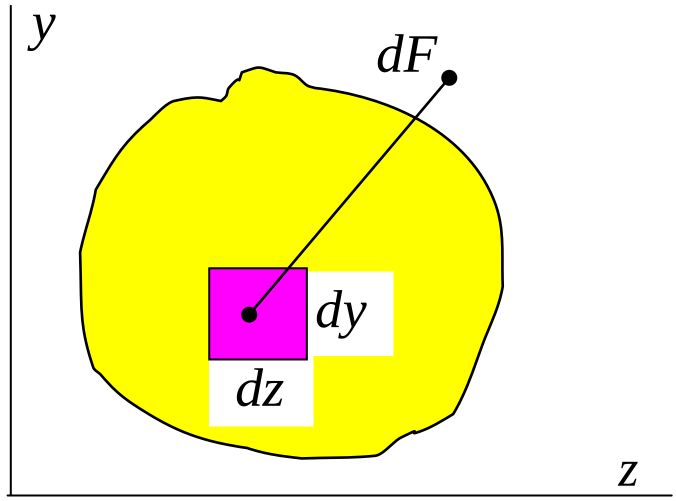
Лекция 6. Геометрические характеристики поперечных сечений бруса

Площадь поперечного сечения

Нам хорошо известна такая геометрическая характеристика сечения, как площадь F.

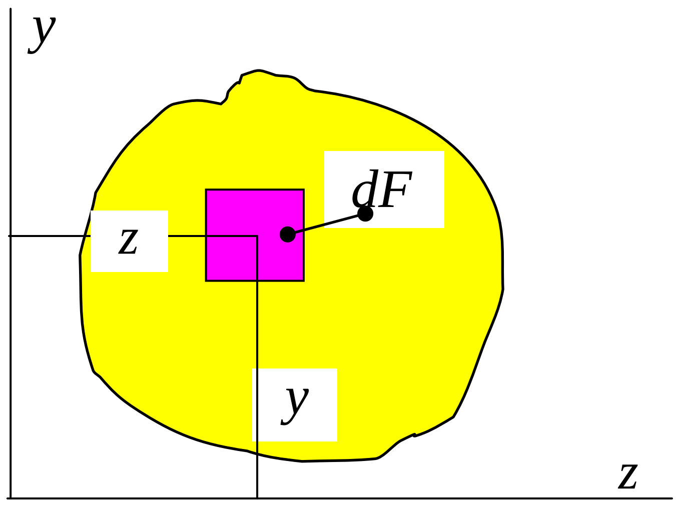


$$F = \int\limits_F dF = \iint\limits_F dydz \qquad (6.1)$$

Отличие этой характеристики в том, что она не зависит от выбора системы координат, так как рассматриваемая элементарная площадка не связана ни с одной координатной осью.

В лекции кручение мы познакомились с еще одной характеристикой – полярным моментом инерции сечения J_p. Но об этом несколько позже.

Статический момент сечения



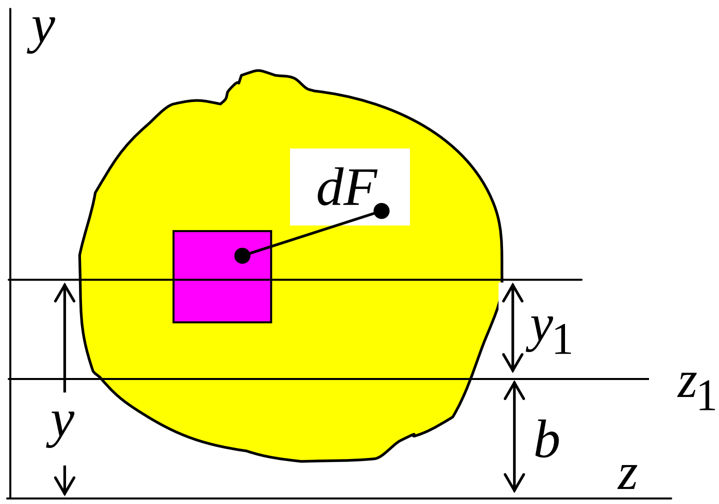
Статические моменты сечения S_z и S_y относительно осей z и y определяют, соответственно, как следующие интегралы по площади

$$S_z = \int_F y dF \,; \qquad (6.2)$$

$$S_y = \int_F z dF \,. \qquad (6.3)$$

Естественно, что при параллельном переносе координатных осей z и y значения S_z и S_y изменяются.

Допустим, что ось z_1 смещена вверх относительно оси z на расстояние b.



