Лекция 5. Кручение

Кручение круглого вала

Деформация кручения. Внутренние силовые факторы. Правило знаков

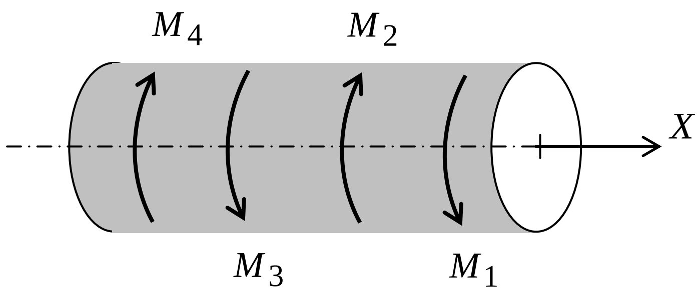
Кручение – это вид деформации, характеризующийся взаимным поворотом поперечных сечений под действием крутящих моментов, действующих в этих сечениях.

При кручении в поперечных сечениях возникают только внутренние крутящие моменты.

$$M_x \neq 0$$

Остальные пять силовых факторов равны нулю.

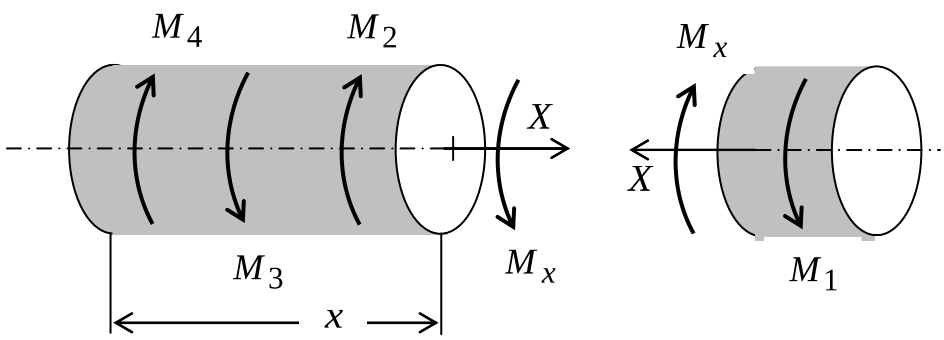
Рассмотрим вал, нагруженный системой внешних крутящих моментов и находящийся в равновесии.



Для нахождения значения M_x в некотором сечении, отстоящем от левого конца вала на расстоянии x, воспользуемся методом сечений. Разделим вал на две части, одну, например, правую часть, отбросим и рассмотрим равновесие оставшейся левой.

Будем пользоваться следующим правилом знаков

Момент M_x, действующий в сечении вала, считается положительным, если он направлен против часовой стрелки при наблюдении с конца оси X, связанной с центром тяжести данного поперечного сечения.



Запишем условие равновесия левой части вала:

$$-M_4 + M_3 - M_2 + M_x = 0;$$
$$M_x = M_4 - M_3 + M_2 = M_1,$$

так как вал находится в равновесии, т.е.

$$-M_4 + M_3 - M_2 + M_1 = 0$$

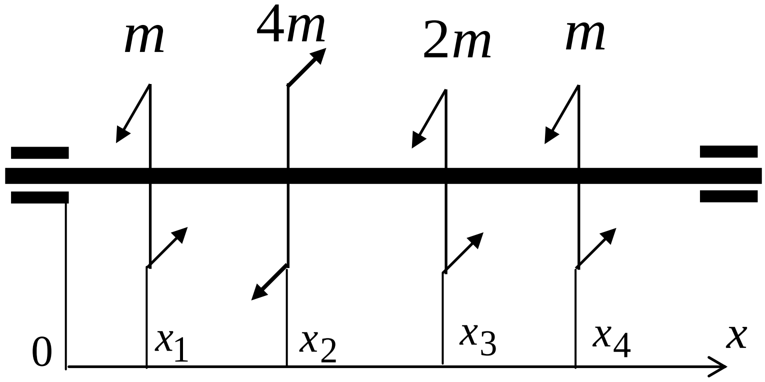
Аналогичный результат получим из условия равновесия правой части вала:

$$M_x - M_1 = 0; \quad M_x = M_1.$$

Построение эпюр крутящих моментов

Практическое правило. ***Крутящий момент M_x в любом поперечном сечении вала равен алгебраической сумме внешних крутящих моментов, действующих с одной стороны от сечения, взятой с обратным знаком.***

Рассмотрим вал, находящийся в равновесии: $m - 4m + 2m + m = 0$



Данная система статически определима.

