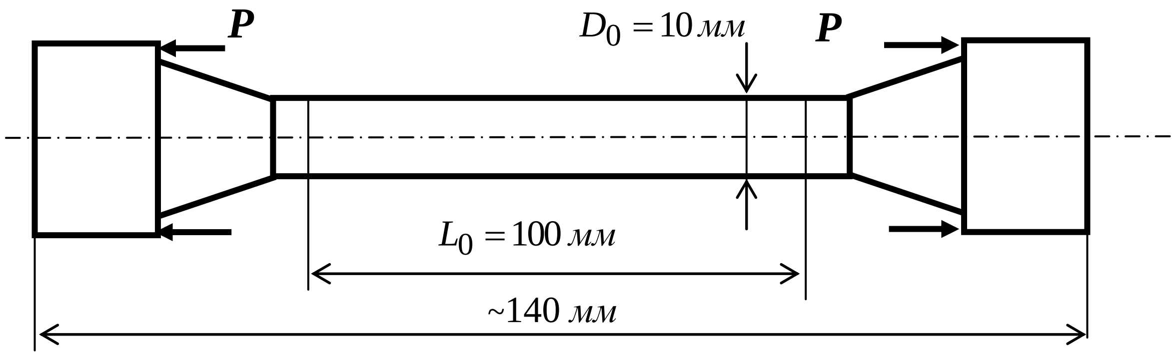
Лекция 3. Механические свойства материалов при растяжении. Алгоритмы расчетов на прочность и жесткость.

Большинство механических свойств материалов определяют посредством испытаний на растяжение специальных образцов из данного материала. Для металлов эти испытания проводят в соответствии с ГОСТом 1497-84 «Методы испытаний на растяжение».

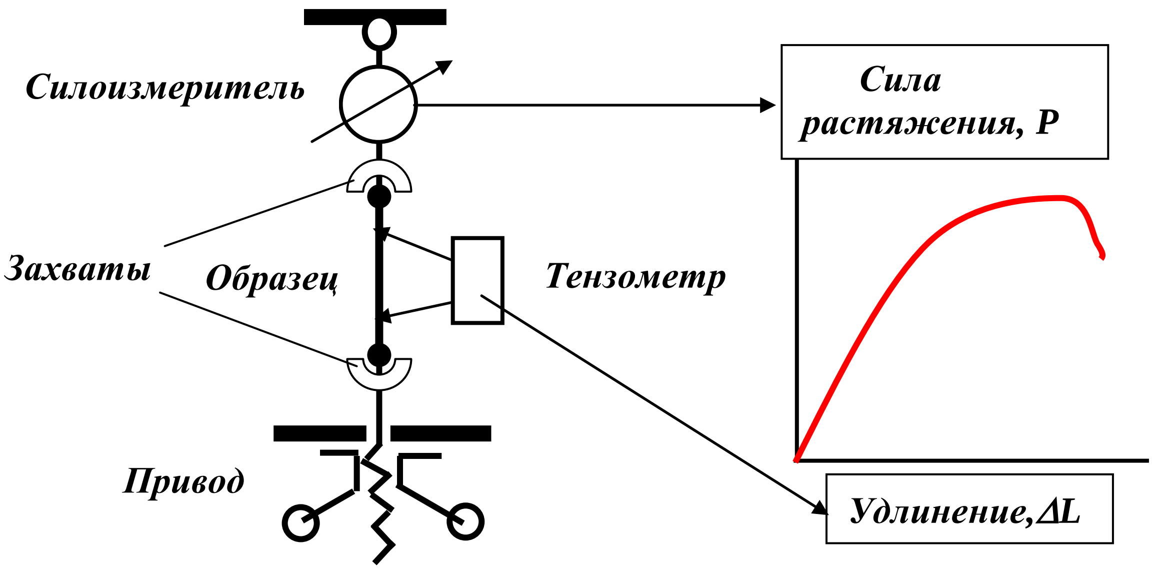
Как уже указывалось в Лекции 1, испытания образцов материалов и элементов конструкций на испытательных машинах позволяет разрешить системный парадокс иерархичности. В качестве образцов материала чаще всего выступают цилиндрические изделия с головками на концах, предназначенными для закрепления в захватах испытательной машины.



