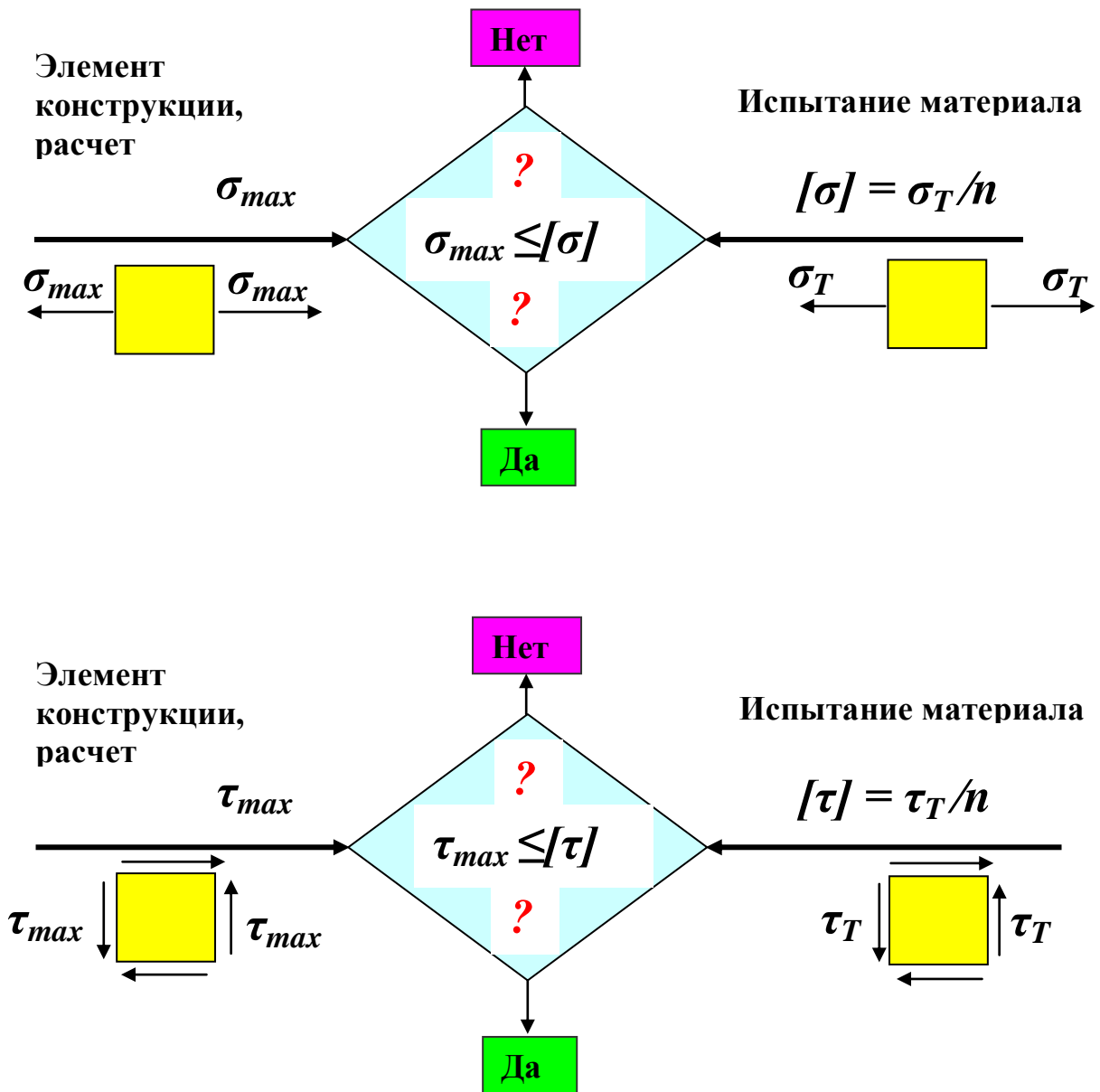


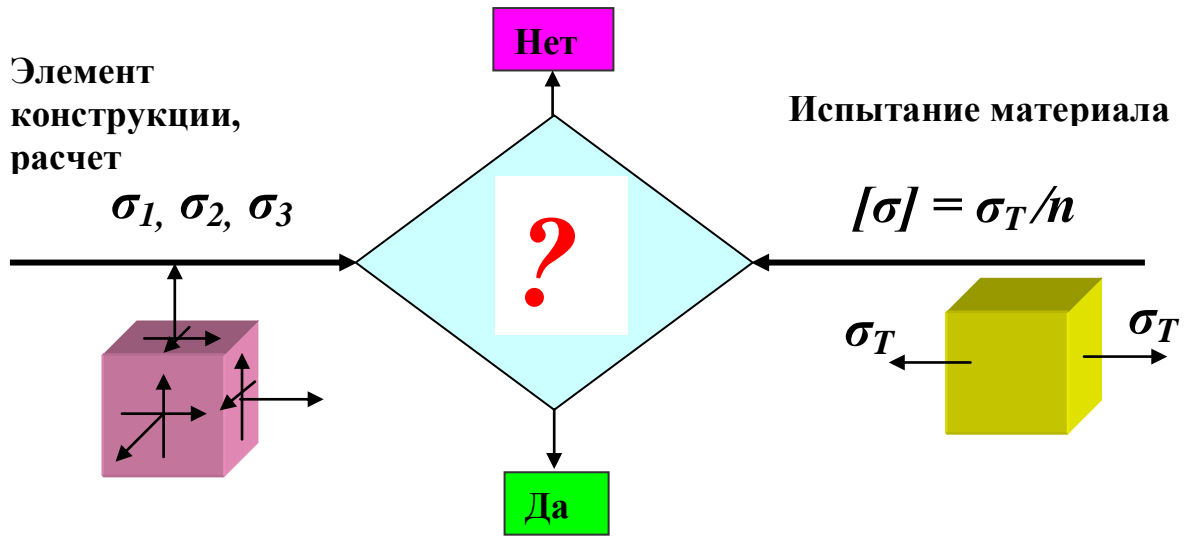
Лекция 12 – Технические теории прочности

До сих пор все рассмотренные случаи расчета на прочность ограничивались случаями сравнительно простых напряженных состояний – одноосного напряженного состояния и состояния чистого сдвига. Первое типично для растяжения стержня, второе – для кручения вала.

Задача была сравнительно простой, так как эти напряженные состояния воспроизводятся при испытаниях на растяжение и на кручение стержней.