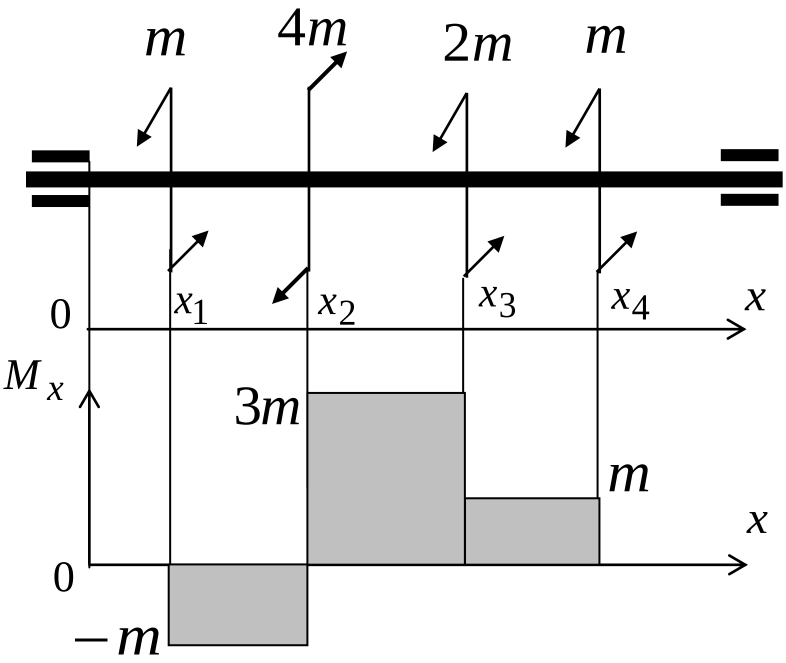
Воспользуемся практическим правилом.

$M_x = -m$ при $0 \le x < x_1$

$M_x = -m + 4m = 3m$ при $x_1 \le x < x_2$

$M_x = -m + 4m - 2m = m$ при $x_2 \le x \le x_3$

В результате получаем следующую эпюру крутящих моментов



Напряжения и деформации при кручении вала круглого сечения

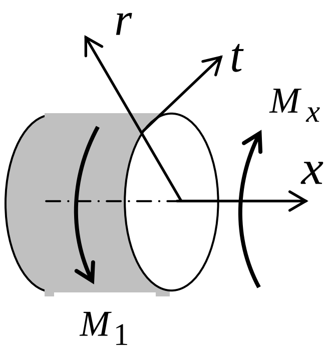
Задача решается при следующих допущениях:

1. Вал остается прямолинейным. Его ось не искривляется.

2. Справедлива гипотеза плоских сечений: Поперечное сечение вала, нагруженного крутящими моментами, поворачивается в своей плоскости, как жесткий диск. Радиусы сечения не искривляются.

3. Расстояния между поперечными сечениями вала не изменяются, т.е. длина бруса при кручении остается неизменной.

Решение задачи дадим в системе координат x, r, t.



Ось t - это касательная к окружности в точке пересечения радиуса с окружностью.

Из принятых допущений следует, что все деформации, за исключением деформации сдвига γ_{xt}, равны нулю.

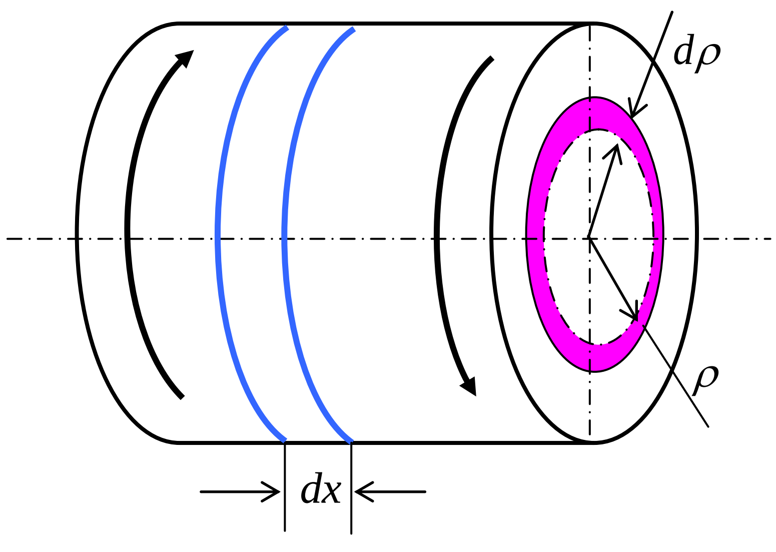
При кручении изменяются прямые углы между направлениями x и t

