МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

А.В. Баскаков, Е.В. Сумин

# Интегралы, зависящие от параметра

Учебно-методическое пособие

Москва 2013

УДК 517.382(076)
ББК 22.161.1я7
Б 27

Баскаков А.В., Сумин Е.В. **Интегралы, зависящие от параметра:** *учебно-методическое пособие*. М.: НИЯУ МИФИ, 2013. – 52 с.

Данная работа представляет собой учебно-методическое пособие к практическим занятиям по специальным разделам математического анализа.

В работе разбираются собственные интегралы, зависящие от параметра; несобственные интегралы, зависящие от параметра; и интегралы Эйлера (гамма- и бета-функции). Рассмотрено решение соответствующих примеров и приведены задачи для самостоятельного решения.

Предназначено для студентов НИЯУ МИФИ, изучающих в курсе математического анализа специальные разделы. Будет также полезно преподавателям, ведущим практические занятия.

Рецензент д-р физ.-мат. наук, проф. НИЯУ МИФИ Н.В. Мирошин

*ISBN 978-5-7262-1838-0*

© *Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», 2013*

# 1. СОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА

Пусть $Y \in \mathbb{R}^n$, $\psi(y)$ и $\varphi(y)$ – две вещественные функции, определенные при всех $y \in Y$; $\varphi(y) \le \psi(y)$, а функция $f(x, y)$ определена на множестве

$$\{(x, y):\ y \in Y,\ x \in [\varphi(y), \psi(y)]\}. \tag{1.1}$$

Интегралы вида

$$\Phi(y) = \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y)\, dx. \tag{1.2}$$

называются интегралами, зависящими от параметра, а переменная $y \in Y$ называется параметром, например:

1) $\Phi(y) = \int\limits_0^y (y - x)^{10}\, dx$, где $Y = \{y:\ y \ge 0\} \subset \mathbb{R}$; $\varphi(y) \equiv 0$, $\psi(y) \equiv y$, $f(x, y) = (y - x)^{10}$;

2) $\Phi(a, b) = \int\limits_0^1 \sin ax \cdot e^{-bx}\, dx$, где

$$Y = \{(a, b);\ -\infty < a < +\infty;\ -\infty < b < +\infty\} = \mathbb{R}^2,$$

$$\varphi(a, b) \equiv 0,\ \psi(a, b) \equiv 1,$$

$$f(x, y) = F(x, a, b) = \sin ax \cdot e^{-bx}.$$

Если при всяком фиксированном $y \in Y$ интеграл (1.2) существует как собственный интеграл Римана, то (1.2) называется собственным интегралом, зависящим от параметра.

Рассмотрим случай, когда множество $Y$ представляет собой отрезок $[\alpha, \beta]$, $-\infty < \alpha < \beta < +\infty$, а функции $\varphi(y)$ и $\psi(y)$ непрерывны на этом отрезке и $\varphi(y) \le \psi(y)$. Обозначим

$$G = \{(x, y):\ \alpha < y < \beta,\ \varphi(y) < x < \psi(y)\}. \tag{1.3}$$

**Теорема 1.1.** Если функция $f(x, y)$ непрерывна на замыкании $\overline{G}$ области *G*, то функция $\Phi(y)$, задаваемая формулой (1.2), непрерывна на отрезке $[\alpha, \beta]$.

*Доказательство.* Прежде всего заметим, что в условиях теоремы функция $\Phi(y)$ корректно определена при всяком $y \in [\alpha, \beta]$, поскольку функция, непрерывная на отрезке, интегрируема по Риману на этом отрезке. Заменой переменной *x* на *t* по формуле

$$x(t, y) = \varphi(y) + [\psi(y) - \varphi(y)] \cdot t, \quad 0 \le t \le 1, \tag{1.4}$$

интеграл (1.2) перепишется в виде

$$\Phi(y) = \int_0^1 f(\varphi(y) + [\psi(y) - \varphi(y)]\, t, y) \cdot [\psi(y) - \varphi(y)]\, dt. \tag{1.5}$$

Поскольку по условию теоремы все функции $f(x, y)$, $\varphi(y)$, $\psi(y)$ являются непрерывными и функция $x(t, y)$, определенная формулой (1.4), также непрерывна, то подынтегральная функция в (1.5), которую для краткости обозначим $g(t, y)$:

$$g(t, y) = f(\varphi(y) + [\psi(y) - \varphi(y)]\, t,\ y) \cdot [\psi(y) - \varphi(y)],$$

является непрерывной функцией на замкнутом прямоугольнике

$$P = \{(t, y):\ 0 \le t \le 1,\ \alpha \le y \le \beta\}.$$

Это следует из теоремы о суперпозиции непрерывных функций ([1], с. 259); более того, $g(t, y)$ является равномерно непрерывной по теореме Г. Кантора ([1], с. 268).

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. В силу равномерной непрерывности функции $g(t, y)$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что при всех $(t, y)$, $(t + \Delta t,\ y + \Delta y)$, таких, что $(t, y) \in P$, $(t + \Delta t,\ y + \Delta y) \in P$, $\sqrt{(\Delta t)^2 + (\Delta y)^2} < \delta$, будет иметь место соотношение

$$\left| g(t + \Delta t,\ y + \Delta y) - g(t, y) \right| < \varepsilon. \tag{1.6}$$

В частности, (1.6) имеет место при $\Delta t = 0$, $|\Delta y| < \delta$, что позволяет получить следующую оценку

$$\left|\Phi(y+\Delta y)-\Phi(y)\right| = \left|\int_0^1 [g(t, y+\Delta y) - g(t, y)]\,dt\right| \le$$

$$\le \int_0^1 \left|g(t, y+\Delta y) - g(t, y)\right| dt < \varepsilon \cdot 1 = \varepsilon ,$$

что в силу произвольности $\varepsilon$, и означает непрерывность функции $\Phi(y)$ во всякой точке $y \in [\alpha, \beta]$.

Теорема доказана.

**Следствие.** В условиях теоремы имеет место соотношение

$$\lim_{y\to y_0} \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y)\,dy = \int_{\lim\limits_{y\to y_0} \varphi(y)}^{\lim\limits_{y\to y_0} \psi(y)} \lim_{y\to y_0} f(x, y)\,dx .$$

Действительно, предел в левой части этого равенства есть по доказанному $\Phi(y_0)$, а правая часть в силу непрерывности функций $\varphi$, $\psi$ и $f$ также равна

$$\int_{\varphi(y_0)}^{\psi(y_0)} f(x, y_0)\,dx = \Phi(y_0) .$$

**Замечание.** При доказательстве теоремы 1.1 можно было бы обойтись без замены переменной (1.4), оценив разность $\left|\Phi(y+\Delta y)-\Phi(y)\right|$ непосредственно из формулы (1.2) и воспользовавшись при этом равномерной непрерывностью на $[\alpha, \beta]$ функций $\varphi(y)$ и $\psi(y)$ и равномерной непрерывностью на $\overline{G}$ функции $f(x, y)$. Однако замена (1.4) значительно сокращает выкладки.

**Теорема 1.2.** Пусть функция $f(x, y)$ при всяком фиксированном $y \in Y$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, $-\infty < a < b < +\infty$. Тогда если при $y \to y_0$, $y \in Y$, функция $f(x, y)$ стремится к функции $g(x)$ равномерно по $x \in [a, b]$, то

$$\lim_{\substack{y\to y_0 \\ y\in Y}} \int_a^b f(x, y)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx . \qquad (1.7)$$

*Доказательство.* Рассмотрим какую-либо последовательность $y_n \in Y$, $n = 1, 2, \ldots$, сходящуюся к $y_0$. Поскольку по условию теоремы $f(x, y)$ стремится к $g(x)$ равномерно, то последовательность функций

$$f_n(x) = f(x, y_n), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

сходится к $g(x)$ равномерно по $x \in [a, b]$. Так как каждая из функций $f_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, непрерывна, то $g(x)$ также непрерывна. Действительно, для наперед заданного $\varepsilon > 0$ при всех $n > N(\varepsilon)$ имеем:

$$\left|g(x+\Delta x) - g(x)\right| =$$

$$= \left|g(x+\Delta x) - f_n(x+\Delta x) + f_n(x+\Delta x) - f_n(x) + f_n(x) - g(x)\right| \le$$

$$\le \left|g(x+\Delta x) - f_n(x+\Delta x)\right| + \left|f_n(x+\Delta x) - f_n(x)\right| +$$

$$+ \left|f_n(x) - g(x)\right| < \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon .$$

Отсюда следует, что $g(x)$ интегрируема на $[a, b]$ (поскольку по условию $-\infty < a < b < +\infty$). Для доказательства соотношения (1.7) фиксируем произвольное число $\varepsilon > 0$. Через $N = N(\varepsilon)$ обозначим такое натуральное число, что при всех $n > N$ неравенство

$$\left|f_n(x) - g(x)\right| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

имеет место при всяком $x \in [a, b]$. Оценим разность

$$\left|\int_a^b f_n(x)\, dx - \int_a^b g(x)\, dx\right| = \left|\int_a^b [f_n(x) - g(x)]\, dx\right| \le$$

$$\le \int_a^b \left|f_n(x) - g(x)\right| dx < \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot (b-a) = \varepsilon .$$

Полученная оценка показывает, что для последовательности $y_n \in Y$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, выбранной в начале доказательства теоремы, имеет место соотношение

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x, y_n)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx\,. \tag{1.8}$$

Теперь в силу произвольности $y_n \in Y$, $n = 1,\ 2, \ldots$ (лишь бы $y_n \to y_0$ при $n \to \infty$) из (1.8) вытекает (1.7). Что и требовалось доказать.

**Замечание.** Сохраняя идею доказательства, можно дать формулировку аналога теоремы 1.2 для случая, когда $\varphi(y)$ и $\psi(y)$ не обязательно являются константами.

Перейдем к вопросу об интегрировании по параметру интегралов (1.2).

**Теорема 1.3.** Пусть область $G \subset \mathbb{R}^2$ элементарна относительно обеих осей координат:

$$G = \{(x, y):\ \alpha < y < \beta;\ \varphi(y) < x < \psi(y)\} =$$

$$= \{(x, y):\ a < x < b;\ \varphi_1(x) < y < \psi_1(x)\}\,,$$

где функции $\varphi(y)$ и $\psi(y)$ непрерывны на $[\alpha, \beta]$, $-\infty < \alpha < \beta < +\infty$, а функции $\varphi_1(x)$ и $\psi_1(x)$ непрерывны на $[a, b]$, $-\infty < a < b < +\infty$. Тогда если функция $f(x, y)$ непрерывна на замыкании $\overline{G}$ области $G$, то

$$\int_\alpha^\beta \Phi(y)\,dy = \int_\alpha^\beta\left[\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y)\,dx\right]dy =$$

$$= \int_a^b\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\psi_1(x)} f(x, y)\,dy\right]dx = \iint_G f(x, y)\,dx\,dy\,.$$

*Доказательство* следует из теоремы о сведении кратного интеграла к повторному ([1], с. 516).

