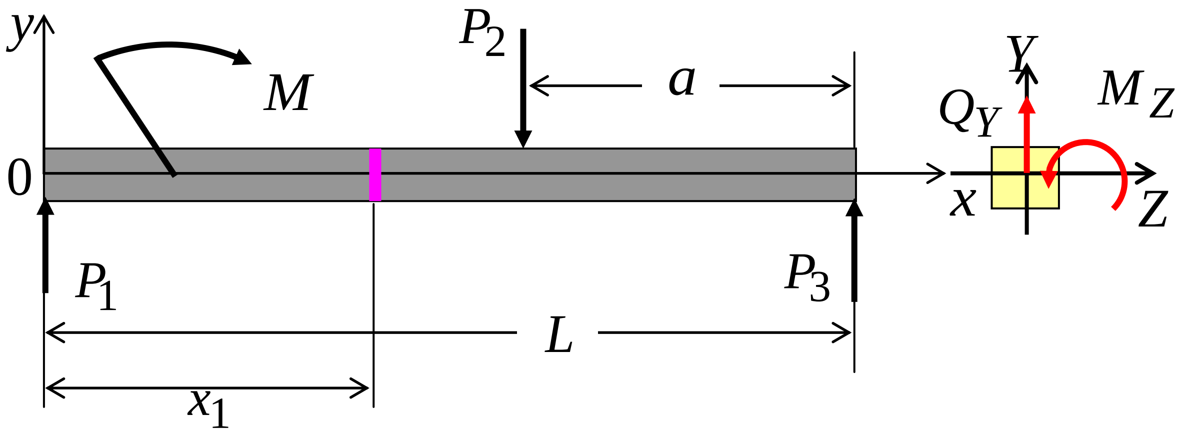
Лекция 9 . Плоский изгиб прямого бруса

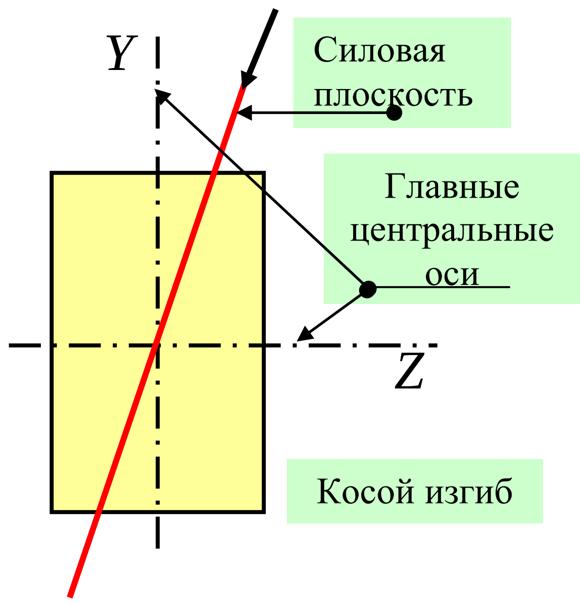
Определения

Изгибом называют деформацию бруса под действием сил и моментов, действующих в плоскости x, y , проходящей через ось бруса. Силы перпендикулярны к оси бруса. Сам брус определен в системе координат x, y.



При таком нагружении бруса в его поперечных сечениях возникают изгибающие моменты M_Z и поперечные силы Q_Y . Эти внутренние силовые факторы определены в системе координат X, Y, Z, связанной с центром тяжести сечения, координатные оси – главные центральные оси сечения.

Плоскость, в которой лежат все **внешние** силы и моменты, называют **силовой плоскостью**.



Если силовая плоскость совпадает с одной из главных центральных осей сечения, то изгиб называют **плоским**.

Если силовая плоскость не совпадает с главной центральной осью сечения, то изгиб называют **косым**.

Если изгибающий момент M_Z является единственным силовым фактором, не равным нулю,

$$M_Z \neq 0,$$

то изгиб называют **чистым**.

Если наряду с моментом M_Z присутствуют поперечные силы Q_Y,

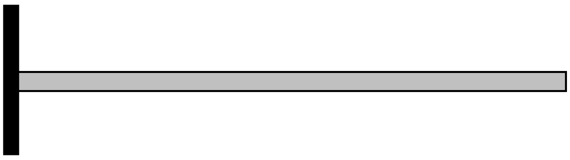
$$M_Z \neq 0 \quad \text{и} \quad Q_Y \neq 0,$$

то изгиб называют **поперечным**.

Брус, работающий на изгиб, называют **балкой**.

