

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

А.Н. Барменков, Е.В. Сандракова,
Е.В. Сумин, В.Б. Шерстюков

**Дополнительные главы
курса ТФКП.
Римановы поверхности**

Учебное пособие

Москва 2015

УДК 517.53(075.8)
ББК 22.161.5я7
Д 68

Дополнительные главы курса ТФКП. Римановы поверхности: учебное пособие / А.Н. Барменков, Е.В. Сандракова, Е.В. Сумин, В.Б. Шерстюков. М.: НИЯУ МИФИ, 2015. – 36 с.

Настоящее учебное пособие представляет собой дополнительные главы курса ТФКП и посвящено римановым поверхностям.

Предназначено для студентов всех факультетов НИЯУ МИФИ, изучающих теорию функций комплексного переменного.

Рецензент канд. физ.-мат. наук, доц. НИЯУ МИФИ А.П. Карташев

ISBN 978-5-7262-2160-1

© *Национальный исследовательский
ядерный университет «МИФИ», 2015*

ВВЕДЕНИЕ

Одним из высших достижений в математике XIX в. явилось создание в работах Абеля, Якоби, Римана, Вейерштрасса и других исследователей теории римановых поверхностей, алгебраических функций и η -функций. Идеи и методы теории римановых поверхностей с самого начала нашли глубокие приложения. Как было показано в работах Вейерштрасса, Ковалевской, Вебера, Кёттера, римановы поверхности могут применяться к решению сложных дифференциальных уравнений, возникающих в ряде задач аналитической механики и гидродинамики.

1. ПОСТРОЕНИЕ РИМАНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ ЭЛЕМЕНТАРНЫМ МЕТОДОМ

В основном курсе ТФКП довольно подробно рассмотрены свойства однозначных аналитических (голоморфных) функций. На самом деле при решении практических задач часто используют отображения, обратные к функциям, принимающим одно значение в нескольких или даже в счетном числе точек. Это означает, что функции, обратные к таким, являются многозначными.

Для того чтобы к многозначным функциям можно было применять понятия и результаты, полученные для однозначных функций, используют некоторую процедуру, называемую выделением однозначных ветвей этих функций.

Для устранения этой неоднозначности также применяются так называемые римановы поверхности и римановы многообразия с использованием аппарата отображений. Поскольку обычно на этот материал не хватает времени в семестровом курсе ТФКП, то решено подробнее осветить эти вопросы в данном пособии.

Начнем с элементарного метода, в основе которого лежит выделение однозначных ветвей многозначной аналитической функции и последующее построение ее римановой поверхности.

Пусть $z = F(w)$ – функция, определенная, однозначная и непрерывная (в обобщенном смысле) в области G расширенной комплексной плоскости. Предположим, что область G удалось каким-либо способом разбить на конечное или счетное множество областей G_1, G_2, \dots , попарно не имеющих общих точек, так, что любая точка области G – внутренняя для одной только области G_k или же общая граничная, по крайней мере, для двух областей G_j и G_k , причем в каждой из этих областей отображение $z = F(w)$ является взаимно однозначным. Тогда образ каждой из областей G_k будет также областью $F(G_k) = D_k$ и весь образ $F(G)$ будет покрываться областями D_k , а также образами общих частей границ областей G_k .

Рассмотрим функцию $w = f(z)$, обратную к $z = F(w)$, в каждой из областей D_k , определяя ее тем дополнительным условием, что ее значения принадлежат G_k – прообразу области D_k . Тогда функция $f(z)$, вообще многозначная, представится посредством нескольких, быть может бесконечно многих, однозначных и непрерывных (в обобщенном смысле) функций $f_k(z)$. Каждую из них будем называть однозначной ветвью функции $f(z)$ в соответствующей области D_k . При этом определении важно помнить, что характер областей D_k , а вместе с тем и однозначных ветвей функции $f_k(z)$, существенно зависит от того, как именно область G разбита на области G_k . В простейших случаях область G допускает такое разбиение на области G_k , при котором соответствующие области D_k совпадают между собой. Пусть, например, D_{k_1}, D_{k_2}, \dots совпадают с одной и той же областью D' . Тогда многозначная функция $w = f(z)$ обладает многими, быть может бесконечно многими, однозначными ветвями в области D' , а именно $f_{k_1}(z), f_{k_2}(z), \dots$.

К сказанному нужно добавить, что для произвольной непрерывной функции $z = F(w)$ разбиение области G на области G_k , удовлетворяющие указанным ранее условиям, вообще говоря, невозможно. Однако для случая, когда $F(w)$ – аналитическая в области G (за исключением изолированных точек, в которых она может обращаться в ∞), подобное разбиение всегда возможно и при том бесконечно многими способами. Используем следующий факт: если

аналитическая функция $z = F(w)$ многолистка в области G , то эту область можно разбить на конечное или счетное число областей, в каждой из которых $F(w)$ будет однолистной. Соответствующие области G_k называются областями однолистности функции $F(w)$.

Напомним: $F(w)$ однолистка в области G , если $\forall w_1, w_2 \in G, w_1 \neq w_2 : F(w_1) \neq F(w_2)$; $F(w)$ многолистка в области G , если $\exists w_1, w_2 \in G, w_1 \neq w_2 : F(w_1) = F(w_2)$. Проиллюстрируем указанный выше способ разбиения области G на области однолистности на некоторых элементарных функциях.

2. РИМАНОВА ПОВЕРХНОСТЬ ФУНКЦИИ $w = \sqrt[n]{z}$

Функцию, обратную к функции $z = w^n$, обозначим через $w = \sqrt[n]{z}$. Так как

$$w = \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{\text{Arg } z}{n} + i \sin \frac{\text{Arg } z}{n} \right),$$

то n значений w_0, w_1, \dots, w_{n-1} в плоскости \mathbb{C}_w , в которых $z = w^n$ принимает одно и то же значение z , располагаются в вершинах правильного n -угольника, вписанного в окружность радиусом $|w| = \sqrt[n]{|z|}$ с центром $w = 0$. Обратно: вершины любого правильного n -угольника с центром в начале координат можно рассматривать как n значений функции $w = \sqrt[n]{z}$. Поэтому область G плоскости \mathbb{C}_w будет областью однолистности для $z = w^n$ тогда и только тогда, когда из n вершин любого правильного многоугольника с центром $w = 0$ она содержит не более, чем одну вершину. Очевидно, этому условию удовлетворяет угол раствора $\frac{2\pi}{n}$ с вершиной в начале координат.

Из начала координат $w = 0$ проведем n прямолинейных лучей под равными углами. Тогда получим, что вся плоскость \mathbb{C}_w , в которой определена многолистная функция $z = w^n$, разделится на n углов – областей однолистности этой функции:

$$G_k = \left\{ w \in \mathbb{C}_w : \frac{2\pi k}{n} < \varphi < \frac{2\pi(k+1)}{n} \right\}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Образом каждой из этих областей G_k будет одна и та же область D' плоскости z .

Попытаемся теперь построить такой геометрический образ, чтобы степенная функция $z = w^n$ устанавливала взаимно однозначное и взаимно непрерывное соответствие между точками всей плоскости w и точками этого образа.

