Лекция 8. Анализ деформированного состояния. Физические уравнения упругости

Тензор напряжений приводится к диагональному виду

$$\Sigma = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{vmatrix}$$

Тензору напряжений соответствует тензор деформаций, который образован тремя линейными и шестью угловыми деформации.

Тензор деформации также приводится к диагональному виду

$$\Lambda = \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \frac{1}{2}\gamma_{zx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{zy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{vmatrix}$$

Здесь ε_1, ε_2 и ε_3 - главные деформации. Они направлены по трем главным осям, сдвиги между которыми равны нулю.

Инварианты тензора деформаций определяются формулами, аналогичными для инвариантов тензора напряжений при замене составляющих напряжений на составляющие деформаций.

$$J_1 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

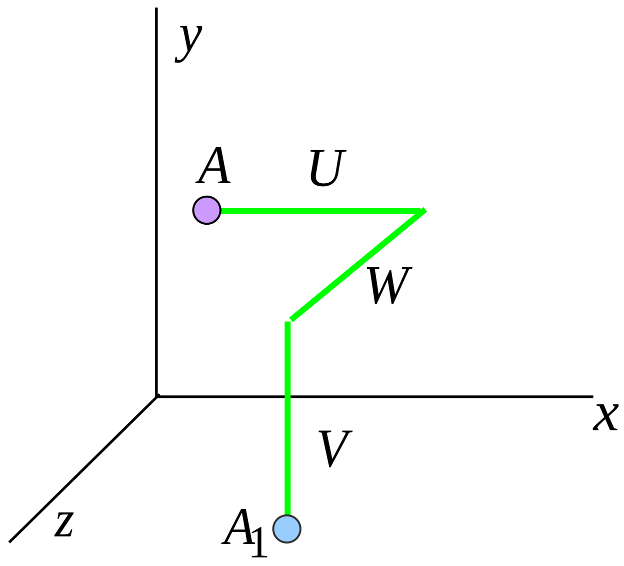
$$J_2 = \varepsilon_x\varepsilon_y + \varepsilon_y\varepsilon_z + \varepsilon_z\varepsilon_x - \frac{1}{4}\left(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2\right) = \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1$$

$$J_3 = \varepsilon_x\varepsilon_y\varepsilon_z + \frac{1}{4}\left(\gamma_{xy}\gamma_{yz}\gamma_{zx}\right) - \frac{1}{4}\left(\varepsilon_z\gamma_{xy}^2 + \varepsilon_x\gamma_{yz}^2 + \varepsilon_y\gamma_{zx}^2\right) = \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3$$

Первый инвариант деформированного состояния J_1 имеет ясный физический смысл – это относительное изменение объема.

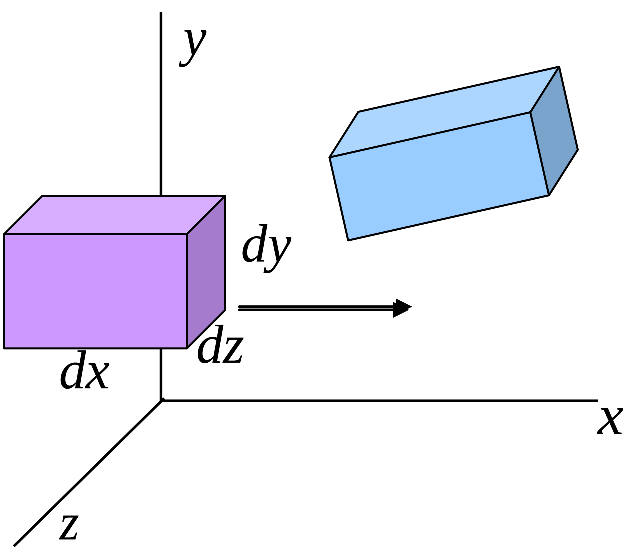
Дифференциальные зависимости между компонентами смешений и компонентами деформаций

Допустим, что некоторая точка тела A в результате действия внешних сил переместится в положение A_1.

