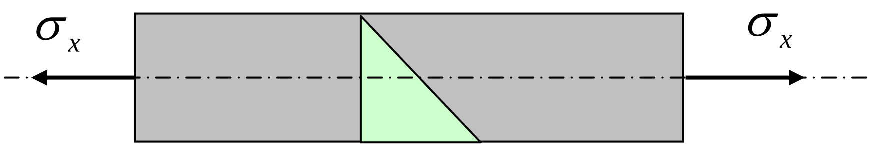
Лекция 7. Анализ напряженного состояния

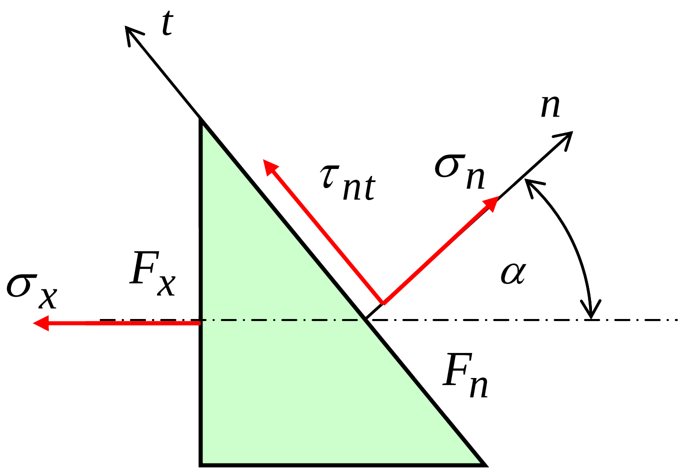
Твердое тело реагирует на внешнее воздействие целиком, как сплошная среда. Но реакция в каждой точке тела будет различной.

Математическое описание этой реакции в выбранной точке тела зависит от выбора системы координат, связанной с этой точкой.

Для примера рассмотрим стержень, нагруженный по торцам напряжениями σ_x



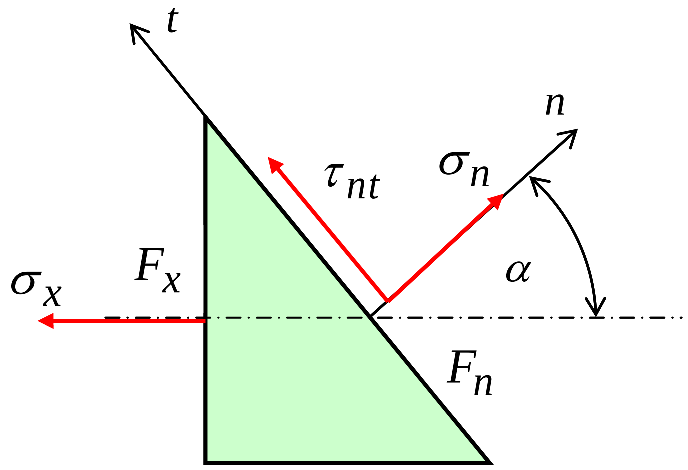
Выделим элемент стержня посредством сечения нормальной и наклонной плоскостями и рассмотрим условия его равновесия.



Свяжем с наклонной площадкой систему координат (n,t), где n - нормаль к площадке, составляющей с осью стержня угол α , t – координатная ось, полученная вращением нормали на угол $\pi/2$ против часовой стрелки.

На наклонной площадке действуют нормальное σ_n и касательное τ_{nt} напряжения. Первый индекс у касательного напряжения определяет площадку с нормалью n, второй – координатную ось t , вдоль которой действует касательное напряжение.

Касательное напряжение имеет знак «плюс», если вектор напряжения направлен в сторону положительной оси t .



Отметим, что площадь наклонной площадки F_x связана с площадью нормальной площадки F_n соотношением