Образец для испытаний

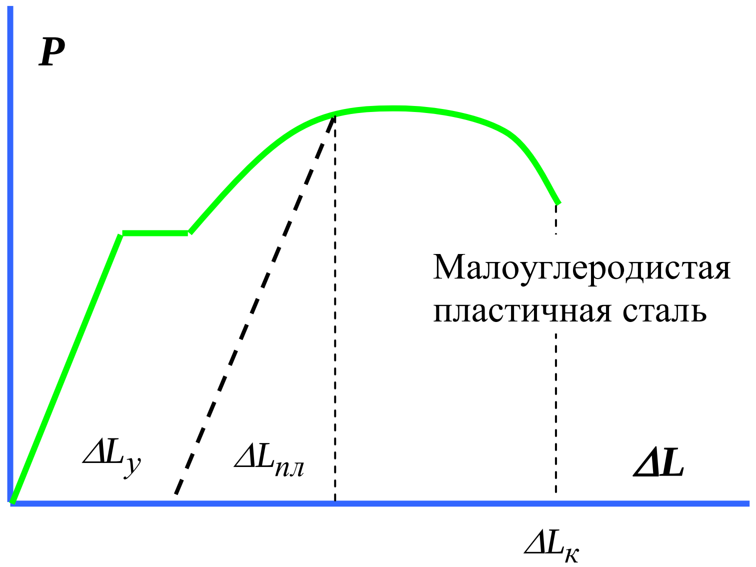
L_0 - расчетная длина, база измерений удлинения; ***P*** – растягивающая сила,

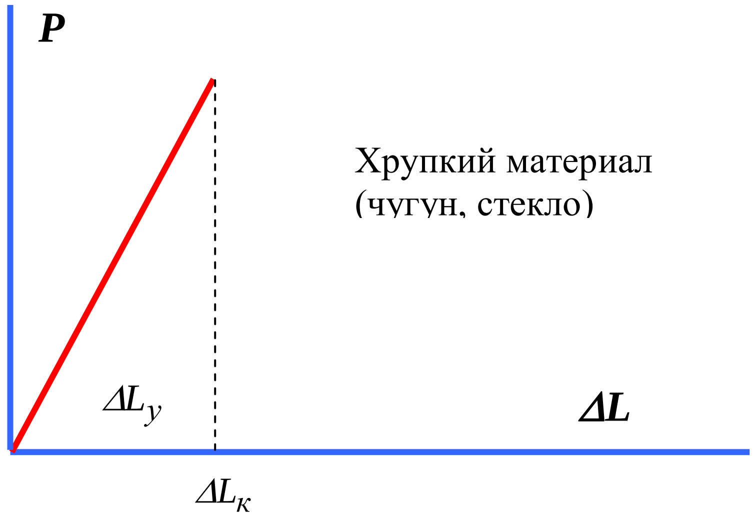
$F_0 = \dfrac{\pi D^2}{4}$ - начальная площадь поперечного сечения образца