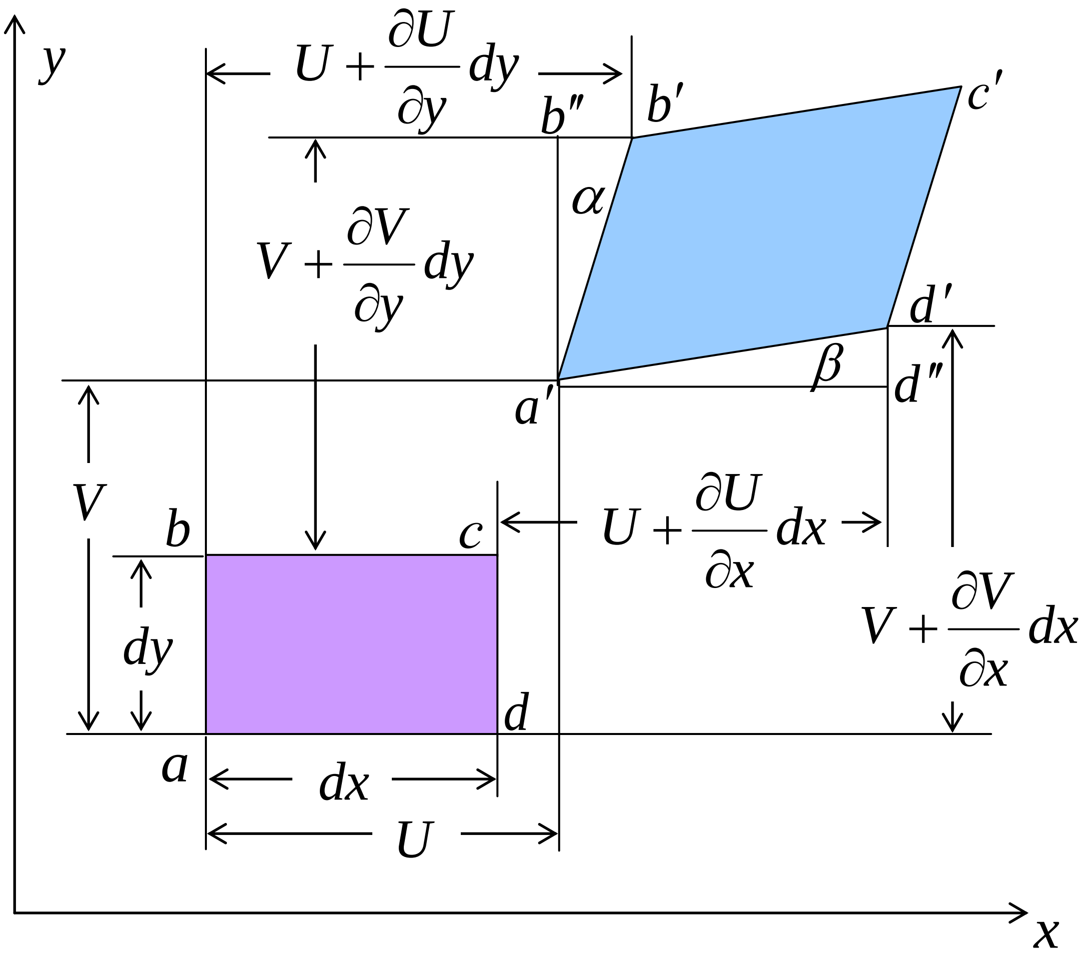


Здесь $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{V}$ и $\boldsymbol{W}$ - компоненты смещений точки $\boldsymbol{A}$ вдоль осей $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ и $\boldsymbol{z}$ соответственно.