Теперь

$$y_1 = y - b$$

и статический момент сечения S_{z_1} относительно оси z_1 будет равен

$$S_{z_1} = \int_F y_1 dF = \int_F (y-b) dF = \int_F y dF - \int_F b dF = S_z - bF \,.$$

Поскольку перемещение b может быть в любом направлении, то значение величины b можно подобрать так, чтобы

$$S_{z_1} = 0 \,.$$

Тогда

$$S_z = bF \,. \qquad (6.4)$$

Ось z_1, относительно которойстатический момент сечения S_{z_1} равен нулю, называется ***центральной***.

Точка пересечения центральных осей z_1 и y_1 называется ***центром тяжести сечения***.

Статический момент инерции относительно любой оси, проходящей через центр тяжести сечения, равен нулю.

Теперь мы можем рассматривать перемещение b как расстояние y_c от оси z до центра тяжести сечения:

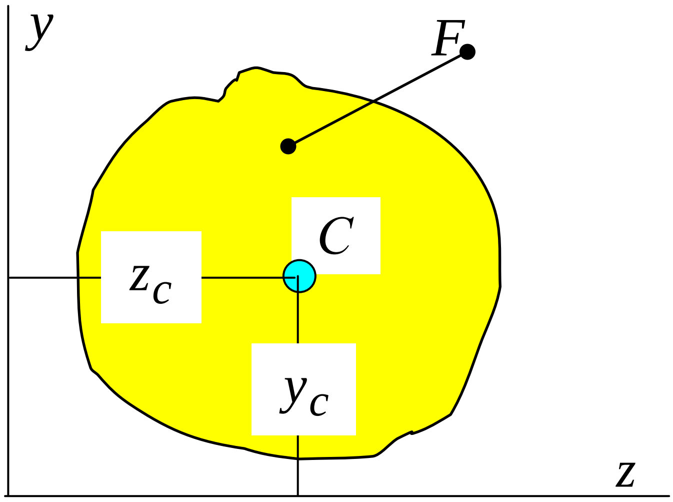
$$y_c = b$$

Поэтому статический момент можно просто S_z вычислить, если известна площадь сечения F и расстояния y_c от оси до центра тяжести сечения,

$$S_z = y_c F . \qquad (6.5)$$

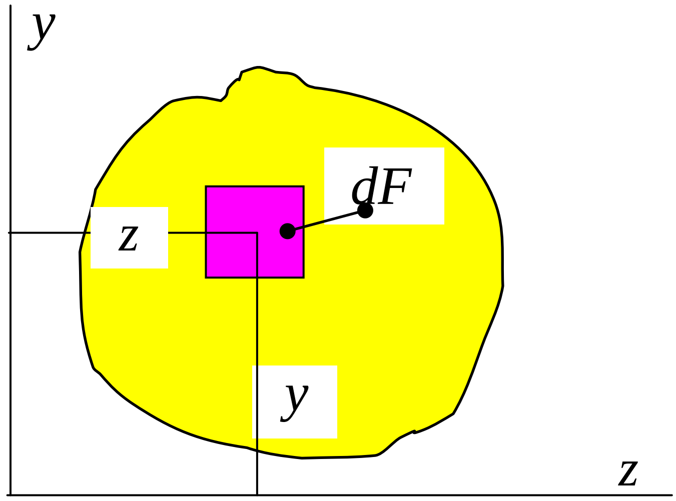
Аналогично,

$$S_y = z_c F . \qquad (6.6)$$



Размерность статических моментов сечения - $м^3$

Осевые моменты инерции сечения



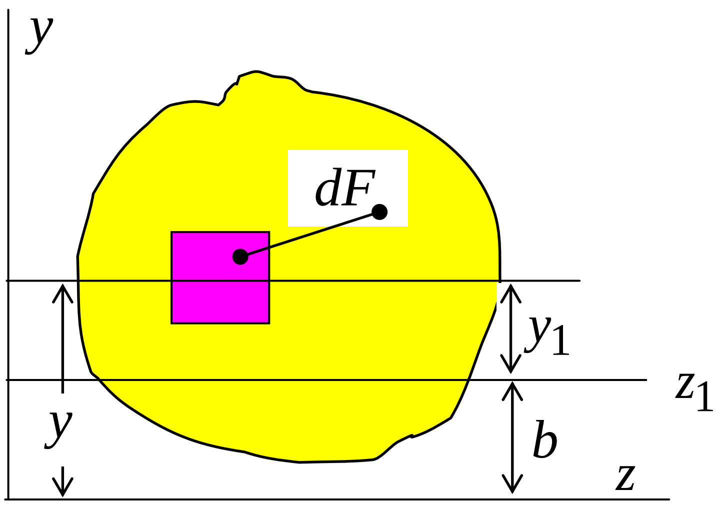
Осевые моменты инерции сечения I_z и I_y относительно координатных осей z и y соответственно, определяют как интегралы

$$I_z = \int_F y^2 dF \quad ; \tag{6.7}$$

$$I_y = \int_F z^2 dF \quad . \tag{6.8}$$

Осевые моменты инерции сечения всегда положительны. Их размерность - $м^4$.