Но очень часто встречаются случаи, когда напряженное состояние в опасной точке элемента конструкции не одноосное, а сложное. Каков выход из этого положения?



Выхода два.

1. *Проводить испытания материала при сложном напряженном состоянии.*

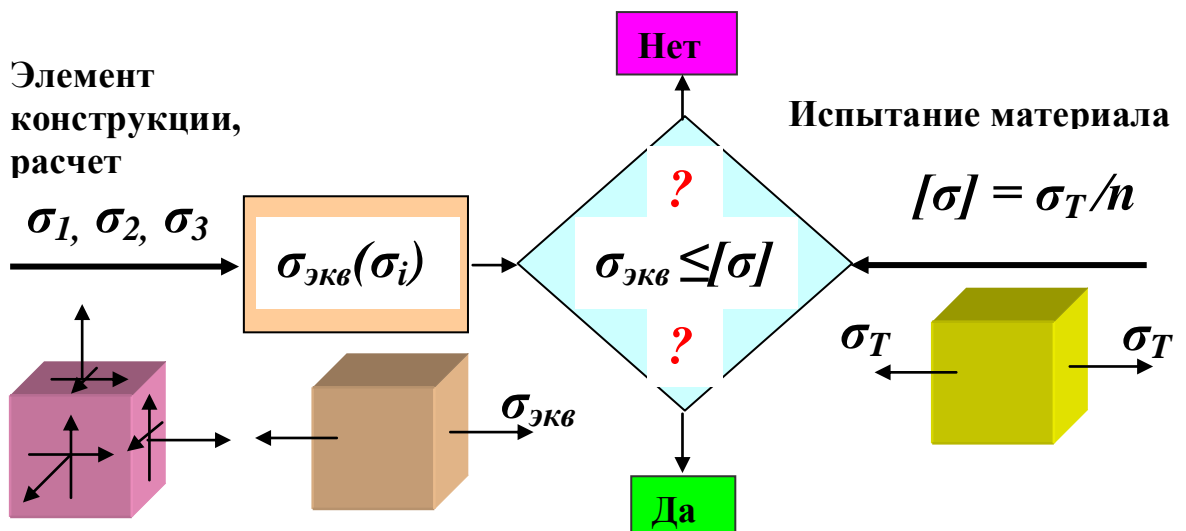
Но это технически невозможно из-за бесконечного числа напряженных состояний и из-за громадных технических затруднений.