Рассмотрим первый угол $0 < \varphi < \frac{2\pi}{n}$. Он отображается на всю плоскость \mathbb{C}_z с выброшенной положительной полуосью (разрезом), т.е. $D = \mathbb{C}_z \setminus [0, +\infty)$. В соответствии с правилом обхода считаем, что луч $\varphi = 0$ переходит в верхний берег разреза, а луч $\varphi = \frac{2\pi}{n}$ – в нижний. Изготовим n экземпляров D_k ($k = 0, 1, \dots, n-1$) плоскости \mathbb{C}_z с разрезом вдоль положительной действительной полуоси (область D'), являющихся образами углов G_0, G_1, \dots, G_{n-1} , подложим их друг под друга и склеим так, чтобы сохранить непрерывность и взаимную однозначность соответствия. Для этого нижний берег разреза 1-го листа D_0 склеиваем с верхним берегом 2-го листа D_1 (находящегося над ним), нижний берег разреза 2-го листа D_1 склеиваем с верхним берегом разреза 3-го листа D_2 и т.д., наконец, нижний берег разреза n -го листа склеиваем с верхним берегом разреза 1-го листа (рис. 2.1, 2.2; на рис. 2.2 $n = 4$).

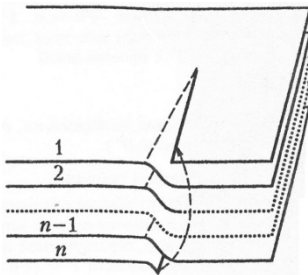


Рис. 2.1

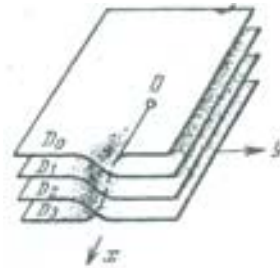


Рис. 2.2

Построенный геометрический образ называется поверхностью Римана функции $w = \sqrt[n]{z}$. Полученные n функций $w_k(z) = \left(\sqrt[n]{z}\right)_k$, $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$, для каждой из которых степенная функция $z = w^n$ является обратной, образуют однозначные ветви многозначной функции $w = \sqrt[n]{z}$. Выбор однозначных ветвей функции, обратной к $z = w^n$, определяется условием, что значения $w_k = \left(\sqrt[n]{z}\right)_k$ принадлежат области G_k . Так как $z = w^n$ имеет отличную от нуля производную во всех точках области G_k , то по свойству производной обратной функции

$$\left(\sqrt[n]{z}\right)'_k = \frac{1}{nw^{n-1}} = \frac{1}{n\left(\sqrt[n]{z}\right)^{n-1}},$$

так что для каждой ветви многозначной функции имеет место известная формула

$$\left(\sqrt[n]{z}\right)' = \frac{1}{n\left(\sqrt[n]{z}\right)^{n-1}}.$$

Поэтому и для многозначных функций сохраняются все свойства аналитических функций. Подчеркнем, что и при другом разбиении области \mathbb{C}_w на области однолиственности для функции $z = w^n$ обратная многозначная функция все равно сохраняет все свойства аналогичной функции при рассмотренном выше разбиении.

Отметим, что точка, при обходе которой в достаточно малой ее окрестности совершается переход от одной ветви многозначной функции к другой ее ветви, называется точкой ветвления (разветвления) этой многозначной функции. Причем если после n -кратного обхода в одном и том же направлении опять возвращаемся на начальную ветвь, то говорят, что это точка ветвления n -го порядка, в противном случае – бесконечного порядка. Точки ветвления конечного порядка называются алгебраическими точками ветвления. Точки $z = 0$ и $z = \infty$ являются алгебраическими точками ветвления n -го порядка функции $w = \sqrt[n]{z}$. В этих точках сама функция принимает по одному значению: $\sqrt[n]{0} = 0$, $\sqrt[n]{\infty} = \infty$. На поверхности Римана

на они будут концевыми точками разрезов, общими для всех листов D_k ($k = 0, 1, 2, \dots, n-1$).

Замечание 2.1. Аналогично строится риманова поверхность для бесконечнозначной функции $w = \text{Ln } z$, которая является обратной к $z = e^w$. Отличие от римановой поверхности для $w = \sqrt[n]{z}$ состоит в том, что бесконечное счетное число полос

$$G_n = \{w \in \mathbb{C}_w : 2\pi n < \text{Im } w < 2\pi n + 2\pi\}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

преобразуется функцией $z = e^w$ в область $D = \mathbb{C}_z \setminus [0, +\infty)$. Значит, риманова поверхность состоит из бесконечного счетного числа листов. Отметим, что точки ветвления $z = 0$ и $z = \infty$ функции $w = \text{Ln } z$ называются логарифмическими точками ветвления и являются точками ветвления бесконечного порядка.

3. РИМАНОВА ПОВЕРХНОСТЬ ФУНКЦИИ $w = \text{Arcsin } z$

Эта функция определяется как обратная к $z = \sin w$. Поскольку $\sin w = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i}$, то все основные ее свойства задаются отображениями e^{iw} и e^{-iw} .

В односеместровом курсе ТФКП подробно рассматриваются свойства экспоненты: эта функция не является однолистной во всей комплексной плоскости. В частности, областями однолистности функции e^{iw} являются полосы

$$R_n = \{w \in \mathbb{C} : 2\pi n - \pi < \text{Re } w < 2\pi n + \pi\}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

которые преобразуются в одну область $D = \mathbb{C}_z \setminus (-\infty, 0]$. Аналогично, можно показать, что функция $z = \sin w$ взаимно однозначно и конформно отображает полосу

$$G_n = \left\{ w \in \mathbb{C}_w : \pi n - \frac{\pi}{2} < \text{Re } w < \pi n + \frac{\pi}{2} \right\}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

на область $D = \mathbb{C}_z \setminus ((-\infty, -1] \cup [1, +\infty))$ и непрерывно продолжается на замкнутую полосу $\overline{G_n}$. Причем для каждой области G_n граничный луч

4. РИМАНОВА ПОВЕРХНОСТЬ

ФУНКЦИИ $w = z + \sqrt{z^2 - 1}$,

ОБРАТНОЙ К ФУНКЦИИ ЖУКОВСКОГО $z = \frac{1}{2} \left(w + \frac{1}{w} \right)$

В качестве экземпляров листа, из которого будет построена требуемая риманова поверхность, возьмем плоскости с выброшенным отрезком $[-1, 1]$. Это и будут области D_k , $k = 0, 1$. Как известно, функция, обратная к функции Жуковского, имеет две ветви. Обозначим их, соответственно, через $f_0(z)$ и $f_1(z)$. Эти ветви, соответственно, отображают области D_0 и D_1 на внутренность и внешность единичного круга. Так как $f_0(z)$ отображает на верхнюю полуокружность нижний берег отрезка $[-1, 1]$, а $f_1(z)$ – верхний, то нужно склеить между собой нижний берег разреза на листе D_0 и верхний берег разреза на листе D_1 . То же самое нужно сделать с верхним берегом разреза на D_0 и нижним на D_1 , которые отображаются на нижнюю полуокружность. Полученная двулистная поверхность и есть риманова поверхность функции $w = z + \sqrt{z^2 - 1}$. Эта функция имеет точки ветвления второго порядка над точками $z = \pm 1$. Данную поверхность можно получить из поверхности $w = \sqrt{z}$ дополнительными дробно-линейными отображениями.