Рассмотрим, как изменяется осевой момент инерции I_z при параллельном переносе оси z.



Опять

$$y_1 = y - b,$$

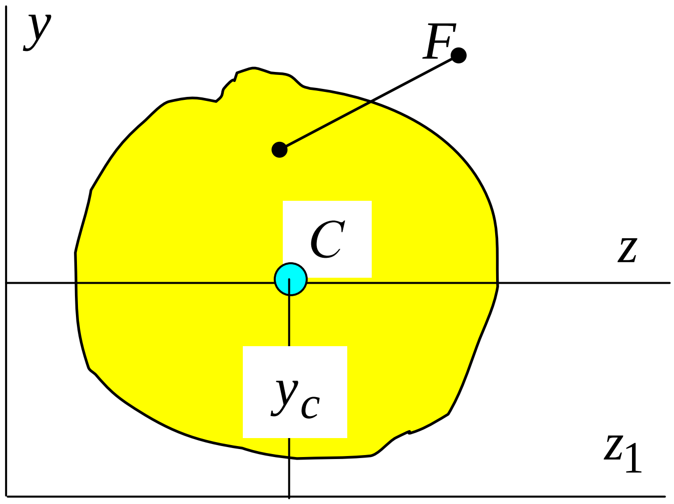
$$I_{z_1} = \int\limits_F y_1^2 dF = \int\limits_F (y-b)^2 dF = \int\limits_F y^2 dF - 2\int\limits_F bydF + b^2\int\limits_F dF,$$

$$I_{z_1} = I_z - 2bS_z + b^2 F \quad . \qquad (6.9)$$

Допустим, что ось z – центральная.

Тогда статический момент $S_z = 0$, $b = y_c$ и уравнение (10.9) будет иметь вид

$$I_{z_1} = I_z + y_c^2 F\,. \qquad (6.10)$$



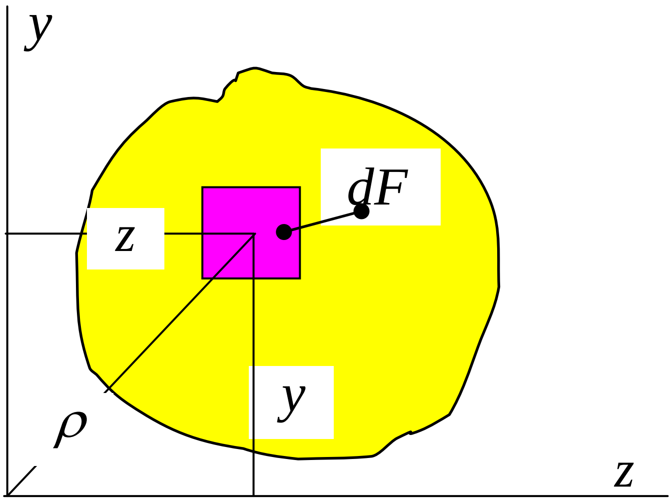
Следовательно, при переходе от центральной оси z к некоторой другой, например z_1, находящейся на расстоянии y_c от центра тяжести, осевой момент увеличивается на $y_c^2 F$.

Осевой момент инерции относительно центральной оси имеет минимальное значение среди всех моментов относительно осей, параллельной данной центральной.

