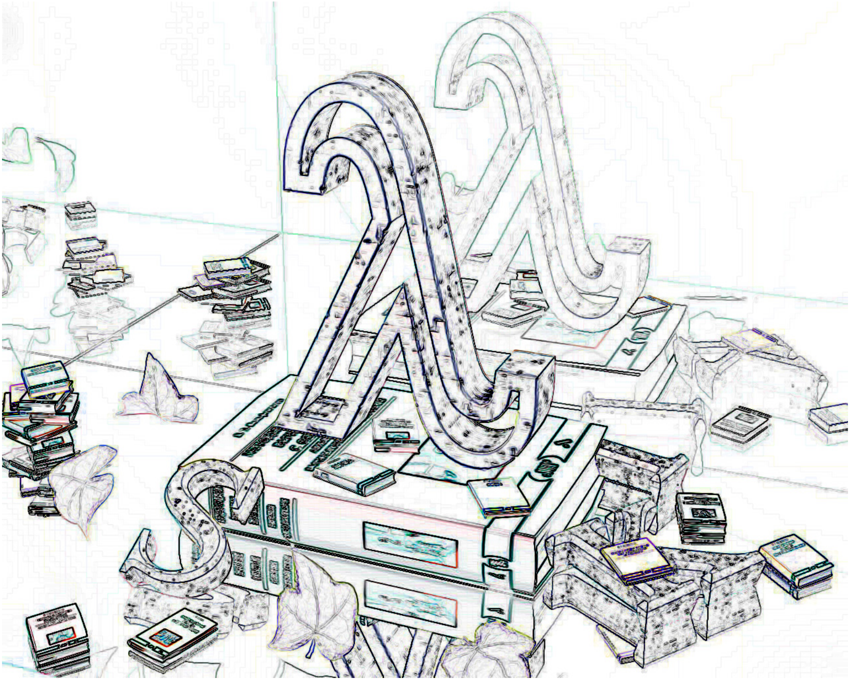
Содержание



Раздел 1

Курсовая работа

1.1 Структура раздела

Данный раздел следует воспринимать как некоторое подобие меню, в котором обозначены основные вопросы, взаимодействие которых предстоит сначала увидеть непосредственно, а потом при детальном изучении выявить его более глубокую сущность.

В настоящем разделе приводятся подборки вариантов задач, которые рекомендуется использовать при самостоятельном изучении.

В случае организации аудиторной работы по изучению λ-исчисления и комбинаторной логики можно порекомендовать специальные подборки задач по вариантам, позволяющие делать не “слишком большие”, а вполне посильные шаги при освоении новых математических, или, скорее, вычислительных идей. Эти варианты задач сведены в таблицу 1.1. Варианты задания для самостоятельной работы над материалом составлены таким образом, чтобы покрыть все изложенные разделы.

Таблица 1.1: Варианты задач

Номер варианта	Рекомендуемый набор задач					
1	1.1	2.6	3.3	4.7	5.1	**6-1°**
2	1.2	2.5	3.1	4.6	5.2	**6-2°**
3	1.3	2.4	3.2	4.5	5.3	**6-3°**
4	1.4	2.3	3.3	4.4	5.4	**6-4°**
5	1.5	2.2	3.1	4.3	5.1	**6-5°**
6	1.6	2.1	3.2	4.2	5.2	**6-6°**
7	1.7	2.5	3.3	4.1	5.3	**6-7°**
8	1.8	2.4	3.1	4.7	5.4	**6-8°**
9	1.9	2.3	3.2	4.6	5.1	**6-9°**
10	1.10	2.2	3.3	4.5	5.2	**6-1°**
11	1.11	2.1	3.1	4.4	5.3	**6-2°**
12	1.12	2.5	3.2	4.3	5.4	**6-3°**
13	1.1	2.4	3.3	4.2	5.1	**6-4°**
14	1.2	2.3	3.1	4.1	5.2	**6-5°**
15	1.3	2.2	3.2	4.7	5.3	**6-6°**
16	1.4	2.1	3.3	4.6	5.4	**6-7°**
17	1.5	2.5	3.1	4.5	5.1	**6-8°**
18	1.6	2.4	3.2	4.4	5.2	**6-9°**
19	1.7	2.3	3.3	4.3	5.3	**6-1°**
20	1.8	2.2	3.1	4.2	5.4	**6-2°**
21	1.9	2.1	3.2	4.1	5.1	**6-3°**
22	1.10	2.5	3.3	4.7	5.2	**6-4°**
23	1.11	2.4	3.1	4.6	5.3	**6-5°**
24	1.12	2.3	3.2	4.5	5.4	**6-6°**
25	1.1	2.2	3.3	4.4	5.1	**6-7°**
26	1.2	2.1	3.1	4.3	5.2	**6-8°**
27	1.3	2.5	3.2	4.2	5.3	**6-9°**
28	1.4	2.4	3.3	4.1	5.4	**6-1°**
29	1.5	2.3	3.1	4.7	5.1	**6-2°**
30	1.6	2.2	3.2	4.6	5.2	**6-3°**
31	1.7	2.1	3.3	4.5	5.3	**6-4°**

