}^2(t)$ является векторным квазимногочленом с $m = \max(0,0) = 0$ и $\gamma = 2i$. Так как $2i$ не собственное значение матрицы A, то $s = 0$, и, значит, $m + s = 0$. Согласно теореме 6.15 ищем $\underset{\downarrow}{y}^2_{\text{чн}}$ в виде

$$\begin{cases} y_1 = a\cos 2t + b\sin 2t,\\ y_2 = c\cos 2t + d\sin 2t.\end{cases}$$

Подставляя y_1 и y_2 в неоднородную систему

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = 2y_1 + \ \ y_2 - 15\cos 2t,\\ \dot{y}_2 = \ \ y_1 + 2y_2 - 10\sin 2t,\end{cases}$$

получаем равенства

$$\begin{cases} -2a\sin 2t + 2b\cos 2t = 2a\cos 2t + 2b\sin 2t + c\cos 2t + d\sin 2t - 15\cos 2t,\\ -2c\sin 2t + 2d\cos 2t = a\cos 2t + b\sin 2t + 2c\cos 2t + 2d\sin 2t - 10\sin 2t.\end{cases}$$

Группируя слагаемые с $\sin 2t$ и $\cos 2t$, имеем

$$\begin{cases} (-2a - 2b - d)\sin 2t + (2b - 2a - c + 15)\cos 2t = 0,\\ (-2c - b - 2d + 10)\sin 2t + (2d - a - 2c)\cos 2t = 0\end{cases}$$

В силу линейной независимости функций $\sin 2t$ и $\cos 2t$ эти равенства возможны при любых t только тогда, когда коэффициенты при $\sin 2t$ и $\cos 2t$ в обоих уравнениях равны нулю, то есть

$$\begin{cases} -2a - 2b - d = 0,\\ 2b - 2a - c + 15 = 0,\\ -2c - b - 2d + 10 = 0,\\ 2d - a - 2c = 0.\end{cases}$$

Решая эту систему, находим $a = 2$, $b = -4$, $c = 3$, $d = 4$, следовательно,

$$\underset{\downarrow}{y}^2_{\text{чн}} = \begin{pmatrix}2\cos 2t - 4\sin 2t\\3\cos 2t + 4\sin 2t\end{pmatrix}.$$

Складывая $\underset{\downarrow}{y}_{\text{оо}}$, $\underset{\downarrow}{y}^1_{\text{чн}}$ и $\underset{\downarrow}{y}^2_{\text{чн}}$, получаем общее решение системы (6.48):

$$\begin{gathered}\underset{\downarrow}{y}_{\text{он}}(t) \equiv \begin{pmatrix}y_1(t)\\y_2(t)\end{pmatrix} = C_1 e^{3t}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + C_2 e^t\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} +\\ + \begin{pmatrix}-2t+2\\t-4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\cos 2t - 4\sin 2t\\3\cos 2t + 4\sin 2t\end{pmatrix}.\end{gathered} \tag{6.49}$$

В заключение рассмотрим задачу Коши для системы линейных ОДУ с постоянными коэффициентами. Пусть, например, нужно найти решение системы (6.48), удовлетворяющее начальным условиям

$$\begin{cases} y_1(0) = 1, \\ y_2(0) = 0. \end{cases} \tag{6.50}$$

Подставляем эти начальные условия в общее решение (6.49) системы (6.48)

$$\begin{cases} 1 = C_1 - C_2 + 2 + 2, \\ 0 = C_1 + C_2 - 4 + 3. \end{cases}$$

Отсюда $C_1 = -1$, $C_2 = 2$. Записываем решение задачи Коши (6.48), (6.50)

$$\underset{\downarrow}{y} = -e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2e^{t}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2t+2 \\ t-4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\cos 2t - 4\sin 2t \\ 3\cos 2t + 4\sin 2t \end{pmatrix}.$$

Глава VII.

Линейные ОДУ высокого порядка

7. 1. Сведение к системе линейных ОДУ. Теорема существования и единственности решения задачи Коши

Определение 7. 1. Уравнение вида

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(t)y = f(t), \tag{7.1}$$

где $a_1(t), \ \ldots, \ a_n(t), \ f(t)$ – заданные на промежутке $\langle a, \ b\rangle$, где $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, функции, называется **линейным ОДУ** n**-го порядка**, **однородным**, если $f(t) \equiv 0$ на $\langle a, \ b\rangle$, и **неоднородным** в противном случае.

В дальнейшем предполагаем, что на рассматриваемом промежутке $\langle a, \ b\rangle$ функции $a_i(t), \ f(t)$ непрерывны и вещественны.

Напомним (см. п 1.2), что для уравнения n-го порядка задача Коши ставится следующим образом:

Требуется найти решение уравнения (7.1) $y(t) \in C^n(\langle a, \ b\rangle)$, *удовлетворяющее начальным условиям*

$$y\bigl(t_0\bigr) = y_1^0, \quad y'\bigl(t_0\bigr) = y_2^0, \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}\bigl(t_0\bigr) = y_n^0, \tag{7.2}$$

где $t_0 \in \langle a, \ b\rangle$ *– заданная точка,* $y_1^0, \ \ldots, \ y_n^0$ *– заданные вещественные числа.*

Напомним (см. п 1.1), что с помощью замены

$$y_1 = y, \quad y_2 = y', \quad \ldots, \quad y_n = y^{(n-1)}$$

уравнения (7.1) приводится к системе линейных ОДУ

$$\begin{cases} \dot y_1 = y_2, \\ \dot y_2 = y_3, \\ \ldots\ldots\ldots \\ \dot y_{n-1} = y_n, \\ \dot y_n = -a_1(t)y_n - \ldots - a_n(t)y_1 + f(t) \end{cases} \tag{7.3}$$

или в векторной форме
$$\underset{\downarrow}{\dot{y}} = A(t)\underset{\downarrow}{y} + \underset{\downarrow}{f}(t), \tag{7.4}$$
здесь
$$\underset{\downarrow}{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}, \qquad \underset{\downarrow}{f}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ f(t) \end{pmatrix},$$
$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n(t) & -a_{n-1}(t) & -a_{n-2}(t) & \dots & -a_1(t) \end{pmatrix}.$$
Начальное условие (7.2) для уравнения (7.1) для системы (7.4) перепишется в виде
$$y_1\big(t_0\big) = y_1^0, \quad y_2\big(t_0\big) = y_2^0, \quad \dots, \quad y_n\big(t_0\big) = y_n^0. \tag{7.5}$$

Таким образом, задача Коши (7.1), (7.2) для линейного ОДУ n-го порядка сводится к задаче Коши (7.4), (7.5) для системы линейных ОДУ. Используя этот результат, сформулируем и докажем теорему существования и единственности решения задачи Коши для линейного ОДУ высокого порядка.

Теорема 7. 1. *Пусть $a_i(t),\ f(t) \in C\left(\langle a,\ b\rangle\right)$. Тогда при любых начальных условиях $y_1^0,\ \dots,\ y_n^0$ задача Коши* (7.1), (7.2) *имеет единственное вещественное решение $\varphi(t)$, определенное на всем промежутке $\langle a,\ b\rangle$.*

Доказательство. Сведем задачу Коши (7.1), (7.2) к задаче Коши (7.4), (7.5). Элементы матрицы $A(t)$ и $\overrightarrow{f}(t)$ системы (7.4) выражаются через коэффициенты $a_i(t),\ f(t)$ уравнения (7.1), следовательно, они непрерывны. В силу теоремы 6.1 задача Коши (7.4), (7.5) имеет единственное решение, определенное на всем промежутке $\langle a,\ b\rangle$, а следовательно, и задача Коши (7.1), (7.2) имеет единственное решение, определенное на всем промежутке $\langle a,\ b\rangle$.

Теорема 7. 1 доказана. □

Замечание 7. 1. Аналогичная теорема имеет место и в случае, когда $\varphi(t)$ – комплексное решение уравнения (7.1) с вещественными коэффициентами $a_i(t)$, комплексной функцией $f(t)$ и комплексными начальными условиями.

В дальнейшем левую часть уравнения (7.1) будем обозначать через $L(y)$:
$$L(y) \equiv y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(t)y.$$

Заметим, что L – это оператор, который функции $y \in C^n\left(\langle a,\ b\rangle\right)$ ставит в соответствие функцию $L(y) \in C\left(\langle a,\ b\rangle\right)$. Покажем, что L является линейным оператором.

$$
\begin{gathered}
L\big(\alpha\varphi_1+\beta\varphi_2\big)= \\
=\big(\alpha\varphi_1+\beta\varphi_2\big)^{(n)}+a_1(t)\big(\alpha\varphi_1+\beta\varphi_2\big)^{(n-1)}+\ldots+a_n(t)\big(\alpha\varphi_1+\beta\varphi_2\big)= \\
=\alpha\varphi_1^{(n)}+\beta\varphi_2^{(n)}+a_1(t)\alpha\varphi_1^{(n-1)}+a_1(t)\beta\varphi_2^{(n-1)}+\ldots+a_n(t)\,\alpha\varphi_1+a_n(t)\,\beta\varphi_2= \\
=\alpha\left(\varphi_1^{(n)}+a_1(t)\varphi_1^{(n-1)}+\ldots+a_n(t)\varphi_1\right)+ \\
+\beta\left(\varphi_1^{(n)}+a_1(t)\varphi_1^{(n-1)}+\ldots+a_n(t)\varphi_1\right)=\alpha L(\varphi_1)+\beta L(\varphi_2).
\end{gathered}
$$

Оператор L называется **линейным дифференциальным оператором порядка** n.

Для уравнения (7.1) имеют место свойства, аналогичные свойствам, доказанным нами для систем линейных уравнений.

7.2. Однородное линейное ОДУ высокого порядка

Рассмотрим однородное линейное ОДУ n-го порядка

$$
L(y)\equiv y^{(n)}+a_1(t)y^{(n-1)}+\ldots+a_n(t)y=0, \tag{7.6}
$$

$a_i(t)\in C\left(\langle a,\ b\rangle\right)$.

Утверждение 7.1. *Множество вещественных (комплексных) решений уравнения* (7.6) *образует вещественное (комплексное) линейное пространство*

Доказательство. Надо показать, что для любых двух решений y_1 и y_2 уравнения (7.6) их линейная комбинация $\alpha y_1+\beta y_2$ также является решением уравнения (7.6) ($\alpha,\ \beta\in\mathbb{R}$, если рассматривается множество вещественных решений, и $\alpha,\ \beta\in\mathbb{C}$, если рассматривается множество комплексных решений).

Так как $L(y_1)=0$ и $L(y_2)=0$, то в силу линейности оператора L имеем

$$
L\big(\alpha y_1+\beta y_2\big)=\alpha L(y_1)+\beta L(y_2)=0+0=0.
$$

Следовательно, $\alpha y_1+\beta y_2$ – решение уравнения (7.6).

Утверждение 7.1 доказано. $\square$

Ниже будем изучать свойства вещественных решений уравнения (7.6) (для комплексных решений все свойства сохраняются, доказательства не меняются).

Утверждение 7.2. *Если в некоторой точке* $t_0\in\langle a,\ b\rangle$ *решение уравнения* (7.6) $y=\varphi(t)$ *принимает нулевое значение вместе со своими производными до* $(n-1)$ *порядка включительно*

$$
\varphi(t_0)=\varphi'(t_0)=\ldots=\varphi^{(n-1)}(t_0)=0,
$$

то $\varphi(t)\equiv 0$ *на* $\langle a,\ b\rangle$.

Доказательство. Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} L(y) = 0, \\ y(t_0) = y\,'(t_0) = \ldots = y^{(n-1)}(t_0) = 0. \end{cases}$$

Заметим, что $y(t) = 0$ и $y(t) = \varphi(t)$ являются решениями этой задачи Коши на $\langle a,\ b\rangle$. В силу единственности решения задачи Коши $\varphi(t) \equiv 0$ на $\langle a,\ b\rangle$.

Утверждение 7.2 доказано. □

Определение 7. 2. Функции $\varphi_1,\ \ldots,\ \varphi_m :\ \ \langle a,\ b\rangle \mapsto \mathbb{R}$ называются **линейно зависимыми на** $\langle a,\ b\rangle$, если существуют вещественные числа, не все равные нулю, такие, что при всех $t \in \langle a,\ b\rangle$

$$\alpha_1\varphi_1(t) + \ldots + \alpha_m\varphi_m(t) \equiv 0.$$

В противном случае функции $\varphi_1,\ \ldots,\ \varphi_m$ называются **линейно независимыми на** $\langle a,\ b\rangle$.

Пример 7. 1. *Доказать, что функции* $\varphi_1(t) = t+1,\ \varphi_2(t) = t,\ \varphi_3(t) = 2t-3$ *линейно зависимы на* $\big(-\infty,\ +\infty\big)$.

Составляем линейную комбинацию этих функций и приравниваем ее к нулю:

$$\alpha_1(t+1) + \alpha_2\, t + \alpha_3(2t-3) = 0.$$

Группируя слагаемые с одинаковыми степенями t, получаем

$$\big(\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3\big)t + \big(\alpha_1 - 3\alpha_3\big) = 0.$$

Это равенство возможно при любом $t \in \big(-\infty,\ +\infty\big)$, если

$$\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \quad \text{и} \quad \alpha_1 - 3\alpha_3 = 0.$$

Отсюда $\alpha_1 = 3\alpha_3$, $\alpha_2 = -5\alpha_3$. Выбираем $\alpha_3 = 1$, тогда $\alpha_1 = 3$, $\alpha_2 = -5$. В результате получим нетривиальную линейную комбинацию функций $\varphi_1,\ \varphi_2,\ \varphi_3$, равную нулю, а именно

$$3\cdot(t+1) + (-5)\cdot t + 1\cdot(2t-3) = 0.$$

Следовательно, эти функции линейно зависимы на $\big(-\infty,\ +\infty\big)$.

Утверждение 7. 3. *Любые* $(n+1)$ *решений уравнения* (7.6) *линейно зависимы на* $\langle a,\ b\rangle$.

Доказательство. Пусть $y_1(t),\ \ldots,\ y_{n+1}(t)$ – решения уравнения (7.6) на $\langle a,\ b\rangle$.

Составим их линейную комбинацию и приравняем ее к нулю:

$$\alpha_1 y_1(t) + \ldots + \alpha_{n+1} y_{n+1}(t) = 0.$$

Последовательно дифференцируем это равенство $(n-1)$ раз (это можно сделать, так как $y_1(t),\ \ldots,\ y_{n+1}(t)$ – решения уравнения (7.6) и, следовательно, они n раз дифференцируемы). В результате получим следующую систему n уравнений

$$\begin{cases} \alpha_1 y_1(t) + \ldots + \alpha_{n+1} y_{n+1}(t) = 0, \\ \alpha_1 y_1'(t) + \ldots + \alpha_{n+1} y_{n+1}'(t) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_1 y_1^{(n-1)}(t) + \ldots + \alpha_{n+1} y_{n+1}^{(n-1)}(t) = 0. \end{cases}$$

Зафиксируем $t = t_0 \in \langle a,\ b\rangle$ в этой системе уравнений.

$$\begin{cases} \alpha_1 y_1(t_0) + \ldots + \alpha_{n+1} y_{n+1}(t_0) = 0, \\ \alpha_1 y_1'(t_0) + \ldots + \alpha_{n+1} y_{n+1}'(t_0) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_1 y_1^{(n-1)}(t_0) + \ldots + \alpha_{n+1} y_{n+1}^{(n-1)}(t_0) = 0. \end{cases}$$

Относительно переменных $\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_{n+1}$ это однородная система линейных алгебраических уравнений, у которой число уравнений (n) меньше числа неизвестных $(n+1)$, поэтому она имеет бесконечное множество нетривиальных решений.

Пусть $\tilde{\alpha}_1,\ \ldots,\ \tilde{\alpha}_{n+1}$ – одно из них $(|\tilde{\alpha}_1| + \ldots + |\tilde{\alpha}_{n+1}| \neq 0)$. Рассмотрим функцию

$$\varphi(t) = \tilde{\alpha}_1 y_1(t) + \ldots + \tilde{\alpha}_{n+1} y_{n+1}(t).$$

Эта функция является решением уравнения (7.6) в силу утверждения 7.1. Кроме того, $\varphi(t_0) = \varphi'(t_0) = \ldots = \varphi^{(n-1)}(t_0) = 0$. Тогда по утверждению 7.2 $\varphi(t) \equiv 0$ на $\langle a,\ b\rangle$, а это и означает линейную зависимость функций $y_1(t),\ \ldots,\ y_{n+1}(t)$ на $\langle a,\ b\rangle$.

Утверждение 7.3 доказано. □

Утверждение 7.4. *У уравнения* (7.6) *на* $\langle a,\ b\rangle$ *существует* n *линейно независимых решений.*

Доказательство. Пусть $y_1(t),\ \ldots,\ y_n(t)$ – n решений уравнения (7.6), удовлетворяющих следующим начальным условиям

$$\begin{cases} y_1(t_0) = 1 & y_1'(t_0) = 0 & \ldots & y_1^{(n-1)}(t_0) = 0, \\ y_2(t_0) = 0 & y_2'(t_0) = 1 & \ldots & y_2^{(n-1)}(t_0) = 0, \\ \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ y_n(t_0) = 0 & y_n'(t_0) = 0 & \ldots & y_n^{(n-1)}(t_0) = 1, \end{cases} \tag{7.7}$$

$t_0 \in \langle a,\ b\rangle$ (в силу теоремы 7.1 такие решения существуют).

Покажем, что они линейно независимы. Составим их линейную комбинацию и приравняем ее к нулю:

$$\alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t) + \ldots + \alpha_n y_n(t) = 0, \qquad t \in \langle a,\ b\rangle.$$

Последовательно дифференцируем это равенство $n-1$ раз:

$$\alpha_1 y_1'(t) + \alpha_2 y_2'(t) + \ldots + \alpha_n y_n'(t) = 0,$$
$$\ldots$$
$$\alpha_1 y_1^{(n-1)}(t) + \alpha_2 y_2^{(n-1)}(t) + \ldots + \alpha_n y_n^{(n-1)}(t) = 0.$$

Положим $t = t_0$. С учетом начальных условий (7.7) получаем

$$\begin{cases} \alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot 0 + \ldots + \alpha_n \cdot 0 = 0, \\ \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 1 + \ldots + \alpha_n \cdot 0 = 0, \\ \qquad\qquad \cdots\cdots\cdots \\ \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 + \ldots + \alpha_n \cdot 1 = 0. \end{cases}$$

Отсюда $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$. Следовательно, $y_1(t), \ \ldots, \ y_n(t)$ линейно независимы на $\langle a, \ b\rangle$.

Утверждение 7.4 доказано. □

Из утверждений 7. 3 и 7. 4 вытекает теорема.

Теорема 7. 2. *Размерность пространства решений однородного линейного ОДУ n-го порядка равна n.*

Определение 7. 3. Любые n линейно независимых и упорядоченных решений однородного линейного ОДУ n-го порядка называются **фундаментальной системой решений (ФСР) этого ОДУ**.

Так как в n–мерном пространстве любые n линейно независимых элементов образуют базис, то ФСР является базисом в пространстве решений однородного линейного ОДУ n–го порядка. Из определения базиса вытекает теорема об общем решении однородного линейного ОДУ.

Теорема 7. 3. *Пусть $y_1(t), \ \ldots, \ y_n(t)$ – ФСР уравнения* (7.6), *тогда общее решение этого уравнения есть*

$$y_{OO}(t) = C_1 y_1(t) + \ldots + C_n y_n(t), \tag{7.8}$$

где $C_1, \ \ldots, \ C_n$ – произвольные вещественные постоянные.

Определение 7. 4. Пусть $\varphi_1(t), \ \ldots, \ \varphi_n(t) \in C^{n-1}(\langle a, \ b\rangle)$ – произвольная система функций.

Определителем Вронского этой системы называется определитель

$$W(t) = \begin{vmatrix} \varphi_1(t) & \ldots & \varphi_n(t) \\ \varphi_1'(t) & \ldots & \varphi_n'(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_1^{(n-1)}(t) & \ldots & \varphi_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}.$$

Утверждение 7. 5. *Если $\varphi_1(t), \ \ldots, \ \varphi_n(t) \in C^{n-1}(\langle a, \ b\rangle)$ линейно зависимы на $\langle a, \ b\rangle$, то $W(t) \equiv 0$ на $\langle a, \ b\rangle$.*

Доказательство. Пусть $\varphi_1(t),\ \ldots,\ \varphi_n(t) \in C^{n-1}(\langle a,\ b\rangle)$ линейно зависимы на $\langle a,\ b\rangle$, т.е. существуют вещественные числа $\tilde{\alpha}_1,\ \ldots,\ \tilde{\alpha}_n$, не все равные нулю, такие, что при всех $t \in \langle a,\ b\rangle$

$$\tilde{\alpha}_1\varphi_1(t) + \ldots + \tilde{\alpha}_n\varphi_n(t) \equiv 0.$$

Последовательно дифференцируем это равенство $(n-1)$ раз:

$$\begin{cases} \tilde{\alpha}_1\varphi_1(t) + \ldots + \tilde{\alpha}_n\varphi_n(t) \equiv 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \tilde{\alpha}_1\varphi_1^{(n-1)}(t) + \ldots + \tilde{\alpha}_n\varphi_n^{(n-1)}(t) \equiv 0. \end{cases}$$

Введем вектор-функции

$$\underset{\downarrow}{\varphi}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \ldots \\ \varphi_1^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}, \qquad \ldots \qquad \underset{\downarrow}{\varphi}^{(n)}(t) = \begin{pmatrix} \varphi_n(t) \\ \ldots \\ \varphi_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}.$$

С учетом записанных выше тождеств имеем

$$\tilde{\alpha}_1\underset{\downarrow}{\varphi}^{(1)}(t) + \ldots + \tilde{\alpha}_n\underset{\downarrow}{\varphi}^{(n)}(t) \equiv \underset{\downarrow}{0}.$$

Следовательно, эти вектор-функции линейно зависимы. Тогда по утверждению 6.6 определитель Вронского этой системы вектор-функций

$$\left|\underset{\downarrow}{\varphi}^{(1)}(t)\ \ldots\ \underset{\downarrow}{\varphi}^{(n)}(t)\right| = \begin{vmatrix} \varphi_1(t) & \ldots & \varphi_n(t) \\ \varphi_1'(t) & \ldots & \varphi_n'(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_1^{(n-1)}(t) & \ldots & \varphi_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}$$

равен нулю на $\langle a,\ b\rangle$. А так как он совпадает с определителем Вронского функций $\varphi_1(t),\ \ldots,\ \varphi_n(t)$, то утверждение 7.5 доказано. $\square$

Следствие 7.1. *Если $W(t) \not\equiv 0$ на $\langle a,\ b\rangle$, то функции $\varphi_1(t),\ \ldots,\ \varphi_n(t)$ линейно независимы на $\langle a,\ b\rangle$.*

Доказательство. Будем доказывать от противного. Предположим, что функции $\varphi_1(t),\ \ldots,\ \varphi_n(t)$ линейно зависимы на $\langle a,\ b\rangle$, тогда по утверждению 7. 5 $W(t) \equiv 0$ на $\langle a,\ b\rangle$. Получили противоречие. Следовательно, $\varphi_1(t),\ \ldots,\ \varphi_n(t)$ линейно независимы на $\langle a,\ b\rangle$.

Следствие доказано. $\square$

Замечание 7.2. Если $W(t) \equiv 0$ на $\langle a,\ b\rangle$, то функции, входящие в $W(t)$, могут оказаться как линейно зависимыми, так и линейно независимыми на $\langle a,\ b\rangle$.

Пример 7.2. Рассмотрим функции $\varphi_1(t) = t^2$, $\varphi_2(t) = t\big|t\big|$. Очевидно, они линейно независимыми на $\big(-\infty,\ +\infty\big)$, а

$$W(t) = \begin{vmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t^2 & t\big|t\big| \\ 2t & 2\big|t\big| \end{vmatrix} \equiv 0 \qquad \text{на} \quad \big(-\infty,\ +\infty\big)$$

(мы учли, что $\big(t\big|t\big|\big)' = 2\big|t\big|$).

Подчеркнем, что теоремы 7.4, 7.5, 7.6, приведенные ниже, относятся к определителю Вронского не произвольной системы функций, а системы решений однородного линейного ОДУ n-го порядка.

Теорема 7.4. *Решения уравнения* (7.6) $y_1(t),\ \ldots,\ y_n(t)$ *линейно зависимы на* $\langle a,\ b\rangle$ *тогда и только тогда, когда существует* $t_0 \in \langle a,\ b\rangle$, *в которой* $W(t_0) = 0$.

Доказательство. **Необходимость.** Пусть $y_1(t),\ \ldots,\ y_n(t)$ – решения уравнения (7.6), тогда по утверждению 7.5 $W(t) \equiv 0$ на $\langle a,\ b\rangle$, в том числе при некотором $t_0 \in \langle a,\ b\rangle$ $W(t_0) = 0$.

Достаточность. Пусть $y_1(t),\ \ldots,\ y_n(t)$ – решения уравнения (7.6) и $W(t_0) = 0$, $t_0 \in \langle a,\ b\rangle$.

Рассмотрим следующую однородную систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} \alpha_1 y_1(t_0) + \ldots + \alpha_n y_n(t_0) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots \\ \alpha_1 y_1^{(n-1)}(t_0) + \ldots + \alpha_n y_n^{(n-1)}(t_0) = 0. \end{cases} \qquad (7.9)$$

Определитель этой системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_1(t_0) & \ldots & y_n(t_0) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)}(t_0) & \ldots & y_n^{(n-1)}(t_0) \end{vmatrix}$$

совпадает с определителем Вронского $W(t_0)$. Следовательно, он равен нулю. Известно, что в этом случае система (7.9) имеет нетривиальное решение. Обозначим его $\tilde\alpha_1,\ \tilde\alpha_2,\ \ldots,\ \tilde\alpha_n$ $\big(\big|\tilde\alpha_1\big| + \ldots + \big|\tilde\alpha_n\big| \neq 0\big)$.

Введем функцию

$$\varphi(t) = \tilde\alpha_1 y_1(t) + \ldots + \tilde\alpha_n y_n(t).$$

Эта функция является решением уравнения (7.6) в силу утверждения 7.1. Кроме того,

$$\varphi(t_0) = \varphi'(t_0) = \ldots = \varphi^{(n-1)}(t_0) = 0.$$

Тогда по утверждению 7.2 $\varphi(t) \equiv 0$ на $\langle a,\ b\rangle$, то есть

$$\tilde\alpha_1 y_1(t) + \ldots + \tilde\alpha_n y_n(t) \equiv 0 \qquad \forall t \in \langle a,\ b\rangle,$$

где $\left|\tilde{\alpha}_1\right| + \ldots + \left|\tilde{\alpha}_n\right| \neq 0$.

Следовательно, $y_1, \ \ldots, \ y_n$ линейно зависимы на $\langle a, \ b\rangle$.

Теорема 7. 4 доказана. □

Теорема 7. 5 (критерий линейной независимости решений однородного линейного ОДУ)**.** *Решения уравнения* (7.6) $y_1, \ \ldots, \ y_n$ *линейно независимы на промежутке* $\langle a, \ b\rangle$ *тогда и только тогда, когда существует* $t_0 \in \langle a, \ b\rangle$, *в которой* $W(t_0) \neq 0$.

Доказательство. **Необходимость.** Будем доказывать от противного. Пусть решения уравнения (7.6) $y_1, \ \ldots, \ y_n$ линейно независимы на $\langle a, \ b\rangle$, но $W(t_0) \equiv 0$ на $\langle a, \ b\rangle$. Тогда по теореме 7. 4 решения $y_1, \ \ldots, \ y_n$ линейно зависимы на $\langle a, \ b\rangle$. Получили противоречие.

Достаточность. Тоже доказываем от противного. Пусть $W(t_0) \neq 0$, а решения уравнения (7.6) $y_1, \ \ldots, \ y_n$ линейно зависимы на $\langle a, \ b\rangle$. Тогда по утверждению 7. 5 $W(t) \equiv 0$ на $\langle a, \ b\rangle$. Получили противоречие.

Теорема 7. 5 доказана. □

Теорема 7. 6 (формула Лиувилля – Остроградского)**.** *Пусть* $W(t)$ – *определитель Вронского системы из* n *произвольных решений* $y_1, \ \ldots, \ y_n$ *уравнения* (7.6), *тогда при всех* $t \in \langle a, \ b\rangle$

$$W(t) = W(t_0) \cdot \exp\left\{ -\int\limits_{t_0}^{t} a_1(\tau)\, d\tau \right\},$$

где t_0 – *некоторая фиксированная точка из промежутка* $\langle a, \ b\rangle$.

Доказательство. Пусть $y_1, \ \ldots, \ y_n$ – решения уравнения (7.6), тогда, как показано в п. 7.1,

$$\underset{\downarrow}{y}^{(1)} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_1' \\ \vdots \\ y_1^{(n-1)} \end{pmatrix}, \qquad \ldots, \qquad \underset{\downarrow}{y}^{(n)} = \begin{pmatrix} y_n \\ y_n' \\ \vdots \\ y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \ -$$

решения системы (7.4).

Поэтому имеем

$$W(t) = \begin{vmatrix} y_1 & \ldots & y_n \\ y_1' & \ldots & y_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underset{\downarrow}{y}^{(1)} & \cdots & \underset{\downarrow}{y}^{(n)} \end{vmatrix} =$$

$$= W(t_0) \cdot \exp\left\{ -\int\limits_{t_0}^{t} \operatorname{tr} A(\tau)\, d\tau \right\} = W(t_0) \cdot \exp\left\{ -\int\limits_{t_0}^{t} a_1(\tau)\, d\tau \right\}.$$

Здесь мы применили формулу Лиувилля – Остроградского для определителя Вронского решений однородной системы линейных ОДУ (см. формулу (6.10)) и учли специальный вид матрицы A системы (7.4).

Теорема 7. 6 доказана. □

В заключение этого параграфа рассмотрим задачу о построении однородного линейного ОДУ по фундаментальной системе решений.

Теорема 7. 7. *Пусть* $\varphi_1(t),\ \ldots,\ \varphi_n(t) \in C^n(\langle a,\ b\rangle)$ *таковы, что их определитель Вронского* $W(t) \neq 0 \quad \forall\ t \in \langle a,\ b\rangle$. *Тогда существует линейное однородное уравнение* n*-го порядка вида* (7.1), *для которого функции* $\varphi_1(t),\ \ldots,\ \varphi_n(t)$ *образуют ФСР.*

Доказательство. Составим соотношение

$$\begin{vmatrix} \varphi_1 & \ldots & \varphi_n & y \\ \varphi_1' & \ldots & \varphi_n' & y' \\ \ldots & \ddots & \ldots & \ldots \\ \varphi_1^{(n)} & \ldots & \varphi_n^{(n)} & y^{(n)} \end{vmatrix} = 0. \tag{7.10}$$

Разлагая определитель по элементам последнего столбца, получаем

$$b_0(t)y^{(n)} + b_1(t)y^{(n-1)} + \ldots + b_n(t)y = 0. \tag{7.11}$$

Коэффициенты $b_0,\ b_1,\ \ldots,\ b_n$ в этом уравнении являются непрерывными функциями, так как выражаются через непрерывные функции $\varphi_j^{(k)}$, $j = 1,\ \ldots,\ n,\ k = 0,\ \ldots,\ n.$ Кроме того,

$$b_0(t) = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \ldots & \varphi_n \\ \varphi_1' & \ldots & \varphi_n' \\ \ldots & \ddots & \ldots \\ \varphi_1^{(n-1)} & \ldots & \varphi_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad \text{на} \quad \langle a,\ b\rangle,$$

так как это определитель Вронского линейно независимых решений.

Поделив (7.11) на $b_0(t)$, получаем однородное линейное ОДУ вида (7.6) с непрерывными коэффициентами

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(t)y = 0.$$

С другой стороны, функции $\varphi_1(t),\ \ldots,\ \varphi_n(t) \in C^n(\langle a,\ b\rangle)$ являются решениями уравнения (7.11), или, что то же самое, уравнения (7.10).

Действительно, подставляя $y = \varphi_i(t)$, $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$, в последний столбец определителя в левой части (7.10), получаем, что этот определитель имеет два одинаковых столбца, а следовательно, из соответствующего свойства определителя вытекает, что он равен нулю. Таким образом, $\varphi_1(t),\ \ldots,\ \varphi_n(t) \in C^n(\langle a,\ b\rangle)$ – решения уравнения (7.11). По условию теоремы их определитель Вронского $W(t) \neq 0 \quad \forall\ t \in \langle a,\ b\rangle$, поэтому в силу следствия к утверждению 7. 5 эти решения линейно независимы. Их n штук, следовательно, они образуют ФСР системы (7.11). Теорема 7. 7 доказана. □

Пример 7.3. *Построим однородное линейное ОДУ второго порядка, для которого функции $\varphi_1(t) = 1$, $\varphi_2(t) = e^t$ образуют ФСР.*

Составляем определитель Вронского функций φ_1, φ_2, y и приравняем его к нулю

$$\begin{vmatrix} 1 & e^t & y \\ 0 & e^t & y' \\ 0 & e^t & y'' \end{vmatrix} = 0.$$

Разлагаем его по элементам последнего столбца

$$\begin{vmatrix} 1 & e^t \\ 0 & e^t \end{vmatrix} y'' - \begin{vmatrix} 1 & e^t \\ 0 & e^t \end{vmatrix} y' + \begin{vmatrix} 0 & e^t \\ 0 & e^t \end{vmatrix} y = 0$$

или

$$e^t y'' - e^t y' + 0 \cdot y = 0.$$

Поделив на e^t, получаем искомое уравнение

$$y'' - y' = 0.$$

7.3. Свойства комплексных решений однородного линейного ОДУ высокого порядка. Переход от комплексной ФСР к вещественной

Определение 7.5. ФСР $y_1(t), \ldots, y_n(t)$ однородного линейного ОДУ n-го порядка (7.6) называется **комплексной**, если среди функций $y_1, \ldots, y_n$ есть комплекснозначные, и **вещественной**, если все функции, входящие в ФСР, вещественнозначные.

Теорема 7.8. *Если $y(t) = u(t) + iv(t)$ – комплексное решение уравнения (7.6) с вещественными коэффициентами $a_1(t), \ldots, a_n(t)$, то его вещественная часть $u(t)$ и мнимая часть $v(t)$ являются вещественными решениями этого уравнения.*

Доказательство. Имеем тождество

$$L(u + iv) \equiv \big(u + iv\big)^{(n)} + a_1(t)\big(u + iv\big)^{(n-1)} + \ldots + a_n(t)\big(u + iv\big)^{(n)} \equiv 0.$$

В силу линейности оператора L это тождество можно переписать в виде

$$L(u) + iL(v) \equiv 0.$$

Отделяя вещественную и мнимую часть, получаем два тождества

$$L(u) \equiv 0 \qquad \text{и} \qquad L(v) \equiv 0.$$

Следовательно, $u(t)$ и $v(t)$ – вещественные решения уравнения (7.6).

Теорема 7.8 доказана. □

Следствие 7.2. *Если* $y(t) = u(t) + iv(t)$ *– комплексное решение уравнения* (7.6) *с вещественными коэффициентами* $a_1(t), \ \ldots, \ a_n(t)$, *то* $\bar{y}(t) = u(t) - iv(t)$ *– тоже решение этого уравнения.*

Доказательство. $\bar{y}$ – решение уравнения (7.6) как линейная комбинация его решений $u(t)$ и $v(t)$. □

Теорема 7.9. *Пусть* $y_j(t) = u_j(t) + iv_j(t)$, $\bar{y}_j(t) = u_j(t) - iv_j(t)$, $j = 1, \ \ldots, \ k$, $y_{2k+1}(t), \ \ldots, \ y_n(t)$ *– комплексная ФСР уравнения* (7.6) *с вещественными коэффициентами* $a_1(t), \ldots, a_n(t)$; *здесь* $y_{2k+1}(t), \ \ldots, \ y_n(t)$ *– вещественные функции. Тогда*

$$u_j(t),\ v_j(t) \quad \big(j = 1,\ \ldots,\ k\big), \quad y_{2k+1}(t),\ \ldots,\ y_n(t) \ -$$

вещественная ФСР этого уравнения.

Доказательство. Функции $y_{2k+1}, \ \ldots, \ y_n$ являются вещественными решениями уравнения (7.6) по условию, а u_j и v_j, $j = 1, \ \ldots, \ k$, являются вещественными решениями этого уравнения по теореме 7.8. Следовательно, мы имеем n вещественных решений уравнения (7.6). Покажем, что они линейно независимы. Для этого докажем, что определитель Вронского этой системы решений не равен нулю.