Действительно, представим функцию Жуковского $z = \frac{1}{2} \left(w + \frac{1}{w} \right)$ в

виде $\frac{z-1}{z+1} = \left(\frac{w-1}{w+1} \right)^2$. Дробно-линейные отображения $z = \frac{\xi+1}{\xi-1}$ и

$\omega = \frac{w+1}{w-1}$ переводят функцию $w = z + \sqrt{z^2 - 1}$ в функцию $\omega = \sqrt{\xi}$.

5. ПОСТРОЕНИЕ РИМАНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ МЕТОДОМ АНАЛИТИЧЕСКОГО ПРОДОЛЖЕНИЯ

Ранее были рассмотрены римановы поверхности аналитических функций, построенные элементарным методом. Это означает, что строились эти поверхности из «наиболее крупных кусков» однолиственности данных функций и склеивались они вдоль их границ. Напомним этот метод на примере.

Пример 5.1. Применим элементарный метод для построения римановой поверхности функции $w = \operatorname{Ln} z$, которая является обратной к функции $z = e^w$. Введем счетное число полос

$$G_n = \{w \in \mathbb{C}_w : 2\pi n < \operatorname{Im} w < 2\pi(n+1)\}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

которые отображаются функцией $z = e^w$ на комплексную плоскость $D = \mathbb{C}_z \setminus [0, +\infty)$ с разрезом по положительной вещественной полуоси. В этом смысле области G_n в \mathbb{C}_w и $D = \mathbb{C}_z \setminus [0, +\infty)$ понимаются как «наиболее крупные куски» однолиственности данных функций. Возьмем стопу одинаковых листов вида $\mathbb{C}_z \setminus [0, +\infty)$ и первый лист обозначим через D_0 . Тогда функция $z = e^w$ отображает

$$e^w : G_n \rightarrow D_0, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Взаимная однозначность отображения $z = e^w$ достигается следующим образом: пронумеруем остальные одинаковые экземпляры области D_0 через D_n и нижний берег разреза каждого листа D_n склеиваем с верхним берегом D_{n+1} , получаем взаимно однозначное отображение

$$e^w : G_n \rightarrow D_n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Значит, обратная функция $w = \operatorname{Ln} z$ осуществляет отображение

$$\operatorname{Ln} z : D_n \rightarrow G_n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Так элементарным методом строится риманова поверхность функции $w = \operatorname{Ln} z$. Такое соответствие и выделяет однозначные

ветви $w = \operatorname{Ln} z = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi n)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, где $0 < \arg z < 2\pi$.

Напомним некоторые определения.

Определение 5.1. Пусть D – выпуклая область и $f(z)$ – функция, аналитическая и однозначная в области D . Эта совокупность функции и области называется *элементом аналитической функции* (коротко, элементом) и обозначается символом $\{D; f(z)\}$.

Определение 5.2. Два элемента $\{D_1; f_1(z)\}$ и $\{D_2; f_2(z)\}$ считаются тождественными тогда и только тогда, когда D_1 и D_2 совпадают и $f_1(z) = f_2(z)$ во всех точках области.

Определение 5.3. Два элемента $\{D_1; f_1(z)\}$ и $\{D_2; f_2(z)\}$ называются *непосредственными аналитическими продолжениями* один другого, если $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$ и $f_1(z) = f_2(z) \quad \forall z \in D_1 \cap D_2$.

Элементы $\{D_1; f_1(z)\}, \{D_2; f_2(z)\}, \dots, \{D_n; f_n(z)\}$ составляют цепь аналитических продолжений (непосредственных), если каждый последующий элемент $\{D_{j+1}; f_{j+1}(z)\}$ является непосредственным продолжением предыдущего. Цепь соединяет начальный элемент $\{D_1; f_1(z)\}$ с конечным $\{D_n; f_n(z)\}$.

Определение 5.4. Множество M элементов $\{D; f(z)\}$ (конечное или бесконечное) называется *связным*, если каждые два элемента этого множества $\{D_0; f(z)\}$ и $\{D^*; f^*(z)\}$ являются аналитическими продолжениями один другого, и если это множество вместе с каждой парой своих элементов содержит также и элементы некоторой цепи, связывающей элементы пары.

Далее предлагается построение римановой поверхности функции методом аналитического продолжения. Риману принадлежит идея такого обобщения понятия области, что любая многозначная аналитическая функция $f(z)$ комплексного переменного z становится однозначной, если ее рассматривать как функцию точки соответствующей обобщенной области.

Пусть M – связное множество элементов $\{D; f(z)\}$. Построим область $\tilde{D} = \bigcup D$. Будем рассматривать точку z , принадлежащую областям D_0 и D^* элементов $\{D_0; f_0(z)\}$ и $\{D^*; f^*(z)\}$, как одну и

ту же точку тогда и только тогда, когда эти элементы являются непосредственными аналитическими продолжениями один другого (т.е. когда $f_0(z) = f^*(z) \quad \forall z \in D_0 \cap D^*$).

Проиллюстрируем этот процесс следующим образом. Представим себе, что для каждого элемента $\{D; f(z)\}$ изготовлена модель области D в виде куска бумаги соответствующих очертаний. Процесс объединения областей $\{D\}$ представим как склеивание этих кусков вдоль тех их частей, точки которых отождествляются. Иными словами, куски, изображающие области D_0 и D^* элементов $\{D_0, f_0(z)\}$ и $\{D^*, f^*(z)\}$, склеиваются друг с другом только в случае, когда одновременно выполнены два условия: 1) $D_0 \cap D^* \neq \emptyset$; 2) $f_0(z) = f^*(z)$ во всех точках $z \in D_0 \cap D^*$. Предполагая, что произведены все возможные склеивания областей $\{D\}$ по этому закону, получим обобщенную область R , вообще говоря, многолистную, расположенную над областью \tilde{D} .

Пример 5.2. Рассмотрим построение римановой поверхности методом аналитического продолжения для $w = \text{Ln } z$. Ранее уже показывалось построение этой поверхности элементарным методом (см. пример 5.1).

