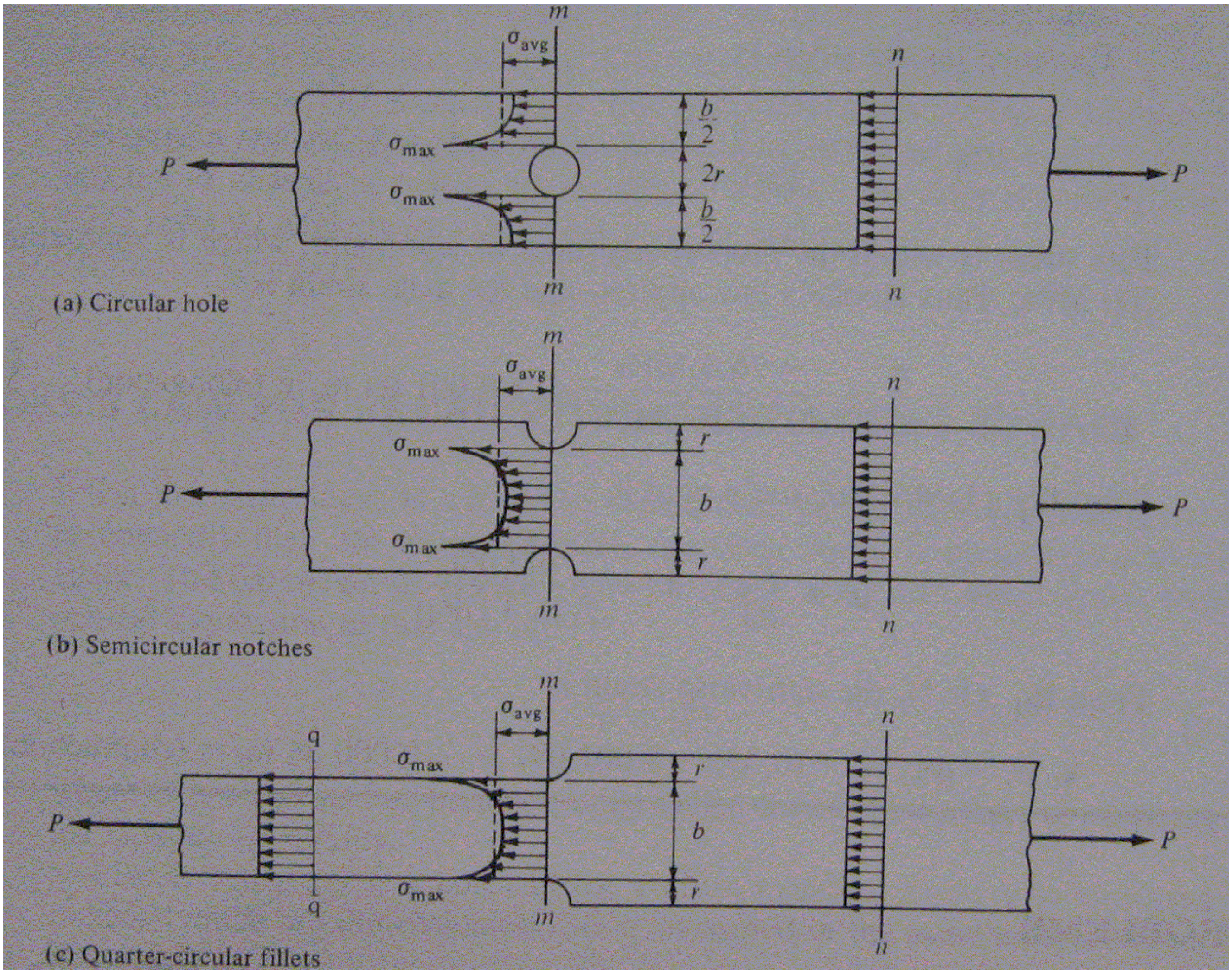
Лекция 14 – Концентрация напряжений. Устойчивость упругих систем.

<u>Концентрация</u> напряжений – это местное повышение напряжений, обусловленное резким изменением формы или размеров поперечного сечения тела. Рассмотрим примеры.



Круглое отверстие, полукруглые надрезы и галтель в четверть круга.

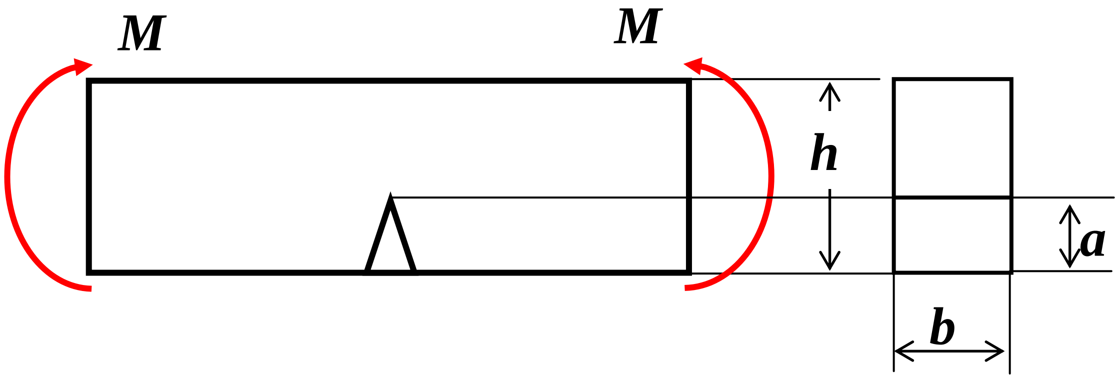
Теоретический коэффициент концентрации напряжений α_T определяется как отношение максимального напряжения σ_{max} к номинальному напряжению $\sigma_{ном}$:

$$\alpha_T = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{ном}}$$

где $\sigma_{ном}$ – напряжение, определяемое по формулам сопротивления материалов с учетом изменения размеров поперечного сечения из-за введения концентратора.

