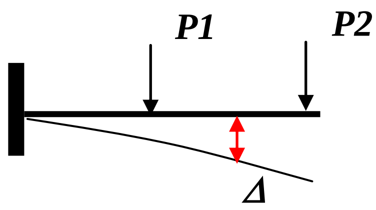
Лекция 2. Деформации. Закон Гука.
Растяжение – сжатие прямого стержня

Деформация

Деформацию тела под действием внешних сил связывают с изменением формы и размеров тела.
Если устранение причины деформации (разгрузка) приводит к исчезновению деформации, то деформацию называют **упругой или обратимой.**
Если устранение причины деформации не приводит к полному исчезновению деформации, то оставшуюся часть деформации называют **необратимой или пластической**.

Различают абсолютную деформацию и относительную деформацию.
Абсолютная деформация характеризует интегральную реакцию тела на внешнее воздействие. Примеры абсолютной деформации – прогиб балки, удлинение стержня, угол закручивания вала.
Мерой абсолютной деформации является перемещение одной или нескольких точек тела из начального положения в конечное.

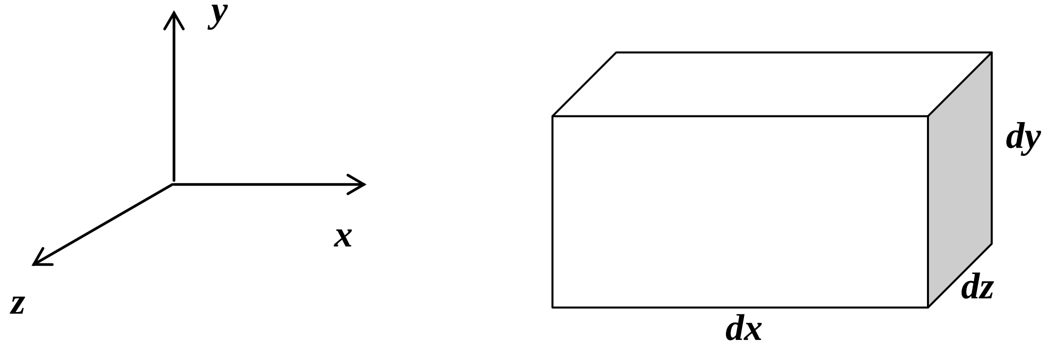


Отметим, что перемещение, например прогиб балки Δ можно рассматривать необязательно в местах действия сил. Причина перемещения может находиться вне зоны видимости наблюдателя.

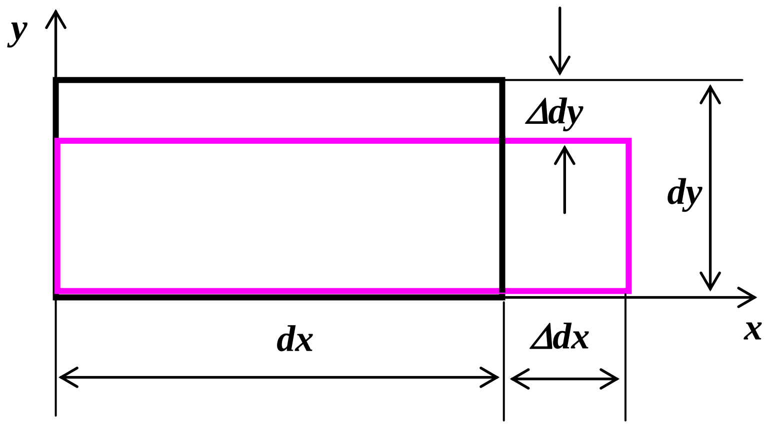
Чтобы получить характеристику интенсивности изменения формы и размеров тела вводят понятие относительной деформации.

Относительная деформация характеризует реакцию рассматриваемой точки (области) тела на внешнее воздействие.
Под точкой тела в сопротивлении материалов понимают объем некоторого элементарного параллелепипед.

Рассмотрим такой параллелепипед с гранями dx, dy и dz .



Под действием сил произойдет изменение размеров граней. Спроектируем исходный и деформированный параллелепипеды на плоскость x - y.