Полярный момент инерции

Полярный момент инерции I_p определяют как интеграл по площади сечения

$$I_p = \int_F \rho^2 dF \quad . \qquad (6.11)$$



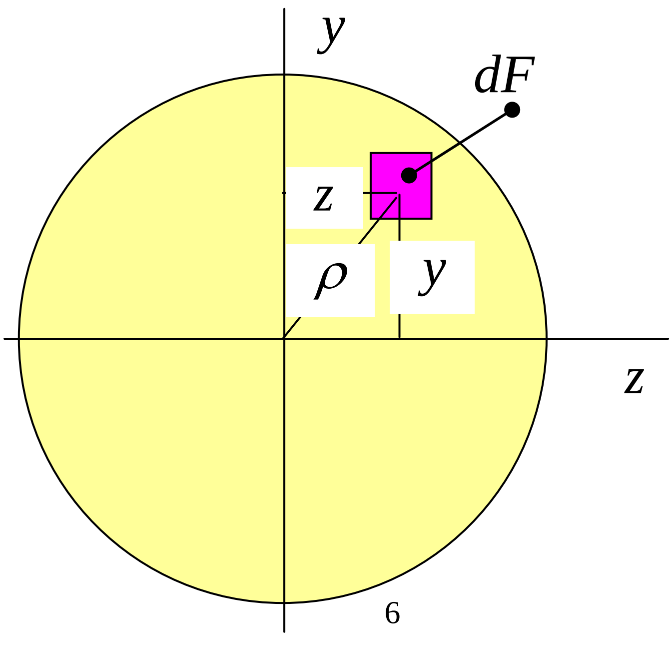
Так как радиус ρ связан с координатами точки z и y соотношением,

$$\rho^2 = z^2 + y^2$$

то

$$I_p = \int_F \left(z^2 + y^2\right) dF = I_z + I_y \quad . \qquad (6.12)$$

Рассмотрим круглое поперечное сечение, причем оси z и y - центральные.



Для круга

$$I_y = I_z,$$

следовательно

$$I_p = 2I_z. \qquad (6.13)$$

Поскольку для круга диаметром *D*

$$I_p = \frac{\pi D^4}{32}, \qquad (6.14)$$

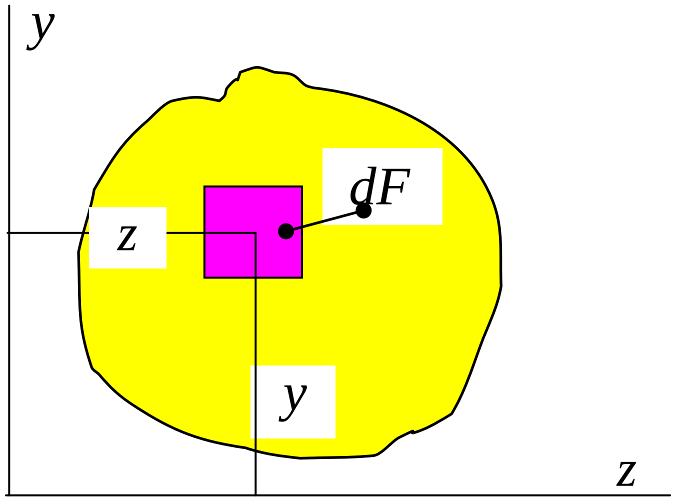
то

$$I_z = I_y = \frac{\pi D^4}{64}. \qquad (6.15)$$

Центробежный момент инерции

Центробежный момент инерции I_{zy} определяют как интеграл по площади

$$I_{zy} = \int_F zy\,dF. \qquad (6.16)$$



Центробежный момент инерции I_{zy} может принимать любые значения, в том числе имеются оси, относительно которых $I_{zy} = 0$.

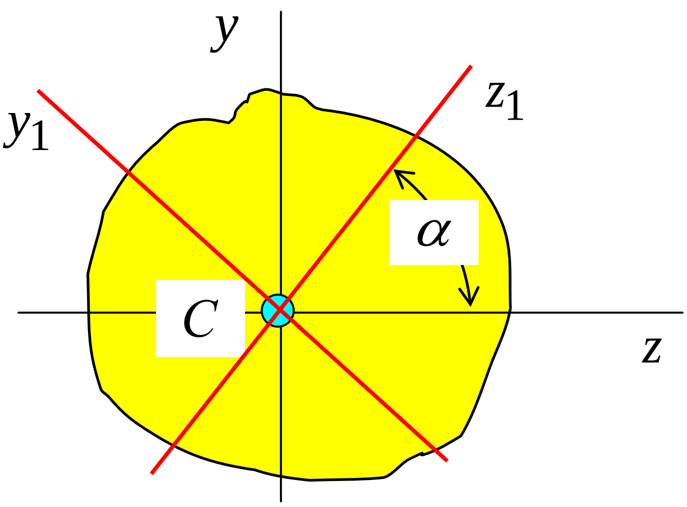
Координатные оси, относительно которых $I_{zy} = 0$, называются **главными осями инерции**.