Отметим, что объединение всех полуплоскостей

$$D_j = \left\{ j \frac{\pi}{2} < \varphi < (j+2) \frac{\pi}{2} \right\}, \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

представляет всю плоскость \mathbb{C}_z за исключением точек $z=0$ и $z=\infty$. Рассматриваемые элементы $\left\{ j \frac{\pi}{2} < \varphi < (j+2) \frac{\pi}{2}, \ln|z| + i\varphi \right\}$ определяют в этой области бесконечнозначную аналитическую функцию $w = \text{Ln } z$. В каждой из четырех полуплоскостей

$$j_0 \frac{\pi}{2} < \varphi < (j_0 + 2) \frac{\pi}{2} \quad (j_0 = 0, 1, 2, 3)$$

(с такой полуплоскостью совпадает бесконечное множество полуплоскостей D_j , для которых $j = 4n + j_0$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) функция

$w = \text{Ln } z$ имеет бесконечное множество однозначных ветвей, выражаемых формулами

$$f_{4n+j_0}(z) = \ln|z| + i\varphi + i \cdot 2\pi n.$$

Рассмотрим указанные области

$$D_j = \left\{ j \frac{\pi}{2} < \varphi < (j+2) \frac{\pi}{2} \right\}, \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad z = \rho e^{i\varphi},$$

для всех целых чисел j , дающих при делении на четыре один и тот же остаток j_0 . Эти области представляют одну и ту же полуплоскость

$$j_0 \frac{\pi}{2} < \varphi < (j_0 + 2) \frac{\pi}{2},$$

ограниченную соответствующей координатной осью. Представим эти области в виде бесконечного множества различных бумажных листов, сложенных в одну стопу над полуплоскостью D_{j_0} . Так как j_0 принимает только значения 0, 1, 2, 3, то получаем четыре стопы. Никакие два листа D_{4k+j_0} и D_{4l+j_0} ($k \neq l$) одной и той же стопы не должны непосредственно склеиваться друг с другом, так как в их пересечении (совпадающем с полуплоскостью D_{j_0})

$$f_{4k+j_0}(z) = \ln|z| + i(\varphi + 2k\pi);$$

$$f_{4l+j_0}(z) = \ln|z| + i(\varphi + 2l\pi), \quad j_0 \frac{\pi}{2} < \varphi < (j_0 + 2) \frac{\pi}{2}, \quad k \neq l.$$

Лишь листы с индексами, различающимися на единицу: D_j и D_{j+1} (они принадлежат двум различным стопам), склеиваются вдоль общей части, расположенной над координатной четвертью

$$(j+1) \frac{\pi}{2} < \varphi < (j+2) \frac{\pi}{2}.$$

В самом деле, в этой общей части значения функций

$$f_j(z) = \ln|z| + i\varphi \quad \left(j \frac{\pi}{2} < \varphi < (j+2) \frac{\pi}{2} \right)$$

и

$$f_{j+1}(z) = \ln|z| + i\varphi \left((j+1)\frac{\pi}{2} < \varphi < (j+3)\frac{\pi}{2} \right)$$

совпадают.

В результате всех склеиваний получается бесконечнолистная область R , расположенная над соответствующей областью \tilde{D} (\tilde{D} – плоскость z с двумя исключенными точками $z=0$ и $z=\infty$, которые являются логарифмическими точками ветвления).

Очевидно, что для определения точки в области R недостаточно точно задать число z – аффикс этой точки. Так, в последнем примере 5.2 один и тот же аффикс $1+i$ имеет бесконечное множество различных точек R , расположенных на частях R , получающихся путем склеивания D_{-1} с D_0 , D_3 с D_4 , D_7 с D_8 , ..., вообще D_{4k+3} с D_{4k+4} ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

В общем случае для определения точки $p \in R$ нужно указать вместе с аффиксом z также и такой определенный элемент $\{D^*; f^*(z)\}$, что $z \in D^*$. Тогда получим однозначно определенное значение функции в этой точке $f(p) = f^*(z)$.

Итак, в обобщенной области R , построенной указанным способом, заданное связное множество элементов $M: \{D; f(z)\}$ определяет однозначную функцию точки. Эта функция рассматривается как аналитическая в области R . Чтобы убедиться, что понятие аналитичности непосредственно переносится на функции, определенные в R , достаточно заметить: задание точки $p^* \in R$ предполагает задание аффикса z^* этой точки и, кроме того, выделение определенного элемента $\{D^*; f^*(z)\}$ из M , для которого $z^* \in D^*$. Если это сделано, то сразу же выделяется и такая часть R , расположенная над областью D^* (говорят также, что эта часть проектируется в область D^*), в которой каждую точку p можно полностью характеризовать ее аффиксом $z \in G^*$ (проекцией точки p). Обобщенная область R , описанная ранее, и является римановой поверхностью аналитической функции $f(z)$ (определяемой данным связным множеством элементов M).

Проиллюстрируем особенности римановых поверхностей для функции $w = \text{Ln } z$, построенных элементарным методом и методом аналитического продолжения.

Ранее рассматривалось построение данной поверхности, выполненной с помощью элементарного метода. Поверхность состояла из листов вида $\mathbb{C}_z \setminus [0, +\infty)$, построенных по правилу: нижний берег разреза одного листа склеивался с верхним берегом следующего экземпляра такого же листа. Таким способом функция $z = e^w$ отображает взаимно однозначно полосу $0 < \text{Im } w < 2\pi$ на лист $\mathbb{C}_z \setminus [0, +\infty) = D_0$. Это определяет выделение ветви $w = \text{Ln } z$ по правилу

$$w = \text{Ln } z = \ln |z| + i \arg z, \quad 0 < \arg z < 2\pi.$$

Аналогично,

$$w = \text{Ln } z = \ln |z| + i (\arg z + 2\pi n)$$

для листа D_n , $n = \pm 1, \pm 2, \dots$.

Наглядно сущность построения римановой поверхности с помощью элементарного метода можно продемонстрировать так: пусть точка z описывает, например, окружность радиусом R с центром в точке O , начиная от верхнего берега разреза до нижнего берега на листе (считаем, что точка z лежит на верхнем берегу разреза вдоль положительной действительной полуоси, т.е. $\arg z = \varphi = 0$). Достигая нижнего берега разреза функция $w = \text{Ln } z$ принимает значение $w = \ln R + i \cdot 2\pi$ ($w = u + iv$). Пусть теперь точка z продолжает движение и выходит на второй круг. Поскольку ранее были проведены склеивания соответствующего нижнего берега с верхним следующего листа, то считают, что точка z будет теперь двигаться по такой же окружности на следующем листе D_1 , а значение функции будет $w = \ln R + i \cdot 4\pi$. Таким образом, смена ветви функции $w = \text{Ln } z$ происходит сразу на границе (на разрезе $[0, +\infty)$ в комплексной плоскости \mathbb{C}_z).

При построении римановой поверхности методом аналитического продолжения (из полуплоскостей

$$D_j = \left\{ j \frac{\pi}{2} < \varphi < (j+2) \frac{\pi}{2} \right\}, \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad z = \rho e^{i\varphi},$$

движение точки z по окружности радиусом R с центром в точке O будет происходить от границы полуплоскости D_0 (от точки $z = R$ по окружности до точки $z = R e^{i\frac{\pi}{2}} = iR$), т.е. движение по первому листу, и значение $w = \operatorname{Ln} z$ принадлежит ветви $w = \operatorname{Ln} z = \ln R + i\varphi$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$.

При движении точки z далее по окружности она попадает в зону $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$ сразу двух ветвей функции $w = \operatorname{Ln} z$, и эта часть (угол $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$) первого листа целиком склеивается с такой же областью следующего листа вида $D_j = \left\{ j \frac{\pi}{2} < \varphi < (j+2) \frac{\pi}{2} \right\}$ при $j=1$. В общей области $D_0 \cap D_1$ значения ветвей $w = \operatorname{Ln} z$ естественно совпадают, т.е. смена ветви происходит не на границе области, а в области пересечения $D_0 \cap D_1$, и т.д.

В этом и состоит отличие в построении римановой поверхности для одной и той же функции $w = \operatorname{Ln} z$ элементарным методом и методом аналитического продолжения.