$$\gamma_{xt} = \gamma_{tx} \neq 0 .$$

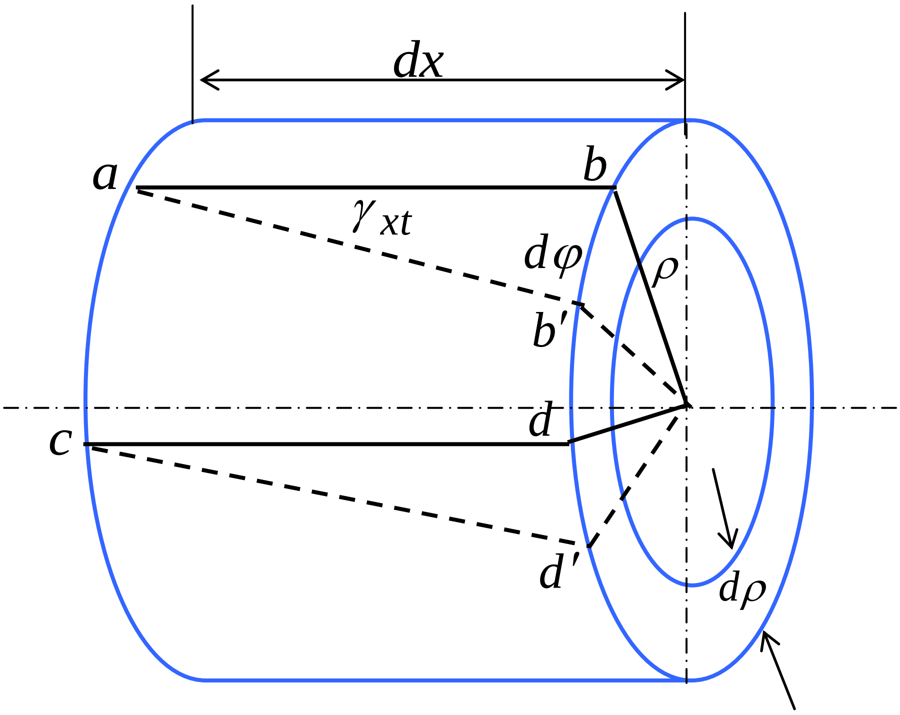
Применив закон Гука при сдвиге $\tau_{xt} = G\gamma_{xt}$,
получаем, что при кручении не равны нулю только касательные напряжения

$$\tau_{xt} = \tau_{tx} \neq 0$$

Двумя плоскостями, нормальными к оси бруса, вырежем диск толщиной dx . Двумя соосными цилиндрическими плоскостями, отстоящими на $d\rho$, вырежем из диска кольцо радиусом ρ и толщиной $d\rho$.



Рассмотрим деформацию кольца при нагружении вала внешними крутящими моментами.



Допустим, что правое сечение поворачивается относительно левого на угол $d\varphi$. Тогда отрезок образующей ab займет положение ab', составив с прежним положением угол γ_{xt}, равный деформации сдвига γ_{xt}.

Из геометрии следует, что отрезок дуги окружности bb' будет равен

$$bb' = \gamma_{xt} dx = \rho d\varphi,$$

откуда получаем, что

$$\gamma_{xt} = \rho \frac{d\varphi}{dx}. \qquad (5.1)$$

Введем относительный угол закручивания

$$\vartheta = \frac{d\varphi}{dx}. \qquad (5.2)$$

Тогда

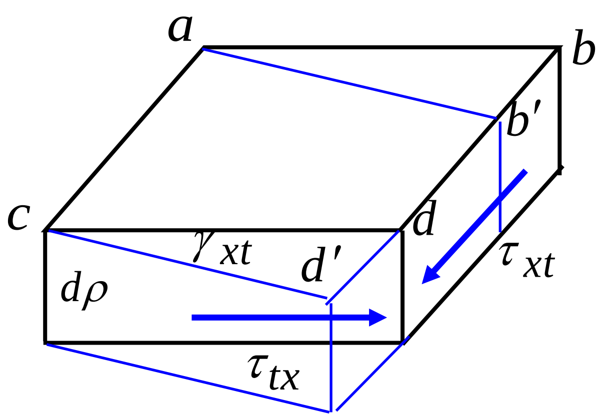
$$\gamma_{xt} = \rho\vartheta. \qquad (5.3)$$

Теперь, с учетом закона Гука $\tau_{xt} = G\gamma_{xt}$, запишем

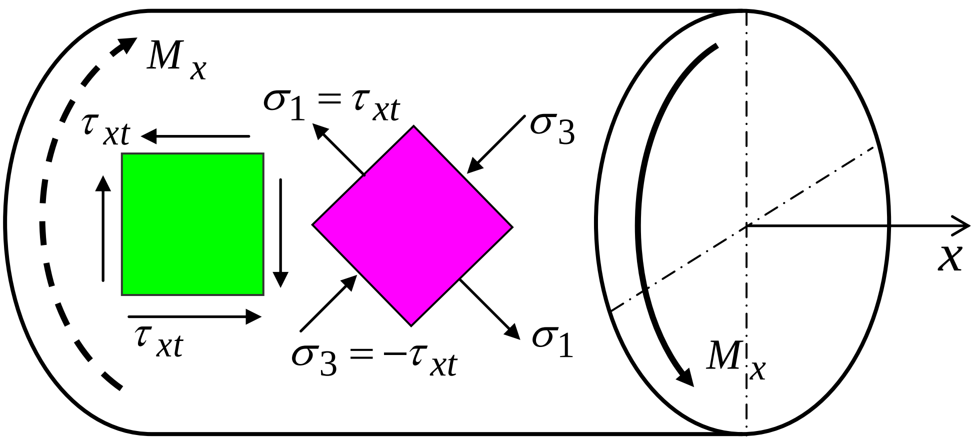
$$\tau_{xt} = G\rho\vartheta. \qquad (5.4)$$

Из уравнений (5.3) и (5.4) следует, что касательные напряжения τ_{xt} и сдвиги γ_{xt} **прямо пропорциональны** расстоянию ρ от оси вала до рассматриваемой точки сечения.