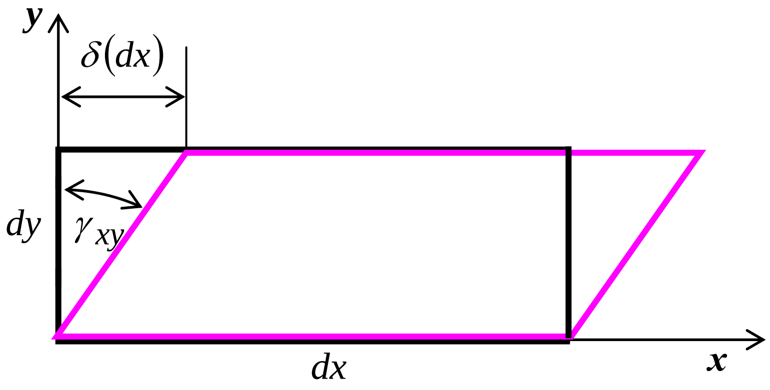
Относительная линейная деформация ε_x – это отношение удлинения Δdx отрезка к его начальной длине dx.

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx}$$

Аналогично

$$\varepsilon_y = \frac{\Delta dy}{dy} \qquad \varepsilon_z = \frac{\Delta dz}{dz}$$

Предположим, что элемент изменил не только размеры граней, но и форму – прямоугольный параллелепипед стал косоугольным.



Определим угловую деформацию γ_{xy} как меру изменения прямого угла, в данном случае угла между осями $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$:

$$\gamma_{xy} = a\,tan\left(\frac{\delta(dx)}{dy}\right) \approx \frac{\delta(dx)}{dy}$$

Аналогично

$$\gamma_{yz} = \frac{\delta(dy)}{dz} \qquad \gamma_{zx} = \frac{\delta(dz)}{dx}$$

Закон Гука отражает экспериментально установленную линейную зависимость между относительными деформациями и напряжениями.

Для нормальных напряжений

$$\sigma_x = E\varepsilon_x,$$

где E – модуль упругости первого рода (модуль Юнга).

Для касательных напряжений

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy},$$

где G – модуль упругости второго рода (модуль сдвига).

Коэффициент Пуассона μ устанавливает связь между продольными ε_x и поперечными (ε_y и ε_y) относительными деформациями.

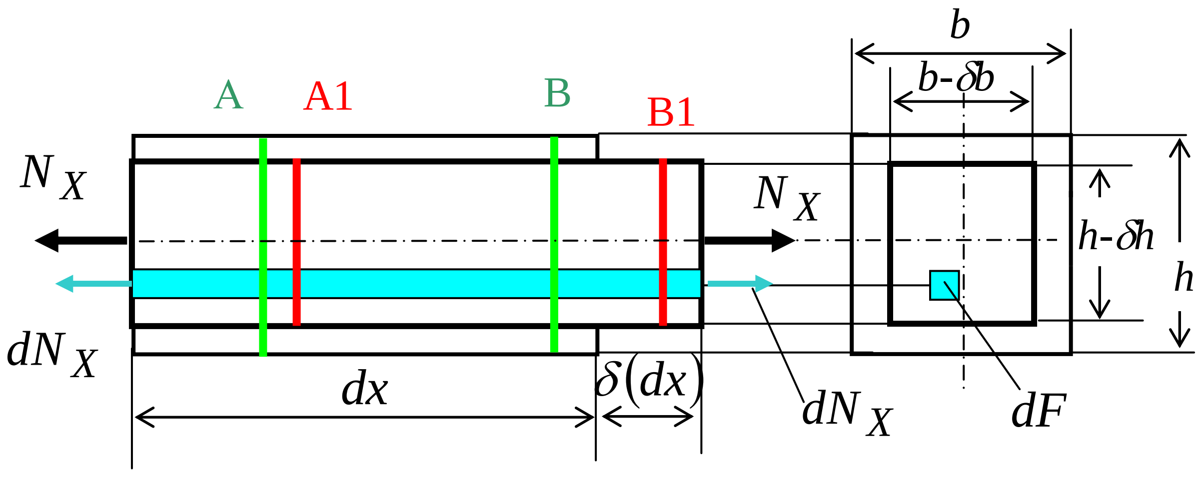
$$\mu = \left|\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x}\right| = \left|\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x}\right|$$

Растяжение - сжатие прямого стержня

Растяжение (сжатие) – деформация стержня под действием сил, направление действия которых совпадает с осью стержня, проходящей по центрам тяжести всех нормальных сечений стержня.

