• A • Методический пример.

Пусть $M \equiv (\lambda x.x[(\lambda x.x)4, (\lambda x.x)3])((\lambda x.x)+)$.

(1) Нетрудно убедиться, что приводимая цепочка β-конверсий ведет к вычислению числа 7:

$$M \quad \equiv \quad (\lambda x.x[(\lambda x.x)4, (\lambda x.x)3])((\lambda x.x)+) = (\lambda x.x[(4), (3)])(+) = (+)[(4), (3)] \equiv +[4, 3] = 7.$$

(2) Кодирование M по Дебрейну дает M_{dB}: $\quad M_{dB} \equiv (\lambda.\underline{0}[(\lambda.\underline{0})4, (\lambda.\underline{0})3])((\lambda.\underline{0})+)$

(3) Для компилирования кода – 'кодогенерации', – воспользуемся теорией вычисления значений

"комбинаторный клей":				**семантические равенства:**	
D	$\equiv \lambda xy.[x, y] \equiv \lambda xyr.rxy,$			$\Vert\underline{n}\Vert$	$\equiv \underline{n}!;\ \ \underline{0}! = Snd,\ \ \underline{n}! = Snd \circ Fst^n$ для $n > 0$;
$\mathcal{S}$	$\equiv CIS$	арности 2,		$\Vert c\Vert$	$= {}'c;$
Λ	$\equiv \lambda x.(\lambda yz.x[y, z])$	арности 1,		$\Vert MN\Vert$	$= \mathcal{S}[\Vert M\Vert, \Vert N\Vert] = \varepsilon\circ < \Vert M\Vert, \Vert N\Vert >;$
$'$	$\equiv K \equiv \lambda x.(\lambda y.x)$	арности 1,		$\Vert\lambda.M\Vert$	$= \Lambda\Vert M\Vert;$
$\varepsilon[f, x]$	$\overset{df}{\equiv} f(x).$			$\Vert[M, N]\Vert$	$= < \Vert M\Vert, \Vert N\Vert > .$

Для оперирования произведениями дополнительно вводится комбинатор *пары* $< \cdot, \cdot > \equiv \lambda t.[\cdot t, \cdot t]$ с характеристикой $< f, g > \equiv \lambda t\lambda z.z(ft)(gt) \equiv \lambda t.[ft, gt]$.

(4) Кодогенерацию начинаем с вычисления значения

$$\Vert M_{dB}\Vert \quad = \quad \varepsilon\circ < \Vert \underbrace{\lambda.\underline{0}[(\lambda.\underline{0})4, (\lambda.\underline{0})3]}_{\equiv M_1} \Vert, \Vert \underbrace{(\lambda.\underline{0})+}_{\equiv M_2} \Vert >$$

Далее,

$$\begin{aligned}
\Vert M_1\Vert &\equiv \Lambda\Vert\underline{0}[(\lambda.\underline{0})4, (\lambda.\underline{0})3]\Vert = \Lambda(\varepsilon\circ < \Vert\underline{0}\Vert, \Vert[(\lambda.\underline{0})4, (\lambda.\underline{0})3]\Vert >)\\
&= \Lambda(\varepsilon\circ < \Vert\underline{0}\Vert, < \Vert(\lambda.\underline{0})4\Vert, \Vert(\lambda.\underline{0})3\Vert >>)\\
&= \Lambda(\varepsilon\circ < Snd, < \underbrace{\varepsilon\circ < \Lambda Snd, '4 >}_{\equiv \boxed{'4}}, \underbrace{\varepsilon\circ < \Lambda Snd, '3 >}_{\equiv \boxed{'3}} >>);\\
\Vert M_2\Vert &\equiv \Vert(\lambda.\underline{0}) + \Vert\\
&= \varepsilon\circ < \Lambda\Vert\underline{0}\Vert, \Vert + \Vert > = \varepsilon\circ < \Lambda Snd, \Lambda(+ \circ Snd) > .
\end{aligned}$$

(5) Схема вычисления значения M_{dB} в некоторой среде ρ, или, по иной терминологии, исполнения скомпилированного кода, имеет вид

$$\Vert M_{dB}\Vert\rho \equiv (\varepsilon\circ < \Vert M_1\Vert, \Vert M_2\Vert >)\rho = \varepsilon[\Vert M_1\Vert\rho, \Vert M_2\Vert\rho] = \Vert M_1\Vert\rho(\underbrace{\Vert M_2\Vert\rho}_{\equiv\rho_2}) \equiv \Vert M_1\Vert\rho\rho_2.$$

(6) Таким образом,

$$\begin{aligned}
\Vert M_{dB}\Vert\rho \equiv \Vert M_1\Vert\rho\rho_2 &= \Lambda(\varepsilon\circ < Snd, < \boxed{'4}, \boxed{'3} >>)\rho\rho_2 = \varepsilon[Snd[\rho, \rho_2], < \boxed{'4}, \boxed{'3} > [\rho, \rho_2]]\\
&= \varepsilon[\rho_2, [\boxed{'4}\,[\rho, \rho_2], \boxed{'3}\,[\rho, \rho_2]] = \rho_2[4, 3],
\end{aligned}$$