Элемент $dxdydz$ твердого тела после нагружения тела внешними силами сместится в новое положение и изменит свою геометрию



Спроектируем оба элемента на плоскость $\boldsymbol{xy}$. Поскольку перемещение – непрерывная функция координат, то новые положения угловых точек можно записать в терминах перемещений и производных от перемещений по координатам:



Теперь можно относительную деформацию ε_x в направлении оси $\boldsymbol{x}$ записать как

$$\varepsilon_x=\frac{a'd''-ad}{ad}=\frac{\frac{\partial U}{\partial x}dx}{dx}=\frac{\partial U}{\partial x}$$

Аналогично для деформации ε_y

$$\varepsilon_y=\frac{a'b''-ab}{ad}=\frac{\frac{\partial V}{\partial y}dy}{dy}=\frac{\partial V}{\partial y}$$

Угловая деформация γ_{xy} по определению равна

$$\gamma_{xy}=\alpha+\beta\approx tan(\alpha)+tan(\beta)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{b'b''}{a'b''} + \frac{d'd''}{a'd''} \approx \frac{\frac{\partial U}{\partial y}dy}{dy} + \frac{\frac{\partial V}{\partial x}dx}{dx} = \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}$$

Итак:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x}; \qquad \varepsilon_y = \frac{\partial V}{\partial y}; \qquad \varepsilon_z = \frac{\partial W}{\partial z};$$

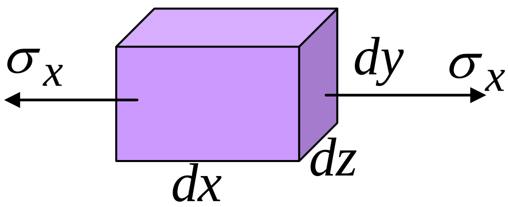
$$\gamma_{xy} = \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}; \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z}; \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x}.$$

Три компоненты перемещений дают ***шесть*** составляющих тензора деформаций.

Шесть компонент произвольно задать нельзя.

Необходимо удовлетворить условия совместности деформаций.

Связь между напряжениями и деформациями при одноосном растяжении



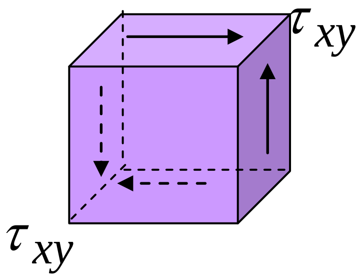
$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \qquad \varepsilon_y = \varepsilon_z = -\mu\varepsilon_x = -\mu\frac{\sigma_x}{E}$$

Здесь

E - модуль упругости первого рода (модуль Юнга);

μ - коэффициент Пуассона.

Связь между напряжениями и деформациями при чистом сдвиге

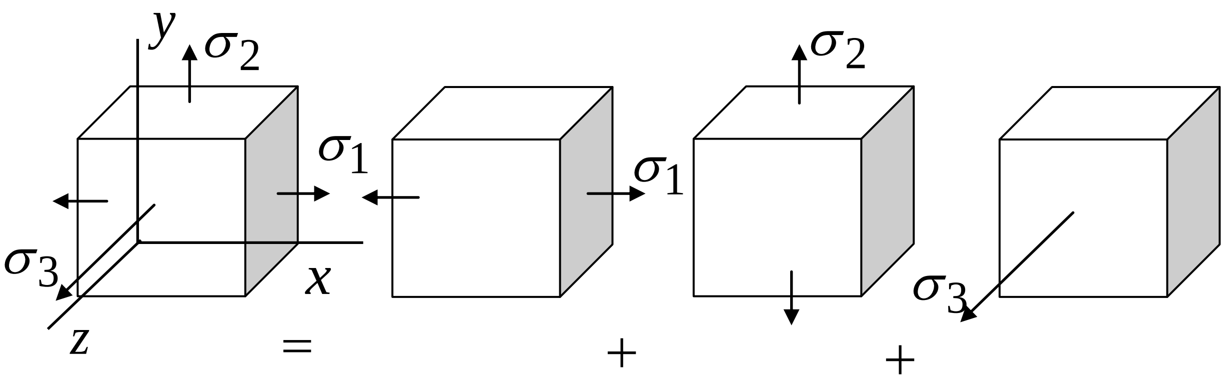


$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

G - модуль упругости второго рода (модуль сдвига)

Закон Гука для трехосного напряженного состояния

Напряженное состояние задано главными напряжениями.
Воспользуемся принципом независимости действия сил