Если главные оси проходят через центр тяжести сечения, то они называются **главными центральными** осями. Начало координат в этом случае находится в центре тяжести сечения.

Осевые моменты инерции относительно главных осей называются **главными моментами инерции**. Главные моменты инерции **экстремальны** относительно всех осей, проходящих через центр тяжести.

Оси симметрии – всегда главные оси.

Допустим, что известны значения осевых моментов инерции I_z и I_y, а также центробежного момента I_{zy} относительно осей z и y.



Тогда максимальный I_{max} и минимальный I_{min} осевые моменты инерции будут равны

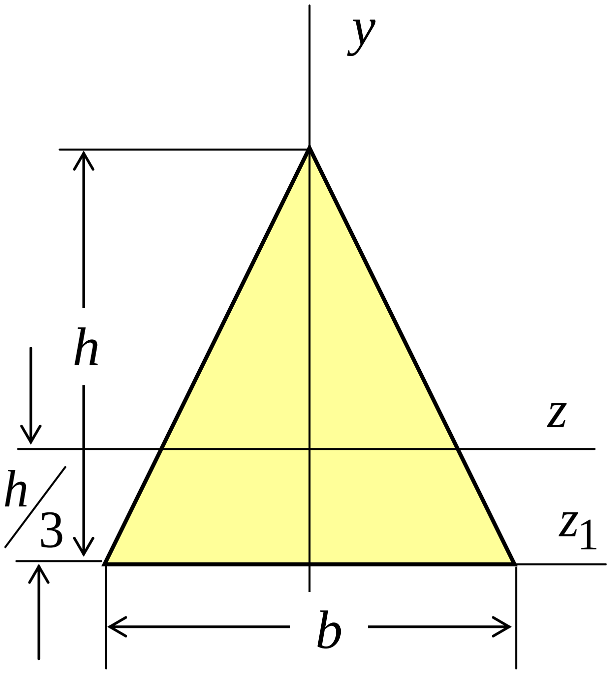
$$I_{max/min} = \frac{I_y + I_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + I_{yz}^2},$$

а оси y_1 и z_1, относительно которых осевые моменты инерции экстремальны, составят с исходными осями и y и z угол α, равный

$$\alpha = \frac{1}{2} a\tan\left(\frac{2I_{yz}}{I_y - I_z}\right).$$

Если сечение имеет одну ось симметрии, например сечение в виде равнобедренного треугольника, то эта ось y будет главной центральной осью.

Другая главная центральная ось z будет перпендикулярна первой и проходить через центр тяжести сечения.

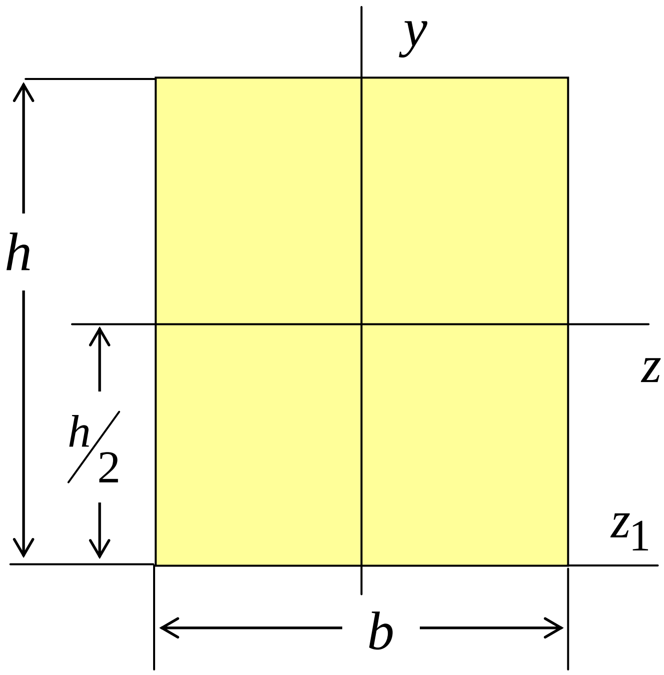


Дадим выражения для осевых моментов инерции треугольного сечения относительно указанных осей.

$$I_z = \frac{bh^3}{36} \qquad I_{z_1} = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_y = 2\frac{h\left(\frac{b}{2}\right)^3}{12} = \frac{hb^3}{48}$$

Осевые моменты инерции прямоугольного сечения



$$I_z = \frac{bh^3}{12} \qquad I_{z_1} = \frac{bh^3}{3}$$

$$I_y = \frac{hb^3}{12}$$