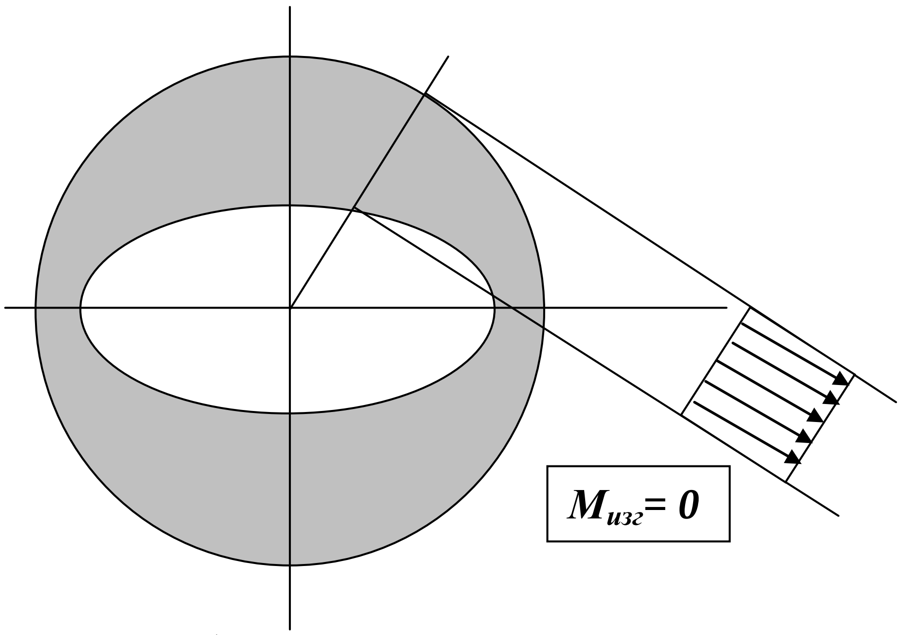
Лекция 4 – Тонкостенные оболочки

Оболочка – это тело, одно из измерений которого (толщина) значительно меньше других размеров.

Срединная поверхность оболочки – это геометрическое место точек, равноотстоящих от обеих поверхностей оболочки.

Для расчетов тонкостенных оболочек на прочность используют так называемую безмоментную теорию. В соответствии с этой теорией полагают, что внутренние изгибающие моменты отсутствуют, и напряжения по всей толщине стенки в одном сечении распределены равномерно.

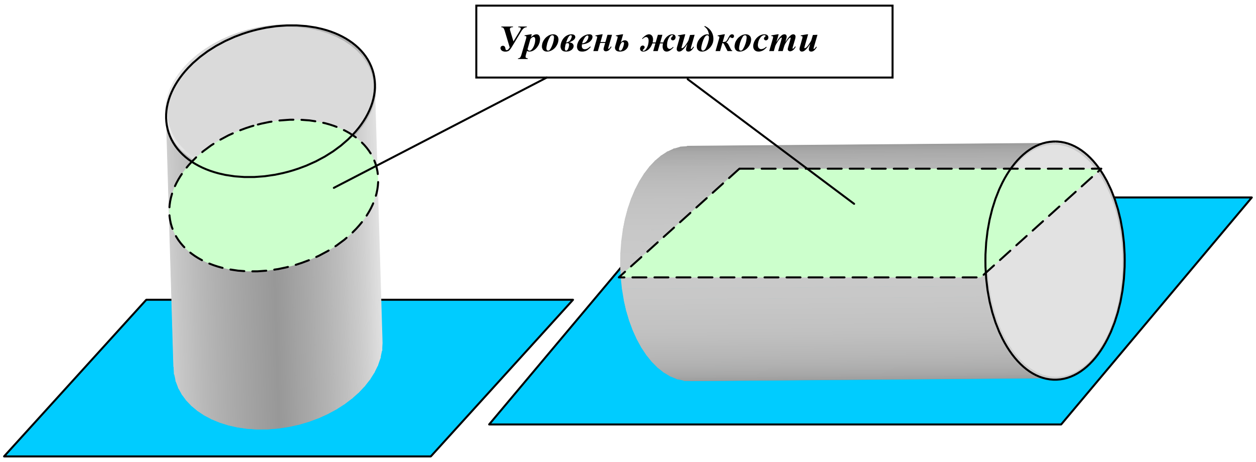


Исходные положения безмоментной теории

1. Сосуд имеет форму тела вращения (срединная поверхность – тело вращения), толщина сосуда необязательно постоянна.
2. Толщина всех стенок сосуда $\boldsymbol{\delta}$ должная быть малой по сравнению с радиусом кривизны оболочки $\boldsymbol{R}$:

$$\frac{\delta}{R} \leq \frac{1}{20}$$

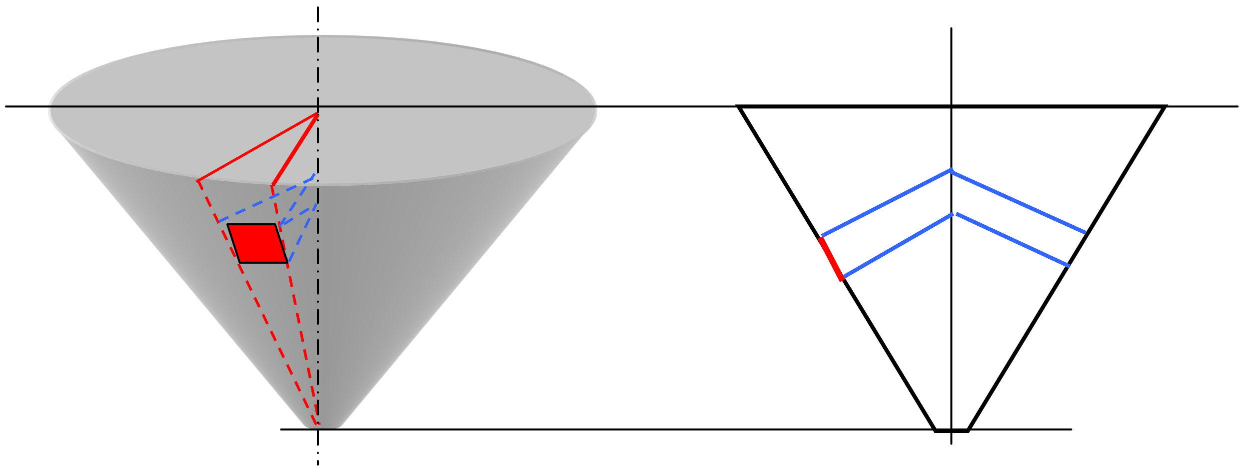
3. Нагрузка должна быть распределенной и осесимметричной относительно оси вращения – это газовое и гидростатическое давление