$$F_n = \frac{F_x}{cos(\alpha)}.$$

Спроектируем все силы на направление нормали n,

$$\sigma_n F_n - \sigma_x F_x \cos(\alpha) = 0,$$

и получим значение нормального напряжения σ_n на наклонной площадке

$$\sigma_n = \sigma_x \cos^2(\alpha) = 0.$$

Спроектируем все силы на направление оси t,

$$\tau_{nt} F_n + \sigma_x F_x \sin(\alpha) = 0,$$

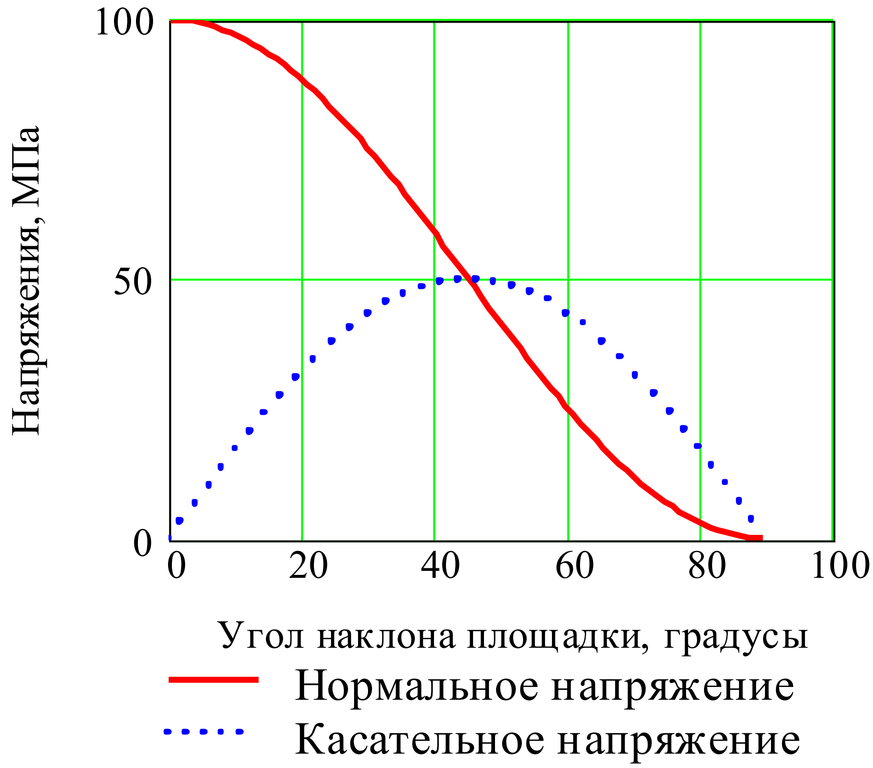
и получим абсолютное значение касательного напряжения τ_{nt} на наклонной площадке

$$\tau_{nt} = -\sigma_x \sin(\alpha)\cos(\alpha).$$

Итак, ***напряжение на наклонной площадке зависит от угла наклона нормали к площадке к оси стержня, т.е. от выбора системы координат (n,t).***

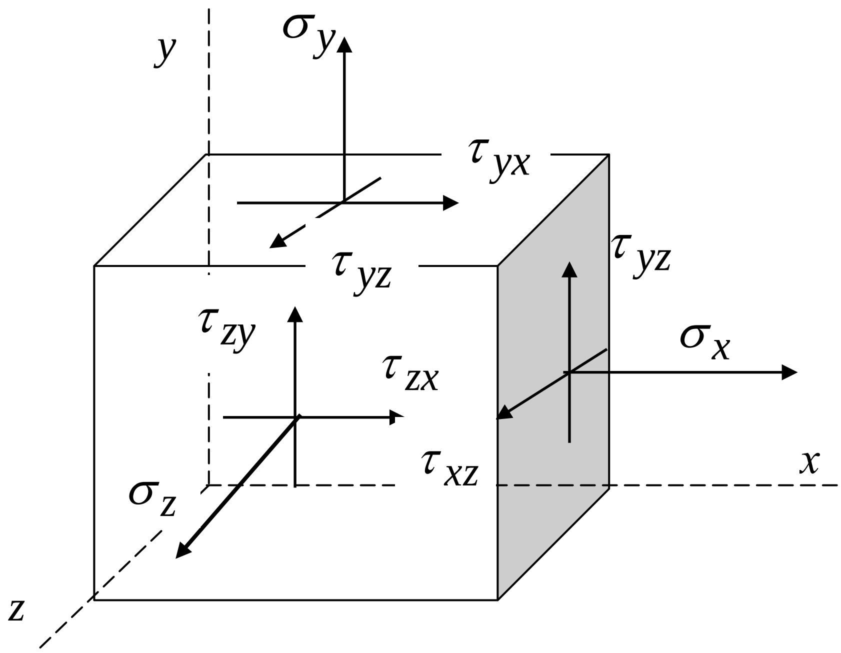
$$\sigma_n(\alpha) := \sigma_x \cdot \cos(\alpha)^2$$

$$\tau_{nt}(\alpha) := \sigma_x \cdot \cos(\alpha) \cdot \sin(\alpha)$$



Перейдем к рассмотрению общего случая.

В окрестности заданной точки тела вырежем элементарный параллелепипед и свяжем с ним некоторую систему координат.



По граням этой «точки» будут действовать три нормальных и шесть касательных напряжений.

Совокупность этих напряжений характеризует напряженное состояние в данной точке тела. Это тензор напряжений Σ

$$\Sigma = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix}.$$

Касательные напряжения должны удовлетворять уравнениям равновесия – сумма обусловленных ими вращающих моментов должна быть равна нулю. Из этого следует ***закон парности*** касательных напряжений:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \qquad \tau_{yz} = \tau_{zy} \qquad \tau_{zx} = \tau_{xz}\,.$$

Касательные напряжения, действующие на взаимно перпендикулярных площадках, равны и направлены либо к общему ребру, либо от ребра.