поскольку, например, для $n = 4, 3$ выполняется

$$\boxed{'n}\,[\rho, \rho_2] \equiv \varepsilon\circ < \Lambda Snd, 'n > [\rho, \rho_2] = \varepsilon[\Lambda Snd[\rho, \rho_2], 'n[\rho, \rho_2]] = \Lambda Snd[\rho, \rho_2]n = Snd[[\rho, \rho_2], n] = n.$$

(7) Наконец, исполнение скомпилированного кода дает окончательный результат:

$$\begin{aligned}
\rho_2[4, 3] &\equiv (\varepsilon\circ < \Lambda Snd, \Lambda(+ \circ Snd) >)\rho[4, 3] = \varepsilon[\Lambda Snd\,\rho, \Lambda(+ \circ Snd)\rho][4, 3] = \Lambda Snd\,\rho(\Lambda(+ \circ Snd)\rho)[4, 3]\\
&= Snd\,[\rho, (\Lambda(+ \circ Snd)\rho)][4, 3] = \Lambda(+ \circ Snd)\rho[4, 3] = (+ \circ Snd)[\rho, [4, 3]] = +[4, 3] = 7.
\end{aligned}$$

Часть 2: продвинутый уровень — компилирование кода, его оптимизация и исполнение

• Б • Задачи.

К задачам даны некоторые указания, которые могут оказаться небесспорными. Однако, они могут дать полезную для решения информацию.

$\boxed{1}$ Для терма $M \equiv (\lambda x.x\, 4((\lambda x.x)3))+$ выполнить:

(i) кодирование по де Брейну (сравните с предлагаемым вариантом $M' \equiv (\lambda.\underline{0}\, 4((\lambda.\underline{0})3)+)$;

(ii) кодогенерацию (сравните с предлагаемым вариантом $\mathcal{S}(\Lambda(\mathcal{S}(\mathcal{S}(0!,'4),\mathcal{S}(\Lambda(0!),'3))),'+)$; это не самый лучший; попробуйте указать и исправить ошибку/неточность). Если понадобится, выполните кодогенерацию, используя иные равенства теории вычислений;

(iii) исполнение кода в табличном виде, записывая тройки $\langle T,\ C,\ S\rangle$.

Все вычисления полностью обосновать. Если нужно, попробуйте ввести и использовать сокращения: $A \equiv \mathcal{S}(\mathcal{S}(0!,'4),B)$, $B \equiv \mathcal{S}(\Lambda(0!),'3)$. Возможно, сам исходный терм записан не так, как следовало бы. Попробуйте, если сочтете возможным и необходимым, внести коррекцию.

$\boxed{2}$ Для терма $P \equiv (\lambda x.((\lambda z.z\; x\; 2)\times))3$ выполнить:

(i) кодирование по де Брейну и кодогенерацию ($P \equiv \mathcal{S}(\Lambda(\mathcal{S}(\Lambda(\mathcal{S}(\mathcal{S}(0!,1!)),'2),'\times),'3))$. Если этот код не то, что нужно, тогда постройте свой собственный;

(ii) исполнение кода в табличном виде, записывая тройки $\langle T,\ C,\ S\rangle$. Возможно, лучше будет использовать сокращения $A \equiv \mathcal{S}(\Lambda(B),'\times)$ и $B \equiv (\mathcal{S}(\mathcal{S}(0!,1!)),'2)$. А, возможно, и нет.

Если в ходе исполнения кода возникнут непредвиденные сложности, то, может быть, к полному успеху приведет изменение исходного терма, которое улучшит типизацию.

$\boxed{3}$ Для терма $P \equiv (\lambda x.(\lambda op.op\; 7\; x)-)3$ выполнить:

(i) кодирование по де Брейну;

(ii) преобразование к виду $(\lambda op.op(7,(\lambda x.x)3))-$, которое детально обоснуйте и разъясните,

(iii) кодогенерацию (может быть, результат есть $\mathcal{S}(\Lambda(\mathcal{S}(0!,\langle '7,\mathcal{S}(\Lambda(0!),'3)\rangle)),\Lambda(-\circ Snd))$, и это подойдет для исполнения ?)

(iv) табличное исполнение.

$\boxed{4}$ Для терма $P \equiv (\lambda x.(\lambda z.(\lambda x.(z\; x)\times 2)1)(\lambda y.y+x))5$ выполнить кодирование по де Брейну, кодогенерацию и исполнение посредством табличных вычислений, все с подробным обоснованием. Сразу запишите ответ. (Возможно, что помощь окажет этот код: $P' \equiv \langle '5\rangle\langle\Lambda(D)\rangle\langle '1\rangle\langle C,\ '2\rangle\times$, где $B \equiv \langle C,\ '2\rangle\times$, $C \equiv \langle Fst\; Snd, Snd\rangle\varepsilon$, $D \equiv \langle Snd, Fst\; Snd\rangle +$.)

$\boxed{5}$ Для терма $R \equiv (\lambda x.(\lambda z.(\lambda f.f\; z)sqr)((\lambda y.+\; x\; y)1))3$ выполнить кодирование по де Брейну, кодогенерацию и исполнение посредством табличных вычислений. Дать подробные обоснования. Начните с того, что запишите результат. (sqr обозначает операцию возведения в квадрат.)