Напряжения при растяжении (сжатии)

Выделим некоторый участок нашего стержня длиной dx, на торцы которого действуют внутренние растягивающие силы N_X



В соответствии с гипотезой плоских сечений, сечения, плоские до нагружения останутся плоскими и после приложения сил. Так сечение A займет положение сечения A1, а сечение B – положение B1, но останутся плоскими. При растяжении сечения останутся и параллельными.

Если принять, что стержень состоит из множества элементарных стержней (волокон), занимающих весь объем стержня и расположенных параллельно оси стержня, то удлинение всех элементарных стержней будет одинаково (в силу гипотезы плоских сечений) и равно $\delta(dx)$. Поэтому напряжения в стержнях (в силу закона Гука) будут одни и те же и равны σ_X .

На рисунке показан один такой элементарный стержень с площадью поперечного сечения dF . На стержень действует нормальная сила dN_X .Эта сила dN_X равна произведению напряжения σ_X на площадь поперечного сечения dF , т.е..

$$dN_X = \sigma_X dF .$$

Тогда суммарная сила N_X буде равна

$$N_X = \int_F \sigma_X dF = \sigma_X F ,$$

а напряжение можно вычислить по найденной нормальной внутренней силе N_X и площади поперечного сечения F как

$$\sigma_X = \frac{N_X}{F}$$

Для стержня, в котором внутренняя сила и площадь поперечного сечения изменяются по длине стержня,

$$\sigma_X(x) = \frac{N_X(x)}{F(x)} .$$

Деформации и перемещения при растяжении (сжатии)

Относительная деформация ε_X участка стержня длиной dx , обусловленная силой N_X равна

$$\varepsilon_X = \frac{\delta(dx)}{dx} = \frac{\sigma_X}{E} = \frac{N_X}{EF}$$

Из этого уравнения следует, что соответствующее абсолютное силовое удлинение равно

$$\delta(dx) = \varepsilon_X dx = \frac{N_X dx}{EF}$$

Поэтому силовое удлинение $\Delta_N(x)$ стержня длиной x будет равно

$$\Delta_N(x) = \int_0^x \varepsilon_X dx = \int_0^x \frac{N_X dx}{EF}$$

В общем случае может изменяться N_X, модуль упругости E и площадь поперечного сечения F. Тогда

$$\Delta_N(x) = \int_0^x \varepsilon_X(x)dx = \int_0^x \frac{N_X(x)dx}{E(x)F(x)}$$

Силовое нагружение нередко сопровождается температурным воздействием.

Температурное удлинение стержня равно

$$\Delta_T(x) = \int_0^x \alpha T(x)dx,$$

где α - коэффициент линейного температурного расширения и $T(x)$ - закон изменения температуры по длине стержня.

Суммарное удлинение $U(x)$ при температурно-силовом воздействии будет равно

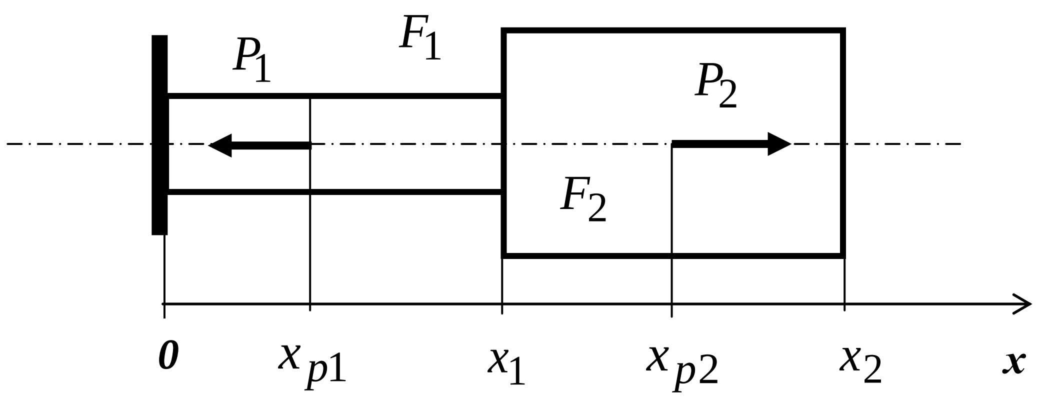
$$U(x) = \Delta_N(x) + \Delta_T(x) = \int_0^x \varepsilon_X(x)dx + \int_0^x \alpha T(x)dx$$

