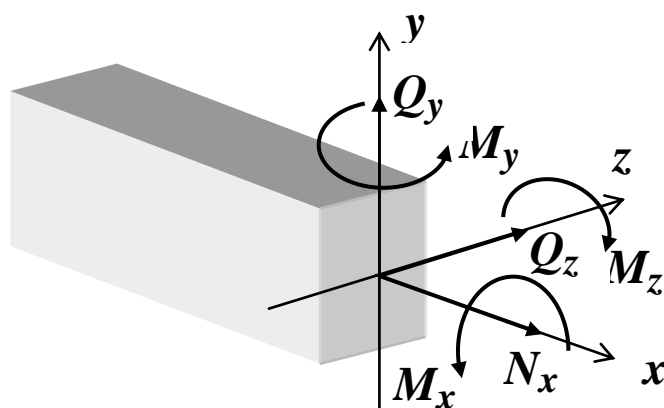


Лекция 13 – Сложное сопротивление прямого бруса

Под сложным сопротивлением понимают случаи деформации бруса под действием пространственной системы сил, когда в поперечном сечении бруса действуют два и более силовых факторов.

Внутренние силовые факторы при сложном сопротивлении

Левая система координат связана с центром тяжести сечения



Правило знаков.

- Силы положительные, если они направлены в направлении положительной оси координат.
- Моменты положительные, если они направлены против часовой стрелки (при наблюдении с конца положительной оси координат).

Для определения значений N_x , Q_y , Q_z , M_x , M_y и M_z необходимо составить шесть уравнений равновесия для оставшейся части бруса после применения метода сечений.

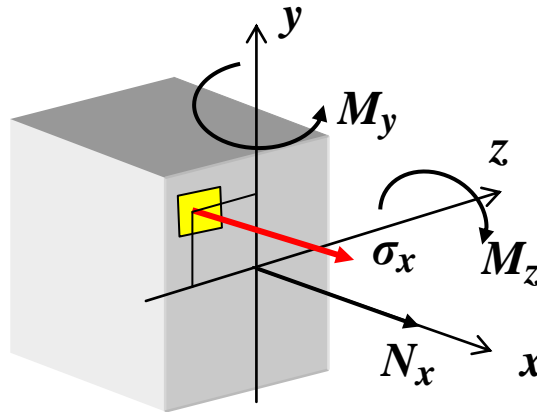
$$\Sigma \text{ сил}_x=0; \quad \Sigma \text{ сил}_y=0; \quad \Sigma \text{ сил}_z=0;$$


$$\Sigma \text{ мом}_x=0; \quad \Sigma \text{ мом}_y=0; \quad \Sigma \text{ мом}_z=0.$$

Нормальные и касательные напряжения при сложном сопротивлении

Нормальные напряжения возникают под действием осевой силы N_x и изгибающих моментов M_y и M_z .

Они действуют вдоль одного направления - направления оси X . Поэтому они алгебраически складываются в силу принципа суперпозиции.