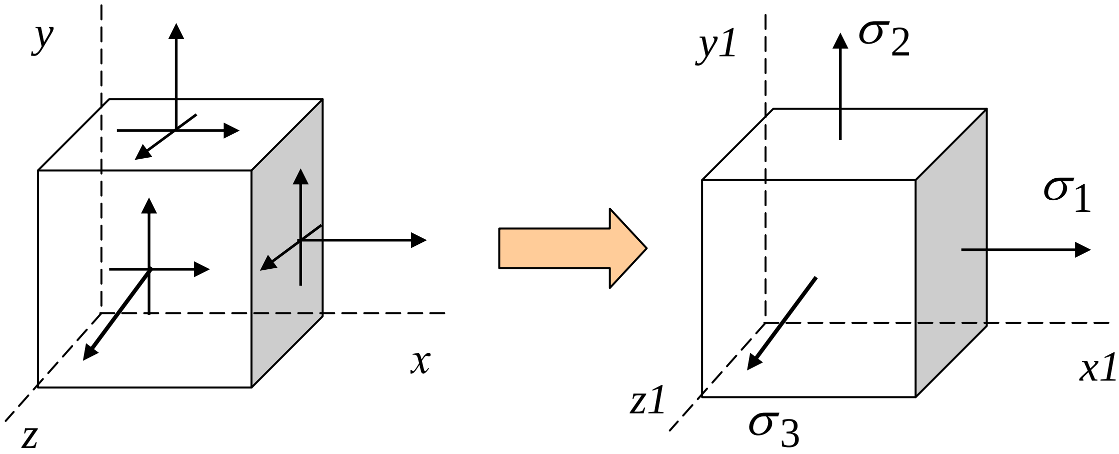
Напряжения на площадках произвольного направления рассматриваются теорией упругости.

Теорией упругости доказывается, что

1. Всегда существуют площадки, на которых ***отсутствуют*** касательные напряжения.

2. Эти площадки взаимно перпендикулярны и называются ***главными*** площадками.

3. На трех ***главных*** площадках действуют только нормальные напряжения, которые называют ***главными***. Их обозначают как σ_1, σ_2 и σ_3, причем, по соглашению, $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$.



4. Напряжения σ_1 и σ_3 - это экстремальные значения нормальных напряжений для всех площадок, проходящих через данную точку.

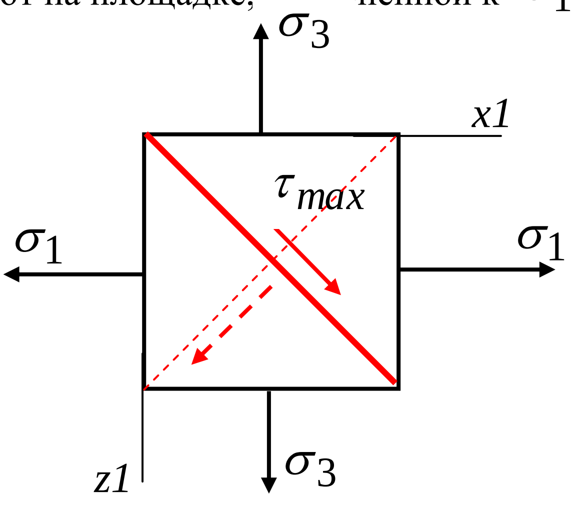
5 . Тензор главных напряжений имеет диагональный вид

$$\Sigma_{123} = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{vmatrix}$$

6 Наибольшие касательные напряжения τ_{max} равны

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

и действуют на площадке, ненной к σ_1 и σ_3 на 45°.



Классификация напряженных состояний

Трехосное или объёмное

$$\sigma_1 \neq 0 \qquad \sigma_2 \neq 0 \qquad \sigma_3 \neq 0$$

Двухосное или плоское

$\sigma_1 = 0$ $\quad \sigma_2 \neq 0$ $\quad \sigma_3 \neq 0$ $\Rightarrow$ $\sigma_{max} = \sigma_2$ $\quad \sigma_{min} = \sigma_3$

$\sigma_1 \neq 0$ $\quad \sigma_2 = 0$ $\quad \sigma_3 \neq 0$ $\Rightarrow$ $\sigma_{max} = \sigma_1$ $\quad \sigma_{min} = \sigma_3$

$\sigma_1 \neq 0$ $\quad \sigma_2 \neq 0$ $\quad \sigma_3 = 0$ $\Rightarrow$ $\sigma_{max} = \sigma_1$ $\quad \sigma_{min} = \sigma_2$

Одноосное или линейное

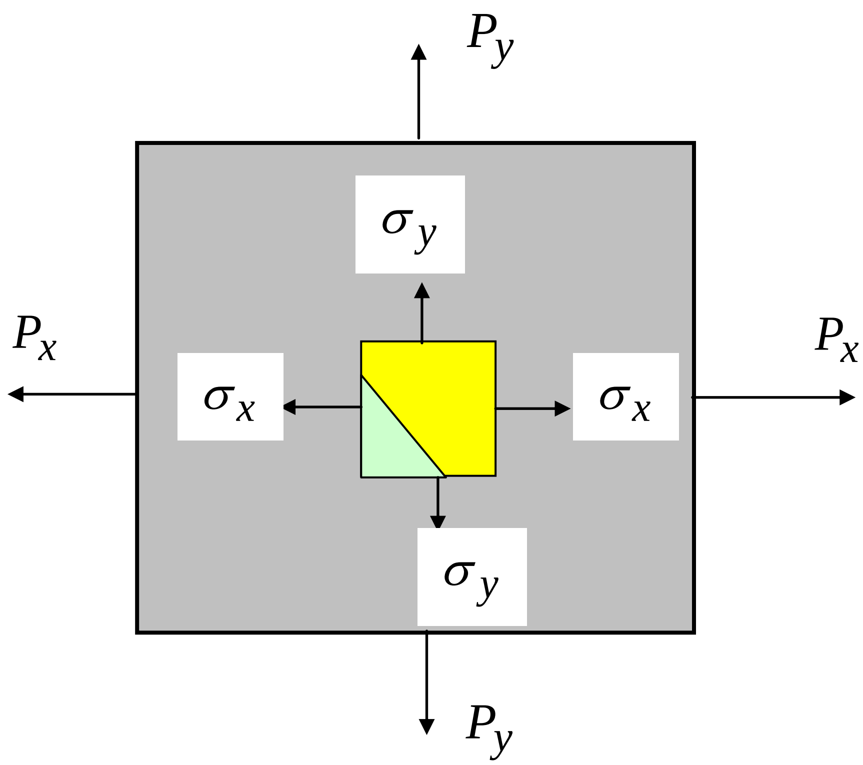
$$\sigma_1 \neq 0 \qquad \sigma_2 = 0 \qquad \sigma_3 = 0$$