Температурно-силовое удлинение стержня длиной L постоянного сечения равно

$$U = \frac{N_X L}{EF} + \alpha TL$$

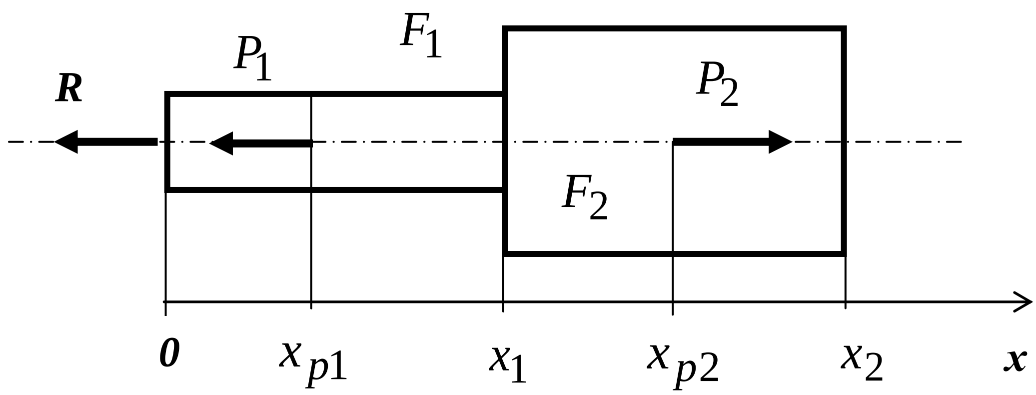
Рассмотрим пример

Дан ступенчатый брус, закрепленный на левом конце и нагруженный силами P_1 и P_2, направленными в разные стороны. Даны координаты точек приложения сил и концов участков бруса. Площадь поперечного сечения левого участка - F_1, правого - F_2. Пусть участок стержня $x_{p2} \le x \le x_2$ охлажден на ΔT.



Требуется построить график изменения внутренней силы N_X от координаты сечения x (построить эпюру N_X).

Заделка на левом конце противодействует силам P_1 и P_2, возникает реакция опоры R. Заменим заделку этой реакцией и вычислим ее значение.



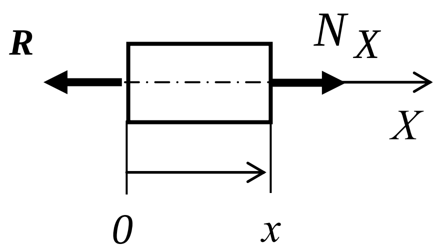
Спроектируем все силы на ось x, запишем уравнение равновесия и найдем значение R.

$$-R - P_1 + P_2 = 0 \; ; \qquad R = P_2 - P_1 \; .$$

Для нахождения внутренней силы N_X воспользуемся методом сечений.

Проведем сечение стержня на участке $0 \le x < x_{p1}$

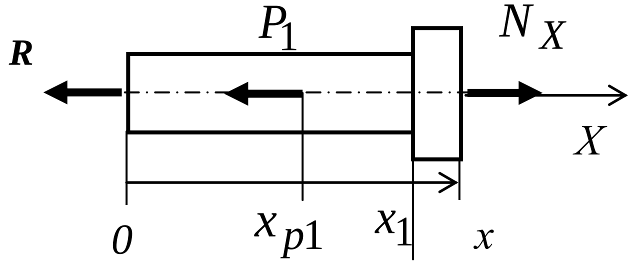
Рассмотрим левую часть, связав с сечением координатную систему (X, Y, Z). Действие отброшенной правой части на левую часть заменим силой N_X , направив ее от сечения в направлении оси X.