$$\sigma_x(N_x) \quad \sigma_x(M_y) \quad \sigma_x(M_z)$$


$$\sigma_x = \sigma_x(N_x) + \sigma_x(M_y) + \sigma_x(M_z)$$

Для левовинтовой системы координат

$$\sigma_x = \frac{N_x}{F} - \frac{M_y}{I_y} z + \frac{M_z}{I_z} y.$$

Для правовинтовой системы координат

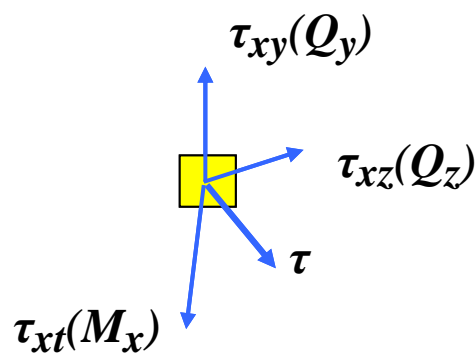
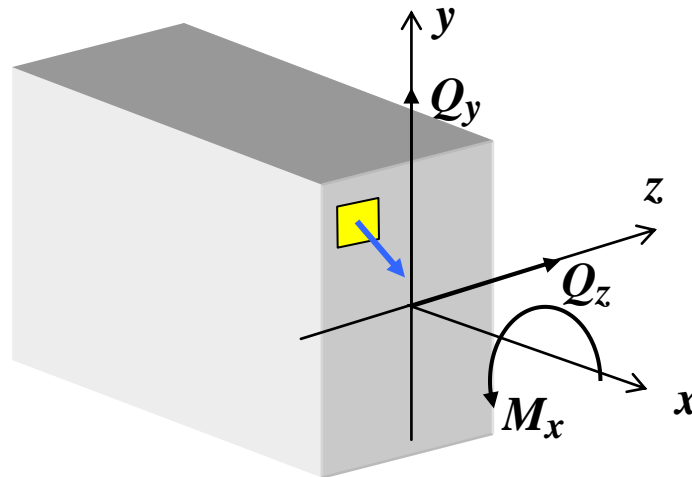
$$\sigma_x = \frac{N_x}{F} + \frac{M_y}{I_y} z - \frac{M_z}{I_z} y.$$

Уравнение для нейтральной оси имеет вид

$$\sigma_x(y, z) = \frac{N_x}{F} \mp \frac{M_y}{I_y} z \pm \frac{M_z}{I_z} y = 0.$$

Касательные напряжения возникают под действием поперечных сил Q_y и Q_z и под действием крутящего момента M_x .

Они направлены вдоль направления действия поперечных сил и по касательной к направлению действия крутящего момента. Поэтому они складываются по методу сложения векторов.



$$\vec{\tau} = \vec{\tau}_{xy}(Q_y) + \vec{\tau}_{xz}(Q_z) + \vec{\tau}_{xt}(M_x)$$

Так как касательные напряжения, возникающие под действием поперечных сил, как правило, намного меньше касательных напряжений от крутящего момента, то ими в прочностных расчетах пренебрегают.

В расчет принимают только напряжения, обусловленные крутящим моментом, которые для вала круглого сечения равны

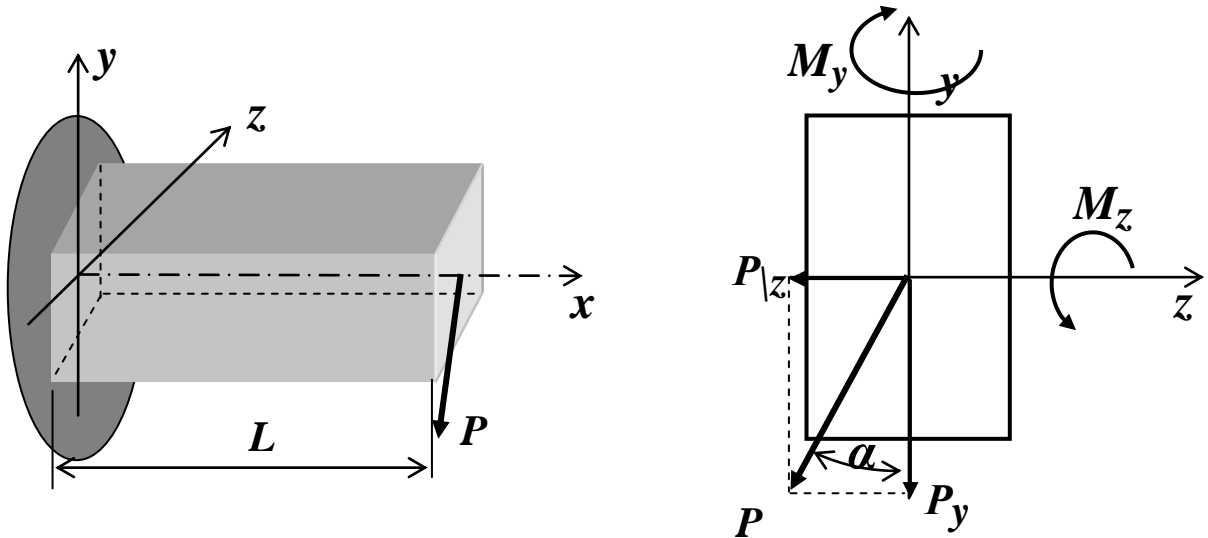
$$\vec{\tau} = \vec{\tau}_{xt}(M_x) = \frac{M_x \rho}{I_p},$$

где ρ - расстояние от начала координат до рассматриваемой точки сечения.