Рассмотрим теперь элементарный объем $abdc$. По граням этого элемента действуют касательные напряжения τ_{xt}, в результате действия которых возникает сдвиг элемента в положение $ab'd'c$.

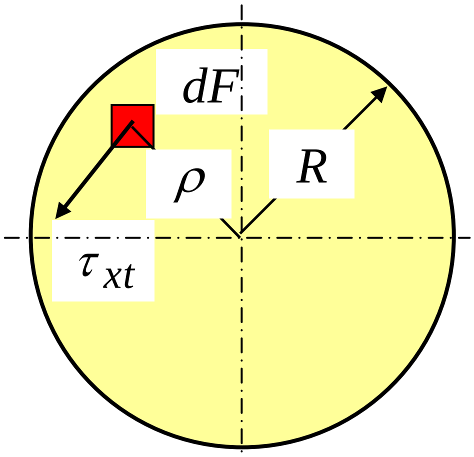


Таким образом, при кручении возникает напряженное состояние чистого сдвига.



Касательные напряжения τ_{xt} ответственны за разрушение сдвигом пластичных материалов, нормальные напряжения σ_1 ответственны за разрушение отрывом по винтовой линии хрупких материалов.

Продолжим **силовой** анализ задачи. Рассмотрим некоторое сечение вала.



Выделим в этом сечении площадку dF на расстоянии ρ от центра круга. Тогда элементарный момент dM_x, обусловленный напряжениями τ_{xt} на площадке dF, будет равен

$$dM_x = \tau_{xt} dF \rho$$

Суммарный крутящий момент равен

$$M_x = \int_F \rho \tau_{xt} dF = \int_F \vartheta G \rho^2 dF = \vartheta G I_p , \qquad (5.5)$$

где I_p - полярный момент инерции сечения, равный

$$I_p = \int_F \rho^2 dF . \qquad (5.6)$$

Перейдем к анализу зависимости изменения геометрии от внешних крутящих моментов. Из уравнения (5.2) и (5.5) следует, что

$$\vartheta = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_x}{GI_p}, \qquad (5.7)$$

где произведение модуля сдвига на полярный момент инерции GI_p - жесткость сечения при кручении.

Из (5.7) следует, что угол закручивания вала длиной L равен

$$\varphi = \int_0^L \frac{M_x dx}{GI_p}, \qquad (5.8)$$

или, для постоянных по длине бруса значений M_x, G и I_p,

$$\varphi = \frac{M_x L}{GI_p}. \qquad (5.9)$$

Теперь остается записать зависимость касательных напряжений от внутреннего крутящего момента и геометрии вала. Из зависимостей (5.4) и (5.5) получаем, что

$$\vartheta G = \frac{\tau_{xt}}{\rho} = \frac{M_x}{I_p}$$

или

$$\tau_{xt} = \frac{M_x}{I_p}\rho \,. \qquad (5.10)$$

Если радиус рассматриваемой точки сечения ρ равен радиусу вала R

$$\rho = R,$$

то касательное напряжение достигнет максимума и будет равно

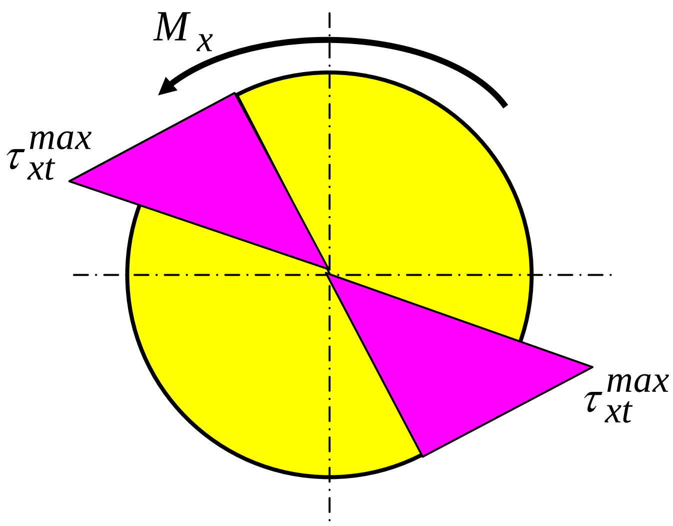
$$\tau_{xt}^{max} = \frac{M_x}{I_p}R = \frac{M_x}{W_p}, \qquad (5.11)$$

где W_p - полярный момент сопротивления кручению, равный

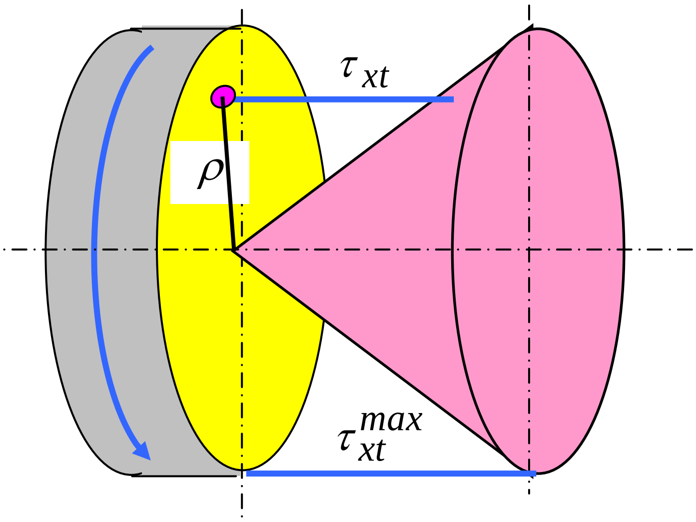
$$W_p = \frac{I_p}{R}. \qquad (5.12)$$

Таким образом, касательное напряжение при кручении растет пропорционально радиусу рассматриваемой точки сечения и достигает максимума в точках, примыкающих к поверхности вала.