Перейдем к вопросу о дифференцировании интегралов (1.2) по параметру. Пусть сначала $\varphi(y) \equiv a$, $\psi(y) \equiv b$, $-\infty < a < b < +\infty$.

**Теорема 1.4.** Если функция $f(x, y)$ и ее частная производная $\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ непрерывны на замкнутом прямоугольнике

$$P = \{(x, y):\ a \le x \le b,\ \alpha \le y \le \beta\}, \tag{1.9}$$

то

$$\frac{d}{dy}\int_a^b f(x, y)\, dx = \int_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\, dx . \tag{1.10}$$

*Доказательство.* Применяя при всяком $x \in [a, b]$ формулу конечных приращений Лагранжа ([1], с. 170), по переменной $y$ к функции $f(x, y)$ запишем для $\frac{\Delta\Phi(y)}{\Delta y}$:

$$\frac{\Delta\Phi(y)}{\Delta y} = \frac{\Phi(y+\Delta y) - \Phi(y)}{\Delta y} = \frac{1}{\Delta y}\int_a^b [f(x, y+\Delta y) -$$

$$- f(x, y)]\, dx = \int_a^b \frac{\partial f(x, y+\theta(x, y)\Delta y)}{\partial y}\, dx ,$$

где $0 < \theta(x, y) < 1$. Оценим разность

$$\int_a^b \frac{\partial f(x, y+\theta(x, y)\Delta y)}{\partial y}\, dx - \int_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\, dx ,$$

воспользовавшись тем, что функция $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$, непрерывная на замкнутом прямоугольнике $P$, равномерно непрерывна на нем. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и найдем такое $\delta = \delta(\varepsilon)$, что при $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} < \delta$ неравенство

$$\left|\frac{\partial f(x+\Delta x, y+\Delta y)}{\partial y} - \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

будет выполнено при всех $(x, y) \in P$, $(x+\Delta x, y+\Delta y) \in P$. В частности, при $\Delta x = 0$ и $|\Delta y| < \delta$ будет иметь место оценка

$$\left|\frac{\partial f(x, y+\Delta y)}{\partial y} - \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right| < \frac{\varepsilon}{b-a} .$$

Следовательно, при $0 < \theta(x, y) < 1$ будет иметь место такое соотношение

$$\left| \frac{\partial f(x, y + \theta(x, y)\Delta y)}{\partial y} - \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right| < \frac{\varepsilon}{b - a},$$

с помощью которого получаем при $|\Delta y| < \delta$ следующую оценку

$$\left| \int_a^b \frac{\partial f(x, y + \theta(x, y)\Delta y)}{\partial y}\, dx - \int_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\, dx \right| \le$$

$$\le \int_a^b \left| \frac{\partial f(x, y + \theta\Delta y)}{\partial y} - \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right| dx < \frac{\varepsilon}{(b - a)} \cdot (b - a) = \varepsilon .$$

Следовательно,

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta \Phi}{\Delta y} = \int_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\, dx ,$$

что и доказывает теорему.

**Следствие.** Если дополнительно к условиям теоремы непрерывно дифференцируемые на $[\alpha, \beta]$ функции $\varphi(y)$ и $\psi(y)$ таковы, что $a \le \varphi(y) \le \psi(y) \le b$, то

$$\frac{d}{dy} \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y)\, dx = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\, dx +$$

$$+ f(\psi(y), y)\psi'(y) - f(\varphi(y), y)\varphi'(y) . \qquad (1.11)$$

*Доказательство.* По правилу дифференцирования сложной функции

$$F(y, u, \upsilon) = \int_u^\upsilon f(x, y)\, dx , \quad u = \varphi(y) , \quad \upsilon = \psi(y)$$

имеем

$$\frac{dF}{dy} = \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{du}{dy} + \frac{\partial F}{\partial \upsilon} \cdot \frac{d\upsilon}{dy} ,$$

что и дает с учетом уже доказанного соотношения (1.10) формулу (1.11).

Заметим, что условие $a \le \varphi(y) \le \psi(y) \le b$ понадобилось для того, чтобы суперпозиция $F(y, u, \upsilon)$ была корректно определена (с целью последующей ссылки на теорему 1.4). Следствие доказано.

## 2. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА

Будем рассматривать интегралы вида

$$\Phi(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx\,. \qquad (2.1)$$

Здесь параметр $y \in Y \subseteq \mathbb{R}^1$ является скалярной величиной, функция $f(x, y)$ при всяком $y \in Y$ определена как функция одного переменного $x$ на интервале $(a, b)$, а числа $a$ и $b$ удовлетворяют неравенствам $-\infty \le a < b \le +\infty$.

**Определение 2.1.** Если интеграл (2.1) при некоторых (в частности, при всех) значениях $y \in Y$ существует как несобственный интеграл Римана, то он называется несобственным интегралом, зависящим от параметра.

**Определение 2.2.** Если для всякого $y_0 \in Y$ интеграл

$$\Phi(y_0) = \int_a^b f(x, y_0)\, dx$$

сходится, то интеграл (2.1) называется сходящимся на множестве $Y$.

В предыдущем разделе для собственных интегралов, зависящих от параметра, были получены теоремы о непрерывности и дифференцируемости интеграла, а также об изменении порядка интегрирования. Нашей ближайшей целью является получение аналогов этих теорем для несобственных интегралов, зависящих от параметра. Для этого введем понятие равномерной сходимости интеграла по параметру. Для определенности будем далее всюду в этом разделе предполагать выполненными следующие условия:

1) $a > -\infty$, $b \le +\infty$; (2.2)

2) при любом $\eta \in (a, b)$ интеграл

$$\int_a^{\eta} f(x, y)\,dx \tag{2.3}$$

существует как собственный интеграл Римана.

**Определение 2.3.** Сходящийся на множестве $Y$ интеграл $\int_a^b f(x, y)\,dx$ называется равномерно сходящимся на этом множестве, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\eta_\varepsilon \in (a, b)$, что для всех $y \in Y$ и всех $\eta \in (\eta_\varepsilon, b)$ выполняется неравенство

$$\left| \int_\eta^b f(x, y)\,dx \right| < \varepsilon .$$

**Замечание.** Приведенное определение дано для случая (2.2), (2.3). В более общем случае назовем точку $\xi \in (a, b)$ «особой», если для некоторого $y_0 \in Y$ (или для нескольких, или для всех $y \in Y$) функция $g(x) = f(x, y_0)$ является неограниченной в любой сколь угодно малой окрестности точки $\xi$. Кроме того, назовем «особой» точку *a*, если $a = -\infty$ или $f(x, y_0)$ неограниченна в любой правосторонней окрестности точки *a*. Аналогично, точка *b* – особая, если $b = +\infty$ или $f(x, y_0)$ неограниченна в любой левосторонней окрестности точки *b*. Обозначим через *E* множество всех точек $\xi$, которые для функции $f(x, y)$ являются особыми. Пусть *E* состоит из конечного числа точек $\xi_1, ..., \xi_n$ (случай, когда *E* состоит из бесконечного числа точек, нами рассматриваться не будет). Пусть для определенности $\xi_1 < \xi_2 < ... < \xi_n$ и $a < \xi_1$, $\xi_n = b$. В этом случае определение 2.3 заменяется на 2.3′.

**Определение 2.3′.** Сходящийся на множестве $Y$ интеграл $\int_a^b f(x, y)\,dx$ называется равномерно сходящимся на этом множестве, если для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие $\eta_1$, $\zeta_1$, $\eta_2$, $\zeta_2$, …, $\eta_{n-1}$, $\zeta_{n-1}$, $\eta_n$, что

$$a < \eta_1 < \xi_1 < \zeta_1 < \eta_2 < \xi_2 < \zeta_2 < ... < \eta_{n-1} < \xi_{n-1} < \zeta_{n-1} < \eta_n < b$$

и для всех $\tilde\eta_1$, $\tilde\zeta_1$, …, $\tilde\eta_{m-1}$, $\tilde\zeta_{n-1}$, $\tilde\eta_n$, удовлетворяющих неравенству

$$a < \eta_1 < \tilde\eta_1 < \xi_1 < \tilde\zeta_1 < \zeta_1 < \eta_2 < \ldots < \eta_n < \tilde\eta_n < b,$$

выполняется соотношение

$$\left|\int_{\tilde\eta_1}^{\xi_1} f(x, y)\, dx\right| + \left|\int_{\xi_1}^{\tilde\zeta_1} f(x, y)\, dx\right| + \ldots + \left|\int_{\tilde\eta_n}^{b} f(x, y)\, dx\right| < \varepsilon$$

для всех $y \in Y$.

Однако, как уже отмечалось, относительно функции $f(x, y)$ во всех последующих теоремах этого раздела предполагаем выполненными условия (2.2), (2.3).

**Теорема 2.1 (признак Вейерштрасса).** Если существует такая неотрицательная функция $\varphi(x)$, определенная на промежутке $[a, b)$ и интегрируемая по Риману на каждом отрезке $[a, \eta]$, $\eta \in (a, b)$, что выполняются условия:

1) $|f(x, y)| \le \varphi(x)$ при всех $x \in [a, b)$ и всех

$$y \in Y; \tag{2.4}$$

2) интеграл

$$\int_a^b \varphi(x)\, dx \tag{2.5}$$

сходится; то интеграл $\int_a^b f(x, y)\, dx$ равномерно сходится на множестве *Y*.

*Доказательство.* Из условия $|f(x, y)| \le \varphi(x)$ вытекает в силу признака сравнения ([1], с. 403) сходимости несобственных интегралов, что при всяком $y \in Y$ сходится интеграл

$$\int_a^b |f(x, y)|\, dx,$$

а потому и интеграл

$$\int_a^b f(x, y)\, dx$$

также сходится при всяком $y \in Y$ (если интеграл абсолютно сходится, то он и просто сходится [1, с. 408]). В силу условия (2.5) для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\eta_\varepsilon \in (a, b)$, что при $\eta \in (\eta_\varepsilon, b)$ будет выполнено

$$\int_\eta^b \varphi(x)\, dx < \varepsilon,$$

и потому, интегрируя неравенство

$$|f(x, y)| \le \varphi(x)$$

от $\eta$ до $b$, получаем

$$\int_\eta^b |f(x, y)|\, dx \le \int_\eta^b \varphi(x)\, dx < \varepsilon.$$

Но $\int_\eta^b |f(x, y)|\, dx \ge \left| \int_\eta^b f(x, y)\, dx \right|$, следовательно,

$$\left| \int_\eta^b f(x, y)\, dx \right| \le \int_\eta^b |f(x, y)|\, dx \le \int_\eta^b \varphi(x)\, dx < \varepsilon, \tag{2.6}$$

что и означает равномерную сходимость интеграла $\int_a^b f(x, y)\, dx$, поскольку в (2.6) величина $\eta$ зависит (посредством $\eta_\varepsilon$) лишь от $\varepsilon$, но не от $y \in Y$.