$$-R_1 + N_X = 0$$

$$N_X = R = P_2 - P_1$$

Проведем сечение стержня на участке $x_{p1} \le x < x_{p2}$

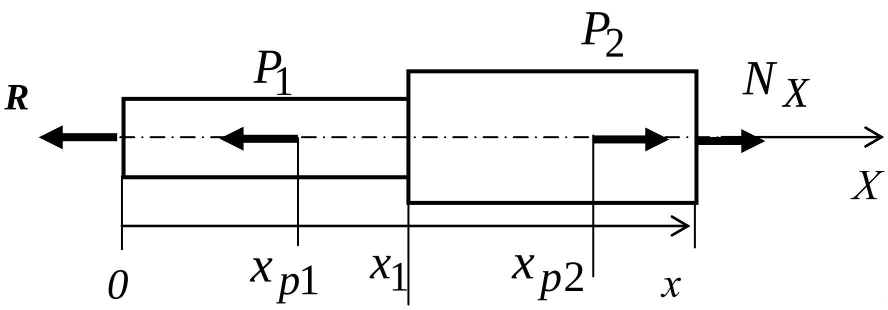


$$-R_1 - P_1 + N_X = 0$$

$$N_X = R + P_1 = P_2$$

Заметим, что изменение площади поперечного сечения не влияет на значение силы N_X. Сечение может быть проведено как до, так и после координаты x_1.

Проведем сечение стержня на участке $x_{p2} \le x \le x_2$



$$R = P_2 - P_1$$

$$-R_1 - P_1 + P_2 + N_X = 0 \qquad N_X = R + P_1 - P_2 = 0$$

На основании проведенных расчетов можно сформулировать практическое правило:

Внутренняя продольная сила равна алгебраической сумме сил, действующих по одну сторону от сечения. Сила, направленная справа налево, берется со знаком «плюс» .

Теперь можно построить эпюру продольных сил. Воспользуемся вычислительной средой MathCad.

Присвоим значения координатам, площадям и силам. Силу будем задавать в килоньютонах (kN) и напряжения в мегапаскалях (МПа):

$$kN := 10^3 \cdot N \qquad MPa := 10^6 \cdot Pa$$

Присвоим значения координатам, площадям и силам.

$x_1 := 0.2 \cdot m \qquad x_2 := 0.4 \cdot m \qquad x_{p1} := 0.1 \cdot m \qquad x_{p2} := 0.3 \cdot m$

$F_1 := 9 \cdot cm^2 \qquad F_2 := 22 \cdot cm^2 \qquad P_1 := 120 \cdot kN \qquad P_2 := 60 \cdot kN$

Опорная реакция равна $R := P_2 - P_1 \qquad R = -60 \cdot kN$

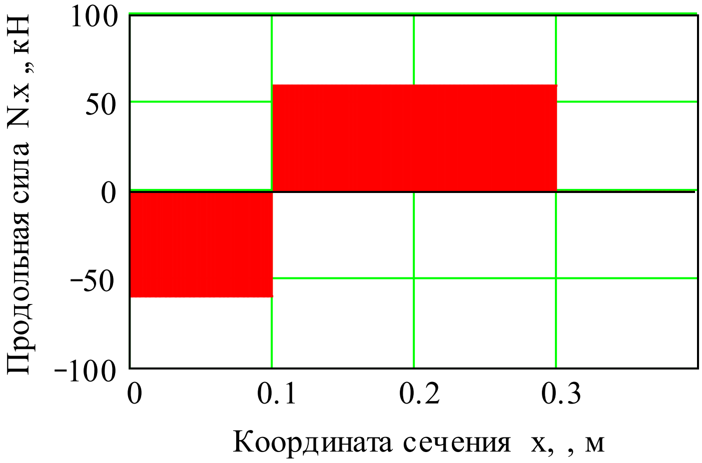
Знак "минус" говорит о том, что направление вектора R выбрано неправильно.