2. *Проводить сравнение сложного напряженного состояния с простым.*

Но непосредственное сравнение двух разнородных состояний, также как и разнородных явлений и величин, невозможно.

Поэтому был избран путь

- *сведения сложного напряженного состояния к эквивалентному ему простому, одноосному, а затем*
- *сравнение эквивалентного напряжения с предельным одноосным, определяемым экспериментально.*



Теории прочности дают возможность находить эквивалентное напряженное состояние как функцию одного, двух или всех трех главных напряжений:

$$\sigma_{эkv} = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$$

Предельное состояние материала

Известны три вида механических состояний материала.

1. **Упругое состояние**. В этом состоянии материал содержит определенную упругую потенциальную энергию. Но этой энергии еще недостаточно, чтобы могли идти необратимые процессы пластического деформирования или роста трещин.
2. **Упругопластическое состояние**. В этом состоянии избыток упругой энергии тратится на необратимые пластические деформации.
3. **Состояние хрупкого разрушения**. В этом состоянии упругой энергии достаточно, чтобы поддерживать неконтролируемый рост трещин.

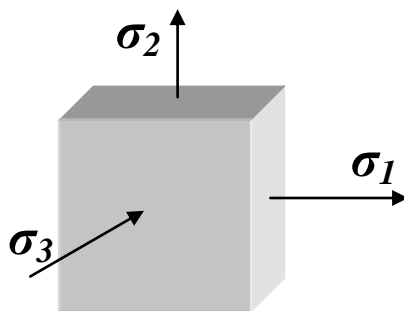
Предельным напряженным состоянием называют такое напряженное состояние, при котором происходит качественное изменение поведения материала, переход от одного механического состояния к другому.

Для **пластичных материалов** за предельное напряженное состояние принимают состояние, при котором появляются первые необратимые пластические деформации.

Для **хрупких материалов** предельное напряженное состояние ассоциируют с состоянием, при котором появляются трещины.

Эквивалентное напряжение

Рассмотрим некоторое напряженное состояние, заданное в главных напряжениях.



Теперь сопоставим сложное напряженное состояние с одноосным напряженным состоянием.

Будем пропорционально увеличивать напряжения σ_1 , σ_2 и σ_3 до тех пор, пока напряженное состояние не будет предельным:

$$\sigma_1 \Rightarrow \sigma_1^{пред}$$

$$\sigma_2 \Rightarrow \sigma_2^{пред}$$

$$\sigma_3 \Rightarrow \sigma_3^{пред}$$

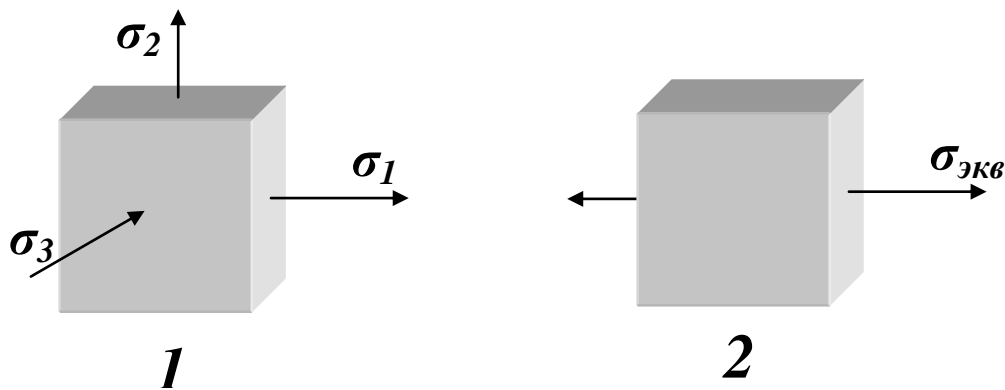
То число n , которое показывает, во сколько раз нужно увеличить все компоненты данного напряженного состояния, чтобы оно стало предельным, называется коэффициентом запаса по предельному состоянию:

$$n = \frac{\sigma_1^{пред}}{\sigma_1} = \frac{\sigma_2^{пред}}{\sigma_2} = \frac{\sigma_3^{пред}}{\sigma_3}.$$

Два напряженных состояния 1 и 2 будут равноопасны, если равны их коэффициенты запаса:

$$n_1 = n_2.$$

Два напряженных состояния эквивалентны, если они равноопасны.



Состояния 1 и 2 равноопасны. Поэтому состояние 2 эквивалентно состоянию 1

Эквивалентным напряжением $\sigma_{эkv}$ будем называть такое напряжение, которое нужно создать в растянутом образце, чтобы возникающее в нем *одноосное* напряженное состояние стало **равноопасным** с заданным двухосным или трехосным напряженным состоянием.