$$\sigma_1 = 0 \qquad \sigma_2 = 0 \qquad \sigma_3 \neq 0$$

Для уверенного определения типа напряженного состояния необходимо знать значения всех трех главных напряжений.

Анализ двухосного напряженного состояния

Рассмотрим пластину, нагруженную силами P_x в продольном направлении и силой P_y в поперечном направлении.



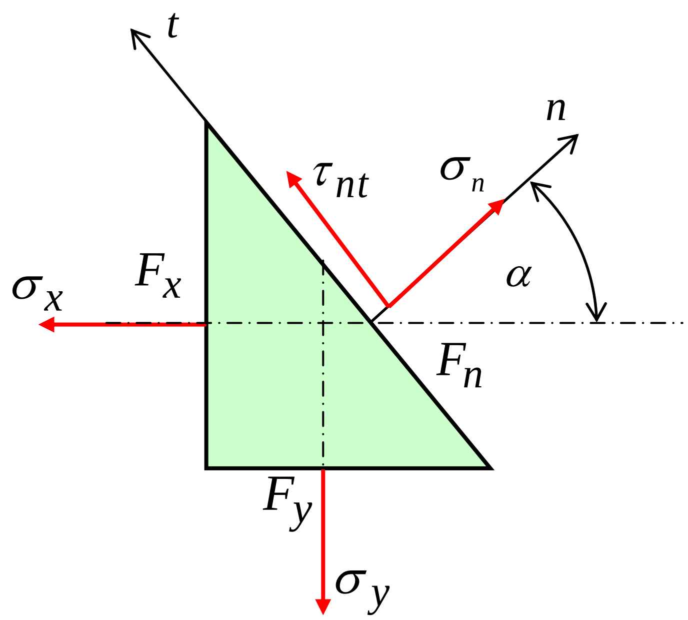
В этом случае в средней области пластины возникнет двухосное напряженное состояние (желтый квадратик).

Вырежем из этого квадратика прямоугольный треугольник со сторонами, совпадающими со сторонами квадратика.

Рассмотрим условия равновесия этого треугольника.

Заметим, что площади наклонной и нормальных площадок находятся в следующем соотношении:

$$F_n = \frac{F_x}{cos(\alpha)} = \frac{F_y}{\sin(\alpha)}$$



Спроектируем все силы на ось ***n***

$$\sigma_n F_n - \sigma_x F_x \cos(\alpha) - \sigma_y F_y \sin(\alpha) = 0$$

$$\sigma_n = \sigma_x \cos^2(\alpha) + \sigma_y \sin^2(\alpha) \qquad (01)$$

Спроектируем все силы на ось ***t***

$$\tau_{nt} F_n + \sigma_x F_x \sin(\alpha) - \sigma_y F_y \cos(\alpha) = 0 \qquad (02)$$

$$\tau_{nt} = -\sigma_x \sin(\alpha)\cos(\alpha) + \sigma_y \sin(\alpha)\cos(\alpha) = -(\sigma_x - \sigma_y)\sin(\alpha)\cos(\alpha)$$

Преобразуем полученные соотношения (01) и (02) с помощью известных формул тригонометрии

$sin^2(\alpha) = \frac{1 - cos(2\alpha)}{2}$, $cos^2(\alpha) = \frac{1 + cos(2\alpha)}{2}$ и $cos^2(\alpha) + sin^2(\alpha) = 1$, к следующему виду.

$$\sigma_n = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos(2\alpha)$$

$$\tau_{nt} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin(2\alpha)$$

Отметим, что напряжения σ_x и σ_y - это главные напряжения. Поэтому следует их обозначить как

$$\sigma_{max} = \sigma_x \qquad \sigma_{min} = \sigma_y$$

Тогда формулы для σ_n и τ_{nt} примут вид

$$\sigma_n = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2} + \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} cos(2\alpha)$$

$$\tau_{nt} = -\frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} sin(2\alpha)$$