Запишем функцию, описывающую изменение N_X в зависимости от координаты сечения x

$$N_X(x) := \begin{cases} R & \text{if } 0 \le x < x_{p1} \\ R + P_1 & \text{if } x_{p1} \le x < x_{p2} \\ R + P_1 - P_2 & \text{if } x_{p2} \le x \le x_2 \\ 0 \cdot kN & \text{otherwise} \end{cases}$$

Зададим ранжированные значения координаты x

$$x := 0, 0.001 \cdot m .. x_2$$



Эпюра $N_X(x)$

Построим график изменения напряжения внутренней силы σ_X от координаты сечения x (построим эпюру σ_X).

$$\sigma_X = \frac{N_X}{F}$$

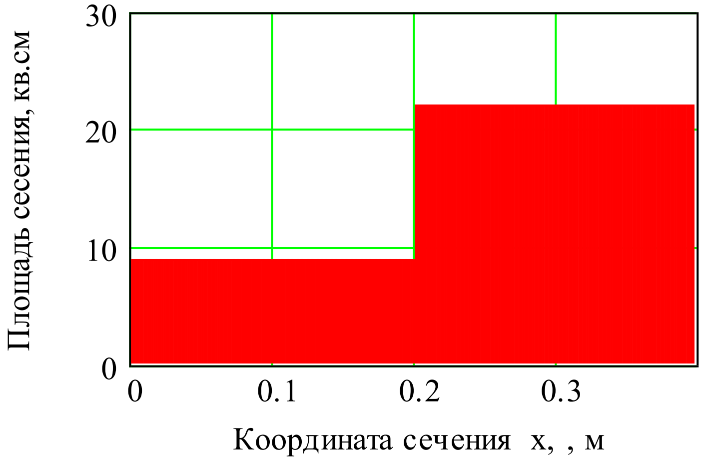
Для стержня, в котором внутренняя сила и площадь поперечного сечения изменяются по длине стержня,

$$\sigma_X(x) = \frac{N_X(x)}{F(x)}.$$

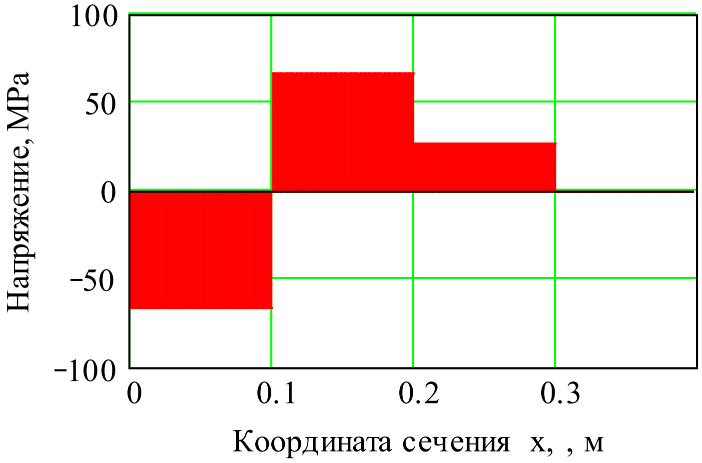
Воспользуемся вычислительной средой MathCad для вычислений значений напряжений.

Зависимость площади поперечного сечения от координаты имеет вид

$$F(x) := \begin{cases} F_1 & \text{if } 0 \le x < x_1 \\ F_2 & \text{if } x_1 \le x < x_2 \\ 0 \cdot m^2 & \text{otherwise} \end{cases}$$



$$\sigma_X(x) := \frac{N_X(x)}{F(x)}$$



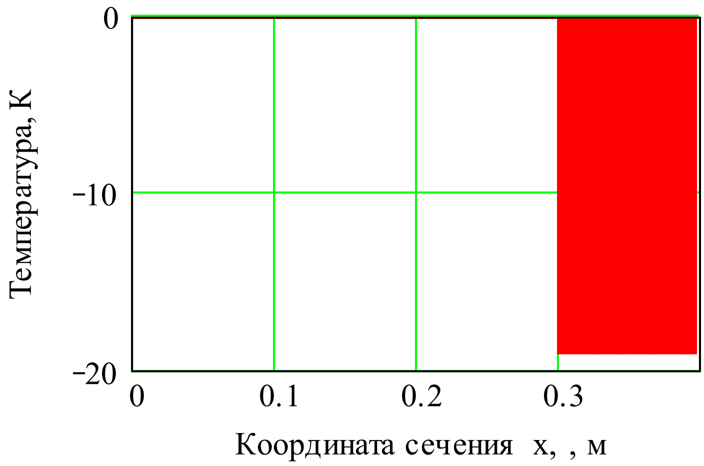
Построим график изменения относительной деформации ε_X и перемещений сечений стержня $U(x)$ от координаты сечения x (построим эпюры ε_X).