Выполним действия, аналогичные тем, которые мы делали в п. 6.4 при вычислении определителя Вронского решений однородной системы линейных ОДУ:

$$W(t) = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & \ldots & y_n \\ u_1' & v_1' & u_2' & v_2' & \ldots & y_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ u_1^{(n-1)} & v_1^{(n-1)} & u_2^{(n-1)} & v_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} u_1 + iv_1 & v_1 & u_2 & v_2 & \ldots & y_n \\ u_1' + iv_1' & v_1' & u_2' & v_2' & \ldots & y_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ u_1^{(n-1)} + iv_1^{(n-1)} & v_1^{(n-1)} & u_2^{(n-1)} & v_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{-2i} \begin{vmatrix} u_1 + iv_1 & -2iv_1 & u_2 & v_2 & \ldots & y_n \\ u_1' + iv_1' & -2iv_1' & u_2' & v_2' & \ldots & y_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ u_1^{(n-1)} + iv_1^{(n-1)} & -2iv_1^{(n-1)} & u_2^{(n-1)} & v_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{-2i}\begin{vmatrix} u_1+iv_1 & u_1-iv_1 & u_2 & v_2 & \dots & y_n \\ u_1'+iv_1' & u_1'-iv_1' & u_2' & v_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ u_1^{(n-1)}+iv_1^{(n-1)} & u_1^{(n-1)}-iv_1^{(n-1)} & u_2^{(n-1)} & v_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{-2i}\begin{vmatrix} y_1 & \bar{y}_1 & u_2 & v_2 & \dots & y_n \\ y_1' & \bar{y}_1' & u_2' & v_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & \bar{y}_1^{(n-1)} & u_2^{(n-1)} & v_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

(мы к первому столбцу прибавили второй столбец, умноженный на число i, затем второй столбец умножили на число $(-2i)$ и, соответственно, разделили определитель на это число, после этого к полученному второму столбцу прибавили первый и учли, что $u_1^{(k)}+iv_1^{(k)} = (u_1+iv_1)^{(k)}$, $u_1^{(k)}-iv_1^{(k)} = (u_1-iv_1)^{(k)} = \bar{y}_1^{(k)}$).

Повторяя эту процедуру k раз, получаем

$$W(t) = \frac{1}{(-2i)^k}\begin{vmatrix} y_1 & \bar{y}_1 & y_2 & \bar{y}_2 & \dots & y_n \\ y_1' & \bar{y}_1' & y_2' & \bar{y}_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & \bar{y}_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \bar{y}_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Следовательно, $W(t) \neq 0$.

Теорема 7.9 доказана. □

Пример 7.4. *Проверить, что* $y = e^{2it}$ *– решение уравнения*

$$y'' + 4y = 0. \tag{7.12}$$

Найти вещественную ФСР и общее решение этого уравнения.

Покажем, что $y = e^{2it}$ обращает уравнение в тождество.

$$\left(e^{2it}\right)'' + 4e^{2it} = \left(2ie^{2it}\right)' + 4e^{2it} = 4i^2e^{2it} + 4e^{2it} = -4e^{2it} + 4e^{2it} = 0.$$

По следствию к теореме 7.8

$$\bar{y}(t) = \overline{e^{2it}} = \overline{\cos 2t + i\sin 2t} = \cos 2t - i\sin 2t = e^{-2it}$$

также решение уравнения (7.12). Проверим, что y и $\bar{y}$ линейно независимы. Для этого вычислим определитель Вронского:

$$W(t) = \begin{vmatrix} e^{2it} & e^{-2it} \\ 2ie^{2it} & -2ie^{-2it} \end{vmatrix} = -2i - 2i = -4i.$$

Так как $W(t) \neq 0$, то y и $\bar{y}$ линейно независимы и, следовательно, образуют комплексную ФСР. Согласно теореме 7.9 в качестве вещественной ФСР выбираем

$$u(t) = \operatorname{Re} y(t) = \operatorname{Re}\left(\cos 2t + i\sin 2t\right) = \cos 2t, \qquad v(t) = \operatorname{Im} y(t) = \sin 2t.$$

Записываем общее решение уравнения (7.12)

$$y_{OO}(t) = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t.$$

7.4. Неоднородные линейные ОДУ высокого порядка. Метод вариации постоянных

Рассмотрим теперь неоднородное уравнение n-го порядка (7.1).

$$L(y) \equiv y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(t)y = f(t), \qquad t \in \langle a,\ b\rangle,$$

$a_1(t),\ \ldots,\ a_n(t),\ f(t) \in C\left(\langle a,\ b\rangle\right),$ и соответствующее ему однородное уравнение (7.6):

$$L(y) = 0.$$

Теорема 7.10. *Общее решение неоднородного линейного ОДУ n-го порядка* (7.1) *может быть найдена как сумма его частного решения и общего решения соответствующего ему однородного уравнения* (7.6).

$$y_{OH}(t) = y_{ЧH}(t) + y_{OO}(t), \qquad t \in \langle a,\ b\rangle. \tag{7.13}$$

Доказательство. Сначала проверим, что формула (7.13) задает решение неоднородного уравнения (7.1).

$$L\left(y_{ЧH} + y_{OO}\right) = L\left(y_{ЧH}\right) + L\left(y_{OO}\right) = f(t) + 0 = f(t).$$

Теперь покажем, что эта формула содержит все решения неоднородного уравнения (7.1). Пусть $\varphi(t)$ – любое решение этого уравнения. Заметим, что разность двух частных решений неоднородного уравнения является решением соответствующего однородного уравнения (7.6):

$$L\left(\varphi - y_{ЧH}\right) = L\left(\varphi\right) - L\left(y_{ЧH}\right) = f(t) - f(t) = 0,$$

и значит содержится в y_{OO}.

Теорема 7.10 доказана. □

Пусть $y_1(t),\ \ldots,\ y_n(t)$ – ФСР однородного уравнения (7.6), а $y_{OO}(t) = C_1y_1(t) + \ldots + C_ny_n(t)$ – общее решение этого уравнения. Для нахождения частного решения неоднородного уравнения (7.1) используется **метод вариации постоянных**. Он заключается в следующем.

Ищем $y_{ЧH}$ в виде

$$y_{ЧH}(t) = C_1(t)y_1(t) + \ldots + C_n(t)y_n(t). \tag{7.14}$$

Здесь $C_1(t),\ \ldots,\ C_n(t)$ – неизвестные пока функции. Функции $C_1(t),\ \ldots,\ C_n(t)$ надо выбрать таким образом, чтобы при подстановке $y_{ЧH}$ в виде (7.14) в уравнение (7.1) получалось тождество. Так как уравнение одно, а неизвестных функций n, то у нас есть возможность самим выбрать $(n-1)$ условий.

Поступаем следующим образом.

Вычисляем $y'_{чн}$:

$$y_{чн}'(t) = C_1(t)y_1'(t) + \ldots + C_n(t)y_n'(t) + C_1'(t)y_1(t) + \ldots + C_n'(t)y_n(t).$$

Полагаем

$$C_1'(t)y_1(t) + \ldots + C_n'(t)y_n(t) = 0.$$

Теперь вычисляем $y_{чн}''$:

$$y_{чн}''(t) = C_1(t)y_1''(t) + \ldots + C_n(t)y_n''(t) + C_1'(t)y_1'(t) + \ldots + C_n'(t)y_n'(t).$$

Полагаем

$$C_1'(t)y_1'(t) + \ldots + C_n'(t)y_n'(t) = 0$$

и так далее, вплоть до $y_{чн}^{(n-1)}$:

$$y_{чн}^{(n-1)}(t) = C_1(t)y_1^{(n-1)}(t) + \ldots + C_n(t)y_n^{(n-1)}(t) + \\ + C_1'(t)y_1^{(n-2)}(t) + \ldots + C_n'(t)y_n^{(n-2)}(t).$$

Полагаем

$$C_1'(t)y_1^{(n-2)}(t) + \ldots + C_n'(t)y_n^{(n-2)}(t) = 0.$$

Вычисляем $y_{чн}^{(n)}$.

$$y_{чн}^{(n)}(t) = C_1(t)y_1^{(n)}(t) + \ldots + C_n(t)y_n^{(n)}(t) + C_1'(t)y_1^{(n-1)}(t) + \ldots + C_n'(t)y_n^{(n-1)}(t).$$

Подставляем $y_{чн}$, $y'_{чн}$, $\ldots$, $y_{чн}^{(n)}$ в неоднородное уравнение (7.1).

$$C_1(t)y_1^{(n)} + \ldots + C_n(t)y_n^{(n)} + C_1'(t)y_1^{(n-1)}(t) + \ldots + C_n'(t)y_n^{(n-1)}(t) + \\ + a_1(t)\left(C_1(t)y_1^{(n-1)}(t) + \ldots + C_n(t)y_n^{(n-1)}(t)\right) + \ldots + \\ + a_n(t)\left(C_1(t)y_1(t) + \ldots + C_n(t)y_n(t)\right) = f(t).$$

Раскрывая скобки и группируя слагаемые, содержащие y_i, $i = 1, \ldots, n$, получаем

$$C_1L(y_1) + \ldots + C_nL(y_n) + C_1'y_1^{(n-1)} + \ldots + C_n'y_n^{(n-1)} = f(t). \tag{7.15}$$

Так как y_1, $\ldots$, y_n – решения однородного уравнения, то $L(y_i) = 0$, $i = 1, \ldots, n$. Поэтому уравнение (7.15) запишется в виде

$$C_1'y_1^{(n-1)} + \ldots + C_n'y_n^{(n-1)} = f(t).$$

В результате получаем следующую систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных C_1', $\ldots$, C_n':

$$\begin{cases} C_1'y_1 + \ldots + C_n'y_n = 0, \\ C_1'y_1' + \ldots + C_n'y_n' = 0, \\ \ldots\ldots\ldots \\ C_1'y_1^{(n-2)} + \ldots + C_n'y_n^{(n-2)} = 0, \\ C_1'y_1^{(n-1)} + \ldots + C_n'y_n^{(n-1)} = f(t). \end{cases} \tag{7.16}$$

Определитель этой системы

$$\Delta(t)=\begin{vmatrix} y_1 & \dots & \dots & y_n \\ y_1' & \dots & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & \dots & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

является определителем Вронского функциональной системы решений $y_1,\ \dots,$ y_n однородной линейной системы ОДУ, следовательно, по теореме 7. 5 он не обращается в нуль ни в одной точке промежутка $\langle a,\ b\rangle$. Это означает, что система (7.16) имеет единственное решение, которое может быть получено, например, по формулам Крамера

$$C_i'(t)=\frac{\Delta_i(t)}{\Delta(t)},\qquad i=1,\ \dots,\ n. \tag{7.17}$$

Здесь $\Delta_i(t)$ – определитель, полученный из определителя $\Delta(t)$ заменой i-го столбца на столбец $\begin{pmatrix} 0 \\ \ddots \\ 0 \\ f(t) \end{pmatrix}$.

Интегрируя (7.17), находим функции $C_1(t),\ \dots,\ C_n(t)$:

$$C_i(t)=\int\frac{\Delta_i(t)}{\Delta(t)}\,dt. \tag{7.18}$$

Подставляя их в (7.12), находим $y_{чн}$.

Пример 7. 5. *Решим уравнение*

$$y''+4y=\cos 2t. \tag{7.19}$$

Записываем соответствующее однородное уравнение

$$y''+4y=0.$$

Такое уравнение мы уже решали в примере 7. 4, поэтому его общее решение есть

$$y_{оо}(t)=C_1\cos 2t+C_2\sin 2t.$$

Ищем частное решение уравнения (7.19) в виде

$$y_{чн}(t)=C_1(t)\cos 2t+C_2(t)\sin 2t.$$

Для нахождения $C_1(t)$ и $C_2(t)$ составляем систему (7.16)

$$\begin{cases} C_1'(t)\cos 2t+C_2'(t)\sin 2t=0, \\ C_1'(t)\big(-2\sin 2t\big)+C_2'(t)\big(2\cos 2t\big)=\cos 2t. \end{cases}$$

Вычисляем определители $\Delta(t)$, $\Delta_1(t)$, $\Delta_2(t)$:

$$\Delta(t) = \begin{vmatrix} \cos 2t & \sin 2t \\ -2\sin 2t & 2\cos 2t \end{vmatrix} = 2\cos^2 2t + 2\sin^2 2t = 2,$$

$$\Delta_1(t) = \begin{vmatrix} 0 & \sin 2t \\ \cos 2t & 2\cos 2t \end{vmatrix} = -\sin 2t \cos 2t = -\frac{1}{2}\sin 4t,$$

$$\Delta_2(t) = \begin{vmatrix} \cos 2t & 0 \\ -2\sin 2t & \cos 2t \end{vmatrix} = \cos^2 2t = \frac{1}{2}\big(1 + \cos 4t\big).$$

Применяя формулы Крамера, находим C_1' и C_2':

$$C_1'(t) = \frac{\Delta_1(t)}{\Delta(t)} = -\frac{1}{4}\sin 4t, \qquad C_2'(t) = \frac{\Delta_2(t)}{\Delta(t)} = \frac{1}{4}\big(1 + \cos 4t\big).$$

Интегрируя эти равенства, получаем $C_1(t)$ и $C_2(t)$:

$$C_1(t) = \frac{1}{16}\cos 4t + \tilde{C}_1, \qquad C_2(t) = \frac{1}{4}\,t + \frac{1}{16}\sin 4t + \tilde{C}_2.$$

Так как нам нужно одно частное решение уравнения (7.19), то возьмем $\tilde{C}_1 = \tilde{C}_2 = 0$. Подставим $C_1(t)$ и $C_2(t)$ в формулу для частного решения:

$$y_{чн}(t) = \frac{1}{16}\cos 4t \cos 2t + \frac{1}{4}\,t\sin 2t + \frac{1}{16}\sin 4t \sin 2t = \frac{1}{16}\cos 2t + \frac{1}{4}\,t\sin 2t.$$

Записываем общее решение неоднородного уравнения (7.19)

$$y_{он}(t) = C_1\cos 2t + C_2\sin 2t + \frac{1}{16}\cos 2t + \frac{1}{4}\,t\sin 2t.$$

7.5. Однородные линейные ОДУ высокого порядка с постоянными коэффициентами

Рассмотрим однородное линейное ОДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами

$$L(y) \equiv y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0, \tag{7.20}$$

где $a_1, \ldots, a_n$ – заданные вещественные числа.

Определение 7.6. Многочлен

$$P_n(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n \tag{7.21}$$

называется **характеристическим многочленом уравнения** (7.20), а уравнение

$$P_n(\lambda) = 0 \tag{7.22}$$

называется **характеристическим уравнением уравнения** (7.20).

Теорема 7.11. *Пусть* λ_0 *– корень характеристического уравнения* (7.22), *тогда* $y_0(t) = e^{\lambda_0 t}$ *– решение уравнения* (7.20).

Доказательство. Вычислим производные $y_0(t)$ до n-го порядка включительно: $y_0' = \left(e^{\lambda_0 t}\right)' = \lambda_0 e^{\lambda_0 t}$, $y_0'' = \left(y_0'\right)' = \left(\lambda_0 e^{\lambda_0 t}\right)' = \lambda_0^2 e^{\lambda_0 t}$, $\ldots$, $y_0^{(n)} = \left(y_0^{(n-1)}\right)' = \lambda_0^n e^{\lambda_0 t}$. Подставим их в левую часть уравнения (7.20):

$$L(y_0) = \lambda_0^n e^{\lambda_0 t} + a_1 \lambda_0^{n-1} e^{\lambda_0 t} + \ldots + a_n e^{\lambda_0 t} = \\ = e^{\lambda_0 t}\left(\lambda_0^n + a_1\lambda_0^{n-1} + \ldots + a_n\right) = e^{\lambda_0 t} P_n(\lambda_0).$$

Так как λ_0 – корень характеристического уравнения, то $P_n(\lambda_0) = 0$, и, значит,

$$L(y_0) \equiv 0.$$

Следовательно, $y_0(t) = e^{\lambda_0 t}$ – решение уравнения (7.20).

Теорема 7. 11 доказана. $\square$

Теорема 7. 12. *Пусть* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ *–* n *различных корней характеристического уравнения* (7.22), *тогда* $y_1(t) = e^{\lambda_1 t}$, $y_2(t) = e^{\lambda_2 t}$, $\ldots$, $y_n(t) = e^{\lambda_n t}$, *– ФСР уравнения* (7.20).

Доказательство. В силу теоремы 7. 11 $y_1(t), \ldots, y_n(t)$ являются решениями уравнения (7.20). Покажем, что они линейно независимы. Для этого вычислим определитель Вронского этой системы решений при $t = 0$.

$$W(0) = \left.\begin{vmatrix} e^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_2 t} & \ldots & e^{\lambda_n t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \lambda_2 e^{\lambda_2 t} & \ldots & \lambda_n e^{\lambda_n t} \\ \lambda_1^2 e^{\lambda_1 t} & \lambda_2^2 e^{\lambda_2 t} & \ldots & \lambda_n^2 e^{\lambda_n t} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 t} & \lambda_2^{n-1} e^{\lambda_2 t} & \ldots & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n t} \end{vmatrix}\right|_{t=0} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \ldots & \lambda_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \ldots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Этот определитель в линейной алгебре называется определителем Вандермонда. Он вычисляется следующим образом. Из каждой последующей строки, начиная со второй, вычитаем предыдущую, умноженную на λ_1, затем раскладываем полученный определитель по первому столбцу и после этого из каждого столбца выносим общий множитель:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \ldots & \lambda_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \ldots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & \lambda_2 - \lambda_1 & \ldots & \lambda_n - \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2^2 - \lambda_2\lambda_1 & \ldots & \lambda_n^2 - \lambda_n\lambda_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \lambda_2^{n-1} - \lambda_2^{n-2}\lambda_1 & \ldots & \lambda_n^{n-1} - \lambda_n^{n-2}\lambda_1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda_2 - \lambda_1 & \ldots & \lambda_n - \lambda_1 \\ \lambda_2\left(\lambda_2 - \lambda_1\right) & \ldots & \lambda_n\left(\lambda_n - \lambda_1\right) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_2^{n-2}\left(\lambda_2 - \lambda_1\right) & \ldots & \lambda_n^{n-2}\left(\lambda_n - \lambda_1\right) \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\lambda_2 - \lambda_1\right)\ldots\left(\lambda_n - \lambda_1\right) \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_2 & \ldots & \lambda_n \\ \lambda_2^2 & \ldots & \lambda_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_2^{n-2} & \ldots & \lambda_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

Повторяя эту процедуру с полученным определителем $(n-1)$-го порядка, затем с определителем $(n-2)$-го порядка и т.д., получаем

$$W(0) = \big(\lambda_2 - \lambda_1\big)\dots\big(\lambda_n - \lambda_1\big)\cdot\big(\lambda_3 - \lambda_2\big)\dots\big(\lambda_n - \lambda_2\big)\cdot\ldots\cdot\big(\lambda_n - \lambda_{n-1}\big).$$

Так как $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \dots,\ \lambda_n$ – различные числа, то $W(0) \neq 0$. Следовательно, по теореме 7.5 $y_1(t),\ \dots,\ y_n(t)$ линейно независимы и, значит, образуют ФСР уравнения (7.20).

Теорема 7.12 доказана. □

Пример 7.6. *Решим уравнение*

$$y''' - 3y'' + 2y' = 0. \tag{7.23}$$

Составляем и решаем характеристическое уравнение

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda = 0 \qquad \text{или} \qquad \lambda(\lambda-1)(\lambda-2) = 0.$$

Отсюда $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 2.$

Следовательно, ФСР уравнения (7.23) есть

$$y_1(t) = e^{0t} = 1, \qquad y_2(t) = e^t, \qquad y_3(t) = e^{2t}.$$

Записываем общее решение уравнения (7.23)

$$y_{OO}(t) = C_1 + C_2e^t + C_2e^{2t}.$$

Рассмотрим теперь ситуацию, когда характеристическое уравнение имеет кратные корни.

Нам понадобятся две следующие леммы.

Лемма 7.1. *Пусть $\lambda = \lambda_0$ – корень характеристического уравнения* (7.22) *кратности k $\big(2 \leqslant k \leqslant n\big)$, т.е.*

$$P_n(\lambda) = \big(\lambda - \lambda_0\big)^k P_{n-k}(\lambda),$$

где $P_{n-k}(\lambda)$ – многочлен степени $(n-k)$, причём $P_{n-k}(\lambda_0) \neq 0$, тогда

$$P_n\big(\lambda_0\big) = P_n'\big(\lambda_0\big) = \ldots = P_n^{(k-1)}\big(\lambda_0\big) = 0,\ P_n^{(k)}\big(\lambda_0\big) \neq 0.$$

Доказательство. Вычислим $P_n'\big(\lambda\big)$:

$$P_n'\big(\lambda\big) = k\big(\lambda - \lambda_0\big)^{k-1}P_{n-k}(\lambda) + \big(\lambda - \lambda_0\big)^k P_{n-k}'(\lambda) \equiv \big(\lambda - \lambda_0\big)^{k-1}\tilde{P}_{n-k}(\lambda)$$

(здесь мы ввели обозначение $\tilde{P}_{n-k}(\lambda) = kP_{n-k}(\lambda) + (\lambda - \lambda_0)P_{n-k}'(\lambda)$).

Имеем $P_n'\big(\lambda_0\big) = 0$.

Теперь вычислим $P_n''\big(\lambda\big)$.

$$P_n''\big(\lambda\big) = (k-1)\big(\lambda - \lambda_0\big)^{k-2}\tilde{P}_{n-k}(\lambda) + \big(\lambda - \lambda_0\big)^{k-1}\tilde{P}_{n-k}'(\lambda) \equiv \big(\lambda - \lambda_0\big)^{k-2}\tilde{\tilde{P}}_{n-k}(\lambda)$$

(здесь $\tilde{\tilde{P}}_{n-k}(\lambda) = (k-1)\tilde{P}_{n-k}(\lambda) + (\lambda-\lambda_0)\tilde{P}'_{n-k}(\lambda)$).

Следовательно, $P''_n\big(\lambda_0\big) = 0$, и так далее.

В результате получим

$$P_n^{(k-1)}(\lambda) = \big(\lambda-\lambda_0\big)\hat{P}_{n-k}(\lambda),$$

где $\hat{P}_{n-k}(\lambda)$ – некоторый многочлен степени $(n-k)$. Видно, что $P_n^{(k-1)}\big(\lambda_0\big) = 0$. Кроме того, из приведенного доказательства видно, что $P_n^{(k)}\big(\lambda_0\big) = k!\cdot P_{n-k}(\lambda_0) \neq$ $\neq 0$.

Лемма 7.1 доказана. □

Лемма 7.2. *Для любой n раз дифференцируемой функции $f(t)$ имеет место формула*

$$L\left(e^{\lambda t}f(t)\right) = e^{\lambda t}\left(P_n(\lambda)f(t) + \frac{P'_n(\lambda)}{1!}f'(t) + \ldots + \frac{P_n^{(n)}(\lambda)}{n!}f^{(n)}(t)\right). \qquad (7.24)$$

Доказательство. При доказательстве будем использовать формулу Ньютона–Лейбница

$$\big(u(t)v(t)\big)^{(k)} = \sum_{l=0}^{k}\frac{k(k-1)\ldots(k-l+1)}{l!}\,u^{(k-l)}(t)v^{(l)}(t).$$

В силу этой формулы

$$\big(e^{\lambda t}f(t)\big)^{(k)} = \sum_{l=0}^{k}\frac{k(k-1)\ldots(k-l+1)}{l!}\,\lambda^{k-l}e^{\lambda t}f^{(l)}(t) =$$

$$= e^{\lambda t}\sum_{l=0}^{k}\frac{1}{l!}\,\frac{d^l}{d\lambda^l}\big(\lambda^k\big)f^{(l)}(t).$$

Тогда

$$L\left(e^{\lambda t}f(t)\right) = \big(e^{\lambda t}f(t)\big)^{(n)} + a_1\left(e^{\lambda t}f(t)\right)^{(n-1)} + \ldots + a_n e^{\lambda t}f(t) =$$

$$= e^{\lambda t}\sum_{l=0}^{n}\frac{1}{l!}\,\frac{d^l}{d\lambda^l}\big(\lambda^n\big)f^{(l)}(t) + a_1 e^{\lambda t}\sum_{l=0}^{n-1}\frac{1}{l!}\,\frac{d^l}{d\lambda^l}\big(\lambda^{n-1}\big)f^{(l)}(t) + \ldots + a_n e^{\lambda t}f(t) =$$

$$= e^{\lambda t}\Bigg(\left(\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n\right)f(t) +$$

$$+ \frac{1}{1!}\left(\frac{d}{d\lambda}\lambda^n + a_1\frac{d}{d\lambda}\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\frac{d}{d\lambda}\lambda\right)f'(t) + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\lambda^n}\lambda^n\cdot f^{(n)}(t)\Bigg) = e^{\lambda t}\Bigg(P_n(\lambda)f(t) +$$

$$+ \frac{1}{1!}\frac{d}{d\lambda}\left(\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda\right)f'(t) + \ldots + \frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\lambda^n}\lambda^n\cdot f^{(n)}(t)\Bigg).$$

С учетом того, что

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda\right) = \frac{d}{d\lambda}\left(\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n\right) = \\ = \frac{d}{d\lambda}P_n(\lambda),$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{d^n}{d\lambda^n}\lambda^n = \frac{d^n}{d\lambda^n}\left(\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n\right) = \frac{d^n}{d\lambda^n}P_n(\lambda),$$

получаем нужную формулу

$$L\left(e^{\lambda t}f(t)\right) = e^{\lambda t}\left(P_n(\lambda)f(t) + \frac{P_n'(\lambda)}{1!}f'(t) + \ldots + \frac{P_n^{(n)}(\lambda)}{n!}f^{(n)}(t)\right).$$

Лемма 7.2 доказана. □

Теорема 7.13. *Пусть* $\lambda = \lambda_0$ *– корень характеристического уравнения* (7.22) *кратности* k $(2 \leqslant k \leqslant n)$, *тогда* $e^{\lambda_0 t}$, $te^{\lambda_0 t}$, $\ldots$, $t^{k-1}e^{\lambda_0 t}$ *– решения уравнения* (7.20).

Доказательство. Функция $e^{\lambda_0 t}$ является решением уравнения (7.20) по теореме 7.11. Покажем, что функции $t^l e^{\lambda_0 t}$, $1 \leqslant l \leqslant k-1$ также являются решениями этого уравнения, т.е. при подстановке в него обращают его в тождество.

Применяя лемму 7.2 при вычислении $L\left(e^{\lambda_0 t}t^l\right)$, имеем

$$L\left(e^{\lambda_0 t}t^l\right) = e^{\lambda_0 t}\Bigg(P_n(\lambda_0)t^l + \frac{P_n'(\lambda_0)}{1!}\left(t^l\right)' + \ldots + \\ + \frac{P_n^{(k-1)}(\lambda_0)}{(k-1)!}\left(t^l\right)^{(k-1)} + \frac{P_n^{(k)}(\lambda_0)}{k!}\left(t^l\right)^{(k)} + \ldots + \frac{P_n^{(n)}(\lambda_0)}{n!}\left(t^l\right)^{(n)}\Bigg).$$

Это выражение тождественно равно нулю, так как с одной стороны $P_n(\lambda_0) = P_n'(\lambda_0) = \ldots = P_n^{(k-1)}(\lambda_0) = 0$ в силу леммы 7.1, а с другой стороны $\left(t^l\right)^{(k)} = \left(t^l\right)^{(k+1)} = \ldots = \left(t^l\right)^{(n)} = 0$, поскольку $k > l$ (по условию $l \leqslant k-1$, т.е. $k > l$).

Следовательно, указанные функции являются решениями уравнения

$$L(y) = 0.$$

Теорема 7.13 доказана. □

Лемма 7.3. *Пусть* $R_m(t) = r_0 t^m + \ldots + r_m$ *– многочлен степени* m, $m > 0$, *и* $\gamma \neq 0$, *тогда*

$$\left(R_m(t)e^{\gamma t}\right)' = Q_m(t)e^{\gamma t},$$

где $Q_m(t) = q_0 t^m + \ldots + q_m$ *– тоже многочлен* m*-й степени.*

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $m = 0$, тогда

$$\left(R_0(t)e^{\gamma t}\right)' \equiv \left(r_0 e^{\gamma t}\right)' = r_0\gamma e^{\gamma t} = Q_0(t)e^{\gamma t},$$

где $Q_0(t) = r_0\gamma$ – многочлен нулевой степени.

Теперь рассмотрим случай, когда $m \geqslant 1$. Имеем

$$\begin{aligned}\left(R_m(t)e^{\gamma t}\right)' &= \left(\left(r_0 t^m + \ldots + r_m\right) e^{\gamma t}\right)' = \\ &= \left(m r_0 t^{m-1} + \ldots + 0\right) e^{\gamma t} + \left(r_0 t^m + \ldots + r_m\right) \gamma e^{\gamma t} = \\ &= \left(r_0 \gamma t^m + \left(m r_0 + r_1\gamma\right) t^{m-1} + \ldots + r_m\gamma\right) e^{\gamma t} = Q_m(t)e^{\gamma t},\end{aligned}$$

так как $r_0\gamma \neq 0$.

Лемма 7.3 доказана. □

Теорема 7.14. *Пусть* $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ *– корни характеристического уравнения* (7.22) *кратности* $n_1, \ldots, n_k$, *соответственно,* $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$, *тогда*

$$\begin{array}{c} e^{\lambda_1 t},\ te^{\lambda_1 t},\ \ldots,\ t^{n_1-1}e^{\lambda_1 t}, \\ e^{\lambda_2 t},\ te^{\lambda_2 t},\ \ldots,\ t^{n_2-1}e^{\lambda_2 t}, \\ \ldots\ldots\ldots e^{\lambda_k t},\ te^{\lambda_k t},\ \ldots,\ t^{n_k-1}e^{\lambda_k t} - \end{array}$$

ФСР уравнения (7.20).

Доказательство. Предложенные n функций являются решениями уравнения (7.20) по теореме 7.13. Докажем, что они линейно независимы.

Предположим противное. Пусть существуют числа

$$\alpha_1^1,\ \ldots,\ \alpha_{n_1}^1,\ \ \ldots,\ \ \alpha_1^k,\ \ldots,\ \alpha_{n_k}^k,$$

не все равные нулю, такие что линейная комбинация данных функций с этими коэффициентами равна нулю

$$\alpha_1^1 e^{\lambda_1 t} + \ldots + \alpha_{n_1}^1 t^{n_1-1}e^{\lambda_1 t} + \alpha_1^2 e^{\lambda_2 t} + \ldots + \alpha_{n_2}^2 t^{n_2-1}e^{\lambda_2 t} + \ldots + \\ + \alpha_1^k e^{\lambda_k t} + \ldots + \alpha_{n_k}^k t^{n_k-1}e^{\lambda_k t} \equiv 0.$$

Перепишем это тождество в виде

$$\left(\alpha_1^1 + \ldots + \alpha_{n_1}^1 t^{n_1-1}\right) e^{\lambda_1 t} + \left(\alpha_1^2 + \ldots + \alpha_{n_2}^2 t^{n_2-1}\right) e^{\lambda_2 t} + \ldots + \\ + \left(\alpha_1^k + \ldots + \alpha_{n_k}^k t^{n_k-1}\right) e^{\lambda_k t} \equiv 0. \quad (7.25)$$

Обозначим

$$P_i(t) = \alpha_1^i + \ldots + \alpha_{n_i}^i t^{n_i-1} -$$

многочлен степени $\leqslant n_i - 1$. Тогда тождество (7.25) можно переписать в виде

$$P_1(t)e^{\lambda_1 t} + P_2(t)e^{\lambda_2 t} + \ldots + P_k(t)e^{\lambda_k t} \equiv 0. \tag{7.26}$$

Так как не все α_i равны нулю, то хотя бы один из многочленов $P_1(t)$, $\ldots$, $P_k(t)$ содержит ненулевой коэффициент. Пусть, например, $P_k(t) \not\equiv 0$.

Разделим равенство (7.26) на $e^{\lambda_1 t}$. Получаем

$$P_1(t) + P_2(t)e^{(\lambda_2-\lambda_1)t} + \ldots + P_k(t)e^{(\lambda_k-\lambda_1)t} \equiv 0.$$

Дифференцируем обе части этого равенства по t n_1 раз. Первый член суммы исчезает, так как $P_1(t)$ – многочлен степени $\leqslant n_1 - 1$, а в остальных, согласно лемме 3, многочлены заменяются другими многочленами тех же степеней. В результате получаем равенство

$$Q_2(t)e^{(\lambda_2-\lambda_1)t} + \ldots + Q_k(t)e^{(\lambda_k-\lambda_1)t} \equiv 0.$$

С ним поступаем так же, как с (7.26).

Продолжаем так до тех пор, пока не получим равенство с одним членом:

$$R_k(t)e^{(\lambda_k-\lambda_{k-1})t} \equiv 0.$$

Многочлен $R_k(t)$ имеет такую же степень, что и многочлен $P_k(t)$, значит он содержит ненулевой коэффициент. Поэтому $R_k(t) \not\equiv 0$ и последнее равенство невозможно. Получили противоречие.

Следовательно, предложенные n решений уравнения (7.20) линейно независимы и образуют ФСР.

Теорема 7. 14 доказана. □

Пример 7. 7. *Решим уравнение*

$$y^{(V)} - 4y^{(IV)} + 4y''' = 0.$$

Составляем и решаем характеристическое уравнение

$$\lambda^5 - 4\lambda^4 + 4\lambda^3 = 0 \qquad \text{или} \qquad \lambda^3\big(\lambda-2\big)^2 = 0.$$

Отсюда $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 = 2$. Корень $\lambda_1 = 0$ имеет кратность 3, а корень $\lambda_2 = 2$ имеет кратность 2. Поэтому ФСР этого уравнения состоит из функций 1, t, t^2, e^{2t}, te^{2t}, а общее решение имеет вид

$$y_{OO}(t) = C_1 + C_2t + C_3t^2 + C_4e^{2t} + C_5te^{2t}.$$

Заметим, что если среди корней характеристического уравнения $\lambda_1, \ \ldots, \ \lambda_k$ есть комплексные, то ФСР уравнения (7.20), предложенная в теоремах 7. 13, 7. 14, окажется комплексной. Покажем, что в случае вещественных коэффициентов уравнения (7.20) можно построить вещественную ФСР и приведем алгоритм ее построения.

Как было показано при доказательстве утверждения 6.7, если уравнение с вещественными коэффициентами

$$\lambda^n + a_1\lambda^{(n-1)} + \ldots + a_n = 0$$

имеет комплексный корень λ_0 кратности n_0, то и $\overline{\lambda}_0$ – тоже будет корнем этого уравнения той же кратности n_0.

Пусть $\lambda_0 = \alpha + i\beta$ и $\overline{\lambda}_0 = \alpha - i\beta$ – комплексные корни характеристического уравнения (7.22) кратности n_0. Из этого следует, что в комплексной ФСР комплексные решения, отвечающие этим корням, встречаются парами

$$y_l(t) = t^l e^{\lambda_0 t} \qquad \text{и} \qquad \hat{y}_l(t) = t^l e^{\overline{\lambda}_0 t}, \qquad 0 \leqslant l \leqslant n_0 - 1.$$

Покажем, что $\hat{y}_l(t) = \overline{y}_l(t)$. Действительно, имеем

$$\begin{aligned} \hat{y}_l(t) &= t^l e^{\overline{\lambda}_0 t} = t^l e^{(\alpha - i\beta)t} = t^l e^{\alpha t} e^{-i\beta t} = \\ &= t^l e^{\alpha t}\big(\cos\beta t - i\sin\beta t\big) = \overline{t^l e^{\alpha t}\big(\cos\beta t + i\sin\beta t\big)} = \\ &= \overline{t^l e^{\alpha t} e^{i\beta t}} = \overline{t^l e^{\lambda_0 t}} = \overline{y}_l(t). \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались формулами Эйлера

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi, \qquad e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi.$$

Это означает, что мы можем воспользоваться теоремой 7. 9 о переходе от комплексной ФСР к вещественной. Согласно этой теореме пару комплексных решений $y_l(t)$ и $\overline{y}_l(t)$ мы заменяем на пару вещественных решений

$$u_l(t) = \operatorname{Re} y_l(t) = \operatorname{Re} t^l e^{\lambda_0 t} = \operatorname{Re} t^l e^{\alpha t}\big(\cos\beta t + i\sin\beta t\big) = t^l e^{\alpha t}\cos\beta t$$

и

$$v_l(t) = \operatorname{Im} y_l(t) = t^l e^{\alpha t}\sin\beta t.$$

Таким образом, чтобы построить вещественную ФСР нужно для каждой пары $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$ и $\overline{\lambda}_j = \alpha_j - i\beta_j$ комплексно сопряженных корней характеристического уравнения кратности n_j выбрать один, например, λ_j, выписать все отвечающие ему комплексные решения уравнения (7.20)

$$e^{\lambda_j t}, \ te^{\lambda_j t}, \ \ldots, \ t^{n_j - 1}e^{\lambda_j t},$$

взять их вещественные и мнимые части

$$\begin{gathered} e^{\alpha_j t}\cos\beta_j t, \ \ e^{\alpha_j t}\sin\beta_j t, \ \ te^{\alpha_j t}\cos\beta_j t, \ \ te^{\alpha_j t}\sin\beta_j t, \ \ \ldots, \\ t^{(n_j-1)}e^{\alpha_j t}\cos\beta_j t, \ \ t^{(n_j-1)}e^{\alpha_j t}\sin\beta_j t, \end{gathered} \tag{7.27}$$

затем добавить к полученным решениям вида (7.27) (вещественные) решения, отвечающие вещественным корням характеристического уравнения.