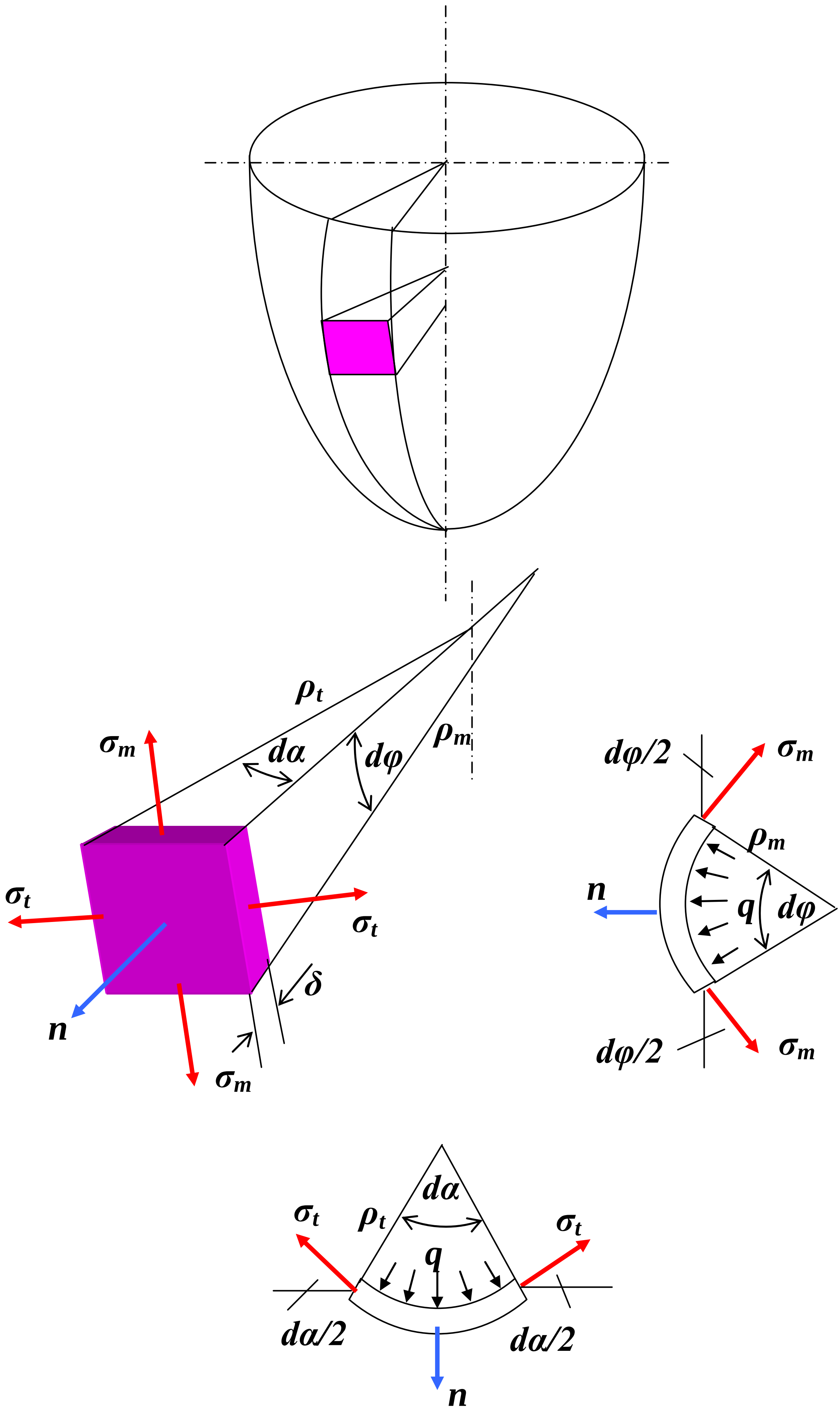


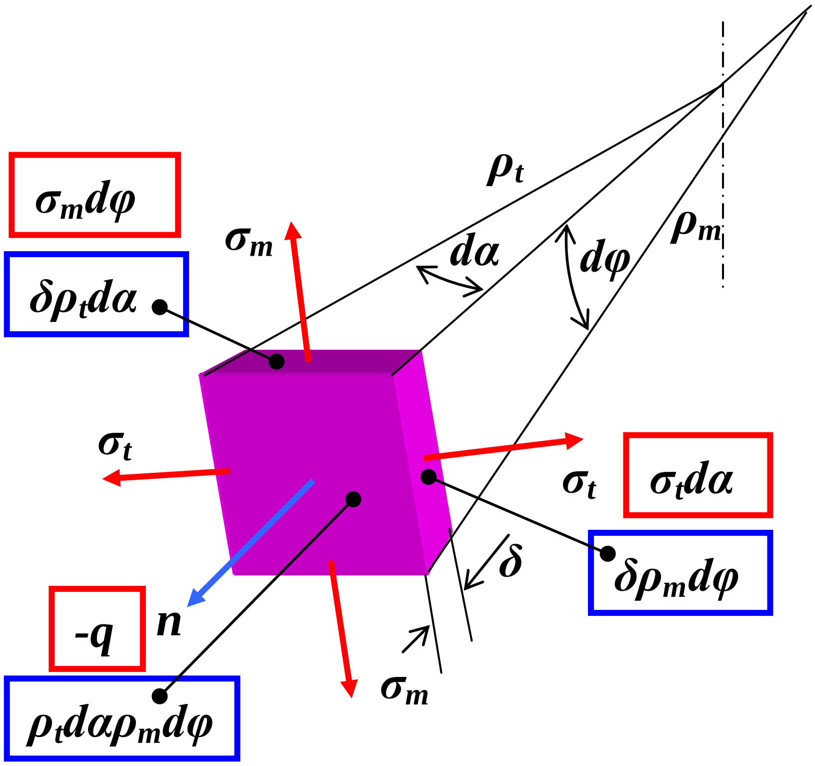
Теория применима. Теория неприменима.

Уравнение Лапласа

Рассмотрим тонкостенную оболочку, нагруженную внутренним давлением. Двумя меридиональными сечениями и двумя нормальными коническими сечениями вырежем элемент оболочки.




ρt
σm
dα
dφ
ρm
σt
σt
δ
n
σm
dφ/2
σm
ρm
n
q
dφ
dφ/2
σm
dα
σt
ρt
σt
q
dα/2
dα/2
n



Спроектируем все силы на направление нормали ***n***:

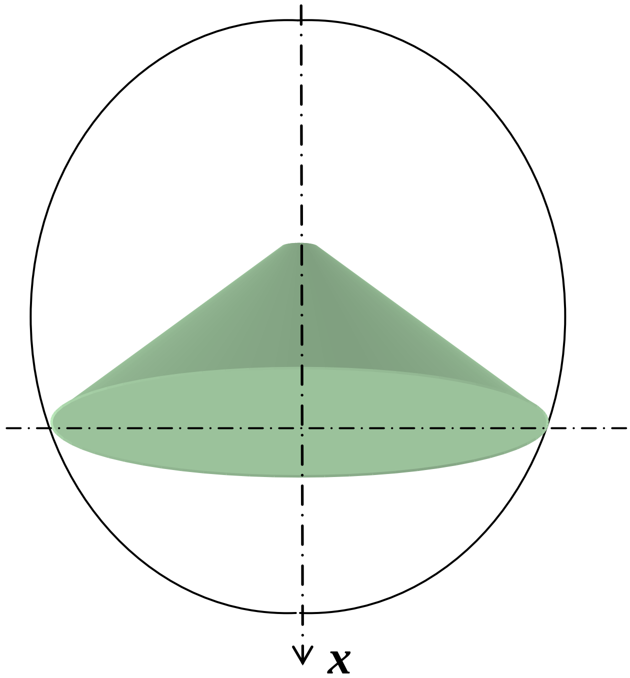
$$\sigma_m d\varphi.\delta.\rho_t d\alpha + \sigma_t d\alpha.\delta.\rho_m d\varphi - q\rho_t d\alpha.\rho_m d\varphi = 0$$

Сначала сократим на $d\varphi d\alpha$, а затем все разделим на $\delta\rho_t\rho_m$.
В результате получаем известную формулу Лапласа:

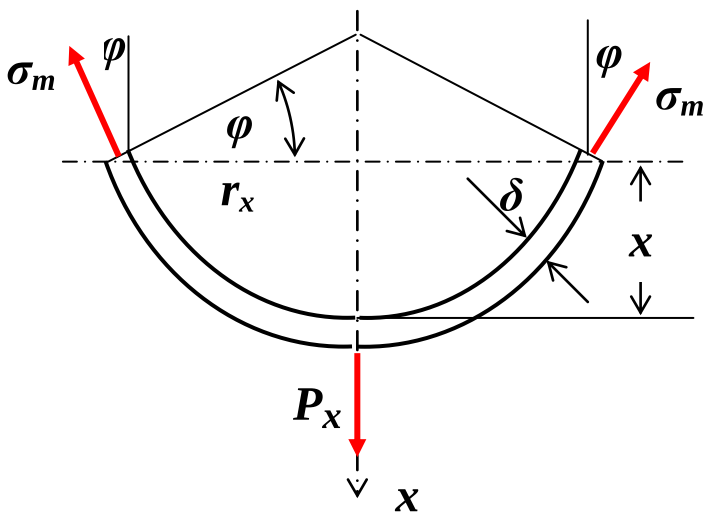
$$\boxed{\frac{\sigma_m}{\rho_m} + \frac{\sigma_t}{\rho_t} = \frac{q}{\delta}} \qquad (*)$$

Отметим, что формула выведена для сосуда, имеющего форму тела вращения. Поэтому, в самом общем случае, меридиональные (осевые) $\boldsymbol{\sigma_m}$ и тангенциальные (окружные) $\boldsymbol{\sigma_t}$ напряжения будут функцией координаты $\boldsymbol{x}$ точки на оси вращения, так как радиусы кривизны $\boldsymbol{\rho_m}$ и $\boldsymbol{\rho_t}$., толщина $\boldsymbol{\delta}$ и внутреннее давление $\boldsymbol{q}$ могут изменяться в зависимости от этой же координаты $\boldsymbol{x}$.

Уравнение Лапласа содержит два напряжения $\boldsymbol{\sigma_m}$ и $\boldsymbol{\sigma_t}$. Для вычисления этих напряжений необходимо второе уравнения, которое можно получить, спроектировав все силы, действующие на элемент, на ось оболочки. Однако это удобнее делать не для элемента, а для части оболочки, отсеченной нормальным коническим сечением.



Отбросим верхнюю часть и рассмотрим равновесие нижней части:



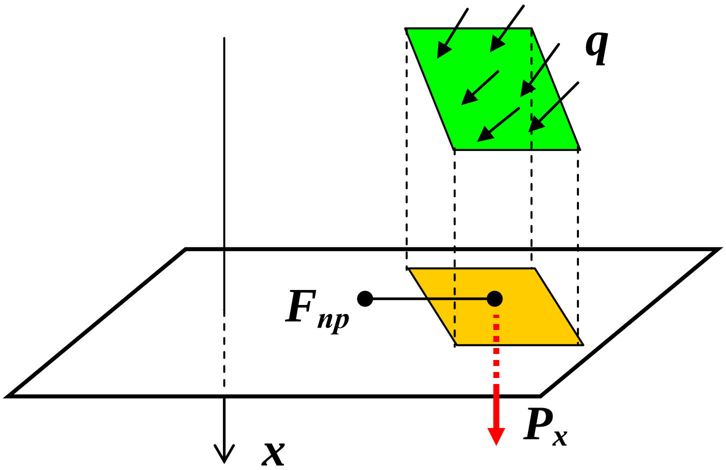
$$\sigma_m . 2\pi r_x \delta \cos(\varphi) - P_x = 0$$

$$\boxed{\sigma_m = \frac{P_x}{2\pi r_x \delta \cos(\varphi)}} \qquad (**)$$

Вертикальная сила $\boldsymbol{P_x}$ представляет собой сумму проекций на ось всех сил, действующих на отсеченную часть оболочки. Для вычисления этой силы полезно использовать две следующие теоремы:

Теорема 1.

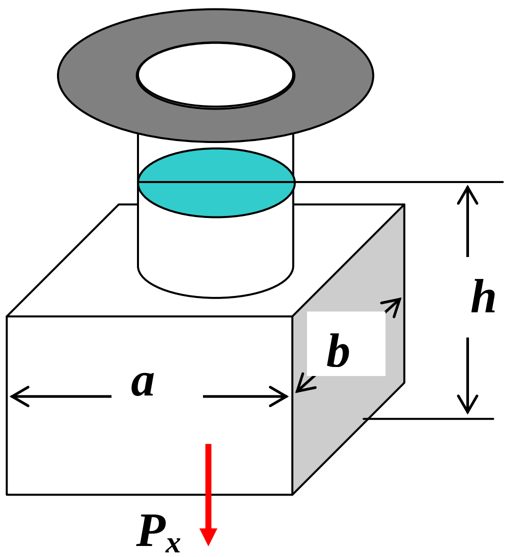
$$P_x(q) = qF_{np}$$



Если на какую либо поверхность действует равномерно распределенное давление $\boldsymbol{q}$, то ***независимо*** от формы поверхности, проекция равнодействующей $\boldsymbol{P_x}$ сил давления на заданную ось $\boldsymbol{x}$ равна произведению давления $\boldsymbol{q}$ на площадь проекции $\boldsymbol{F_{np}}$ данной поверхности на плоскость, перпендикулярную заданной оси.