6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕОСОБОЙ РИМАНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Для геометрического представления многозначных функций комплексного переменного $w = w(z)$ неудобно считать z точкой комплексной плоскости. Рассмотрим, например, $w = \sqrt{z}$. На вещественной оси (при $x > 0$) можно выделить две ветви этой функции

$$w_1 = +\sqrt{z} \quad \text{и} \quad w_2 = -\sqrt{z},$$

где $z = x + io$, $x > 0$. На комплексной плоскости это уже невозможно: если $z = re^{i\varphi}$, то два значения корня из z , имеющие вид

$$w_1 = \sqrt{r} e^{\frac{i\varphi}{2}}, w_2 = -\sqrt{r} e^{\frac{i\varphi}{2}} = \sqrt{r} e^{\frac{i(\varphi+2\pi)}{2}},$$

переходят друг в друга при обходе по контуру, охватывающему точку $z = 0$. Можно получить однозначную ветвь корня как функции от z , суживая область определения этой функции, например проводя разрез от нуля до бесконечности.

Другой способ (так называемый общий метод, который рассматривает риманову поверхность как комплексное многообразие) объясним сначала на примере той же функции $w = \sqrt{z}$. Рассмотрим в \mathbb{C}^2 с комплексными координатами (z, w) график двузначной функции, т.е. точки вида $(z, +\sqrt{z})$, $(z, -\sqrt{z})$. Две ветви этого графика пересекаются в точке $(0, 0)$ – точка ветвления этой алгебраической функции. Заметим, что этот график может быть задан в \mathbb{C}^2 одним (комплексным) уравнением

$$F(z, w) = w^2 - z = 0.$$

Функция $w = \sqrt{z}$ является однозначной функцией от точки графика, определяемого последним уравнением, она имеет вид проекции $(z, w) \rightarrow w'$.

Определение 6.1. Пусть $F(z, w) = \sum_{j=1}^n p_j(z)w^j$ – многочлен от переменных z и w . Он определяет (n -значную) алгебраическую функцию $w = w(z)$. Риманова поверхность σ этой функции задается в \mathbb{C}^2 уравнением $F(z, w) = 0$.

Как и в разобранным примере, многозначная функция $w = w(z)$ превращается в однозначную функцию $w = w(P)$ от точки P римановой поверхности σ : если $P(z, w) \in \sigma$, то $w(P) = w$ (проекция графика на w).

Замечание 6.1. Данное определение римановой поверхности является упрощенным и расходится с общепринятым. Такое расхождение может возникнуть, если на поверхности $F(z, w) = 0$ имеются особые точки.

Замечание 6.2. Функция $w = w(P)$ является не только однозначной, но и аналитической (голоморфной) функцией на римановой поверхности.

С «комплексной точки зрения» риманова поверхность является (комплексной) алгебраической кривой.

С вещественной точки зрения – это двумерная поверхность в $\mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4$, заданная двумя уравнениями:

$$\sigma : \begin{cases} \operatorname{Re} F = 0; \\ \operatorname{Im} F = 0. \end{cases}$$

В теории функций комплексного переменного встречаются и более сложные (неалгебраические) римановы поверхности, где $F(z, w)$ не есть многочлен. Например, уравнение $e^w - z = 0$ задает риманову поверхность логарифма. Такие поверхности рассматриваться не будут.

Обратимся теперь к важному свойству *неособенности* точек римановой поверхности.

Определение 6.2. Точка $P_0(z_0, w_0) \in \sigma$ римановой поверхности

$$\sigma = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : F(z, w) = 0\}$$

называется *неособой*, если в ней отличен от нуля комплексный вектор градиента:

$$\operatorname{grad}_{\mathbb{C}} F|_{P_0} = \left\{ \frac{\partial F}{\partial z}, \frac{\partial F}{\partial w} \right\} \Big|_{P_0}.$$

Риманова поверхность σ называется неособой, если все ее точки являются неособыми.

Комплексная теорема о неявной функции. Пусть $F(z, w)$ – многочлен, т.е. $F(z, w) = \sum_{j=0}^n a_j(z)w^j$, $a_0 = 1$, $a_j(z)$ – многочлен, $j = 1, 2, \dots, n$, и пусть точка $P_0(z_0, w_0)$ такова, что

$$F(P_0) = F(z_0, w_0) = 0; \quad \frac{\partial F}{\partial w} \Big|_{P_0} \neq 0.$$

Тогда существует такая единственная функция $w = w(z)$, что $F(z, w(z)) \equiv 0$ в окрестности $U(z_0)$ точки z_0 и $w(z_0) = w_0$. Эта функция является аналитической функцией от z в некоторой окрестности $U(z_0) \subset \mathbb{C}$.

Замечание 6.3. Нетрудно проверить, что условие неособенности обеспечивает неприводимость алгебраической кривой $F(z, w) = 0$, т.е. невозможность разложить ее уравнение на нетривиальные множители $F(z, w) = F_1(z, w) \cdot F_2(z, w)$, где $F_1(z, w)$ и $F_2(z, w)$ – многочлены положительной степени.

Пусть $P_0(z_0, w_0)$ – неособая точка поверхности σ и пусть в этой точке производная $\frac{\partial F}{\partial w}$ отлична от нуля. Тогда согласно теореме о неявной функции в окрестности точки P_0 поверхность σ допускает параметрическое представление вида

$$\sigma: \begin{cases} z = z; \\ w = w(z), \end{cases} \quad z \in U(z_0) \quad \text{и} \quad w(z_0) = w_0,$$

причем функция $w(z)$ голоморфна.

Поэтому z в этом случае называется комплексной *локальной координатой*, или *локальным параметром* на σ в окрестности точки $P_0(z_0, w_0) \in \sigma$.

Аналогично, если в точке $P_0(z_0, w_0)$ отлична от нуля производная $\frac{\partial F}{\partial z}$, то в качестве локального параметра можно взять w , и поверхность σ в окрестности изучаемой точки P_0 может быть представлена в виде

$$\sigma: \begin{cases} z = z(w); \\ w = w, \end{cases} \quad w \in V(w_0), \quad z(w_0) = z_0.$$

Для неособой римановой поверхности σ в тех точках поверхности σ , где одновременно и $\frac{\partial F}{\partial w} \neq 0$, и $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$, можно пользоваться обо-

ими представлениями римановой поверхности. Возникающие при этом функции перехода $w = w(z)$ и обратно $z = z(w)$ голоморфны.

Из проведенных рассуждений следует, что неособые римановы поверхности являются комплексными многообразиями (комплексной размерности 1).