Пример 7. 8. *Решим уравнение*

$$y^{(V)}+2y'''+y\,'=0.$$

Составляем и решаем характеристическое уравнение

$$\lambda^5+2\lambda^3+\lambda=0 \qquad \text{или} \qquad \lambda\left(\lambda^2+1\right)^2=0.$$

Раскладывая левую часть на множители, имеем

$$\lambda\big(\lambda-i\big)^2\big(\lambda+i\big)^2=0.$$

Отсюда $\lambda_1=0$, $\lambda_2=i$, $\lambda_3=\overline{\lambda}_2=-i$. Корню $\lambda_1=0$ отвечает решение $e^{0t}=1$. Из пары комплексно сопряженных корней λ_2 и λ_3 кратности 2, выбираем один. Пусть это будет $\lambda_2=i$. Записываем отвечающие ему линейно независимые комплексные решения e^{it}, te^{it}. Их вещественные и мнимые части есть $\cos t$, $\sin t$, $t\cos t$, $t\sin t$. В результате получаем вещественную ФСР 1, $\cos t$, $\sin t$, $t\cos t$, $t\sin t$.

Записываем общее решение уравнения

$$y_{oo}(t)=C_1+C_2\cos t+C_3\sin t+C_4t\cos t+C_5t\sin t.$$

7. 6. Неоднородное линейное ОДУ высокого порядка с постоянными коэффициентами

Рассмотрим неоднородное линейное ОДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами

$$L(y)\equiv y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_ny=f(t), \tag{7.28}$$

$a_1,...,a_n$ – заданные вещественные числа, $f(t)$ – заданная непрерывная на промежутке $\langle a,b\rangle$ функция и соответствующее однородное уравнение

$$L(y)=0, \tag{7.29}$$

В п. 7.4 была доказана формула общего решения неоднородного линейного ОДУ n-го порядка

$$y_{oн}(t)=y_{чн}(t)+y_{oo}(t),$$

где $y_{чн}(t)$ – некоторое частное решение неоднородного уравнения, а $y_{oo}(t)$ – общее решение соответствующего однородного уравнения. Способ нахождения общего решения линейного однородного уравнения с постоянными коэффициентами был приведен в п. 7.5. Общим методом нахождения $y_{чн}(t)$ линейного неоднородного ОДУ является метод вариации постоянных, он описан в п. 7.4.

Метод Дюамеля – это еще один метод нахождения частного решения неоднородного уравнения и его основное преимущество состоит в том, что решение $y_{чн}(t)$ выписывается явно, в виде интеграла свертки правой части $f(t)$ с некоторым (специальным) решением однородного уравнения. Разберем это подробнее. Пусть требуется найти $y_{чн}(t)$ для уравнения (7.28). Найдем решение следующей (специальной) задачи Коши для однородного уравнения (7.29) :

$$\begin{cases} x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_n x(t) = 0, \qquad t \in \mathbb{R}, \\ x(t_0) = x'(t_0) = \ldots = x^{(n-2)}(t_0) = 0, \\ x^{(n-1)}(t_0) = 1. \end{cases} \tag{7.30}$$

Такое решение существует и притом единственное на $\mathbb{R}$, обозначим его $X(t)$. Тогда функция

$$Y(t) = \int_{t_0}^{t} X(t - \tau + t_0) f(\tau) d\tau = \int_{0}^{t-t_0} X(t - \eta) f(t_0 + \eta) d\eta$$

является решением уравнения (7.28) (в последнем интеграле сделана замена $\tau - t_0 = \eta$).

Проверим, что $Y(t)$ – решение (7.28), для этого, пользуясь правилом вычисления производной интеграла с переменным верхним пределом, вычислим производные:

$$Y^{(1)}(t) = \underbrace{X(t_0)}_{=0} f(t) + \int\limits_{t_0}^{t} X^{(1)}(t - \tau + t_0) f(\tau) d\tau = \int\limits_{t_0}^{t} X^{(1)}(t - \tau + t_0) f(\tau) d\tau,$$

$$Y^{(2)}(t) = \underbrace{X^{(1)}(t_0)}_{=0} f(t) + \int\limits_{t_0}^{t} X^{(2)}(t - \tau + t_0) f(\tau) d\tau = \int\limits_{t_0}^{t} X^{(2)}(t - \tau + t_0) f(\tau) d\tau, \ldots,$$

$$Y^{(n-1)}(t) = \underbrace{X^{(n-2)}(t_0)}_{=0} f(t) + \int\limits_{t_0}^{t} X^{(n-1)}(t - \tau + t_0) f(\tau) d\tau =$$

$$= \int\limits_{t_0}^{t} X^{(n-1)}(t - \tau + t_0) f(\tau) d\tau,$$

$$Y^{(n)}(t) = \underbrace{X^{(n-1)}(t_0)}_{=1} f(t) + \int\limits_{t_0}^{t} X^{(n)}(t - \tau + t_0) f(\tau) d\tau =$$

$$= f(t) + \int\limits_{t_0}^{t} X^{(n)}(t - \tau + t_0) f(\tau) d\tau$$

и найдем значение выражения

$$Y^{(n)}(t) + a_1 Y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_{n-1} Y^1(t) + a_n Y(t) =$$

$$= f(t) + \int\limits_{t_0}^{t} \underbrace{[X^{(n)} + a_1 X^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} X^1 + a_n X]}_{=0} f(\tau)\, d\tau = f(t),$$

т.е. $Y(t)$ является решением уравнения (7.28). Здесь мы пользовались тем, что $X(t)$ удовлетворяет (7.30). Таким образом, найдя решение специальной задачи Коши (7.30), мы можем сразу выписать частное решение неоднородного уравнения (7.28) в виде интеграла Дюамеля:

$$y_{чн}(t) = \int\limits_{t_0}^{t} X(t-\tau+t_0)f(\tau)d\tau, \tag{7.31}$$

причем, при выводе этой формулы установлено, что

$$y(t_0) = y'(t_0) = \ldots = y^{(n-1)}(t_0) = 0.$$

Если $t_0 = 0$, то (7.31) превращается в свертку двух функций $X(t)$ и $f(t)$:

$$y_{чн}(t) = \int\limits_{0}^{t} X(t-\tau)f(\tau)d\tau \equiv X * f. \tag{7.32}$$

Замечание 7.3. Без ограничения общности можно считать $t_0 = 0$, для уравнения заданного на всей числовой оси этого легко добиться заменой $t - t_0$ на t. Всюду в дальнейшем мы так и будем считать.

Рассмотрим примеры.

Пример 7.9. *Решим уравнение*

$$y'' + 4y = sin2t. \tag{7.33}$$

Записываем соответствующее однородное уравнение

$$y'' + 4y = 0. \tag{7.34}$$

Для него составляем и решаем характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \lambda_1 = 2i,\ \lambda_2 = -2i.$$

Выберем, например, корень $\lambda_1 = 2i$. Ему отвечает комплексное решение $\exp(2it)$, его вещественная и мнимая части $\cos 2t$ и $\sin 2t$ образуют вещественную ФСР уравнения (7.34) и, следовательно, его общее решение запишется в виде:

$$y_{OO}(t) = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t. \tag{7.35}$$

Найдем специальное решение $X(t)$ однородного уравнения (7.34), удовлетворяющее условиям $X(0) = 0$, $X'(0) = 1$. Для этого в формулу (7.35) подставим начальные данные и определим C_1, C_2 из системы:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 \cdot 0 = 0, \\ -2C_1 \cdot 0 + 2C_2 = 1, \end{cases}$$

откуда $C_1 = 0$, $C_2 = \frac{1}{2}$ и $X(t) = \frac{1}{2}\sin 2t$. Теперь найдем частное решение $y_{чн}(t)$ неоднородного уравнения (7.33) по формуле (7.32):

$$y_{чн}(t) = \int\limits_0^t \frac{1}{2}\sin 2(t-\tau)\sin(2\tau)d\,\tau = \frac{1}{4}\int\limits_0^t [\cos(2t-4\tau) - \cos 2t]d\,\tau =$$

$$= \frac{1}{4}\left[-\frac{1}{4}\sin(2t-4\tau) - \tau\cos 2t\right]\Big|_0^t = \frac{1}{8}\left(\sin 2t - 2t\cos 2t\right)$$

Записываем общее решение неоднородного уравнения (7.32):

$$y_{он}(t) = C_1\cos 2t + C_2\sin 2t + \frac{1}{8}\sin 2t - \frac{t}{4}\cos 2t =$$

$$= C_1\cos 2t + \widetilde{C_2}\sin 2t - \frac{1}{4}t\cos 2t,$$

(здесь $\widetilde{C_2} = C_2 + \frac{1}{8}$).

Пример 7. 10. *Решим уравнение*

$$y\,'' - 2y\,' + y = te^t. \tag{7.36}$$

Ищем решение в виде

$$y_{он}(t) = y_{чн}(t) + y_{оо}(t).$$

Составляем и решаем характеристическое уравнение для соответствующего однородного уравнения

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow (\lambda-1)^2 = 0, \Leftrightarrow \lambda = 1.$$

Кратность корня $\lambda = 1$ равна 2, поэтому ФСР соответствующего однородного уравнения есть $\exp(t), t\exp(t)$. Следовательно, его общее решение запишется в виде:

$$y_{оо}(t) = C_1e^t + C_2te^t.$$

Найдем специальное решение $X(t)$ однородного уравнения (7.34), удовлетворяющее условиям $X(0) = 0$, $X\,'(0) = 1$, для этого в формулу $y_{оо}(t)$ подставим начальные данные и определим C_1, C_2 из системы:

$$\begin{cases} C_1 = 0, \\ C_2 \cdot (e^t + te^t)\Big|_{t=0} = 1, \end{cases}$$

откуда $C_1 = 0$, $C_2 = 1$ и $X(t) = t\exp(t)$. Частное решение $Y(t)$ неоднородного уравнения (7.36) вычисляем по формуле (7.32)

$$y_{чн}(t) = \int\limits_0^t (t-\tau)e^{t-\tau}\tau e^{\tau}d\,\tau = e^t\int\limits_0^t (t\tau - \tau^2)d\,\tau = \frac{t^3}{6}e^t.$$

Следовательно,

$$y_{он}(t) = C_1e^t + C_2te^t + \frac{t^3}{6}e^t.$$

Замечание 7.4. Метод Дюамеля особенно удобно использовать когда требуется найти решение уравнения с различными правыми частями при неизменной левой. Такая ситуация нередко возникает в курсе уравнений математической физики при решении задач методом Фурье.

При нахождении частного решения неоднородного линейного ОДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами методом вариации постоянных или по формуле Дюамеля приходится вычислять интегралы (см. примеры 7.5, 7.9, 7.10). Однако в случае, когда неоднородность $f(t)$ в уравнении (7.28) имеет (специальный) вид описанный в определении 7.7, частное решение уравнения (7.28) можно найти методом неопределенных коэффициентов (без интегрирования). Как это делается будет показано ниже.

Определение 7.7. Выражение вида

$$R(t)\cdot e^{\gamma t}, \tag{7.37}$$

где $R(t)=r_0t^m+r_1t^{m-1}+\ldots+r_{m-1}t+r_m$ – многочлен степени m, $(r_0\neq 0)$ с комплексными коэффициентами $r_j=p_j+iq_j$, $p_j,q_j\in\mathbb{R}$, при всех $j=0,1,...,m$, а $\gamma=\alpha+i\beta$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ – называется комплексным квазимногочленом.

Теорема 7.15. *Рассмотрим неоднородное линейное ОДУ n-го порядка с постоянными вещественными коэффициентами, у которого правая часть $f(t)$ – комплексный квазимногочлен*

$$L(y)\equiv y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_ny=R(t)\cdot e^{\gamma t}, \tag{7.38}$$

тогда это уравнение имеет комплексное решение вида

$$\varphi(t)=t^sH(t)e^{\gamma t}, \tag{7.39}$$

где $H(t)$ – многочлен с комплексными коэффициентами той же степени, что и $R(t)$, s равно нулю, если число $\gamma=\alpha+i\beta$ не является корнем характеристического уравнения, и s равно кратности корня, если γ – корень характеристического уравнения.

Доказательство. Подставляя (7.39) в (7.38) получаем для $H(t)$ уравнение

$$L(t^se^{\gamma t}H(t))=R(t)\cdot e^{\gamma t}. \tag{7.40}$$

Запишем многочлен $R(t)$ в следующем виде

$$R(t)=r_0\cdot t^m+R_1(t), \tag{7.41}$$

где $r_0\cdot t^m$ – старший член многочлена, а $R_1(t)$ – его младшая часть, причем, $R_1(t)\equiv 0$, если $m=0$ и $R_1(t)$ – многочлен степени не выше $m-1$, если $m\geqslant 1$. Точно так же представим многочлен

$$H(t)=h_0\cdot t^m+H_1(t), \tag{7.42}$$

где $H_1(t)$ – многочлен степени не выше $m-1$, если $m\geqslant 1$. Подставив выражения (7.41), (7.42) в (7.40) получим

$$L(h_0 \cdot t^{(s+m)} \cdot e^{\gamma t}) + L(t^s H_1(t) \cdot e^{\gamma t}) = r_0 \cdot t^m \cdot e^{\gamma t} + R_1(t) \cdot e^{\gamma t}. \qquad (7.43)$$

Пусть $P(\lambda)$ – это характеристический многочлен степени $n > 0$ оператора L. Если γ – корень характеристического уравнения $P(\lambda) = 0$ кратности $s > 0$, то в силу леммы 7.1 выполняются соотношения:

$$P(\gamma) = P'(\gamma) = \ldots = P^{(s-1)}(\gamma) = 0, \text{ а } P^{(s)}(\gamma) \neq 0, \qquad (7.44)$$

здесь по определению $P^{(0)}(\lambda) \equiv P(\lambda)$.

Заметим, что если число γ не является корнем характеристического уравнения (случай $s = 0$), то соотношения (7.44) все равно выполняются. Применив к первому слагаемому левой части формулы (7.43) лемму 7.2, получим

$$\begin{aligned} h_0 \cdot e^{\gamma t} \left[\frac{P^{(s)}(\gamma)}{s!} \cdot \frac{d^s}{dt^s}(t^{s+m}) + \frac{P^{(s+1)}(\gamma)}{(s+1)!} \cdot \frac{d^{s+1}}{dt^{s+1}}(t^{s+m}) + \ldots + \right. \\ \left. + \frac{P^{(n)}(\gamma)}{n!} \cdot \frac{d^n}{dt^n}(t^{s+m}) \right] + L\left(t^s H_1(t) \cdot e^{\gamma t}\right) = \\ = r_0 \cdot t^m e^{\gamma t} + R_1(t) \cdot e^{\gamma t}. \quad (7.45) \end{aligned}$$

Уравнение (7.45) можно переписать следующим образом

$$\begin{aligned} h_0 \cdot e^{\gamma t} \cdot \frac{P^{(s)}(\gamma)}{s!}(s+m) \cdot \ldots \cdot (m+1) t^m + L(t^s H_1(t) \cdot e^{\gamma t}) = r_0 \cdot t^m e^{\gamma t} + \\ + e^{\gamma t} \cdot \left[R_1(t) - h_0 \left(\frac{P^{(s+1)}(\gamma)}{(s+1)!} \cdot \frac{d^{s+1}}{dt^{s+1}}(t^{s+m}) + \ldots + \right.\right. \\ \left.\left. + \frac{P^{(n)}(\gamma)}{n!} \cdot \frac{d^n}{dt^n}(t^{s+m}) \right) \right]. \quad (7.46) \end{aligned}$$

Приравнивая коэффициенты при старших степенях переменной t в правой и левой части уравнения (7.46), находим

$$h_0 = \frac{r_0 \cdot s!}{P^{(s)}(\gamma) \cdot (s+m) \cdot \ldots \cdot (m+1)}.$$

При этом уравнение (7.46) принимает вид

$$L\left(t^s \cdot e^{\gamma t} \cdot H_1(t)\right) = e^{\gamma t} \cdot \widetilde{R_1}(t), \qquad (7.47)$$

где $\widetilde{R_1}(t)$ – многочлен стоящий в квадратных скобках формулы (7.46). Теперь степени многочленов $H_1(t)$ и $\widetilde{R_1}(t)$ не превосходят $m - 1$. Таким образом, в результате приведенных выше вычислений найден старший коэффициент h_0 многочлена $H(t)$, а вместо уравнения (7.40) получено аналогичное уравнение

(7.47), в котором степень многочленов $H_1(t)$ и $\widetilde{R_1}(t)$ уменьшилась, по крайней мере, на единицу. Из уравнения (7.47) найдем старший коэффициент многочлена $H_1(t)$, т.е. второй коэффициент многочлена $H(t)$ и так далее. Теорема 7.15 доказана. $\square$

Замечание 7.5. Напомним (см. определение 6.15 из п. 6.8), что выражение вида:

$$e^{\alpha t}\left[\cos(\beta t)\cdot P_r(t)+\sin(\beta t)Q_l(t)\right], \tag{7.48}$$

где $P_r(t)=p_0t^r+p_1t^{r-1}+\ldots+p_r$ и $Q_l(t)=q_0t^l+q_1t^{l-1}+\ldots+q_l$ – многочлены степени r и l соответственно с вещественными коэффициентами ($p_j,q_k\in\mathbb{R}$), называется вещественным квазимногочленом или просто квазимногочленом.

Покажем, что вещественная и мнимая части комплексного квазимногочлена являются вещественными квазимногочленами.

Действительно, с учетом того, что $\exp(\gamma t)=\exp(\alpha t)(\cos(\beta t)+i\sin(\beta t))$, комплексный квазимногочлен (7.37) можно переписать в виде

$$\begin{aligned}
R(t)\cdot e^{\gamma t} &= e^{\alpha t}\cdot(\cos(\beta t)+i\sin(\beta t))\left((p_0+iq_0)t^m+\right.\\
&\quad\left.+(p_1+iq_1)t^{m-1}+\ldots+(p_m+iq_m)\right)=\\
&= e^{\alpha t}\left[\cos(\beta t)\left(p_0t^m+p_1t^{m-1}+\ldots+p_m\right)-\right.\\
&\quad\left.-\sin(\beta t)\left(q_0t^m+q_1t^{m-1}+\ldots+q_m\right)\right]+ie^{\alpha t}\left[\cos(\beta t)\left(q_0t^m+\right.\right.\\
&\quad\left.\left.+q_1t^{m-1}+\ldots+q_m\right)+\sin(\beta t)\left(p_0t^m+p_1t^{m-1}+\ldots+p_m\right)\right]=\\
&= e^{\alpha t}\left(\cos(\beta t)P_{m_1}(t)-\sin(\beta t)Q_{m_2}(t)\right)+ie^{\alpha t}\left(\cos(\beta t)Q_{m_2}(t)-\right.\\
&\quad\left.-\sin(\beta t)P_{m_1}(t)\right),
\end{aligned} \tag{7.49}$$

где $m_1=m$, если $p_0\neq 0$ и $m_1<m$, если $p_0=0$ и, аналогично, $m_2=m$, если $q_0\neq 0$ и $m_2<m$, если $q_0=0$, причем $max(m_1,m_2)=m$, так как p_0, q_0 одновременно не обращаются в нуль. Из (7.49) видно, что вещественная и мнимая части $R(t)\cdot\exp(\gamma t)$ имеют вид (7.48), то есть являются вещественными квазимногочленами.

Докажем лемму о связи комплексного и действительного решений линейного ОДУ с вещественными коэффициентами.

Лемма 7.4. *Пусть* $\varphi(t)=u(t)+iv(t)$ *– комплексное решение неоднородного линейного ОДУ с вещественными коэффициентами*

$$L(y)\equiv y^{(n)}+a_1(t)y^{(n-1)}+\ldots+a_n(t)y=f(t),$$

в котором $f(t)=g(t)+ih(t)$ *– заданная комплексная функция, а функции* $g,h\in C\left(\langle a,\ b\rangle\right)$. *Тогда функция* $u(t)$ *является решением уравнения*

$$L(y)=g(t),$$

а функция $v(t)$ *является решением уравнения*

$$L(y)=h(t).$$

Доказательство. Действительно, имеем такую цепочку верных равенств:

$$L(\varphi) = L(u + iv) = L(u) + iL(v) = g(t) + ih(t).$$

По условию, последнее равенство выполняется на всем $\langle a,\ b\rangle$. Приравнивая вещественную и мнимую части этого тождества, получаем

$$L(u) = g(t),\ L(v) = h(t).$$

Лемма 7.4 доказана. $\square$

Полученные результаты позволяют нам доказать следующую теорему.

Теорема 7.16. *Рассмотрим неоднородное линейное ОДУ n - ого порядка с постоянными вещественными коэффициентами* (7.28), *у которого правая часть $f(t)$ – вещественный квазимногочлен вида* (7.48), *то есть уравнение вида*

$$L(y) \equiv y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = \\ = e^{\alpha t} \cdot [\cos(\beta t) \cdot P_r(t) + \sin(\beta t) \cdot Q_l(t)]\,. \quad (7.50)$$

Тогда это уравнение имеет вещественное решение вида:

$$u(t) = t^s \cdot e^{\alpha t} \cdot (\cos(\beta t) \cdot D_m(t) + \sin(\beta t) \cdot F_m(t))\,, \quad (7.51)$$

здесь $D_m(t)$ и $F_m(t)$ – многочлены степени, меньшей, или равной $m = \max(l, r)$ с вещественными коэффициентами, s равно нулю, если число $\gamma = \alpha + i\beta$ не является корнем характеристического уравнения, и s равно кратности γ, если γ – корень характеристического уравнения.

Доказательство. Правая часть уравнения (7.50) является вещественной частью комплексного квазимногочлена $R(t) \cdot \exp(\gamma t)$ с $m = max(r, l)$, где $R(t) = P_r(t) - iQ_l(t)$. По теореме 7.15 уравнение

$$L(y) = R(t) \cdot e^{\gamma t}$$

имеет комплексное решение

$$\varphi(t) = t^s H(t) \cdot e^{\gamma t},$$

где $H(t)$ – многочлен степени m. Но тогда согласно лемме 7.4, вещественная часть этого решения $u(t) = \mathrm{Re}\,\varphi(t)$, которая является квазимногочленом вида (7.51) (см. замечание 7.5) будет решением уравнения (7.50). Теорема 7.16 доказана. $\square$

Замечание 7.6. Даже если в уравнении (7.50) многочлен $P_r(t) \equiv 0$ или $Q_l(t) \equiv 0$, т.е. правая часть уравнения (7.50) содержит слагаемое только с $\cos(\beta t)$ или только с $\sin(\beta t)$, то все равно решение (7.50) следует искать в виде, содержащем оба слагаемых, и с $\cos(\beta t)$ и с $\sin(\beta t)$.

Замечание 7. 7. Если в уравнении (7.50) правая часть $f(t) = \exp(\alpha t)P_r(t)$ (случай квазимногочлена (7.48) с $\beta = 0$, $\alpha = \gamma$), то частное решение (7.51) ищем в виде

$$u(t) = t^s \cdot e^{\alpha t} \cdot D_r(t),$$

Если в уравнении (7.50) правая часть $f(t) = \cos(\beta t)P_r(t) + \sin(\beta t)Q_l(t)$ (случай квазимногочлена (7.48) с $\alpha = 0$, $\gamma = i\beta$), то частное решение (7.51) ищем в виде

$$u(t) = t^s \cdot (\cos(\beta t) \cdot D_m(t) + \sin(\beta t) \cdot F_m(t)), \; m = \max(l, r).$$

Если в уравнении (7.50) правая часть $f(t) = P_r(t)$ (случай квазимногочлена (7.48) с $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$), то частное решение (7.51) ищем в виде

$$u(t) = t^s \cdot D_r(t).$$

Пример 7. 11. *Решим уравнение*

$$y'' - 2y' = 8\sin(2t). \tag{7.52}$$

Ищем решение в виде

$$y_{он}(t) = y_{чн}(t) + y_{оо}(t).$$

Для этого вначале решаем соответствующее однородное уравнение

$$y'' - 2y' = 0.$$

Составляем и решаем характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - 2\lambda = 0 \quad \Leftrightarrow (\lambda - 2)\lambda = 0, \Leftrightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2.$$

Следовательно, функции $\exp(0t), \exp(2t)$ образуют ФСР однородного уравнения, а его общее решение есть

$$y_{оо}(t) = C_1 + C_2 e^{2t}.$$

Правая часть уравнения (7.52) $f(t) = 8\sin(2t)$ является квазимногочленом с $\gamma = 2i$ и $m = 0$. Так как $\gamma = 2i$ не является корнем характеристического уравнения, то $s = 0$. Согласно теореме 7. 16 ищем частное решение уравнения (7.52) в виде:

$$u(t) = t^0 \cdot (\cos(2t) \cdot D_0(t) + \sin(2t) \cdot F_0(t)) \equiv d\cos(2t) + f\sin(2t).$$

Вычисляем y' и y'':

$$y' = -2d\sin(2t) + 2f\cos(2t),$$

$$y'' = -4d\cos(2t) - 4f\sin(2t).$$

Подставляем y, y' и y'' в (7.52). Получаем уравнение

$$-4d\cos(2t) - 4f\sin(2t) + 4d\sin(2t) - 4f\cos(2t) = 8\sin(2t).$$

Группируя слагаемые с $\cos(2t)$ и $\sin(2t)$, имеем соотношение

$$(-4d - 4f)\cos(2t) + (4d - 4f - 8)\sin(2t) = 0.$$

Требуется так подобрать неопределенные пока коэффициенты d и f, чтобы оно выполнялось тождественно при всех $t \in \mathbb{R}$. В силу линейной независимости функций $\cos(2t)$ и $\sin(2t)$ это возможно только когда коэффициенты при $\cos(2t)$ и $\sin(2t)$ равны нулю

$$\begin{cases} -4d - 4f = 0, \\ -4f + 4d - 8 = 0, \end{cases}$$

Отсюда $d = 1, \;\; f = -1$. В результате мы нашли частное решение уравнения (7.52)

$$y_{чн}(t) = -\cos(2t) + \sin(2t). \tag{7.53}$$

Складывая y_{oo} и $y_{чн}$, получаем общее решение неоднородного уравнения (7.52)

$$y(t) = C_1 + C_2 e2t - \cos(2t) + \sin(2t).$$

Следующая теорема позволяет распространить рассмотренный выше способ нахождения частного решения неоднородного линейного ОДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами на случай, когда $f(t)$ является суммой нескольких квазимногочленов.

Теорема 7. 17. *[принцип суперпозиции]. Пусть в уравнении*

$$L(y) \equiv y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(t)y = f(t) \tag{7.54}$$

функция $f(t) = \sum_{j=1}^{m} f_j(t)$ *, тогда*

$$y_{чн}(t) = \sum_{j=1}^{m} y_{чн,\,j}(t), \tag{7.55}$$

где $y_{чн,\,j}(t)$ *– частное решение уравнения*

$$L(y) = f_j(t) \qquad j = 1, \ldots, m \tag{7.56}$$

Доказательство. Действительно, подставляя функцию $y = \sum_{j=1}^{m} y_{чн,\,j}(t)$ в левую часть уравнения (7.54) и учитывая, что $y_{чн,\,j}(t)$ являются решениями (7.56), получаем

$$L\left(\sum_{j=1}^{m} y_{чн,\,j}(t)\right) = \left(\sum_{j=1}^{m} L(y_{чн,\,j}(t))\right) = \sum_{j=1}^{m} f_j(t) = f(t).$$

Следовательно формула (7.55) действительно дает (частное) решение уравнения (7.54). Теорема 7. 17 доказана. $\square$

Пример 7. 12. *Решим уравнение*

$$y'' - 2y' = 8\sin(2t) + 4t + 2 + 6e^{3t}. \tag{7.57}$$

Поскольку соответствующее однородное уравнение такое же как в примере 7. 11, то $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$ и

$$y_{oo}(t) = C_1 + C_2 e^{2t}.$$

Правая часть $f(t)$ уравнения (7.57) есть сумма трех квазимногочленов:

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) + f_3(t),$$

где $f_1(t) = 8\sin(2t)$, $f_2(t) = 4t + 2$, $f_3(t) = 6\exp(3t)$. Согласно теореме 7. 17 $y_{чн} = y_{чн,1} + y_{чн,2} + y_{чн,3}$, где $y_{чн,1}$ – частное решение уравнения

$$y'' - 2y' = 8\sin(2t), \tag{7.58}$$

$y_{чн,2}$ – частное решение уравнения

$$y'' - 2y' = 4t + 2, \tag{7.59}$$

а $y_{чн,3}$ – частное решение уравнения

$$y'' - 2y' = 6e^{3t}. \tag{7.60}$$

Так как уравнение (7.58) совпадает с уравнением (7.52), то $y_{чн,1}$ задается формулой (7.53)

$$y_{чн,1} = -\cos(2t) + \sin(2t).$$

Правая часть в уравнении (7.59) $f_2(t) = 4t + 2$ – многочлен первой степени, поэтому $m = 1$ и $\gamma = 0$. Так как $\gamma = 0$ – корень характеристического уравнения кратности 1, то $s = 1$. Следовательно, ищем $y_{чн,2}$ в виде

$$y = t(at + b) = at^2 + bt.$$

Вычисляя $y' = 2at + b$ и $y'' = 2a$ и подставляя их в уравнение (7.59), получаем равенство

$$2a - 2(2at + b) = 4t + 2$$

или иначе $2a - 2b - 2 - t(4a + 4) = 0$. Это равенство должно выполняться при любых t, поэтому

$$\begin{cases} 2a - 2b - 2 = 0, \\ 4a + 4 = 0. \end{cases}$$

Отсюда $a = -1$, $b = -2$. В результате мы нашли частное решение

$$y_{чн,2} = -t^2 - 2t.$$

В уравнении (7.60) правая часть $f_3(t) = 6\exp(3t)$ – квазимногочлен с $m = 0$ и $\gamma = 3$. Так как $\gamma = 3$ – не корень характеристического уравнения, то $s = 0$. Следовательно, ищем $y_{чн,3}$ в виде

$$y = ae^{3t}.$$

Вычисляя $y' = 3a\exp(3t)$ и $y'' = 9a\exp(3t)$ и подставляя их в уравнение (7.60), получаем равенство $9a\exp(3t) - 6a\exp(3t) = 6\exp(3t)$, т. е. $3a = 6$. Отсюда $a = 2$, следовательно,

$$y_{чн,\,3} = 2\cdot e^{3t}.$$

Складывая y_{OO}, $y_{чн,\,1}$, $y_{чн,\,2}$ и $y_{чн,\,3}$ получаем общее решение неоднородного уравнения (7.57)

$$y(t) = C_1 + C_2\cdot e^{2t} - \cos(2t) + \sin(2t) - t^2 - 2t + 2\cdot e^{3t}.$$

Глава VIII.

Теория устойчивости

8.1. Основные понятия и определения, относящиеся к устойчивости

Рассмотрим нормальную систему ОДУ первого порядка

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = f_1\big(t,\ y_1,\ \ldots,\ y_n\big), \\ \dot{y}_2 = f_2\big(t,\ y_1,\ \ldots,\ y_n\big), \\ \ldots\ldots\ldots \\ \dot{y}_n = f_n\big(t,\ y_1,\ \ldots,\ y_n\big), \end{cases} \tag{8.1}$$

которую для краткости будем записывать в виде

$$\dot{y} = f\big(t,\ y\big),$$

где $y(t) \equiv \big(y_1(t),\ \ldots,\ y_n(t)\big)$ – искомая вектор-функция, а $f\big(t,\ y\big) \equiv \big(f_1\big(t,\ y\big),\ \ldots,\ f_n\big(t,\ y\big)\big) \in C\left(\big[t_0,\ +\infty\big) \times D\right)$ задана; здесь D – некоторая область в $\mathbb{R}^n$.

Отметим, что без ограничения общности можно считать, что $t_0 = 0$; это достигается заменой $t \leftrightarrow t - t_0$ и не меняет свойств заданных функций.

Для системы (8.1) рассмотрим задачу Коши, состоящую в нахождении решения (8.1), удовлетворяющего условию

$$y(0) = y^0, \qquad y^0 \in D. \tag{8.2}$$

На протяжении всей главы будем предполагать, что $\forall\, y^0 \in D$ решение задачи Коши (8.1), (8.2) существует, единственно и определено при всех $t \in \big[0,\ +\infty\big)$. Соответствующие достаточные условия приведены в гл. III.

Решение задачи Коши (8.1), (8.2) с фиксированным $y^0 \in D$ будем записывать в виде $y = y\big(t,\ y^0\big)$.

Напомним следующее определение из Гл. I.

Пространство переменных $\big(y_1,\ \ldots,\ y_n\big)$ называется **фазовым пространством**, а проекция интегральной кривой системы (8.1) $\big($т.е. множества точек $\big(t,\ y_1(t),\ \ldots,\ y_n(t)\big)$ в $\mathbb{R}^{n+1}\big)$ на фазовое пространство называется **фазовой**

траекторией (рис. 8.1).

Если на (8.1) посмотреть как на систему, описывающую движение «материальной точки» y с координатами $\big(y_1, \ \ldots, \ y_n\big)$ в зависимости от времени t, то смысл фазовой траектории состоит в том, что это все точки пространства переменных $\big(y_1, \ \ldots, \ y_n\big)$, в которых данная «материальная точка» побывала хотя бы при одном значении $t \in \big[0, \ +\infty\big)$.

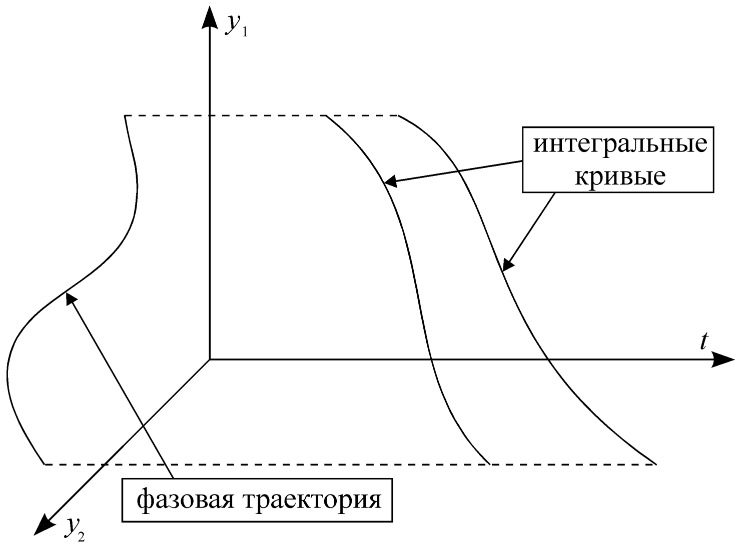

Рис. 8. 1. Интегральные кривые и фазовая траектория

При этом фазовая траектория не содержит никакой информации о «скорости материальной точки» в заданном месте траектории.

В Гл. III была доказана теорема о непрерывной зависимости решения от начальных данных для системы (8.1) (см. следствие 3.2 к теореме 3.1). Грубо говоря, ее геометрический смысл состоит в следующем. Возьмем решение $y = y\big(t, \ y^0\big)$ задачи Коши (8.1), (8.2) и немного «пошевелим» начальные данные: вместо y^0 возьмем $y^0{+}\Delta y^0$, где $\big|\Delta y^0\big|$ мало. Тогда решение $y\big(t, \ y^0{+}\Delta y^0\big)$ будет не сильно отличаться от решения $y\big(t, \ y^0\big)$, но только на отрезке $\big[0, \ T\big]$. Теперь нас будет интересовать случай, когда $t \in \big[0, \ +\infty\big)$.

Вопрос: будет ли решение $y\big(t, \ y^0 + \Delta y^0\big)$ находиться вблизи решения $y\big(t, \ y^0\big)$ при всех $t \in \big[0, \ +\infty\big)$, или эти решения сильно разойдутся при $t \to +\infty$?

Рассмотрим простейший пример.

Пример 8. 1. При $n = 1$ (случай одного уравнения в (8.1)) рассмотрим задачу Коши

$$\dot{y} = ay - 1, \tag{8.3}$$

$$y(0) = y^0, \qquad y^0 \in \mathbb{R}, \tag{8.4}$$

с параметром $a \in \mathbb{R}$.

Найдем общее решение уравнения (8.3).

Случай 1. Пусть $a \neq 0$, тогда решая (8.3) как уравнение с разделяющимися переменными, получим:

$$\frac{dy}{y - \frac{1}{a}} = a \ dt,$$

откуда $y(t) = C \cdot e^{at} + \frac{1}{a}$; здесь $c \in \mathbb{R}$.

