

Часть 2: элементарный уровень А

Правила: решаются задачи из пункта 'С'. Решение должно быть обосновано, приведены ссылки на определения и/или правила вывода.

K, S Расширение системы программирования путем 'самораскручивания', начиная с объектов K и S :

$$\begin{aligned} (K) \quad v(Kxy) &= vx, \\ (S) \quad v(Sxyz) &= v(xz(yz)), \end{aligned}$$

которые выражаются через λ -термы посредством $K \equiv \lambda xy.x$ и $S \equiv \lambda xyz.xz(yz)$.

А Алгоритм расширения. Выразить через K, S и, возможно, через другие объекты, к ним сводимые, объект с заданной комбинаторной характеристикой. Это гарантируется теоремой о полноте.

В Методический пример.

Дано. Объект с комбинаторной характеристикой

$$(I) \quad v(Ia) = va.$$

Решение. Применением алгоритмов расширения (в данном случае — это схемы (K) и (S)):

$$\begin{aligned} a &= Ka(Ka) \quad (K) \\ &= SKKa. \quad (S) \end{aligned}$$

Объект $I \equiv SKK$ добавляется к исходной системе объектов.

С Выразить через K и S объекты с заданными комбинаторными характеристиками:

- | | |
|-----------------------------|---|
| 1) $Babc = a(bc)$, | 2) $Cabc = acb$, |
| 3) $Wab = abb$, | 4) $\Psi abcd = a(bc)(bd)$, |
| 5) $C^{[2]}abcd = acdb$, | 6) $C_{[2]}abcd = adbc$, |
| 7) $B^2abcd = a(bcd)$, | 8) $Ya = a(Ya)$ (Доказать, что $Y = WS(BWB)$), |
| 9) $C^{[3]}abcde = acdeb$, | 10) $C_{[3]}abcde = aebed$, |
| 11) $B^3abcde = a(bcde)$, | 12) $\Phi abcd = a(bd)(cd)$. |

I, K, S Компилирование программы, заданной λ -термом, в код на основе I, K, S .

А Алгоритм компилирования.

- (1) Привести исходную программу к виду λ -терма, получив, для простоты, терм $\lambda x.P$.
- (2) Применить индуктивное вычисление для терма $\lambda x.P$ индукцией по построению P :

$$\begin{aligned} (1) \quad \lambda x.x &= I, \\ (2) \quad \lambda x.P &= KP, \text{ если } x \notin P, \\ (3) \quad \lambda x.PQ &= S(\lambda x.P)(\lambda x.Q). \end{aligned}$$

В Методический пример.

Дано. Пусть программа сводится к терму $\lambda xy.yx$.

Решение. Применением алгоритма компилирования.

$$\begin{aligned} \lambda xy.yx &\stackrel{def}{=} \lambda x.(\lambda y.yx) \\ &\stackrel{(3)}{=} \lambda x.(S(\lambda y.y)\lambda y.x) \\ &\stackrel{(1),(2)}{=} \lambda x.SI(Kx) \\ &\stackrel{(3)}{=} S(\lambda x.SI)(\lambda x.Kx) \\ &\stackrel{(2)}{=} S(K(SI))(S(\lambda x.K)(\lambda x.x)) \\ &\stackrel{(1),(2)}{=} S(K(SI))(S(KK)I) \end{aligned}$$

С Исключить все переменные из приводимых λ -выражений:

- 1) $\lambda xy.xy$; 2) $\lambda fx.fxx$; 3) $f = \lambda x.B(f(Ax))$; 4) $\lambda xy.x$; 5) $\lambda xyz.xz(yz)$

I, B, C, S Компилирование программы, заданной λ -термом, в код на основе I, B, C, S .

А Алгоритм компилирования.

- (1) Привести исходную программу к виду λ -терма, получив, для простоты, терм $M \equiv \lambda x.PQ$.
 (2) Применить индуктивное вычисление для терма M индукцией по построению M , где $x \in (PQ)$:

$$\begin{aligned} (1) \quad \lambda x.x &= I, \\ (2) \quad \lambda x.PQ &= \begin{cases} BP(\lambda x.Q), & \text{если } x \notin P \text{ и } x \in Q, & (a) \\ C(\lambda x.P)Q, & \text{если } x \in P \text{ и } x \notin Q, & (b) \\ S(\lambda x.P)(\lambda x.Q), & \text{если } x \in P \text{ и } x \in Q. & (c) \end{cases} \end{aligned}$$

В Методический пример.

Дано. Пусть программа сводится к терму $\lambda xy.yx$.

Решение. Применением алгоритма компилирования.

$$\begin{aligned} \lambda xy.yx &= \lambda x.(\lambda y.yx) \\ &\stackrel{(2)(b)}{=} \lambda x.(C(\lambda y.y)x) \\ &\stackrel{(1)}{=} \lambda x.CIx \\ &\stackrel{(2)(a)}{=} B(CI)(\lambda x.x) \\ &\stackrel{(1)}{=} B(CI)I. \end{aligned}$$

Проверка : $B(CI)Ixy = CI(Ix)y = Iy(Ix) = Iyx = yx$.

С Исключить все переменные из приводимых λ -выражений:

- 1) $\lambda xy.xy$; 2) $\lambda fx.fxx$; 3) $f = \lambda x.B(f(Ax))$; 4) $\lambda xy.x$; 5) $\lambda xyz.x(yz)$; 6) $\lambda xyz.xzy$; 7) $\lambda xyz.xz(yz)$