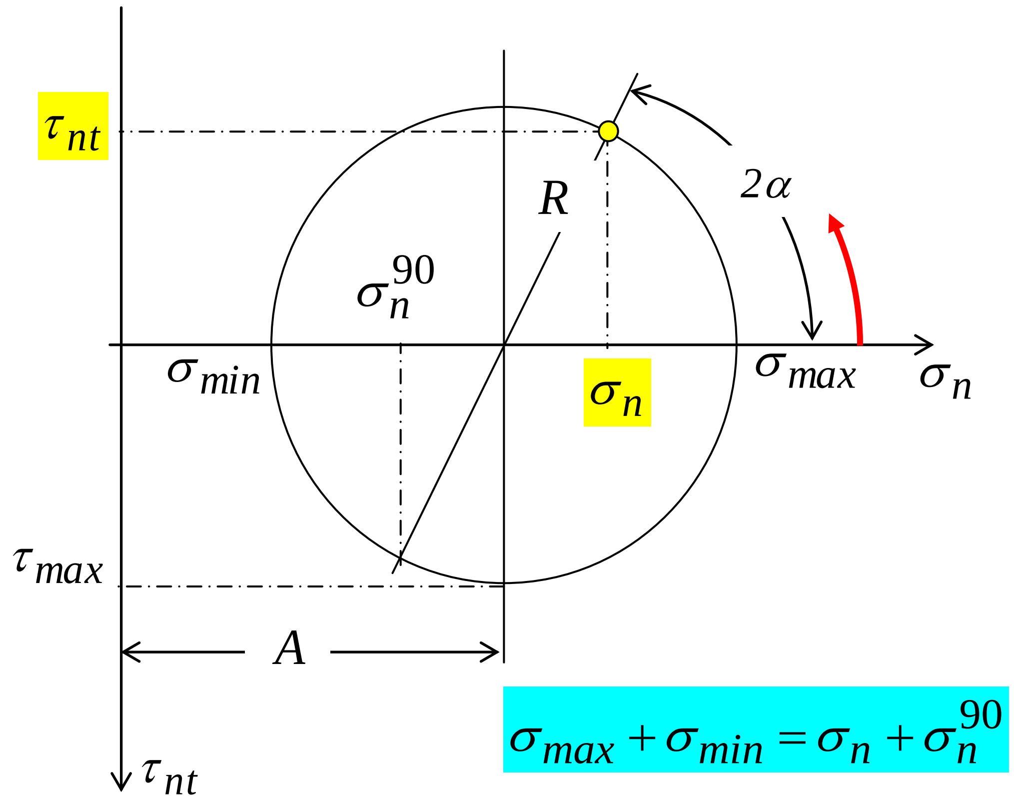
Эти формулы представляют собой параметрическое уравнение окружности в координатах σ_n и τ_{nt}.