Теорема доказана.

**Теорема 2.2 (критерий Коши равномерной сходимости интегралов).** Для равномерной сходимости интеграла $\int_a^b f(x, y)\, dx$ по множеству $Y$ необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$

нашлось такое $\eta_\varepsilon \in (a, b)$, что для всех $\eta_1$ и $\eta_2$ из интервала $(\eta_\varepsilon, b)$ и всех $y \in Y$ выполнялось соотношение

$$\left| \int_{\eta_1}^{\eta_2} f(x, y)\, dx \right| < \varepsilon . \tag{2.7}$$

*Доказательство. Необходимость.* Пусть интеграл $\int_a^b f(x, y)\, dx$ равномерно сходится. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\eta_\varepsilon \in (a, b)$, что при любом $\eta \in (\eta_\varepsilon, b)$ соотношение

$$\left| \int_{\eta}^{b} f(x, y)\, dx \right| < \varepsilon / 2$$

справедливо при всяком $y \in Y$. Но тогда для произвольных $\eta_1$ и $\eta_2$ из интервала $(\eta_\varepsilon, b)$ получаем при всяком $y \in Y$

$$\left| \int_{\eta_1}^{\eta_2} f(x, y)\, dx \right| = \left| \int_{\eta_1}^{b} f(x, y)\, dx - \int_{\eta_2}^{b} f(x, y)\, dx \right| \le$$

$$\le \left| \int_{\eta_1}^{b} f(x, y)\, dx \right| + \left| \int_{\eta_2}^{b} f(x, y)\, dx \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

и необходимость доказана.

*Достаточность.* Пусть выполнено (2.7). Переходя в (2.7) к супремуму по $\eta_2 \in (\eta_1, b)$, получаем

$$\sup_{\eta_2 \in (\eta_1, b)} \left| \int_{\eta_1}^{\eta_2} f(x, y)\, dx \right| \le \varepsilon , \tag{2.8}$$

причем (2.8) выполняется при любом $\eta_1 > \eta_\varepsilon$ и любом $y \in Y$. В силу очевидного неравенства

$$\left| \int_{\eta_1}^{b} f(x, y)\, dx \right| \le \sup_{\eta_2 \in (\eta_1, b)} \left| \int_{\eta_1}^{\eta_2} f(x, y)\, dx \right|$$

получаем

$$\left|\int_{\eta_1}^{b} f(x, y)\,dx\right| \le \sup_{\eta_2 \in (\eta_1, b)} \left|\int_{\eta_1}^{\eta_2} f(x, y)\,dx\right| \le \varepsilon$$

для любого $\eta_1 > \eta_\varepsilon$ и любого $y \in Y$, что и означает равномерную сходимость $\int_a^b f(x, y)\,dx$. Теорема доказана.

В приложениях часто бывает полезен следующий признак равномерной сходимости интегралов.

**Теорема 2.3 (признак Дирихле).** Пусть функции $f(x, y)$ и $g(x, y)$ определены при $-\infty < a \le x < +\infty$ и $y \in Y \subseteq \mathbb{R}$, причем функция $f(x, y)$ непрерывна по переменной *x*, а $g(x, y)$ имеет непрерывную по *x* производную $\partial g / \partial x$. Если:

1) функция $g(x, y)$ при каждом $y \in Y$ монотонна по *x* и равномерно на множестве *Y* стремится к нулю при $x \to +\infty$;

2) интеграл $\int_a^\eta f(x, y)\,dx$ ограничен как функция переменных $\eta \in [a, +\infty)$ и $y \in Y$ на множестве $[a, +\infty) \times Y$, то интеграл $\int_a^{+\infty} g(x, y) f(x, y)\,dx$ равномерно сходится на множестве *Y*.

*Доказательство.* Рассмотрим случай, когда $g(x, y)$ монотонно убывает. Положим

$$M = \sup_{(\eta, y) \in [a, +\infty) \times Y} \left|\int_a^\eta f(x, y)\,dx\right|.$$

В силу условия 2 имеем $M < +\infty$. Воспользовавшись равномерным по $y \in Y$ стремлением $g(x, y)$ к нулю при $x \to +\infty$, найдем для произвольного $\varepsilon > 0$ такое $\eta_\varepsilon > a$, что при всяком $\eta > \eta_\varepsilon$ будет выполнено соотношение $|g(\eta, y)| < \varepsilon / 3M$ одновременно для всех $y \in Y$. Теперь возьмем произвольные $\eta_1$ и $\eta_2$ из интервала

$(\eta_\varepsilon, +\infty)$ и оценим величину $\left|\int\limits_{\eta_1}^{\eta_2} g(x, y) f(x, y)\, dx\right|$ интегрированием по частям:

$$\left|\int\limits_{\eta_1}^{\eta_2} g(x, y) f(x, y)\, dx\right| = \left|\int\limits_{\eta_1}^{\eta_2} g(x, y)\, d\int\limits_{a}^{x} f(\xi, y)\, d\xi\right| =$$

$$= \left| g(x, y)\int\limits_{a}^{x} f(\xi, y)\, d\xi \right|_{\eta_1}^{\eta_2} - \int\limits_{\eta_1}^{\eta_2}\int\limits_{a}^{x} f(\xi, y)\, d\xi \cdot \frac{\partial g(x, y)}{\partial x} dx \Bigg| \le$$

$$\le |g(\eta_2, y)| \cdot \left|\int\limits_{a}^{\eta_2} f(\xi, y)\, d\xi\right| + |g(\eta_1, y)| \cdot \left|\int\limits_{a}^{\eta_1} f(\xi, y)\, d\xi\right| +$$

$$+ \left|\int\limits_{\eta_1}^{\eta_2}\int\limits_{a}^{x} f(\xi, y)\, d\xi \cdot \frac{\partial g(x, y)}{\partial x}\, dx\right| \le \frac{\varepsilon}{3M}\cdot M + \frac{\varepsilon}{3M}\cdot M +$$

$$+ \int\limits_{\eta_1}^{\eta_2}\left|\int\limits_{a}^{x} f(\xi, y)\, d\xi\right| \cdot \left|\frac{\partial g(x, y)}{\partial x}\right| dx \le \frac{2\varepsilon}{3} + M\int\limits_{\eta_1}^{\eta_2}\left|\frac{\partial g(x, y)}{\partial y}\right| dx =$$

$$= \frac{2\varepsilon}{3} - M\int\limits_{\eta_1}^{\eta_2}\frac{\partial g(x, y)}{\partial x}\, dx \le \frac{2\varepsilon}{3} + M\cdot\frac{\varepsilon}{3M} = \varepsilon,$$

и в силу этой оценки интеграл $\int\limits_{a}^{b} g(x, y)\, f(x, y)\, dx$ равномерно по $y \in Y$ сходится по предыдущей теореме. Аналогично рассматривается случай, когда $g(x, y)$ монотонно возрастает.

Перейдем к рассмотрению свойств равномерно сходящихся несобственных интегралов.

**Теорема 2.4.** Пусть $-\infty < a < b \le +\infty$, функция $f(x, y)$ определена для всех $x \in [a, b)$, $y \in Y$, и при любом $y \in Y$ непрерывна по $x \in [a, b)$. Тогда если при любом $\eta \in (a, b)$ функция $f(x, y)$ на отрезке $[a,\eta]$ равномерно стремится к функции $\psi(x)$ при $y \to y_0$ и интеграл

$$\int_a^b f(x,y)\,dx$$

равномерно сходится на множестве $Y$, то

$$\lim_{y \to y_0} \int_a^b f(x,y)\,dx = \int_a^b \lim_{y \to y_0} f(x,y)\,dx = \int_a^b \psi(x)\,dx\,.$$

*Доказательство.* В силу равномерной по $y \in Y$ сходимости интеграла $\int_a^b f(x,y)\,dx$ из критерия Коши (теорема 2.2) следует, что для наперед заданного $\varepsilon > 0$ найдется такое $\eta_\varepsilon \in (a,b)$, что при произвольных $\eta_1$, $\eta_2$, принадлежащих интервалу $(\eta_\varepsilon, b)$, соотношение

$$\left| \int_{\eta_1}^{\eta_2} f(x,y)\,dx \right| < \varepsilon \tag{2.9}$$

имеет место одновременно для всех $y \in Y$. Поэтому, переходя в обеих частях неравенства (2.9) к пределу при $y \to y_0$ (здесь в силу следствия теоремы 1.1 можно при всяких фиксированных $\eta_1$ и $\eta_2$ перейти к пределу под знаком интеграла), получаем

$$\left| \int_{\eta_1}^{\eta_2} f(x,y_0)\,dx \right| \le \varepsilon$$

и, следовательно, по критерию Коши существования предела функции ([1], с. 121) существует предел, величину которого обозначим $A$:

$$\lim_{\eta \to b-0} \int_a^\eta f(x,y_0)\,dx = \int_a^b f(x,y_0)\,dx = \int_a^b \lim_{y \to y_0} f(x,y)\,dx =$$

$$= \int_a^b \psi(x)\,dx = A\,.$$

Для завершения доказательства теоремы установим, что

$$\lim_{y \to y_0} \int_a^b f(x, y)\,dx = A\,. \qquad (2.10)$$

С этой целью для наперед заданного $\varepsilon > 0$ найдем такое $\eta_\varepsilon \in (a, b)$, что при $\eta \in (\eta_\varepsilon, b)$ одновременно для всех $y \in Y$ будет выполнено

$$\left| \int_a^b f(x, y)\,dx - \int_a^\eta f(x, y)\,dx \right| < \varepsilon / 3 \qquad (2.11)$$

и, кроме того,

$$\left| \int_a^\eta \psi(x)\,dx - A \right| < \varepsilon / 3\,. \qquad (2.12)$$

В зависимости от $\eta \in (\eta_\varepsilon, b)$ выберем столь малое $\delta = \delta(\eta) > 0$, чтобы при всех таких $y \in Y$, что $|y - y_0| < \delta$, соотношение

$$|f(x, y) - \psi(x)| < \frac{\varepsilon}{3(\eta - a)} \qquad (2.13)$$

было выполнено одновременно при всех $x \in [a, \eta]$. С учетом (2.11), (2.12) и (2.13) запишем

$$\left| \int_a^b f(x, y)\,dx - A \right| = \left| \int_a^b f(x, y)\,dx - \int_a^\eta f(x, y)\,dx + \right.$$

$$\left. + \int_a^\eta f(x, y)\,dx - \int_a^\eta \psi(x)\,dx + \int_a^\eta \psi(x)\,dx - A \right| \le$$

$$\le \left| \int_\eta^b f(x, y)\,dx \right| + \left| \int_a^\eta [f(x, y) - \psi(x)]\,dx \right| +$$

$$+\left|\int_a^\eta \psi(x)\,dx - A\right| < \frac{\varepsilon}{3} + \int_a^\eta \left|f(x,y)-\psi(x)\right| dx +$$

$$+\frac{\varepsilon}{3} < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3(\eta-a)}\cdot(\eta-a) + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon\,,$$

чем и доказывается соотношение (2.10), а также с ним и теорема.