Частные случаи сложного сопротивления

Косой изгиб

При косом изгибе силовая плоскость не совпадает ни с одной из главных центральных осей сечения.



Наиболее опасное сечение – это сечение заделки.

Разложим вектор силы \mathbf{P} по координатным осям:

$$P_y = P \cos(\alpha) ; \quad P_z = P \sin(\alpha).$$

Изгибающие моменты для сечения заделки будут равны
 $M_y = -P_z L = -PL \sin(\alpha) ; \quad M_z = P_y L = PL \cos(\alpha)$

Отсюда получаем

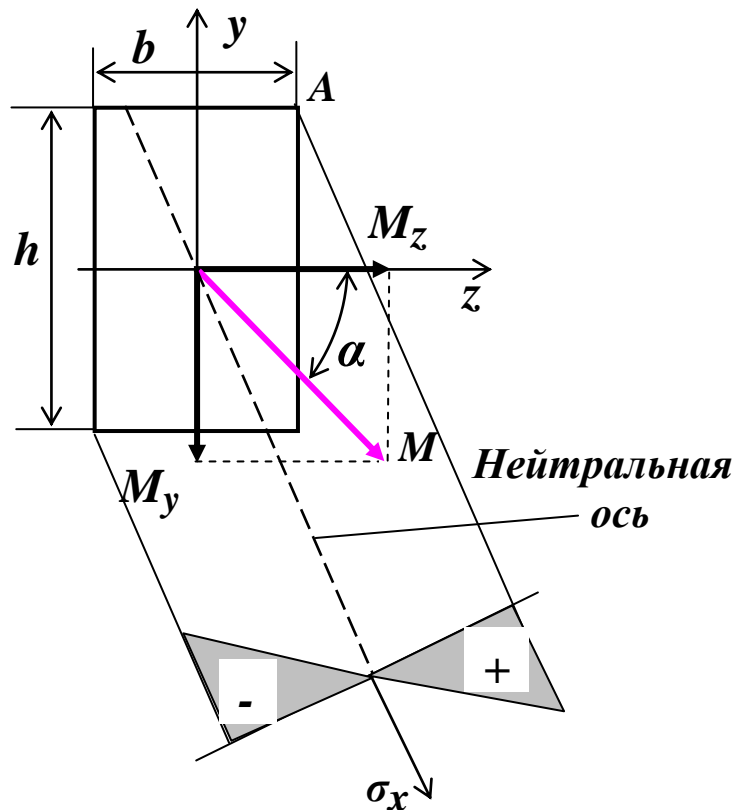
$$\frac{M_y}{M_z} = -\tan(\alpha)$$

В данной левой системе координат уравнение для нормальных напряжений

$$\sigma_x(y, z) = -\frac{M_y}{I_y} z + \frac{M_z}{I_z} y$$

Уравнение нейтральной оси, проходящей через начало координат

$$\sigma_x(y, z) = -\frac{M_y}{I_y} z + \frac{M_z}{I_z} y = 0$$



Преобразуем уравнение нейтральной оси

$$y = -\frac{I_z M_y}{I_y M_z} z \qquad y = -\frac{I_z}{I_y} \tan(\alpha) z$$

При $I_y = I_z$ нейтральная ось совпадает с направлением вектора изгибающего момента M .

Нейтральная ось отклоняется от направления M в сторону той оси, относительно которой осевой момент инерции меньше.