$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \mu\frac{\sigma_2}{E} - \mu\frac{\sigma_3}{E}$$

$$\varepsilon_2 = -\mu\frac{\sigma_1}{E} \quad \frac{\sigma_2}{E} \quad -\mu\frac{\sigma_3}{E}$$

$$\varepsilon_3 = -\mu\frac{\sigma_1}{E} \quad -\mu\frac{\sigma_2}{E} \quad \frac{\sigma_3}{E}$$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}\left(\sigma_1 - \mu\left(\sigma_2 + \sigma_3\right)\right)$$

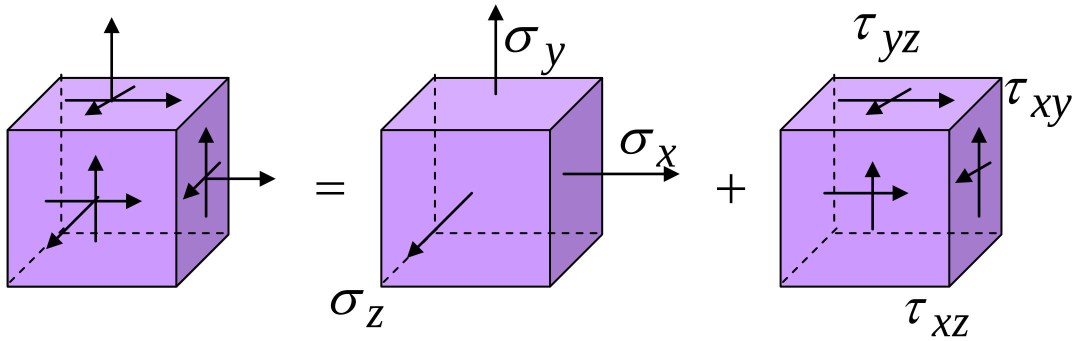
$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}\left(\sigma_2 - \mu\left(\sigma_3 + \sigma_1\right)\right)$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E}\left(\sigma_3 - \mu\left(\sigma_1 + \sigma_2\right)\right)$$

Обобщенный закон Гука

Рассмотрим трехосное напряженное состояние.

В силу принципа независимости действия сил деформация элемента не изменится, если сначала приложим нормальные напряжений, а затем касательные напряжения



Сдвиг не вызывает изменения длины ребра, удлинение ребер не приводит к сдвигу

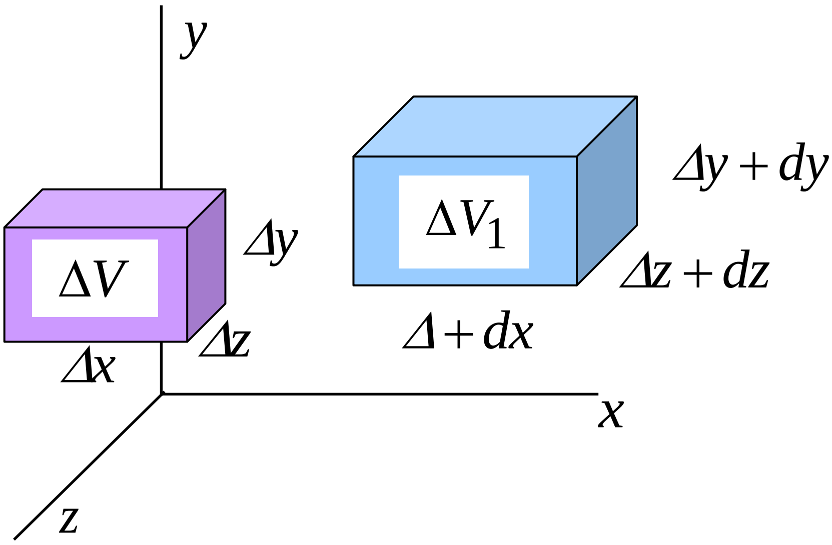
В любой координатной плоскости угловая деформация определяется только касательными напряжениями. Поэтому

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \mu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right); \qquad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G};$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \mu\left(\sigma_z + \sigma_x\right)\right); \qquad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G};$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left(\sigma_z - \mu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right); \qquad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}.$$