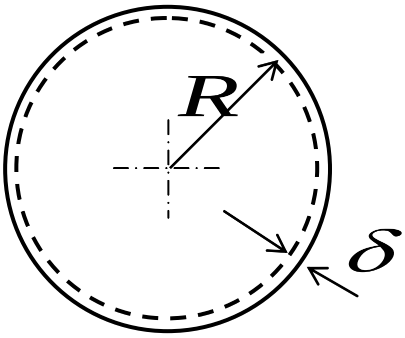
Теорема 2.

$$P_x(\gamma) = \gamma abh$$



Если на некоторую поверхность, например на дно, действует давление жидкости с удельным весом $\boldsymbol{\gamma}$, то вертикальная составляющая $\boldsymbol{P_x}$ сил давления жидкости равна весу жидкости в объеме, расположенном над поверхностью.

Сфера



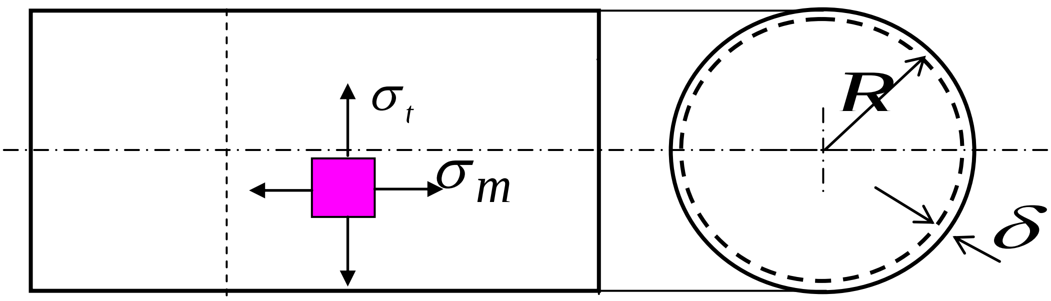
$$\frac{\sigma_m}{\rho_m}+\frac{\sigma_t}{\rho_t}=\frac{q}{\delta}$$

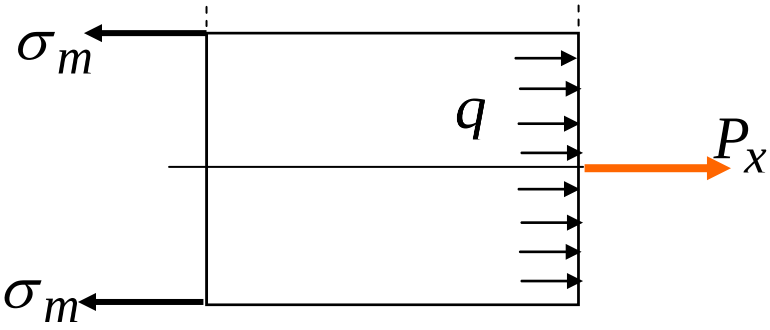
$$\rho_m=\rho_t=R$$

В силу сферической симметрии

$$\sigma_m=\sigma_t=\frac{qR}{\delta}$$

Цилиндр

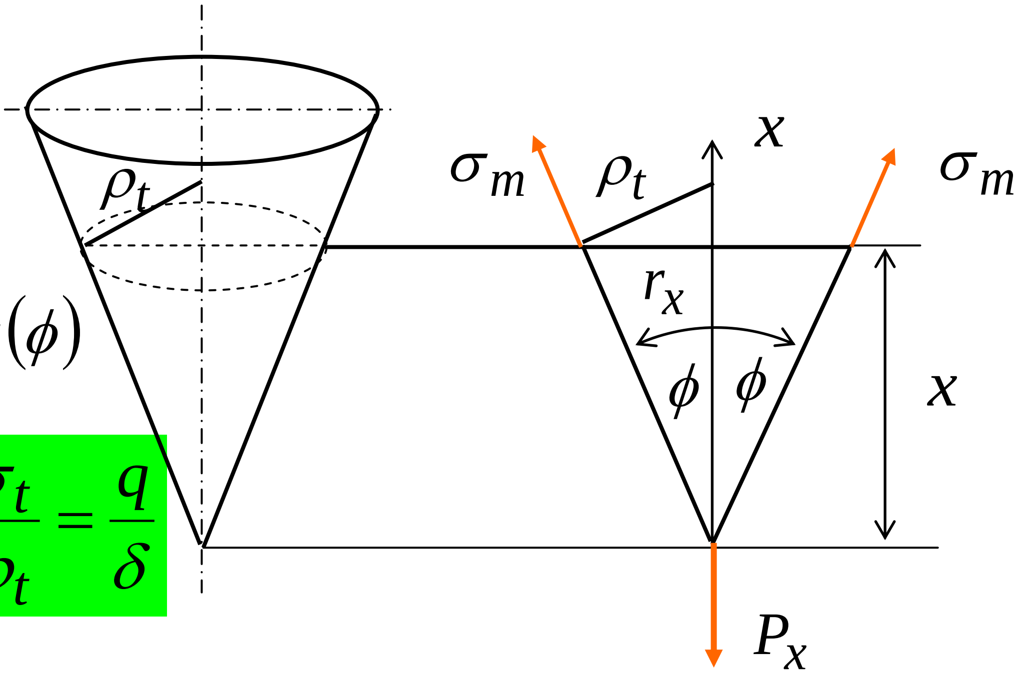




$$\frac{\sigma_m}{\rho_m}+\frac{\sigma_t}{\rho_t}=\frac{q}{\delta}\ ;\ \rho_m=\infty\ ;\quad \rho_t=R\ ;\quad \sigma_t=\frac{qR}{\delta}$$