Введем значения модуля упругости, температуры и коэффициента линейного расширения

$E := 2 \cdot 10^5 \cdot MPa \qquad \Delta T := -19\ K \qquad \alpha := 1.2 \cdot 10^{-5} \cdot K^{-1}$

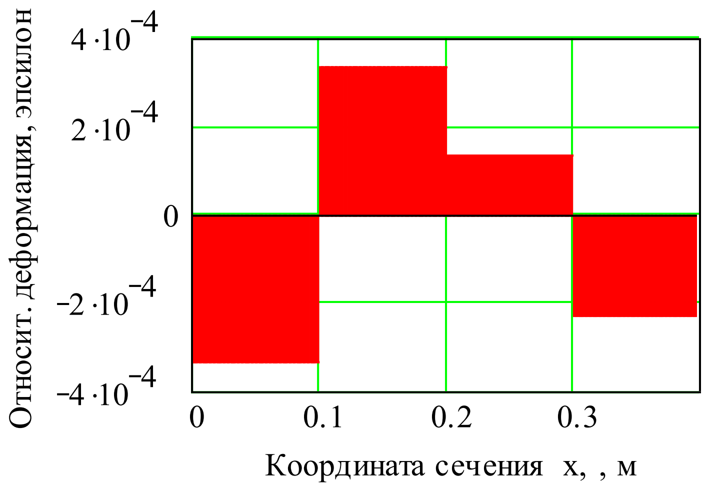
Зададим зависимость температуры стержня от координаты

$$T(x) := \begin{cases} 0 & \text{if } 0 \le x < x_{p2} \\ \Delta T & \text{if } x_{p2} \le x < x_2 \\ 0 \cdot K & \text{otherwise} \end{cases}$$



Аналитическое выражение для относительных деформаций и соответствующая эпюра деформаций имеет следующий вид

$$\varepsilon_X(x) := \frac{\sigma_X(x)}{E} + \alpha \cdot T(x)$$



Вычислим отдельно удлинения для каждой из четырех частей стержня

$$U_1 := \int_{0 \cdot m}^{x_{p1}} \varepsilon_X(x)\,dx \qquad U_1 = -0.033 \cdot mm$$

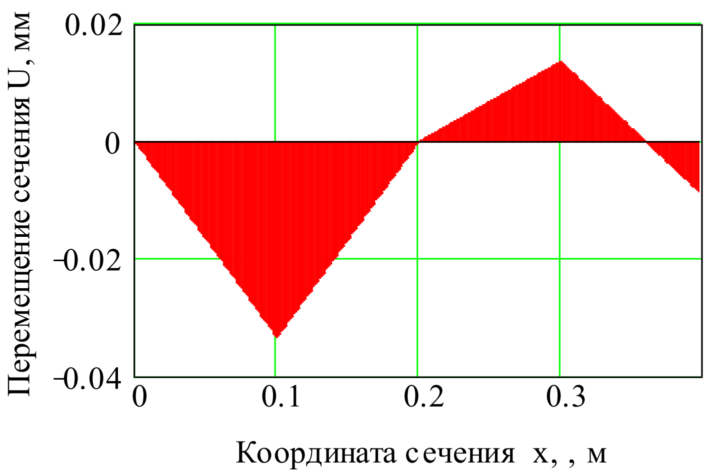
$$U_2 := \int_{x_{p1}}^{x_1} \varepsilon_X(x)\,dx \qquad U_2 = 0.033 \cdot mm$$

$$U_3 := \int_{x_1}^{x_{p2}} \varepsilon_X(x)\,dx \qquad U_3 = 0.014 \cdot mm$$

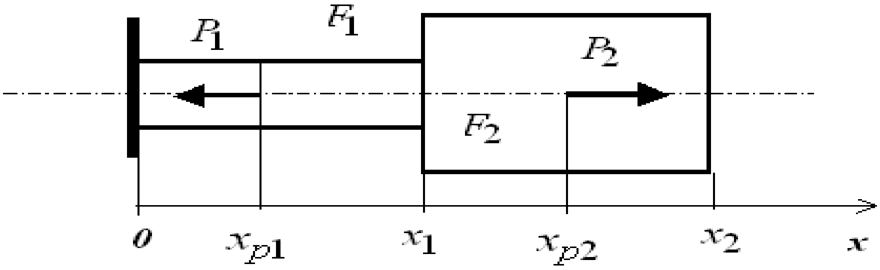
$$U_4 := \int_{x_{p2}}^{x_2} \varepsilon_X(x)\,dx \qquad U_4 = -0.023 \cdot mm$$