Наиболее опасная точка – точка A , наиболее удаленная от нейтральной оси

$$\sigma_x^A = -\frac{M_y b}{I_y 2} + \frac{M_z h}{I_z 2} = 0$$

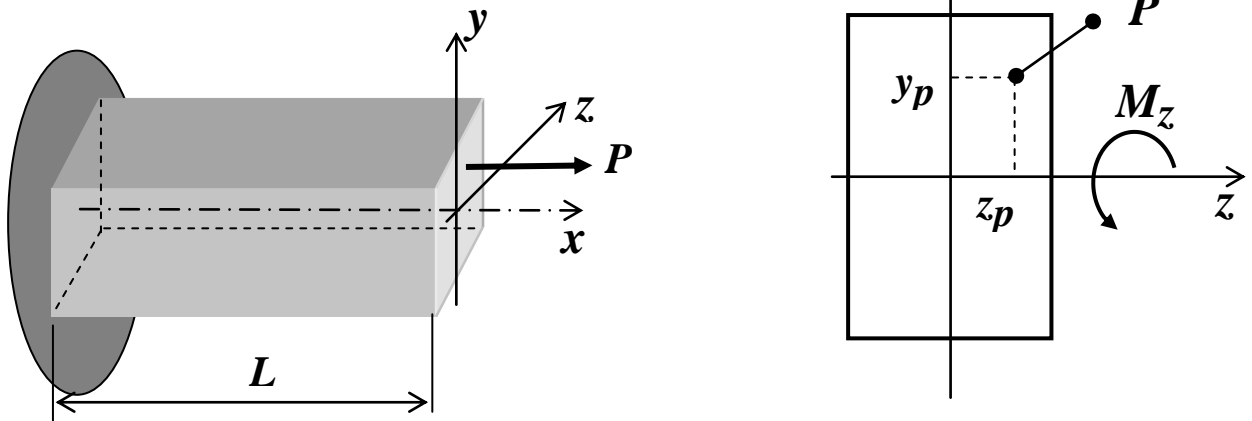
где

$$M_y = -PL \sin(\alpha) \quad M_z = PL \cos(\alpha);$$

$$I_y = \frac{hb^3}{12} \quad I_z = \frac{bh^3}{12}$$

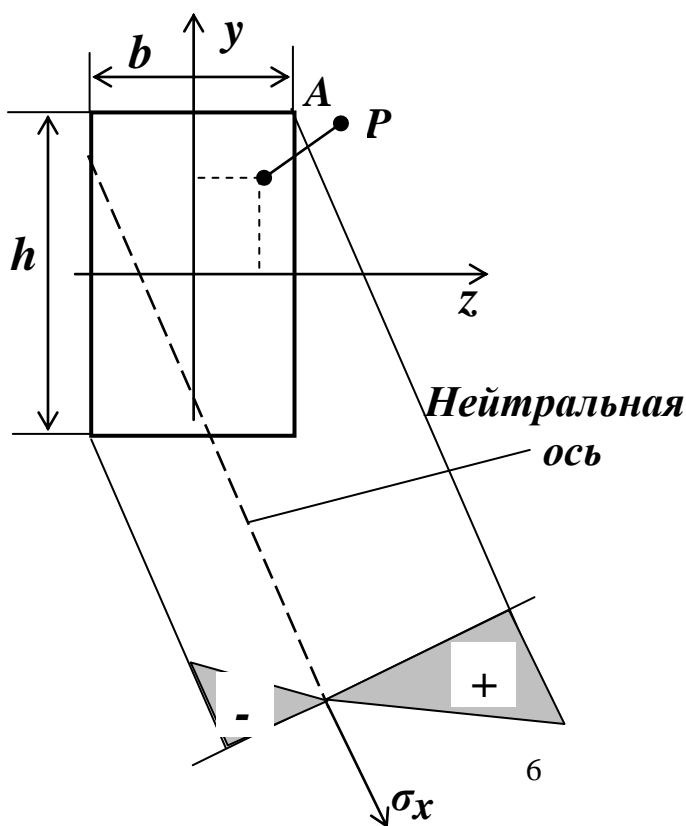
Внецентренное растяжение (сжатие)