Смещение центра этой окружности равно

$$A = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2}$$

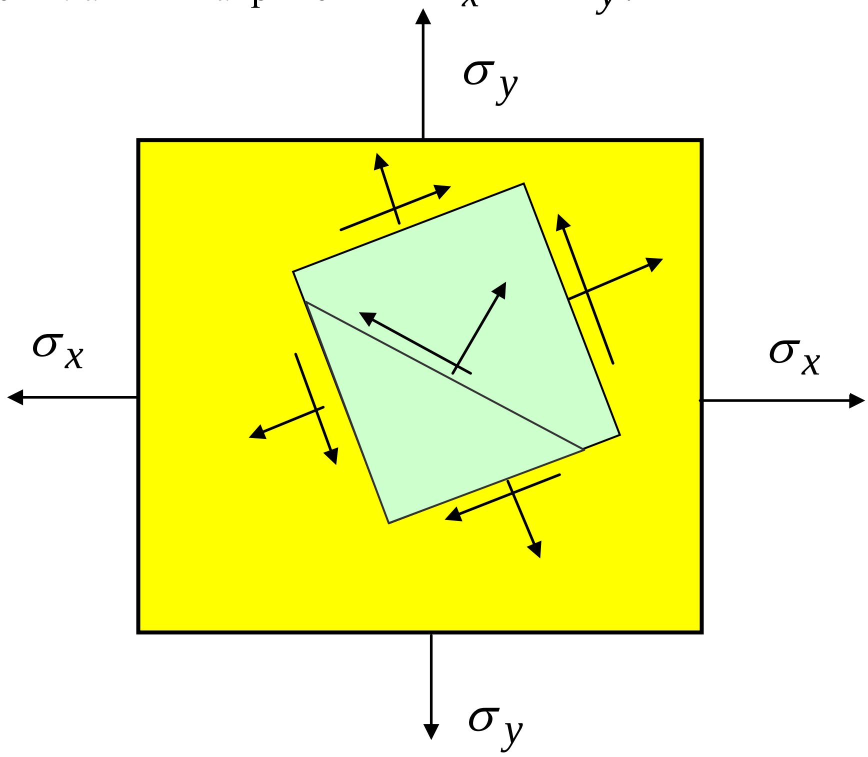
Радиус этой окружности равен

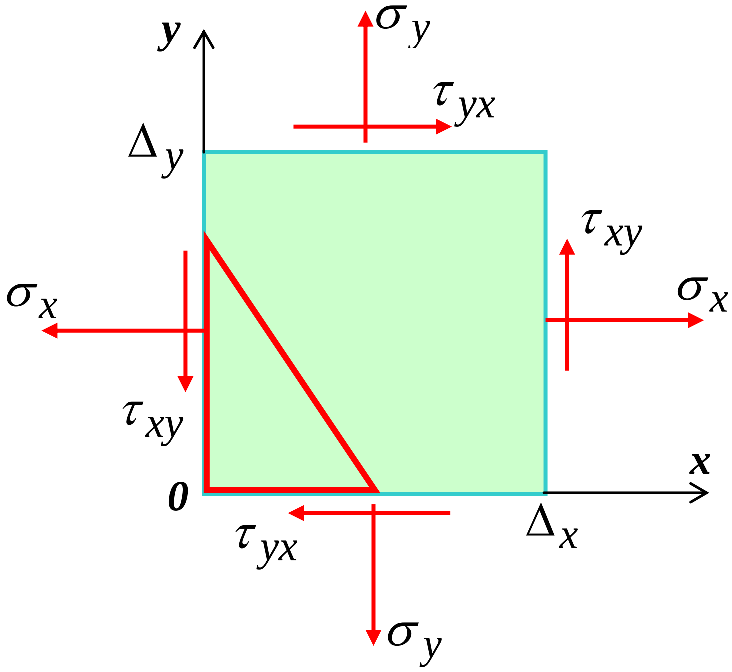
$$R = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2}$$



Координаты точки на окружности под углом 2α дают значения искомых напряжений σ_n и τ_{nt}. Угол 2α отсчитывают от оси σ_n против часовой стрелки.

Рассмотрим теперь случай, когда зеленый квадратик имеет грани, наклонные к главным напряжениям σ_x и σ_y.





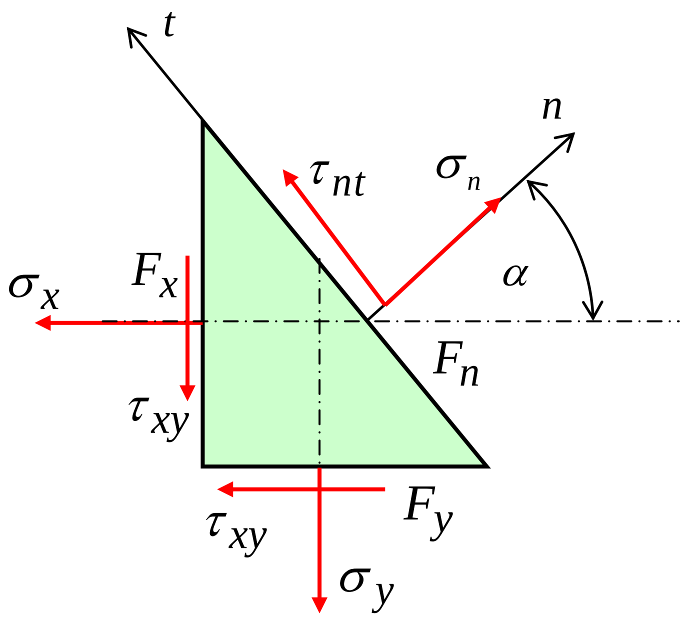
Чтобы зеленый квадратик не вращался, необходимо выполнение условия равновесия

$$\tau_{xy}\Delta_y\Delta_x - \tau_{yx}\Delta_x\Delta_y = 0$$

Из этого уравнения вытекает закон парности касательных напряжений:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

Касательные напряжения на взаимно перпендикулярных гранях равны и направлены либо к ребру кубика, либо от ребра.



$$F_n = \frac{F_x}{cos(\alpha)} = \frac{F_y}{\sin(\alpha)}$$

Спроектируем все силы на направление нормали n:

$$\sigma_n F_n - \sigma_x F_x \cos(\alpha) - \sigma_y F_y \sin(\alpha) - \tau_{xy} F_x \sin(\alpha) - \tau_{xy} F_y \cos(\alpha) = 0$$

$$\sigma_n = \sigma_x \cos^2(\alpha) + \sigma_y \sin^2(\alpha) + 2\tau_{xy} \sin(\alpha)\cos(\alpha)$$

$$\sigma_n = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos(2\alpha) + \tau_{xy}\sin(2\alpha) \qquad (1)$$

Спроектируем все силы на направление оси t:

$$\tau_{nt} F_n + \sigma_x F_x \sin(\alpha) - \sigma_y F_y \cos(\alpha) - \tau_{xy} F_x \cos(\alpha) + \tau_{xy} F_y \sin(\alpha) = 0$$

$$\tau_{nt} = -\sigma_x \sin(\alpha)\cos(\alpha) + \sigma_y \sin(\alpha)\cos(\alpha) + \tau_{xy}\left(\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)\right)$$

$$\tau_{nt} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin(2\alpha) + \tau_{xy}\cos(2\alpha) \qquad (2)$$

Полученные формулы (1) и (2) позволяют вычислить напряжения на любой площадке, наклонной к исходным площадкам, по напряжениям на исходных площадках.

Допустим, что наклонная площадка главная, т.е. $\tau_{nt} = 0$, то из формул (1) и (2) можно получить выражения для ориентации главной площадки по отношению к оси x и значение главного напряжения на этой площадке.