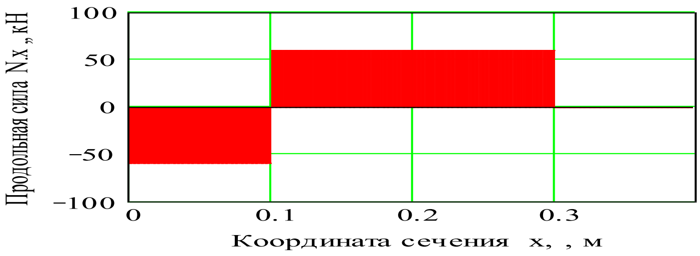
Сформируем функцию перемещение $U(x)$ и построим соответствующую эпюру

$$U_x(x) := \begin{vmatrix} \int_{0\cdot m}^{x} \varepsilon_X(x)\,dx \ \text{ if } \ 0 \le x < x_{p1} \\ U_1 + \int_{x_{p1}}^{x} \varepsilon_X(x)\,dx \ \text{ if } \ x_{p1} \le x < x_1 \\ U_1 + U_2 + \int_{x_1}^{x} \varepsilon_X(x)\,dx \ \text{ if } \ x_1 \le x < x_{p2} \\ U_1 + U_2 + U_3 + \int_{x_{p2}}^{x} \varepsilon_X(x)\,dx \ \text{ if } \ x_{p2} \le x \le x_2 \\ 0\cdot m \ \text{ otherwise} \end{vmatrix}$$

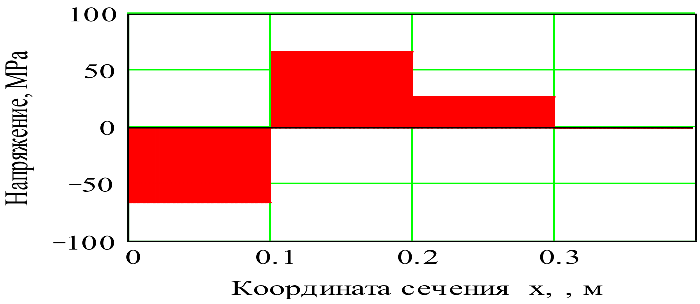


Объединим рисунок стержня и все построенные эпюры

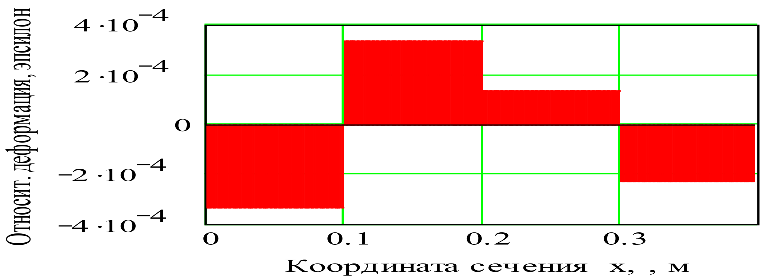




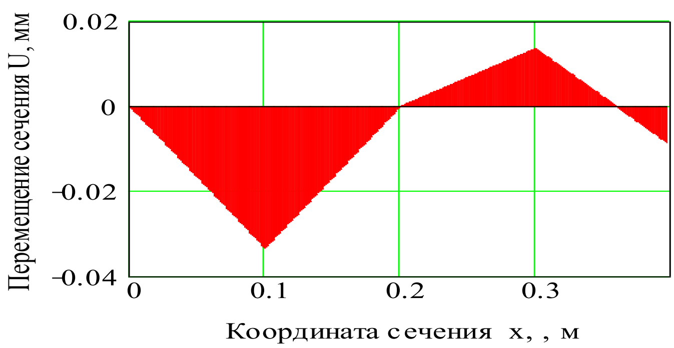
Эпюра N_X



Эпюра σ_X



Эпюра ε_X



Эпюра U_X