Для полосы шириной b, толщиной t с центральным отверстием радиуса r, которая растягивается силой P, номинальное напряжение равно

$$\sigma_{ном} = \frac{P}{(b-2r)t}\ .$$



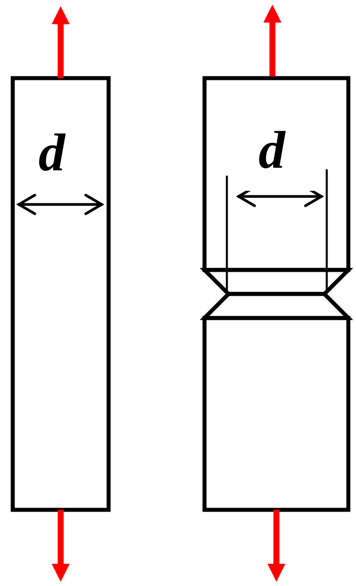
Для балки с надрезом глубиной a, нагруженной изгибающим моментом M:

$$\sigma_{ном} = \frac{M}{W} = \frac{6M}{b(h-a)^2}$$

Теоретический коэффициент концентрации напряжений α_T не зависит от свойств материала, а зависит от геометрии надреза – его глубины a и радиуса закругления ρ.

Влияние явления концентрации напряжений на прочность зависит от свойств материала, в первую очередь от его **пластичности**.

Поэтому вводят эффективный коэффициент концентрации напряжений $\alpha_Э$. При статическом нагружении его определяют как отношение предела прочности гладкого образца σ_b к пределу прочности надрезанного образца $\sigma_{bн}$:



$$\alpha_Э = \frac{\sigma_b}{\sigma_{bн}}$$

Для хрупких материалов $\boldsymbol{\alpha_Э = \alpha_T}$

Для пластичных материалов $\boldsymbol{\alpha_Э = 1}$

Критерий прочности при статическом нагружении:

Напряжение в конструкции, умноженное на эффективный коэффициент концентрации напряжений, не должно превышать предельно допустимого напряжения для данного материала.

$$\sigma\alpha_э \le [\sigma]$$

При циклическом нагружении эффективный коэффициент концентрации напряжений $\boldsymbol{\alpha_{-1}}$ определяют как отношение предела усталости гладкого образца $\boldsymbol{\sigma_{-1}}$ к пределу усталости надрезанного образца $\boldsymbol{\sigma_{-1н}}$:

$$\alpha_{-1} = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{-1н}}$$

Установлено следующее соотношение между эффективным $\boldsymbol{\alpha_Э}$ и теоретическим $\boldsymbol{\alpha_T}$ коэффициентами концентрации напряжений:

$$\alpha_Э = 1 + q(\alpha_T - 1),$$

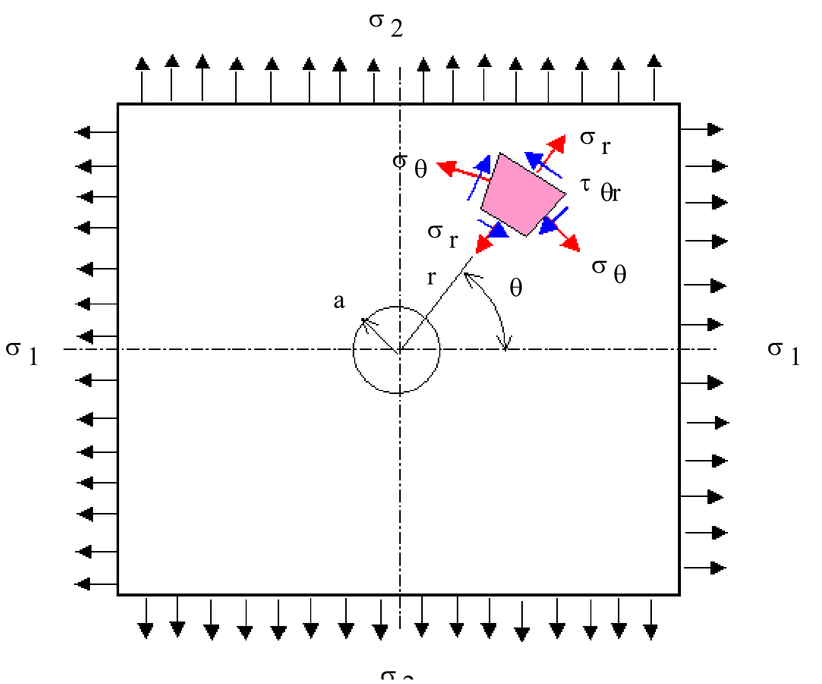
где $\boldsymbol{q}$ - коэффициент чувствительности материала к местным напряжениям, который зависит в основном от свойств материала.

Для качественных легированных сталей $\boldsymbol{q \approx 1}$

Для обычных конструкционных сталей $\boldsymbol{q \approx 0,6 - 0,8}$

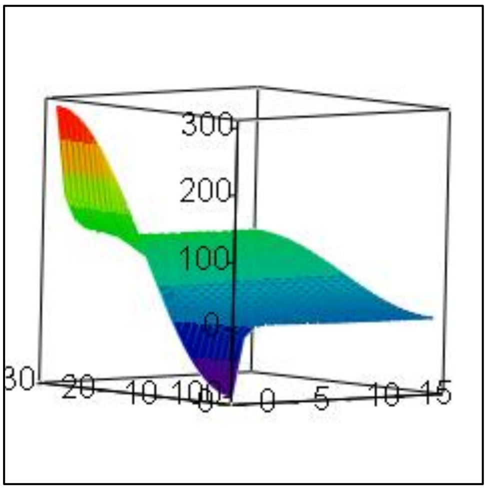
Для чугуна $\boldsymbol{q \approx 0}$

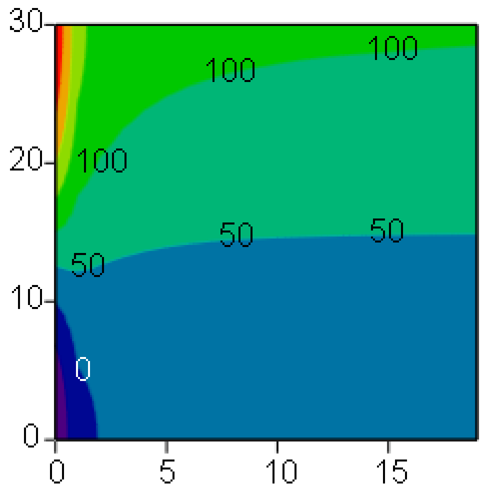
Рассмотрим еще раз распределение напряжений около круглого отверстия в широкой пластине