Действительно, если $\tau_{nt} = 0$, из уравнения (2) получаем

$$tan(2\alpha) = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \qquad (2\text{-}2)$$

где угол отсчитывается от оси x против часовой стрелки.

Воспользовавшись формулами тригонометрии

$$sin(2\alpha)=\frac{tan(2\alpha)}{\sqrt{1+tan^2(2\alpha)}} \quad \text{и} \quad cos(2\alpha)=\frac{1}{\sqrt{1+tan^2(2\alpha)}}$$

а также формулой (2-2), приведем
Уравнение (1) приводится к следующему виду:

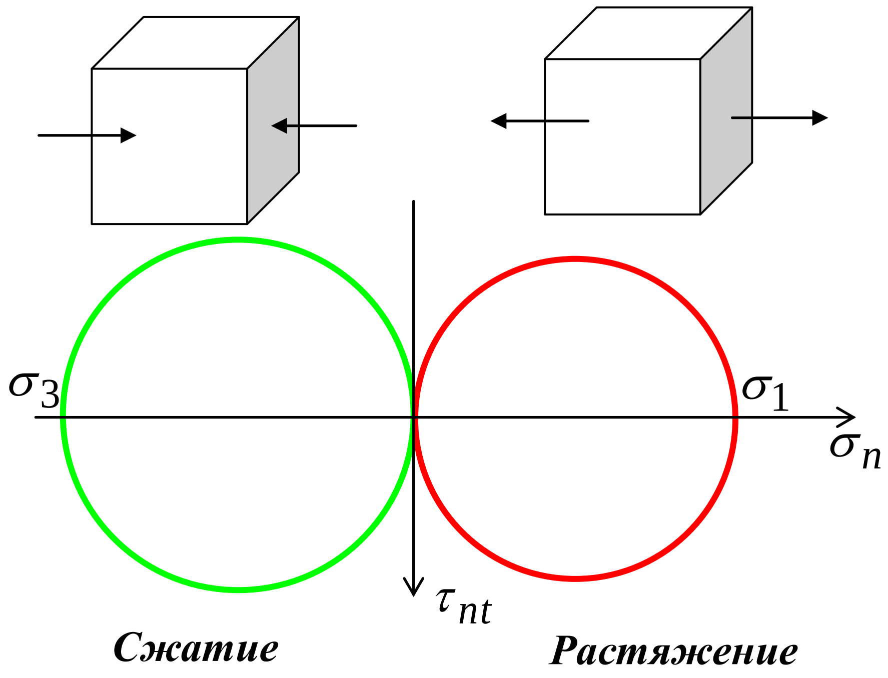
$$\sigma_n=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2} \qquad (1\text{-}1)$$

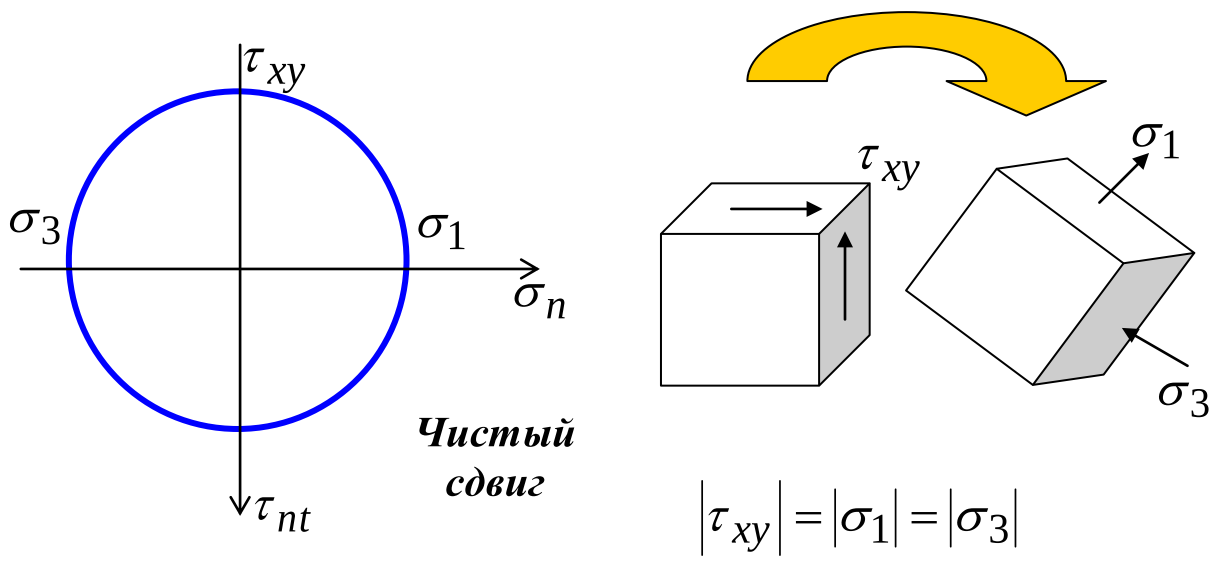
Если $\sigma_x > \sigma_y$, то $\sigma_n=\sigma_{max}$ и уравнение (1-1) можно обобщить как

$$\sigma_{max/min}=\frac{(\sigma_x+\sigma_y)}{2}\begin{matrix}+\\-\end{matrix}\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2} \qquad (1\text{-}1\text{-}1)$$