Подставляя начальное условие (8.4), найдем C и решение задачи Коши (8.3), (8.4) запишем в виде

$$y(t,\ y^0) = \left(y^0 - \frac{1}{a}\right) \cdot e^{at} + \frac{1}{a}; \tag{8.5}$$

здесь $t \in [0,\ +\infty)$.

Пусть теперь начальное значение будет $y^0 + \Delta y^0$, тогда из (8.5)

$$y(t,\ y^0 + \Delta y^0) = \left(y^0 + \Delta y^0 - \frac{1}{a}\right) \cdot e^{at} + \frac{1}{a}.$$

При всех $t \in [0,\ +\infty)$ рассмотрим

$$|\Delta y| \equiv |y(t,\ y^0 + \Delta y^0) - y(t,\ y^0)| = |\Delta y^0| \cdot e^{at}.$$

Отсюда получаем:

1) если $a < 0$, то при любом Δy^0, для которого $|\Delta y^0| < \delta$, выполняется

$$|\Delta y| = |\Delta y^0| \cdot e^{at} \leqslant |\Delta y^0| < \delta \qquad \text{при всех } t \geqslant 0;$$

2) если $a > 0$, то при любом $\Delta y^0 \neq 0$ $|\Delta y| \to +\infty$ при $t \to +\infty$.

Говорят, что в первом случае решение $y(t,\ y^0)$ **устойчиво** при любом $y^0 \in \mathbb{R}$, а во втором – **неустойчиво**.

Случай 2. Пусть $a = 0$, тогда интегрируя (8.3) с учетом (8.4), получаем $y(t,\ y^0) = y^0 - t$, $t \in [0,\ +\infty)$.

Пусть теперь начальное значение будет $y^0 + \Delta y^0$, тогда

$$y(t,\ y^0 + \Delta y^0) = y^0 + \Delta y^0 - t.$$

При всех $t \in [0,\ +\infty)$ имеем

$$|\Delta y| \equiv |y(t,\ y^0 + \Delta y^0) - y(t,\ y^0)| = |\Delta y^0|.$$

Откуда получаем, что при любом Δy^0, для которого $|\Delta y^0| < \delta$, выполняется неравенство $|\Delta y| < \delta$ при всех $t \geqslant 0$. Как в случае 1, говорим, что решение $y(t,\ y^0)$ **устойчиво**.

Дадим точные определения.

Рассмотрим решение $y(t,\ y^0)$ задачи Коши (8.1), (8.2). Будем предполагать, что соответствующая ему фазовая траектория лежит в D на положительном расстоянии от ∂D.

Определение 8.1. Решение $y(t,\ y^0)$ называется **устойчивым по Ляпунову**, если

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta(\varepsilon) > 0, \quad \text{такое, что} \quad \forall\, \Delta y^0 : \quad |\Delta y^0| < \delta(\varepsilon) \quad \text{и} \quad \forall\, t \geqslant 0$$

решение $y(t,\ y^0 + \Delta y^0)$ лежит в области $(0,\ +\infty) \times D$, и справедливо неравенство

$$|y(t,\ y^0 + \Delta y^0) - y(t,\ y^0)| < \varepsilon.$$

Определение 8. 2. Решение $y\big(t,\ y^0\big)$ называется **асимптотически устойчивым**, если

1) оно устойчиво по Ляпунову;

2) $\exists\ \delta_1 > 0$ такое, что $\forall\ \Delta y^0 :\quad \big|\Delta y^0\big| < \delta_1$ имеем

$$\lim_{t\to+\infty} \big|y\big(t,\ y^0 + \Delta y^0\big) - y\big(t,\ y^0\big)\big| = 0.$$

Замечание 8.1. Требования 1) и 2) в определении 8.2 независимы: из 1) не следует 2) (это очевидно – см., например, случай $a = 0$ в разобранном выше примере 8.1); также можно привести пример, задачи Коши (8.1), (8.2), для которой из 2) не следует 1) (см. [6, с. 161 – 162]).

Определение 8. 3. Значение $y \equiv y^*$, для которого правая часть системы (8.1) равна нулю $\big(f\big(t,\ y^*\big) \equiv 0\ \ \forall\, t \geqslant 0\big)$, называется **положением равновесия (точкой покоя) системы** (8.1).

Очевидно, положение равновесия y^* системы (8.1) соответствует решению $y(t) \equiv y^*$ этой же системы.

Исследование на устойчивость решения $y\big(t,\ y^0\big)$ системы (8.1) можно свести к исследованию на устойчивость нулевого (тривиального) решения системы, связанной с (8.1). Именно, справедлива

Теорема 8. 1. *Решение* $y = \varphi\big(t,\ y^0\big)$ *задачи Коши* (8.1), (8.2) *устойчиво (асимптотически устойчиво) тогда и только тогда, когда устойчиво (асимптотически устойчиво) нулевое решение* $x(t) \equiv 0$ *(положение равновесия* $x = 0$*) системы*

$$\dot{x} = F\big(t,\ x\big), \tag{8.6}$$

где $F\big(t,\ x\big) = f\left(t,\ x + \varphi\big(t,\ y^0\big)\right) - f\left(t,\ \varphi\big(t,\ y^0\big)\right)$.

Доказательство. **1.** Установим связь между решениями системы (8.1) и системы (8.6).

Пусть $\tilde{y}(t)$ – решение задачи Коши для системы (8.1) с начальным условием

$$y(0) = \tilde{y}^0. \tag{8.7}$$

Введем функцию $\tilde{x}(t) = \tilde{y}(t) - \varphi\big(t,\ y^0\big)$. Тогда имеем

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}(t) = \dot{\tilde{y}}(t) - \dot{\varphi}\big(t,\ y^0\big) = f\big(t,\ \tilde{y}\big) - f\left(t,\ \varphi\big(t,\ y^0\big)\right) = \\ = f\left(t,\ \tilde{x} + \varphi\big(t,\ y^0\big)\right) - f\left(t,\ \varphi\big(t,\ y^0\big)\right) = F\big(t,\ \tilde{x}\big).\end{aligned}$$

Кроме того, $\tilde{x}(0) = \tilde{y}^0 - y^0$.

Таким образом, решению $y = \tilde{y}(t)$ задачи Коши (8.1), (8.7) соответствует решение $x = \tilde{x}(t)$ системы (8.6), удовлетворяющее начальному условию

$$x(0) = \tilde{y}^0 - y^0. \tag{8.8}$$

В частности, решению $y = \varphi\big(t,\ y^0\big)$ задачи Коши (8.1), (8.2) соответствует решение $x \equiv 0$ задачи Коши для системы (8.6) с начальным условием

$$x(0) = 0. \tag{8.9}$$

При этом в силу построения $F\big(t,\ x\big)$ видим, что $F\big(t,\ 0\big) \equiv 0$, т.е. $x = 0$ – положение равновесия системы (8.6).

Итак, решение $y = \varphi\big(t,\ y^0\big)$ задачи Коши (8.1), (8.2) соответствует положение равновесия $x = 0$ системы (8.6).

2. Докажем теорему 8.1 в случае исследования решения на устойчивость по Ляпунову (случай асимптотической устойчивости рассматривается аналогично).

Необходимость. Пусть решение $y = \varphi\big(t,\ y^0\big)$ системы (8.1) устойчиво по Ляпунову. Это означает, что

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta_0(\varepsilon) > 0, \quad \text{такое, что} \quad \forall\, \Delta y^0 : \quad \big|\Delta y^0\big| < \delta_0(\varepsilon) \quad \text{и для всех} \quad t \geqslant 0$$

$$\Big|y\big(t,\ y^0 + \Delta y^0\big) - y\big(t,\ y^0\big)\Big| < \varepsilon.$$

При переходе к системе (8.6) это означает, что при тех же Δy^0 и всех $t \geqslant 0$

$$\Big|x\big(t,\ \Delta y^0\big) - 0\Big| < \varepsilon,$$

а следовательно, решение $x(t) \equiv 0$ системы (8.6) является устойчивым по Ляпунову.

Достаточность утверждения теоремы доказывается аналогично. □

Следствие 8.1. *В соответствии с доказанной теоремой 8.1 задачу об исследовании на устойчивость произвольного решения системы* (8.1) *можно свести к задаче исследования на устойчивость решения* $x(t) \equiv 0$ *системы* (8.6)*, для которой* $x = 0$ *является точкой покоя.*

Перепишем определение устойчивости и асимптотической устойчивости для случая тривиального решения $x(t) \equiv 0$ системы (8.6).

Определение 8.4. Положение равновесия $x = 0$ системы (8.6) называется **устойчивым по Ляпунову**, если

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta_0(\varepsilon) > 0, \quad \text{такое, что} \quad \forall\, x^0 \in D : \quad \big|x^0\big| < \delta_0(\varepsilon) \quad \text{следует, что}$$

$$\Big|x\big(t,\ x^0\big)\Big| < \varepsilon \qquad \forall\, t \geqslant 0.$$

Положение равновесия $x = 0$ системы (8.6) называется **асимптотически устойчивым**, если

1) оно устойчиво по Ляпунову;

2) $\exists\, \delta_1 > 0$, такое, что $\forall\, x^0 : \quad \big|x^0\big| < \delta_1$ следует, что

$$\lim_{t \to +\infty} \Big|x\big(t,\ x^0\big)\Big| = 0.$$

Геометрическая интерпретация данного определения приведена на рис 8.2 – 8.5.

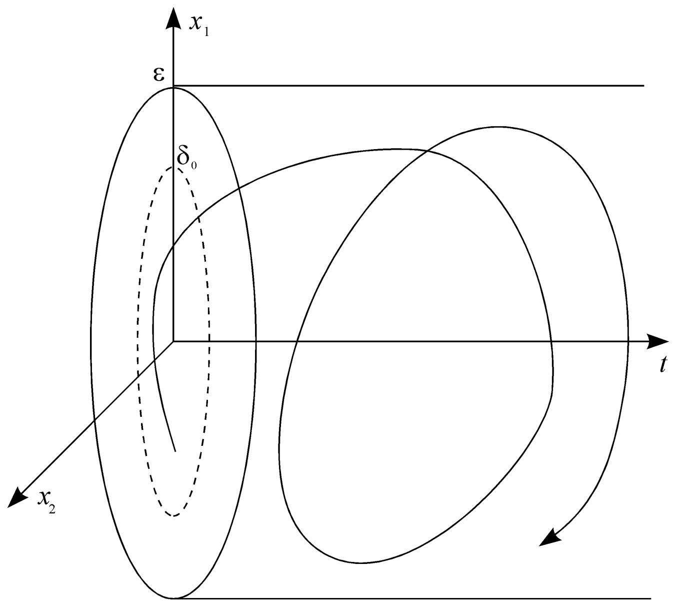

Рис. 8. 2. Устойчивость по Ляпунову в терминах интегральной кривой

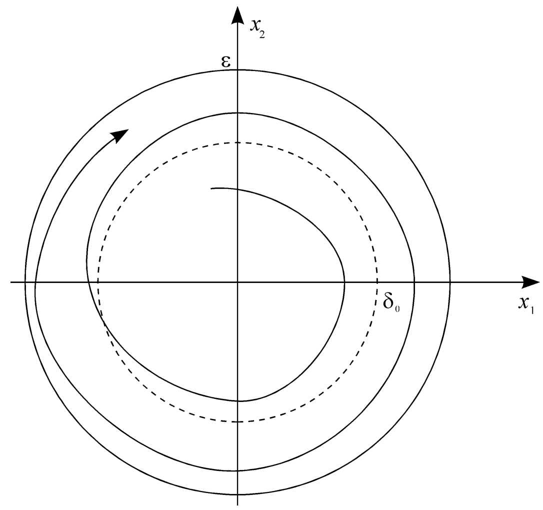

Рис. 8. 3. Устойчивость по Ляпунову в терминах фазовой траектории

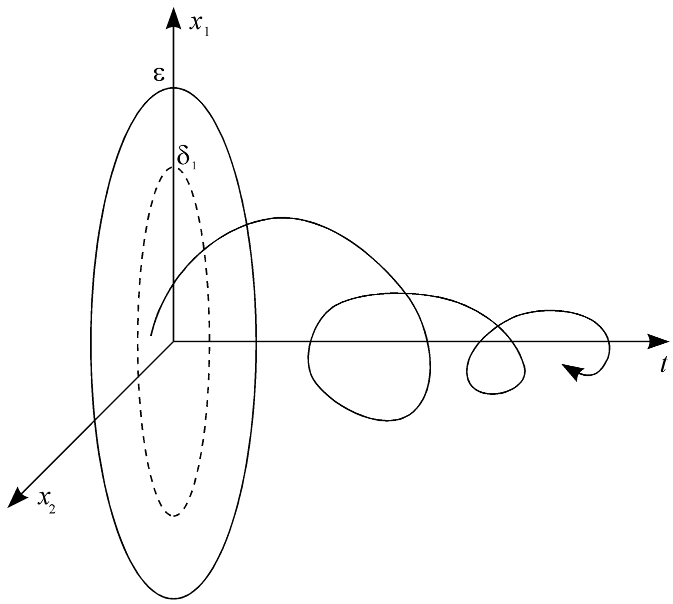

Рис. 8. 4. Асимптотическая устойчивость в терминах интегральной кривой

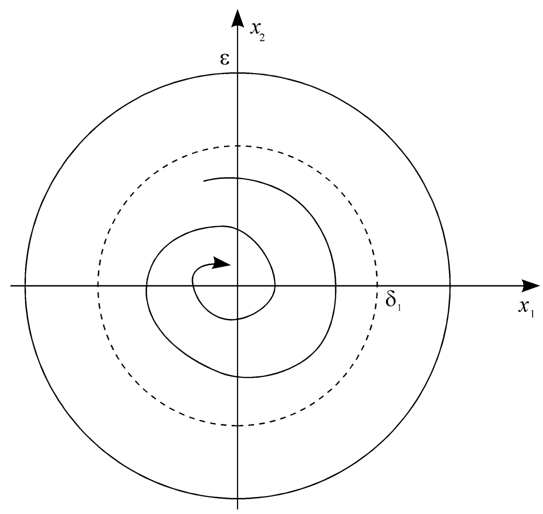

Рис. 8. 5. Асимптотическая устойчивость в терминах фазовой траектории

Пример 8. 2. Пусть $n = 1$. Рассмотрим уравнение

$$\dot{x} = \lambda x \tag{8.10}$$

и исследуем на устойчивость положение равновесия $x = 0$.

Решая уравнение (8.10), получим, что

$$x\left(t,\ x^0\right) = x^0 \cdot e^{\lambda t}.$$

Таким образом,

а) если $\lambda < 0$, то $\left|x\left(t,\ x^0\right)\right| \to 0$ при $t \to +\infty$ и, следовательно, $x = 0$ – асимптотически устойчиво;

б) если $\lambda = 0$, то $\left|x\left(t,\ x^0\right)\right| \equiv \left|x^0\right| \quad \forall\ t \geqslant 0$ и, следовательно, $x = 0$ устойчиво по Ляпунову, но не является асимптотически устойчивым;

в) если $\lambda > 0$, то $\left|x\left(t,\ x^0\right)\right| \to \infty$ при $t \to +\infty$ и, следовательно, $x = 0$ неустойчиво.

8.2. Устойчивость решений линейной системы

Важным частным случаем является случай линейной системы:

$$\dot{x} = A(t)\,x, \tag{8.11}$$

где $A(t)$ – квадратная матрица n-го порядка с элементами $a_{ij}(t)$.

Будем предполагать, что $a_{ij}(t) \in C\left(\left[0,\ +\infty\right)\right)$, а значит, выполнены условия теоремы существования и единственности решения задачи Коши для системы (8.11).

Очевидно, $x = 0$ – положение равновесия (точка покоя) системы (8.11).

Справедливы следующие теоремы об устойчивости положения равновесия $x = 0$ системы (8.11).

Теорема 8.2 (Необходимое и достаточное условие устойчивости решения линейной системы)**.** *Положение равновесия* $x = 0$ *системы* (8.11) *устойчиво тогда и только тогда, когда все решения этой системы устойчивы.*

Достаточность справедлива при условии, что хотя бы одно решение системы (8.11) *устойчиво.*

Доказательство. **Необходимость.** Пусть точка покоя $x = 0$ устойчива. Это означает, что $\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ \delta_1(\varepsilon) > 0$, такое, что для любого решения $x(t)$ системы (8.11), для которого $\left|x(0)\right| < \delta_1(\varepsilon)$, следует, что $\left|x(t)\right| < \varepsilon \ \ \forall\ t \geqslant 0$.

Рассмотрим теперь произвольное решение $x^*(t)$ системы (8.11) и докажем его устойчивость. Для произвольного $\varepsilon > 0$ рассмотрим $\delta_1(\varepsilon) > 0$, выбранное выше.

Пусть теперь $\hat{x}(t)$ – решение системы (8.11), такое, что $|\hat{x}(0) - x^*(0)| < \delta_1(\varepsilon)$. Обозначим $y(t) = \hat{x}(t) - x^*(t)$. Тогда $y(t)$ – решение системы (8.11), причем $\left|y(0)\right| < \delta_1(\varepsilon)$. Тогда в силу выбора $\delta_1(\varepsilon)$ выше мы получаем, что $\left|y(t)\right| < \varepsilon$ для всех $t \geqslant 0$. Это равносильно тому, что $|\hat{x}(t) - x^*(t)| < \varepsilon$ для всех $t \geqslant 0$.

В соответствии с определением устойчивости по Ляпунову это означает, что решение $x^*(t)$ устойчиво по Ляпунову. Необходимость в теореме 8.2 доказана.

Докажем **достаточность.** Пусть $x^*(t)$ устойчивое по Ляпунову решение системы (8.11). Тогда $\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ \delta_2(\varepsilon) > 0$, такое, что для любого $x(t)$ – решения системы (8.11), удовлетворяющего условию $\left|x(0) - x^*(0)\right| < \delta_2(\varepsilon)$, следует, что $|x(t) - x^*(t)| < \varepsilon$ для всех $t \geqslant 0$.

Пусть теперь $y(t)$ – произвольное решение системы (8.11), для которого $\bigl|y(0)\bigr| < \delta_2(\varepsilon)$. Положим $\hat{x}(t) = x^*(t) + y(t)$. Тогда $\hat{x}(t)$ – решение системы (8.11), причем

$$|\hat{x}(0) - x^*(0)| = \bigl|y(0)\bigr| < \delta_2(\varepsilon).$$

Поскольку решение $x^*(t)$ устойчиво по Ляпунову, то из последнего условия вытекает, что

$$\forall\, t \geqslant 0 \quad \bigl|y(t)\bigr| \equiv |\hat{x}(t) - x^*(t)| < \varepsilon,$$

а следовательно, решение $x(t) \equiv 0$ устойчиво по Ляпунову. Теорема 8. 2 доказана. □

Теорема 8. 3 (Необходимое и достаточное условие асимптотической устойчивости решения линейной системы)**.** *Положение равновесия* $x = 0$ *системы* (8.11) *асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда все решения этой системы асимптотически устойчивы.*

Достаточность справедлива при условии, что хотя бы одно решение системы (8.11) *асимптотически устойчиво.*

Доказательство. **Необходимость.** Пусть точка покоя $x = 0$ асимптотически устойчива. Следовательно, она устойчива по Ляпунову, а тогда из теоремы 8. 2 вытекает, что все решения также устойчивы по Ляпунову.

Кроме того, из определения асимптотической устойчивости, найдется $\delta_3 > 0$, такое, что для любого решения $x(t)$ системы (8.11), для которого $\bigl|x(0)\bigr| < \delta_3$, следует, что $\lim\limits_{t\to+\infty} \bigl|x(t)\bigr| = 0$.

Рассмотрим теперь произвольное решение $x^*(t)$ системы (8.11) и докажем, что оно асимптотически устойчиво.

Во-первых, как отмечено выше, оно устойчиво по Ляпунову.

Кроме того, пусть $\hat{x}(t)$ – любое системы (8.11), для которого

$$|\hat{x}(0) - x^*(0)| < \delta_3.$$

Обозначим $y(t) = \hat{x}(t) - x^*(t)$. Тогда $y(t)$ – решение системы (8.11), причем $\bigl|y(0)\bigr| < \delta_3$, а значит, в силу выбора δ_3 получаем, что $\lim\limits_{t\to+\infty} \bigl|y(t)\bigr| = 0$, что равносильно условию $\lim\limits_{t\to+\infty} |\hat{x}(t) - x^*(t)| = 0$.

Следовательно, решение $x^*(t)$ асимптотически устойчиво.

Докажем **достаточность.** Пусть $x^*(t)$ – асимптотически устойчивое решение системы (8.11). Тогда оно устойчиво по Ляпунову, а значит, в силу теоремы 8. 2, $x(t) \equiv 0$ также устойчиво по Ляпунову.

С другой стороны, поскольку $x^*(t)$ – асимптотически устойчиво, то найдется $\delta_4 > 0$, такое, что для любого решения $x(t)$ системы (8.11), удовлетворяющего условию $\bigl|x(0) - x^*(0)\bigr| < \delta_4$, следует, что $\lim\limits_{t\to+\infty} |x(t) - x^*(t)| = 0$.

Пусть теперь $y(t)$ – произвольное решение системы (8.11), для которого $\bigl|y(0)\bigr| < \delta_4$. Положим $\hat{x}(t) = x^*(t) + y(t)$. Тогда $\hat{x}(t)$ – решение системы (8.11), причем

$$|\hat{x}(0) - x^*(0)| = \bigl|y(0)\bigr| < \delta_4.$$

А следовательно, $\lim\limits_{t\to+\infty}\bigl|y(t)\bigr| = 0$, откуда вытекает, что решение $x(t)\equiv 0$ асимптотически устойчиво. Теорема 8.3 доказана. $\square$

Теорема 8.4 (Критерий устойчивости линейной системы)**.** *Справедливы два утверждения.*

1) *Точка покоя* $x=0$ *линейной системы* (8.11) *устойчива тогда и только тогда, когда каждое решение этой системы ограничено при* $t\geqslant 0$.

2) *Точка покоя* $x=0$ *линейной системы* (8.11) *асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда* $\forall\ x(t)$ *– решения системы* (8.11) $\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)=0$.

Доказательство утверждения 1). **Необходимость.** Пусть $x=0$ устойчива по Ляпунову. Тогда для $\varepsilon=1$ найдется $\delta>0$, такое, что для любого решения $x^*(t)$ системы (8.11), для которого $\bigl|x^*(0)\bigr|<\delta$, следует, что $\bigl|x^*(t)\bigr|<1$ при всех $t>0$.

Пусть теперь $x(t)$ – произвольное решение системы (8.11), $x(0)\neq 0$ $\bigl($иначе $x(t)\equiv 0\bigr)$.

Запишем тождество $x(t)=\dfrac{2\bigl|x(0)\bigr|}{\delta}\cdot\dfrac{\delta}{2\bigl|x(0)\bigr|}\,x(t)$. Обозначим через $x^*(t)$ функцию $x^*(t)=\dfrac{\delta}{2\bigl|x(0)\bigr|}\,x(t)$. Это – решение системы (8.11), причем $|x^*(0)|=\dfrac{\delta}{2}<\delta$, а следовательно, в силу выбора δ, $|x^*(t)|<1$ при всех $t\geqslant 0$. Но тогда $\forall\, t\geqslant 0$ $\bigl|x(t)\bigr|<\dfrac{2}{\delta}\bigl|x(0)\bigr|$, т.е. $x(t)$ – ограниченное решение.

Докажем **достаточность.** Итак, пусть каждое решение системы (8.11) ограничено. Введем решения $x^{(k)}(t)$: $x^{(k)}(0)=e_k$ – базисный вектор в $\mathbb{R}^n$, $k=1,\ 2,\ \ldots,\ n$.

Как было доказано в Гл. VI (см. утверждение 6.4 из п. 6.2), решения $x^{(k)}(t)$ образуют Ф.С.Р. системы (8.11), а следовательно, произвольное решение $x(t)$ этой системы запишется в виде

$$x(t)=\sum_{k=1}^{n}C_k\,x^{(k)}(t), \tag{8.12}$$

C_k – некоторые константы. Положим в (8.12) $t=0$. Тогда

$$x(0)\equiv\begin{pmatrix}x_1(0)\\ \vdots\\ x_n(0)\end{pmatrix}=C_1\begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}+\ldots+C_n\begin{pmatrix}0\\0\\ \vdots\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}C_1\\C_2\\ \vdots\\C_n\end{pmatrix},$$

откуда $C_k=x_k(0)$. Подставляя в (8.12), получим

$$x(t)=\sum_{k=1}^{n}x_k(0)\cdot x^{(k)}(t).$$

Используя неравенство треугольника в евклидовом пространстве, получим

$$\bigl|x(t)\bigr| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \bigl|x_k(0)\bigr| \cdot \bigl|x^{(k)}(t)\bigr| \leqslant M \sum_{k=1}^{n} \bigl|x_k(0)\bigr| \leqslant M\sqrt{n}\,\bigl|x(0)\bigr|. \tag{8.13}$$

В (8.13) использовано известное арифметическое неравенство

$$\bigl|a_1 + \ldots + a_n\bigr| \leqslant \sqrt{n}\,\sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}\,, \qquad a_k \geqslant 0.$$

Пусть теперь $\varepsilon > 0$ - произвольно.

Положим $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2M\sqrt{n}}$. Если $x(t)$ таково, что $\bigl|x(0)\bigr| < \delta$, то из соотношения (8.13) вытекает, что $\bigl|x(t)\bigr| < \varepsilon$ для всех $t \geqslant 0$, что и означает по определению, что $x(t) \equiv 0$ устойчиво по Ляпунову.

Утверждение 1) доказано.

Доказательство утверждения 2). **Необходимость.** Пусть $x(t) \equiv 0$ – асимптотически устойчиво. Тогда найдется $\delta_1 > 0$, такое, что для любого $x^*(t)$ – решения (8.11), для которого $\bigl|x^*(0)\bigr| < \delta_1$, следует, что $\lim\limits_{t\to+\infty} |x^*(t)| = 0$.

Пусть $x(t)$ – произвольное решение системы (8.11), $x(0) \neq 0$.

Как и выше, запишем тождество $x(t) = \dfrac{2\bigl|x(0)\bigr|}{\delta_1} \cdot \dfrac{\delta_1}{2\bigl|x(0)\bigr|} \cdot x(t)$ и положим $x^*(t) = \dfrac{\delta_1}{2\bigl|x(0)\bigr|}\, x(t)$. Это – решение системы (8.11), причем $|x^*(0)| = \dfrac{\delta_1}{2} < \delta_1$, а следовательно, в силу выбора δ_1, $\lim\limits_{t\to+\infty} x^*(t) = 0$. Но тогда и

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{2\bigl|x(0)\bigr|}{\delta_1} \cdot x^*(t) = 0.$$

В сторону необходимости утверждение 2) доказано.

Докажем **достаточность**. Поскольку для любого решения $x(t)$ системы (8.11) $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = 0$, то каждое решение решение системы (8.11) ограничено, а следовательно, в силу первого утверждения теоремы 8.4 решение $x(t) \equiv 0$ устойчиво по Ляпунову.

А поскольку вообще все решения системы (8.11) стремятся к нулю при $t \to +\infty$, то $x(t) \equiv 0$ будет и асимптотически устойчивым.

Теорема 8.4 доказана. □

Рассмотрим теперь частный случай системы (8.11), когда матрица этой системы не зависит от t, т.е. систему с постоянными коэффициентами

$$\dot{x} = Ax. \tag{8.14}$$

Пусть $\lambda_1, \ \ldots, \ \lambda_s \in \mathbb{C}$ – собственные числа матрицы A, а $k_1, \ \ldots, \ k_s$ – максимальные размеры жордановых клеток, содержащих, соответственно, $\lambda_1, \ \ldots, \ \lambda_s$ на диагонали.

Как было доказано в Гл. VI, всякое решение системы (8.14) может быть записано в виде

$$x(t) = \sum_{j=1}^{s} P^{(j)}_{k_j-1}(t)\, e^{\lambda_j t}, \tag{8.15}$$

где $P^{(j)}_{k_j-1}(t)$ – векторные многочлены степени $k_j - 1$,

$$e^{\lambda_j t} = e^{\alpha_j t}\big(\cos\beta_j t + i\sin\beta_j t\big), \qquad \alpha_j = \operatorname{Re}\lambda_j, \;\; \beta_j = \operatorname{Im}\lambda_j.$$

Замечание 8.2. В курсе математического анализа было доказано, что для любого многочлена $Q(t)$ произведение $Q(t)\cdot e^{\alpha t} \to 0, \quad t \to +\infty$ при $\alpha < 0$.

Из представления (8.15) с учетом замечания 8.2 следует:

а) Если $\forall\; j = 1,\; \ldots,\; s \;\; \operatorname{Re}\lambda_j < 0$, то $x(t) \to 0$ при $t \to +\infty$, а следовательно, в силу теоремы 8.4 точка покоя $x = 0$ системы (8.14) асимптотически устойчива.

б) Если $\forall\; j = 1,\; \ldots,\; s \;\; \operatorname{Re}\lambda_j \leqslant 0$, и $\exists\; j_0 : \;\; \operatorname{Re}\lambda_{j_0} = 0, \;\; k_{j_0} = 1$, то любое решение $x(t)$ системы (8.14) ограничено, а следовательно, в силу теоремы 8.4 точка покоя $x = 0$ системы (8.14) устойчива по Ляпунову.

в) Если $\forall\, j = 1,\; \ldots,\; s \;\; \operatorname{Re}\lambda_j \leqslant 0$, но $\exists\; j_0$ такое, что $\operatorname{Re}\lambda_{j_0} = 0$ и $k_{j_0} > 1$, то из (8.15) следует, что существуют решения системы (8.14) в виде

$$x(t) = P^{(j)}_{k_{j_0}-1}(t)\,\big(\cos\beta_{j_0} t + i\sin\beta_{j_0} t\big).$$

Если $\beta_{j_0} = 0$, то, $\cos\beta_{j_0} t = 1$, $\sin\beta_{j_0} t = 0$ и $\big|x(t)\big| \to \infty$ при $t \to +\infty$. Если же $\beta_{j_0} \neq 0$, то рассмотрим $t_m = \dfrac{2\pi m}{\beta_{j_0}}$, $m = 1,\; 2,\; \ldots,$ тогда, очевидно, $\cos\beta_{j_0} t_m = 1$, $\sin\beta_{j_0} t_m = 0$ и $\big|x(t_m)\big| \to \infty$ при $m \to \infty$.

Следовательно, в обоих случаях решение $x(t)$ неограничено при $t \to +\infty$, а значит точка покоя $x = 0$ системы (8.14) неустойчива в силу теоремы 8.4.

г) Наконец, если $\exists\; j_0$, такое, что $\operatorname{Re}\lambda_{j_0} > 0$, то также существуют неограниченные решения системы (8.14), а следовательно, точка покоя $x = 0$ системы (8.14) является неустойчивой.

8.3. Теоремы Ляпунова об устойчивости

Рассмотрим нормальную (нелинейную) систему ОДУ первого порядка в векторной форме

$$\dot{x} = F\big(t,\; x\big), \tag{8.16}$$

где $F\big(t,\; x\big) = \big(F_1\big(t,\; x\big),\; \ldots,\; F_n\big(t,\; x\big)\big)$ – заданная вектор-функция, причем $F\big(t,\; 0\big) = 0$, т.е. $x = 0$ – точка покоя этой системы. Относительно функции $F(t,\ x)$ предположим, что $F(t,\ x) \in C\left([0,\ +\infty) \times B_K\right)$, где $B_K = \left\{x \in \mathbb{R}^n\ :\ \ |x| \leqslant K\right\}$ – замкнутый шар в $\mathbb{R}^n$ с центром в нуле радиуса $K > 0$, а кроме того, предположим, что при любом $x^0 \in B_K$ решение $x(t;\ x^0)$ задачи Коши для системы (8.16) существует, единственно и не выходит из B_K при всех $t \geqslant 0$.

В этом параграфе будем исследовать решение $x(t) \equiv 0$ на устойчивость, используя **метод Ляпунова** (**метод функции Ляпунова**). Дадим следующее определение.

Определение 8.5. Пусть функция $W(t,\ x) \in C^1\left([0,\ +\infty) \times B_K\right)$. **Производной функции $W(t,\ x)$ в силу системы** (8.16) называется функция:

$$\frac{d}{dt}W(t,\ x)\Big|_{\substack{\text{в силу}\\ \text{системы}}} \equiv \frac{\partial W}{\partial t}(t,\ x) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial W}{\partial x_j}(t,\ x) \cdot F_j(t,\ x). \tag{8.17}$$

Замечание 8.3. Пусть $x(t)$ – решение системы (8.16) и $x(t) \in B_K$ при всех $t \geqslant 0$, тогда

$$\frac{d}{dt}W\big(t,\ x(t)\big) = \frac{\partial W}{\partial t}\big(t,\ x(t)\big) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial W\big(t,\ x(t)\big)}{\partial x_j} \cdot \dot{x}_j = \\ = \frac{\partial W}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial W\big(t,\ x(t)\big)}{\partial x_j} \cdot F_j(t,\ x),$$

что совпадает по форме записи с (8.17). Таким образом, формула (8.17) позволяет найти производную по t сложной функции $W\big(t,\ x(t)\big)$ на решении $x(t)$ системы (8.16).

Замечание 8.4. Если $W = W(x)$ не зависит от t, то

$$\frac{d}{dt}W(x)\Big|_{\substack{\text{в силу}\\ \text{системы}}} = \Big(\operatorname{grad} W,\ F(t,\ x)\Big).$$

Определение 8.6. Функция $V(x)$ называется **положительно определенной в шаре** $B_K = \left\{x \in \mathbb{R}^n \ \middle|\ |x| \leqslant K\right\}$, если выполнены условия:

1) $V(0) = 0$;

2) $\forall\, x \in B_K,\ \ x \neq 0 \quad V(x) > 0$.

Следующая лемма о положительно определенных функциях понадобится в дальнейших рассуждениях.

Лемма 8.1. *Пусть функция* $V(x) \in C(B_K)$ *положительно определена в шаре* B_K. *Тогда справедливы два утверждения:*

1) $\forall\ \delta > 0\ \ \exists\ \varepsilon = \varepsilon(\delta) > 0$, *такое, что* $\forall\ x \in B_K$, *для которого* $|x| > \delta$, *следует неравенство* $V(x) > \varepsilon$;

2) $\forall\, \varepsilon > 0\ \ \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0$, *такое, что* $\forall\, x \in B_K$, *для которого* $V(x) > \varepsilon$, *следует неравенство* $\left|x\right| > \delta$.

Доказательство. Доказывать 1) и 2) нам удобнее от противного. Начнем с первого утверждения, записав его отрицание:

$$\exists \delta_0 > 0\ \ \forall\, \varepsilon > 0\ \ \exists\, x = x(\varepsilon) \in B_K,\ \text{ для которого } \left|x\right| > \delta_0,\ \text{ но } V(x) \leqslant \varepsilon.$$

Возьмем $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$ при $n = 1,\ 2,\ \ldots,$ получим последовательность $x^n \in B_K$, для которой $V\left(x^n\right) \leqslant \frac{1}{n}$, а $\left|x^n\right| > \delta$. В силу ограниченности последовательности $\left\{x^n\right\}$ и замкнутости B_K по теореме Больцано–Вейерштрасса (см. [3, т. 1, с. 287]) из этой последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\left\{x^{n_k}\right\}:\ x^{n_k} \to \bar{x},\ k \to \infty$, причем, очевидно,

$$\delta_0 \leqslant \left|\bar{x}\right| \leqslant K. \tag{8.18}$$

В силу непрерывности $V(x)$ имеем $\lim\limits_{k\to\infty} V\left(x^{n_k}\right) = V\left(\bar{x}\right)$, а поскольку $0 \leqslant V\left(x^{n_k}\right) \leqslant \dfrac{1}{n_k}$, то $\lim\limits_{k\to\infty} V\left(x^{n_k}\right) = 0$, т.е. $V\left(\bar{x}\right) = 0$.

По определению $V(x)$ получаем, что $\bar{x} = 0$, что противоречит (8.18).