$\sigma_1 := 100 \cdot MPa$ $\sigma_2 := 0 \cdot MPa$ $a := 10 \cdot mm$

Нормальные напряжения $\boldsymbol{\sigma_\theta}$



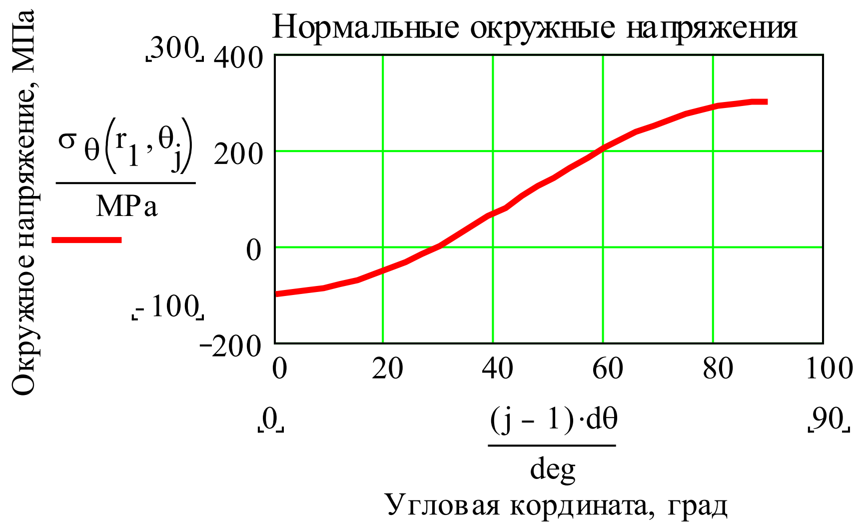


$\frac{\Sigma\theta}{MPa}$ $\frac{\Sigma\theta}{MPa}$

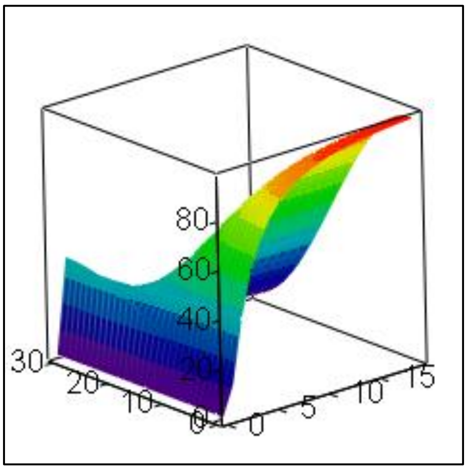
Нормальные напряжения σ_θ

$$\sigma_\theta(r,\theta) := \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\cdot\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\cdot\left(1 + \frac{3\cdot a^4}{r^4}\right)\cdot\cos(2\cdot\theta)$$

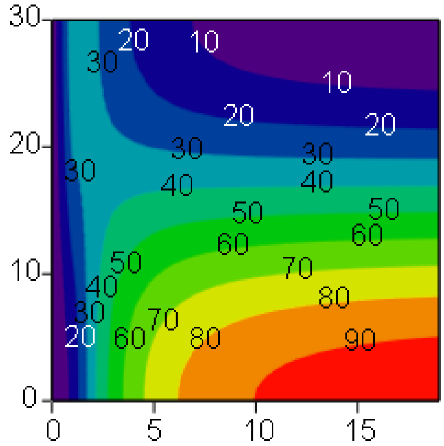
$$\sigma_\theta(a,\theta) = \sigma_1\cdot(1 - 2\cdot\cos(2\cdot\theta))$$