**Теорема 2.5.** Пусть функция $f(x, y)$ определена и непрерывна (как функция двух переменных) на полуоткрытом прямоугольнике

$$\{(x, y):\ a \le x < b,\ c \le y \le d\}\,,$$

где $-\infty < a < b \le +\infty$, $-\infty < c < d < +\infty$. Тогда если интеграл $\Phi(y) = \int_a^b f(x, y)\,dx$ сходится равномерно на $[c, d]$, то он является непрерывной функцией на этом отрезке.

*Доказательство.* Пусть $y_0$ – произвольная точка отрезка $[c, d]$. В силу условий теоремы функция $f(x, y)$ при каждом $\eta \in (a, b)$ непрерывна на компакте

$$\{(x, y):\ a \le x \le \eta,\ c \le y \le d\}\,,$$

а потому и равномерно непрерывна на нем (теорема Г. Кантора, [1], с. 268); следовательно, при $y \to y_0$ функция $f(x, y)$ стремится к функции $f(x, y_0)$ равномерно по $x \in [a, \eta]$. Таким образом, выполнены все предположения предыдущей теоремы и

$$\lim_{y\to y_0} \Phi(y) = \int_a^b \lim_{y\to y_0} f(x, y)\,dx = \int_a^b f(x, y_0)\,dx = \Phi(y_0)\,,$$

что и означает непрерывность функции $\Phi(y)$ в точке $y_0$.

Теорема доказана.

**Замечание.** Теоремы 2.4 и 2.5 являются аналогами теоремы 1.1 и ее следствия для несобственных интегралов.

**Теорема 2.6.** Если выполнены предположения теоремы 2.5, то

$$\int_c^d \Phi(y)\,dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)\,dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\,dy\,.$$

*Доказательство.* При всяком $\eta \in (a, b)$ имеем по теореме 1.3

$$\int_c^d dy \int_a^\eta f(x, y)\, dx = \int_a^\eta dx \int_c^d f(x, y)\, dy\,. \tag{2.14}$$

Функция $\Phi(y, \eta) = \int_a^\eta f(x, y)\, dx$ непрерывна по $y$ и при $\eta \to b - 0$ равномерно по $y \in [c, d]$ стремится к своему пределу $\Phi(y)$. Следовательно, по теореме 1.2 в левой части (2.14) можно перейти к пределу под знаком интеграла при $\eta \to b - 0$

$$\lim_{\eta \to b-0} \int_c^d dy \int_a^\eta f(x, y)\, dx = \lim_{\eta \to b-0} \int_c^d \Phi(y, \eta)\, dy =$$

$$= \int_c^d \lim_{\eta \to b-0} \Phi(y, \eta)\, dy = \int_c^d \Phi(y)\, dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)\, dx\,,$$

при этом полученный интеграл конечен. Следовательно, при $\eta \to b - 0$ существует тот же предел и у правой части (2.14), который в силу определения несобственного интеграла равен

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\, dy\,.$$

Теорема доказана.

Большой интерес представляют теоремы о перестановке порядка интегрирования, когда оба интеграла несобственные.

**Теорема 2.7.** Пусть функция $f(x, y)$ определена и непрерывна на полуоткрытом прямоугольнике

$$\{(x, y):\ a \le x < b,\ c \le y < d\}\,,$$

где $-\infty < a < b \le +\infty$, $-\infty < c < d \le +\infty$. Если интеграл

$$\int_a^b f(x, y)\, dx \tag{2.15}$$

равномерно сходится на любом отрезке $[c, \eta]$, $\eta \in (c, d)$, а интеграл

$$\int_c^d f(x, y)\, dy \tag{2.16}$$

равномерно сходится на любом отрезке $[a, \xi]$, $\xi \in (a, b)$, и существует хотя бы один из двух повторных интегралов

$$\int_c^d dy \int_a^b |f(x, y)|\, dx, \quad \int_a^b dx \int_c^d |f(x, y)|\, dy,$$

то существуют и равны между собой оба повторных интеграла

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x, y)\, dx, \quad \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\, dy,$$

то есть

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x, y)\, dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\, dy. \tag{2.17}$$

*Доказательство.* Пусть, например, существует интеграл

$$\int_a^b dx \int_c^d |f(x, y)|\, dy \tag{2.18}$$

и пусть $\eta \in (c, d)$. В силу равномерной сходимости на отрезке $[c, \eta]$ интеграла (2.15) согласно предыдущей теореме имеем

$$\int_c^\eta dy \int_a^b f(x, y)\, dx = \int_a^b dx \int_c^\eta f(x, y)\, dy. \tag{2.19}$$

Рассмотрим правую часть соотношения (2.19) и покажем, что для нее имеет место соотношение

$$\lim_{\eta \to d-0} \int_a^b dx \int_c^\eta f(x, y)\, dy = \int_a^b dx \lim_{\eta \to d-0} \int_a^\eta f(x, y)\, dy =$$

$$= \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\, dy. \tag{2.20}$$

Для этого обозначим

$$\Phi(x,\eta)=\int_c^\eta f(x,y)\,dy$$

и проверим для функции $\Phi(x,\eta)$ ($a \le x < b$, $c < \eta < d$) выполнение предположений теоремы 2.4. Имеем:

1) функция $\Phi(x,\eta)$ непрерывна по $x \in [a,b)$ в силу теоремы 1.1;

2) $\Phi(x,\eta) \to \int_c^d f(x,y)\,dy$ при $\eta \to d-0$ равномерно на каждом отрезке $[a,\xi]$ в силу условия (2.16);

3) интеграл $\int_a^b \Phi(x,\eta)\,dx = \int_a^b dx \int_c^\eta f(x,y)\,dy$ сходится равномерно относительно $\eta \in (c,d)$ в силу признака Вейерштрасса (теорема 2.1), поскольку

$$\left|\Phi(x,\eta)\right| \le \int_c^d \left|f(x,y)\right| dy\,, \tag{2.21}$$

а интеграл $\int_a^b dx \int_c^d \left|f(x,y)\right| dy$ сходится в силу предположения.

Таким образом, выполнены все предположения теоремы 2.4, и поэтому соотношение (2.20) является справедливым. Следовательно, в правой части соотношения (2.20) допускается предельный переход под знаком интеграла. Полученная при этом величина является конечной (в силу (2.21) и (2.18)). Таким образом, переходя в обеих частях (2.19) к пределу при $\eta \to d-0$, запишем

$$\lim_{\eta\to d-0}\int_c^\eta dy \int_a^b f(x,y)\,dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy\,. \tag{2.22}$$

Осталось заметить, что левая часть (2.22) по определению есть несобственный интеграл

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x,y)\,dx\,.$$

Таким образом, доказано равенство (2.17) и, следовательно, теорема.

Перейдем к рассмотрению дифференцируемости несобственных интегралов, зависящих от параметра.

**Теорема 2.8.** Пусть функция $f(x, y)$ и $\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ определены и непрерывны на открытом прямоугольнике

$$\{a \le x < b,\ c \le y \le d\},$$

где $-\infty < a < b \le +\infty$, $-\infty < c < d < +\infty$.

Если интеграл $\int\limits_a^b f(x, y)\, dx$ сходится, а интеграл $\int\limits_a^b \dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y}\, dx$ равномерно сходится на отрезке $[c, d]$, то функция

$$\Phi(y) = \int\limits_a^b f(x, y)\, dx$$

непрерывно дифференцируема на этом отрезке и

$$\frac{d}{dy}\int\limits_a^b f(x, y)\, dy = \int\limits_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\, dx .$$

*Доказательство.* Пусть $\{\eta_n\}_{n=1}^{\infty}$ – такая монотонно возрастающая последовательность действительных чисел, что $\eta_1 = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} \eta_n = b$. Тогда, очевидно,

$$\int\limits_a^b f(x, y)\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{\eta_n}^{\eta_{n+1}} f(x, y)\, dx ,$$

и для каждого члена ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{\eta_n}^{\eta_{n+1}} f(x, y)\, dx$$

справедливо в силу теоремы 1.4 соотношение

$$\frac{d}{dy}\int\limits_{\eta_n}^{\eta_{n+1}} f(x, y)\,dx = \int\limits_{\eta_n}^{\eta_{n+1}} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\,dx, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{2.23}$$

Для ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{\eta_n}^{\eta_{n+1}} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\,dx$$

справедливо, очевидно, соотношение

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{\eta_n}^{\eta_{n+1}} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\,dx = \int\limits_{a}^{b} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\,dx \tag{2.24}$$

и, поскольку интеграл в правой части (2.24) сходится равномерно на $[c, d]$, то и ряд в левой части (2.24) также равномерно на $[c, d]$ сходится, и поэтому равномерно на $[c, d]$ сходится в силу (2.23) ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d}{dy}\int\limits_{\eta_n}^{\eta_{n+1}} f(x, y)\,dx\,.$$

Таким образом, выполнены предположения теоремы о почленном дифференцировании рядов ([1], с. 461), так что

$$\frac{d}{dy}\int\limits_{a}^{b} f(x, y)\,dx = \frac{d}{dy}\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{\eta_n}^{\eta_{n+1}} f(x, y)dx =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{d}{dy}\int\limits_{\eta_n}^{\eta_{n+1}} f(x, y)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{\eta_n}^{\eta_{n+1}} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\,dx =$$

$$= \int\limits_{a}^{b} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\,dx\,.$$

Теорема доказана.