<u>*Типы балок*</u>

1. **Статически определимые**

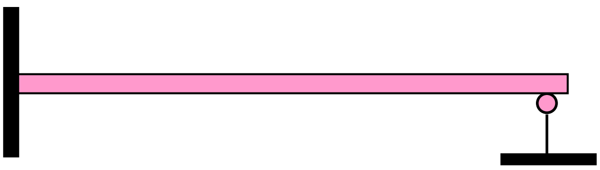


Консольная

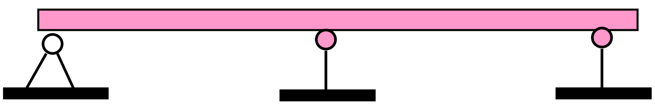
Двухопорная

Двухопорная с двумя консолями

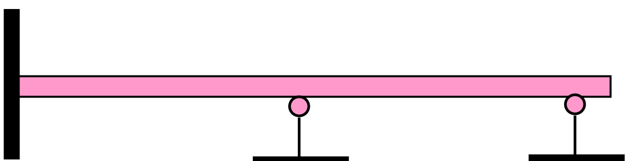
2. **Статически неопределимые**



Один раз статически неопределимая



Один раз статически неопределимая



Два раза статически неопределимая

Внутренние силовые факторы. Правило знаков.

Рассмотрим балку, нагруженную поперечными силами и изгибающим моментом. Балка находится в равновесии. Это означает, выполняются два уравнения равновесия.

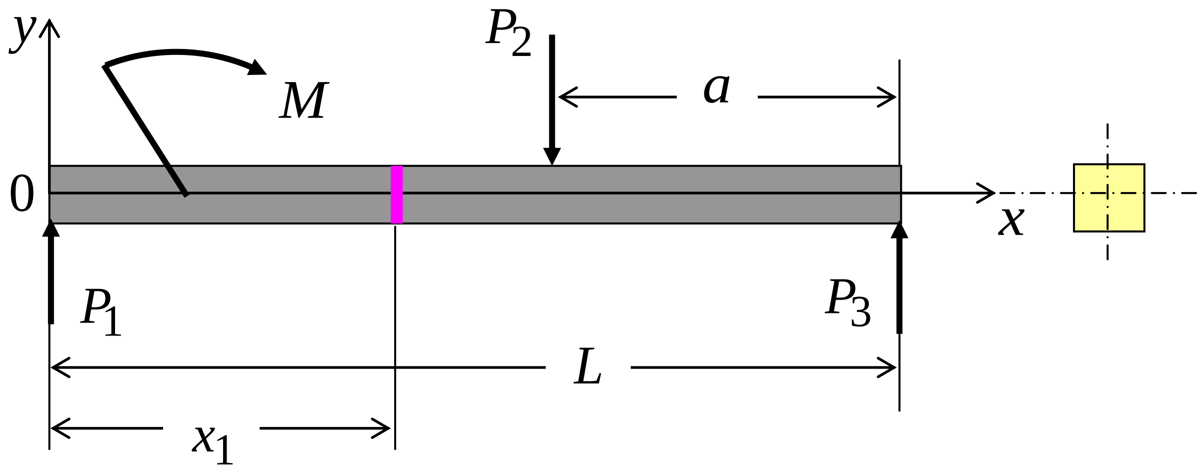
Сумма всех сил равна нулю:

$$P_1 - P_2 + P_3 = 0 \qquad (*)$$

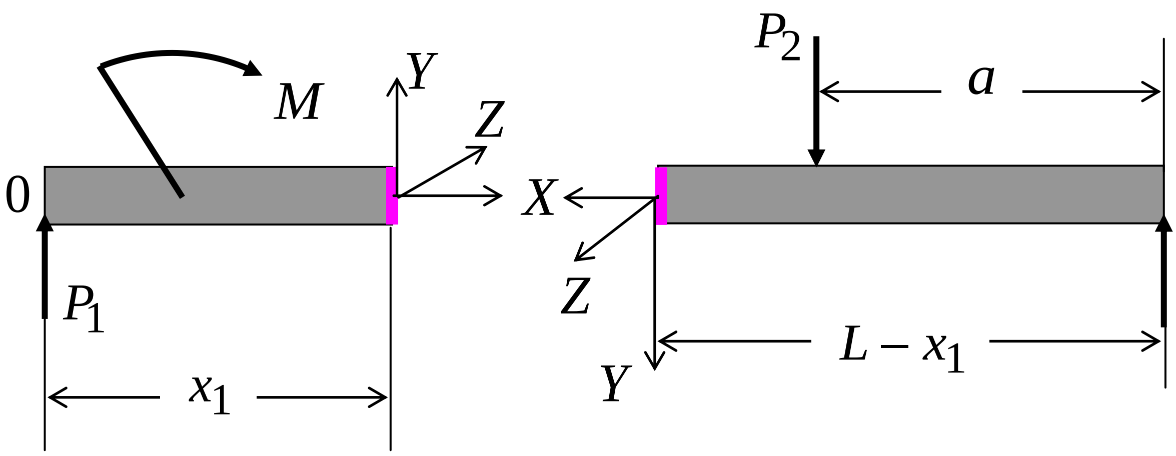
Сумма моментов относительно начала координат равна нулю:

$$M + P_2(L - a) + P_3 L = 0 \qquad (*)$$

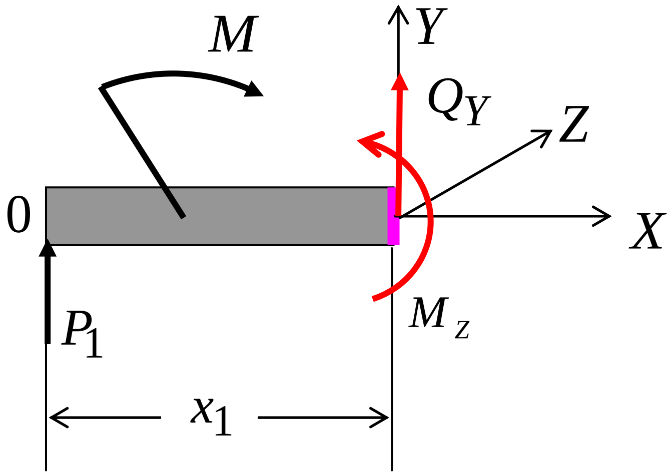
Внутренние силовые факторы M_Z и Q_Y определяют методом сечений.



Допустим, что координата поперечного сечения балки равна x_1.



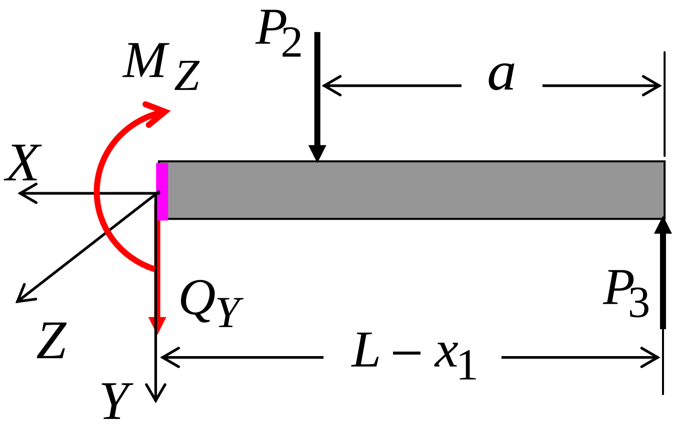
Рассмотрим равновесие левой части. Воздействие правой, отброшенной части, заменим изгибающим моментом M_Z и поперечной силой Q_Y.



Запишем уравнения равновесия для сил и моментов относительно оси Z:

$$Q_Y + P_1 = 0 \qquad Q_Y = -P_1$$

$$M_Z - M - P_1 x_1 = 0 \qquad M_Z = M + P_1 x_1$$



Теперь рассмотрим равновесие правой части. Уравнения равновесия для сил и моментов относительно оси Z имеют вид

$$Q_Y + P_2 - P_3 = 0$$
$$M_Z + P_2(L - x_1 - a) - P_3(L - x_1) = 0$$

С учетом уравнения (*) получаем для поперечной силы

$$Q_Y = -P_2 + P_3 = -P_1$$

С учетом уравнений (*) и (**) получаем для изгибающего момента

$$M_Z = -P_2(L - x_1 - a) + P_3(L - x_1) = M + P_1 x_1$$

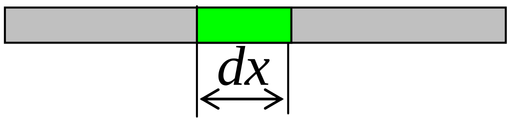
Следовательно, для вычислений силовых факторов можно использовать уравнения равновесия для любой части балки.

Поперечная сила Q_Y равна алгебраической сумме внешних сил, действующих по одну сторону от сечения.