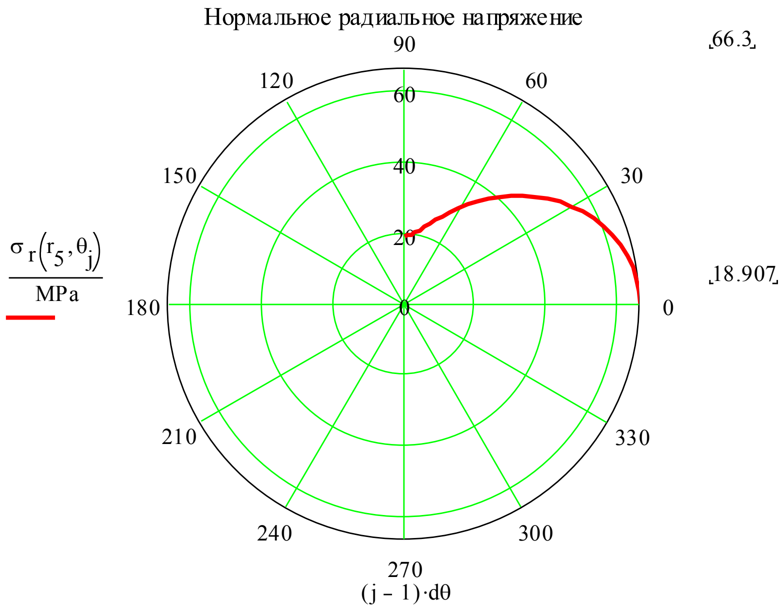
Нормальные напряжения σ_r

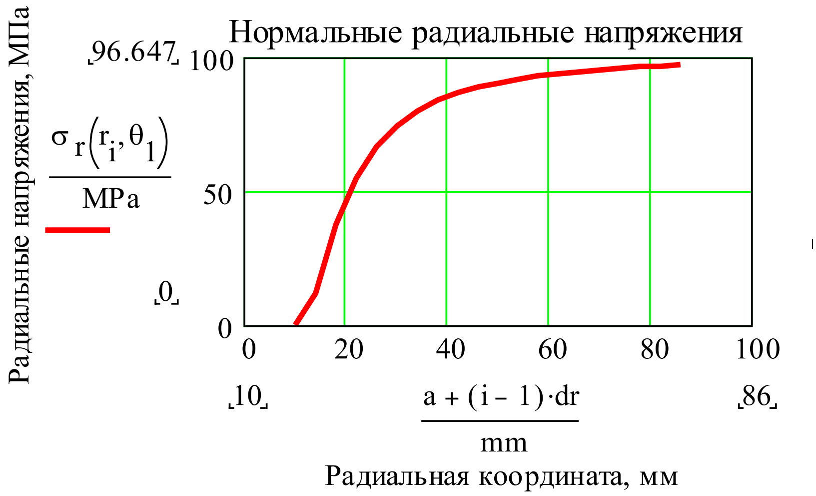


$\frac{\Sigma r}{MPa}$

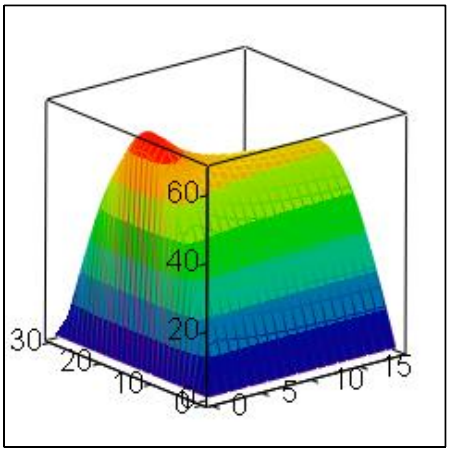


$\frac{\Sigma r}{MPa}$

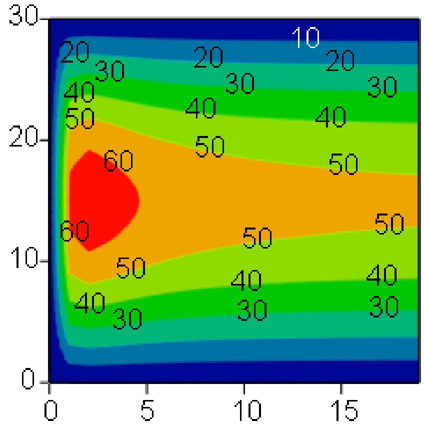




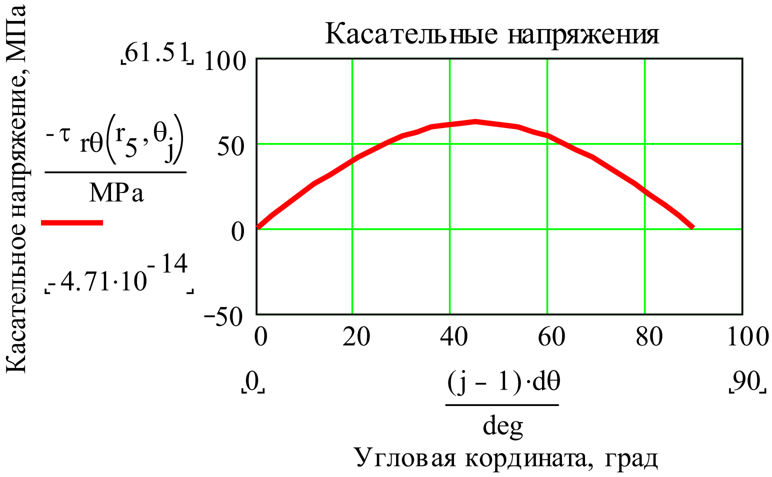
Касательные напряжения $\tau_{r\theta}$

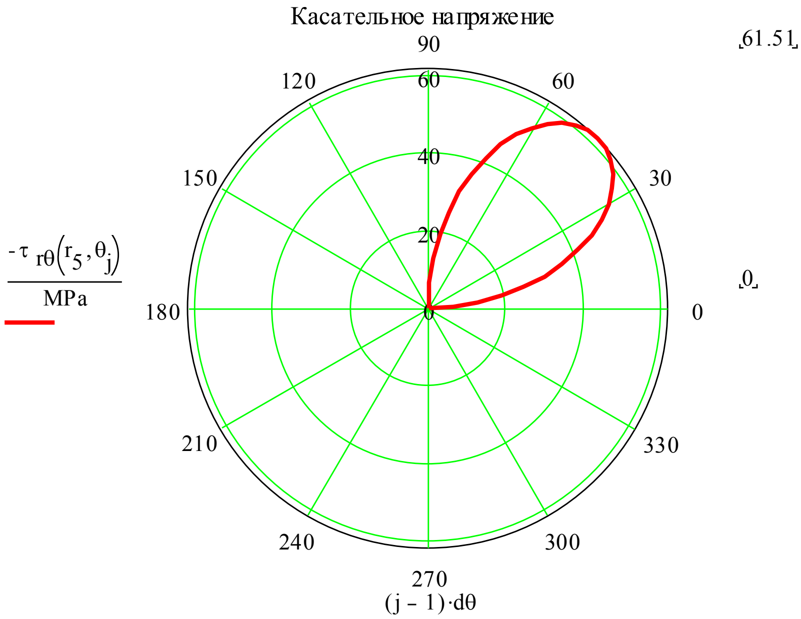


$\frac{T}{MPa}$



$\frac{T}{MPa}$





Расчеты на устойчивость

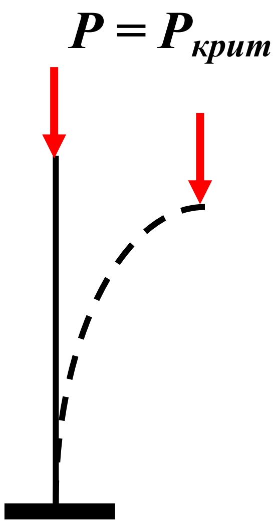
Устойчивость системы вообще или конструкции, в частности, - это способность сохранять свое состояние.