Это растяжение стержня силой, параллельной оси, но смещенной от центра тяжести сечения



Все сечения стержня – равноопасны. В каждом сечении действуют три силовых фактора - растягивающая сила и два изгибающих момента

$$N_x = P \quad M_y = -Pz_p \quad M_z = Py_p$$



В данной левой системе координат уравнение для нормальных напряжений

$$\sigma_x(y, z) = \frac{N_x}{F} - \frac{M_y}{I_y} z + \frac{M_z}{I_z} y$$

Уравнение нейтральной оси

$$\sigma_x(y, z) = \frac{N_x}{F} - \frac{M_y}{I_y} z + \frac{M_z}{I_z} y = 0$$

$$y = -\frac{N_x I_z}{M_z F} + \frac{M_y I_z}{M_z I_y} z$$

Нейтральная ось не пересекает оси y и z в положительном квадранте. Нейтральная ось и точка приложения силы находятся по разные стороны от начала координат. Действительно, так как

$$\frac{M_y}{M_z} < 0$$

то при

$$\begin{array}{ll} z = 0 & y < 0 \\ y = 0 & z < 0 \end{array}$$

Наиболее опасная точка – точка А, наиболее удаленная от нейтральной оси

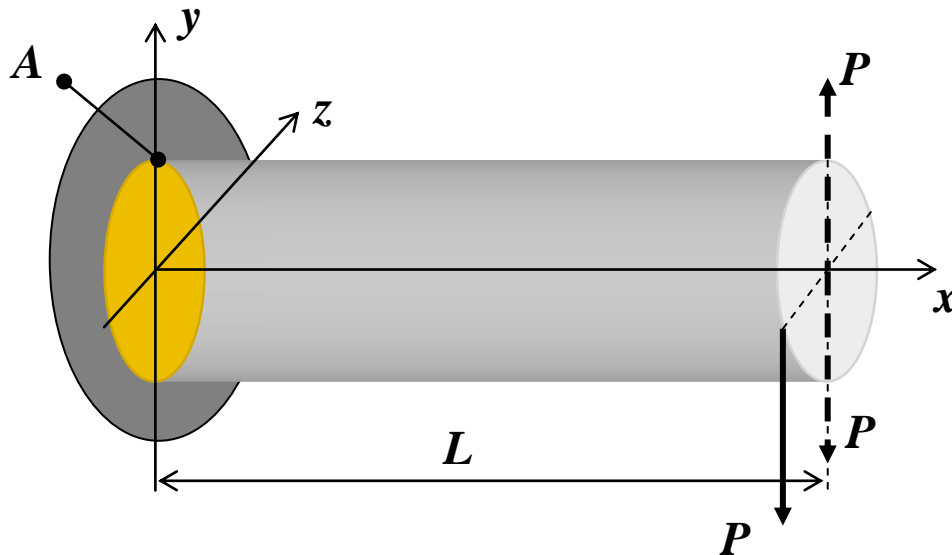
$$\sigma_x^A = \frac{P}{bh} - \frac{M_y}{I_y} \frac{b}{2} + \frac{M_z}{I_z} \frac{h}{2}$$