# 3. ЗАДАЧИ НА ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ, ЗАВИСЯЩИХ ОТ ПАРАМЕТРА

**Пример 3.1.** Вычислить интеграл $J_0 = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx$, $\alpha > 0$.

Непосредственное дифференцирование его по параметру $\alpha$ приводит к расходящемуся интегралу $\int\limits_0^{+\infty} \cos \alpha x \, dx$. Поэтому введем в подынтегральную функцию множитель $e^{-kx}$ ($k > 0$), обеспечивающий сходимость продифференцированного по $\alpha$ интеграла. Вычислим

$$J = \int\limits_0^{+\infty} e^{-kx} \frac{\sin \alpha x}{x} dx, \quad \alpha \geq 0.$$

Для него выполнены условия теоремы 2.8, поскольку подынтегральная функция и ее частная производная по $\alpha$ непрерывны по $x$ и $\alpha$ при $x \geq 0$, $\alpha \geq 0$, а интеграл

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int\limits_0^{+\infty} e^{-kx} \cos \alpha x \, dx = \frac{k}{k^2 + \alpha^2} \tag{3.1}$$

сходится равномерно по $\alpha$, что легко установить по признаку Вейерштрасса (подынтегральная функция мажорируется функцией $e^{-kx}$).

Проинтегрировав (3.1) по $\alpha$, найдем, что $J = \operatorname{arctg} (\alpha / k)$. Этот результат получен в предположении, что $k > 0$. Но при $\alpha = \text{const}$ интеграл $J$ непрерывен как функция $k$ и при $k = 0$. Это вытекает из равномерной сходимости интеграла $J$ относительно $k$ при $k \geq 0$. Следовательно,

$$J_0 = \lim_{k \to +0} J.$$

Если $\alpha > 0$, то

$$J_0 = \lim_{k \to +0} \operatorname{arctg} (\alpha / k) = \operatorname{arctg} (+\infty) = \frac{\pi}{2}.$$

Аналогично можно показать, что $J_0 = -\dfrac{\pi}{2}$ при $\alpha < 0$. Таким образом, $J_0 = \dfrac{\pi}{2}\operatorname{sgn}\alpha$.

**Пример 3.2.** Вычислить $F(p) = \int\limits_0^{+\infty} \left(\dfrac{\sin px}{x}\right)^2 dx$.

Дифференцируя формально по параметру *p*, имеем

$$F'(p) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin 2px}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}, \quad p > 0. \tag{3.2}$$

Интегрируя результат, находим

$$F(p) = \frac{\pi}{2}p + F(0) = \frac{\pi}{2}p, \quad p > 0.$$

Поскольку $F(p)$ – четная функция *p*, то

$$F(p) = \frac{\pi}{2}|p|.$$

Проверим выполнение условий теоремы 2.8. Запишем

$$F(p) = \left(\int\limits_0^1 + \int\limits_1^{+\infty}\right)\left(\frac{\sin px}{x}\right)^2 dx.$$

Первый их этих интегралов – собственный, а второй сходится равномерно относительно *p* при $p \in (-\infty, +\infty)$ по признаку Вейерштрасса. Поэтому функция $F(p)$ непрерывна на $(-\infty; +\infty)$. Производная подынтегральной функции по *p*, равная $(\sin 2px / x)$, непрерывна при $x \geq 0$, $p \in (-\infty; +\infty)$. Интеграл (3.2) сходится равномерно относительно *p* при $|p| \geq \varepsilon > 0$ по теореме 2.3. Поэтому дифференцирование по *p* под знаком интеграла возможно при $|p| \geq \varepsilon > 0$, а в силу произвольности $\varepsilon$ – при $p \neq 0$. При $p = 0$ функция $F(p)$ не дифференцируема.

**Пример 3.3.** Вычислить $J = \int\limits_0^{+\infty} \frac{1-\cos\alpha x}{x} e^{-kx}\, dx$; $\alpha, k > 0$.

Производная $\partial J / \partial\alpha$ выражается сходящимся равномерно относительно $\alpha$ интегралом

$$\frac{\partial J}{\partial\alpha} = \int\limits_0^{+\infty} e^{-kx} \sin\alpha x\, dx = \frac{\alpha}{\alpha^2 + k^2}.$$

Поскольку при $\alpha = 0$ интеграл $J$ равен нулю, то, интегрируя последнее соотношение, получим

$$J = \frac{1}{2} \ln(\alpha^2 + k^2).$$

**Пример 3.4.** Вычислить $H = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin\alpha x}{x} \cdot \frac{\sin\beta x}{x} e^{-kx}\, dx$.

Условия теоремы 2.8 выполнены, как нетрудно убедиться. Поэтому

$$\frac{\partial H}{\partial\alpha} = \int\limits_0^{+\infty} e^{-kx} \frac{\sin\beta x \cdot \cos\alpha x}{x}\, dx.$$

Представив произведение синуса на косинус как разность синусов, сведем последнее выражение к интегралам известного вида

$$\frac{\partial H}{\partial\alpha} = \frac{1}{2}\left[\int\limits_0^{+\infty} e^{-kx} \frac{\sin(\alpha+\beta)x}{x}\, dx - \int\limits_0^{+\infty} e^{-kx} \frac{\sin(\alpha-\beta)x}{x}\, dx\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\operatorname{arctg}\frac{\alpha+\beta}{k} - \operatorname{arctg}\frac{\alpha-\beta}{k}\right).$$

Интегрируя по $\alpha$ и пользуясь тем, что $H = 0$ при $\alpha = 0$, находим

$$H = \frac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{arctg}\frac{\alpha+\beta}{k} - \frac{\alpha-\beta}{2}\operatorname{arctg}\frac{\alpha-\beta}{k} + \frac{k}{4}\ln\frac{k^2+(\alpha-\beta)^2}{k^2+(\alpha+\beta)^2}.$$

**Пример 3.5.** Исследовать на сходимость и вычислить интеграл

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{\sin\left(ax - \dfrac{b}{x}\right)}{x}\, dx; \quad a, b > 0 .$$

Исследуем интеграл на сходимость. Использовав формулу для синуса разности, запишем

$$J_1 = \int_0^{+\infty} \frac{\sin ax \cos(b/x)\, dx}{x}, \quad J_2 = -\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax \sin\left(\dfrac{b}{x}\right)}{x}\, dx .$$

В интеграле $J_1$ подынтегральная функция $f_1(x)$ ограничена на $[0, +\infty)$ и $f_1(x) = 0(1/x^2)$ при $x \to +\infty$. Поэтому $J_1$ сходится по признаку сравнения со степенью.

Во втором интеграле выполним замену переменной $y = 1/x$ и приведем его к виду

$$J_2 = -\int_0^{+\infty} \frac{\cos\dfrac{a}{t} \sin bt}{t}\, dt .$$

Сходимость $J_2$ очевидна.

Для вычисления интеграла $J$ положим $t = ax - \dfrac{b}{x}$, тогда $x$ и $t$ связаны уравнением $ax^2 - tx - b = 0$ . Пусть

$$x = \frac{t + \sqrt{t^2 + 4ab}}{2a}; \quad \frac{dx}{x} = \frac{dt}{\sqrt{t^2 + 4ab}}$$

(необходимо удовлетворить условию $x > 0$ ). Имеем

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t^2 + 4ab}}\, dt . \tag{3.3}$$

Поскольку подынтегральная функция нечетная, то ее первообразная $F(x)$ – функция четная. Следовательно, $J = F(+\infty) - F(-\infty) = 0.$

**Пример 3.6.** Исследовать на сходимость интегралы

$$\int_0^1 x^{\alpha} \sin(1/x)\, dx; \tag{3.4}$$

$$\int_0^1 x^{\beta} \cos(1/x)\, dx. \tag{3.5}$$

Выполнив замену переменной $t = \dfrac{1}{x}$ в выражении (3.4), приведем его к виду

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{2+\alpha}}\, dt.$$

Если $2+\alpha<0$, т.е. $\alpha<-2$, то последний интеграл расходится, так как подынтегральная функция возрастает при $t\to+\infty$ как степенная функция. Если же $\alpha>-2$, то интеграл сходится согласно теореме 2.3. В самом деле, функция $f(t)=\sin t$ имеет ограниченную первообразную, а функция $g(t)=1/t^{2+\alpha}$ непрерывна и монотонна на $(1,+\infty)$.

При $\alpha>-1$ абсолютная величина подынтегральной функции оценивается сверху функцией $1/t^{\varepsilon}$, где $\varepsilon>1$. Поэтому при $\alpha>-1$ рассматриваемый интеграл сходится абсолютно.

Интеграл (3.5) исследуется аналогично.

**Пример 3.7.** Вычислить

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \int_0^{+\infty} \frac{\sin x\, dx}{\sqrt{x^2+\varepsilon^2}}. \tag{3.6}$$

Обозначим $f(x,\varepsilon)=\dfrac{\sin x}{(x^2+\varepsilon^2)^{1/2}}$, $x\in(0,+\infty)$; $\varepsilon\in(0,1)$. Переформулируем теорему 2.4 для случая, когда интеграл $\int_a^b f(x,y)\,dx$ имеет две «особые» точки: *a* и *b*.

**Теорема 2.4′.** Пусть функция $f(x, y)$ определена для всех $x \in (a, b)$, $y \in Y$ и при любом $y \in Y$ непрерывна по $x \in (a, b)$. Тогда, если при любых таких $\xi$ и $\eta$, что $a < \xi < \eta < b$, функция $f(x, y)$ равномерно на отрезке $[\xi, \eta]$ стремится к функции $\psi(x)$ при $y \to y_0$ и интеграл $\int\limits_a^b f(x, y)\, dx$ равномерно сходится на множестве $Y$, то

$$\lim_{y \to y_0} \int\limits_a^b f(x, y)\, dx = \int\limits_a^b \lim_{y \to y_0} f(x, y)\, dx = \int\limits_a^b \psi(x)\, dx .$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.4.

Проверим, что интеграл в условии задачи удовлетворяет всем предположениям теоремы 2.4′.

1. $f(x, \varepsilon)$ непрерывна по $x \in (0, +\infty)$ при любом $\varepsilon \in (0, 1)$ – очевидно.

2. $f(x, \varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0+$ равномерно на каждом отрезке $[\xi, \eta]$, $0 < \xi < \eta < \infty$, стремится к $\sin x / x$. Действительно, по формуле конечных приращений Лагранжа ([1], с. 169) имеем:

$$\left| f(x, 0) - f(x, \varepsilon) \right| = \left| \frac{\partial f(x, \theta(x, \varepsilon) \cdot \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right| \cdot \varepsilon =$$

$$= \left| \frac{\sin x}{(x^2 + [\varepsilon \cdot \theta(x, \varepsilon)]^2)^{3/2}} \cdot \varepsilon \cdot \theta(x, \varepsilon) \right| \cdot \varepsilon \le$$

$$\le \max_{[\xi, \eta]} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\xi^2} \cdot \varepsilon \le \frac{\varepsilon}{\xi^2} .$$

Таким образом, для наперед заданного $\varepsilon_1 > 0$ достаточно выбрать $0 < \varepsilon < \xi^2 \varepsilon_1$, и тогда соотношение

$$\left| f(x, \varepsilon) - \frac{\sin x}{x} \right| < \varepsilon_1$$

будет выполняться одновременно для всех $x \in [\xi, \eta]$.