Эпюра касательных напряжений в точках сечения, принадлежащих одному диаметру, имеет следующий вид:



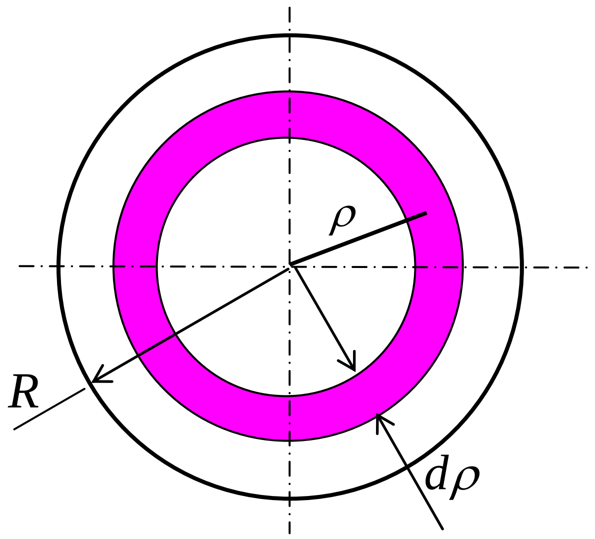
Если касательные напряжения в точках сечения вала изображать в виде отрезков прямых, длина которых пропорциональна напряжениям в данной точке, и направленных нормально к сечению, то концы этих отрезков будут лежать на конической поверхности.



Обратимся к вычислениям полярного момента инерции I_p для круглого сечения.

Для этого в качестве элементарной площадки dF возьмем площадь элементарного кольца толщиной $d\rho$, т.е.

$$dF = 2\pi\rho d\rho$$



Теперь интеграл (9.6) запишется как

$$I_p = \int\limits_F \rho^2 dF = \int\limits_0^R 2\pi\rho^3 d\rho = \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi D^4}{32}. \qquad (5.13)$$

Формула (5.12) для момента сопротивления кручению примет вид

$$W_p = \frac{I_p}{R} = \frac{\pi R^3}{2} = \frac{\pi D^3}{16}. \qquad (5.14)$$

Поскольку полярные моменты инерции – аддитивные величины, то для кольцевого сечения полярный момент инерции будет равен

$$I_p^{\oplus} = \frac{\pi\left(D^4 - d^4\right)}{32}, \qquad (5.15)$$

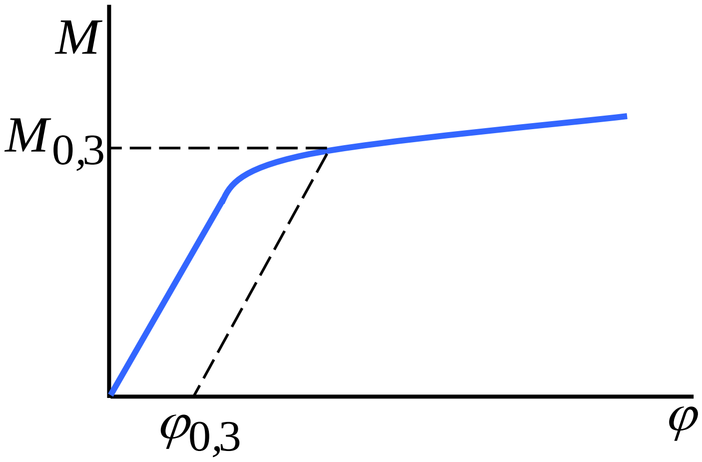
а момент сопротивления кручению соответственно

$$W_p^{\oplus} = \frac{\pi\left(D^4 - d^4\right)}{16D}. \qquad (5.16)$$

Расчеты на прочность и жесткость при кручении

Расчет на прочность и жесткость при кручении проводится в соответствии с алгоритмом расчета на прочность и жесткость при растяжении. Отличие заключается в определении предела текучести материала при кручении.

Механические свойства материала при кручении получают при испытаниях цилиндрических образцов на кручение с записью диаграммы кручения – зависимости крутящего момента M от угла закручивания φ.



Условный предел текучести конструкционного материала при кручении – это максимальное касательное напряжение в образце, при котором образец получает остаточный сдвиг 0,3 %.