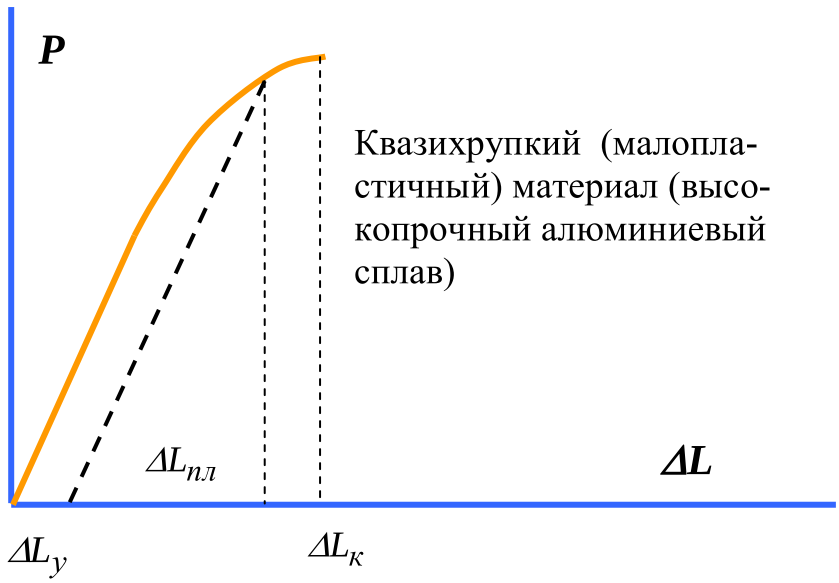


Испытательная машина

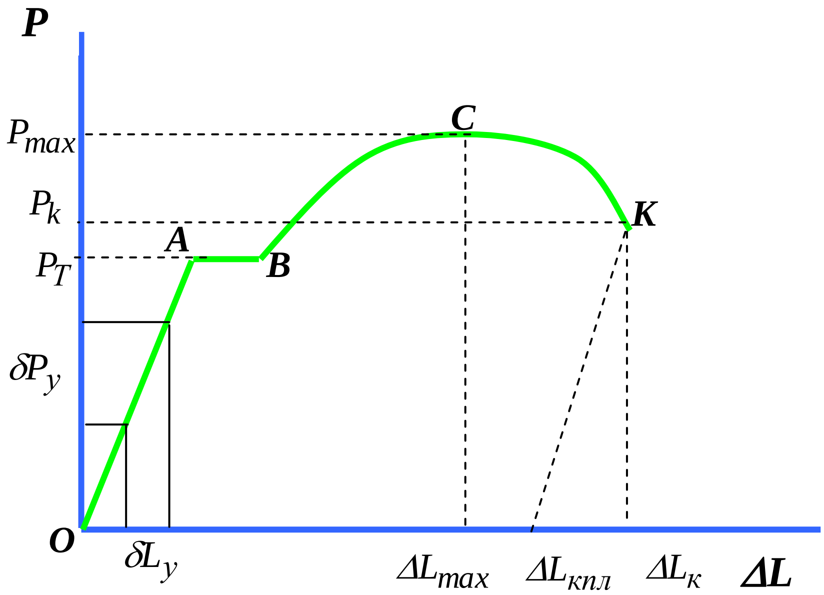
Основные диаграммы растяжения







Механические свойства (определения понятий)



Модуль упругости E – отношение приращения напряжения к соответствующему приращению относительного удлинения в пределах упругого участка OA.

$$E = \frac{\delta P_y}{F_0} \cdot \frac{L_0}{\delta L_y}$$

Предел текучести – напряжения, при котором в образце впервые появляются измеримые остаточные деформации.

Предел текучести физический σ_T – наименьшее напряжение, при котором образец удлиняется без заметного увеличения растягивающей силы. Соответствует напряжению на площадке текучести AB.

$$\sigma_T = \frac{P_T}{F_0}$$

Предел прочности (временное сопротивление) σ_b - напряжение, соответствующее наибольшей нагрузке P_{max} на образце.

$$\sigma_b = \frac{P_{max}}{F_0}$$

Истинное напряжение разрушения σ_k - напряжение, соответствующее конечной нагрузке P_k и площади поперечного сечения F_k на момент разрыва

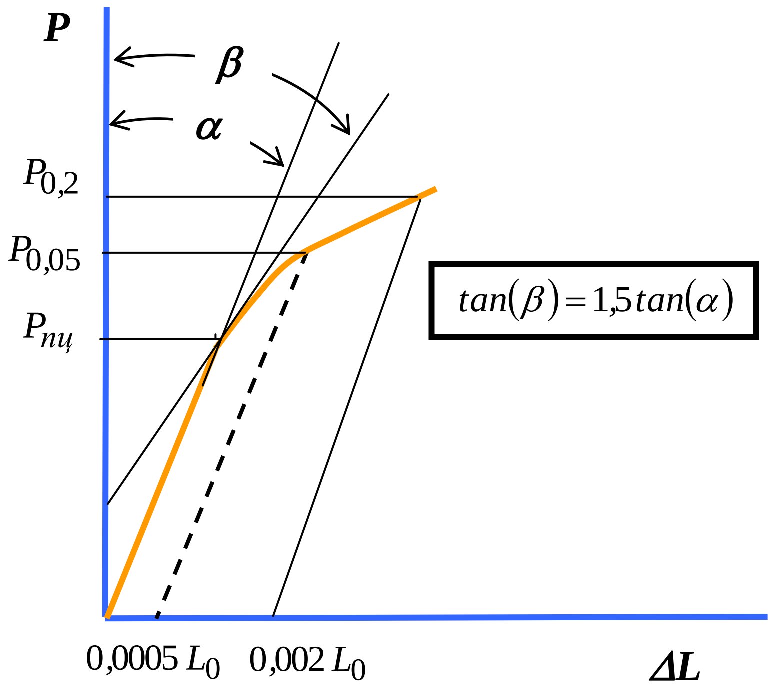
$$\sigma_k = \frac{P_k}{F_k}$$

Предел пропорциональности $\sigma_{пц}$- напряжение, при котором отклонение от линейной зависимости между нагрузкой и удлинением достигает значения, при котором тангенс угла $\boldsymbol{\beta}$ между касательной к диаграмме растяжения и осью нагрузок на 50% превышает тангенс угла наклона $\boldsymbol{\alpha}$ к оси нагрузок линейного участка.

$$\sigma_{пц} = \frac{P_{пц}}{F_0}$$

Предел упругости $\sigma_{0,05}$ – напряжение, при котором остаточное удлинение достигает 0,05% длины рабочей части образца.