3. Равномерная сходимость $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{(x^2+\varepsilon^2)^{1/2}}\,dx$ следует из сходимости $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ и признака Вейерштрасса. Таким образом, выполнены все условия теоремы 2.4′, и поэтому

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{(x^2+\varepsilon^2)^{1/2}}\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

Приведем другой способ вычисления предела (3.6), основанный на одной теореме Арцела.

Обозначив исследуемый интеграл (3.6) через $J(\varepsilon)$, представим его в виде суммы $J(\varepsilon) = J_1(\varepsilon) + J_2(\varepsilon)$:

$$J_1(\varepsilon) = \int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{x^2+\varepsilon^2}}\,dx; \quad J_2(\varepsilon) = \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x^2+\varepsilon^2}}\,dx.$$

Заметим, что в интеграле $J_2(\varepsilon)$ можно перейти к пределу под знаком интеграла и получить $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$.

Рассмотрим $J_1(\varepsilon)$. Возьмем произвольную числовую последовательность $\{\varepsilon_n\} \to 0$ и заметим, что функциональная последовательность подынтегральных функций $\{f(x,\varepsilon_n)\}$ не будет равномерно относительно $x \in [0,1]$ сходиться к своей предельной функции $f(x) = \frac{\sin x}{x}$. Поэтому воспользуемся следующей теоремой.

**Теорема (Арцела).** Пусть дана функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$, каждый член которой интегрируем в собственном смысле по $[a,b]$, и пусть $\{f_n(x)\}$ ограничена в совокупности, т.е.

$$\left|f_n(x)\right| \le M < +\infty \quad \text{для всех} \quad x\in[a,b]; \quad n = 1, 2, \ldots$$

Если для всех $x \in [a,b]$ существует предел

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x),$$

и функция $f(x)$ также интегрируема по $[a, b]$, то

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx .$$

Согласно этой теореме предельный переход под знаком интеграла возможен и для $J_1(\varepsilon)$, причем

$$\lim_{\varepsilon\to 0} J_1(\varepsilon) = \int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx .$$

Воспользовавшись результатом задачи 3.1 $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$, получим, что $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} J(\varepsilon) = \frac{\pi}{2}$.

**Пример 3.8.** Доказать, что интегралы

$$\int_a^{+\infty} \sin(f(x))\,dx, \quad \int_a^{+\infty} \cos(f(x))\,dx$$

сходятся, если $f'(x)$ монотонно возрастает и стремится к $+\infty$ при $x \to +\infty$.

Прежде всего $f'(x) > 0$ для достаточно больших *x* и $f(x)$ монотонно возрастает. Будем считать, что это имеет место, уже начиная с $x = a$. По формуле конечных приращений имеем

$$f(x+1) = f(x) + f'(x+\theta) \ge f(a) + f'(x) .$$

Следовательно, сама функция $f(x) \to +\infty$ при $x \to +\infty$. Введем новую переменную $t = f(x)$, так что $x = g(t)$; $dx = g'(t)\,dt$, если через $g$ обозначить функцию, обратную к *f*. Но производная $g'(t) = 1/f'(t)$ монотонно убывает и стремится к нулю при $t \to +\infty$. Поэтому преобразованные интегралы

$$\int_{f(a)}^{+\infty} \sin t \cdot g'(t)\,dt; \quad \int_{f(a)}^{+\infty} \cos t \cdot g'(t)\,dt$$

по признаку Дирихле сходятся, а с ними сходятся и исходные интегралы.

**Пример 3.9.** Доказать, что при $p > 0$

$$\int_0^{+\infty} f(x^p + x^{-p}) \ln x \frac{dx}{x} = 0, \qquad (3.7)$$

$$\int_0^{+\infty} f(x^p + x^{-p}) \ln x \frac{dx}{1+x^2} = 0, \qquad (3.8)$$

если только эти интегралы сходятся.

Для интеграла (3.7) имеем: $\int_0^{+\infty} \ldots = \int_0^1 \ldots + \int_1^{+\infty} \ldots$. Сделав во втором из интегралов замену переменной $x = 1/t$, убедимся в том, что $\int_1^{+\infty} \ldots = -\int_0^1 \ldots$. Аналогично доказывается (3.8).

**Пример 3.10.** В предположении, что интеграл в правой части сходится, доказать формулу

$$\int_0^{+\infty} f\left[\left(Ax - \frac{B}{x}\right)^2\right] dx = \frac{1}{A} \int_0^{+\infty} f(y^2)\, dy \quad (A, B > 0). \qquad (3.9)$$

Выполнив замену переменной $y = Ax - \dfrac{B}{x}$, получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(y^2)\, dy = \int_0^{+\infty} f\left[\left(Ax - \frac{B}{x}\right)^2\right]\left(A + \frac{B}{x}\right) dx =$$

$$= A \int_0^{+\infty} f\left[\left(Ax - \frac{B}{x}\right)^2\right] dx + \int_0^{+\infty} \frac{B}{x} f\left[\left(Ax - \frac{B}{x}\right)^2\right] dx.$$

Второй из интегралов в правой части подстановкой $x = -\dfrac{B}{At}$ приводится к виду

$$A \int_{-\infty}^{0} f\left[\left(At - \frac{B}{t}\right)^2\right] dt.$$

Поэтому

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(y^2)\,dy = A\int_{-\infty}^{+\infty} f\left[\left(Ax-\frac{B}{x}\right)^2\right]dx\,.$$

В силу четности подынтегральной функции отсюда следует формула (3.9).

**Пример 3.11.** Вычислить

$$J=\int_0^{+\infty} e^{-(ax^2-b/x^2)}\,dx\,;\quad a,b>0\,.$$

Имеем

$$J=e^{-2\sqrt{ab}}\int_0^{+\infty} e^{-\left(\sqrt{a}\,x-\frac{\sqrt{b}}{x}\right)^2}\,dx\,.$$

Воспользовавшись формулой (3.9) и выполнив замену переменной $y=\sqrt{a}\,x-\sqrt{b}\,/\,x$, получим

$$J=\frac{1}{\sqrt{a}}\,e^{-2\sqrt{ab}}\int_0^{+\infty} e^{-y^2}\,dy=\frac{1}{\sqrt{a}}e^{-2\sqrt{ab}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}}e^{-2\sqrt{ab}}\,.$$

**Пример 3.12.** Изучим вопросы существования и вычисления несобственных интегралов специального вида, называемых интегралами Фруллани. Будем считать, что функция $f(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $f(x)$ определена и непрерывна при $x\ge 0$;

2) существует конечный предел $f(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Из первого условия следует, что существует интеграл

$$\int_\delta^\Delta \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx=\int_\delta^\Delta \frac{f(ax)}{x}\,dx-\int_\delta^\Delta \frac{f(bx)}{x}\,dx=$$

$$=\int_{a\delta}^{a\Delta} \frac{f(z)}{z}\,dz-\int_{b\delta}^{b\Delta} \frac{f(z)}{z}\,dz=\int_{a\delta}^{b\delta} \frac{f(z)}{z}\,dz-\int_{a\Delta}^{b\Delta} \frac{f(z)}{z}\,dz\,. \qquad (3.10)$$

А интеграл (3.10) определяется равенством

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx=\lim_{\delta\to0}\int_{a\delta}^{b\delta} \frac{f(z)}{z}\,dz-\lim_{\Delta\to+\infty}\int_{a\Delta}^{b\Delta} \frac{f(z)}{z}\,dz\,.$$

Применив к первому из интегралов правой части этого уравнения теорему о среднем, получим

$$\int_{a\delta}^{b\delta} \frac{f(z)}{z}\,dz = f(\xi)\int_{a\delta}^{b\delta} \frac{dz}{z} = f(\xi)\ln(b/a),$$

где $a\delta \le \xi \le b\delta$. Аналогично имеем

$$\int_{a\Delta}^{b\Delta} \frac{f(z)}{z}\,dz = f(\eta)\ln(b/a),$$

где $a\Delta \le \eta \le b\Delta$. Так как $\xi \to 0$ при $\delta \to 0$, а $\eta \to +\infty$ при $\Delta \to +\infty$, то отсюда

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx = [f(0)-f(+\infty)]\ln(b/a). \qquad (3.11)$$

Рассмотрим примеры применения формулы (3.11)

**А.** Дано $J = \int_{0}^{+\infty} \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,dx$.

Используя (3.11), получим $f(x)=e^{-x}$, $f(0)=1$, $f(+\infty)=0$, $J=\ln(b/a)$.

**Б.** Дано $J = \int_{0}^{+\infty} \ln\frac{p+qe^{-ax}}{p+qe^{-bx}}\frac{dx}{x}$ ($p, q > 0$).

Заменив логарифм частного разностью логарифмов, можно получить $f(x)=\ln(p+qe^{-x})$. Тогда $f(0)=\ln(p+q)$, $f(+\infty)=\ln p$, $J=\ln(1+q/p)\ln(b/a)$.

**В.** Дано $J = \int_{0}^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} ax-\operatorname{arctg} bx}{x}\,dx$.

Здесь $f(x)=\operatorname{arctg} x$, $f(0)=0$, $f(+\infty)=\frac{\pi}{2}$;

$$J=\frac{\pi}{2}\ln(a/b).$$

# 4. ЗАДАЧИ НА ВЫЧИСЛЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ ИНТЕГРАЛОВ ЭЙЛЕРА

Гамма-функцией, или эйлеровым интегралом второго рода, называется интеграл

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x}\, dx . \tag{4.1}$$

Приведем основные свойства Г-функции. Функция $\Gamma(p)$ определена и непрерывна при $p > 0$. Более того, при $p > 0$ она имеет непрерывные производные всех порядков. Достаточно доказать существование производных. Дифференцируя интеграл (4.1) под знаком интеграла, получим

$$\Gamma'(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} \ln x\, e^{-x}\, dx .$$

Дифференцирование под знаком интеграла оправдано тем, что интегралы

$$\int_0^1 f(x, p)\, dx \quad \text{и} \quad \int_1^{+\infty} f(x, p)\, dx ,$$

где $f(x, p) = x^{p-1} \ln x\, e^{-x}$, сходятся равномерно относительно $p$: первый – благодаря неравенству $|f(x, p)| \le x^{p_1 - 1} |\ln x| e^{-x}$, а второй – благодаря неравенству $|f(x, p)| \le x^{p_2 - 1} |\ln x| e^{-x}$, где $0 < p_1 \le p \le p_2 < < +\infty$. Аналогично доказывается существование других производных.