Второе утверждение. Запишем отрицание:

$$\exists \varepsilon_0 > 0\ \ \forall\, \delta > 0\ \ \exists\, x = x(\delta) \in B_K:\ \ V(x) > \varepsilon_0,\ \text{ но } \left|x\right| < \delta.$$

Фиксируем данное $\varepsilon_0 > 0$ и положим $\delta_n = \frac{1}{n} > 0$, $\delta_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Тогда найдется последовательность $\left\{x^n\right\} \in B_K$, такая, что $V\left(x^n\right) > \varepsilon_0$, но $\left|x^n\right| \leqslant \delta_n$. Из последнего неравенства следует, что $x^n \to 0$, $n \to \infty$, а следовательно, в силу непрерывности $V(x)$ имеем $\lim\limits_{n\to\infty} V\left(x^n\right) = V(0) = 0$, что противоречит условию $V\left(x^n\right) > \varepsilon_0 > 0$. Доказательство леммы завершено. $\square$

Замечание 8.5. Утверждение леммы 8.1 можно проиллюстрировать рис. 8.6

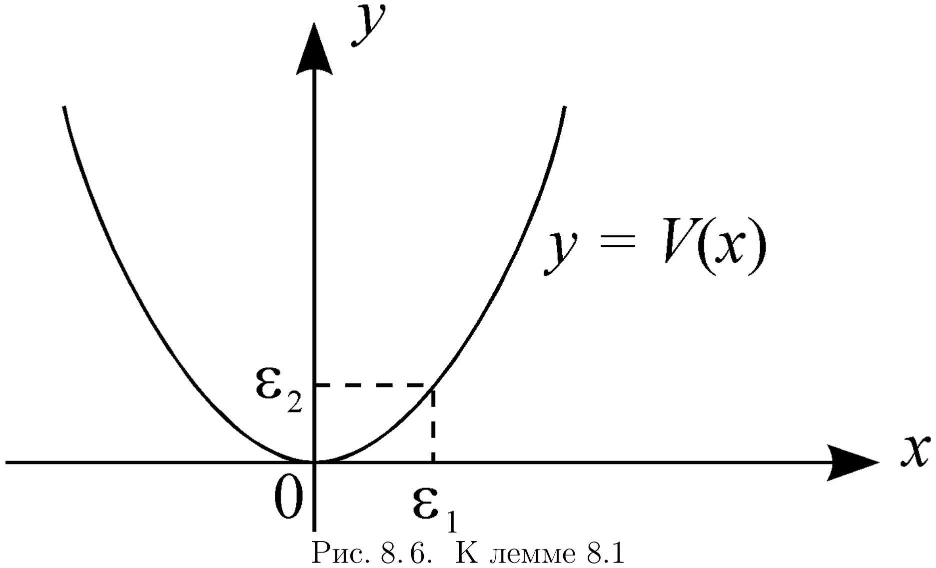

Рис. 8.6. К лемме 8.1

Теорема 8.5 (Ляпунова об устойчивости). *Пусть в шаре* $B_K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leqslant K\}$ *существует положительно определенная функция* $V(x) \in C^1(B_K)$ *(функция Ляпунова), такая, что*

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{\substack{\text{в силу}\\ \text{системы}}} \leqslant 0 \qquad \forall\, t \geqslant 0, \quad \forall\, x \in B_k. \tag{8.19}$$

Тогда нулевое решение $x(t) \equiv 0$ *системы* (8.16) *устойчиво по Ляпунову.*

Доказательство. Рассмотрим произвольное $\delta \in (0,\ K]$. По лемме 8.1 (пункт 1) $\exists\, \varepsilon > 0$, такое, что $\forall\, x \in B_K$: $|x| > \delta$ имеем $V(x) > \varepsilon$.

С другой стороны, в силу непрерывности $V(x)$ $\exists\, \delta_1 > 0$ такое, что $\forall\, x \in B_K :\ |x| < \delta_1$ следует, что $V(x) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Возьмем начальную точку $x(0) = x^0$ в δ_1 – окрестности нуля, т.е. $|x(0)| < \delta_1$, считая при этом $\delta_1 < \delta$, чего всегда можно добиться.

Требуется доказать, что траектория $x(t)$ не выйдет за пределы δ – окрестности точки 0 при всех $t \geqslant 0$, (рис. 8.7), это и будет означать устойчивость. Докажем это.

По выбору $\delta_1 > 0$ имеем $V(x^0) < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Предположим, что $\exists\, t_1 > 0 :\ x(t_1)$ – вышло за пределы δ – окрестности точки 0, т.е. $|x(t_1)| > \delta$, тогда по выбору $\varepsilon > 0$ имеем $V(x(t_1)) > \varepsilon$. Следовательно,

$$V(x(t_1)) - V(x(0)) > \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} > 0.$$

С другой стороны, по формуле конечных приращений Лагранжа, $\exists\, t_* \in (0,\ t_1)$, такое, что

$$\begin{aligned} V(x(t_1)) - V(x(0)) &= \frac{d}{dt} V(x(t))\Big|_{t=t_*} \cdot t_1 = \\ &= (\operatorname{grad} V,\ \dot{x})\Big|_{t=t_*} \cdot t_1 = (\operatorname{grad} V,\ F(t_*,\ x)) \cdot t_1 = \\ &= \left.\frac{dV}{dt}\right|_{\substack{\text{в силу}\\ \text{системы}}} \cdot t_1 \leqslant 0 \quad \text{по условию теоремы.} \end{aligned}$$

Получили противоречие. Следовательно, $\nexists\, t_1 > 0 :\ |x(t_1)| > \delta$. Поэтому $\forall\, \delta > 0\ \exists\, \delta_1 > 0$, такое, что $\forall\, x_0 \in B_K :\ |x_0| < \delta_1$ следует, что $|x(t,\ x_0)| < \delta$

при всех $t \geqslant 0$.

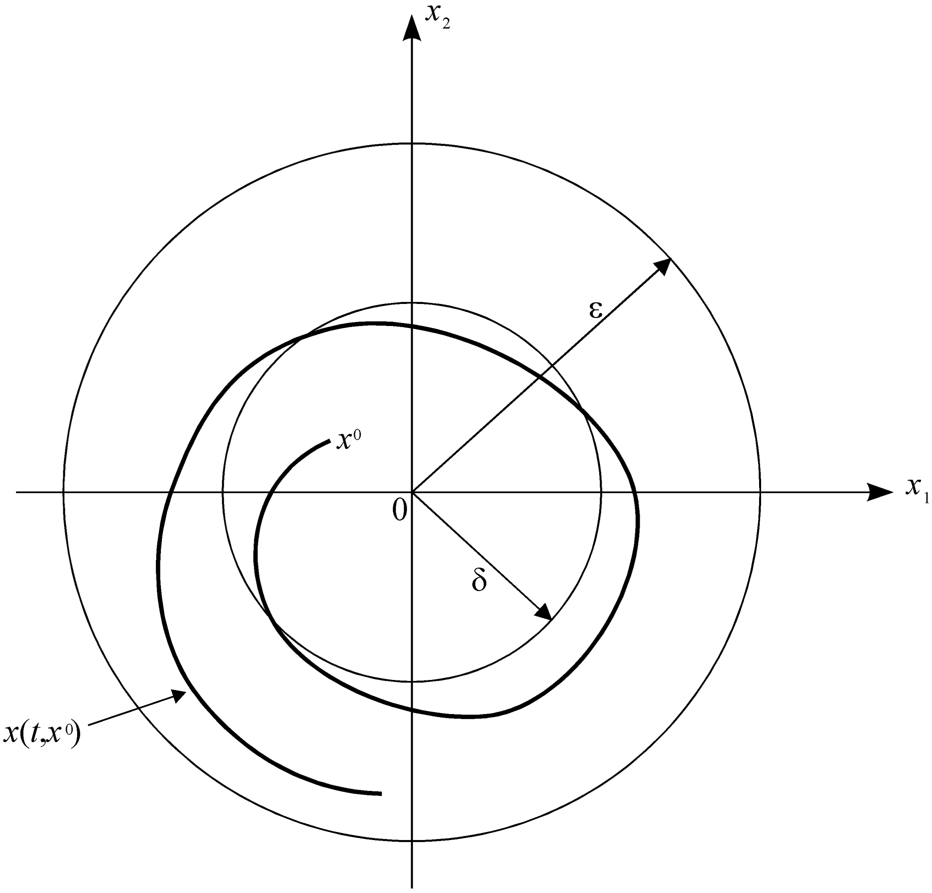

Рис. 8.7. К теореме 8.5

Это и означает устойчивость по Ляпунову нулевого решения. Теорема доказана. □

Теорема 8.6 (Об асимптотической устойчивости). *Пусть в шаре* $B_K = \left\{x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \left|x\right| \leqslant K\right\}$ *существует положительно определенные функции* $V(x)$ *и* $W(x)$ *(функции Ляпунова), причем* $V(x) \in C^1\big(B_K\big)$, *а* $W(x) \in C\big(B_K\big)$, *такие, что*

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{\substack{\textit{в силу}\\ \textit{системы}}} \leqslant -W(x) \qquad \forall\, t \geqslant 0, \quad \forall\, x \in B_k. \tag{8.20}$$

Тогда нулевое решение системы (8.16) *асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Так как $W(x)$ – положительно определена, то из (8.20) следует, что $\left.\frac{dV}{dt}\right|_{\substack{\text{в силу}\\ \text{системы}}} \leqslant 0$ и по теореме 8.5 нулевое решение системы (8.16) устойчиво по Ляпунову.

Следовательно, для $\varepsilon = K$ $\exists\ \delta > 0$, такое, что для любого решения системы (8.16), для которого $x(0) < \delta$, следует, что $x(t) < K$, $t \geqslant 0$.

Рассмотрим произвольное решение $x(t)$ системы (8.16), для которого $x(0) < \delta$.

Для доказательства теоремы 8. 6 надо показать, что

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = 0. \tag{8.21}$$

Из условия (8.20) и замечания 8. 3 вытекает, что

$$\frac{dV\big(x(t)\big)}{dt} = \frac{dV(x)}{dt}\bigg|_{\substack{\text{в силу}\\ \text{системы}}} \leqslant 0,$$

а следовательно, сложная функция $V\big(x(t)\big)$ монотонно не возрастает и, кроме того, $V\big(x(t)\big) \geqslant 0$. Поэтому $\exists\, \alpha \geqslant 0$, такое, что

$$\exists \lim_{t\to+\infty} V\big(x(t)\big) = \alpha \geqslant 0, \qquad V\big(x(t)\big) \geqslant \alpha, \quad \text{так как стремление сверху.}$$

Докажем, что $\alpha = 0$. Пусть, напротив, $\alpha > 0$. Тогда по лемме 8. 1, пункт 2), для $\alpha > 0$ $\exists\, \delta(\alpha) > 0$, такое, что $\big|x(t)\big| > \delta$, а по утверждению пункта 1) той же леммы найдется $\beta > 0$, такое, что $W\big(x(t)\big) \geqslant \beta$, т.е. $-W\big(x(t)\big) \leqslant -\beta < 0$ при $\forall\, t \geqslant 0$. Из этого неравенства вытекает, что

$$\frac{dV\big(x(t)\big)}{dt} = \frac{dV}{dt}\bigg|_{\substack{\text{в силу}\\ \text{системы}}} \leqslant -W\big(x(t)\big) < -\beta,$$

а следовательно,

$$V\big(x(t)\big) - V\big(x(0)\big) = \int\limits_0^t \frac{dV\big(x(\tau)\big)}{d\tau}\, d\tau \leqslant -\beta t.$$

Таким образом, $V\big(x(t)\big) \to -\infty$ при $t \to +\infty$, что противоречит положительной определенности функции $V(x)$. (Здесь надо еще учесть, что в силу первоначального выбора $\delta > 0$ $x(t) \in B_K$, а в шаре B_K функция $V(x)$ положительно определена.)

Итак, мы доказали, что $\alpha = 0$, т.е.

$$\lim_{t\to+\infty} V\big(x(t)\big) = 0. \tag{8.22}$$

Покажем, что из (8.22) следует (8.21). Допустим противное, т.е. $\exists\, \delta > 0$ и существует последовательность $t_k \to +\infty$, для которой $\big|x\big(t_k\big)\big| > \delta$. Тогда по лемме 8. 1 (пункт 1)) получим $V\left(x\big(t_k\big)\right) > \varepsilon > 0$, что противоречит равенству (8.22). Теорема 8. 6 доказана. □

Определение 8. 7. Система вида (8.1), в которой правая часть f не зависит от t $\big($т.е. $f\big(t,\, y\big) \equiv f\big(y\big)\big)$, называется **автономной системой**.

Замечание 8.6. Рассмотрим автономную систему вида (8.16), а именно, систему

$$\dot{x} = F(x), \qquad F(0) = 0, \quad F(x) \in C\big(B_K\big). \tag{8.23}$$

Тогда теорему 8.6 можно сформулировать следующим образом:
Теорема 8.6′**.** *Рассмотрим автономную систему* (8.23). *Пусть существует положительно определенная функция* $V(x) \in C^1\big(B_K\big)$, *такая, что*

$$\frac{dV}{dt}\bigg|_{\substack{\textit{в силу}\\ \textit{системы}}} < 0 \qquad \forall\, x \in B_k, \quad x \neq 0. \tag{8.24}$$

Тогда решение $x(t) \equiv 0$ *системы* (8.23) *асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Поскольку (8.23) автономна, то производная

$$\frac{dV}{dt}\bigg|_{\substack{\text{в силу}\\ \text{системы}}} \equiv \big(\operatorname{grad} V(x),\ F(x)\big) \qquad \text{не зависит от } t.$$

Положим $W^*(x) = -\big(\operatorname{grad} V(x),\ F(x)\big)$. В силу условия теоремы (8.24) функция $W^*(x) \in C\big(B_K\big)$ является положительно определенной функцией, причем в силу ее выбора

$$\frac{dV}{dt}\bigg|_{\substack{\text{в силу}\\ \text{системы}}} = -W^*(x).$$

Таким образом, мы находимся в условиях теоремы 8.6, $W(x) \equiv W^*(x)$, а следовательно, решение $x(t) \equiv 0$ асимптотически устойчиво. □

Теорема 8.7 (Четаева о неустойчивости)**.** *Пусть в шаре* B_K *существуют функции* $V(x) \in C^1\big(B_K\big)$, $W(x) \in C\big(B_K\big)$, *такие, что*

1) $\exists\, \alpha > 0$, *такое, что*

$$\frac{dV(x)}{dt}\bigg|_{\substack{\textit{в силу}\\ \textit{системы}}} \geqslant W(x) > 0 \qquad \textit{при} \quad 0 < \big|x\big| < \alpha;$$

2) $V(0) = 0$*;*

3) $\exists\, \big\{x^n\big\}:\ \ x^n \to 0$ *при* $n \to \infty$, *такая, что* $V\big(x^n\big) > 0$.

Тогда решение $x(t) \equiv 0$ *системы* (8.16) *неустойчиво.*

Доказательство. Предположим противное, т.е. $x(t) \equiv 0$ устойчиво по Ляпунову. Тогда по определению для $\alpha > 0 \ \exists\, \delta > 0$, такое, что $\forall\, x^0 \in B_\delta$ следует, что $\left|x\big(t,\ x^0\big)\right| \leqslant \alpha$ при всех $t \geqslant 0$.

В силу условия 3) теоремы $\exists\, x^0 \in B_\delta$, такое, что $V\big(x^0\big) > 0$. Зафиксируем такое x^0 и обозначим $V\big(x^0\big) = V_0$. Поскольку в силу выбора δ $\left|x\big(t,\ x^0\big)\right| \leqslant \alpha$ при всех $t \geqslant 0$, то в силу условия 1) теоремы

$$\frac{dV\left(x\big(t,\ x^0\big)\right)}{dt} \equiv \frac{dV\,(x)}{dt}\bigg|_{\substack{\text{в силу}\\ \text{системы}}} \geqslant 0,$$

а следовательно, сложная функция $V\left(x\big(t,\ x^0\big)\right)$ является монотонно неубывающей. Но тогда

$$V\left(x\big(t,\ x^0\big)\right) \geqslant V_0 > 0 \qquad \forall\, t \geqslant 0. \tag{8.25}$$

Покажем теперь, что найдется $\varepsilon_1 > 0$, такое, что

$$\left|x\big(t,\ x^0\big)\right| \geqslant \varepsilon_1 \qquad \forall\, t \geqslant 0. \tag{8.26}$$

Предположим противное, т.е. $\exists$ последовательность $\big\{t_n\big\}:\ t_n \to \infty$, такая, что

$$x\big(t_n,\ x^0\big) \to 0, \qquad n \to \infty.$$

Отсюда в силу непрерывности функции $V(x)$ имеем, что $\lim\limits_{n\to\infty} V\left(x\big(t_n,\ x^0\big)\right) = V(0) = 0$, что противоречит неравенству (8.25).

Итак, для решения $x\big(t,\ x^0\big)$ выполнено неравенство (8.26).

Тогда в силу утверждения пункта 1) из леммы 8.1 найдется $\varepsilon_2 > 0$, такое, что $W\left(x\big(t,\ x^0\big)\right) \geqslant \varepsilon_2$.

Следовательно,

$$\frac{dV\left(x\big(t,\ x^0\big)\right)}{dt} \equiv \frac{dV\,(x)}{dt}\bigg|_{\substack{\text{в силу}\\ \text{системы}}} \geqslant W\left(x\big(t,\ x^0\big)\right) \geqslant \varepsilon_2 > 0.$$

Но тогда имеем

$$V\left(x\big(t,\ x^0\big)\right) - V\left(x\big(0,\ x^0\big)\right) = \int\limits_0^t \frac{dV\left(x\big(\tau,\ x^0\big)\right)}{d\tau}\, d\tau \geqslant \varepsilon_2 t,$$

а следовательно,

$$V\left(x\big(t,\ x^0\big)\right) \to +\infty \qquad \text{при } t \to \infty.$$

Однако $\left|x\big(t,\ x^0\big)\right| \leqslant \alpha \ \ \forall\, t \geqslant 0$, а функция $V(x)$ непрерывна и поэтому ограничена при $\left|x\right| \leqslant \alpha$. Тогда сложная функция $V\left(x\big(t,\ x^0\big)\right)$, также является ограниченной при $t \geqslant 0$. Полученное противоречие доказывает теорему. $\square$

Замечание 8. 7. Для автономной системы (8.23) теорема 8. 7 формулируется следующим образом.

Теорема 8.7$'$**.** *Рассмотрим автономную систему* (8.23). *Пусть в шаре* B_K *существует функция* $V(x) \in C^1\big(B_K\big)$, *такая, что*

1) $\exists\, \alpha > 0$, *такое, что*

$$\frac{dV(x)}{dt}\bigg|_{\substack{\text{в силу} \\ \text{системы}}} > 0 \qquad \text{при} \quad 0 < \big|x\big| < \alpha;$$

2) $V(0) = 0$;

3) $\exists\, \big\{x^n\big\}:\ \ x^n \to 0$ *при* $n \to \infty$, *такая, что* $V\big(x^n\big) > 0$.

Тогда решение $x(t) \equiv 0$ *системы* (8.23) *неустойчиво.*

Доказательство. Положим $W(x) = \dfrac{dV(x)}{dt}\bigg|_{\substack{\text{в силу} \\ \text{системы}}}$. С данной функцией, очевидно, выполняется условие 2) теоремы 8. 7. Тогда применяя указанную теорему, мы получаем, что $x(t) \equiv 0$ неустойчиво. □

Замечание 8. 8. Для применения теорем 8. 5 – 8. 7 на практике требуется подобрать функции Ляпунова $V(x)$, $W(x)$.

К сожалению, общих методов подбора таких функций не существует.

В ряде случаев в качестве функций Ляпунова удается выбрать квадратичные формы от координат радиус-вектора точки x.

Пример 8. 3. Исследуем на устойчивость положение равновесия $x \equiv \big(x_1,\ x_2\big) = 0$ системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - x_1 + x_1x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 - x_1^2 - x_2^3. \end{cases}$$

Данная система является автономной.

В качестве функции Ляпунова возьмем $V\big(x_1,\ x_2\big) = ax_1^2 + bx_2^2$ и подберем числа a и b, таким образом, чтобы были выполнены условия теоремы 8.6$'$.

Имеем

$$\frac{dV\big(x_1,\ x_2\big)}{dt}\bigg|_{\substack{\text{в силу} \\ \text{системы}}} = 2ax_1\big(x_2 - x_1 + x_1x_2\big) + 2bx_2\big(x_1 - x_2 - x_1^2 - x_2^3\big) =$$

$$= 2ax_1x_2 - 2ax_1^2 + \underline{2ax_1^2x_2} + 2bx_1x_2 - 2bx_2^2 - \underline{2bx_1^2x_2} - 2bx_2^4.$$

Чтобы избавиться от подчеркнутых слагаемых, положим $a = b = \dfrac{1}{2}$. В результате получим

$$\left.\frac{dV\big(x_1,\ x_2\big)}{dt}\right|_{\substack{\text{в силу}\\ \text{системы}}} = -x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2 - x_2^4 =$$

$$= -x_2^4 - \big(x_1 - x_2\big)^2 < 0 \qquad \text{при} \quad \big(x_1,\ x_2\big) \neq 0.$$

Кроме того, очевидно, что при выбранных a и b $V\big(x_1,\ x_2\big) \equiv \dfrac{1}{2}x_1^2 + \dfrac{1}{2}x_2^2$ является положительно определенной функцией класса $C^1\big(\mathbb{R}^2\big)$.

Поэтому, применяя теорему 8.6$\,'$, получаем, что положение равновесия $x = 0$ является асимптотически устойчивым.

Пример 8. 4. Исследуем на устойчивость положение равновесия $x \equiv \big(x_1,\ x_2\big) = 0$ системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + 2x_2 - x_2^2, \\ \dot{x}_2 = 2x_1 + x_2 - x_1^2. \end{cases}$$

Данная система является автономной.

В качестве функции Ляпунова возьмем $V\big(x_1,\ x_2\big) = x_1x_2$. Вычислим

$$\left.\frac{dV\big(x_1,\ x_2\big)}{dt}\right|_{\substack{\text{в силу}\\ \text{системы}}} = x_1x_2 + 2x_2^2 - x_2^3 + 2x_1^2 + x_1x_2 - x_1^3 =$$

$$= \big(x_1 + x_2\big)^2 + x_1^2 - x_1^3 + x_2^2 - x_2^3.$$

Очевидно, что если выбрать $\alpha > 0$ достаточно малым, то

$$\left.\frac{dV\big(x_1,\ x_2\big)}{dt}\right|_{\substack{\text{в силу}\\ \text{системы}}} > 0 \qquad \text{при} \ \ 0 < \big|x\big| < \alpha.$$

Кроме того, очевидно, что $V(0) = 0$, а также можно выбрать последовательность $\big\{x^n\big\}$: $x^n \equiv \big(x_1^n,\ x_2^n\big) \to 0$ при $n \to \infty$, такую, что $V\big(x^n\big) > 0$: очевидно, достаточно взять любые бесконечно малые последовательности $x_1^n > 0$ и $x_2^n > 0$.

Таким образом, выполнены условия теоремы 8.7$\,'$, а следовательно, положение равновесия $x = 0$ является неустойчивым.

8.4. Устойчивость по первому приближению

В предыдущем параграфе были доказаны теоремы, в которых для решения вопроса об устойчивости или неустойчивости нулевого решения системы требовалось построить функции Ляпунова. Эта задача, как было отмечено, в общем случае достаточно сложная, и общих методов построения таких функций не существует.

В настоящем параграфе мы приводим теорему, условия которой достаточно легко проверить. Это так называемая теорема **об устойчивости по первому приближению**.

Напомним, что в п. 8.2 указаны условия, которые позволили дать полное исследование вопроса об устойчивости нулевого решения линейной системы с постоянными коэффициентами $\dot{x} = Ax$. Эти условия были даны в терминах собственных чисел матрицы A.

Оказывается, что в случае $\max\limits_i \bigl\{\operatorname{Re}\lambda_i\bigr\} \neq 0$ аналогичные условия справедливы и для нелинейной системы вида

$$\dot{x} = Ax + \eta\bigl(t,\ x\bigr), \tag{8.27}$$

где A – постоянная матрица, а

$$\bigl|\eta\bigl(t,\ x\bigr)\bigr| \leqslant \eta^*(x) \equiv o\bigl(|x|\bigr) \qquad \text{при} \quad x \to 0;$$

$$\eta\bigl(t,\ x\bigr) \in C^1\left(\bigl[0,\ \infty\bigr) \times B_K\right).$$

Как и в п. 8.3, $B_K = \Bigl\{x \in \mathbb{R}^n \ \Big|\ |x| \leqslant K\Bigr\}$ – шар в $\mathbb{R}^n$ с центром в точке $x = 0$ радиуса K.

Очевидно, что к виду (8.27) легко сводятся автономные системы (8.23) с $F(x) \in C^1\bigl(B_K\bigr)$ путем разложения этой вектор-функции по формуле Тейлора до первого порядка с остаточным членом в форме Пеано.

Теорема 8.8 (об устойчивости по первому приближению). *Рассмотрим систему* (8.27). *Пусть* $\eta(t,x) \in C^1\left(\bigl[0,\ +\infty\bigr) \times B_K\right)$ *и* $\bigl|\eta(t,\ x)\bigr| \leqslant \gamma(x) \cdot \bigl|x\bigr|$, *где* $\gamma(x) \to 0$ *при* $\bigl|x\bigr| \to 0$. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *если для всех собственных чисел* λ_i *матрицы* A $\operatorname{Re}\lambda_i < 0$, *то нулевое решение системы* (8.27) *асимптотически устойчиво;*

2) *если* $\exists$ *собственное число* λ_{i_0} *матрицы* A, *для которого* $\operatorname{Re}\lambda_{i_0} > 0$, *то нулевое решение системы* (8.27) *неустойчиво;*

3) *наконец, если* $\max\limits_i \bigl\{\operatorname{Re}\lambda_i\bigr\} = 0$, *то устойчивость или неустойчивость нулевого решения системы* (8.27) *зависит не только от матрицы* A, *но и от функции* $\eta\bigl(t,\ x\bigr)$, *и данная теорема определенного ответа не дает.*

Доказательство. Докажем первое утверждение теоремы.

Шаг 1. Получим оценки для решений линейной системы
$$\dot{y} = Ay. \tag{8.28}$$
Как показано в главе 6, матрица e^{tA} является фундаментальной матрицей этой системы, ее столбцы $\underset{\downarrow}{\psi^1}(t),\ \ldots,\ \underset{\downarrow}{\psi^n}(t)$ образуют ФСР системы (8.28), причем $\underset{\downarrow}{\psi^k}(0)$ – это k-й столбец единичной матрицы.

Как мы условились в начале главы, в дальнейшем стрелочку в обозначении решений $\underset{\downarrow}{\psi^k}(t)$ будем опускать:
$$\underset{\downarrow}{\psi^k}(t) \equiv \psi^k(t).$$
В той же главе 6 было установлено, что всякое решение системы (8.28) имеет вид (15), следовательно, можно записать, что $\psi^k(t) = \sum\limits_{j=1}^{n} P_j^k(t)e^{\lambda_j t}$, где $P_j^k(t)$ – некоторые векторные многочлены.

В наших предположениях $\operatorname{Re}\lambda_j < 0 \ \ \forall\ j$. Пусть $\alpha > 0$, таково, что $\operatorname{Re}\lambda_j < -\alpha < 0$. В курсе математического анализа было установлено, что при $t \to +\infty$ многочлен любой степени растет медленнее, чем $e^{\varepsilon t}$ $\forall\ \varepsilon > 0$. Поэтому можно записать оценку
$$\left|P_j^k(t)e^{\lambda_j t}\right| = \left|P_j^k(t)e^{\left(\lambda_j+\alpha\right)t}\right| e^{-\alpha t} \leqslant C_j e^{-\alpha t},$$
где $C_j = \mathrm{const} > 0$ не зависит от t.

Следовательно, найдется $C = \mathrm{const} > 0$, такая, что
$$\left|\psi^k(t)\right| \leqslant C\, e^{-\alpha t}, \qquad k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n. \tag{8.29}$$

Шаг 2. Рассмотрим теперь задачу Коши для системы (8.28) с начальным условием
$$y(0) = x, \qquad x = \left(x_1,\ \ldots,\ x_n\right) \in B_K. \tag{8.30}$$
Тогда, как легко проверить,
$$y(t) = e^{tA}x \equiv x_1\psi^1(t) + \ldots + x_n\psi^n(t),$$
откуда
$$\left|e^{\tau A}x\right|^2 \equiv \left|y(\tau)\right|^2 = \left(y(\tau),\ y(\tau)\right) = \sum_{i,j=1}^{n} d_{ij}(\tau)\, x_i x_j, \tag{8.31}$$
где $d_{ij}(\tau) = \left(\psi^i(\tau),\ \psi^j(\tau)\right) = d_{ji}(\tau)$.

В силу оценки (8.29) и неравенства Коши–Буняковского получаем $\left|d_{ij}(\tau)\right| \leqslant c^2\, e^{-2a\tau}$, а следовательно, несобственные интегралы
$$b_{ij} \equiv \int\limits_0^{\infty} d_{ij}(\tau)d\tau$$

сходятся.

Шаг 3. Выберем функцию Ляпунова по формуле

$$V(x) = \int\limits_0^\infty \left|e^{\tau A} x\right|^2 \, d\tau.$$

В силу (8.31)

$$V(x) = \sum_{i,j=1}^n \int\limits_0^\infty d_{ij}(\tau)\, x_i x_j \, d\tau = \sum_{i,j=1}^n b_{ij} x_i x_j, \tag{8.32}$$

а следовательно, в силу доказанной выше сходимости интегралов b_{ij} функция $V(x)$ определена корректно.

В силу своего определения $V(x) > 0$ при $x \in B_K$, $x \neq 0$. Найдем $\left.\dfrac{dV\bigl(x\bigr)}{dt}\right|_{\substack{\text{в силу}\\ \text{системы (8.28)}}}$. С учетом начального условия (8.30), имеем:

$$\left.\frac{dV\bigl(x\bigr)}{dt}\right|_{\substack{\text{в силу}\\ \text{системы (8.28)}}} = \bigl(\operatorname{grad} V(x),\ Ax\bigr) =$$

$$= \bigl(\operatorname{grad} V\bigl(y(0)\bigr),\ A\bigl(y(0)\bigr)\bigr) = \bigl(\operatorname{grad} V\bigl(y(0)\bigr),\ \dot{y}\big|_{t=0}\bigr) = \left.\frac{dV\bigl(y(t)\bigr)}{dt}\right|_{t=0} =$$

$$= \frac{d}{dt} \int\limits_0^\infty \left|e^{\tau A} y(t)\right|^2 \, d\tau \Bigg|_{t=0} = \frac{d}{dt} \int\limits_0^\infty \left|e^{\tau A} \cdot e^{tA} x\right|^2 \, d\tau \Bigg|_{t=0} = \frac{d}{dt} \int\limits_0^\infty \left|e^{(\tau+t)A} x\right|^2 \, d\tau \Bigg|_{t=0}.$$

Сделав в последнем интеграле замену переменных $\tau \mapsto s \equiv \tau + t$, получаем, что

$$\left.\frac{dV\bigl(x\bigr)}{dt}\right|_{\substack{\text{в силу}\\ \text{системы (8.28)}}} = \frac{d}{dt} \int\limits_t^\infty \left|e^{sA} x\right|^2 \, ds \Bigg|_{t=0} = -\left|e^{tA} x\right|^2 \Big|_{t=0} = -\bigl|x\bigr|^2.$$

Теперь найдем $\left.\dfrac{dV\bigl(x\bigr)}{dt}\right|_{\substack{\text{в силу}\\ \text{системы (8.27)}}}$.

$$\left.\frac{dV\bigl(x\bigr)}{dt}\right|_{\substack{\text{в силу}\\ \text{системы (8.27)}}} = \bigl(\operatorname{grad} V(x),\ Ax + \eta\bigl(t,\ x\bigr)\bigr) =$$

$$= \bigl(\operatorname{grad} V(x),\ Ax\bigr) + \bigl(\operatorname{grad} V(x),\ \eta\bigl(t,\ x\bigr)\bigr) = \left.\frac{dV\bigl(x\bigr)}{dt}\right|_{\substack{\text{в силу}\\ \text{системы (8.28)}}} +$$

$$+ \bigl(\operatorname{grad} V(x),\ \eta\bigl(t,\ x\bigr)\bigr) = -\bigl|x\bigr|^2 + \bigl(\operatorname{grad} V(x),\ \eta\bigl(t,\ x\bigr)\bigr). \tag{8.33}$$

Оценим второе слагаемое в (8.33).

Для $V(x)$ справедливо представление (8.32). Пусть $b = \mathrm{const} > 0$, таково, что $\left|b_{ij}\right| \leqslant b$. Имеем $\dfrac{dV}{dx_i} = 2\sum\limits_{j=1}^{n} b_{ij}(\tau)\, x_i$, откуда применяя неравенство Коши–Буняковского

$$\left(\sum_{i=1}^{n} u_i v_i\right)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} u_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} v_i^2,$$

получаем

$$\left(\frac{dV}{dx_i}\right)^2 = 4\left(\sum_{j=1}^{n} b_{ij}(\tau)\, x_i\right)^2 \leqslant \sum_{j=1}^{n} b_{ij}^2 \cdot \sum_{j=1}^{n} x_j^2 \leqslant 4nb^2\left|x\right|^2.$$

Следовательно,

$$\left|\mathrm{grad}\, V(x)\right|^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{dV}{dx_i}\right)^2 \leqslant 4n^2b^2\left|x\right|^2.$$

По условию теоремы $\left|\eta\big(t,\ x\big)\right| \leqslant \gamma(x)\left|x\right|$. Поэтому из (8.33) получаем, что

$$\left.\frac{dV(x)}{dt}\right|_{\substack{\text{в силу}\\ \text{системы (8.27)}}} \leqslant -\left|x\right|^2 + 2bn\left|x\right| \cdot \gamma(x)\left|x\right|.$$

Поскольку $\gamma(x) \to 0$ при $\left|x\right| \to 0$, то $\exists$, такие окрестности точки $x = 0$, где $\gamma(x) \leqslant \dfrac{1}{4bn}$, а следовательно,

$$\left.\frac{dV(x)}{dt}\right|_{\substack{\text{в силу}\\ \text{системы (8.27)}}} \leqslant -\ \frac{1}{2}\left|x\right|^2.$$

Применяя теорему 8.6 из предыдущего параграфа, получаем, что положение равновесия $x = 0$ системы (8.27) асимптотически устойчиво.

Утверждение 1) теоремы 8. 8 доказано. □

Доказательство утверждения 2) теоремы 8. 8 выходит за рамки курса дифференциальных уравнений. Оно имеется, например в [2, с. 262 – 264].

Утверждение 3) теоремы подтверждается следующими примерами.

Пример 8. 5. *Рассмотрим систему*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - x_1^3, \\ \dot{x}_2 = -x_1^3 - x_2^3. \end{cases}$$

В данном случае $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, мы находимся в условиях п. 3) теоремы 8. 8.

Введем функцию Ляпунова

$$V\big(x_1,\ x_2\big) = 2x_2^2 + x_1^4 > 0 \qquad \text{при } \ x \neq 0.$$

$$\frac{dV\big(x_1,\ x_2\big)}{dt}\Bigg|_{\substack{\text{в силу}\\ \text{системы}}} = 4x_1^3\big(x_2 - x_1^3\big) + 4x_2\big(-x_1^3 - x_2^3\big) = -4x_1^6 - 4x_2^4.$$

Применяя теорему 8.6$\,'$, получаем, что нулевое решение асимптотически устойчиво.

Пример 8. 6. *Рассмотрим систему*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1^3. \end{cases}$$

Как и выше, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, мы находимся в условиях п. 3) теоремы 8. 8.

Снова выберем $V\big(x_1,\ x_2\big) = 2x_2^2 + x_1^4 > 0 \qquad$ при $x \neq 0$. Тогда

$$\frac{dV\big(x_1,\ x_2\big)}{dt}\Bigg|_{\substack{\text{в силу}\\ \text{системы}}} = 4x_1^3x_2 - 4x_2x_1^3 = 0.$$

В силу теоремы 8.5, нулевое решение устойчиво по Ляпунову, однако асимптотической устойчивости нет.

Действительно, пусть $x(t) \equiv \big(x_1(t),\ x_2(t)\big)$ – произвольное решение системы, отличное от нуля. Тогда $\frac{dV\big(x(t)\big)}{dt} = 0$, т.е. $V\big(x(t)\big) = \mathrm{const}$ для всех отличных от $x(t) \equiv 0$ решений.

Если бы $x(t) \equiv 0$ было асимптотически устойчиво, то существовало бы $\delta_1 > 0$, такое, что для всех решений $x(t)$: $\big|x(0)\big| < \delta_1$ следовало бы, что $x(t) \to 0$ при $t \to +\infty$. А тогда в силу непрерывности $V(x)$ мы бы получили, что $V\big(x(t)\big) \to 0$ при $t \to +\infty$, что противоречит условию $V\big(x(t)\big) = \mathrm{const}$.

Пример 8. 7. *Рассмотрим систему*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + x_2^3, \\ \dot{x}_2 = x_1^3. \end{cases}$$

Снова $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, мы находимся в условиях п. 3) теоремы 8. 8.

Выберем функцию Ляпунова $V\big(x_1,\ x_2\big) = x_1x_2$. Тогда

$$\frac{dV\big(x_1,\ x_2\big)}{dt}\Bigg|_{\substack{\text{в силу}\\ \text{системы}}} = x_2\big(x_2 + x_2^3\big) + x_1x_1^3 = x_2^2 + x_2^4 + x_1^4 > 0, \quad x \neq 0.$$

Кроме того, очевидно, существует последовательность $x^n \to 0$, $n \to \infty$, такая, что $V\big(x^n\big) > 0$. Следовательно, можно применить теорему 8.7$\,'$, и нулевое решение неустойчиво.