Выбор в качестве локального параметра z или w не всегда является самым удобным. Есть и другие способы выбора локального параметра τ так, что

$$\sigma: \begin{cases} z = z(\tau); \\ w = w(\tau), \end{cases} \quad \tau \in \Omega,$$

где $z(\tau)$ и $w(\tau)$ – голоморфные функции от τ , причем

$$\left\{ \frac{dz}{d\tau}, \frac{dw}{d\tau} \right\} \neq \bar{0}.$$

Риманова поверхность σ , заданная в \mathbb{C}^2 уравнением

$$F(z, w) = w^n + a_1(z)w^{n-1} + \dots + a_n(z) = 0$$

(где $a_1(z), \dots, a_n(z)$ – многочлены), расположена на z -плоскости n -листно. Точный смысл этого утверждения таков: пусть $\pi: \sigma \rightarrow \mathbb{C}$ – проекция римановой поверхности σ на z -плоскость, задаваемая формулой

$$\forall (z, w) \in \sigma: \pi(z, w) = z.$$

Тогда для почти всех z полный прообраз $\pi^{-1}(z)$ состоит из n различных точек поверхности σ :

$$(z, w_1(z)), \dots, (z, w_n(z)),$$

где $w_1(z), \dots, w_n(z)$ – n корней уравнения

$$F(z, w) = w^n + a_1(z)w^{n-1} + \dots + a_n(z) = 0$$

при данном z . При некоторых значениях z некоторые из точек образа могут сливаться; образуются *точки ветвления*.

Точки ветвления на поверхности σ могут быть найдены из условия обращения в нуль производной $\frac{\partial F}{\partial w}$.

Точка ветвления удовлетворяет системе уравнений

$$\begin{cases} F(z, w) = 0; \\ \frac{\partial F(z, w)}{\partial w} = 0. \end{cases}$$

В окрестности тех точек римановой поверхности, где $\frac{\partial F}{\partial w} \neq 0$, проекция $\pi: \sigma \rightarrow \mathbb{C}$ локально изоморфна.

Проекции точек ветвления римановой поверхности σ на z -плоскость ищутся, поэтому, как нули дискриминанта $R(z)$ многочлена $F(z, w)$:

$$R(z) = \prod_{i \neq j} (w_i(z) - w_j(z)) -$$

наибольший общий делитель многочленов $F(z, w)$ и $\frac{\partial F(z, w)}{\partial w}$.

В неособом случае на поверхности σ имеется, таким образом, лишь конечное число точек ветвления.

Пример 6.1. Пусть $\sigma: w^2 = P_n(z)$, где $P_n(z)$ – многочлен степени n .

Поверхность σ является гиперэллиптической. Она двулистно расположена над z -плоскостью. Здесь

$$F(z, w) = w^2 - P_n(z),$$

$$\text{grag}_{\mathbb{C}} F = \{-P'_n(z), 2w\}.$$

Точка (z_0, w_0) является особой, если

$$\omega_0 = 0, \quad P'_n(z_0) = 0,$$

т.е. (z_0, w_0) удовлетворяет системе уравнений

$$\begin{cases} P_n(z_0) = 0; \\ P'_n(z_0) = 0, \end{cases}$$

где z_0 – кратный корень многочлена $P_n(z)$.

Итак, условие *неособенности* римановой поверхности σ : $w^2 = P_n(z)$ есть условие отсутствия кратных корней у многочлена $P_n(z)$:

$$P_n(z) = \prod_{i=1}^n (z - z_i), \quad z_i \neq z_j \quad \text{при} \quad i \neq j.$$

Найдем точки ветвления этой неособой римановой поверхности. Для их определения решаем систему уравнений

$$\begin{cases} \omega^2 = P_n(z); \\ w = 0. \end{cases}$$

Получаем n точек ветвления $P_i(z_i, 0) \in \sigma$, $i = 1, 2, \dots, n$.

В окрестности любой точки поверхности σ , отличной от точки ветвления, в качестве локального параметра естественно взять z , и $w = \sqrt{P_n(z)}$ – голоморфная функция.

В окрестности точки ветвления P_j в качестве локального параметра удобно взять

$$\tau = \sqrt{z - z_j}.$$

Тогда для точек римановой поверхности σ получим локальное параметрическое представление

$$z = z_j + \tau^2, \quad w = \tau \sqrt{\prod_{j \neq i} (\tau^2 - z_i - z_j)},$$

где радикал есть однозначная голоморфная функция для достаточно малых τ (подкоренное выражение не обращается в нуль), причем

$$\frac{dw}{d\tau} \neq 0 \quad \text{при} \quad \tau = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Пусть τ – локальный параметр в окрестности точки ветвления $P_0(z_0, w_0)$ поверхности σ . Будем считать, что $z(0) = z_0$, $w(0) = w_0$. Тогда

$$\begin{cases} z = z_0 + a\tau^s + O(\tau^{s+1}); \\ w = w_0 + b\tau^q + O(\tau^{q+1}), \end{cases} \quad \tau \rightarrow 0,$$

где a и b – отличные от нуля коэффициенты. Поскольку в окрестности точки ветвления P_0 в качестве локального параметра можно взять w , то $q = 1$. Получаем вид поверхности σ в окрестности точки ветвления:

$$\sigma: \begin{cases} z = z_0 + a\tau^s + O(\tau^{s+1}); \\ w = w_0 + b\tau + O(\tau^2), \end{cases} \quad \tau \rightarrow 0,$$

причем $s > 1$.

7. РИМАНОВЫ ПОВЕРХНОСТИ КАК ДВУМЕРНЫЕ ВЕЩЕСТВЕННЫЕ МНОГООБРАЗИЯ. КОМПАКТИФИКАЦИЯ РИМАНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ. РОД РИМАНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

В разд. 6 было отмечено, что произвольная риманова поверхность с вещественной точки зрения является двумерной поверхностью (двумерным многообразием). Что можно сказать о топологии этой поверхности?

Задача 7.1. Доказать, что эта поверхность связна.

Утверждение 7.1. Риманова поверхность σ ориентирована.

Доказательство. Пусть $z = x + iy$, $w = u + iv$. Если $z = x + iy$ – локальный параметр в некоторой области U на σ , то x, y – вещественные координаты в U .

Второй локальный параметр $w = u + iv$ связан с первым $z = x + iy$ голоморфной функцией $w = w(z)$, $\frac{dw}{dz} \neq 0$, определяющей гладкую замену вещественных координат

$$\begin{cases} u = u(x, y); \\ v = v(x, y). \end{cases}$$

Якобиан этой замены

$$\det J(u(x, y), v(x, y)) = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \left| \frac{dw}{dz} \right|^2 > 0 \quad \text{на } U.$$

Что и означает ориентируемость.

Пока сделанные наблюдения о связности и ориентированности римановых поверхностей не дают возможность классифицировать их по топологическому типу. Не хватает компактности.

Рассмотрим процедуру компактификации римановой поверхности σ , т.е. добавления к ней нескольких точек, превращающих ее в компактное комплексное многообразие, а значит, в замкнутую ориентированную поверхность.

1. Комплексная z -плоскость \mathbb{C} компактифицируется добавлением к \mathbb{C} одной бесконечно удаленной точки ∞ . В качестве локального параметра в окрестности ∞ нужно взять $\zeta = \frac{1}{z}$. В общей части действия локальных параметров z и ζ , где $z \neq 0$ и $\zeta \neq 0$, возникают голоморфные функции перехода

$$z(\zeta) = \frac{1}{\zeta}, \quad \zeta(z) = \frac{1}{z}.$$

Получаем поверхность $\bar{\mathbb{C}}$ с топологией сферы («сферу Римана»). Топологическая эквивалентность со стандартной сферой дается стереографической проекцией, где одни из полюсов сферы переходит в точку ∞ .