Относительное изменение объема



$$\Delta x + dx = \Delta x(1+\varepsilon_x)$$
$$\Delta y + dy = \Delta y(1+\varepsilon_y)$$
$$\Delta z + dz = \Delta z(1+\varepsilon_z)$$

$$\varepsilon_V = \frac{\Delta V_1 - \Delta V}{\Delta V} = \frac{\Delta x\Delta y\Delta z(1+\varepsilon_x)(1+\varepsilon_y)(1+\varepsilon_z) - \Delta x\Delta y\Delta z}{\Delta x\Delta y\Delta z}$$
$$\varepsilon_V = (1+\varepsilon_x)(1+\varepsilon_y)(1+\varepsilon_z) - 1$$

Пренебрегая произведениями относительных деформаций, получаем

$$\varepsilon_V = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = J_1,$$

т.е. физический смысл первого инварианта деформированного состояния J_1 – относительное изменение объема.

Подставим значения деформаций из обобщенного закона Гука

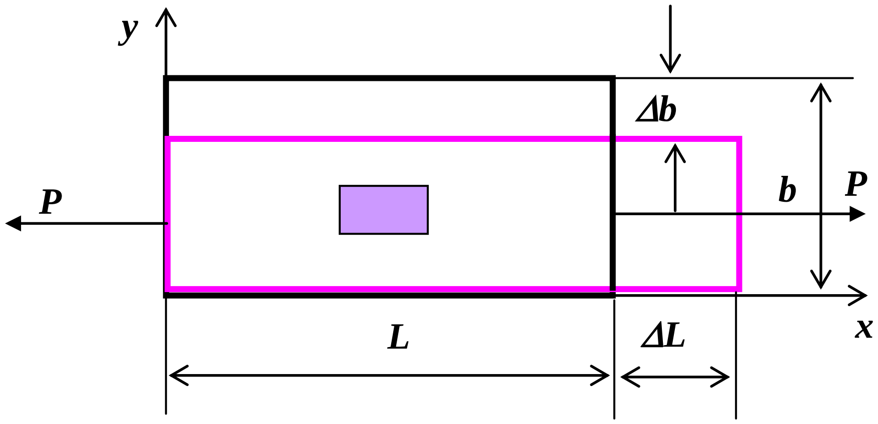
$$\varepsilon_V = \frac{1-2\mu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{1-2\mu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$

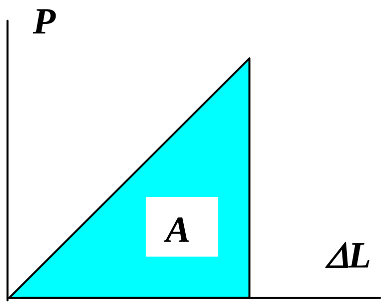
Таким образом, относительное изменение объема равно нулю, если

$(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = 0$ или $\mu = \frac{1}{2}$.

Удельная потенциальная энергия деформации

Удельная потенциальная энергия при одноосном напряженном состоянии

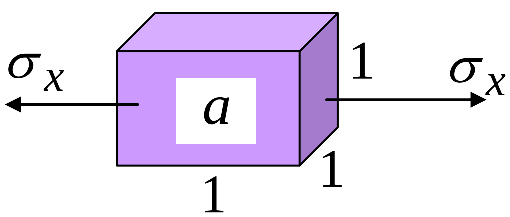




Потенциальная энергия деформации стержня

$$A = \int_0^{\Delta L} P(\Delta L)\, d(\Delta L) = \int_0^{\Delta L} \frac{EF}{L} \Delta L\, d(\Delta L) = \frac{EF}{L}\frac{\Delta L^2}{2} = \frac{P\Delta L}{2}$$