Замечание 8.9. Смысл теоремы 8.8 заключается в том, что мы вместо исходной нелинейной системы рассматриваем линейную систему, полученную линеаризацией исходной с точностью до бесконечно малых величин первого порядка малости (берем «первое приближение») и исследуем на устойчивость точку покоя $x = 0$ этой линеаризированной системы.

8.5. Поведение фазовых траекторий вблизи точки покоя

В данном параграфе рассмотрим линейную систему с постоянными коэффициентами второго порядка

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2. \end{cases} \tag{8.34}$$

Точка $x \equiv \big(x_1,\ x_2\big) = 0$ является точкой покоя этой системы. В данном параграфе будем считать, что $t \in (-\infty,\ +\infty)$. Заметим, что от системы (8.34) можно перейти к ОДУ первого порядка

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{a_{21}x_1 + a_{22}x_2}{a_{11}x_1 + a_{12}x_2}. \tag{8.35}$$

Тогда фазовая траектория системы (8.34) будет интегральной кривой уравнения (8.35).

В точке $x \equiv \big(x_1,\ x_2\big) = 0$ правая часть уравнения (8.35) разрывна, в ней нарушается условие теоремы существования и единственности, поэтому точку покоя $x = 0$ системы (8.34) будем называть **особой точкой** уравнения (8.35).

В п. 8.2 мы исследовали точку покоя $x = 0$ системы (8.34) (и даже системы более высокого порядка) на устойчивость. Целью настоящего параграфа является исследование поведения фазовых траекторий в окрестности точки покоя $x = 0$ в зависимости от собственных чисел $\lambda_1,\ \lambda_2$ матрицы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ системы (8.34).

Рассмотрим различные возможные случаи.

I. $\lambda_1,\ \lambda_2 \in \mathbb{R},\ \ \lambda_1 \neq \lambda_2$ и одного знака.

Будем для определенности считать, что $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$. Тогда в силу результатов п. 8.2 положение равновесия $x = 0$ асимптотически устойчиво.

В этом случае общее решение системы (8.34) запишется в виде (см. результаты главы 6):

$$x \equiv \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = C_1 h^1 e^{\lambda_1 t} + C_2 h^2 e^{\lambda_2 t}, \tag{8.36}$$

где $h^1 \equiv \begin{pmatrix} h_1^1 \\ h_2^1 \end{pmatrix}$ и $h^2 \equiv \begin{pmatrix} h_1^2 \\ h_2^2 \end{pmatrix}$ – собственные векторы, отвечающие собственным числам λ_1, и λ_2 соответственно.

Положим в (8.36) $C_1 = 0$. Тогда $x_1 = C_2 h_1^2 e^{\lambda_2 t}$, $x_2 = C_2 h_2^2 e^{\lambda_2 t}$.

Мы получили параметрические уравнения двух лучей, коллинеарных собственному вектору h^2. Эти лучи «входят» в точку $x = 0$, поскольку данная точка покоя асимптотически устойчива.

Назовем эти лучи *фазовыми траекториями* II.

Аналогично, если положим в (8.36) $C_2 = 0$, то получим еще два луча, которые коллинеарны собственному вектору h^1 (и также «входят» в точку $x = 0$).

Назовем эти лучи *фазовыми траекториями* I.

Пусть теперь в (8.36) $C_1 \neq 0$, $C_2 \neq 0$. Имеем

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = C_1\lambda_1 h_1^1 e^{\lambda_1 t} + C_2\lambda_2 h_1^2 e^{\lambda_2 t}, \\ \dot{x}_2 = C_1\lambda_1 h_2^1 e^{\lambda_1 t} + C_2\lambda_2 h_2^2 e^{\lambda_2 t}, \end{cases}$$

откуда

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{C_1\lambda_1 h_2^1 e^{\lambda_1 t} + C_2\lambda_2 h_2^2 e^{\lambda_2 t}}{C_1\lambda_1 h_1^1 e^{\lambda_1 t} + C_2\lambda_2 h_1^2 e^{\lambda_2 t}}.$$

Устремим в этом соотношении $t \to +\infty$. Поскольку $\lambda_2 - \lambda_1 < 0$, то получаем

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{dx_2}{dx_1} = \frac{h_2^1}{h_1^1}.$$

Учитывая еще, что в наших предположениях точка $x = 0$ является асимптотически устойчивой, приходим к выводу, что фазовые траектории системы (8.34), отличные от фазовых траекторий I и II, «входят» в точку $x = 0$ с общей касательной, коллинеарной вектору h^1, т.е. касаются фазовых траекторий I.

Отметим еще, что фазовые траектории I отвечают меньшему по модулю собственному числу матрицы A.

Если $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$, то ситуация аналогична, только положение равновесия $x = 0$ является неустойчивым, и все фазовые траектории «выходят» из точки $x = 0$.

Положение равновесия $x = 0$ называется **узлом** (устойчивым при λ_1, $\lambda_2 < 0$ и неустойчивым при λ_1, $\lambda_2 > 0$). Фазовый портрет узла приведен на рис. 8. 8

II. $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, λ_1, λ_2 **разных знаков.**

Будем считать, что $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$. В силу результатов п. 8.2 положение равновесия $x = 0$ является неустойчивым.

Как и в предыдущем случае, общее решение системы (8.34) задается формулой (8.36). Более того, имеются фазовые траектории I и II (лучи, коллинеарные собственным векторам h^1 и h^2, соответственно). Но в отличие от предыдущего фазовые траектории I «выходят» из точки $x = 0$ (так как $\lambda_1 > 0$), а фазовые траектории II «входят» в точку $x = 0$.

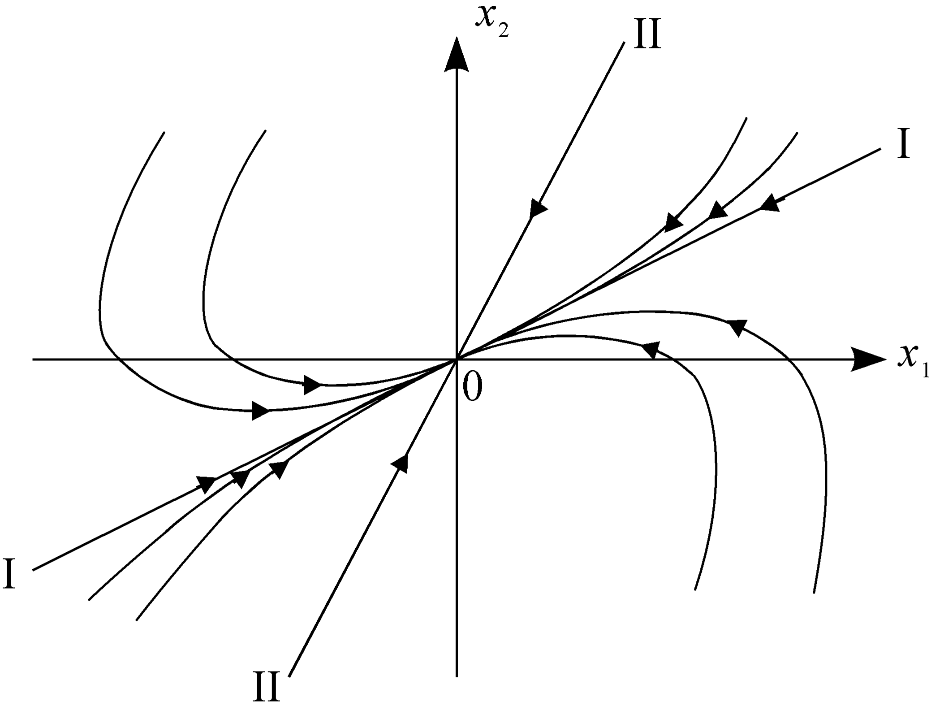

Рис. 8.8. Случай $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$

Для остальных фазовых траекторий $(C_1 \neq 0,\ C_2 \neq 0)$ можно записать два соотношения

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{C_1\lambda_1 h_2^1 + C_2\lambda_2 h_2^2 e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}}{C_1\lambda_1 h_1^1 + C_2\lambda_2 h_1^2 e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}}$$

и

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{C_1\lambda_1 h_2^1 e^{(\lambda_1-\lambda_2)t} + C_2\lambda_2 h_2^2}{C_1\lambda_1 h_1^1 e^{(\lambda_1-\lambda_2)t} + C_2\lambda_2 h_1^2}.$$

Из первого соотношения имеем $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{dx_2}{dx_1} = \frac{h_2^1}{h_1^1}$, т.е. фазовые траектории при $t \to +\infty$ становятся «параллельными» фазовым траекториям I (отвечающим $\lambda_1 > 0$).

Покажем, что, более того, фазовые траектории I являются асимптотами остальных фазовых траекторий при $t \to +\infty$.

Действительно, запишем параметрические уравнения фазовых траекторий I в виде

$$\hat{x}_1(t) = C_1 h_1^1 e^{\lambda_1 t}, \qquad \hat{x}_2(t) = C_1 h_2^1 e^{\lambda_1 t}.$$

Тогда с учетом (8.36) получаем

$$\lim_{t\to+\infty} (x_1(t) - \hat{x}_1(t)) = \lim_{t\to+\infty} C_2 h_1^2 e^{\lambda_2 t} = 0,$$

$$\lim_{t\to+\infty} (x_2(t) - \hat{x}_2(t)) = \lim_{t\to+\infty} C_2 h_2^2 e^{\lambda_2 t} = 0,$$

поскольку $\lambda_2 < 0$.

Таким образом, действительно все фазовые траектории при $t \to +\infty$ имеют асимптотой фазовые траектории I.

Аналогично получаем, что при $t \to -\infty$ фазовые траектории имеют асимптотой фазовые траектории II (отвечающие $\lambda_2 < 0$).

В данном случае положение равновесия называется **седлом** и его фазовый портрет представлен на рис. 8.9

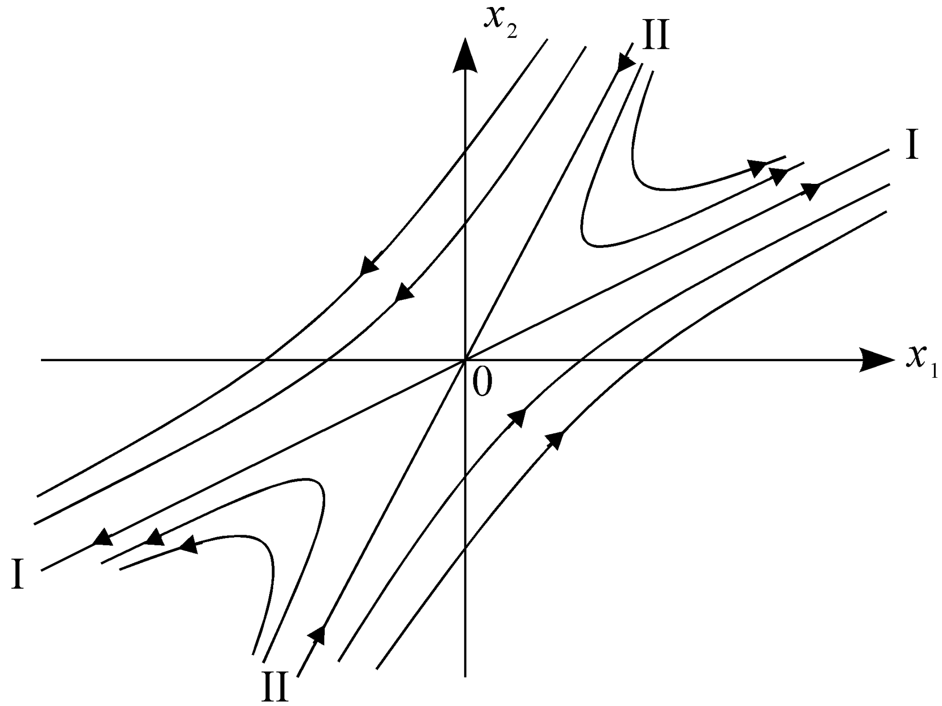

Рис. 8.9. Случай $\lambda_1 > 0, \ \lambda_2 < 0$

III. $\lambda_1, \ \lambda_2 \in \mathbb{R}$, **при этом** $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq 0$.

Возможны 2 случая.

Случай III$_1$. Существует только один линейно независимый собственный вектор, отвечающий собственному числу λ.

В этом случае жорданова форма матрицы A представляет собой жорданову клетку размера 2×2, а жорданов базис состоит из собственного вектора $h^1 \equiv \begin{pmatrix} h_1^1 \\ h_2^1 \end{pmatrix}$ и присоединенного вектора $h^2 \equiv \begin{pmatrix} h_1^2 \\ h_2^2 \end{pmatrix}$.

Общее решение системы (8.34) запишется в виде (см. результаты главы 6):

$$x \equiv \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = C_1 h^1 e^{\lambda t} + C_2 \left(t h^1 + h^2 \right) e^{\lambda t}. \tag{8.37}$$

Пусть для определенности $\lambda < 0$. Тогда согласно результатам п. 8.2 положение равновесия $x = 0$ является асимптотически устойчивым.

Положим в (8.37) $C_2 = 0$. Тогда

$$x_1 = C_1 h_1^1 e^{\lambda t}, \qquad x_2 = C_1 h_2^1 e^{\lambda t}.$$

Как и выше, мы получили параметрические уравнения двух лучей, коллинеарных собственному вектору h^1. Эти лучи «входят» в точку $x = 0$, поскольку данная точка покоя асимптотически устойчива.

Как и выше, будем называть эти лучи фазовыми траекториями I.

Пусть теперь в (8.37) $C_2 \neq 0$. Тогда получим соотношение

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{C_1 \lambda h_2^1 + C_2 \lambda \left(t h_2^1 + h_2^2 \right) + C_2 h_2^1}{C_1 \lambda h_1^1 + C_2 \lambda \left(t h_1^1 + h_1^2 \right) + C_2 h_1^1},$$

откуда следует, что

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{dx_2}{dx_1}=\frac{h_2^1}{h_1^1}.$$

Таким образом, фазовые траектории системы (8.34), отличные от фазовых траекторий I, «входят» (так как $\lambda<0$) в точку $x=0$, касаясь фазовых траекторий I.

В случае $\lambda>0$ ситуация аналогична, только положение равновесия $x=0$ неустойчиво, и все фазовые траектории «выходят» из точки $x=0$.

Положение равновесия называется **вырожденным узлом** (устойчивым при $\lambda<0$ и неустойчивым при $\lambda>0$). Фазовый портрет приведен на рис. 8.10.

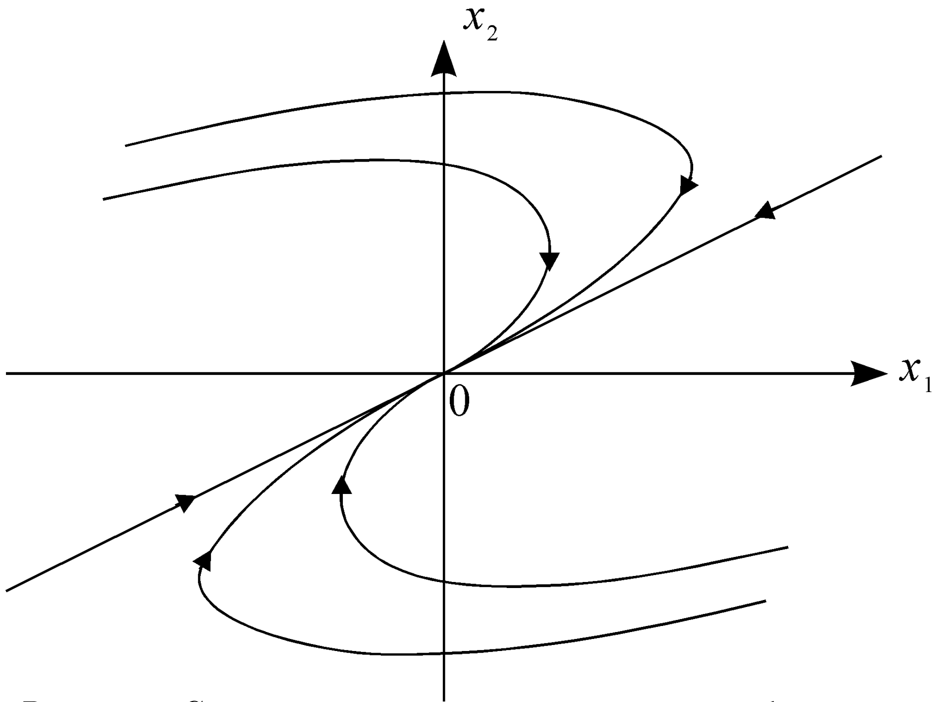

Рис. 8.10. Случай одного линейно независимого собственного вектора при $\lambda_1=\lambda_2=\lambda<0$

Случай III$_2$. Существует два линейно независимых собственных вектора, отвечающих собственному числу λ.

Тогда все ненулевые векторы – собственные, матрица $A=\lambda E$, и система (8.34) распадается на два уравнения

$$\begin{cases}\dot{x}_1=\lambda x_1,\\ \dot{x}_2=\lambda x_2.\end{cases}$$

Решение этой системы записывается в виде $x_1=C_1e^{\lambda t}$, $x_2=C_2e^{\lambda t}$, и все они представляют собой лучи, которые «входят» в начало координат (если $\lambda<0$) или «выходят» из него (если $\lambda>0$).

Положение равновесия называется **особым (или дикритическим) узлом**. Фазовый портрет приведен на рис. 8. 11.

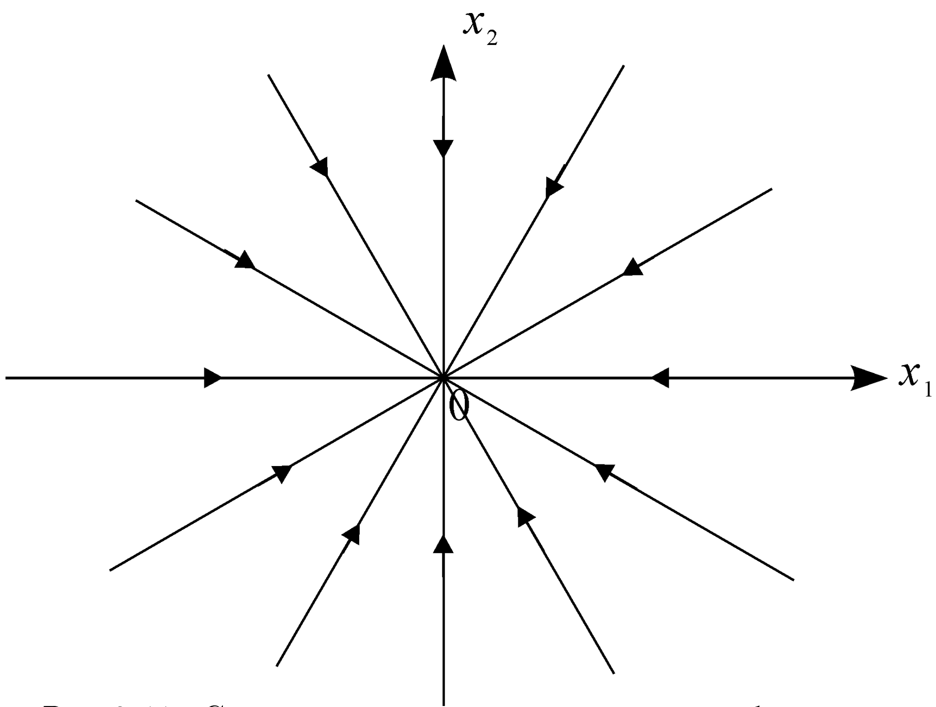

Рис. 8. 11. Случай двух линейно независимых собственных векторов при $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda < 0$

IV. $\lambda_1,\ \lambda_2 \in \mathbb{R}$, **при этом** $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 \neq 0.$

Общее решение системы (8.34) запишется в виде

$$x = C_1 h^1 + C_2 h^2 e^{\lambda_2 t}, \tag{8.38}$$

где h^1 и h^2 – собственные векторы, отвечающие собственным числам λ_1, и λ_2, соответственно.

Положим в (8.38) $C_2 = 0$. Тогда имеем точки покоя, которые лежат на прямой, проходящей через начало координат параллельно вектору h^1.

Если в (8.37) $C_2 \neq 0$, то решения представляют собой лучи с направляющим вектором h^2.

При этом, если $\lambda < 0$, то в силу результатов п. 8.2 все точки покоя являются устойчивыми по Ляпунову (но не асимптотически устойчивыми), а если $\lambda > 0$, то все точки покоя неустойчивы.

Фазовый портрет приведен на рис. 8. 12.

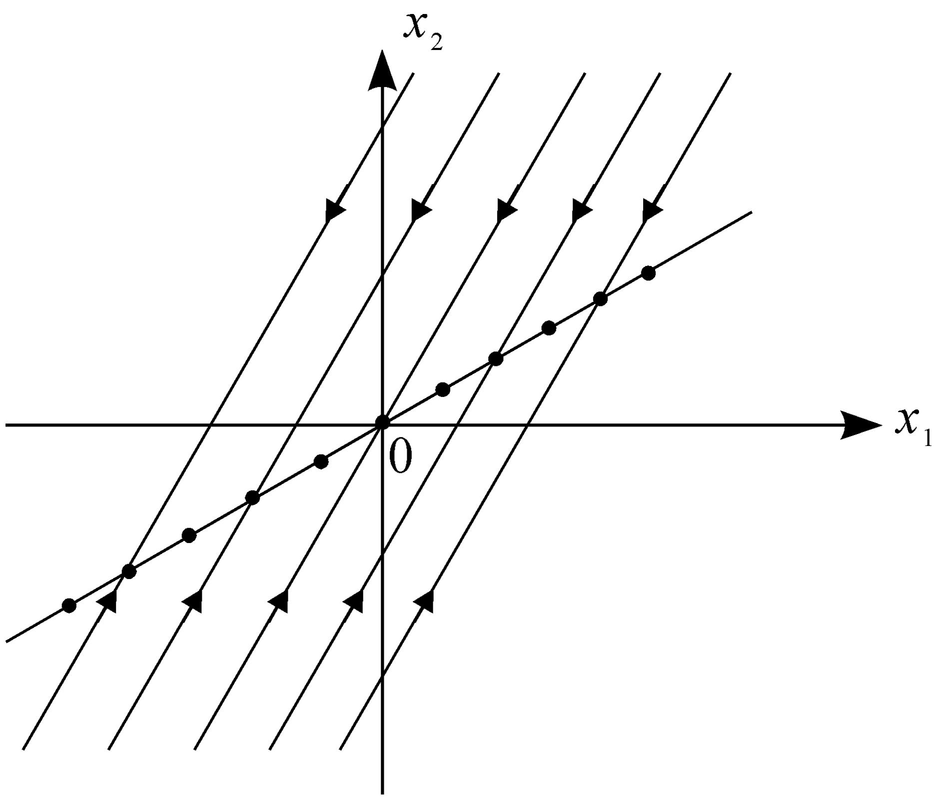

Рис. 8. 12. Случай $\lambda_1 = 0, \ \lambda_2 < 0$

V. $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$**, при этом** $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$**.**

Опять возможны 2 случая.

Случай V$_1$. Существует только один линейно независимый собственный вектор, отвечающий $\lambda = 0$**.**

В этом случае общее решение системы (8.34) запишется в виде

$$x = C_1 h^1 + C_2 \left(t h^1 + h^2 \right), \tag{8.39}$$

где h^1 – собственный вектор, а h^2 – присоединенный.

Положив в (8.39) $C_2 = 0$, мы, как и в предыдущем случае, получаем точки покоя, которые лежат на прямой, проходящей через начало координат и параллельной вектору h^1.

Если же $C_2 \neq 0$, то мы имеем прямые, параллельные этому собственному вектору h^1.

Из (8.39) видно, что при $C_2 > 0$ движение происходит в одном направлении, а при $C_2 < 0$ – в другом.

Точки покоя являются неустойчивыми, а фазовый портрет приведен на рис. 8.13.

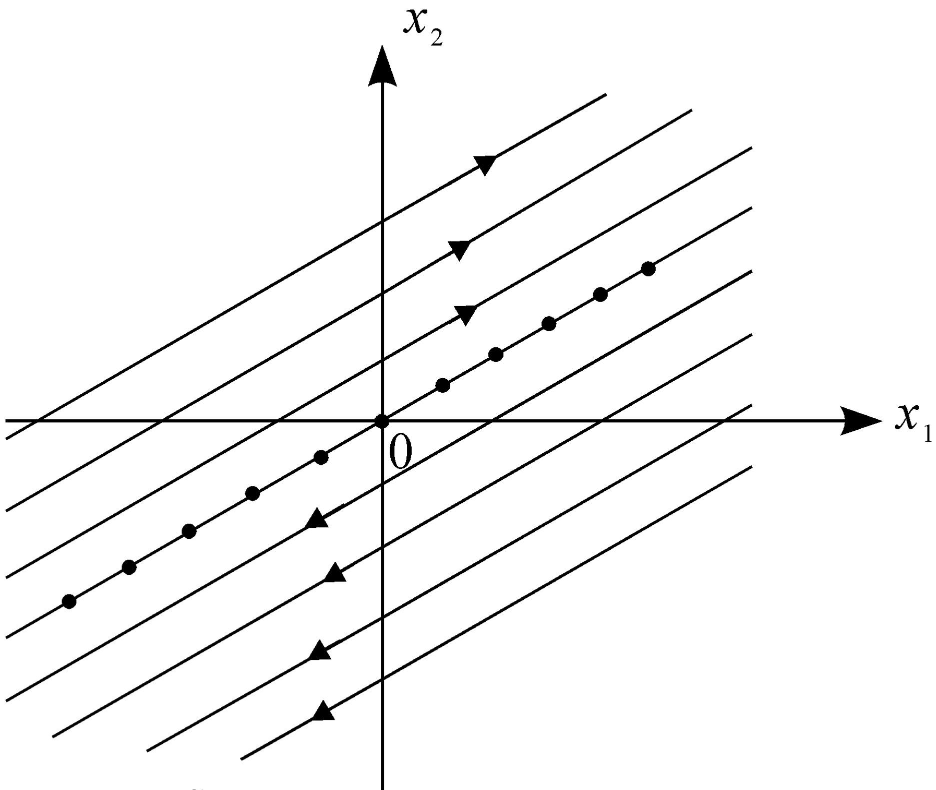

Рис. 8.13. Случай одного линейно независимого собственного вектора при $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$

Замечание 8.10. Чтобы выяснить направление движения по прямым (в ту или противоположную сторону), достаточно выбрать на этой прямой какую-нибудь точку $x^* = \left(x_1^*,\ x_2^*\right)$ и найти в ней вектор скорости

$$v\Big|_{x^*} = \dot{x}^* \equiv \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{pmatrix}.$$

Его направление и укажет направление движения вдоль выбранной траектории.

Случай $\mathbf{V}_2$. Существует два линейно независимых собственных вектора, отвечающих собственному числу $\lambda = 0$.

Это означает, что A – нулевая матрица, и все точки плоскости – точки покоя. Имеем, так сказать, «полный покой».

VI. $\lambda_1,\ \lambda_2 \in \mathbb{C}$.

Поскольку матрица A имеет действительные коэффициенты, то λ_1 и λ_2 являются комплексно-сопряженными: $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$.

Собственные векторы также являются комплексно-сопряженными: $h^1 = u + iv$, $h^2 = u - iv$. При этом очевидно, что

$$\beta \neq 0, \qquad v \neq 0. \tag{8.40}$$

Общее решение системы (8.34) запишется в виде (см. результаты главы 6):

$$x = C_1 e^{\alpha t}\big(u\cos\beta t - v\sin\beta t\big) + C_2 e^{\alpha t}\big(u\sin\beta t + v\cos\beta t\big). \tag{8.41}$$

Это решение можно переписать в координатах в виде

$$\begin{cases} x_1 = e^{\alpha t}\left[\big(C_1u_1 + C_2v_1\big)\cos\beta t + \big(-C_1v_1 + C_2u_1\big)\sin\beta t\right], \\ x_2 = e^{\alpha t}\left[\big(C_1u_2 + C_2v_2\big)\cos\beta t + \big(-C_1v_2 + C_2u_2\big)\sin\beta t\right] \end{cases}. \tag{8.42}$$

Здесь $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$.

Нам понадобится еще следующая формула:

$$\rho^2 \equiv x_1^2 + x_2^2 = e^{2\alpha t}\left[\big(C_1u_1 + C_2v_1\big)\cos\beta t + \big(-C_1v_1 + C_2u_1\big)\sin\beta t\right]^2 + \\ + e^{2\alpha t}\left[\big(C_1u_2 + C_2v_2\big)\cos\beta t + \big(-C_1v_2 + C_2u_2\big)\sin\beta t\right]^2. \tag{8.43}$$

Изучим поведение траекторий отдельно для случаев $\alpha = 0$ и $\alpha \neq 0$.

Случай VI$_1$. $\mathrm{Re}\,\lambda \equiv \alpha = 0$.

В этом случае из представлений (8.42) и (8.43) следует, что x_1, x_2, ρ являются периодическими функциями от t. А это значит, что фазовые траектории для системы (8.34) представляют собой замкнутые кривые.

Покажем, что они представляют собой эллипсы. В рассматриваемом случае соотношения (8.42) записываются в виде

$$\begin{cases} x_1 = \big(C_1u_1 + C_2v_1\big)\cos\beta t + \big(-C_1v_1 + C_2u_1\big)\sin\beta t, \\ x_2 = \big(C_1u_2 + C_2v_2\big)\cos\beta t + \big(-C_1v_2 + C_2u_2\big)\sin\beta t \end{cases} \tag{8.44}$$

и представляют собой систему линейных алгебраических уравнений относительно $\cos\beta t$ и $\sin\beta t$. Покажем, что определитель этой системы отличен от нуля при $C_1^2 + C_2^2 > 0$. Этот определитель равен

$$\begin{vmatrix} C_1u_1 + C_2v_1 & -C_1v_1 + C_2u_1 \\ C_1u_2 + C_2v_2 & -C_1v_2 + C_2u_2 \end{vmatrix} = \\ = -C_1^2u_1v_2 - C_1C_2v_1v_2 + C_1C_2u_1u_2 + C_2^2v_1u_2 + \\ + C_1^2u_2v_1 + C_1C_2v_1v_2 - C_1C_2u_1u_2 - C_2^2u_1v_2 = C_1^2\big(u_2v_1 - u_1v_2\big) + \\ + C_2^2\big(v_1u_2 - u_1v_2\big) = \big(C_1^2 + C_2^2\big)\big(u_2v_1 - u_1v_2\big) = \big(C_1^2 + C_2^2\big)\begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ u_1 & u_2 \end{vmatrix}.$$

Предположим, что определитель системы (8.44) равен нулю. Тогда и определитель $\begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ u_1 & u_2 \end{vmatrix} = 0$, а это значит, что векторы u и v коллинеарны. Поскольку в рассматриваемом случае $v \neq 0$ (см. (8.40)), то $\exists\, \gamma \in \mathbb{R}$, такое, что $u = \gamma v$. Следовательно, собственный вектор h матрицы A запишется в виде $h = \big(\gamma + i\big)v$.

С другой стороны, вектор $h \equiv \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\big(\gamma + i\big)$, как собственный вектор, отвечающий собственному числу $\lambda = i\beta$, удовлетворяет системе уравнений

$$\begin{pmatrix} a_{11} - \beta i & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \beta i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\big(\gamma + i\big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

откуда вытекают два равенства

$$\big(a_{11}-\beta i\big)v_1+a_{12}v_2=0, \qquad a_{21}v_1+\big(a_{22}-\beta i\big)v_2=0.$$

Поскольку числа $a_{11},\ a_{12},\ a_{21},\ a_{22},\ \beta,\ v_1,\ v_2$ являются вещественными, а, кроме того, $\beta\neq 0$ (см. (8.40)), то из первого соотношения вытекает, что $v_1=0$, а из второго – что $v_2=0$.

Следовательно, вектор $v\equiv\big(v_1,\ v_2\big)=0$, что противоречит соотношению (8.40).

Таким образом, определитель системы (8.44) отличен от нуля, а следовательно, эту систему можно разрешить относительно $\cos\beta t$ и $\sin\beta t$.

Воспользовавшись основным тригонометрическим тождеством $\cos^2\beta t+\sin^2\beta t=1$, мы тогда получим уравнение относительно x_1 и x_2 вида

$$\big(b_{11}x_1+b_{12}x_2\big)^2+\big(b_{21}x_1+b_{22}x_2\big)^2=1, \tag{8.45}$$

где числа b_{ij} выписываются через $u_1,\ u_2,\ v_1,\ v_2,\ C_1,\ C_2$.

Соотношение (8.45) означает, что фазовые траектории системы (8.34) в рассматриваемом случае представляют собой кривые второго порядка, а поскольку выше мы доказали, что эти кривые замкнуты, то это эллипсы, причем из (8.45) видно, что эти эллипсы охватывают начало координат.

Точка покоя $x=0$ называется в данном случае **центром**; она устойчива по Ляпунову (но не асимптотически) в силу результатов п. 8.2. Направление движения вдоль фазовых траекторий (по часовой стрелке или против часовой стрелки) определяется с использованием вектора скорости (см. замечание 8.10). Фазовый портрет представлен на рис. 8.14.

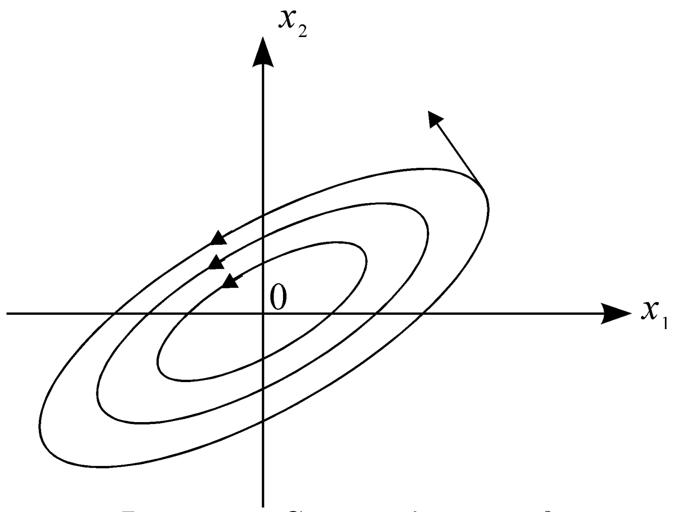

Рис. 8.14. Случай $\lambda_{1,2}=\pm i\beta$

Случай VI$_2$. $\operatorname{Re}\lambda\equiv\alpha\neq 0$.

В этом случае из соотношения (8.43) видно, что фазовые траектории системы (8.34) представляют собой спирали вокруг точки $x=0$.

Если $\alpha<0$, то точка покоя $x=0$ асимптотически устойчива, спирали «накручиваются» на начало координат. Если $\alpha>0$, то точка покоя $x=0$ неустойчива, спирали «раскручиваются» от начала координат.

Направление движения вдоль фазовых траекторий (по часовой стрелке или против часовой стрелки) определяется с использованием вектора скорости (см. замечание 8.10).

Точка покоя в рассматриваемом случае называется **фокусом** (асимптотически устойчивым, если $\operatorname{Re}\lambda < 0$, и неустойчивым, если $\operatorname{Re}\lambda > 0$). Фазовый портрет представлен на рис. 8.15 для случая $\operatorname{Re}\lambda < 0$.

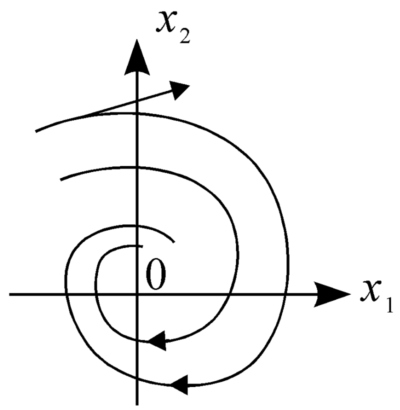

Рис. 8.15. Случай $\operatorname{Re}\lambda_{1,2} < 0$

Удобно собрать полученные результаты в следующую схему.

ТАБЛИЦА ОСОБЫХ ТОЧЕК

Глава IX.

Первые интегралы систем ОДУ

9.1. Первые интегралы автономных систем обыкновенных дифференциальных уравнений

В этом параграфе будем рассматривать автономные системы вида

$$\dot{x} = F(x), \tag{9.1}$$

$x(t) = \big(x_1(t),\ \ldots,\ x_n(t)\big)$, $F(x) = \big(F_1(x),\ \ldots,\ F_n(x)\big) \in C^1(D)$, $D \subset \mathbb{R}^n$ – некоторая область.

Как и в предыдущей главе, мы не будем писать стрелочку для обозначения векторов и вектор-функций.

Определение 9.1. Первым интегралом системы (9.1) будем называть функцию $u(x) \in C^1(D)$, такую, что:

1) $u(x) \not\equiv \text{const}$ ни в какой подобласти области D.

2) Для любой интегральной кривой $x = x(t) \equiv \big(x_1(t),\ \ldots,\ x_n(t)\big)$ системы (9.1) $u\big(x(t)\big) \equiv \text{const}$.