Но нам необходим **критерий эквивалентности**, который поможет нам вычислять эквивалентное напряжение

$$\sigma_{эkv} = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3),$$

как функцию главных компонент рассматриваемого напряженного состояния.

Эту задачу выполняют **теории прочности**.

В основе **теорий прочности** лежат **гипотезы** о преимущественном влиянии на прочность одного или нескольких компонентов напряженного состояния.

Эти **гипотезы**, но доведенные до соответствующего **аналитического выражения**, позволяющего рассчитывать $\sigma_{эkv}$, называются **теориями прочности**.

1. Теория наибольших растягивающих напряжений (I теория, Галилей)

Согласно этой теории основным фактором, определяющим достижение напряженного состояния, является нормальное наибольшее напряжение σ_1 :

Два напряженных состояния равноопасны, если равны наибольшие нормальные напряжения, т.е.

$$\sigma_{эkv} = \sigma_1. \quad (1)$$

Критерий прочности имеет вид

$$\sigma_{эkv}^I = \sigma_1 \leq [\sigma_p],$$

где $[\sigma_p]$ - допускаемое напряжение при растяжении.

При одноосном сжатии $\sigma_3 < 0$. В этом случае $\sigma_{\text{экв}}^{I^*} = \sigma_3$,
и необходимо соблюдение критерия $\sigma_{\text{экв}}^{I^*} = \sigma_3 \leq [\sigma_c]$,
где $[\sigma_c]$ - допускаемое напряжение при сжатии.

Основные ограничения первой теории:

- Теория не учитывает двух других главных напряжений σ_2 и σ_3 ;
- Теория не учитывает возможность деформации сдвига.

2. Теория упругих наибольших линейных деформаций (II теория, Мариотт)

Два напряженных состояния будут равноопасны, если наибольшие относительные удлинения будут равны.

Для трехосного состояния : $\varepsilon_{\text{max}} = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)]$

Для одноосного напряженного состояния: $\varepsilon_{\text{max}}^{\text{экв}} = \frac{\sigma_{\text{экв}}}{E}$

С учетом равенства $\varepsilon_{\text{max}}^{\text{экв}} = \varepsilon_{\text{max}}$ получаем

$$\sigma_{\text{экв}}^{II} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \quad (2)$$

Критерий прочности: $\sigma_{\text{экв}}^{II} \leq [\sigma_p]$.

Если $\sigma_3 < 0$, то необходимо соблюдение условия

$$\sigma_{\text{экв}}^{II^*} = \sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2) \leq [\sigma_c]$$

Основное ограничение второй теории:

Теория основана на применении закона Гука для упругого состояния. Но при достижении предельного состояния пластичности этот закон теряет силу.

3. Теория упругих наибольших касательных напряжений (III теория, Мизес)

Два напряженных состояния будут равноопасны, если у них равны наибольшие касательные напряжения.

Для трехосного напряженного состояния: $\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$

Для одноосного напряженного состояния: $\tau_{max}^{эkv} = \frac{\sigma_{эkv}}{2}$

С учетом равенства $\tau_{max}^{эkv} = \tau_{max}$ получаем

$$\sigma_{эkv}^{III} = \sigma_1 - \sigma_3. \quad (3)$$

Критерий прочности:

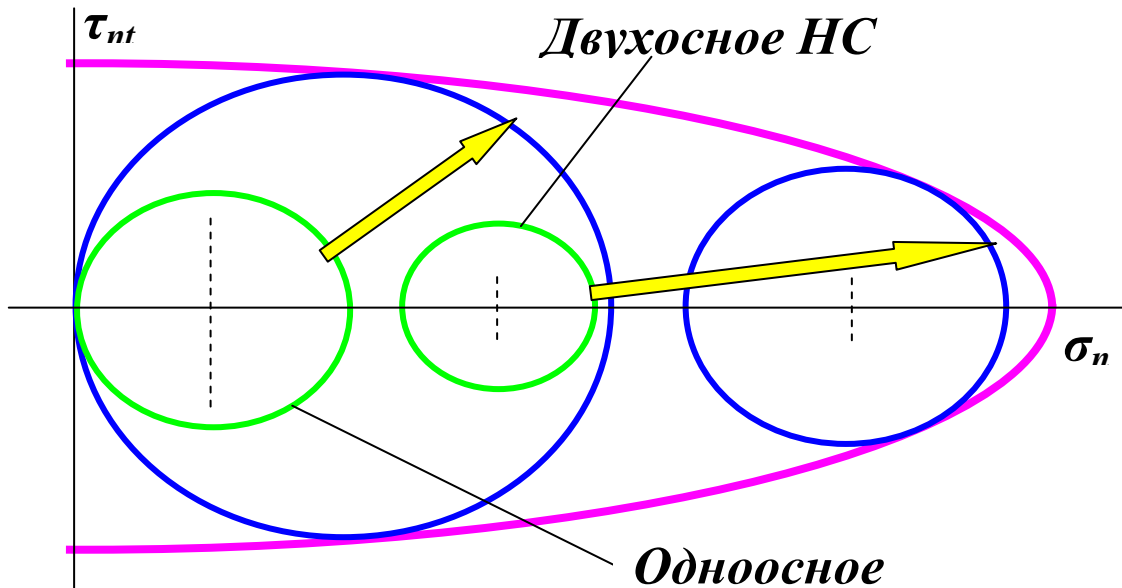
$$\sigma_{эkv}^{III} \leq [\sigma_p]$$

Основные ограничения третьей теории:

- Теория не работает, если $\sigma_1 = \sigma_3$, что имеет место при трехосном растяжении.
- Теорией предполагается, что $[\sigma_p] = [\sigma_c]$.
- Не учитывается среднее главное напряжение σ_2 .

4. Теория прочности Мора (IV теория)

Два напряженных состояния будут равноопасны, если при одновременном увеличении всех составляющих напряжений круги Мора для этих двух состояний одновременно коснутся огибающей предельных кругов Мора.



Если два зеленых круга для одноосного и двухосного напряженного состояния увеличить в n раз, то они займут положение синих кругов.

Если синие круги одновременно касаются розовой огибающей всех предельных кругов Мора, то они становятся **предельными** кругами.

Следовательно, два исходных зеленых круга **равноопасны**.

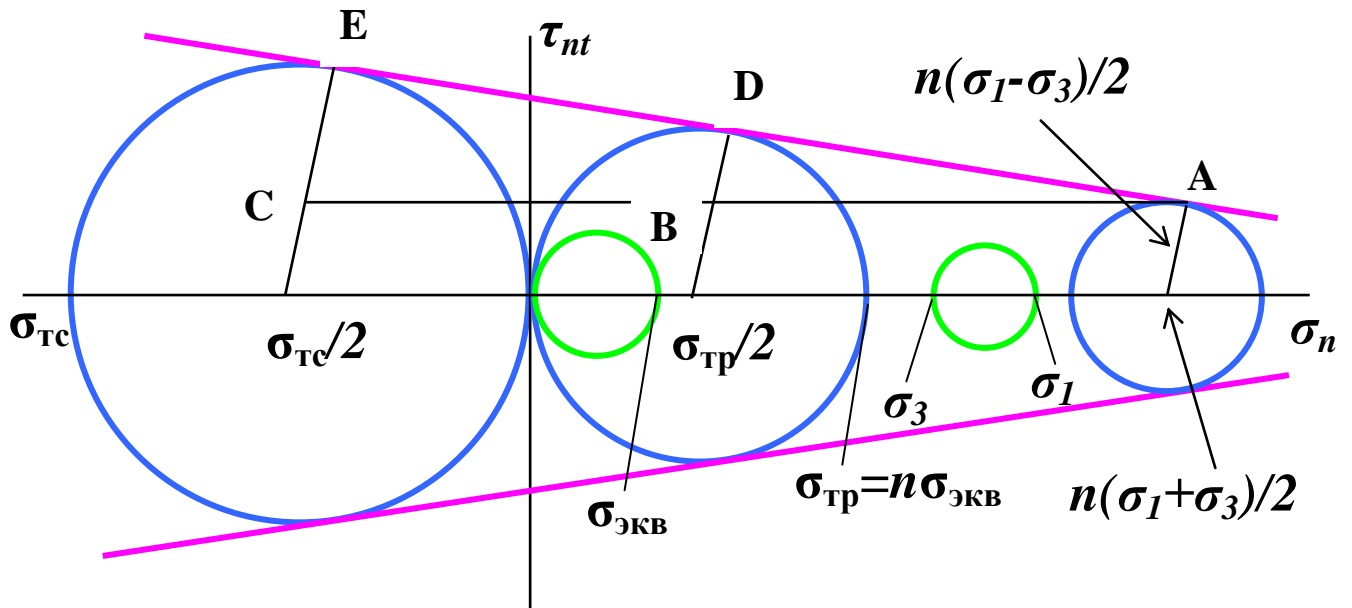
Материал в этом состоянии или разрушается, или переходит в упругопластическое состояние.