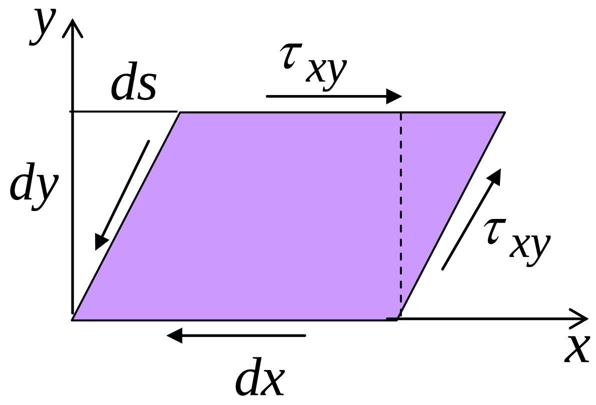
Потенциальная энергия деформации единицы объема стержня - удельная потенциальная энергия



$$a = \frac{A}{LF} = \frac{P\Delta L}{2LF} = \frac{1}{2}\frac{P}{F}\frac{\Delta L}{L} = \frac{1}{2}\sigma_x \varepsilon_x = \frac{\sigma_x^2}{2E} = \frac{E\varepsilon_x^2}{2}$$

Удельная потенциальная энергия при чистом сдвиге

Рассмотрим напряженное состояние чистый сдвиг



Потенциальная энергия деформации элемента при чистом сдвиге

$$A_{xy} = \frac{\tau_{xy} dF ds}{2}$$

Удельная потенциальная энергия деформации при чистом сдвиге

$$a_{xy} = \frac{\tau_{xy} dF ds}{2dFdy} = \frac{\tau_{xy}}{2}\frac{ds}{dy} = \frac{\tau_{xy}\gamma_{xy}}{2} = \frac{\tau_{xy}^2}{2G} = \frac{G\gamma_{xy}^2}{2}$$

Удельная потенциальная энергия при трехосном напряженном состоянии

Каждая составляющая тензора напряжений производит работу только на своем перемещении (деформации). Поэтому, в общем случае,

$$a_{xyz} = \frac{1}{2}\left(\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \sigma_z\varepsilon_z + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{xz}\gamma_{xz} + \tau_{yz}\gamma_{yz}\right)$$

Если все напряжения - главные, то удельная потенциальная энергия равна

$$a_{123} = \frac{1}{2E}\left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu\left(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3\right)\right).$$

Удельная потенциальная энергия изменения объема и удельная потенциальная энергия изменения формы

Полную удельную потенциальную энергию a можно разделить на две составляющие

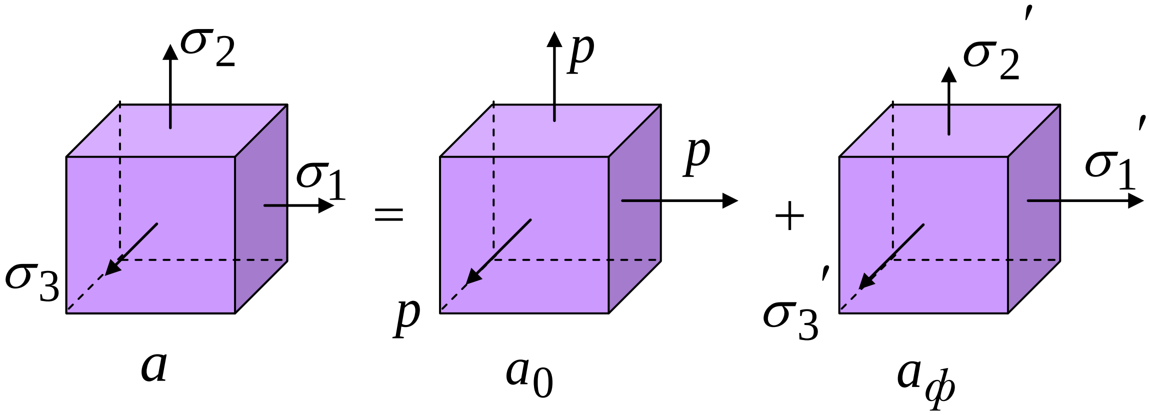
$$a = a_0 + a_ф$$

где

a_0 - удельная потенциальная энергия, связанная только с изменением объема;

$a_ф$ - удельная потенциальная энергия, связанная только с изменением формы тела;

Представим напряженное состояние в виде суммы напряженных состояний: всестороннего растяжения и дополнительного к нему.