Замечание 9.1. Иногда первым интегралом называют не функцию $u(x)$, а соотношение $u(x) = C$; это бывает удобно при практическом решении систем.

Пример 9.1. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1, \\ \dot{x}_2 = 2x_2. \end{cases}$$

Тогда решение этой системы представляется в виде $x_1 = C_1 e^t$, $x_2 = C_2 e^{2t}$.

Покажем, что функция $u\big(x_1,\ x_2\big) = \dfrac{x_1^2}{x_2}$ является первым интегралом данной системы, например, в области $\big\{\big(x_1,\ x_2\big):\quad x_1 > 0,\ \ x_2 > 0\big\}$.

Действительно, $u\big(x_1,\ x_2\big) \not\equiv \text{const}$ ни в какой подобласти, но если взять решение системы $x_1 = C_1 e^t$, $x_2 = C_2 e^{2t}$, то $u\big(x_1(t),\ x_2(t)\big) = \frac{C_1^2}{C_2} \equiv \text{const}$.

В дальнейшем нам понадобится понятие (функциональной) зависимости функций, которое вводится в курсе математического анализа. Напомним его.

Определение 9.2. Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим функции $u_1(x)$, $\ldots$, $u_k(x) \in C^1(D)$. Пусть j – один из номеров $1, \ldots, k$.

Скажем, что **функция** $u_j(x)$ **зависима от функций** $u_1(x)$**,** $\ldots$**,** $u_{j-1}(x)$**,** $u_{j+1}(x)$**,** $\ldots$**,** $u_k(x)$, если $\exists$ функция $\varphi\big(y_1, \ldots, y_{k-1}\big)$ класса C^1, такая, что

$$u_j(x) = \varphi\big(u_1(x), \ldots, u_{j-1}(x), u_{j+1}(x), \ldots, u_k(x)\big), \qquad \forall\, x \in D.$$

Система функций $u_1(x), \ldots, u_k(x)$ называется в этом случае **зависимой на множестве** D.

В противном случае эта система называется **независимой**.

В курсе математического анализа доказываются следующие утверждения, которые нам понадобятся в дальнейшем.

Утверждение 9.1. *Пусть* $2 \leqslant k \leqslant n$.

Если система функций $u_1(x), \ldots, u_k(x)$ *является зависимой в* D, *то ранг матрицы Якоби*

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u_1(x)}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial u_1(x)}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial u_k(x)}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial u_k(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

меньше k *в каждой точке* $x \in D$.

Утверждение 9.2. *Пусть* $2 \leqslant k \leqslant n$, $1 \leqslant p < k$. *Рассмотрим в* D *систему функций* $u_1(x), \ldots, u_k(x)$. *Предположим, что* $\forall\, x \in D$ *ранг матрицы Якоби*

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u_1(x)}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial u_1(x)}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial u_k(x)}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial u_k(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

равен $p < k$, *и существует* $x^0 \in D$, *такая, что Якобиан*

$$\left.\begin{vmatrix} \dfrac{\partial u_1(x)}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial u_1(x)}{\partial x_p} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial u_p(x)}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial u_p(x)}{\partial x_p} \end{vmatrix}\right|_{x=x^0} \neq 0.$$

Тогда существует окрестность $\mathrm{U}\big(x^0\big) \subset D$, *такая, что система функций* $u_1(x), \ldots, u_p(x)$ *не является зависимой в* $\mathrm{U}\big(x^0\big)$, *и в то же время функции* $u_{p+1}(x), \ldots, u_k(x)$ *является зависимыми от функций* $u_1(x), \ldots, u_p(x)$ *в* $\mathrm{U}\big(x^0\big)$

Замечание 9.2. Если функции $u_1(x),\ \ldots,\ u_k(x)$ линейно зависимы на D, то они, очевидно, и функционально зависимы на D.

Действительно, если $u_1(x),\ \ldots,\ u_k(x)$ линейно зависимы, то существует номер j и числа $C_1,\ \ldots,\ C_{j-1},\ C_{j+1},\ \ldots,\ C_k$, такие, что

$$u_j(x) = C_1 u_1(x) + \ldots + C_{j-1}u_{j-1}(x) + C_{j+1}u_{j+1}(x) + \ldots + C_k u_k(x).$$

Следовательно, в качестве функции $\varphi(y)$ в определении 9.1 достаточно взять

$$\varphi = C_1 y_1 + \ldots + C_{j-1}y_{j-1} + C_{j+1}y_{j+1} + \ldots + C_k y_k \in C^1.$$

Обратное утверждение неверно.

Например, функции $u_1(x) = \sin x$, $u_2(x) = \cos x$ зависимы на $\big(0,\ \pi\big)$, поскольку $\sin x = \big(1-\cos^2 x\big)^{\frac{1}{2}}$, но, очевидно, эти функции не являются линейно зависимыми.

Приведем без доказательства теорему о существовании системы из $(n-1)$ независимого первого интеграла.

Теорема 9.1. *Пусть дана система* (9.1), *где* $F(x) \in C^1(D)$ *и точка* $a \in D$ *не является точкой покоя этой системы, т.е.* $F(a) \neq 0$.

Тогда в некоторой окрестности точки a *существует система из* $(n-1)$ *независимых первых интегралов* $u_1(x),\ \ldots,\ u_{n-1}(x)$.

При этом, если $F_n(a) \neq 0$, *то в указанной окрестности*

$$\det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_{n-1}} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial u_{n-1}}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial u_{n-1}}{\partial x_{n-1}} \end{pmatrix} \neq 0.$$

Следующая теорема дает ответ на вопрос о необходимом и достаточном условии, при котором некоторая функция $u(x)$ является первым интегралом системы (9.1).

Теорема 9.2 (критерий первого интеграла). *Пусть дана автономная система* (9.1). *Пусть функция* $u(x) \in C^1(D)$, *такова, что* $u(x) \not\equiv \mathrm{const}$ *ни в какой подобласти области* D.

Тогда справедливо утверждение:

$u(x)$ *– первый интеграл системы* (9.1) *тогда и только тогда, когда*

$$\left.\frac{du}{dt}\right|_{\substack{\text{в силу}\\ \text{системы}}} = \Big(\operatorname{grad} u(x),\ F\big(x\big)\Big) = 0 \qquad \text{в } D.$$

Доказательство. **Достаточность.** Пусть $\Big(\operatorname{grad} u(x),\ F\big(x\big)\Big) = 0$ в D. Пусть $x(t)$ – произвольное решение системы (9.1). Тогда

$$\frac{du\big(x(t)\big)}{dt} = \left.\frac{du(x)}{dt}\right|_{\substack{\text{в силу}\\ \text{системы}}} = 0.$$

Следовательно, $u\big(x(t)\big) \equiv \text{const}$. Но по условию $u\big(x(t)\big) \not\equiv \text{const}$, поэтому $u(x)$ – первый интеграл системы (9.1).

Необходимость. Пусть $u(x)$ – первый интеграл системы (9.1). Пусть $p \in D$ – произвольная точка. Обозначим через $x\big(t,\ p\big)$ – решение задачи Коши для системы (9.1) с начальным условием $x(0) = p$. (Заметим, что поскольку $F(x) \in C^1(D)$, то в силу теоремы существования и единственности из главы 4 данная задача Коши имеет решение и притом единственное.)

Имеем $u\left(x\big(t,\ p\big)\right) \equiv \text{const}\ \ \forall\, t$. Следовательно,

$$\frac{du\left(x\big(t,\ p\big)\right)}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u\left(x\big(t,\ p\big)\right)}{\partial x_i} \cdot \dot{x}_i\big(t,\ p\big) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u\left(x\big(t,\ p\big)\right)}{\partial x_i} \cdot F_i\left(x\big(t,\ p\big)\right) \equiv 0.$$

Положим здесь $t = 0$. Тогда $\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial u(p)}{\partial x_i} \cdot F_i\big(p\big) = 0$. Это верно $\forall\ p \in D$. Следовательно, $\left.\dfrac{du}{dt}\right|_{\substack{\text{в силу}\\ \text{системы}}} \equiv 0$ в D. $\square$

Следствие 9.1. *Функция* $u(x) = u\big(x_1,\ \ldots,\ x_n\big)$ *– первый интеграл системы обыкновенных дифференциальных уравнений* (9.1) *тогда и только тогда, когда она является решением следующего линейного уравнения в частных производных первого порядка:*

$$F_1(x)\frac{\partial u}{\partial x_1} + \ldots + F_n(x)\frac{\partial u}{\partial x_n} = 0. \tag{9.2}$$

Докажем несколько полезных свойств первых интегралов системы (9.1).

Теорема 9.3. *Пусть* $u_1(x),\ \ldots,\ u_k(x)$ *– первые интегралы системы* (9.1). *Пусть* $\Phi\big(y_1,\ \ldots,\ y_k\big)$ *–функция класса* C^1.

Рассмотрим сложную функцию $u(x) = \Phi\big(u_1(x),\ \ldots,\ u_k(x)\big)$. *Пусть* $u(x) \not\equiv \text{const}$ *ни в какой подобласти области* D.

Тогда $u(x)$ *– тоже первый интеграл системы* (9.1).

Доказательство.

$$\left.\frac{du(x)}{dt}\right|_{\substack{\text{в силу}\\ \text{системы}}} = \frac{\partial\Phi\big(u_1(x),\ \ldots,\ u_k(x)\big)}{\partial x_1} F_1(x) + \ \ldots\ +$$

$$+ \frac{\partial\Phi\big(u_1(x),\ \ldots,\ u_k(x)\big)}{\partial x_n} F_n(x) = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial u_1}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial\Phi}{\partial u_k}\cdot\frac{\partial u_k}{\partial x_1}\right)\cdot F_1(x) +$$

$$+\ \ldots\ + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial u_1}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial x_n} + \ldots + \frac{\partial\Phi}{\partial u_k}\cdot\frac{\partial u_k}{\partial x_n}\right)\cdot F_n(x) =$$

$$= \frac{\partial \Phi}{\partial u_1}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}F_1(x) + \ldots + \frac{\partial u_1}{\partial x_n}F_n(x)\right) + \ \ldots \ +$$
$$+ \frac{\partial \Phi}{\partial u_k}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_1}F_1(x) + \ldots + \frac{\partial u_k}{\partial x_n}F_n(x)\right) =$$
$$= \frac{\partial \Phi}{\partial u_1} \cdot \frac{du_1}{dt}\bigg|_{\substack{\text{в силу}\\ \text{системы}}} + \ \ldots \ + \frac{\partial \Phi}{\partial u_k} \cdot \frac{du_k}{dt}\bigg|_{\substack{\text{в силу}\\ \text{системы}}}. \qquad (9.3)$$

Поскольку $u_1(x), \ \ldots, \ u_k(x)$ – первые интегралы системы (9.1), то в силу теоремы 9.2 (в сторону необходимости)

$$\frac{du_i}{dt}\bigg|_{\substack{\text{в силу}\\ \text{системы}}} = 0, \qquad i = 1, \ 2, \ \ldots, \ k.$$

Тогда из соотношения (9.3) следует, что и $\dfrac{du(x)}{dt}\bigg|_{\substack{\text{в силу}\\ \text{системы}}} = 0.$ А значит, в силу той же теоремы 9.2 (но уже в сторону достаточности) $u(x)$ – первый интеграл системы (9.1). □

Следствие 9.2. *Система* (9.1) *в окрестности любой точки не являющейся точкой покоя имеет бесконечно много первых интегралов.*

Теорема 9.4. *Рассмотрим систему* (9.1). *Пусть точка* a *не является точкой покоя этой системы. Пусть* $u_1(x), \ \ldots, \ u_{n-1}(x)$ – $(n-1)$ *независимых первых интегралов системы* (9.1) *в окрестности точки* a *(их существование гарантировано теоремой 9.1). Пусть* $u(x)$ *– еще один первый интеграл системы* (9.1) *в окрестности точки* a.

Тогда в этой окрестности $u(x)$ *является зависимой функцией от* $u_1(x), \ \ldots, \ u_{n-1}(x)$.

Доказательство. В силу теоремы 9.2 имеем в окрестности точки a:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1}F_1 + \ \ldots \ + \dfrac{\partial u_1}{\partial x_n}F_n = 0, \\ \ldots \\ \dfrac{\partial u_{n-1}}{\partial x_1}F_1 + \ \ldots \ + \dfrac{\partial u_{n-1}}{\partial x_n}F_n = 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x_1}F_1 + \ \ldots \ + \dfrac{\partial u}{\partial x_n}F_n = 0. \end{cases} \qquad (9.4)$$

Положим $x = a$. Тогда система (9.4) представляет собой однородную СЛАУ n-го порядка относительно $F_1, \ \ldots, \ F_n,$ которая имеет ненулевое решение

$\{F_1(a),\ \ldots,\ F_n(a)\}$. Следовательно, определитель этой системы равен нулю. Но этот определитель представляет собой Якобиан

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \ldots & \ddots & \ldots \\ \dfrac{\partial u_{n-1}}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial u_{n-1}}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial u}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial u}{\partial x_n} \end{vmatrix}.$$

Значит, в силу утверждения 9.2 данного параграфа система функций $u_1(x),\ \ldots,\ u_{n-1}(x),\ u(x)$ является зависимой в некоторой окрестности точки a.

В то же время, функции $u_1(x),\ \ldots,\ u_{n-1}(x)$ не являются зависимыми, поэтому в силу того же утверждения 9.2 ранг матрицы

$$\left.\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \ldots & \ddots & \ldots \\ \dfrac{\partial u_{n-1}}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial u_{n-1}}{\partial x_n} \end{pmatrix}\right|_{x=a}$$

равен $n-1$, а следовательно, один из миноров $n-1$-го порядка этой матрицы не равен нулю.

Еще раз применяя утверждение 9.2, получаем, что функция $u(x)$ является зависимой от функций $u_1(x),\ \ldots,\ u_{n-1}(x)$ в некоторой окрестности точки a. $\square$

Следствие 9.3. *Если a не является точкой покоя автономной системы* (9.1)*, то в окрестности этой точки существует ровно $(n-1)$ независимых первых интегралов, а любая система из n первых интегралов функционально зависима.*

Теорема 9. 5. *Если для системы* (9.1) *в окрестности точки a найдено k независимых первых интегралов, то в окрестности этой точки порядок системы понижается на k единиц.*

Доказательство. Пусть $u_1(x),\ \ldots,\ u_k(x)$ $(k \leqslant n-1)$ – независимые первые интегралы системы (9.1). Тогда согласно утверждению 2 матрица Якоби

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \ldots & \ddots & \ldots \\ \dfrac{\partial u_k}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial u_k}{\partial x_n} \end{pmatrix} \qquad \text{имеет ранг } k.$$

Переобозначая переменные, можно считать, что

$$\det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_k} \\ \dots & \ddots & \dots \\ \dfrac{\partial u_k}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial u_k}{\partial x_k} \end{pmatrix} \neq 0 \qquad \text{в окрестности точки } a. \tag{9.5}$$

Рассмотрим решение системы (9.1), проходящее через точку a. Тогда

$$\begin{cases} u_1(x_1, \dots, x_n) \equiv C_1, \\ \dots\dots\dots \\ u_k(x_1, \dots, x_n) \equiv C_k \end{cases} \tag{9.6}$$

на этом решении, в том числе и в точке a.

В силу условия (9.5) к системе (9.6) можно применить теорему о неявной функции, по которой в окрестности точки a можно переменные $x_1, \dots, x_k$ выразить через остальные:

$$\begin{cases} x_1 = w_1(x_{k+1}, \dots, x_n, C_1, \dots, C_k), \\ \dots\dots\dots \\ x_k = w_k(x_{k+1}, \dots, x_n, C_1, \dots, C_k). \end{cases}$$

Тогда систему (9.1) можно переписать в виде

$$\begin{cases} \dot x_{k+1} = F_{k+1}\Big(w_1(x_{k+1}, \dots, x_n, C_1, \dots, C_k), \dots, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad w_k(x_{k+1}, \dots, x_n, C_1, \dots, C_k), x_{k+1}, \dots, x_n\Big), \\ \dots\dots\dots \\ \dot x_n = F_n\Big(w_1(x_{k+1}, \dots, x_n, C_1, \dots, C_k), \dots, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad w_k(x_{k+1}, \dots, x_n, C_1, \dots, C_k), x_{k+1}, \dots, x_n\Big), \end{cases}$$

т.е. порядок системы понизился на k единиц. □

Замечание 9.3. Если $k = n-1$, то в теореме 9.5 получаем уравнение

$$\dot x_n = F_n\Big(w_1(x_n, C_1, \dots, C_{n-1}), \dots, w_{n-1}(x_n, C_1, \dots, C_{n-1}), x_n\Big).$$

Это уравнение с разделяющимися переменными, которое легко решается.

Таким образом, нахождение $n-1$ независимого первого интеграла позволяет полностью решить систему (9.1) в окрестности неособой точки.

9.2. Неавтономные системы ОДУ

Рассмотрим теперь общую систему уравнений первого порядка

$$\dot{x} = f(t,\ x), \qquad (t,\ x) \in G = [0,\ T) \times D, \quad D \subset \mathbb{R}^n, \tag{9.7}$$

$f(t,\ x) = \big(f_1(t,\ x),\ \ldots,\ f_n(t,\ x)\big), \quad f_i \in C^1(G)$.

В развернутом виде система (9.7) запишется следующим образом:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1\big(t,\ x_1,\ \ldots,\ x_n\big), \\ \ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = f_n\big(t,\ x_1,\ \ldots,\ x_n\big). \end{cases}$$

Это система n-го порядка. Сведем ее к автономной системе $(n+1)$-го порядка.

Для этого введем еще одну переменную $x_0 = t$. Тогда систему (9.7) можно, очевидно, записать в виде

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1\big(x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n\big), \\ \ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = f_n\big(x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n\big), \\ \dfrac{dx_0}{dt} = 1\ \big(\equiv f_0\big(x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n\big)\big)\,. \end{cases} \tag{9.8}$$

Система (9.8) – это автономная система $(n+1)$-го порядка. Но тогда для системы (9.8), а значит, и для исходной системы (9.7), можно ввести понятие первого интеграла, причем будут справедливы доказанные в п. 9.1 свойства.

Замечание 9.4. Отметим, что $f_0 \equiv 1$, поэтому у системы (9.8) нет точек покоя.

Определение 9.3. Функция $u(t,\ x)$ называется **первым интегралом системы** (9.7), если

1) $u(t,\ x) \not\equiv \mathrm{const}$ ни в какой подобласти области G;

2) для любой интегральной кривой $x = x(t)$ – решения системы (9.7)

$$u\big(t,\ x_1(t),\ \ldots,\ x_n(t)\big) \equiv C, \qquad \forall\, t \in [0,\ T).$$

Теорема 9.6. *Если $f(t,\ x) \in C^1(G)$, то в окрестности любой точки из D существует система из n независимых первых интегралов системы* (9.7).

Доказательство. Как было показано выше, система (9.7) сводится к автономной системе $(n+1)$-го порядка, причем в силу замечания 9.4 для этой системы каждая $(t,\ x) \in G$ не является точкой покоя. Поэтому утверждение теоремы следует из теоремы 9.1. □

Теорема 9.7. *Пусть* $u(t,\ x) \in C^1(G)$ *и* $u(t,\ x) \not\equiv \mathrm{const}$ *ни в какой подобласти области* G. *Тогда* $u(t,\ x)$ *является первым интегралом системы* (9.7) *тогда и только тогда, когда*

$$\left.\frac{du}{dt}\right|_{\substack{\text{в силу}\\ \text{системы}}} \equiv \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x_1} f_1(t,\ x) + \ \ldots\ + \frac{\partial u}{\partial x_n} f_n(t,\ x) = 0$$

в области G.

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы 9.2. □

Следствие. $u\big(t,\ x_1,\ \ldots,\ x_n\big) \in C^1(G)$ *– первый интеграл системы* (9.7) *тогда и только тогда, когда функция* $u\big(t,\ x_1,\ \ldots,\ x_n\big)$ *– решение следующего уравнения в частных производных первого порядка:*

$$u_t + f_1(t,\ x)u_{x_1} + \ldots + f_n(t,\ x)u_{x_n} = 0. \tag{9.9}$$

9.3. Симметричная запись систем ОДУ

Система (9.7) может быть переписана в виде

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{f_1\big(t,\ x_1,\ \ldots,\ x_n\big)} = \dfrac{dt}{1}, \\ \ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dx_n}{f_n\big(t,\ x_1,\ \ldots,\ x_n\big)} = \dfrac{dt}{1}. \end{cases} \tag{9.10}$$

Равенства (9.10) понимаются как пропорции, т.е. если $f_i\big(t,\ x_1,\ \ldots,\ x_n\big) = 0$, то считается, что и $dx_i = 0$, а соответствующее отношение равно dt.

Учитывая примененный в § 2 прием по введению новой переменной $x_0 = t$, систему (9.10) можно записать в виде

$$\frac{dx_1}{f_1\big(x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n\big)} = \ \ldots\ = \frac{dx_n}{f_n\big(x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n\big)} = \frac{dx_0}{1}. \tag{9.11}$$

Уравнения системы (9.11) можно, очевидно, умножать на любую не равную нулю функцию, и в результате мы придем к системе

$$\frac{dx_1}{\tilde f_1\big(x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n\big)} = \ \ldots\ = \frac{dx_n}{\tilde f_n\big(x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n\big)} = \frac{dx_0}{\tilde f_0\big(x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n\big)}. \tag{9.12}$$

Определение 9.4. Запись (9.12) называют **записью системы** (9.7) **в симметричной форме**. При этом предполагается, что хотя бы одна из функций $\tilde f_i\big(x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n\big)$, $i = 0,\ 1,\ \ldots,\ n$ не равна нулю.

Рассмотрим автономную систему (9.1). Будем считать, что в окрестности некоторой точки a $F\bigl(x_1,\ \ldots, x_n\bigr) \neq 0$.

Симметричная запись системы (9.1) будет иметь вид

$$\frac{dx_1}{F_1\bigl(x_1,\ \ldots,\ x_n\bigr)} = \ \ldots\ = \frac{dx_n}{F_n\bigl(x_1,\ \ldots,\ x_n\bigr)} = \frac{dt}{1}. \tag{9.13}$$

В системе (9.13) n равенств. Но при этом первые $(n-1)$ равенств образуют замкнутую систему уравнений (учтем, что $F(x) \neq 0$ в окрестности точки a).

Поэтому автономной системе (9.1) соответствует еще одна симметричная запись

$$\frac{dx_1}{F_1\bigl(x_1,\ \ldots,\ x_n\bigr)} = \ \ldots\ = \frac{dx_n}{F_n\bigl(x_1,\ \ldots,\ x_n\bigr)}, \tag{9.14}$$

где в качестве независимой переменной можно взять ту x_i, для которой $F_i\bigl(x_1, \ldots, x_n\bigr) \neq 0$. Очевидно, фазовые траектории системы (9.13) (или, что то же самое, исходной системы (9.1)) являются интегральными кривыми системы (9.14). Следовательно, мы получаем теорему:

Теорема 9.8. *Если* $F(x) \in C^1(D)$ *и* $F(a) \neq 0$, *то в окрестности точки* a *фазовые траектории системы* (9.1) *не пересекаются и заполняют всю окрестность.*

Доказательство. При выполнении условий теоремы 9.8 для системы (9.14) в окрестности точки a справедливы теоремы существования и единственности решения задачи Коши, доказанные в главе 3. Следовательно, интегральные кривые системы (9.14) (одновременно являющиеся фазовыми траекториями системы (9.1)) в окрестности точки a не пересекаются и заполняют всю окрестность. Теорема 9.8 доказана. □

Замечание 9.5. Если дана система в симметричной форме (9.14) и $F(x) \equiv \bigl(F_1(x),\ \ldots,\ F_n(x)\bigr) \neq 0$ в окрестности некоторой точки a, то эту систему можно рассматривать в двух видах:

1) свести ее к автономной системе (9.1);

2) выбрать одну из переменных за независимую (а именно ту x_i, для которой $F_i(x) \neq 0$), получить неавтономную систему в виде

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dx_i} = \dfrac{F_1\bigl(x_1,\ \ldots,\ x_{i-1},\ x_i,\ x_{i+1},\ \ldots,\ x_n\bigr)}{F_i\bigl(x_1,\ \ldots,\ x_{i-1},\ x_i,\ x_{i+1},\ \ldots,\ x_n\bigr)}, \\ \ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dx_{i-1}}{dx_i} = \dfrac{F_{i-1}\bigl(x_1,\ \ldots,\ x_{i-1},\ x_i,\ x_{i+1},\ \ldots,\ x_n\bigr)}{F_i\bigl(x_1,\ \ldots,\ x_{i-1},\ x_i,\ x_{i+1},\ \ldots,\ x_n\bigr)}, \\ \dfrac{dx_{i+1}}{dx_i} = \dfrac{F_{i+1}\bigl(x_1,\ \ldots,\ x_{i-1},\ x_i,\ x_{i+1},\ \ldots,\ x_n\bigr)}{F_i\bigl(x_1,\ \ldots,\ x_{i-1},\ x_i,\ x_{i+1},\ \ldots,\ x_n\bigr)}, \\ \ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dx_n}{dx_i} = \dfrac{F_n\bigl(x_1,\ \ldots,\ x_{i-1},\ x_i,\ x_{i+1},\ \ldots,\ x_n\bigr)}{F_i\bigl(x_1,\ \ldots,\ x_{i-1},\ x_i,\ x_{i+1},\ \ldots,\ x_n\bigr)}. \end{cases}$$

Пример 9.2. Рассмотрим систему в симметричной форме

$$\frac{dx_1}{x_1x_2} = \frac{dx_2}{x_2^2} = \frac{dx_3}{x_2\big(x_3+1\big)} \tag{9.15}$$

в окрестности точки $a \equiv \big(a_1,\ a_2,\ a_3\big)$, $a_2 \neq 0$.

Если мы воспользуемся первым способом, то будем рассматривать автономную систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1x_2, \\ \dot{x}_2 = x_2^2, \\ \dot{x}_3 = x_2\big(x_3+1\big). \end{cases} \tag{9.16}$$

Для системы (9.16) нетрудно получить два независимых первых интеграла. Действительно, первое соотношение в (9.15) дает

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2}, \qquad \text{откуда} \quad \ln\big|x_1\big| = \ln\big|x_2\big| + \ln\big|C_1\big|$$

и мы получаем первый интеграл в виде

$$\frac{x_1}{x_2} = C_1.$$

Второе соотношение в (9.15) дает

$$\frac{dx_2}{x_2} = \frac{dx_3}{x_3+1},$$

откуда аналогично получаем еще один первый интеграл

$$\frac{x_3+1}{x_2} = C_2.$$

Найденные первые интегралы, очевидно, независимы, поскольку в первый из них не входит x_3, а во второй – x_1.

Теперь в соответствии с замечанием 9.3 нетрудно получить и общее решение системы (9.16). Действительно, из второго уравнения имеем $\dfrac{dx_2}{dt} = x_2^2$, следовательно, $\dfrac{dx_2}{x_2^2} = dt$, откуда $x_2 = \dfrac{1}{C_3 - t}$.

Таким образом, получаем решение системы (9.16) в виде

$$x_1 = \frac{C_1}{C_3 - t}, \qquad x_2 = \frac{1}{C_3 - t}, \qquad x_3 = \frac{C_2}{C_3 - t} - 1.$$

Фазовыми же траекториями будут линии

$$\begin{cases} x_1 = C_1x_2, \\ x_3 = C_2x_2 - 1. \end{cases} \tag{9.17}$$

Систему (9.15) можно также свести к неавтономной системе вида

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dx_2} = \dfrac{x_1}{x_2}, \\ \dfrac{dx_3}{dx_2} = \dfrac{x_3 + 1}{x_2}. \end{cases} \tag{9.18}$$

Система (9.18) легко решается, и, очевидно, общее решение этой системы запишется в виде (9.17).

Таким образом, интегральные кривые неавтономной системы (9.18) являются фазовыми траекториями автономной системы (9.16).

Глава X.

Уравнения в частных производных первого порядка

10. 1. Однородные линейные уравнения в частных производных первого порядка

Пусть D – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $x = \big(x_1, \ldots, x_n\big) \in D$.

Определение 10. 1. Однородным линейным уравнением в частных производных первого порядка называется уравнение

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} = 0; \qquad \sum_{i=1}^{n} a_i^2(x) > 0 \quad \forall x \in D; \tag{10.1}$$

здесь $u\big(x\big)$ – искомая функция, $a_i(x)$, $i = 1, \ldots, n$ – заданные функции.

Определение 10. 2. Неоднородным линейным уравнением в частных производных первого порядка называется уравнение

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} = a_{n+1}(x); \qquad \sum_{i=1}^{n} a_i^2(x) > 0 \quad \forall x \in D; \tag{10.1'}$$

$a_{n+1}(x) \neq 0$ в D; $a_{n+1}(x)$ – также заданная функция.

В данном параграфе мы рассмотрим однородное уравнение (10.1) при условии, что $a_i(x) \in C^1(D)$.

Определение 10. 3. Решением уравнения (10.1) называется функция $u(x) \in C^1(D)$, обращающая это уравнение в верное равенство $\forall\, x \in D$.

Сопоставим уравнению (10.1) автономную систему ОДУ вида

$$\dot{x} = a(x), \qquad a(x) \equiv \big(a_1(x), \ldots, a_n(x)\big). \tag{10.2}$$

Определение 10. 4. Система (10.2) называется **характеристической системой для уравнения в частных производных** (10.1), а ее фазовые траектории – **характеристиками**.

Теорема 10.1. *Функция* $u(x) \in C^1(D)$ *является решением уравнения* (10.1) *тогда и только тогда, когда* $u(x)$ *– первый интеграл системы* (10.2) *или* $u(x) \equiv \mathrm{const}$.

Доказательство. Очевидно, $u(x) \equiv \mathrm{const}$ является решением уравнения (10.1).

Если же $u(x) \not\equiv \mathrm{const}$, то по критерию первого интеграла (теорема 9.2) $u(x)$ является первым интегралом системы (10.2) тогда и только тогда, когда $\left.\dfrac{du}{dt}\right|_{\substack{\text{в силу}\\ \text{системы}}} = 0.$

Но $\left.\dfrac{du}{dt}\right|_{\substack{\text{в силу}\\ \text{системы}}} = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i(x)\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ – левая часть уравнения (10.1). Теорема 10.1 доказана. □

Из свойств первых интегралов, доказанных в предыдущей главе, вытекает, на основании доказанной теоремы 10.1, следующее свойство решений уравнения (10.1).

Теорема 10.2. *Если функции* $u_1(x),\ \ldots,\ u_k(x)$ *являются решениями уравнения* (10.1)*, а* $\Phi\big(y_1,\ \ldots,\ y_k\big)$ *– функция класса* C^1 *от своих аргументов, то* $u(x) = \Phi\big(u_1(x),\ \ldots,\ u_k(x)\big)$*, также является решением уравнения* (10.1).

Доказательство. Данная теорема является непосредственным следствием теоремы 9.3 из п. 9.1. □

Теорема 10.3. *В окрестности любой точки* $P \in D$ *существует* $(n-1)$ *независимых решений* $u_1^*(x),\ \ldots,\ u_{n-1}^*(x)$ *уравнения* (10.1)*, а общее решение этого уравнения задается формулой*

$$u(x) = \Phi\big(u_1^*(x),\ \ldots,\ u_{n-1}^*(x)\big), \tag{10.3}$$

где $\Phi\big(y_1,\ \ldots,\ y_k\big)$ *– произвольная функция класса* C^1.

Доказательство. В силу условия $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2(x) > 0$ в каждой точке области D, каждая точка $P \in D$ не является точкой покоя характеристической системы (10.2), а тогда утверждение теоремы вытекает из теорем 9.1 и 9.4. □

Теорема 10.4. *Любое решение уравнения* (10.1) *тождественно равно константе на любой характеристике.*

Доказательство. Если $u(x)$ – решение уравнения (10.1), то в силу теоремы 10.1 $u(x)$ – первый интеграл системы (10.2) (или $u(x) \equiv \mathrm{const}$). Но в силу определения первого интеграла $u\big(x(t)\big) \equiv \mathrm{const}$ на любом решении системы (10.2), т.е. на любой характеристике. □

Пример 10.1. *Решить уравнение*

$$x_2\frac{\partial u}{\partial x_1} - x_1\frac{\partial u}{\partial x_2} = 0$$

вне точки $\big(x_1,\ x_2\big) = \big(0,\ 0\big)$.

Характеристическая система имеет вид

$$\frac{dx_1}{x_2} = \frac{dx_2}{-x_1},$$

первым интегралом является, например,

$$x_1^2 + x_2^2 = C.$$

Следовательно, общее решение рассматриваемого уравнения можно записать в виде

$$u = \Phi\big(x_1^2 + x_2^2\big), \qquad \text{где} \quad \Phi(y) \in C^1.$$

Это – семейство поверхностей вращения.

10. 2. Задача Коши для линейного уравнения в частных производных первого порядка

Пусть область $D \subset \mathbb{R}^n$ имеет вид $D = D' \times \big(x_n^0 - h,\ x_n^0 + h\big)$, где D' – область переменных $\big(x_1,\ \ldots,\ x_{n-1}\big)$ в $\mathbb{R}^{n-1}$, $h = \text{const} > 0$.

Пусть на области D' задана функция $\varphi\big(x_1,\ \ldots,\ x_{n-1}\big) \in C^1\big(D'\big)$ – рис. 10. 1

Задача Коши для уравнения (10.1) заключается в том, чтобы найти решение $u(x)$ уравнения (10.1), удовлетворяющее условию

$$u\big(x_1,\ \ldots,\ x_n\big)\Big|_{x_n = x_n^0} = \varphi\big(x_1,\ \ldots,\ x_{n-1}\big). \tag{10.4}$$

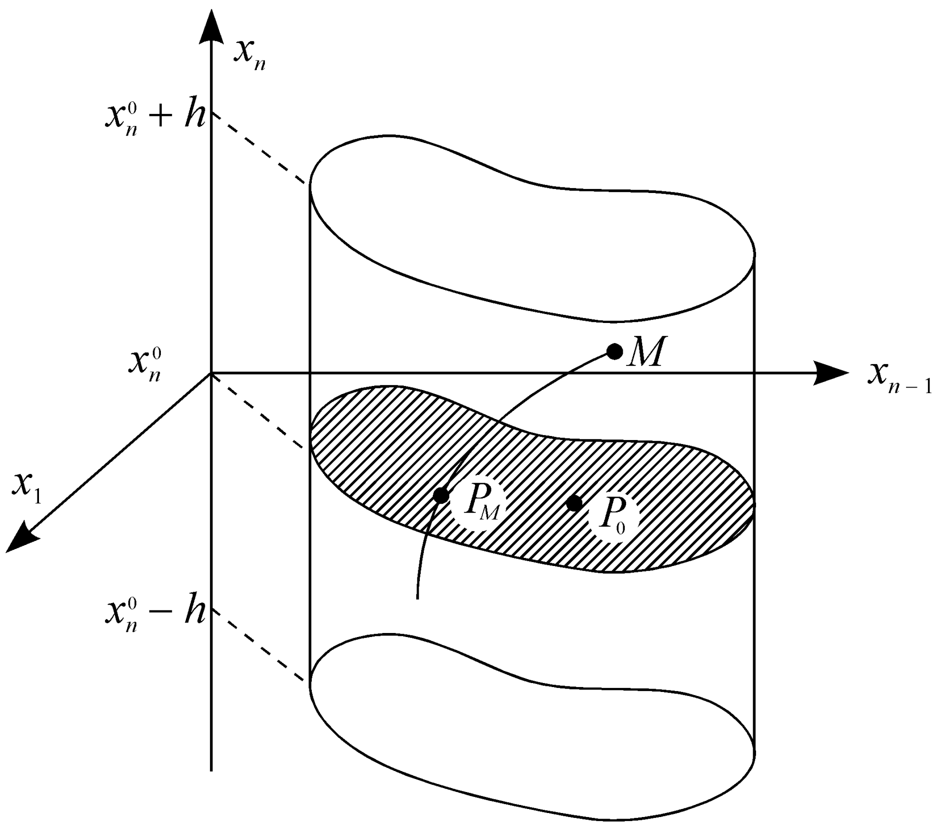

Рис. 10. 1. Постановка задачи Коши

Теорема 10.5 (существования и единственности решения задачи Коши). *Рассмотрим задачу Коши* (10.1), (10.4). *Пусть коэффициенты* $a_i(x) \in C^1(D)$, $\varphi\big(x_1,\ \ldots,\ x_{n-1}\big) \in C^1\big(D'\big)$. *Пусть* $P_0 \equiv \big(x_1^0,\ \ldots,\ x_{n-1}^0,\ x_n^0\big) \in D'$ *таково, что* $a_n\big(P_0\big) \neq 0$.