$$\sigma_{0,05} = \frac{P_{0,05}}{F_0}$$

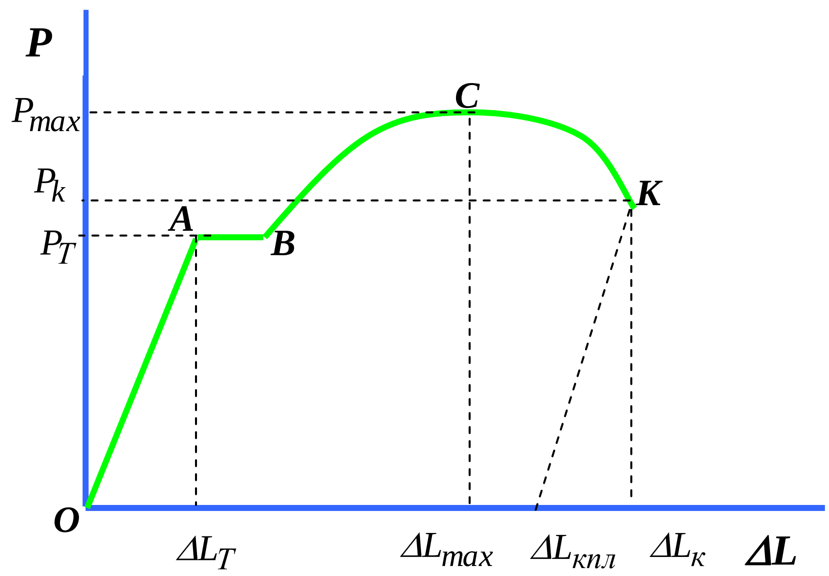


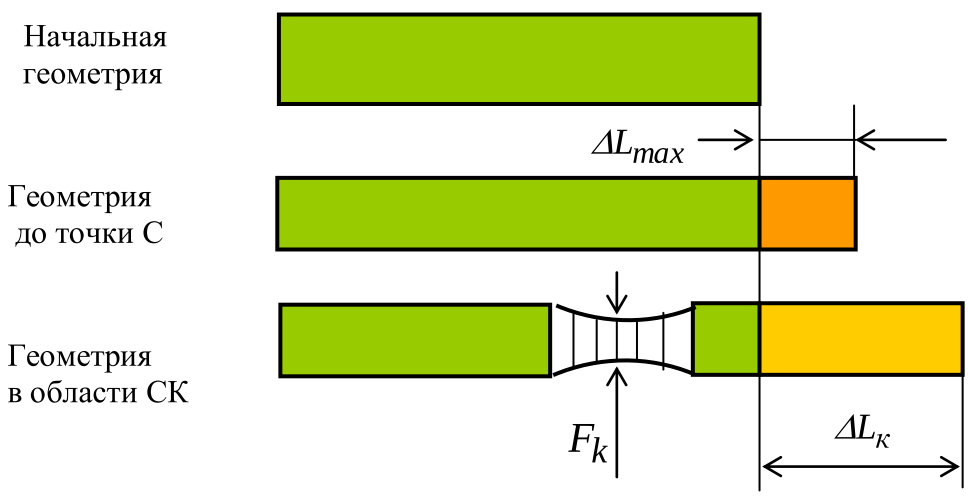
Предел текучести условный $\sigma_{0,2}$ -напряжение, при котором остаточное удлинение достигает 0,2% длины рабочей части образца.

$$\sigma_{0,2} = \frac{P_{0,2}}{F_0}$$

Рассмотренные механические свойства – это силовые параметры, характеризующие прочность материала на разных стадиях его деформирования.

Характеристики пластичности – это деформационные параметры, определяющие, наряду с силовыми характеристиками, стадии деформационного поведения материала, как его реакцию на внешнее воздействие.





В области за точкой ***A*** система становится открытой и начинает взаимодействовать с окружением, сбрасывая в окружение энергию, затраченную испытательной машиной на пластическое, необратимое деформирование.

До точки ***С*** процессы пластической деформации по всему объему образца. Границу устойчивости этого процесса характеризует ***равномерное относительное удлинение*** δ_p.

$$\delta_p = \frac{\Delta L_{max}}{L_0}.$$

В области точки С нагрузка достигает максимума, а затем начинает снижаться. Это снижение обусловлено потерей устойчивости процесса равномерного пластического удлинения, что сопровождается возникновением местного утонения (шейки). В области шейки теперь сосредотачивается вся пластическая деформация, энергия к этой области подводится посредством течения энергии упругой деформации в эту область от привода испытательной машины. Происходит достаточно быстрое уменьшение площади поперечного сечения в середине шейки. В момент разрыва эта площадь равна F_k при полном пластическом удлинении образца на $\Delta L_{кпл}$. Предельную пластичность материала по удлинению ***дает относительное удлинение после разрыва*** δ,

$$\delta = \frac{\Delta L_{кпл}}{L_0}.$$

Ему соответствует ***относительное сужение после разрыва*** ψ,

$$\psi = \frac{F_0 - F_к}{F_0}.$$

Отметим, что относительное пластическое удлинение δ для конструкционных может на два порядка превышать относительное упругое удлинение ε_T,

$$\varepsilon_T = \frac{\sigma_T}{E} = \frac{\Delta L_T}{L_0}.$$

Алгоритмы рас четов на прочность и жесткость

Алгоритм расчета на прочность элементов конструкций при растяжении приведен на рис.1.