Каждое из главных напряжений теперь можно представить в виде суммы напряжений

$$\sigma_1 = \sigma_1' + p$$

$$\sigma_2 = \sigma_2' + p$$

$$\sigma_3 = \sigma_3' + p$$

Чтобы изменение объема в дополнительном напряженном состоянии было равно нулю,

$$\varepsilon_V' = \frac{1-2\mu}{E}\left(\sigma_1' + \sigma_2' + \sigma_3'\right) = 0$$

необходимо выполнение условия

$$\left(\sigma_1' + \sigma_2' + \sigma_3'\right) = 0.$$

С другой стороны, сумма главных напряжений равна

$$\left(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3\right) = \left(\sigma_1' + \sigma_2' + \sigma_3'\right) + 3p.$$

Поэтому получаем, что напряжение всестороннего растяжения равно среднему значению трех главных напряжений исходного напряженного состояния, т.е.

$$p = \frac{1}{3}\left(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3\right) = \sigma_{cp}$$

Следовательно, $$a_0 = \frac{3}{2} p\varepsilon = \frac{3(1-2\mu)}{2}\frac{p^2}{E}$$

где относительная деформация ε в направлении действия p равна

$$\varepsilon = \frac{1}{E}\left(p - \mu(p+p)\right) = \frac{p}{E}(1-2\mu).$$

Удельную потенциальную энергию изменения объема можно записать через главные напряжения исходного напряженного состояния

$$a_0 = \frac{1-2\mu}{6E}\left(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3\right)^2.$$

Переходим к вычислению потенциальной энергии изменения формы.

$$a_\phi = a - a_0$$

Ранее получено, что

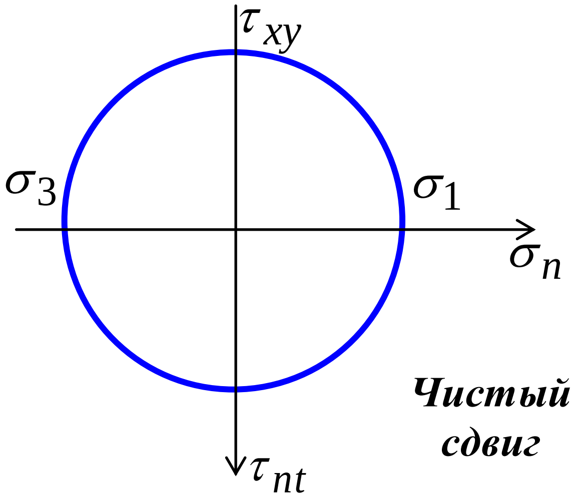
$$a = \frac{1}{2E}\left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3)\right).$$

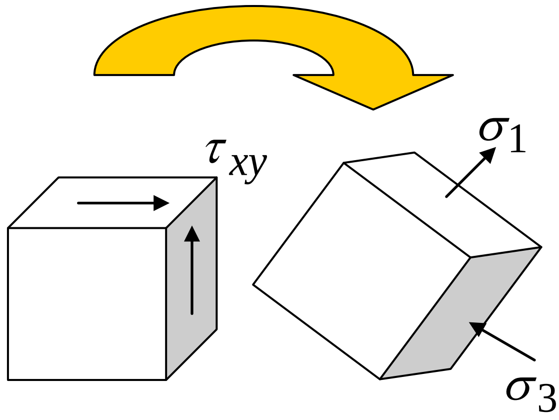
Следовательно

$$a_\phi = \frac{1+\mu}{6E}\left((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2\right).$$

Связь между константами упругости E, G и μ

Рассмотрим напряженное состояние «чистый сдвиг».





$$|\tau_{xy}| = |\sigma_1| = |\sigma_3|$$

$$\sigma_1 = -\sigma_3$$

Для исходного напряженного состояния удельная потенциальная энергия равна

$$a_{xy} = \frac{\tau_{xy}^2}{2G}$$

Для преобразованного напряженного состояния удельная потенциальная энергия равна

$$a_{13} = \frac{1}{2E}\left(\sigma_1^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_3)\right) = \frac{\sigma_1^2}{E}(1+\mu)$$

Поскольку $a_{xy} = a_{13}$, то имеем следующую связь между константами упругости

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}$$