Огибающую предельных кругов Мора можно рассматривать как **характеристику предельных механических свойств** данного материала.

Построим предельные круги Мора для одноосного растяжения и

сжатия, радиусы которых равны соответственно $\frac{\sigma_{Tp}}{2}$ и $\frac{\sigma_{Tc}}{2}$.

Проведем касательную к этим кругам, которую примем за предельную огибающую.



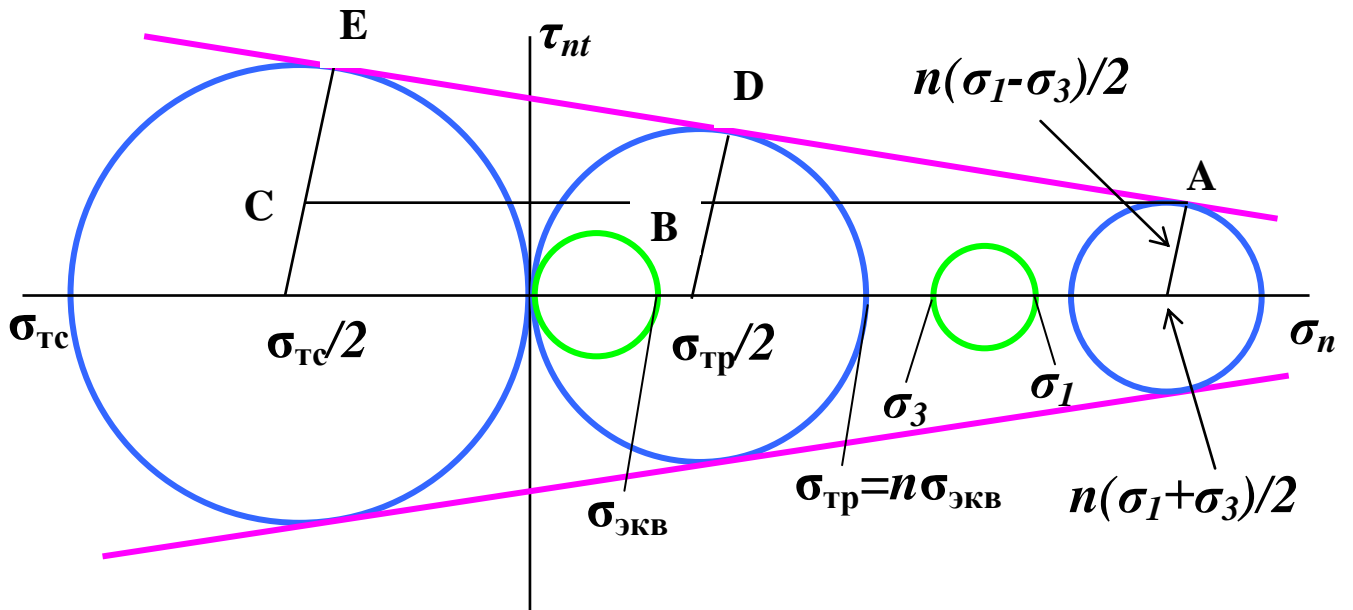
Чтобы некоторое двухосное напряженное состояние (σ_1, σ_3) стало предельным, его главные напряжения следует увеличить в n раз. Радиус этого нового круга Мора будет равен $\frac{n(\sigma_1 - \sigma_3)}{2}$, а

координата центра этого круга - $\frac{n(\sigma_1 + \sigma_3)}{2}$.

Из подобных треугольников **ABD** и **ACE** получаем

$$BD.AC = AB.CE, \quad (*)$$

где



$$BD = \frac{\sigma_{Tp}}{2} - \frac{n(\sigma_1 - \sigma_3)}{2}; \quad CE = \frac{\sigma_{Tc}}{2} - \frac{n(\sigma_1 - \sigma_3)}{2};$$

$$AB = \frac{n(\sigma_1 + \sigma_3)}{2} - \frac{\sigma_{Tp}}{2}; \quad AC = \frac{n(\sigma_1 + \sigma_3)}{2} + \frac{\sigma_{Tc}}{2}.$$