Под состоянием системы мы будем понимать такой набор сведений о системе, который позволит предсказать поведение системы в ближайшем будущем.

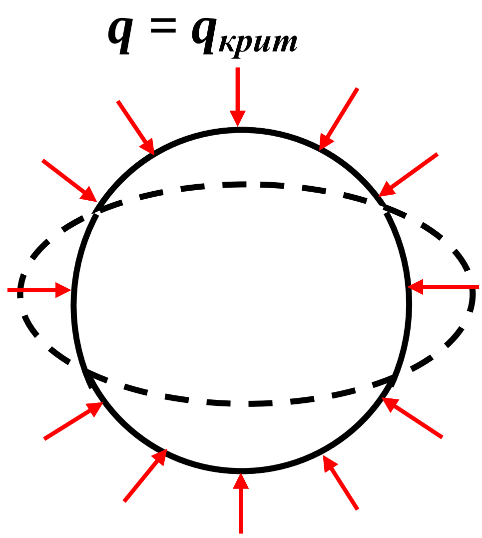
Если после устранения причины, вызывающей отклонение системы от положения равновесия, система возвращается в свое исходное состояние, то такое состояние называют ***устойчивым***.

Явление перехода системы от одного устойчивого состояния к другому устойчивому состоянию называется ***потерей устойчивости*** первого состояния.

Примеры потери устойчивости конструкций

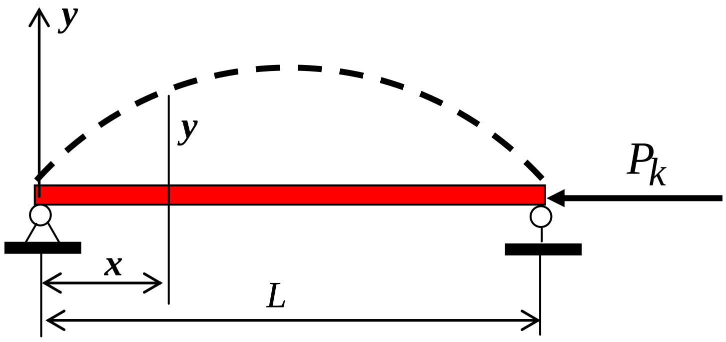


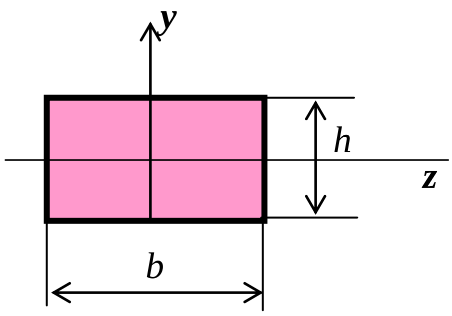
Потеря устойчивости сжатого стержня



Потеря устойчивости кольца (трубы)

1740 год. Эйлер, задача об устойчивости сжатого стержня





Уравнение упругой линии

$$EI_{min}\,y'' = M_z \qquad y'' = \frac{d^2y}{dx^2} < 0$$

$$M_z = -Py \qquad I_{min} = I_z$$

Однородное дифференциальное уравнение

$$EI_{min}\,y'' + Py = 0$$

$$y'' + \frac{P}{EI_{min}}\,y = 0 \qquad k^2 = \frac{P}{EI_{min}} \quad (*)$$

$$y'' + k^2 y = 0$$

Решение однородного дифференциального уравнения

$$y = C_1 \sin(kx) + C_2 \cos(kx)$$

При $x = 0$, $y = 0$ и $C_2 = 0$

При $x = L$, $y = 0$ и $y = C_1 \sin(kL)$

Постоянная $C_1 \neq 0$, так как в противном случае $y = 0$ везде и стержень остается прямолинейным. Следовательно

$$\sin(kL)=0 \quad (**)$$

и когда $kL=n\pi$, т.е. когда уравнение (**) удовлетворяется, то сила становится критической, $P = P_{кр}$. Поэтому из уравнения (*) имеем

$$k_{кр}{}^2=\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2=\frac{P_{кр}}{EI_{min}}$$

Наименьшая критическая сила потери устойчивости будет при $n=1$. Поэтому формула Эйлера принимает вид:

$$P_{кр}=\frac{\pi^2 EI_{min}}{L^2}.$$

$$\sigma_{кр}=\frac{P_{кр}}{F}$$

Выводы

1. Критическая сила $P_{кр}$ не зависит от прочности материала, $\sigma_{0.2}$ или σ_b;
2. Критическая сила $P_{кр}$ зависит от модуля упругости E и геометрии стержня - его длины и геометрии поперечного сечения;
3. Прочность стержня как системы зависит от его длины L при сжатии и не зависит от длины при растяжении.

Весьма существенно, что

- Для потери устойчивости характерны большие перемещения, которые сопровождаются пластическими деформациями и разрушением. Начальная первоначальная схема нарушается. Принцип независимости действия сил неприменим.
- Потеря устойчивости происходит при напряжениях, при которых конструкция не должна бы разрушаться, т.е.

$$\sigma_{кр}<\sigma_{0.2}\,, \qquad \sigma_{кр}<\sigma_{b} \quad \text{и} \quad \lfloor\sigma_{кр}\rfloor<[\sigma].$$

$$[\sigma_{кр}]=\frac{\sigma_{кр}}{n_{кр}} \qquad \sigma_{СЖ}\le\lfloor\sigma_{кр}\rfloor$$

Коэффициент запаса по устойчивости конструкции больше коэффициента запаса прочности.

Замечание

Эйлер определил условия, при которых возможно равновесие изогнутого стержня и силы. И он сделал заключение, что если одной силе соответствуют два состояния стержня (прямое и изогнутого) то при этой силе возможен переход одного состояния в другое, т.е. потеря устойчивости.