2. Другое описание $\bar{\mathbb{C}}$ – это комплексная проективная прямая

$$\mathbb{C}P^1 = \{(z_1 : z_2) : |z_1| + |z_2| \neq 0\}, \quad (z_1 : z_2) \sim (\lambda z_1 : \lambda z_2), \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad \lambda \neq 0.$$

Эквивалентность $\mathbb{C}P^1 \xrightarrow{\approx} \bar{\mathbb{C}}$ устанавливается так

$$(z_1 : z_2) \rightarrow z = \frac{z_1}{z_2}.$$

Аффинная часть $\mathbb{C}P^1 = \{z_2 \neq 0\}$ – переходит в $\bar{\mathbb{C}}$, а бесконечно-удаленная точка $(1:0)$ – в ∞ .

Чтобы компактифицировать любую (алгебраическую) риманову поверхность $\sigma = \{(z, w) : F(z, w) = 0\}$, вложим ее в $\mathbb{C}P^2$.

$\mathbb{C}P^2$ – это (комплексная) проективная плоскость: совокупность ненулевых комплексных векторов $(\xi : \eta : \zeta)$, определенных с точностью до умножения на ненулевой комплексный множитель

$$(\xi, \eta, \zeta) \sim (\lambda\xi : \lambda\eta : \lambda\zeta), \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad \lambda \neq 0.$$

Это комплексное компактное многообразие. Область в $\mathbb{C}P^2$, заданная условием $\zeta \neq 0$, называется аффинной частью $\mathbb{C}P^2$.

Отображение

$$(\xi : \eta : \zeta) \rightarrow \left(z = \frac{\xi}{\zeta}, w = \frac{\eta}{\zeta} \right)$$

и обратное

$$(z, w) \rightarrow (z : w : 1)$$

устанавливают изоморфизм аффинной части $\mathbb{C}P^2$ и \mathbb{C}^2 . Вся проективная плоскость получается из аффинной части \mathbb{C}^2 добавлением бесконечно удаленной части вида

$$(\xi : \eta : 0) \sim \mathbb{C}P^1 \sim S^2.$$

Вложение σ в $\mathbb{C}P^2$ определяется следующим образом.

Пусть

$$F\left(\frac{\xi}{\zeta}, \frac{\eta}{\zeta}\right) = \frac{Q(\xi, \eta, \zeta)}{\zeta^N},$$

где $Q(\xi, \eta, \zeta)$ – однородный многочлен от ξ, η, ζ N -й степени. При этом предполагается, что дробь, стоящая в правой части, несократимая.

Зададим в $\mathbb{C}P^2$ комплексную кривую $\hat{\sigma}$ (двумерную поверхность) однородным уравнением

$$Q(\xi, \eta, \zeta) = 0.$$

Поверхность $\hat{\sigma}$ компактна и является поэтому искомой компактификацией поверхности σ .

Задача 7.2. Доказать, что кривая $Q(\xi, \eta, \zeta) = 0$ неособа в $\mathbb{C}P^2$ тогда и только тогда, когда

$$\text{Rang} \begin{pmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ \frac{\partial Q}{\partial \xi} & \frac{\partial Q}{\partial \eta} & \frac{\partial Q}{\partial \zeta} \end{pmatrix} = 2.$$

8. ПРИМЕРЫ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ РИМАНОВЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Пример 8.1. Пусть риманова поверхность задается уравнением $F(z, w) = 0$, где $F(z, w) = w^2 - z$, т.е. $\sigma: w^2 = z$. Точка $P_0(0, 0)$ – точка ветвления поверхности σ . Локальным параметром в точке ветвления P_0 является $\tau = \sqrt{z}$, т.е. в некоторой окрестности $U(P_0) \subset \mathbb{C}^2$ σ задается параметрически

$$\sigma: \begin{cases} z = \tau^2; \\ w = \tau. \end{cases}$$

Компактификация римановой поверхности σ имеет вид

$$\hat{\sigma}: \eta^2 = \xi\zeta.$$

Введем координаты u, v в окрестности несобственной прямой $\mathbb{C}P^1$ (с $\xi \neq 0$), полагая

$$\begin{cases} u = \frac{\eta}{\xi} = \frac{w}{z}; \\ v = \frac{\zeta}{\xi} = \frac{1}{z}, \end{cases}$$

причем несобственная прямая имеет вид $v = 0$. В этих координатах кривая $\hat{\sigma}$ записывается (локально) в виде $u^2 = v$. Ее единственная бесконечно удаленная точка – это $(0, 0)$. Локальным параметром в окрестности этой точки служит $u = \frac{w}{z} = \sqrt{v} = \frac{1}{\sqrt{z}}$. Другими словами, в окрестности бесконечно удаленной точки

$$\hat{\sigma}: \begin{cases} z = \frac{1}{u^2}; \\ w = \frac{1}{u}, \end{cases} \quad u \rightarrow 0.$$

Пример 8.2. Пусть

$$\sigma: w^2 = z^2 - a^2.$$

Точки ветвления $P_1(-a, 0)$ и $P_2(a, 0)$, соответствующие локальные параметры $\tau_- = \sqrt{z-a}$ и $\tau_+ = \sqrt{z+a}$. Компактификация имеет вид

$$\hat{\sigma}: \eta^2 = \xi^2 - a^2 \zeta^2.$$

Делая замену

$$\begin{cases} u = \frac{\eta}{\xi} = \frac{w}{z}; \\ v = \frac{\zeta}{\xi} = \frac{1}{z}, \end{cases}$$

получаем вид кривой $\hat{\sigma}$ в окрестности несобственной прямой: $u^2 = 1 - a^2 v^2$. При $v = 0$ получаем $u = \pm 1$. Следовательно, на поверхности $\hat{\sigma}$ есть две бесконечно удаленные точки $P_-(1, -1, 0)$ и $P_+(1, 1, 0)$. В качестве локального параметра в окрестности каждой из этих точек можно взять $v = \frac{1}{z}$. Вид поверхности $\hat{\sigma}$ в окрестности точек P_- , P_+ таков:

$$\hat{\sigma}: \begin{cases} z = \frac{1}{v}; \\ w = \mp \frac{1}{v} \sqrt{1 - a^2 v^2}, \end{cases}$$

где $\sqrt{1 - a^2 v^2}$ – однозначная голоморфная при малых v функция, причем ветвь корня выбирается так, чтобы при $v = 0$ он обратился в единицу.

Пример 8.3. Пусть риманова поверхность

$$\sigma: w^2 = \rho_{2n+1}(z) = \prod_{j=1}^{2n+1} (z - z_j).$$

Этот пример аналогичен примеру 8.1. В данном случае имеется одна бесконечно удаленная точка; в качестве локального параметра в ее окрестности можно взять u . Поверхность $\hat{\sigma}$ в окрестности бесконечно удаленной точки имеет вид

$$\hat{\sigma}: \begin{cases} z = \frac{1}{u^2}; \\ w = \frac{1}{u^{2n+1}} \sqrt{\prod_{j=1}^{2n+1} (1 - z_j u)}, \end{cases}$$

где корень является однозначной голоморфной функцией от u при малых u , обращающейся в единицу при $u = 0$.