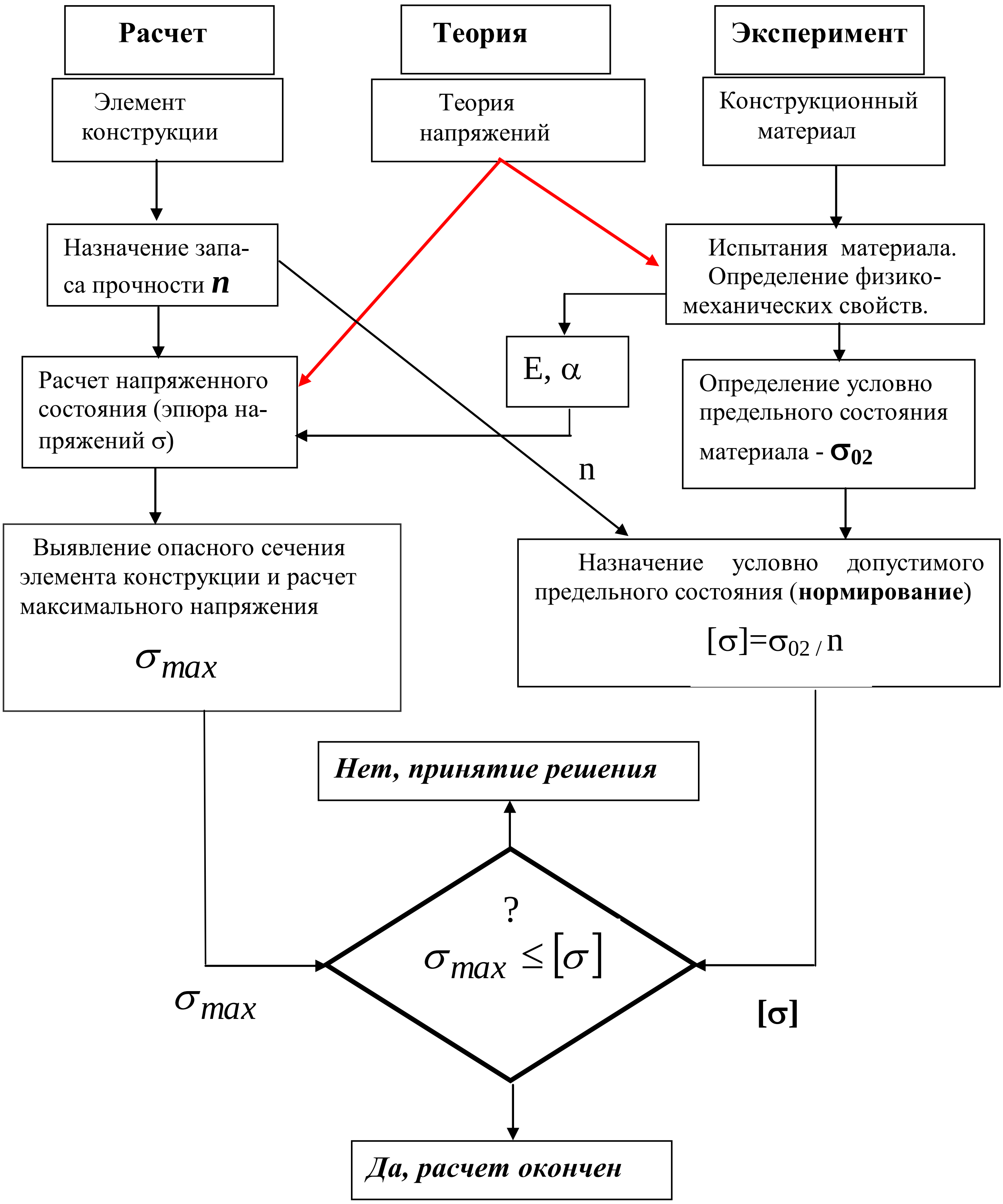


Рис.1. Алгоритм расчета на прочность при растяжении

Видно, что в алгоритме явно присутствуют две ветви – расчетная и экспериментальная, объединенные одной теорией – теорией напряжений.

