Первая цифра в нумерации задач соответствует номеру семестра, вторая – номеру недели.

2.1.1. Получить выражение для намагниченности системы магнитных моментов

$$M = N\langle\mu_i\rangle = N\sum_{\mu_i=\pm1}\frac{\mu_i e^{\beta\mu_i H}}{Z} = N\mathrm{th}(\beta H)$$

из термодинамического соотношения

$$M = -\frac{\partial F}{\partial H}$$

2.1.2. Получить выражение для теплоемкости системы магнитных моментов:

$$C = N\left(\frac{H}{T}\right)^2 \mathrm{ch}^{-2}\left(\frac{H}{T}\right)$$

2.1.3. Получить выражение для восприимчивости системы магнитных моментов:

$$\chi = \beta(\langle M^2\rangle - \langle M\rangle^2)$$

2.2.1. Для одномерной бозонной модели Хаббарда

$$H = -t\sum_{\langle ij\rangle}\left(a_i^+ a_j + h.c.\right) + \frac{U}{2}\sum_i n_i(n_i - 1)$$

с периодическими граничными условиями; $t = 1$; $U = 2$; максимальное заполнение на узле $n_{max} = 3$; число узлов $m = 5$, рассчитать статистическую сумму, энергию и теплоемкость в зависимости от температуры двумя способами: 1) предварительно диагонализировав гамильтонову матрицу; 2) через след гамильтоновой матрицы в узельном базисе. Сравнить результаты.

2.2.2. Для одномерной ферромагнитной модели Изинга

$$\hat{H} = -J\sum_{\langle ij\rangle} S_i S_j + H\sum_i S_i$$

с периодическими граничными условиями; $J = 1$; $S_i = \pm1$; внешнее поле
$H = 0.1$; число узлов $m = 10$, рассчитать статистическую сумму, энергию, теплоемкость, магнитный момент и восприимчивость в зависимости от температуры двумя способами: 1) предварительно диагонализировав гамильтонову матрицу; 2) через след гамильтоновой матрицы в узельном базисе. Сравнить результаты.

2.2.3. Для одномерной бозонной модели Хаббарда

$$H = -t\sum_{\langle ij\rangle}\left(a_i^+ a_j + h.c.\right) + \frac{U}{2}\sum_i n_i(n_i - 1) - \mu\sum_i n_i$$

с периодическими граничными условиями; $t = 1$; $U = 2$; максимальное заполнение на узле $n_{max} = 2$; число узлов $m = 5$, рассчитать зависимость числа частиц в системе от химического потенциала μ. Расчет провести для температур $T = 0; 0.05; 0.1; 0.2$.

2.2.4. Для одномерной антиферромагнитной модели Изинга

$$\hat{H} = -J\sum_{\langle ij\rangle} S_i S_j + H\sum_i S_i$$

с периодическими граничными условиями; $J = -1$; $S_i = \pm\frac{1}{2}$; число узлов $m = 10$, рассчитать зависимость энергии и магнитного момента от внешнего поля H. Расчет провести для температур $T = 0.1; 0.5; 1; 2$. Построить графики зависимостей.

2.2.5. Рассчитать зависимости химического потенциала, энергии и теплоемкости идеального ферми-газа от температуры. Построить графики зависимостей. Сравнить предельные случаи с аналитическими ответами.

2.2.6. Рассчитать зависимости химического потенциала, энергии и теплоемкости идеального бозе-газа от температуры. Построить графики зависимостей. Сравнить предельные случаи с аналитическими ответами, а также сравнить величину $C(T_0)/C(T \to \infty)$ с точным ответом.

2.2.7. Рассчитать зависимости химического потенциала, энергии и теплоемкости идеального одномерного ферми-газа от температуры, предварительно получив выражение для плотности состояний. Построить графики зависимостей.

2.2.8. Рассчитать зависимости химического потенциала, энергии и теплоемкости идеального одномерного бозе-газа от температуры, предварительно получив выражение для плотности состояний. Построить графики зависимостей.

2.2.9. Рассчитать зависимости химического потенциала, энергии и теплоемкости идеального двумерного ферми-газа от температуры, предварительно получив выражение для плотности состояний. Построить графики зависимостей.

2.2.10. Рассчитать зависимости химического потенциала, энергии и теплоемкости идеального двумерного бозе-газа от температуры, предварительно получив выражение для плотности состояний. Построить графики зависимостей.

2.2.11. Получить выражение для плотности состояний для одномерного и двумерного идеального газа.

2.3.1. Реализовать алгоритм генерации случайных чисел с заданным законом распределения, используя метод фон Неймана. С его помощью сгенерировать N случайных чисел, распределенных с плотностью $p(x) \sim e^{-x^2}$ на отрезке $[0.5, 1]$. Построить гистограммы полученного распределения с шагом 0.05 для $N = 10000$ и $N = 100000$. Нормировав гистограммы, сравнить их огибающие с функцией $p(x)$.

2.3.2. Реализовать алгоритм генерации нормально распределенных случайных чисел с плотностью $p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} e^{-\frac{x^2}{2a}}$. С его помощью сгенерировать N случайных чисел, построить гистограммы полученного распределения для $N = 10000$ и $N = 100000$. Нормировав гистограммы, сравнить их огибающие с функцией $p(x)$.