В соответствии с (9.3), при $\rho = \dfrac{D}{2}$

$$\gamma_{0,3} = \frac{D}{2}\vartheta_{0,3} = \frac{D}{2}\frac{\varphi_{0,3}}{L}$$

где L – длина цилиндрического образца и $\varphi_{0,3}$ - условный остаточный угол закручивания, равный при $\gamma_{0,3} = 0{,}003$

$$\varphi_{0,3} = \frac{6L}{D}10^{-3} \qquad (5.17)$$

По диаграмме кручения для вычисленного значения $\varphi_{0,3}$ находят соответствующий крутящий момент $M_{0,3}$ и вычисляют условный предел текучести

$$\tau_{0,3} = \frac{M_{0,3}}{W_p}. \qquad (5.18)$$

Допускаемое напряжение при кручении определяется как

$$[\tau]=\frac{\tau_{0,3}}{n} \qquad (5.19)$$

где n - коэффициент запаса прочности при кручении.

Расчет на прочность сводится к выполнению критерия прочности при кручении:

$$\tau_{max} \le [\tau]. \qquad (5.20)$$

Расчет на жесткость требует удовлетворения критерия жесткости при кручении в виде

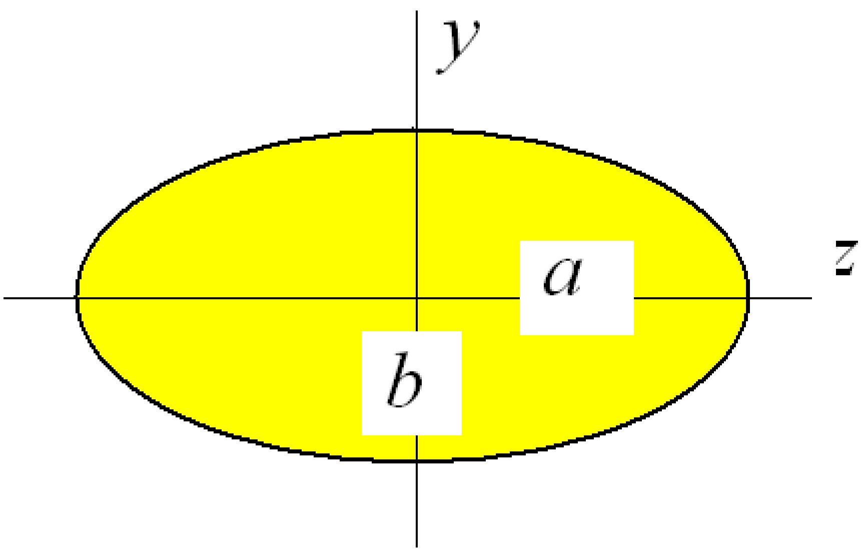
$$\varphi \le [\varphi] \quad \text{или} \quad \vartheta \le [\vartheta], \qquad (5.21)$$

где $[\varphi]$ и $[\vartheta]$ - допускаемый в конструкции абсолютный или относительный угол закручивания.

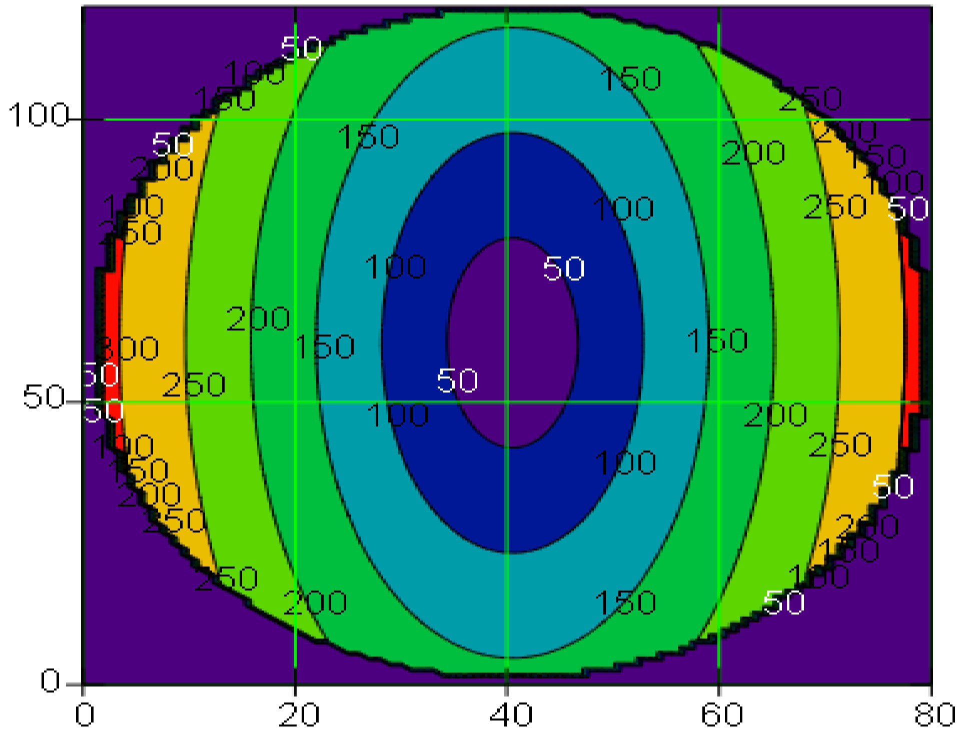
Расчет на прочность при кручении требует одновременного выполнения условий прочности (9.20) и жесткости (9.21). Из двух вычисленных по этим критериям значений диаметров вала выбирают большее значение.