1.2 Типовая задача

Общие указания к решению типовой задачи.

Формулировка задачи. Выразить через K и S объект с комбинаторной характеристикой:

$$Ia = a, \tag{I}$$

пользуясь постулатами α, β, μ, ν, σ, τ, ξ исчисления λ-конверсии.

Решение.

I—1. Сформулируем постулаты, задающие отношение конвертируемости '$=$' :

$$(\alpha)\ \lambda x.a = \lambda z.[z/x]a;\ \ (\beta)\ (\lambda x.a)b = [b/x]a;$$

$$(\nu)\quad \frac{a=b}{ac=bc};\qquad (\mu)\quad \frac{a=b}{ca=cb};$$

$$(\xi)\quad \frac{a=b}{\lambda x.a=\lambda x.b};\quad (\tau)\quad \frac{a=b;\ b=c}{a=c};\quad (\sigma)\quad \frac{a=b}{b=a}.$$

I—2. Определим комбинаторные характеристики объектов K и S:

$$\begin{array}{rcll} v\,(Kxy) & = & v\,x, & (K)\\ v\,(Sxyz) & = & v\,(xz(yz)), & (S) \end{array}$$

которые выражаются в λ-исчислении посредством равенств $K = \lambda xy.x$ и $S = \lambda xyz.xz(yz)$.

I—3. Применяя схемы (K) и (S), убеждаемся в том, что:

$$\begin{array}{rcll} a & = & Ka(Ka) & \text{по } (K)\\ & = & SKKa. & \text{по } (S) \end{array}$$

Проверка. Проверим, что действительно $I = SKK$. Пусть $v = empty$ (пустой объект).

I–1. $SKKa = Ka(Ka)$, поскольку в схеме (S) можно положить $x = K, y = K, z = a$. Тогда ясно, что в силу постулата (α):

$$Sxyz = SKKa,\ xz(yz) = Ka(Ka),\ SKKa = Ka(Ka).$$

I–2. Применяя аналогичным образом схему (K), заключаем, что $Ka(Ka) = a$.

I–3. По правилу транзитивности (τ), если выполняются равенства $SKKa = Ka(Ka)$ и $Ka(Ka) = a$, то $SKKa = a$.

Ответ. Объект I с заданной комбинаторной характеристикой $Ia = a$ имеет вид SKK, то есть $I = SKK$.

1.3 Варианты задания

‡ **Задание 1.** Выразить через K и S объекты с заданными комбинаторными характеристиками:

1)	$Babc$	$=$	$a(bc)$,
2)	$Cabc$	$=$	acb,
3)	Wab	$=$	abb,
4)	$\Psi abcd$	$=$	$a(bc)(bd)$,
5)	$C^{[2]}abcd$	$=$	$acdb$,
6)	$C_{[2]}abcd$	$=$	$adbc$,
7)	B^2abcd	$=$	$a(bcd)$,
8)	Ya	$=$	$a(Ya)$ (Доказать, что $Y = WS(BWB)$.),
9)	$C^{[3]}abcde$	$=$	$acdeb$,
10)	$C_{[3]}abcde$	$=$	$aebcd$,
11)	B^3abcde	$=$	$a(bcde)$,
12)	$\Phi abcd$	$=$	$a(bd)(cd)$.