Максимальные действующие напряжения σ_{max} рассчитывают на основе сопротивления материалов (теории упругости) с использованием экспериментальных значений модуля упругости E и коэффициента линейного теплового расширения α.

Запас прочности n определяет конструктор изделия, и это значение запаса прочности используют для назначения предельного допустимого напряжения в элементе конструкции (процедура нормирования).

Принимается, что в конструкции не должно быть остаточных деформаций. Поэтому в качестве допускаемого напряжения $\sigma_{lim} = [\sigma]$ используется условный предел текучести материала $\sigma_{0,2}$, разделенный на запас прочности n, значение которого всегда больше единицы, т.е.

$$\sigma_{lim} = [\sigma] = \frac{\sigma_{0,2}}{n}$$

Критерий прочности

$$\sigma_{max} \le [\sigma]$$

также объединяет обе ветви алгоритма и содержит правую экспериментальную часть $[\sigma]$ и левую расчетную часть σ_{max}.

Принятие решения может включать в себя замену конструкционного материала, изменение запаса прочности, изменение размеров и конструкции рассчитываемого элемента и т.д.

При растяжении $\sigma_{max} = \dfrac{N_{max}}{F}$ и критерий прочности сводится к виду

$$\frac{N_{max}}{F} \le [\sigma].$$

Из этого критерия вытекают три основные задачи прочности:

1. Расчет площади поперечного сечения F для данного материала $[\sigma]$ и для данной нагрузки N_{max};
2. Расчет предельной нагрузки N_{max} для данного элемента конструкции (F) из данного материала $[\sigma]$;
3. Проверка прочности существующего изделия F из известного материала $[\sigma]$ при известном значении максимальной нагрузке N_{max}.

Вся идеология расчетов по максимальным напряжениям направлена на то, чтобы отождествить предельные свойства образца с предельными возможностями элемента конструкции и одновременно обосновать ***несущественность*** для практики различий в поведении образца и конструкции под действием внешних сил.

Это привело к тому, что в **расчетах на прочность используются критериальные значения нагрузок, соответствующие одной единственной точке на экспериментальной диаграмме деформирования образца.**

В этом и достоинство, и ограничение классических расчетов на прочность.

Для статически неопределимых систем практически невозможно добиться равнопрочности всех стержней системы, т.е. равных напряжений во всех стержнях.

Это связано с тем, что расчета для статически неопределимых систем необходимо соблюдение совместности перемещений в системе и изменение площади поперечного сечения одного из стержней с неизбежностью влечет за собой перераспределение усилий во всех стержнях.

Расчет на жесткость сводится к удовлетворению критерия жесткости в виде

$$\Delta_{max} \le [\Delta],$$

где

Δ_{max} - перемещение заданной конструктором точки стержневой системы под действием внешних сил;

$[\Delta]$ - предельно допустимое перемещение этой же точки системы, определяемое техническими условиями на данную систему.

Алгоритм расчета на жесткость приведен на рис.2.

Как следует из этого алгоритма, расчету на жесткость предшествует расчет на прочность. Если условия прочности и жесткости соблюдены, то расчет считают оконченным.

Для расчета статически неопределимых систем порядок расчета следующий.

- Задают некоторые значения площадей поперечного сечения стержней;
- Определяют усилия в стержнях системы. Для выбранного стержня подбирают сечение исходя из критерия прочности.
- Находят новые усилия и перемещения в стержневой системе.
- Проверяют выполнение критериев прочности для всех стержней и критерия жесткости.