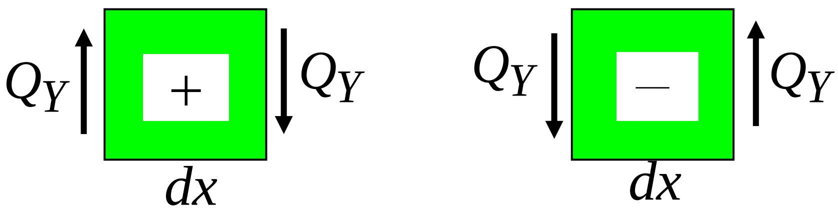
Изгибающий момент M_Z равен алгебраической сумме действующих по одну сторону от сечения внешних изгибающих моментов и моментов внешних сил относительно связанной с сечением оси Z .

Правило знаков

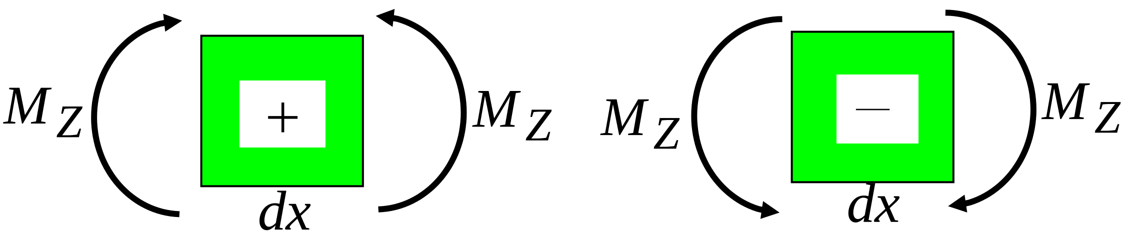
Вырежем из балки элемент длиной dx

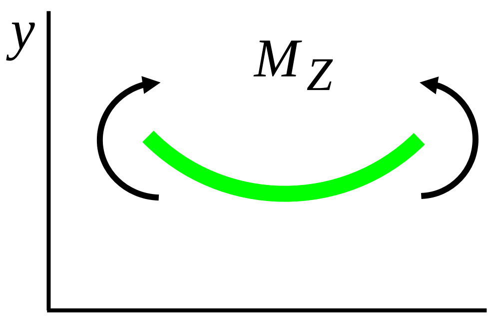


Поперечная сила Q_Y считается положительной, если выделенный элемент под действием этой силы вращается **по часовой** стрелке



Изгибающий момент M_Z считается положительным, если выделенный элемент **изгибается выпуклостью вниз** (положительная кривизна в системе координат x, y , в которой определена балка).





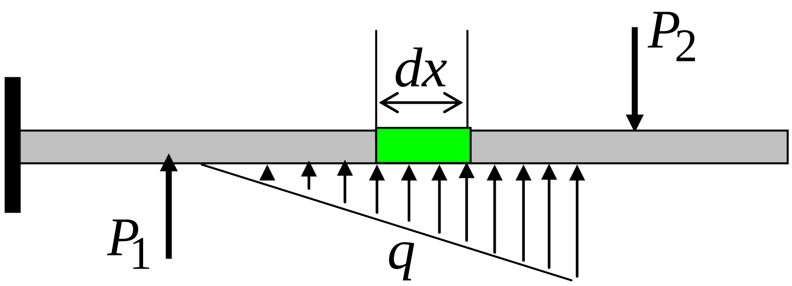
Практическое правило знаков

Если сумма внешних сил слева от рассматриваемого сечения дает равнодействующую, направленную вверх, то поперечная сила Q_Y считается положительной.

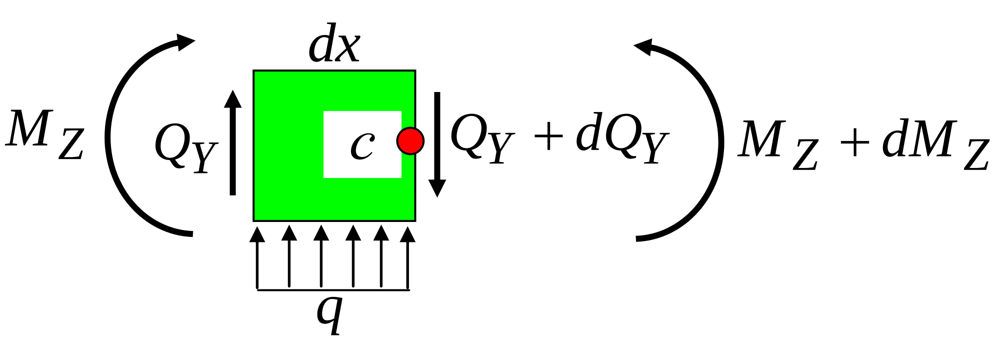
Если сумма сосредоточенных моментов и моментов от сил, действующих слева относительно оси Z рассматриваемого сечения, дает равнодействующий момент, направленный по часовой стрелке, то изгибающий момент M_Z считается положительным.