‡ **Задание 2.** Какой комбинаторной характеристикой обладают следующие объекты:

1) $(\lambda x.(P(xx)a))(\lambda x.(P(xx)a)) = Y$,
2) $Y = S(BWB)(BWB)$,
   где $B = \lambda xyz.x(yz),\ S = \lambda xyz.xz(yz),\ W = \lambda xy.xyy$,
3) $Y = WS(BWB)$,
   где $Wab = abb,\ Sabc = ac(bc),\ Babc = a(bc)$,
4) $Y_0 = \lambda f.X(X)$, где $X = \lambda x.f(x(x))$,
5) $Y_1 = Y_0(\lambda y.\lambda f.f(y(f)))$,
   где $Y_0 = \lambda f.X(X),\ X = \lambda x.f(x(x))$?
   (Указание: доказать, что $Y_i a = a(Y_i a)$.)

‡ **Задание 3.** Доказать, что:

$$
\begin{array}{lrcl}
1) & X & = & \lambda x.Xx, x \notin X,\\
2) & Y_0 & = & \lambda f.f(Y_0(f)),\ \text{где } Y_0 = \lambda f.X(X), X = \lambda x.f(x(x)),\\
3) & Y_1 & = & \lambda f.f(Y_1(f)),\ \text{где } Y_1 = Y_0(\lambda y.\lambda f.f(y(f))),\\
 & & & Y_0 = \lambda f.X(X),\ X = \lambda x.f(x(x)).
\end{array}
$$

‡ **Задание 4.** Какой комбинаторной характеристикой обладают следующие объекты[1] (доказать!):

$$
\begin{array}{lcl}
1)\ \Xi & = & C(BCF)I,\\
2)\ F & = & B(CB^2B)\Xi,\\
3)\ P & = & \Psi\Xi K,\\
4)\ \& & = & B^2(C\Xi I)(C(BB^2P)P),\\
5)\ \vee & = & B^2(C\Xi I)(C(B^2B(B(\Phi\&))P)P),\\
6)\ \neg & = & CP(\Pi I),\\
7)\ \exists^* & = & B(W(B^2(\Phi P)C\Xi))K,\ \text{где } \exists[a] = \exists^*[a],\ \exists = \exists[I].
\end{array}
$$

[1] Обозначения: P — импликация, Ξ — формальная импликация, F — оператор функциональности, $\&$ — конъюнкция, $\vee$ — дизъюнкция, Π — квантор общности, $\neg$ — отрицание, $\exists$ — квантор существования. Объекты Ξ, F, P, $\&$, $\vee$ — двухместные, объекты $\neg$, Π, $\exists$ — одноместные.

Указания.

1) $Cabc = acb,\ Ia = a,\ Babc = a(bc).$
2) $Babc = a(bc),\ B^2abcd = a(bcd),\ \Xi ab = FabI.$
3) $\Psi abcd = a(bc)(bd),\ Kab = a.$
4) $Babc = a(bc),\ B^2abcd = a(bcd),\ Ia = a,\ Cabc = acb.$
5) $Babc = a(bc),\ B^2abcd = a(bcd),\ Ia = a,$
$\Phi abcd = a(bd)(cd),\ \&ab = \Xi(B^2(Pa)Pb)I.$
6) $Cabc = acb,\ Ia = a,\ \Pi = \Xi W \Xi,\ Wab = abb.$
7) Доказать, что $\exists[b]a = P(\Xi a(Kb))b.$

Воспользоваться равенствами:

$$\begin{array}{lllllllll} Babc & = & a(bc), & B^2abcd & = & a(bcd), & Wab & = & abb, \\ Cabc & = & acb, & \Phi abcd & = & a(bd)(cd). & & & \end{array}$$

‡ **Задание 5.** Проверить справедливость следующих комбинаторных характеристик:

1) $S(KS)Kabc = a(bc),$
2) $S(BBS)(KK)abc = acb,$
3) $B(BW(BC))(BB(BB))abcd = a(bc)(bd),$
4) $B(BS)Babcd = a(bd)(cd).$

Указание. $Kab = a$, $Sabc = ac(bc)$, $Babc = a(bc)$, $Cabc = acb$, $Wab = abb.$

‡ **Задание 6.** Выполнить следующее целевое исследование:

6-1° исследовать разложение термов в базисе I, K, S;

6-2° исследовать разложение термов в базисе I, B, C, S;

6-3° выразить определение функций, пользуясь комбинатором неподвижной точки Y;

6-4° исследовать свойства функции:

$$\begin{aligned} list1\ a\ g\ f\ x = &\ if\ null\ x \\ &\ then\ a \\ &\ else\ g(f(car\ x))\ (list1\ a\ g\ f(cdr\ x)); \end{aligned}$$

6-5° установить изоморфизм между декартово замкнутой категорией (д.з.к.) и аппликативной вычислительной системой (АВС);

6-6° получить отображение, которое соответствует отображению каррирования функций (для n-местной функции);

6-7° проделать вывод основных свойств оболочки Каруби;

6-8° закодировать термами бестипового λ-исчисления декартово произведение n объектов ($n \geq 5$) и получить соответствующие выражения для проекций;

6-9° представить основные функции аппликативного языка программирования Lisp средствами λ-исчисления и комбинаторной логики.

Формулировки задач для соответствующих целевых исследований в *задании* 6 на стр. 8.

6-1° Пусть определение терма $\lambda x.P$ дано индукцией по построению P:

$$\begin{array}{llll} 1.1) & \lambda x.x & = & I, \\ 1.2) & \lambda x.P & = & K\,P, \text{ если } x \notin FV(P), \\ 1.3) & \lambda x.P'P'' & = & S(\lambda x.P')(\lambda x.P''). \end{array}$$

Исключить все переменные из приводимых ниже λ-выражений:

$$\lambda xy.xy, \quad \lambda fx.fxx, \quad f = \lambda x.B(f(Ax)).$$

6-2° Пусть определение терма M такого, что $x \in FV(M)$, дано индукцией по построению M:

2.1) $\lambda x.x = I$,

$$2.2)\ \lambda x.PQ = \begin{cases} (a)\ BP(\lambda x.Q), & \text{если } x \notin FV(P) \\ & \text{и } x \in FV(Q), \\ (b)\ C(\lambda x.P)Q, & \text{если } x \in FV(P) \\ & \text{и } x \notin FV(Q), \\ (c)\ S(\lambda x.P)(\lambda x.Q), & \text{если } x \in FV(P) \\ & \text{и } x \in FV(Q). \end{cases}$$

Исключить все переменные из приводимых ниже лямбда-выражений:

$$\lambda xy.xy,\ \ \lambda fx.fxx,\ \ f = \lambda x.B(f(Ax)).$$

6-3° Пользуясь функцией поиска неподвижной точки Y, выразить определения приводимых ниже (с помощью примеров) функций:

$$\begin{array}{lcl} length(a_5, a_2, a_6) & = & 3, \\ sum(1,2,3,4) & = & 10, \\ product(1,2,3,4) & = & 24, \\ append(1,2)(3,4,5) & = & (1,2,3,1,1), \\ concat((1,2),(3,4),()) & = & (1,2,3,4), \\ map\ square(1,2,3,4) & = & (1,4,9,16). \end{array}$$

Для приведенных примеров выполнить детальную проверку вычислений.

6-4° Воспользовавшись определением функции $list1$ и следующими определениями: $Ix = x$, $Kxy = x$, $postfix\ x\ y = append\, y(ux)$, где (ux) — обозначение списка, состоящего из единственного элемента x, выразить функции:

(a) $length$, $sumsquares$, $reverse$, $identity$;

(б) *sum*, *product*, *append*, *concat*, *map*.

6-5° Вывести следующие равенства:

$$\begin{array}{rcl} h & = & \varepsilon \circ < (\Lambda h) \circ p, q >, \\ k & = & \Lambda(\varepsilon \circ < k \circ p, q >), \end{array}$$

где:

$$\begin{array}{rcl} [x, y] & = & \lambda r.rxy, \\ < f, g > & = & \lambda t.[f(t), g(t)] = \lambda t.\lambda z.z(ft)(gt), \\ h & : & A \times B \to C, \\ k & : & A \to (B \to C), \\ \varepsilon_{BC} & : & (B \to C) \times B \to C,\ x : A,\ y : B, \\ \Lambda_{ABC} & : & (A \times B \to C) \to (A \to (B \to C)), \\ p & : & A \times B \to A, \\ q & : & A \times B \to B, \\ \varepsilon \circ < k \circ p, q > & : & A \times B \to C. \end{array}$$