Пример 8.4. Пусть

$$\sigma: w^2 = \rho_{2n+2}(z) = \prod_{j=1}^{2n+2} (z - z_j).$$

Этот пример аналогичен примеру 8.2. Здесь у $\hat{\sigma}$ две бесконечно удаленные точки P_- , P_+ , в окрестностях которых можно взять $v = \frac{1}{z}$ за локальный параметр. Вид компактифицируемой поверхности $\hat{\sigma}$ в окрестности этих точек таков:

$$\hat{\sigma}: \begin{cases} z = \frac{1}{v}; \\ w = \pm \frac{1}{v^{n+1}} \sqrt{\prod_{j=1}^{2n+2} (1 - z_j v)}; \end{cases}$$

корень является однозначной голоморфной функцией от v при малых v , обращающейся в единицу при $v = 0$.

Хорошо известно, что связные компактные ориентированные двумерные поверхности поддаются простой топологической классификации (рис. 8.1). Все они есть сферы с g ручками, $g \geq 0$. Число ручек g называется *родом* поверхности.

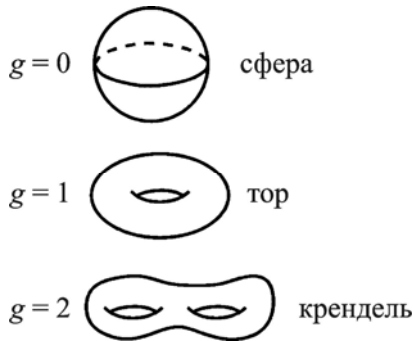


Рис. 8.1

Операция приклейки ручки изображена на рис. 8.2.

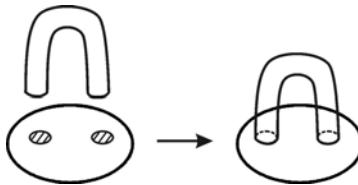


Рис. 8.2

9. ВЫЧИСЛЕНИЕ РОДА РИМАНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Род римановой поверхности является ее важнейшей характеристикой.

Вычислим род поверхностей из примеров 8.1–8.4.

1. Начнем с примера 8.2. Пусть $\sigma: w^2 = z^2 - a^2$.

Выкинем из компактифицированной z -плоскости $\bar{\mathbb{C}}$ отрезок $[-a, a]$ с концами в точках ветвления. Вне этого отрезка можно выделить две ветви

$$w_{\pm} = \pm \sqrt{z^2 - a^2}$$

двузначной функции $w(z) = \sqrt{z^2 - a^2}$. Иначе говоря, полный прообраз $\pi^{-1}(\bar{\mathbb{C}} \setminus [-a, a])$ на σ распадается на два куска, на каждом из которых отображение π является изоморфным. При переходе с одного берега разреза $[-a, a]$ на другой ветви $w_+(z)$ и $w_-(z)$ переставляются местами. Поэтому компактифицированная поверхность $\hat{\sigma}$ склеивается из двух одинаковых экземпляров сфер с разрезами по правилу, указанному на рис. 9.1.

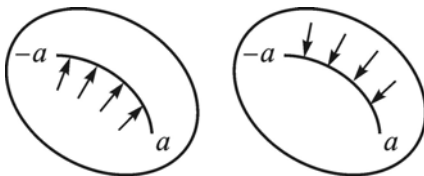


Рис. 9.1

После склейки снова получится сфера, т.е. род поверхности g равен нулю.

2. Пример 8.1. Пусть $\sigma: w^2 = z$.

Этот пример аналогичен примеру 8.2, но разрез на компактифицированной поверхности $\hat{\sigma}$ нужно проводить между точками 0 и ∞ , т.е. бесконечно удаленную точку ∞ нужно считать точкой ветвления. Снова род поверхности равен нулю.

3. Пример 8.4. Пусть $\sigma: w^2 = \rho_{2n+2}(z) = \prod_{j=1}^{2n+2} (z - z_j)$.

Для вычисления рода компактифицированной поверхности $\hat{\sigma}$ нужно произвольно разбить точки ветвления на пары и провести разрезы (дуги) в $\bar{\mathbb{C}}$, соединяющие парные точки ветвления (всего $n+1$ разрез). Компактифицированная поверхность $\hat{\sigma}$ склеивается из двух идентичных экземпляров сферы с такими разрезами, где берега соответствующих разрезов склеиваются «крест-накрест» (рис. 9.2).

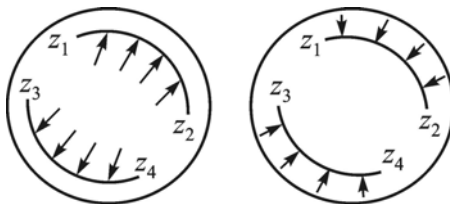


Рис. 9.2

Важное замечание. Из опыта преподавания в течение нескольких лет один из авторов утверждает, что легче всего понять и увидеть, как получается описанная сфера с ручками, можно следующим образом: нужно взять либо варежки, либо перчатки или два чайника для заварки, затем по уже существующим разрезам склеить (сшить), как указано на рисунках, и будет абсолютно понятно, как получается сфера с ручками. Можно использовать старые перчатки, разрезать концы для пальцев, а затем сшить указанным способом. Получится сфера с $g = 5$, т.е. крендель рода 5.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Боярчук А.К. Справочное пособие по высшей математике. Т. 4. Функции комплексного переменного (теория и практика). М.: Изд-во УРСС, 1997.
2. Дубровин Б.А. Римановы поверхности и нелинейные уравнения. Ч. 1. М.: Изд-во МГУ, 1986.
3. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. Методы теории гомологий. М.: Наука, 1984.
4. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973.
5. Маркушевич А.И. Краткий курс теории аналитических функций. М.: Наука, 1978.
6. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. М.: Наука, 1984.
7. Сандракова Е.В., Сумин Е.В. Дифференциальные формы на гладких многообразиях. М.: НИЯУ МИФИ, 2014.
8. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. М.: Наука, 1969.
9. Шведенко С.В. Начала анализа функций комплексного переменного. М.: МИФИ, 2008.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	3
1. Построение римановой поверхности элементарным методом	3
2. Риманова поверхность функции $w = \sqrt[n]{z}$	5
3. Риманова поверхность функции $w = \operatorname{Arcsin} z$	8
4. Построение римановой поверхности функции $w = z + \sqrt{z^2 - 1}$, обратной к функции Жуковского $z = \frac{1}{2} \left(w + \frac{1}{w} \right)$	10
5. Построение римановой поверхности методом аналитического продолжения	11
6. Определение неособой римановой поверхности.....	17
7. Римановы поверхности как двумерные вещественные многообразия. Компактификация римановой поверхности. Род римановой поверхности	24
8. Примеры алгебраических римановых поверхностей	27
9. Вычисление рода римановой поверхности.....	31
Список рекомендуемой литературы	33

А.Н. Барменков, Е.В. Сандракова,
Е.В. Сумин, В.Б. Шерстюков

**Дополнительные главы
курса ТФКП.
Римановы поверхности**

Учебное пособие

Редактор М.В. Макарова

Подписано в печать 03.09.2015. Формат 60x84 1/16
Уч.-изд. л. 2,25. Печ. л. 2,25. Тираж 60 экз.
Изд. № 011-1. Заказ № 124.

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ».
Типография НИЯУ МИФИ.
115409, Москва, Каширское ш., 31

ДЛЯ ЗАМЕТОК