После подстановки в (*) получаем

$$\frac{\sigma_{Tp}}{n} = \frac{\sigma_1}{2} - \frac{\sigma_{Tp}}{\sigma_{Tc}} \sigma_3, \quad (**)$$

и с учетом того, что $\frac{\sigma_{Tp}}{\sigma_{Tc}} = \frac{[\sigma_p]}{[\sigma_c]}$, а $\frac{\sigma_{Tp}}{n} = \sigma_{экв}$,

имеем следующие выражения для эквивалентного напряжения и критерия прочности

$$\sigma_{экв}^M = \sigma_1 - \frac{[\sigma_p]}{[\sigma_c]} \sigma_3; \quad \sigma_{экв}^M \leq [\sigma_p] \quad (4)$$

При равенстве допускаемых напряжений при растяжении и сжатии,

$$[\sigma_p] = [\sigma_c], \quad \sigma_{\text{экв}}^M = \sigma_{\text{экв}}^{\text{III}}$$

Ограничение теории прочности Мора

Не учитывается среднее главное напряжение σ_2 .

5. Энергетическая теория прочности (V теория)

Два напряженных состояния будут равноопасны, если имеет место равенство удельных потенциальных энергий формоизменения.

Для трехосного напряженного состояния:

$$a_\phi = \frac{1+\mu}{6E} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 \right].$$

Для одноосного напряженного состояния: $a_\phi^{\text{экв}} = \frac{1+\mu}{3E} \sigma_{\text{экв}}^2$

С учетом равенства $a_\phi^{\text{экв}} = a_\phi$ получаем

$$\sigma_{\text{экв}}^V = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2} \quad (5)$$

Критерий прочности: $\sigma_{\text{экв}}^V \leq [\sigma_p]$

Ограничения V теории прочности те же, что и для III теории.

Области применения теорий прочности

Для определения применимости той или иной теории прочности необходима информация о механических свойствах данного конструкционного материала.

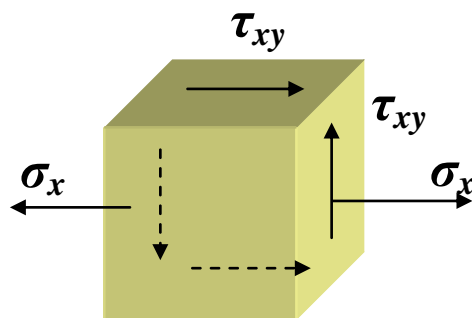
- Если материал хрупкий, то применяют I или II теорию прочности;
- Если материал пластичный, то применяют III или V теорию прочности;
- Если материал по разному сопротивляется растяжению и сжатию, то применяют теорию прочности Мора (IV теория).

Дадим оценку степени различия значений эквивалентных напряжений по различным теориям прочности. Для этого воспользуемся расчетами в среде MathCad.

[Прилож.1-Экв.напряж..mcd](#)

Формулы для эквивалентных напряжений для двухосного напряженного состояния.

Допустим, что имеем следующее двухосное напряженное состояние



Для данного напряженного состояния

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} ;$$

$$\sigma_3 = \frac{\sigma_x}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} .$$

Поэтому

$$\sigma_{эквI} = \frac{\sigma_x}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} ;$$

$$\sigma_{эквIII} = \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2} ;$$

$$\sigma_{эквV} = \sqrt{\sigma_x^2 + 3\tau_{xy}^2} .$$

Пример расчета эквивалентных напряжений для трехосного напряженного состояния

Дан вектор главных напряжений $\sigma := \begin{bmatrix} 622 \\ 208 \\ -230 \end{bmatrix} \cdot \text{МПа}$

Даны механические свойства конструкционного материала

Модуль упругости $E := 2 \cdot 10^5 \cdot \text{МПа}$

Коэффициент Пуассона $\mu := 0.25$

Допускаемое напряжение при растяжении $\sigma_{\text{limP}} := 400 \cdot \text{МПа}$