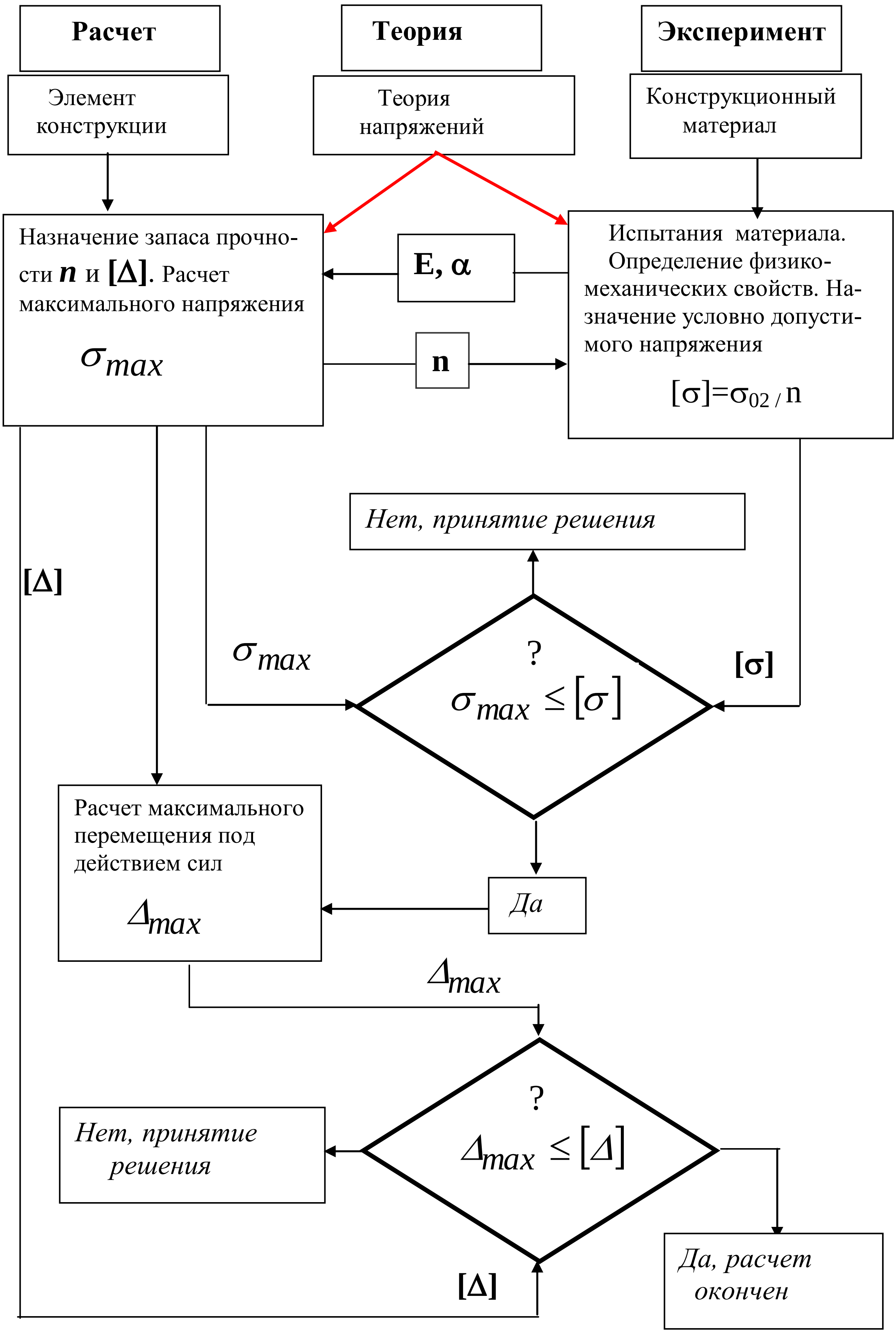


Рис.2. Алгоритм расчета на прочность и жесткость

Произведение модуля упругости на площадь поперечного сечения ***EF*** называю ***жесткостью поперечного сечения*** стержня при растяжении.

Жесткость ***EF*** поперечного сечения, деленную на длину ***L*** стержня

$$k = \frac{EF}{L},$$

называют ***жесткостью стержня***.

Величину $\boldsymbol{\lambda}$, обратную жесткости k

$$\lambda = \frac{1}{k},$$

называют ***податливостью стержня***.

Для стержня длиной ***L***, нагруженного продольными силами ***P***, имеют место следующие зависимости между силой ***P*** и удлинением ***Δ***:

$$P = k\Delta \quad \text{и} \quad \Delta = \lambda P.$$

Рассмотрим теперь пример расчета на прочность и жесткость стержневой системы, показанной на рис.3. Расчет выполним в среде MathCad.

$kN := 10^3 \cdot N \qquad MPa := 10^6 \cdot Pa$

Жесткая невесомая балка подвешена на двух стержнях и нагружена силой на конце.

Геометрические размеры системы и площадь первого стержня

$a := 0.5 \cdot m \qquad L := 0.2 \cdot m \qquad F_1 := 1 \cdot cm^2$

Модуль упругости материала стержней $E := 2 \cdot 10^5 \cdot MPa$

Система нагружена силой $P := 20 \cdot kN$

Допускаемое напряжение $\sigma_{lim} := 200 \cdot MPa$

Предельно допускаемое вертикальное перемещение точки приложения силы $\Delta_{lim} := 0.4 \cdot mm$

Какой должна быть площадь поперечного сечения F_2 стержня 2, чтобы напряжения в нем удовлетворяли критерию прочности, и вся система в целом удовлетворяла критериям прочности и жесткости?