6-6° Рассматривая семейство функций h:

$$\begin{array}{rcl} h_2 & : & A \times B \to C, \\ h_3 & : & A \times B \times C \to D, \\ h_4 & : & A \times B \times C \times D \to E, \\ \ldots & : & \ldots, \end{array}$$

найти семейство отображений

$$\Lambda_{ABC},\ \Lambda_{(A\times B)CD},\ \Lambda_{(A\times B\times C)DE}, \ldots,$$

которые каррируют данные функции, то есть переводят их из “операторной” формы в аппликативную.

6-7° Оболочкой Каруби называют категорию, которая содержит для $a \circ b = \lambda x.a(bx)$:

$$\begin{array}{rl} & \textit{множества} \\ \text{объектов:} & \{a \mid a \circ a = a\}, \\ \text{морфизмов:} & Hom(a,b) = \{f \mid b \circ f \circ a = f\}, \\ & \text{и } \textit{морфизмы} \\ \text{тождества:} & id\, a = a, \\ \text{композиции:} & f \circ g. \end{array}$$

Пусть

$$\begin{aligned} [x,y] &\equiv \lambda r.rxy, \\ < f, g > &\equiv \lambda t.[f(t), g(t)] \equiv \lambda t.\lambda z.z(ft)(gt). \end{aligned}$$

Проверить, что:

$$h = \varepsilon\circ < (\Lambda h) \circ p, q >, \; k = \Lambda(\varepsilon\circ < k \circ p, q >),$$

где

$$\begin{aligned} h &: A \times B \to C, \\ k &: A \to (B \to C), \\ \varepsilon_{BC} &: (B \to C) \times B \to C, \; x : A, \; y : B, \\ \Lambda_{ABC} &: (A \times B \to C) \to (A \to (B \to C)), \\ p &: A \times B \to A, \\ q &: A \times B \to B, \\ \varepsilon\circ < k \circ p, q > &: A \times B \to C. \end{aligned}$$

(**Указание**. Закодируйте функции вида $f : A \to B$ термами $B \circ f \circ A = \lambda x.B(f(Ax))$. Далее воспользуйтесь равенством: $A \circ A = A (= \lambda x.A(A(x)))$. Учтите, что $\Lambda h = \lambda xy.h[x,y]$.)

6-8° Получить терм ламбда-исчисления, соответствующий декартову произведению n объектов. Дополнительно установить n термов, которые ведут себя как проекции.

(**Указание**. Для случая n=2:

$$\begin{array}{rcl} A_0 \times A_1 & = & \lambda u.[A_0(uK), A_1(u(KI))], \\ \pi_0^2 & = & \lambda u.(A_0 \times A_1)(u)K, \\ \pi_1^2 & = & \lambda u.(A_0 \times A_1)(u)(KI).) \end{array}$$

6-9° Выразить с помощью комбинаторов следующий базовый набор функций языка Lisp:

$$\{Append,\ Nil,\ Null,\ List,\ Car,\ Cdr\}.$$

(**Указание.** Для $Append \equiv\frown$ и для $Nil \equiv<>$:

$$\begin{array}{ll} (1) & A \frown (B \frown C) = (A \frown B) \frown C \\ (2) & A \frown<> = <>\frown A = A \\ (3) & Null\ A = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & \text{если } A = Nil, \\ 0, & \text{если } A \neq Nil, \end{array} \right. \\ (4) & List\ x = < x >, \\ (5) & Car < x_1, x_2, \ldots, x_n > = x_1, \\ (6) & Cdr < x_1, x_2, \ldots, x_n > = < x_2, \ldots, x_n > .) \end{array}$$

1.4 Рекомендуемый порядок выполнения задания

1) По номеру варианта выбрать соответствующую формулировку задачи.
2) Изучить решение типовой задачи, приводимое в тексте. По аналогии с решением типовой задачи выполнить шаги доказательства.
3) Проверить правильность полученного результата (ответа), проведя выкладки в обратном порядке.