Тогда найдется окрестность точки P_0, *в которой существует решение* $u(x)$ *задачи Коши* (10.1), (10.4), *и оно единственно.*

Доказательство. I. **Существование решения.** Рассмотрим характеристическую систему (10.2):

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1(x), \\ \ldots \\ \dot{x}_n = a_n(x). \end{cases}$$

Поскольку по условию теоремы $a_n\big(P_0\big) \neq 0$, то в силу теоремы 9.1 в окрестности точки P_0 существует $(n-1)$ независимых первых интегралов $\psi_1(x),\ \ldots,\ \psi_{n-1}(x)$ системы (10.2). При этом поскольку $a_n\big(P_0\big) \neq 0$, то по той же теореме 9.1 в указанной окрестности точки P_0 Якобиан

$$\det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \psi_1}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial \psi_1}{\partial x_{n-1}} \\ \ldots & \ddots & \ldots \\ \dfrac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x_{n-1}} \end{pmatrix} \neq 0. \tag{10.5}$$

Сделаем замену переменных

$$\begin{cases} \xi_1 = \psi_1\big(x_1,\ \ldots,\ x_n\big), \\ \ldots\ldots\ldots \\ \xi_{n-1} = \psi_{n-1}\big(x_1,\ \ldots,\ x_n\big), \\ \xi_n = x_n. \end{cases}$$

Якобиан этой замены

$$\frac{D\big(\xi_1,\ \ldots,\ \xi_n\big)}{D\big(x_1,\ \ldots,\ x_n\big)} = \det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \psi_1}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial \psi_1}{\partial x_{n-1}} & \dfrac{\partial \psi_1}{\partial x_n} \\ \ldots & \ddots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x_{n-1}} & \dfrac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x_n} \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0$$

в силу условия (10.5). Таким образом, замена переменных является невырожденной в окрестности точки P_0.

Перепишем уравнение (10.1) в новых переменных. Имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial \xi_j}\,\frac{\partial \xi_j}{\partial x_k}.$$

Следовательно, уравнение (10.1) перепишется в виде

$$\sum_{k=1}^{n} a_k(x) \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial \xi_j} \, \frac{\partial \xi_j}{\partial x_k} \right) = 0$$

или

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial \xi_j} \, \left(\sum_{k=1}^{n} a_k(x) \, \frac{\partial \xi_j}{\partial x_k} \right) = 0.$$

Если $j = 1, \ 2, \ \ldots, \ n-1,$ то

$$\sum_{k=1}^{n} a_k(x) \, \frac{\partial \xi_j}{\partial x_k} = \sum_{k=1}^{n} a_k(x) \, \frac{\partial \psi_j}{\partial x_k} = \frac{d\psi_j}{dt} \bigg|_{\substack{\text{в силу} \\ \text{системы}}} = 0,$$

поскольку $\psi_j(x)$ – первый интеграл системы (10.2). Если же $j = n,$ то

$$\sum_{k=1}^{n} a_k(x) \, \frac{\partial \xi_n}{\partial x_k} = a_n(x).$$

Таким образом, в новых переменных уравнение (10.1) записывается в виде

$$a_n\big(x(\xi)\big) \frac{\partial u\big(x(\xi)\big)}{\partial \xi_n} = 0.$$

Но в окрестности точки P_0 $a_n\big(x\big) \neq 0,$ поэтому окончательно получаем уравнение

$$\frac{\partial u\big(x(\xi)\big)}{\partial \xi_n} = 0. \tag{10.6}$$

Начальное условие (10.4) в новых переменных перепишется в виде

$$u\big(x(\xi)\big)\Big|_{\xi_n = x_n^0} = \varphi\big(x_1(\xi), \ \ldots, \ x_{n-1}(\xi)\big)\Big|_{\xi_n = x_n^0}.$$

Но тогда в силу (10.6) имеем

$$\begin{multline} u\big(x(\xi)\big) = u\big(x(\xi)\big)\Big|_{\xi_n = x_n^0} = \\ = \varphi\left(x_1\big(\xi_1, \ \ldots, \ \xi_{n-1}, \ x_n^0\big), \ \ldots, \ x_{n-1}\big(\xi_1, \ \ldots, \ \xi_{n-1}, \ x_n^0\big)\right). \end{multline} \tag{10.7}$$

Таким образом, решение уравнения (10.1) в окрестности точки P_0 существует и задается формулой (10.7).

II. Докажем единственность решения задачи Коши (10.1), (10.4).

Пусть, напротив, эта задача в некоторой окрестности точки P_0 имеет два решения $u(x)$ и $v(x)$. Тогда функция $w(x) = u(x) - v(x)$ является решением задачи Коши

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} a_i(x)\,\dfrac{\partial w}{\partial x_i} = 0, \\ \\ w\Big|_{x_n = x_n^0} = 0. \end{cases} \tag{10.8}$$

Рассмотрим семейство характеристик уравнения (10.1) в окрестности точки P_0.

По условию теоремы $a_n\big(P_0\big) \neq 0$, поэтому применима теорема 9.8, в силу которой существует такая окрестность точки P_0 для которой через каждую точку этой окрестности проходит характеристика и притом единственная.

Поскольку в системе (10.2) $a_n(x) \neq 0$ в окрестности точки P_0, то, как можно показать, все характеристики пересекают плоскость $x_n = x_n^0$ (возможно, для меньшей окрестности точки P_0).

Пусть теперь M – произвольная точка выбранной окрестности. Проведем через нее характеристику до пересечения с плоскостью $x_n = x_n^0$ в некоторой точке P_M (рис. 10.1).

С одной стороны, $w\big(P_M\big) = 0$ в силу (10.8).

С другой стороны, по доказанному в первой части теоремы, $w(x) = \mathrm{const}$ на любой характеристике.

Следовательно, $w(M) = 0$. В силу произвольного выбора M имеем $w(x) \equiv 0$ в окрестности точки P_0, т.е. $u(x) = v(x)$. Полученное противоречие завершает доказательство. □

Замечание 10.1. Геометрически задача Коши (10.1), (10.4) заключается в следующем:

– из каждой точки P плоскости $x_n = x_n^0$ в окрестности P_0 выпускаем характеристику;

– существует некоторая окрестность точки P_0, в которой эти характеристики не пересекаются и заполняют всю окрестность;

– вдоль характеристики «сносится» значение начальных данных $\varphi\big(P\big)$ без изменения, т.е. зная характеристики, мы решаем задачу Коши.

Замечание 10.2. По характеристикам «сносятся», вообще говоря, разные значения $\varphi\big(P\big)$ с плоскости $x_n = x_n^0$, поэтому решение задачи Коши будет существовать, пока характеристики не начнут пересекаться. Как только это произойдет, решение разрушается (рис. 10.2).

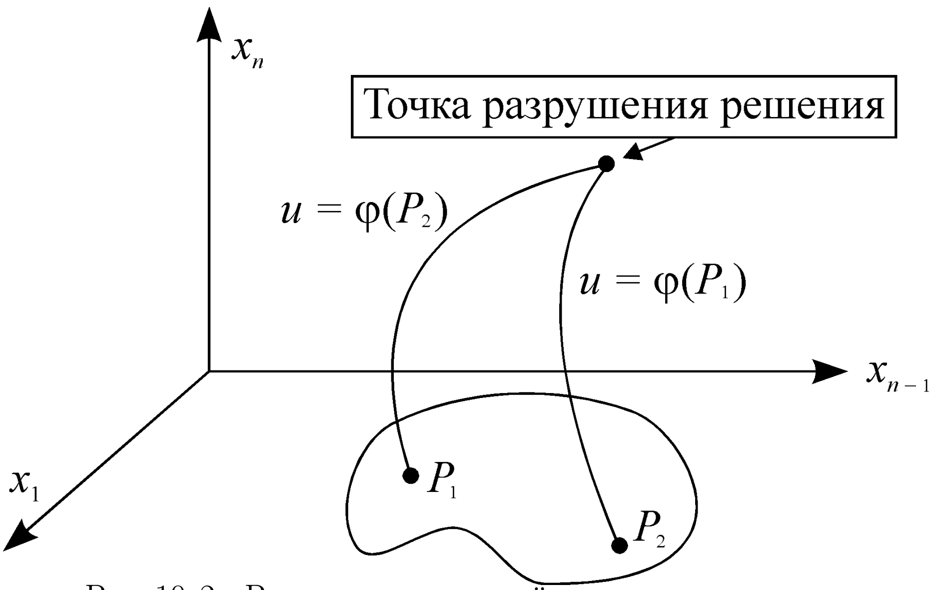

Рис. 10. 2. Разрушение решений в точке пересечения характеристик

10. 3. Квазилинейные уравнения в частных производных первого порядка

Пусть, как и выше, D – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $x = \big(x_1, \ldots, x_n\big)$ лежит в D, $u \in U$, $\Omega = D \times U$, U – некоторый интервал из $\mathbb{R}^1$.

Определение 10. 5. Квазилинейным уравнением в частных производных первого порядка называется уравнение

$$L(u) \equiv \sum_{i=1}^{n} a_i\big(x_1, \ldots, x_n, u\big)\frac{\partial u}{\partial x_i} = b\big(x_1, \ldots, x_n, u\big); \tag{10.9}$$

при этом предполагается, что $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2(x, u) > 0 \quad \forall (x, u) \in \Omega.$

Будем также предполагать, что функции $a_i(x, u)$, $i = 1, \ldots, n$ и $b(x, u) \in C^1\big(\Omega\big)$ – заданные функции.

Определение 10. 6. Решением уравнения (10.9) **в области** D будем называть функцию $u(x) \in C^1(D)$, обращающую это уравнение в верное равенство в каждой точке $x \in D$.

Геометрически – решение уравнения (10.9) представляет собой поверхность в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ переменных $\big(x, u\big)$.

Сопоставим квазилинейному уравнению (10.9) следующее линейное однородное уравнение

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\big(x_1, \ldots, x_n, u\big)\frac{\partial v}{\partial x_i} + b\big(x_1, \ldots, x_n, u\big)\frac{\partial v}{\partial u} = 0. \tag{10.10}$$

Связь между этими уравнениями определяется следующей теоремой.

Теорема 10.6. *Пусть* $v = V\big(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ u\big)$ *– решение уравнения* (10.10)*; пусть точка* $Q^0 = \big(x_1^0,\ \ldots,\ x_n^0,\ u^0\big)$*, такова, что*

$$\frac{\partial V}{\partial u}\Big|_{Q^0} \neq 0, \qquad V\left(x_1^0,\ \ldots,\ x_n^0,\ u^0\right) = 0.$$

В этом случае в силу теоремы о неявной функции соотношение

$$V\big(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ u\big) = 0 \tag{10.11}$$

определяет в окрестности Q^0 *некоторую функцию* $u = \varphi(x)$.

Тогда утверждается, что функция $u = \varphi(x)$ *является решением уравнения* (10.9) *в окрестности точки* $P^0 = \big(x_1^0,\ \ldots,\ x_n^0\big)$.

Доказательство. Пусть $u = \varphi(x)$ – решение функционального уравнения (10.11) в окрестности точки $P^0 = \big(x_1^0,\ \ldots,\ x_n^0\big)$. Тогда в силу теоремы о неявной функции в той же окрестности

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\,\frac{\dfrac{\partial V\big(x,\ u\big)}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial V\big(x,\ u\big)}{\partial u}}.$$

Подставляя эти выражения в левую часть уравнения (10.9), получим

$$L(\varphi) = -\sum_{i=1}^{n} a_i\big(x,\ \varphi\big)\frac{\dfrac{\partial V\big(x,\ u\big)}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial V\big(x,\ u\big)}{\partial u}}. \tag{10.12}$$

Но $V\big(x,\ u\big)$ – решение уравнения (10.10) (для всех u, в том числе и для $u = \varphi(x)$). Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\big(x,\ \varphi\big)\frac{\partial V\big(x,\ \varphi\big)}{\partial x_i} = -b\big(x,\ \varphi\big)\frac{\partial V\big(x,\ u\big)}{\partial u}\Big|_{u=\varphi(x)},$$

т.е.

$$-\sum_{i=1}^{n} a_i\big(x,\ \varphi\big)\frac{\dfrac{\partial V\big(x,\ \varphi\big)}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial V\big(x,\ u\big)}{\partial u}\Big|_{u=\varphi(x)}} = b\big(x,\ \varphi\big),$$

поэтому из (10.12) следует, что

$$L(\varphi) = b\big(x,\ \varphi\big),$$

что и означает выполнение уравнения (10.9) для функции $\varphi(x)$. Теорема доказана. □

Замечание 10. 3. Уравнение (10.10) соответствует автономной системе ОДУ

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1(x,\ u), \\ \dots \\ \dot{x}_n = a_n(x,\ u), \\ \dot{u} = b(x,\ u), \end{cases} \tag{10.13}$$

которую в симметричной форме (см. главу 9, § 3) можно записать в виде

$$\frac{dx_1}{a_1(x,\ u)} = \ldots = \frac{dx_n}{a_n(x,\ u)} = \frac{du}{b(x,\ u)}. \tag{10.14}$$

Определение 10. 7. Система (10.13) (или в симметричной форме записи (10.14)) называется **характеристической системой для квазилинейного уравнения** (10.9). Фазовые траектории системы (10.13) (или, что то же самое, интегральные кривые системы (10.14)) называются **характеристиками**.

Из теоремы 10. 6 с учетом замечания 10. 3 вытекает алгоритм нахождения решений уравнения (10.9).

Алгоритм решения квазилинейного уравнения

1. Записываем характеристическую систему (10.14).
2. Находим n независимых первых интегралов этой системы

$$\psi_1(x,\ u) = C_1,\ \ \ldots,\ \ \psi_n(x,\ u) = C_n.$$

3. Строим общий интеграл системы (10.14) в виде

$$v = V\left(\psi_1(x,\ u),\ \ldots,\ \psi_n(x,\ u)\right), \tag{10.15}$$

где $V(y_1,\ \ldots,\ y_n)$ – произвольная функция класса C^1 от своих аргументов, причем $\dfrac{dV}{du} \neq 0$ в окрестности некоторой точки $Q^0 = (P^0,\ u^0)$.

В силу теоремы 10. 2 формула (10.15) задает решение линейного уравнения (10.10).

4. Решение $u(x)$ уравнения (10.9) в окрестности точки P^0 находим по теореме о неявной функции как решение функционального уравнения

$$V\left(\psi_1(x,\ u),\ \ldots,\ \psi_n(x,\ u)\right) = 0. \tag{10.16}$$

Замечание 10. 4. Вообще говоря, не исключена возможность существования решений $u = \varphi^*(x)$ уравнения (10.9), которые не получаются из формулы (10.16), поскольку условия теоремы 10. 6 являются только достаточными для существования решений уравнения (10.9) и не являются необходимыми.

Такие решения реально могут существовать. Они называются **специальными решениями**, но мы их рассматривать не будем.

Поэтому решение, получаемое из формулы (10.16), будем называть **общим решением** уравнения (10.9) (в окрестности точки P^0).

Замечание 10. 5. При построении первых интегралов системы (10.14) в ряде случаев может оказаться, что переменная u войдет только в один из них:

$$\psi_1(x) = C_1, \ \ldots, \ \psi_{n-1}(x) = C_{n-1}, \ \psi_n(x, u) = C_n.$$

Тогда общее решение будет находиться из соотношения

$$V\big(\psi_1(x), \ \ldots, \ \psi_{n-1}(x), \ \psi_n(x, u)\big) = 0,$$

которое можно по теореме о неявной функции переписать в виде

$$\psi_n(x, u) = f\left(\psi_1\big(x, \ u\big), \ \ldots, \ \psi_{n-1}\big(x\big)\right). \tag{10.17}$$

Разрешив равенство (10.17) относительно u, мы получим общее решение уравнения (10.9) в явном виде.

В частности, однородное линейное уравнение (10.1) можно рассматривать как частный случай уравнения (10.9).

Характеристическая система (10.14) запишется в этом случае в виде

$$\frac{dx_1}{a_1(x)} = \ \ldots \ = \frac{dx_n}{a_n(x)} = \frac{du}{0}.$$

Система из n независимых первых интегралов может быть выбрана следующим образом

$$\psi_1(x) = C_1, \ \ldots, \ \psi_{n-1}(x) = C_{n-1}, \ u = C_n.$$

Видим, что переменная u войдет только в последний первый интеграл. Решение уравнения может быть записано по формуле (10.17), которая в данном случае совпадает с формулой (10.3).

Замечание 10. 6. Теорема 10. 6 сводит решение квазилинейного уравнения к решению линейного уравнения, которое в соответствии с теоремой 10. 3 решалось локально в окрестности некоторой точки.

Таким образом, мы можем гарантировать разрешимость уравнения (10.9) тоже только локально, хотя реально полученное решение может существовать и глобально.

Пример 10. 2. *Решить уравнение*

$$x_2 \frac{\partial u}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial u}{\partial x_2} = x_1 - x_2.$$

Характеристическая система имеет вид

$$\frac{dx_1}{x_2} = \frac{dx_2}{x_1} = \frac{du}{x_1 - x_2}.$$

Первое равенство

$$\frac{dx_1}{x_2} = \frac{dx_2}{x_1}$$

перепишется в виде $x_1dx_1 = x_2dx_2$ и приводит к первому интегралу

$$x_1^2 - x_2^2 = C_1.$$

Для получения другого первого интеграла воспользуемся свойством сложения пропорций:

$$\frac{d\bigl(x_2 - x_1\bigr)}{x_1 - x_2} = \frac{du}{x_1 - x_2},$$

откуда получаем первый интеграл

$$u + x_1 - x_2 = C_2.$$

Поскольку u входит только в один из полученных первых интегралов, то получаем решение уравнения в явном виде

$$u = x_2 - x_1 + f\bigl(x_1^2 - x_2^2\bigr),$$

функция $f(y)$ – произвольная функция класса C^1.

Пример 10. 3. *Решить уравнение*

$$\bigl(x_2 + 2u^2\bigr)\,\frac{\partial u}{\partial x_1} - 2x_1^2 u\,\frac{\partial u}{\partial x_2} = x_1^2.$$

Характеристическая система запишется в виде

$$\frac{dx_1}{x_2 + 2u^2} = \frac{dx_2}{-2x_1^2 u} = \frac{du}{x_1^2}.$$

Из второго соотношения имеем $dx_2 = -2udu$, откуда получаем первый интеграл

$$x_2 + u^2 = C_1. \tag{10.18}$$

Подставляя $x_2 = C_1 - u^2$ в соотношение $\dfrac{dx_1}{x_2 + 2u^2} = \dfrac{du}{x_1^2}$, получаем $\dfrac{dx_1}{C_1 + u^2} = \dfrac{du}{x_1^2}$, откуда $x_1^2\,dx_1 = \bigl(C_1 + u^2\bigr)du$, а следовательно,

$$\frac{x_1^3}{3} = C_1 u + \frac{u^3}{3} + \frac{C_2}{3}.$$

Подставляя сюда C_1 из (10.18), получаем еще один первый интеграл

$$x_1^3 - 3\bigl(x_2 + u^2\bigr)u - u^3 = C_2.$$

Тогда общее решение уравнения запишется в неявном виде

$$V\,\bigl(x_2 + u^2,\ x_1^3 - 3\bigl(x_2 + u^2\bigr)u - u^3\bigr) = 0,$$

где функция $V\bigl(y_1,\ y_2\bigr)$ – произвольная функция класса C^1 и такая, что

$$\frac{\partial V\,\bigl(x_2 + u^2,\ x_1^3 - 3\bigl(x_2 + u^2\bigr)u - u^3\bigr)}{\partial u} \neq 0.$$

Следующие две теоремы объясняют геометрический смысл характеристик квазилинейного уравнения (10.9).

Теорема 10. 7. *Всякая интегральная поверхность* $u = \varphi\big(x_1,\ \ldots,\ x_n\big)$ *уравнения* (10.9) *(график решения этого уравнения) состоит из характеристик в том смысле, что через каждую точку этой поверхности проходит характеристика, целиком лежащая на этой поверхности.*

Доказательство. Обозначим интегральную поверхность $u = \varphi\big(x_1,\ \ldots,\ x_n\big)$ через S. Пусть $P = (x,\ u)$ – произвольная точка этой поверхности; обозначим через Q – проекцию точки P на гиперплоскость переменных $\big(x_1,\ \ldots,\ x_n\big)$ (рис. 10. 3).

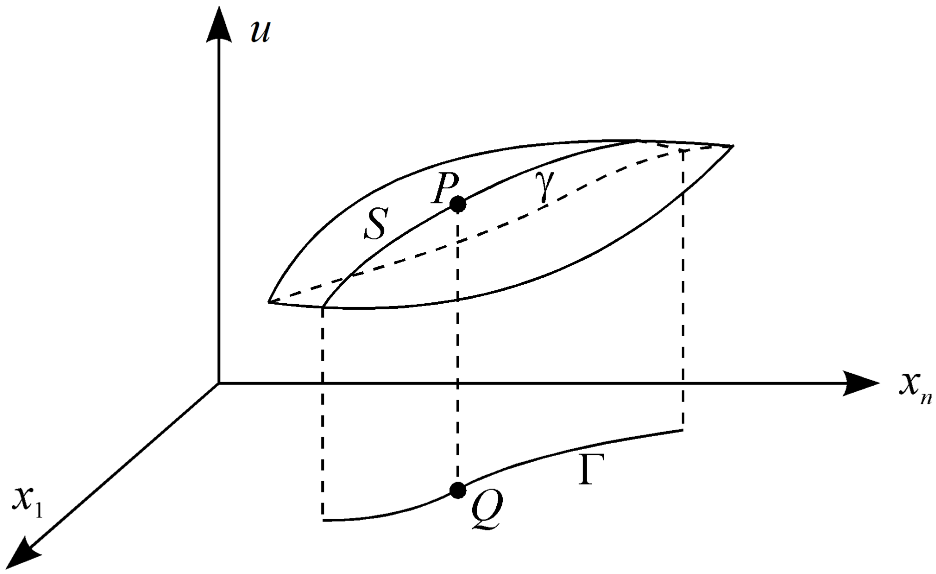

Рис. 10. 3. Интегральная поверхность

Рассмотрим систему ОДУ вида

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1\left(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ \varphi\big(x_1,\ \ldots,\ x_n\big)\right), \\ \ldots\ldots\ldots \\ \dot{x}_n = a_n\left(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ \varphi\big(x_1,\ \ldots,\ x_n\big)\right). \end{cases} \tag{10.19}$$

Эта система определяет интегральные кривые (решения системы) в пространстве $\mathbb{R}^n$ переменных $\big(x_1,\ \ldots,\ x_n\big)$.

Рассмотрим интегральную кривую Γ, проходящую через точку Q (см. рис. 10. 3). Пусть в параметрической форме она задается уравнениями

$$x_i = x_i(t), \qquad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

В пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ переменных $\big(x,\ u\big)$ ей будет соответствовать кривая γ, проходящая через точку P и лежащая на поверхности S (рис. 10. 3). Тогда γ задается уравнениями

$$\begin{cases} x_i = x_i(t), \qquad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n, \\ u = \varphi\big(x_1(t),\ \ldots,\ x_n(t)\big). \end{cases} \tag{10.20}$$

Покажем, что кривая γ является характеристикой, т.е. функции $\bigl(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ u\bigr)$ из (10.20) удовлетворяют характеристической системе (10.13).

В силу соотношений (10.19) первые n уравнений системы (10.13), очевидно, удовлетворяются. Осталось проверить выполнение последнего $(n+1)$-го уравнения.

Имеем

$$\frac{du}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\,\dot{x}_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\,a_i\left(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ \varphi\bigl(x_1,\ \ldots,\ x_n\bigr)\right). \tag{10.21}$$

Но функция $u = \varphi\bigl(x_1,\ \ldots,\ x_n\bigr)$ по условию является решением уравнения (10.9), поэтому последняя сумма в соотношении (10.21) равна $b\left(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ \varphi\bigl(x_1,\ \ldots,\ x_n\bigr)\right)$. Таким образом,

$$\frac{du}{dt} = b\left(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ \varphi\bigl(x_1,\ \ldots,\ x_n\bigr)\right) \equiv b\bigl(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ u\bigr),$$

т.е. и последнее уравнение системы (10.13) выполнено. Теорема доказана. $\square$

Справедливо и обратное утверждение.

Теорема 10.8. *Если поверхность* S, *задаваемая функцией* $u = \varphi\bigl(x_1,\ \ldots,\ x_n\bigr)$, *(где* $\varphi(x)$ *– функция класса* C^1 *своих аргументов) состоит из характеристик уравнения* (10.9), *то функция* $u = \varphi\bigl(x_1,\ \ldots,\ x_n\bigr)$ *является решением уравнения* (10.9).

Доказательство. Пусть γ – характеристика уравнения (10.9), задаваемая параметрически в виде

$$\begin{cases} x_1 = x_1(t), \\ \ldots\ldots\ldots \\ x_n = x_n(t), \\ u = u(t). \end{cases}$$

Тогда по определению характеристики функции $x_1(t),\ \ldots,\ x_n(t),\ u(t)$ удовлетворяют системе (10.13), следовательно,

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1(x,\ u), \\ \ldots\ldots\ldots \\ \dot{x}_n = a_n(x,\ u), \\ \dot{u} = b(x,\ u). \end{cases}$$

Но тогда касательный вектор τ к кривой γ в точке $P = \bigl(x,\ u\bigr)$ имеет вид

$$\tau = \bigl(a_1(x,\ u),\ \ldots,\ a_n(x,\ u),\ b(x,\ u)\bigr).$$

С другой стороны, вектор нормали N к поверхности S в точке $(x,\ u)$ имеет вид

$$N = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1},\ \ldots,\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_n},\ -1\right).$$

Скалярное произведение $\left(\tau,\ N\right) = 0$, поэтому имеем соотношение

$$a_1(x,\ u)\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \ldots + a_n(x,\ u)\frac{\partial \varphi}{\partial x_n} - b(x,\ u) = 0,$$

которое означает, что функция $u = \varphi\left(x_1,\ \ldots,\ x_n\right)$ удовлетворяет уравнению (10.9). □

Замечание 10. 7. Из доказанных теорем вытекает геометрическое построение решения уравнения (10.9):

1) n независимых первых интегралов характеристической системы (10.13) можно рассматривать как n-параметрическое семейство характеристик

$$\begin{cases} \psi_1\left(x_1\ \ldots,\ x_n,\ u\right) = C_1, \\ \ldots\ldots\ldots \\ \psi_n\left(x_1\ \ldots,\ x_n,\ u\right) = C_n, \end{cases}$$

зависящих от n параметров $C_1,\ \ldots,\ C_n$, и заполняющих некоторую область в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ переменных $\left(x_1\ \ldots,\ x_n,\ u\right)$.

2) Наша задача – «склеить» из этих характеристик гладкую поверхность, которая будет тогда интегральной поверхностью уравнения (10.9).

3) Чтобы это сделать, наложим на параметры $C_1,\ \ldots,\ C_n$ гладкую связь:

$$V\left(C_1,\ \ldots,\ C_n\right) = 0. \tag{10.22}$$

4) Подставляя в (10.22) первые интегралы характеристической системы, как раз и придем к формуле (10.16), задающей общее решение уравнения (10.9).

10. 4. Задача Коши для квазилинейного уравнения в частных производных первого порядка

Для простоты формулировок рассмотрим случай $n = 2$. Тогда уравнение (10.9) можно записать в виде

$$a_1\left(x_1,\ x_2,\ u\right)\frac{\partial u}{\partial x_1} + a_2\left(x_1,\ x_2,\ u\right)\frac{\partial u}{\partial x_2} = b\left(x_1,\ x_2,\ u\right), \tag{10.23}$$

где $\left(x_1,\ x_2,\ u\right) \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$.

Определение 10. 8. Задача Коши для уравнения (10.23) состоит в нахождении интегральной поверхности $u = \varphi(x,\ y)$ (решения уравнения (10.23)), проходящей через заданную линию L, которая параметрически задана в виде

$$\begin{cases} x_1 = x_1^*(t), \\ x_2 = x_2^*(t), \\ u = u^*(t). \end{cases} \tag{10.24}$$

Опишем, как решается задача Коши (10.23), (10.24). Из результатов предыдущего параграфа вытекает, что общее решение уравнения (10.23) может быть записано как неявная функция $u(x,\ y)$, получаемая из уравнения

$$V\left(\psi_1\big(x_1,\ x_2,\ u\big),\ \psi_2\big(x_1,\ x_2,\ u\big)\right)=0, \tag{10.25}$$

где

$$\psi_1\big(x_1,\ x_2,\ u\big)=C_1, \quad \psi_2\big(x_1,\ x_2,\ u\big)=C_2 \tag{10.26}$$

два независимых первых интеграла характеристической системы.

Таким образом, соотношение (10.25) представляет собой связь $V(C_1,\ C_2)=0$ на параметры $C_1,\ C_2$ (см. замечание 10.6 и, в частности, соотношение (10.22) из предыдущего параграфа).

Чтобы решить задачу Коши, нам требуется выбрать такую связь (т.е. такую функцию V), чтобы соответствующее однопараметрическое семейство характеристик (образующее в силу результатов предыдущего параграфа искомую интегральную поверхность) пересекало бы кривую L.

Подставим соотношения (10.24) в (10.16):

$$\begin{cases} \psi_1\big(x_1^*(t),\ x_2^*(t),\ u^*(t)\big)=C_1, \\ \psi_2\big(x_1^*(t),\ x_2^*(t),\ u^*(t)\big)=C_2. \end{cases} \tag{10.27}$$

Очевидно, характеристики будут пересекать L тогда и только тогда, когда оба соотношения в (10.27) удовлетворяются при одних и тех же t.

Исключая t из (10.27) (если это возможно), мы получаем искомую связь на параметры $C_1,\ C_2$:

$$V^*\left(C_1,\ C_2\right)=0. \tag{10.28}$$

Подставляя в (10.28) первые интегралы из (10.26), получаем искомое решение задачи Коши:

$$V^*\left(\psi_1\big(x_1,\ x_2,\ u\big),\ \psi_2\big(x_1,\ x_2,\ u\big)\right)=0. \tag{10.29}$$

Действительно, формула (10.29) задает решение уравнения (10.23) в силу теоремы 10.6.

С другой стороны, в силу (10.27) и (10.28)

$$V^*\left(\psi_1\big(x_1^*(t),\ x_2^*(t),\ u^*(t)\big),\ \psi_2\big(x_1^*(t),\ x_2^*(t),\ u^*(t)\big)\right),\ V^*\big(C_1,\ C_2\big)=0,$$

следовательно, интегральная поверхность, задаваемая соотношениями (10.29), проходит через линию L.

Замечание 10.8. Если линия L сама является характеристикой, то по определению первого интеграла соотношения (10.27) выполняются тождественно для любого t, т.е. t из (10.27) исключить нельзя.

В этом случае задача Коши поставлена некорректно, поскольку имеется много решений задачи Коши (10.23), (10.24).

Геометрически это тоже понятно, поскольку в этом случае все характеристики, «выпущенные» из точек на L, совпадают с L и не будут образовывать никакой определенной интегральной поверхности (рис. 10.4).

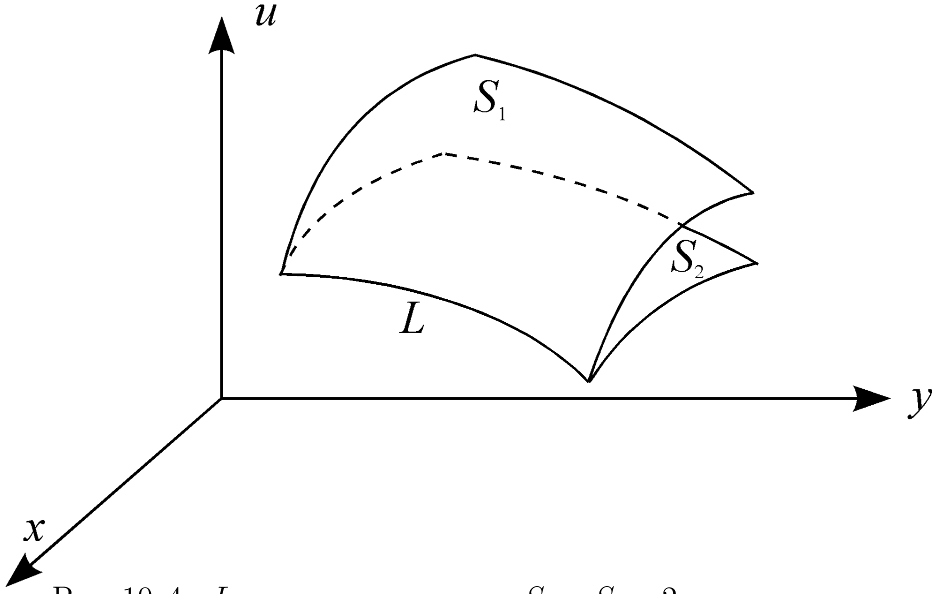

Рис. 10.4. L – характеристика, S_1 и S_2 – 2 интегральные поверхности, проходящие через L

Пример 10.4. *Требуется найти решение задачи Коши для уравнения*

$$x_1\frac{\partial u}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial u}{\partial x_2}=u^2-x_1^2-x_2^2, \tag{10.30}$$

проходящее через линию L

$$u=2x_1-x_1^2,\qquad x_2=1-x_1. \tag{10.31}$$

Характеристическая система для уравнения (10.30) имеет вид

$$\frac{dx_1}{x_1}=\frac{dx_2}{x_2}=\frac{du}{u^2-x_1^2-x_2^2}. \tag{10.32}$$

Из первого соотношения находим первый интеграл в виде

$$\frac{x_2}{x_1}=C_1. \tag{10.33}$$

Чтобы найти другой первый интеграл, воспользуемся свойством сложения пропорций:

$$\frac{dx_1}{x_1}=\frac{du}{u^2-x_1^2-x_2^2}=\frac{2x_1\,dx_1}{2x_1^2}=\frac{2x_2\,dx_2}{2x_2^2}=\frac{du+2x_1\,dx_1+2x_2\,dx_2}{u+x_1^2+x_2^2}=$$
$$=\frac{du+dx_1^2+dx_2^2}{u+x^2+x_2^2}=\frac{d\left(u+x_1^2+x_2^2\right)}{u+x_1^2+x_2^2},$$

откуда имеем

$$\frac{u+x_1^2+x_2^2}{x_1}=C_2. \tag{10.34}$$

Общее решение уравнения (10.30) можно теперь записать в виде (см. замечание 10. 5)

$$\frac{u + x_1^2 + x_2^2}{x_1} = f\left(\frac{x_2}{x_1}\right) \quad \text{или}$$

$$u = -x_1^2 - x_2^2 + x_1 f\left(\frac{x_2}{x_1}\right), \qquad f \in C^1 \;-\; \text{произвольная функция.}$$

Чтобы решить задачу Коши, подставим в первые интегралы (10.33) и (10.34) соотношение (10.31). Имеем:

$$\frac{1 - x_1}{x_1} = C_1,$$

$$\frac{2x_1 - x_1^2 + x_1^2 + (1 - x_1)^2}{x_1} = C_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1 + x_1^2}{x_1} = C_2.$$

Исключим x_1 и установим связь между C_1 и C_2: из первого равенства $x_1 = \dfrac{1}{1 + C_1}$; подставив его во второе равенство, получим

$$1 + C_1 + \frac{1}{1 + C_1} = C_2.$$

Подставляя сюда вместо C_1 и C_2 первые интегралы из (10.33) и (10.34), получаем искомое решение задачи Коши:

$$1 + \frac{x_2}{x_1} + \frac{1}{1 + \dfrac{x_2}{x_1}} = \frac{u + x_1^2 + x_2^2}{x_1}$$

или после преобразований

$$u = -x_1^2 - x_2^2 + x_1 + x_2 + \frac{x_1^2}{x_1 + x_2}.$$

Литература

[1] *Гельфанд И. М.* **Лекции по линейной алгебре** – 5-е издание, испр. М.: Добросвет, Московский центр непрерывного математического образования, 1998.

[2] *Демидович Б. П.* **Лекции по математической теории устойчивости**. М.: Наука, 1967.

[3] *Камынин Л. И.* **Курс математического анализа**. М., изд-во МГУ, 2001.

[4] *Люстерник Л.А. Соболев В.И.* **Краткий курс функционального анализа**. М.: Высшая школа, 1982.

[5] *Треногин В. А.* **Функциональный анализ**. М., 1993.

[6] *Филиппов А. Ф.* **Введение в теорию дифференциальных уравнений**. М., 2004.

Татьяна Иннокентьевна Бухарова,
Виталий Леонидович Камынин,
Андрей Борисович Костин,
Дмитрий Сергеевич Ткаченко

КУРС ЛЕКЦИЙ ПО ОБЫКНОВЕННЫМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ

Учебное пособие

Редактор Е.Н. Кочубей

Подписано в печать 15.12.2010. Формат 60 х 84 1/16.
Печ. л. 14,25. Уч.-изд. л. 14,25. Тираж 800 экз.
Изд. №1/4/112. Заказ № 25.

Национальный исследовательский ядерный университет "МИФИ".
115409, Москва, Каширское ш., 31.
ООО "Полиграфический комплекс "Курчатовский".
144000, Московская область, г. Электросталь, ул. Красная, д. 42.