Зависимость критической силы от условий закрепления

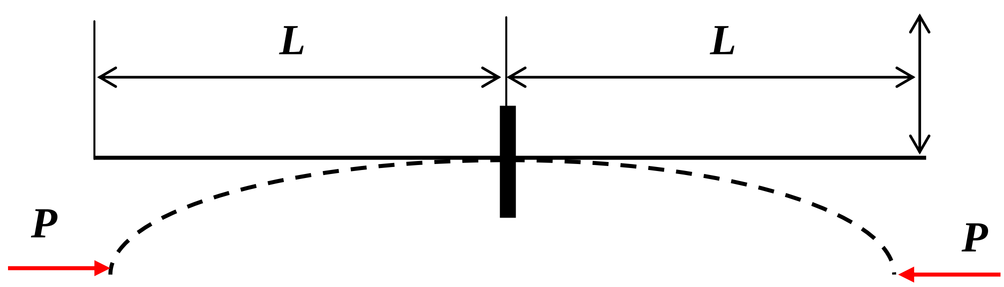
Введем понятие приведенной длины стержня через введение коэффициента приведения длины μ :

$$L_{пр}=\mu L\,; \qquad P_{кр}=\frac{\pi^2 EI_{\min}}{(\mu L)^2}$$

Коэффициента приведения длины μ можно обосновать на следующих примерах. Но сначала напомним, что формула Эйлера получена для шарнирно закрепленного по концам стержня. И его упругая линия изгиба – половина синусоиды.

Жестко закрепленный на одном конце стержень

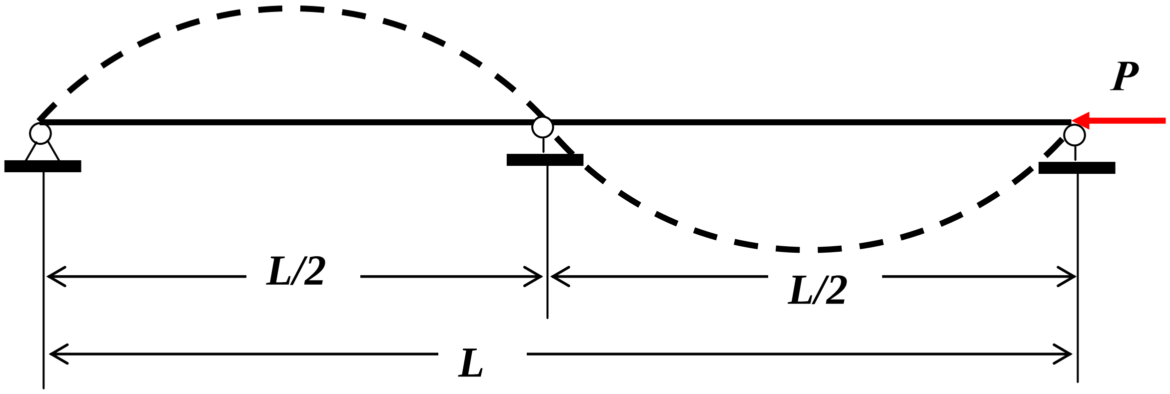
Отразим зеркально относительно заделки упругую линию.



Видно, что критическая сила для защемленного одним концом стержня длиной ***L*** будет равна критической силе шарнирно закрепленного стержня длиной ***2L*** , т.е. $\mu = 2$.

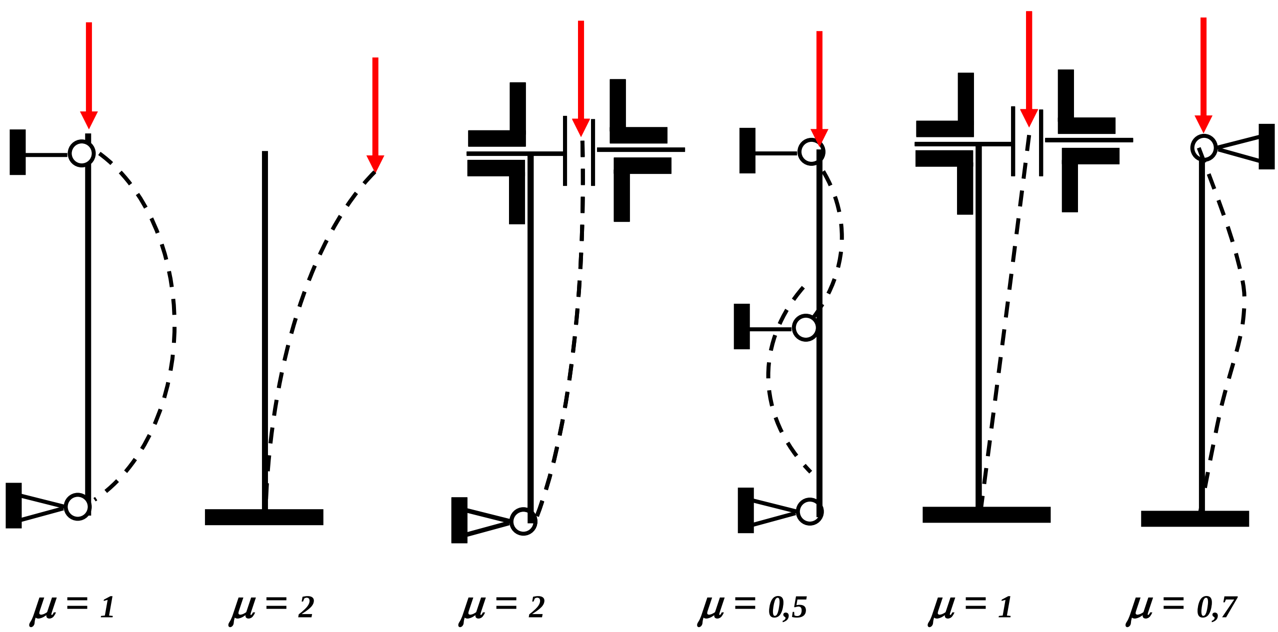
Шарнирно закрепленный стержень с шарнирной опорой посередине

Этот стержень изогнется, приняв форму двух синусоидальных полуволн.