Частными случаями двухосного напряженного состояния являются

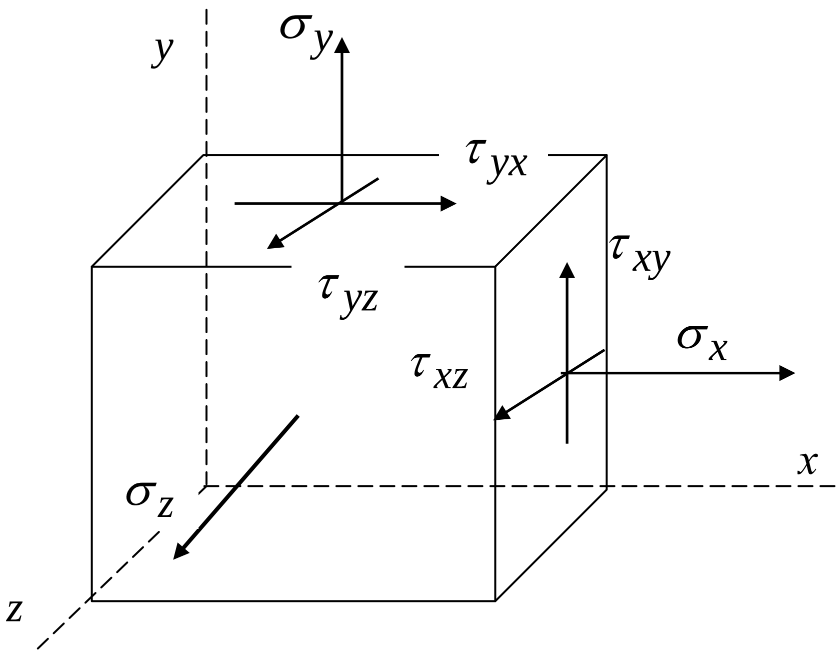
- Растяжение
- Сжатие
- Чистый сдвиг





Анализ трехосного напряженного состояния

Рассмотрим трехосное напряженное состояние, для которого напряжение σ_z является главным и известным. Это напряжение не оказывает никакого воздействия на площадки, параллельные оси z. Поэтому формулы, полученные для плоского состояния, для этих площадок остаются в силе.



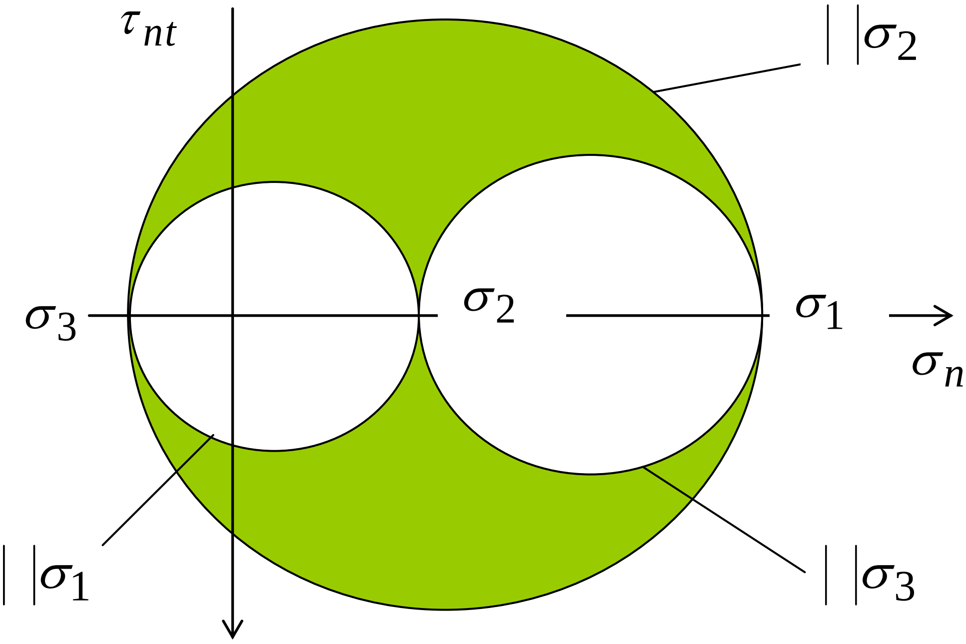
$$\sigma_{max/min} = \frac{\left(\sigma_x + \sigma_y\right)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_1 = max\langle \sigma_{max}, \sigma_{min}, \sigma_z \rangle$$

$$\sigma_2 = min\,max\langle \sigma_{max}, \sigma_{min}, \sigma_z \rangle$$

$$\sigma_3 = min\langle \sigma_{max}, \sigma_{min}, \sigma_z \rangle$$

Круги Мора для трехосного напряженного состояния имеют следующий вид



Поскольку главные напряжения – это экстремальные значения напряжений для данного напряженного состояния, то точки, соответствующие всем возможным описаниям данного напряженного состояния, лежат в закрашенной области, включая точки на всех трех окружностях.