Интегрированием по частям доказывается формула понижения

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p) . \tag{4.2}$$

Из нее при целом $n$ следует формула

$$\Gamma(n+1) = n!, \tag{4.3}$$

которая показывает, что Г-функция является единственным распространением на область положительных значений аргумента факториала $n!$, определенного лишь для натуральных значений $n$.

Следующая формула носит название формулы дополнения

$$\Gamma(p)\,\Gamma(1-p)=\frac{\pi}{\sin \pi p}. \qquad (4.4)$$

**Пример 4.1.** Вычислить $J=\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$.

Положив $t=x^2$, преобразуем интеграл к виду

$$J=\frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty} t^{1/2-1}\,e^{-t}\,dt=\frac{1}{2}\Gamma(1/2).$$

Согласно формуле дополнения $[\Gamma(1/2)]^2=\pi$. Поэтому $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$ и $J=\sqrt{\pi}/2$.

**Пример 4.2.** Вычислить $J=\int\limits_0^{+\infty} x^p\,e^{-ax}\ln x\,dx$, $a>0$.

Рассмотрим

$$F(p)=\int\limits_0^{+\infty} x^p\,e^{-ax}\,dx=\frac{\Gamma(p+1)}{a^{p+1}}.$$

Эта функция дифференцируема при $p>-1$, как следует из свойств Г-функции. Поэтому

$$J=\frac{\partial F}{\partial p}=\frac{\partial}{\partial p}\left[\frac{\Gamma(p+1)}{a^{p+1}}\right].$$

**Пример 4.3.** Вычислить

$$J=\int\limits_0^1 (\ln 1/x)^p\,dx. \qquad (4.5)$$

Выполнив замену переменной, $\ln(1/x)=t$; $1/x=e^t$, $dx=-e^{-t}\,dt$, получим, что

$$J=-\int\limits_{+\infty}^{0} t^p\,e^{-t}\,dt=\Gamma(p+1).$$

Следовательно, интеграл (4.5) сходится при $p > -1$ и представляет собой иное выражение для Г-функции.

**Пример 4.4.** Выразить через Г-функцию интеграл

$$J = \int_0^{+\infty} x^{\beta-1}\, e^{-\lambda x^{\alpha}}\, dx\,; \quad \alpha, \beta, \lambda > 0\,.$$

Положив $t = x^{\alpha}$, найдем, что

$$J = \frac{1}{\alpha} \int_0^{+\infty} t^{\beta/\alpha - 1}\, e^{-\lambda t}\, dt\,.$$

Сделав замену переменной $\xi = \lambda t$, преобразуем последнее выражение к виду

$$J = \frac{\lambda^{-\beta/\alpha}}{\alpha} \int_0^{+\infty} \xi^{\beta/\alpha - 1}\, e^{-\xi}\, d\xi = \frac{\Gamma(\beta/\alpha)}{\alpha \lambda^{\beta/\alpha}}\,.$$

**Пример 4.5.** Вычислить $J = \int\limits_0^{+\infty} x^{2n}\, e^{-x^2}\, dx$.

Используя результат, полученный выше, и полагая $\beta = 2n + 1$, $\alpha = 2$, $\lambda = 1$, согласно формуле понижения имеем

$$J = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(n - \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n - \frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(n - \frac{1}{2}\right)\left(n - \frac{3}{2}\right) \ldots \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}}\sqrt{\pi}\,.$$

**Пример 4.6.** Вычислить

$$R = \int_0^1 \ln \Gamma(x)\, dx\,. \tag{4.6}$$

Этот интеграл сходится, поскольку согласно формуле (4.2)

$$\ln \Gamma(x) = \ln \Gamma(x+1) - \ln x\,, \quad x > 0\,.$$

Положив $x = 1 - y$, запишем

$$R = \int_0^1 \ln \Gamma(1-y)\, dy\,. \tag{4.7}$$

Сложив (4.6) и (4.7), найдем

$$2R = \int_0^1 \ln[\Gamma(x)\Gamma(1-x)]\, dx = \int_0^1 \ln \frac{\pi}{\sin \pi x}\, dx =$$

$$= \ln \pi - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \ln \sin x\, dx =$$

$$= \ln \pi - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \ln \sin x\, dx = \ln 2\pi\,.$$

Вычислим интеграл $J = \int\limits_0^{\pi/2} \ln \sin x\, dx$. Полагая $x = 2t$, имеем

$$J = 2 \int_0^{\pi/4} \ln \sin 2t\, dt = \frac{\pi}{2} \ln 2 + 2 \int_0^{\pi/4} \ln \sin t\, dt + 2 \int_0^{\pi/4} \ln \cos t\, dt\,.$$

Сделав подстановку $t = \dfrac{\pi}{2} - y$ в последнем интеграле, приведем его к виду

$$J_0 = 2 \int_{\pi/4}^{\pi/2} \ln \sin y\, dy\,.$$

Тогда для определения $J$ получаем уравнение $J = \dfrac{\pi}{2} \ln 2 + 2J$, откуда $J = -\dfrac{\pi}{2} \ln 2$. Окончательно имеем $R = \ln \sqrt{2\pi}$.

Бета-функцией, или эйлеровым интегралом первого рода, называется интеграл

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1}\, dx\,, \tag{4.8}$$

где $p, q > 0$. Этот интеграл сходится при всех $p, q > 0$, причем при $0 < p < 1$, $0 < q < 1$ он является несобственным.

Выполнив подстановку $x = 1 - y$, нетрудно установить, что

$$B(p, q) = B(q, p),$$

т.е. $B$-функция является симметричной относительно $p$ и $q$. При натуральных значениях аргументов справедлива формула

$$B(m, n) = \frac{(n-1)!(m-1)!}{(m+n-1)!}.$$

Она применима и при $m = 1$, $n = 1$, если считать, что $0! = 1$.

$B$-Функция достаточно просто выражается через Г-функцию, а именно:

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

**Пример 4.7.** Вычислить $J = \int\limits_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$.

Выполнив замену переменной $t = (x/a)^2$, $x = at^{1/2}$, $dx = \frac{a}{2} t^{-1/2}\, dt$, преобразуем этот интеграл к виду

$$J = \frac{a^4}{2} \int\limits_0^1 t^{1/2} (1-t)^{1/2}\, dt = \frac{a^4}{2} B\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) = \frac{a^4}{2} \frac{[\Gamma(3/2)]^2}{\Gamma(3)} = \frac{\pi a^4}{16}.$$

**Пример 4.8.** Вычислить $J = \int\limits_0^{\pi/2} \cos^\alpha x \sin^\beta x\, dx$; $\alpha, \beta > 0$.

Подстановкой $t = \sin^2 x$; $dx = \frac{1}{2}(1-t)^{-1/2} t^{-1/2}\, dt$, этот интеграл можно привести к виду

$$J = \frac{1}{2} \int\limits_0^1 (1-t)^{\frac{\alpha-1}{2}}\, t^{\frac{\beta-1}{2}}\, dt = \frac{1}{2} B\left(\frac{\alpha+1}{2}, \frac{\beta+1}{2}\right) =$$

$$=\frac{1}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\beta+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)}\,.$$

**Пример 4.9.** Вычислить $J=\int\limits_0^{\pi}\sin^{2m}x\,dx$.

Представим этот интеграл как

$$J=\left(\int\limits_0^{\pi/2}+\int\limits_{\pi/2}^{\pi}\right)\sin^{2m}x\,dx$$

и подстановкой $x=\pi-t$ сведем второй интеграл к первому. Тогда

$$J=2\int\limits_0^{\pi/2}\sin^{2m}x\,dx=B\left(m+\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=$$

$$=\frac{\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(m+1)}=\frac{\left(m-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(m-\frac{3}{2}\right)\cdot\ldots\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\pi}\cdot\sqrt{\pi}}{m!}=$$

$$=\frac{(2m-1)!!}{2^m\cdot m!}\pi\,.$$

**Пример 4.10.** Вычислить $J=\int\limits_0^{+\infty}\frac{x^{m-1}\,dx}{(1+x^n)^p}$, $n>0$.

Выполнив замену переменной $t=\frac{1}{1+x^n}$, $x=\left(\frac{1-t}{t}\right)^{1/n}$, получим:

$$J=\frac{1}{n}\int\limits_0^1(1-t)^{\frac{m}{n}-1}\,t^{p-\frac{m}{n}-1}\,dt=\frac{1}{n}B\left(\frac{m}{n},\,p-\frac{m}{n}\right)=$$

$$=\frac{1}{n}\,\frac{\Gamma\left(\frac{m}{n}\right)\Gamma\left(p-\frac{m}{n}\right)}{\Gamma(p)}\,.$$

Интеграл сходится при $m > 0$, $p - \dfrac{m}{n} > 0$, т.е. при $0 < m < np$.

**Пример 4.11.** Вычислить $J = \int\limits_0^{+\infty} \dfrac{x^{p-1} \ln x}{1+x}\, dx$.

Рассмотрим $F(p) = \int\limits_0^{+\infty} \dfrac{x^{p-1}}{1+x}\, dx$ – частный случай интеграла, изученного в задаче 4.10. Имеем

$$F(p) = B(p, 1-p) = \Gamma(p)\,\Gamma(1-p) = \frac{x}{\sin \pi p}.$$

Интеграл $F(p)$ сходится при $0 < p < 1$ и допускает дифференцирование по $p$ под знаком интеграла (в области $0 < \varepsilon \le p \le 1 - \varepsilon < 1$ он сходится равномерно). Поэтому

$$J = \frac{dF}{dp} = \frac{d}{dp}\left(\frac{\pi}{\sin \pi p}\right) = -\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi p} \cos \pi p.$$

**Пример 4.12.** Вычислить $J = \int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\cos bx}{x^s}\, dx$; $b > 0$, $0 < s < 1$.