Напряжения при кручение валов некруглого сечения

Эллиптическое сечение

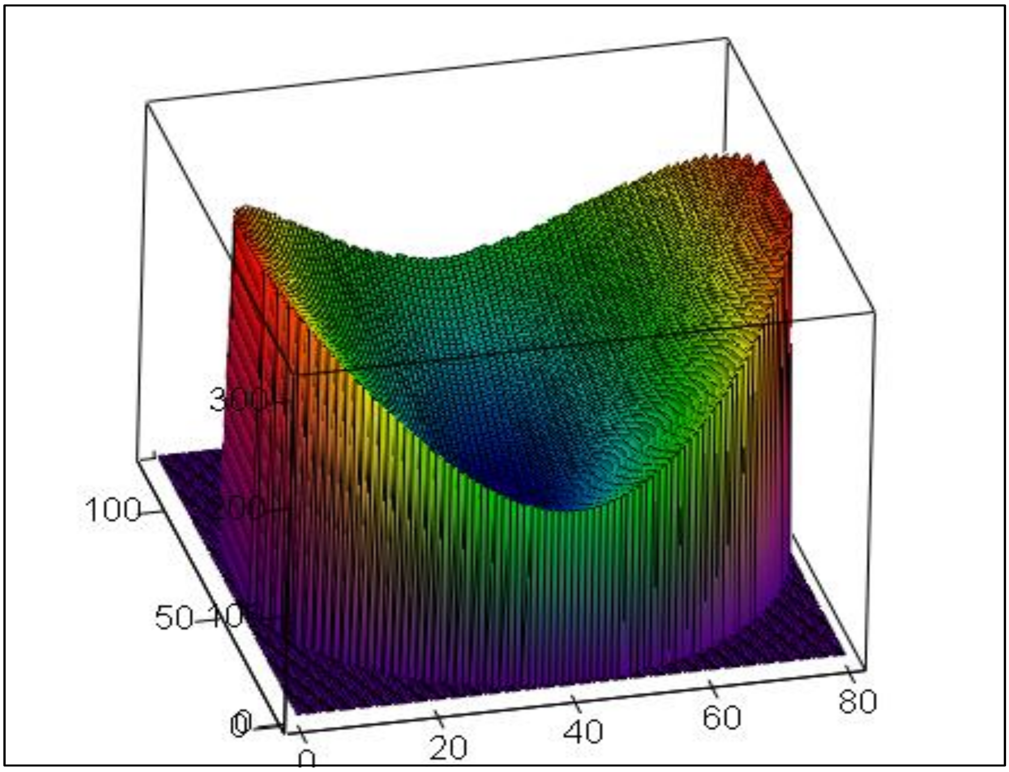


Напряжени при кручении вала эллиптического сечения
(контурный график)



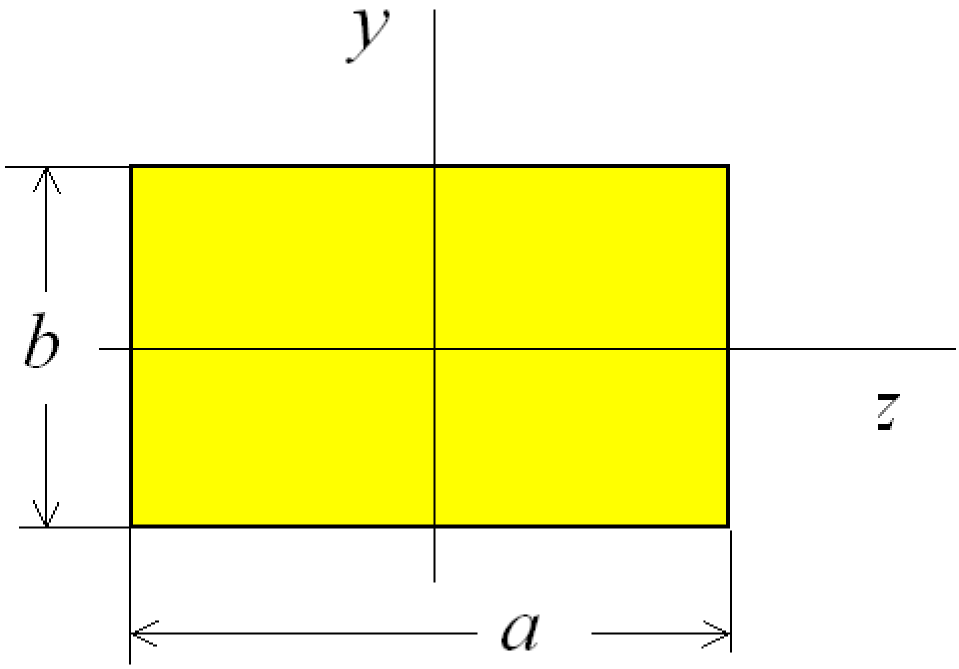
T

Напряжени при кручении вала эллиптического сечения
(трехмерный график)