$$\sigma_m=\frac{P_x}{2\pi r_x\delta\cos(\varphi)}\ ;\quad P_x=q\pi R^2\ ;\quad \sigma_m=\frac{qR}{2\delta}$$

Конус



$$r_x = xtg(\phi)$$

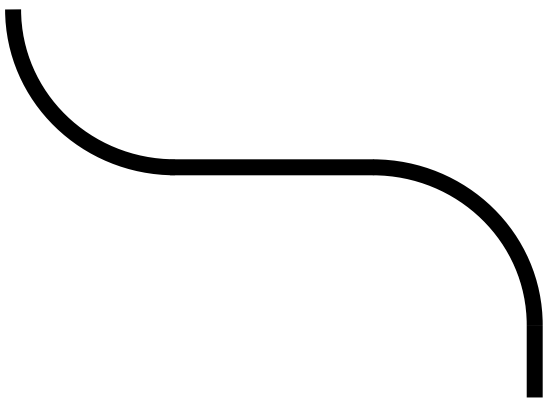
$$\boxed{\frac{\sigma_m}{\rho_m} + \frac{\sigma_t}{\rho_t} = \frac{q}{\delta}}$$

$$\rho_m = \infty\ ; \quad \rho_t = \frac{xtg(\phi)}{\cos(\phi)}\ ; \qquad \sigma_t = \frac{qxtg(\phi)}{\delta\cos(\phi)}$$

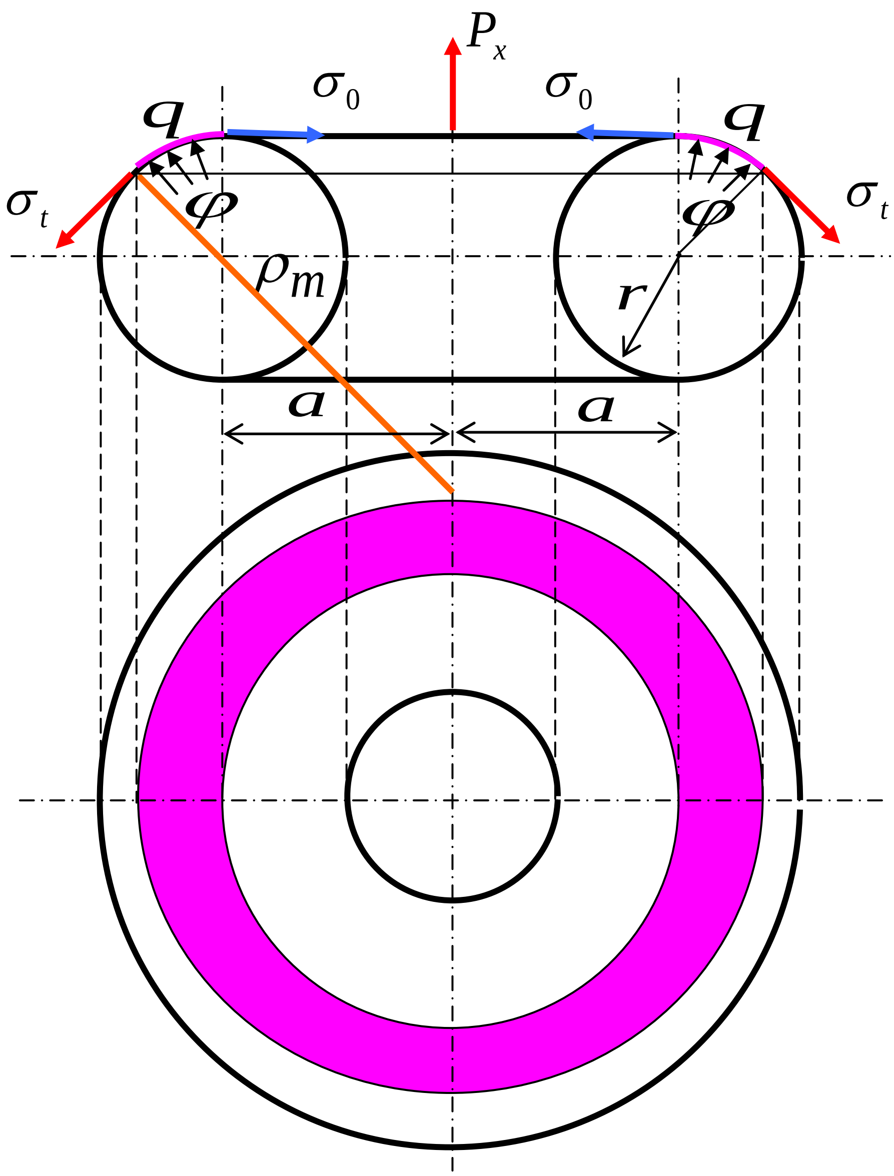
$$\boxed{\sigma_m = \frac{P_x}{2\pi r_x \delta\, cos(\varphi)}}; \qquad P_x = q\pi(xtg(\phi))^2\ ;$$

$$\sigma_m = \frac{qxtg(\phi)}{2\delta\cos(\phi)}$$

При расчетах на прочность гибов и отводов трубопроводов тепловых и атомных электростанций используют решения для напряжений в торовой оболочке. Отводы и гибы соединяют с прямыми трубами с помощью кривого участка трубы, который рассматривают как часть тора.