2.3.3. Реализовать алгоритм генерации экспоненциально распределенных случайных чисел на интервале (a, b), используя метод обратной функции. Построить гистограммы полученного распределения для $N = 10000$ и $N = 100000$

случайных чисел. Нормировать гистограммы и сравнить их огибающие с функцией распределения. Используя полученные случайные числа ξ_i, $i = 1, \ldots, N$, рассчитать $\langle\xi\rangle$ и $\langle\xi^2\rangle$, сравнить полученные результаты с точными значениями.

2.3.4. Реализовать алгоритм генерации случайных чисел с распределением Пуассона с параметром $\mu = 5$. Построить гистограммы полученного распределения для $N = 10000$ и $N = 100000$ случайных чисел. Используя полученные случайные числа ξ_i, $i = 1, \ldots, N$, рассчитать $M(\xi)$ и $D(\xi)$, сравнить полученные результаты с точными значениями.

2.4.1. Доказать, что стохастическая матрица

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

не реализует неприводимую марковскую цепь.

2.4.2. Показать, что выражение для интенсивности переходов в алгоритме Метрополиса

$$W_{\Omega'\to\Omega} = \begin{cases} \dfrac{P(\Omega')}{P(\Omega)}, & \text{если } \dfrac{P(\Omega')}{P(\Omega)} < 1; \\ 1, & \text{если } \dfrac{P(\Omega')}{P(\Omega)} \geq 1. \end{cases}$$

удовлетворяет уравнению детального баланса

$$W_{\Omega\to\Omega'}P(\Omega) = W_{\Omega'\to\Omega}P(\Omega')$$

2.4.3. Показать, что выражение для интенсивности переходов в алгоритме Метрополиса

$$W_{\Omega'\to\Omega} = \min\left(\frac{1}{\tau}; \frac{1}{\tau}\frac{P(\Omega')}{P(\Omega)}\right)$$

удовлетворяет уравнению детального баланса

$$W_{\Omega\to\Omega'}P(\Omega) = W_{\Omega'\to\Omega}P(\Omega')$$

2.4.4. Показать, что выражение для интенсивности переходов в алгоритме тепловой ванны

$$W_{\Omega'\to\Omega} = \frac{P(\Omega')}{P(\Omega) + P(\Omega')}$$

удовлетворяет уравнению детального баланса

$$W_{\Omega\to\Omega'}P(\Omega) = W_{\Omega'\to\Omega}P(\Omega')$$

2.6.1. Исследовать одномерную ферромагнитную модель Изинга

$$\hat{H} = -\frac{1}{2}J\sum_{\langle ij\rangle} S_i^z S_j^z - H\sum_i S_i^z$$

с периодическими граничными условиями методом МК. Рассчитать среднюю энергию системы, средний магнитный момент, теплоемкость и намагниченность для систем из $N = 8, 12, 24, 48, 96$ узлов и построить их температурные зависимости для значений внешнего поля $H = 0; 0.2J; 0.5J$ для температур $T = 0 \div 5J$.

На тех же графиках построить *точные* зависимости всех величин в пределе бесконечной большой системы. Сравнить результаты. Построить графики зависимостей всех рассчитанных величин от размера системы. Аппроксимировать результаты к термодинамическому пределу и сравнить с точным решением.

2.6.2. Исследовать двумерную ферромагнитную модель Изинга

$$\widehat{H} = -\frac{1}{2}J\sum_{\langle ij\rangle} S_i^z S_j^z - H\sum_i S_i^z$$

с периодическими граничными условиями методом МК. Рассчитать среднюю энергию системы, средний магнитный момент, теплоемкость и намагниченность для систем 4×4, 8×8, 16×16 и построить их температурные зависимости для значений внешнего поля $H = 0; 0.2J; 0.5J$ для температур $T = 0 \div 5J$.

Сравнить полученные результаты с решением Онзагера и приближением среднего поля. Построить графики зависимостей всех рассчитанных величин от размера системы. Аппроксимировать результаты к термодинамическому пределу и сравнить с точным решением.

2.6.3. В условиях задачи 2.6.1 исследовать антиферромагнитную одномерную модель Изинга с максимальной проекцией спина на узле $S_{max} = 3/2$.

2.6.4. В условиях задачи 2.6.2 исследовать антиферромагнитную двумерную модель Изинга с максимальной проекцией спина на узле $S_{max} = 3/2$.

2.6.5. Решить уравнение для температуры фазового перехода в двумерной модели Изинга относительно критической температуры и сравнить результат с решением в приближении среднего поля.

2.6.6. Используя выражение для статсуммы

$$Z = Tr\left(\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}^N\right) = \lambda_1^N + \lambda_2^N; \quad \lambda_{1,2} = e^{\beta J}\mathrm{ch}(\beta H) \pm \sqrt{e^{2\beta J}\mathrm{sh}^2(\beta H) + e^{-2\beta J}}$$

получить выражения для свободной энергии, магнитного момента, восприимчивости и теплоемкости для одномерной модели Изинга.

2.10.1. Решить задачу 2.6.1 методом высокотемпературного разложения.

2.10.2. Решить задачу 2.6.2 методом высокотемпературного разложения.

2.10.3. Решить задачу 2.6.3 методом высокотемпературного разложения.

2.10.4. Решить задачу 2.6.4 методом высокотемпературного разложения.