Каждая половина стержня теряет устойчивость как шарнирно закрепленный стержень длиной ***L/2***. Следовательно, $\mu = 0{,}5$.

Итак, μ - это число, которое показывает, во сколько раз следует изменить длину шарнирно опертого стержня, чтобы критическая сила для него равнялась критической длине стержня длиной *L* в заданных условиях закрепления



Пределы применимости формулы Эйлера

Формула Эйлера получена для длинных и тонких стержней, которые теряют устойчивость при

$$\sigma_{кр} < \sigma_{0,2}.$$

Для толстых и коротких стержней возможна ситуация, при которой уже

$$\sigma_{кр} > \sigma_{0,2}.$$

Формула получена при условии применимости закона Гука, т.е. критическое напряжение не должно превышать предел пропорциональности $\sigma_{п.ц.}$, т.е. условие применимости формулы

$$\sigma_{кр} < \sigma_{п.ц.}$$

Введем понятие минимального радиуса инерции i_{min}:

$$i_{\min}^2 = \frac{I_{\min}}{F}$$

Определим также гибкость стержня λ как

$$\lambda = \frac{\mu L}{i_{\min}}$$

Тогда условие применимости формулы Эйлера можно записать в следующем виде

$$\sigma_{кр} = \frac{P_{кр}}{F} = \frac{\pi^2 E I_{\min}}{(\mu L)^2} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \le \sigma_{п.ц.}$$

или $$\lambda \le \lambda_{пр} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{п.ц.}}}$$

При $\lambda > \lambda_{np}$ для расчетов на устойчивость используют формулы, интерполирующие область напряжений от $\sigma_{п.ц}$ до $\sigma_{0,2}$.

Пример расчета на устойчивость

Длина шарнирно закрепленного стержня $L := 2 \cdot m$

Сечение стержня квадрат со стороной $a := 40 \cdot mm$

Площадь поперечного сечения $F := a^2$ $F = 16 \cdot cm^2$

Осевой момент инерции сечения $I := \frac{a^4}{12}$ $I = 21.333 \cdot cm^4$

Радиус инерции сечения $r := \sqrt{\frac{I}{F}}$ $r = 11.547 \cdot mm$

Коэффициент приведения длины $\mu := 1$

Гибкость стержня $\lambda := \frac{\mu \cdot L}{r}$ $\lambda = 173.205$

Предел текучести при сжатии $\sigma_{02} := 400 \cdot MPa$

Предел пропорциональности при сжатии $\sigma_{пц} := 300 \cdot MPa$

Модуль упругости $E := 2 \cdot 10^5 \cdot MPa$

Пределы применимости формулы Эйлера $\lambda \le \sigma_{cr}$

Критическая гибкость стержня $\lambda_{cr} := \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot E}{\sigma_{пц}}}$ $\lambda_{cr} = 81.116$

Формула Тимошенко

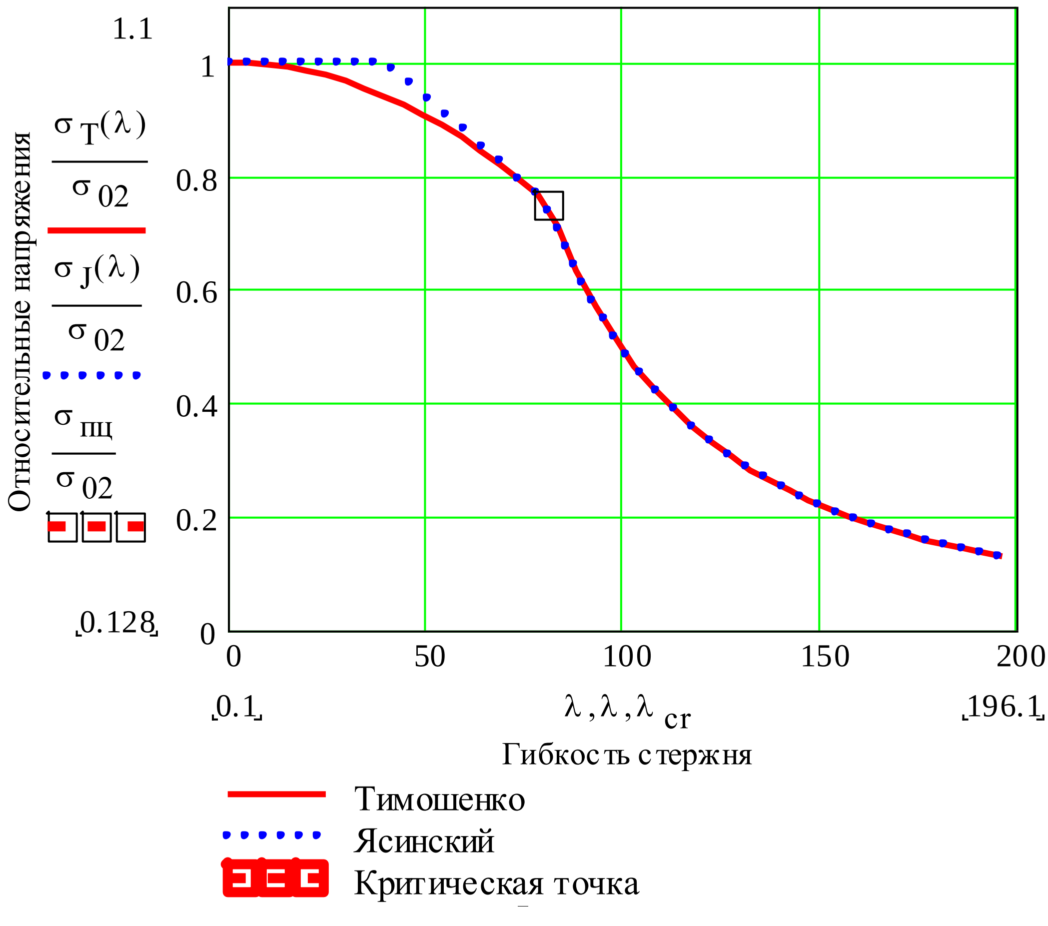
$$\sigma_T(\lambda) := \begin{cases} \sigma_{02} \cdot \left(1 - \dfrac{\lambda^2}{4 \cdot \lambda_{cr}^2}\right) & \text{if } 0 \le \lambda < \lambda_{cr} \\ \dfrac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2} & \text{if } \lambda \ge \lambda_{cr} \end{cases}$$