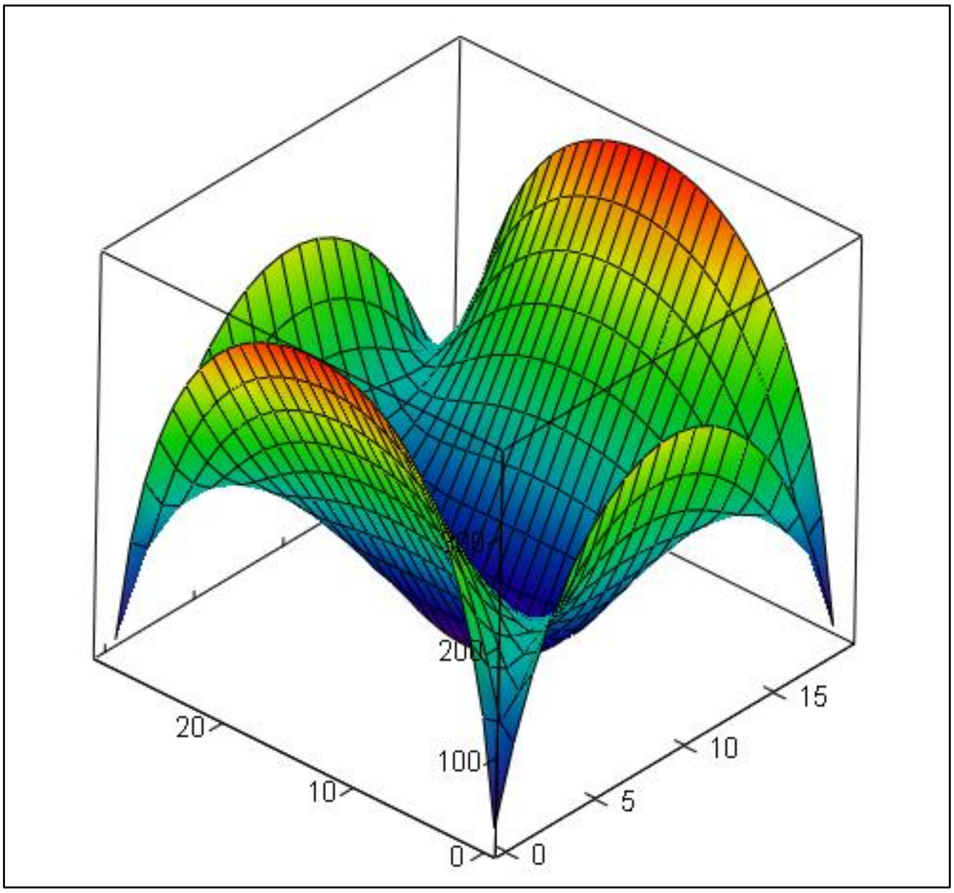


T

Прямоугольное сечение

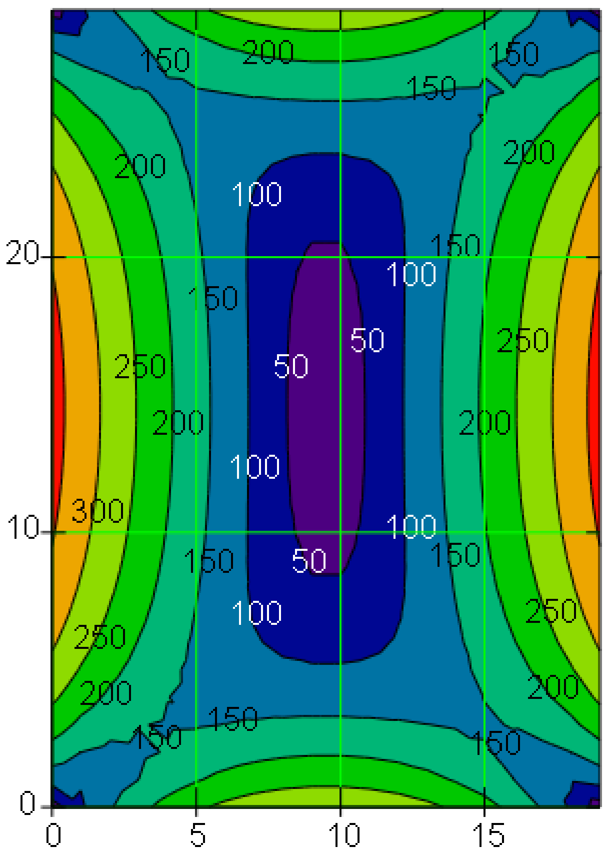


Напряжения при кручении вала прямоугольного сечения
(трехмерный график)



T1

Напряжения при кручении вала прямоугольного сечения
(контурный график)



T1

Отметим, что при кручении валов некруглого сечения наибольшие напряжения возникают на середине более широкой стороны периметра сечения.

При кручении вала прямоугольного сечения напряжения равны нулю в углах периметра сечения.

Рассмотрим пример расчета вала на кручение