Положив в интеграле (4.8) $x = \dfrac{y}{1+y}$, преобразуем его к виду

$$B(p, q) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{y^{p-1}}{(1+y)^{p+q}}\, dy, \tag{4.9}$$

который можно принять за еще одно определение $B$-функции. Нетрудно проверить, что

$$\frac{1}{x^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int\limits_0^{+\infty} z^{s-1} e^{-zx}\, dz.$$

Поэтому

$$J = \frac{1}{\Gamma(s)} \int\limits_0^{+\infty} \cos bx\, dx \int\limits_0^{+\infty} z^{s-1} e^{-zx}\, dz.$$

Изменив порядок интегрирования, получим

$$J = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} z^{s-1}\, dz \int_0^{+\infty} e^{-zx} \cos bx\, dx = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} \frac{z^s\, dz}{z^2 + b^2}\,.$$

Выполнив замену переменной $z = b\sqrt{t}$ и воспользовавшись формулой (4.9), найдем:

$$J = \frac{b^{s-1}}{2\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{s-1}{2}}}{1+t}\, dt = \frac{b^{s-1}}{2\Gamma(s)}\, B\left(\frac{s+1}{2}, \frac{1-s}{2}\right) =$$

$$= \frac{b^{s-1}}{2\Gamma(s)}\, \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) \Gamma\left(1 - \frac{s+1}{2}\right) = \frac{b^{s-1}}{2\Gamma(s)} \cdot \frac{\pi}{\sin\left(\frac{s+1}{2}\pi\right)} = \frac{\pi b^{s-1}}{2\Gamma(s)\cos\frac{\pi s}{2}}\,.$$

Аналогично вычисляется интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin bx}{x^s}\, dx = \frac{\pi b^{s-1}}{2\Gamma(s)\sin\frac{\pi s}{2}}\,; \quad b > 0\,, \quad 0 < s < 2\,.$$

# 5. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

## Собственные интегралы, зависящие от параметра

Найти следующие пределы.

1. $\lim\limits_{\alpha \to 0} \int\limits_{\alpha}^{1+\alpha} \frac{dx}{1 + x^2 + \alpha^2}$.

2. $\lim\limits_{n \to \infty} \int\limits_0^1 \frac{dx}{1 + \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n}$.

Найти $F'(\alpha)$.

3. $F(\alpha) = \int\limits_{\sin\alpha}^{\cos\alpha} e^{\alpha\sqrt{1-x^2}}\, dx$.

4. $F(\alpha)=\int\limits_{\alpha-1}^{\alpha+1}\frac{\sin\alpha x}{x}\,dx$.

5. $F(\alpha)=\int\limits_{1}^{1-2\alpha}(1-\alpha x)e^{x}\,dx$.

6. $F(\alpha)=\int\limits_{0}^{\alpha}\frac{\ln(1+\alpha x)}{x}\,dx$.

Применяя дифференцирование по параметру под знаком интеграла, вычислить следующие интегралы.

7. $\int\limits_{0}^{\pi}\ln(1-2\alpha\cos x+\alpha^{2})\,dx$.

8. $\int\limits_{0}^{\pi/2}\frac{\operatorname{arctg}(\alpha\operatorname{tg}x)}{\operatorname{tg}x}\,dx$.

Применяя интегрирование по параметру под знаком интеграла, вычислить следующие интегралы.

9. $\int\limits_{0}^{1}\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^{b}-x^{a}}{\ln x}\,dx$ $(a>0,\ b>0)$.

10. $\int\limits_{0}^{1}\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^{b}-x^{a}}{\ln x}\,dx$ $(a>0,\ b>0)$.

## Несобственные интегралы, зависящие от параметра

Исследовать функцию $F(\alpha)$ на непрерывность на множестве $E$.

11. $F(\alpha)=\int\limits_{0}^{+\infty}e^{-(x-\alpha)^{2}}\,dx$, $E=\mathbb{R}$.

12. $F(\alpha)=\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{1+x^{2}}\,dx$, $E=\mathbb{R}$.

13. $F(\alpha)=\int\limits_{0}^{1}\frac{\sin x}{x^{\alpha}}\,dx$, $E=[0;1)$.

14. $F(\alpha)=\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{x\,dx}{2+x^{\alpha}}$, $E=(2;+\infty)$.

15. $F(\alpha)=\int\limits_0^{+\infty}\alpha e^{-\alpha^2 x}dx$, $E=\mathbb{R}$.

Исследовать на равномерную сходимость интеграл $J(\alpha)$ на множестве $E$.

16. $J(\alpha)=\int\limits_1^{+\infty}\frac{\ln^\alpha x}{x^2}dx$, $E=[0;1]$.

17. $J(\alpha)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{(x-\alpha)^2+1}$, $E=[0;+\infty)$.

18. $J(\alpha)=\int\limits_0^{+\infty}e^{-\alpha x^4}dx$, $E=[\alpha_0;+\infty)$, $\alpha_0>0$

19. $J(\alpha)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}e^{-\alpha x}dx$, $E=[0;+\infty)$.

20. $J(\alpha)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin x^2}{1+x^\alpha}dx$, $E=[0;+\infty)$.

Используя интеграл Дирихле

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}dx=\frac{\pi}{2}\operatorname{sign}\alpha,\ \alpha\in\mathbb{R},$$

вычислить следующие интегралы.

21. $\int\limits_0^{+\infty}\frac{1-\cos\alpha x}{x^2}dx$.

22. $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin x^3}{x}dx$.

23. $\int\limits_0^{+\infty}\frac{x-\sin x}{x^3}dx$.

24. $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin^5 x}{x}dx$.

Применяя формулу Фруллани, вычислить интегралы ($a>0$, $b>0$).

25. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\cos^2 ax - \cos^2 bx}{x} dx$.

26. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin^2 ax - \sin^2 bx}{x} dx$.

27. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x} dx$.

28. $\int\limits_{0}^{1} \frac{x^a - x^b}{\ln x} dx$.

## Эйлеровы интегралы

Выразить через значения гамма- и бета-функций следующие интегралы.

29. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2} dx$.

30. $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x^n} dx$ ($n > 0$).

31. $\int\limits_{0}^{+\infty} x^{p-1} e^{-\alpha x} dx$ ($p > 0,\ \alpha > 0$).

32. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{1}{x^{n+1}} e^{-\alpha/2x^2} dx$ ($\alpha > 0,\ n \in \mathbb{N}$).

33. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-e^x} e^{px} dx$ ($p > 0$).

34. $\int\limits_{-1}^{2} \frac{dx}{\sqrt[4]{(2-x)(1+x)^3}}$.

35. $\int\limits_{0}^{2} \frac{dx}{\sqrt[5]{x^3(2-x)^2}}$.

36. $\int\limits_{0}^{1} x \cdot \sqrt[3]{1-x^3}\, dx$.

37. $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^4 x \cos^6 x \, dx$.

38. $\int\limits_0^1 x^\alpha (1-x^\beta)^\gamma \, dx \quad (\alpha -1,\ \beta>0,\ \gamma>-1)$.

39. $\int\limits_0^\pi \frac{\sin^p x}{1+\cos x} dx \quad (p>1)$.

40. $\int\limits_{-1}^1 \frac{(1+x)^{2\alpha-1}(1-x)^{2\beta-1}}{(1+x^2)^{\alpha+\beta}} dx \quad (\alpha>0,\ \beta>0)$.

## Ответы

**1.** $\frac{\pi}{4}$.

**2.** $\ln \frac{2e}{1+e}$.

**3.** $-\left(e^{\alpha|\sin\alpha|}\sin\alpha + e^{\alpha|\cos\alpha|}\cos\alpha\right) + \int\limits_{\sin\alpha}^{\cos\alpha} \sqrt{1-x^2}\, e^{\alpha\sqrt{1-x^2}} dx$.

**4.** $\frac{2\alpha+1}{\alpha^2+\alpha}\sin\alpha(\alpha+1) - \frac{2\alpha-1}{\alpha^2-\alpha}\sin\alpha(\alpha-1)$.

**5.** $2e^{1-2\alpha}(2\alpha-1-2\alpha^2)$.

**6.** $\frac{2}{\alpha}\ln(1+\alpha^2)$.

**7.** 0, если $|\alpha| \le 1$; $\pi \ln \alpha^2$, если $|\alpha|>1$.

**8.** $\frac{\pi}{2}\operatorname{sign}\alpha \cdot \ln(1+|\alpha|)$.

**9.** $\operatorname{arctg} \frac{b-a}{1+(a+1)(b+1)}$.

**10.** $\frac{1}{2}\ln\frac{b^2+2b+2}{a^2+2a+2}$.

**11.** Непрерывна.

**12.** Непрерывна.

**13.** Непрерывна.
**14.** Непрерывна.
**15.** Непрерывна при $\alpha \neq 0$, $\alpha = 0$ – точка разрыва.
**16.** Сходится равномерно.
**17.** Сходится неравномерно.
**18.** Сходится равномерно.
**19.** Сходится равномерно.
**20.** Сходится равномерно.

**21.** $\frac{\pi|\alpha|}{2}$.

**22.** $\frac{\pi}{6}$.

**23.** $\frac{\pi}{4}$.

**24.** $\frac{3\pi}{16}$.

**25.** $\frac{1}{2}\ln\frac{b}{a}$.

**26.** $\frac{1}{2}\ln\frac{a}{b}$.

**27.** $\frac{1}{2}\ln\frac{b}{a}$.

**28.** $\ln\frac{a+1}{b+1}$.

**29.** $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

**30.** $\frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)$.

**31.** $\frac{\Gamma(p)}{\alpha^p}$.

**32.** $2^{n/2-1}\alpha^{-n/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$.

**33.** $\Gamma(p)$.

**34.** $\pi\sqrt{2}$ .

**35.** $\dfrac{\pi}{\sin\frac{2}{5}\pi}$ .

**36.** $\dfrac{2\pi\sqrt{3}}{27}$ .

**37.** $\dfrac{3\pi}{512}$ .

**38.** $\dfrac{1}{\beta}B\left(\dfrac{\alpha+1}{\beta},\gamma+1\right)$.

**39.** $2^{p-1}B\left(\dfrac{p-1}{2},\dfrac{p+1}{2}\right)$.

**40.** $2^{\alpha+\beta-2}\cdot B(\alpha,\beta)$ .

# СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кудрявцев Л.Д. Краткий курс математического анализа. М.: Наука, 1989.

2. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. М.: Высшая школа, 1988.

3. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. В 3-х т. Т. 2. М.: Дрофа, 2004.

4. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.: Наука, 1990.

5. Сборник задач по математике для втузов. Специальные разделы математического анализа / Под ред. А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича. М.: Наука, 1981.

# СОДЕРЖАНИЕ

Алексей Викторович Баскаков
Евгений Васильевич Сумин

**Интегралы, зависящие от параметра**

Учебно-методическое пособие

Редактор М.В. Макарова

Подписано в печать 20.06.2014. Формат 60х84 1/16
Уч.-изд. л. 3,25. Печ. л. 3,25. Тираж 440 экз.
Изд. № 003-1. Заказ № 122

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ».
Типография НИЯУ МИФИ.
115409, Москва, Каширское ш., 31