$$M_y = -Pz_p \quad M_z = Py_p$$

$$I_y = \frac{hb^3}{12} \quad I_z = \frac{bh^3}{12}$$

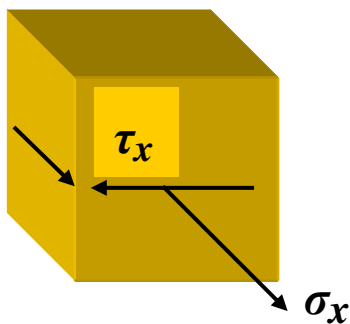
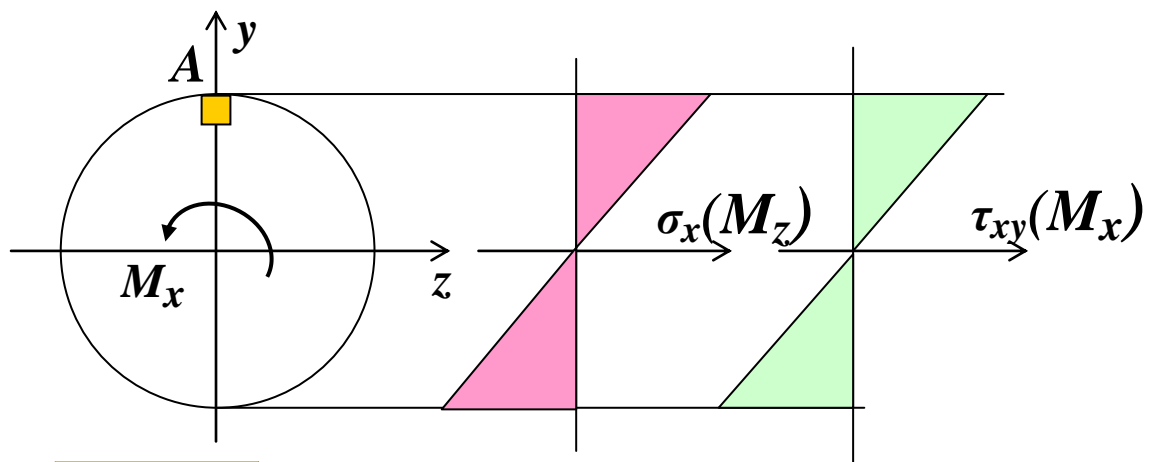
Изгиб с кручением

Наиболее опасное сечение – это сечение заделки. В этом сечении действуют крутящий и изгибающий моменты.



$$M_x = P \frac{D}{2} \quad M_z = PL$$

Наиболее опасная точка – точка А.



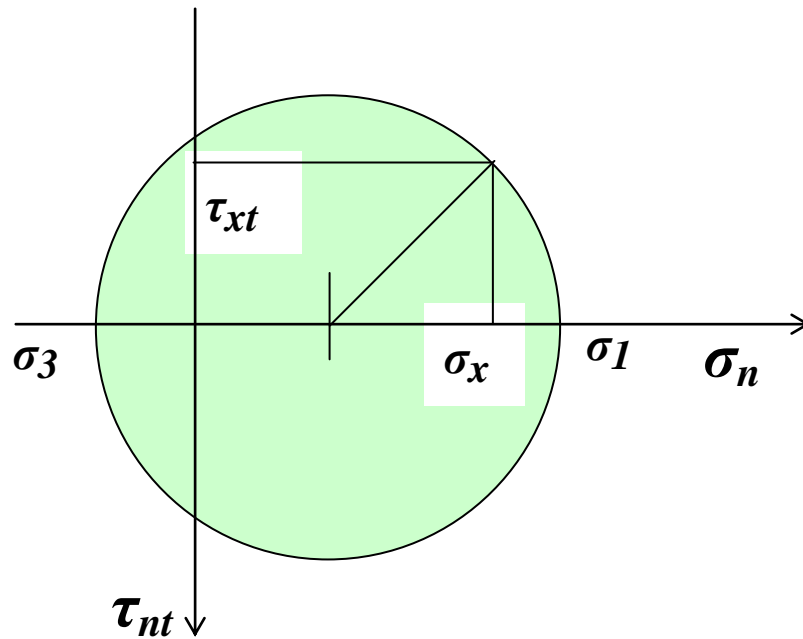
$$\sigma_x = \frac{PL}{W_z}$$

$$\tau_{xy} = \frac{PD}{2W_p}$$

$$W_z = \frac{\pi D^3}{32}$$

$$W_p = \frac{\pi D^3}{16}$$

Это наиболее распространенное напряженное состояние. Для него круг Мора имеет вид



$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad \sigma_2 = 0$$

$$\sigma_3 = \frac{\sigma_x}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_{\text{экв}}^I = \sigma_1 = \frac{\sigma_x}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_{\text{экв}}^{III} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_{\text{экв}}^V = \sqrt{\sigma_x^2 + 3\tau_{xy}^2}$$