Формула Ясинского $\qquad 0 \le \lambda < \lambda_к$ - короткие стержни

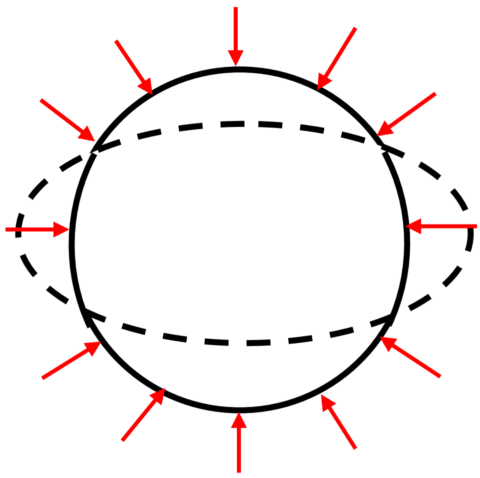
$\lambda_к := 40 \qquad \lambda_к \le \lambda < \lambda_{cr}$ - средние стержни

$\lambda \ge \lambda_{cr}$ - длинные стержни

$$\sigma_J(\lambda) := \begin{cases} \sigma_{02} & \text{if } 0 \le \lambda < \lambda_к \\ \sigma_{02} + \dfrac{(\sigma_{02} - \sigma_{пц})}{(\lambda_к - \lambda_{cr})} \cdot (\lambda - \lambda_к) & \text{if } \lambda_к \le \lambda < \lambda_{cr} \\ \dfrac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2} & \text{if } \lambda \ge \lambda_{cr} \end{cases}$$



Потеря устойчивости труб под действием внешнего давления



Допустим, что труба имеет радиус ***R*** и толщину стенки ***s.*** Тогда критическое давление потери устойчивости будет равно

$$q_{кр} = \frac{Es^3}{4\left(1-\mu^2\right)R^3},$$

где μ - коэффициент Пуассона.

В нормах прочности ЯЭУ приводится следующая формула для критического внешнего давления

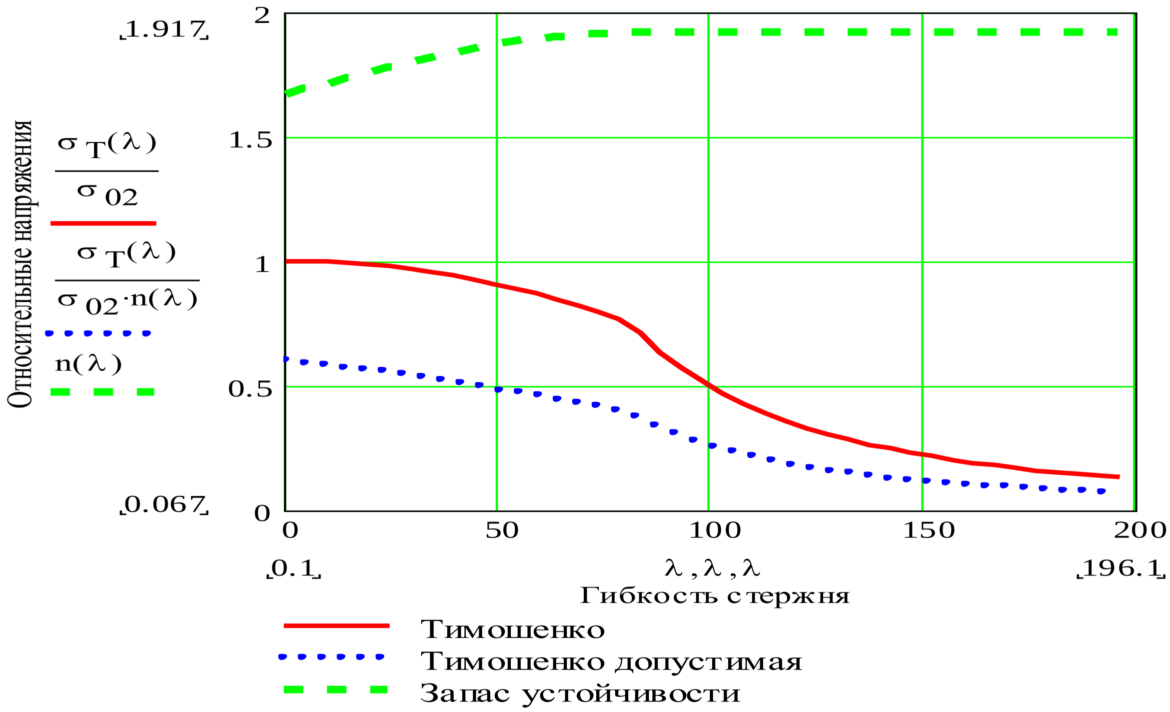
$$q_{кр} = \frac{2{,}2Es^3}{D_m{}^3},$$

где D_m – средний диаметр трубопровода АЭС.

Запасы устойчивости

Американский институт стальных конструкций (AISC) рекомендует следующие запасы прочности

$$n(\lambda) := \begin{cases} \dfrac{5}{3} + \dfrac{3\cdot\lambda}{8\cdot\lambda_{cr}} - \dfrac{\lambda^3}{8\cdot\lambda_{cr}^3} & \text{if } 0 \le \lambda < \lambda_{cr} \\ \dfrac{23}{12} & \text{if } \lambda \ge \lambda_{cr} \end{cases}$$



Отметим, что запас устойчивости понижают для стержней малой гибкости (короткие стержни по Ясинскому)