Тор под внутренним давлением



Для выделенного элемента тора

$$\sigma_t = \frac{P_x}{2\pi r_x \delta \sin(\varphi)};$$

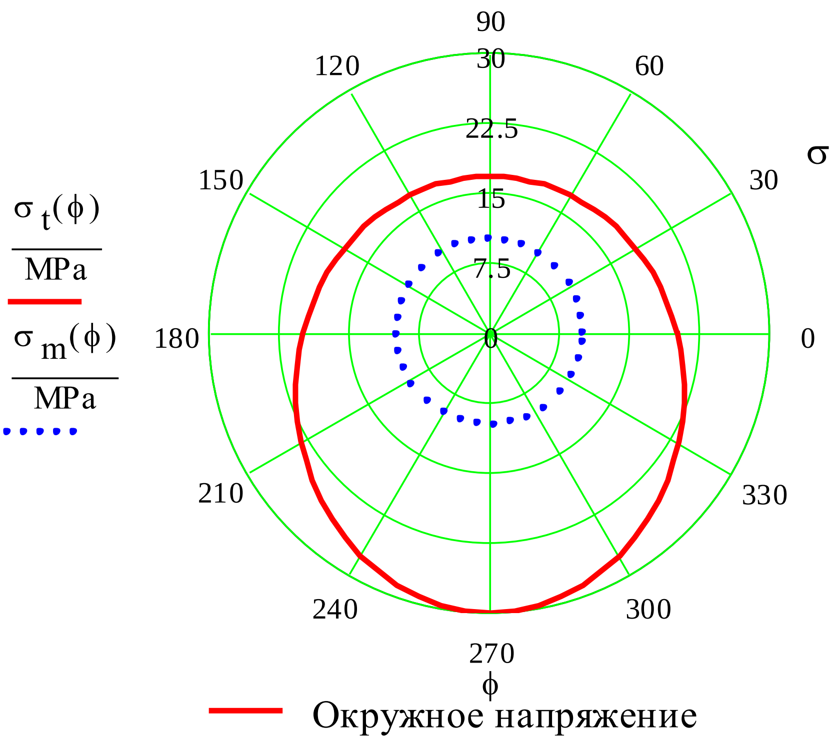
$$P_x = q\pi\left(r_x^{\ 2} - a^2\right) \qquad r_x = a + r\sin(\phi)$$

$$\sigma_t = \frac{qr}{2\delta}\frac{2a + r\sin(\phi)}{a + r\sin(\phi)}$$

$$\boxed{\frac{\sigma_m}{\rho_m}+\frac{\sigma_t}{\rho_t}=\frac{q}{\delta}}\; ; \qquad \sigma_m=\rho_m\left(\frac{qr}{\delta}-\frac{\sigma_t}{\rho_t}\right)$$

$$\rho_m=\frac{a+r\sin(\phi)}{\sin(\phi)}\; ; \qquad \rho_t=r\; ; \qquad \sigma_m=\frac{qr}{2\delta}$$

Окружное (тангенциальное) напряжение в торе, нагруженном внутренним давлением, минимально на внешней образующей **($\phi=3\pi/2$)** и максимально на внутренней образующей**($\phi=\pi/2$)**. При **($\phi=0$** и **($\phi=\pi$)** окружное напряжение равно напряжению в прямой трубе с аналогичных размеров.