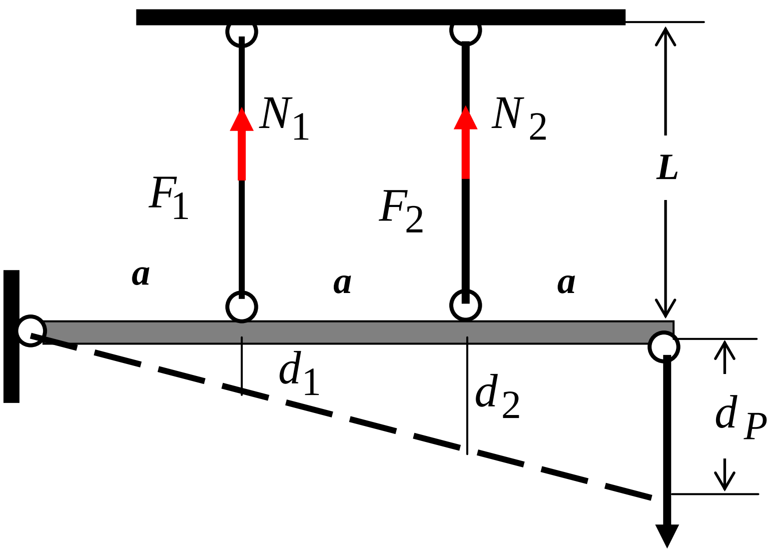


Рис.3. Один раз статически неопределимая стержневая система

Составим и решим систему уравнений из уравнений равновесия, уравнений совместности перемещений и критерия прочности для второго стержня. Предварительно зададим приближенные значения искомых величин

$N_1 := 10\cdot kN \qquad N_2 := 100\cdot kN \qquad F_2 := 2\cdot cm^2$

$d_1 := 0.05\cdot mm \qquad d_2 := 0.11\cdot mm$

Given

Уравнение равновесия $\quad N_1\cdot a + N_2\cdot 2\cdot a - P\cdot 3\cdot a = 0$

Уравнение совместности перемещений $\quad d_2 = 2\cdot d_1$

Перемещения в соответствии с законом Гука

$$d_1 = \frac{N_1\cdot L}{E\cdot F_1} \qquad d_2 = \frac{N_2\cdot L}{E\cdot F_2}$$

Критерий прочности $\quad \dfrac{N_2}{F_2} = \sigma_{lim}$

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ d_1 \\ d_2 \\ F_2 \end{bmatrix} := \mathrm{Find}\left(N_1, N_2, d_1, d_2, F_2\right)$$

При уже известных значениях N_1, N_2, d_1, d_2, F_2 вертикальное перемещение точки приложения силы d_P и напряжение в стержнях σ_1 и σ_2 будут равны, соответственно

$$d_P := 3 \cdot d_1 \qquad \sigma_1 := \frac{N_1}{F_1} \qquad \sigma_2 := \frac{N_2}{F_2}$$

Поэтому можно сформировать заключение о прочности и жесткости стержневой системы в виде

$$\text{Заключение} := \left| \begin{array}{l} \text{"Прочность и жесткость достаточны" if } (\sigma_1 \le \sigma_{lim}) \cdot (\sigma_2 \le \sigma_{lim}) \cdot (d_P \le \Delta_{lim}) \\ \text{"Не выполнен критерий прочности по стержню 2" if } \sigma_2 > \sigma_{lim} \\ \text{"Не выполнен критерий прочности по стержню 1" if } \sigma_1 > \sigma_{lim} \\ \text{"Не выполнен критерий жесткости" if } d_P > \Delta_{lim} \end{array} \right.$$

Выведем полученное заключение:

$$\text{Заключение} = \text{"Прочность и жесткость достаточны"}$$

Это заключение подтверждается вычисленными значениями сил, напряжений, площадей поперечных сечений и перемещений

$$N_1 = 10 \cdot kN \qquad N_2 = 25 \cdot kN$$

$$\sigma_1 = 100 \cdot MPa \qquad \sigma_2 = 200 \cdot MPa$$

$$d_2 = 0.2 \cdot mm \qquad d_1 = 0.1 \cdot mm \qquad d_P = 0.3 \cdot mm$$

$$F_1 = 1 \cdot cm^2 \qquad F_2 = 1.25 \cdot cm^2$$

при критериальных значениях напряжения и перемещения:

$$\sigma_{lim} = 200 \cdot MPa \qquad \Delta_{lim} = 0.4 \cdot mm$$

Заметим, что критерий прочности для стержня 2 осуществляется подбором площади поперечного сечения этого стержня при заданной площади поперечного сечения стержня 1: $F_1 = 1 \cdot cm^2$