Допускаемое напряжение при сжатии $\sigma_{\text{limC}} := 500 \cdot \text{МПа}$

Вычислим эквивалентные напряжения

По первой теории прочности

$$\sigma_{\text{eqvI}} := \sigma_1$$

$$\sigma_{\text{eqvI}} = 622 \cdot \text{MPa}$$

По второй теории прочности

$$\sigma_{\text{eqvII}} := \sigma_1 - \mu \cdot (\sigma_2 + \sigma_3)$$

$$\sigma_{\text{eqvII}} = 627.5 \cdot \text{MPa}$$

По третьей теории прочности

$$\sigma_{\text{eqvIII}} := \sigma_1 - \sigma_3$$

$$\sigma_{\text{eqvIII}} = 852 \cdot \text{MPa}$$

По четвертой теории прочности (Мор)

$$\sigma_{\text{eqvIV}} := \sigma_1 - \frac{\sigma_{\text{limP}}}{\sigma_{\text{limC}}} \cdot \sigma_3$$

$$\sigma_{\text{eqvIV}} = 806 \cdot \text{MPa}$$

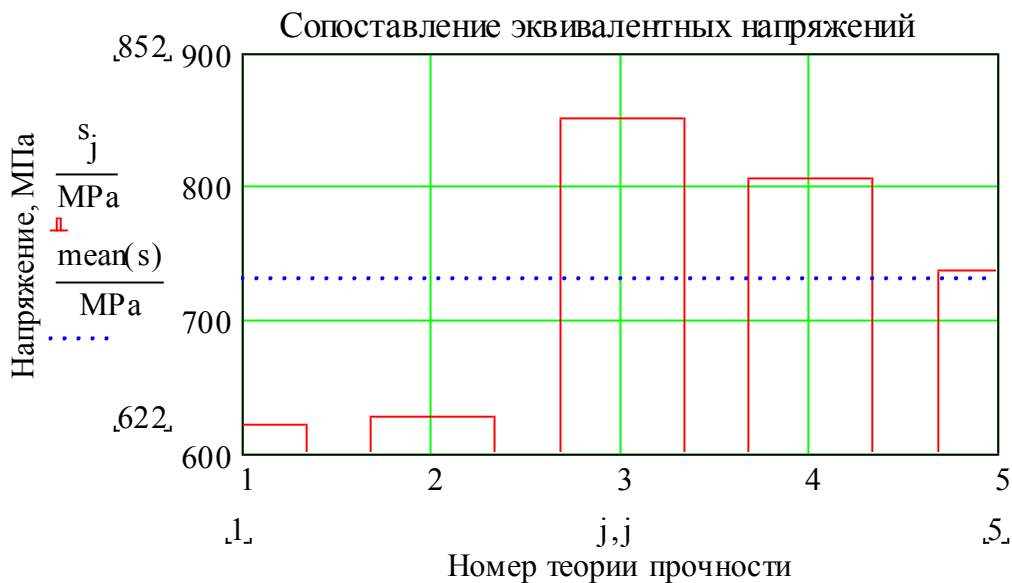
По пятой теории прочности

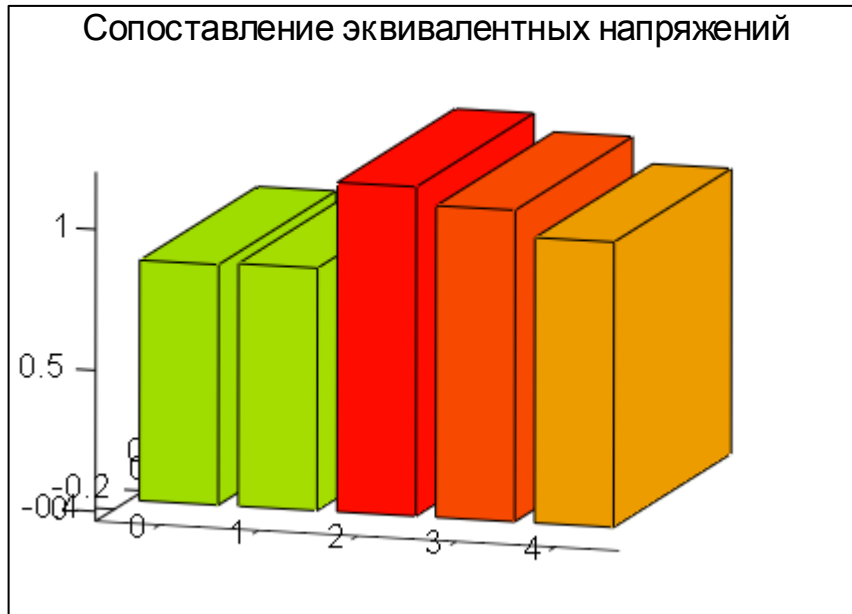
$$\sigma_{\text{eqvV}} := \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2}$$

$$\sigma_{\text{eqvV}} = 737.951 \cdot \text{MPa}$$

$$\text{mean}(s) = 729.09 \cdot \text{MPa}$$

$$S_j := \frac{s_j}{\text{mean}(s)}$$





S