Дифференциальные зависимости между распределенной нагрузкой q, поперечной силой Q_Y и изгибающим моментом M_Z (зависимости Журавского)

Рассмотрим балку, нагруженную произвольной системой сил. Выделим элемент балки длиной dx в области действия распределенной нагрузки q.



На малом отрезке dx распределенную нагрузку q можно считать постоянной. Тогда по граням выделенного элемента будут действовать следующие силы и моменты.



1. Запишем условие равновесия сил, действующих в направлении оси y .

$$Q_Y + qdx - Q_Y - dQ_Y = 0$$

Отсюда следует нижеследующая дифференциальная зависимость между распределенной нагрузкой q и поперечной силой Q_Y

$$q = \frac{dQ_Y}{dx} . \qquad (1)$$

2. Запишем условие равновесия моментов относительно точки C. Точка C – центр тяжести сечения, через эту точку проходит ось Z.

$$M_Z + Q_Y dx + qdx\frac{dx}{2} - M_Z - dM_Z = 0$$

Пренебрегая величиной второго порядка малости, получаем следующую дифференциальную зависимость между поперечной силой Q_Y и изгибающим моментом M_Z

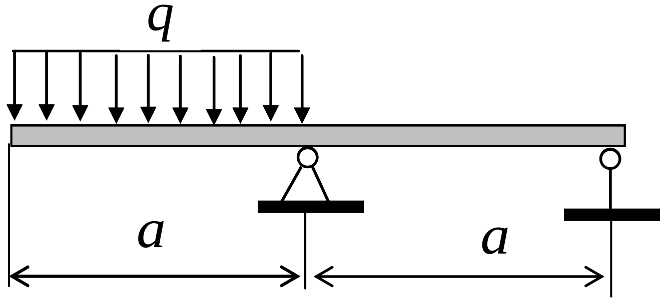
$$Q_Y = \frac{dM_Z}{dx} . \qquad (2)$$

Из уравнений (1) и (2) получаем третью дифференциальную зависимость Журавского

$$q = \frac{d^2 M_Z}{dx^2} . \qquad (3)$$

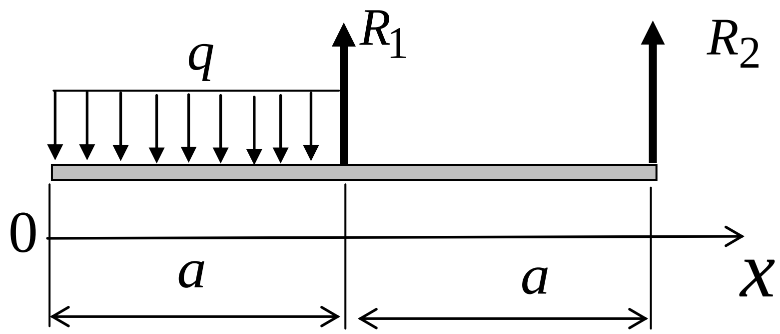
Построение эпюр Q_Y и M_Z.

Дана балка, левая консоль которой нагружена распределенной нагрузкой q.



a = 1 m ; q = 10 кН/м.

Балка статически определима. Для решения задачи необходимо определить всю систему сил. Для этого заменим опоры силами, опорными реакциями R_1 и R_2. Значения опорных реакций найдем из уравнений равновесия.



Сумма моментов относительно левой опоры:

$$qa\frac{a}{2}+R_2 a=0 \qquad R_2=-\frac{qa}{2}$$

Сумма моментов относительно правой опоры:

$$qa\left(\frac{a}{2}+a\right)-R_1 a=0 \qquad R_1=\frac{3a}{2}$$

Функция, описывающая эпюру поперечных сил:

$$Q_y(x) := \begin{cases} -q\cdot x & \text{if } 0\le x<a \\ -q\cdot a + R_1 & \text{if } a\le x\le 2\cdot a \\ 0\cdot kN & \text{otherwise} \end{cases}$$

Функция, описывающая эпюру изгибающих моментов:

$$M_z(x) := \begin{cases} -q\cdot x\cdot\frac{x}{2} & \text{if } 0\le x<a \\ -q\cdot a\cdot\left(x-\frac{a}{2}\right)+R_1\cdot(x-a) & \text{if } a\le x\le 2\cdot a \\ 0\cdot kN\cdot m & \text{otherwise} \end{cases}$$

Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов имеют следующий вид.