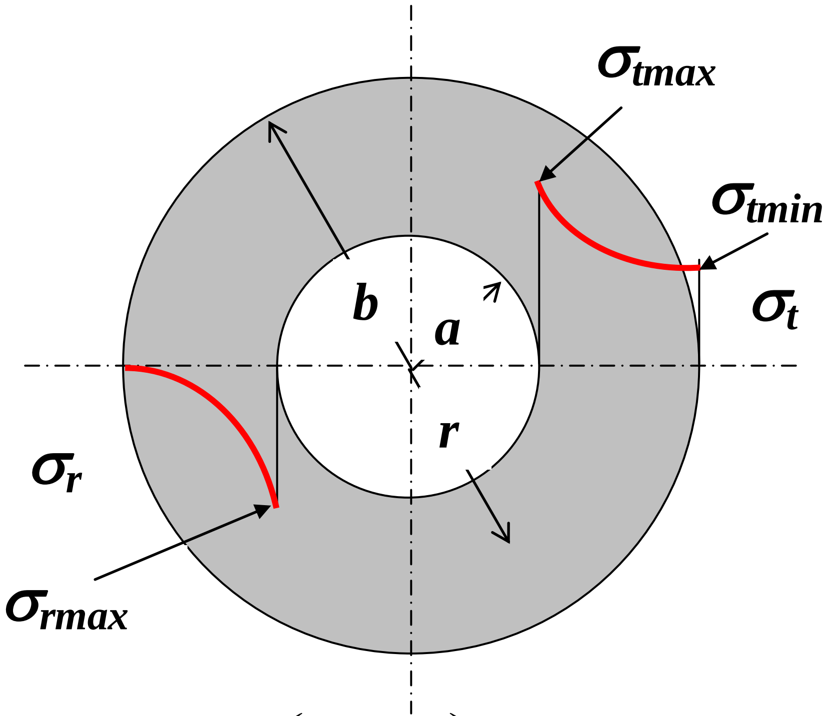
$$\sigma_t(\phi)=\frac{q\cdot r}{2\cdot\delta}\cdot\frac{2\cdot a+r\cdot\sin(\phi)}{a+r\cdot\sin(\phi)}$$

$$\sigma_m(\phi)=\frac{q\cdot r}{2\cdot\delta}$$

Окружное напряжение

Меридиональное напряжение

Толстостенная труба (Формулы Лямэ)



$$\sigma_r(r)=\frac{qa^2}{b^2-a^2}\left(1-\frac{b^2}{r^2}\right)\ ;\ \sigma_{r\max}=-q\ ;\ \sigma_{r\min}=0$$

$$\sigma_t(r)=\frac{qa^2}{b^2-a^2}\left(1+\frac{b^2}{r^2}\right)\ ;\quad \sigma_z=\frac{qa^2}{b^2-a^2}$$

$$\sigma_{t\max}=\frac{q\left(b^2+a^2\right)}{b^2-a^2}\ ;\quad \sigma_{t\min}=\frac{2qa^2}{b^2-a^2}$$

Преобразуем формулу для наиболее опасных окружных напряжений

$$b = R + \frac{s}{2}\ ; \quad a = R - \frac{s}{2}\ ; \quad s = b - a$$

Теперь она примет вид

$$\sigma_{t\max}(s) = \frac{qR}{s} + \frac{qs}{4R}\ ;$$

Первый член этой формулы – окружные напряжения в тонкостенной трубе – формула Лапласа.

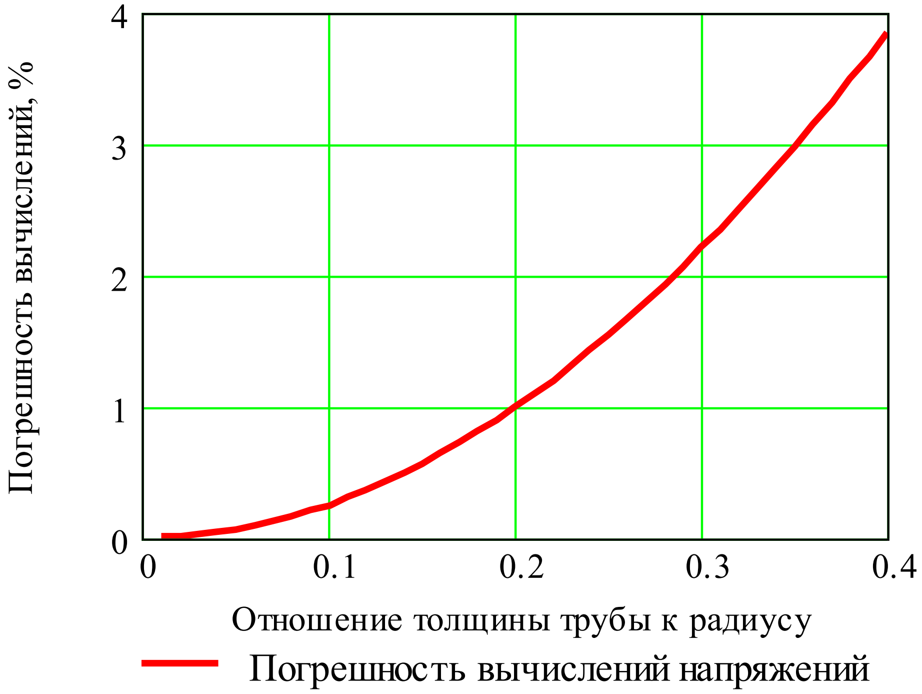
$$\sigma_t(s) = \frac{qR}{s}$$

Оценим ошибку вычислений, если напряжения в толстой трубе будем вычислять по формуле Лапласа

$$\gamma(s) = \frac{\sigma_{t\max}(s) - \sigma_t(s)}{\sigma_{t\max}(s)} = \frac{1}{1 + \frac{4R^2}{s^2}}$$

Построим зависимость погрешности вычислений от отношения толщины трубы к радиусу.

$$\gamma(s) = \frac{1}{1 + 4\cdot\left(\frac{R}{s}\right)^2}$$



Как следует из приведенного графика, при увеличении отношения толщины к радиусу до 0,4 , погрешность вычислений составляет менее 4 %.