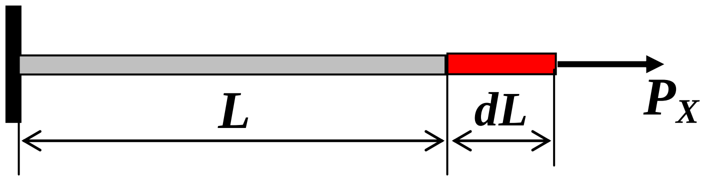
Лекция 11 – Энергетические методы определения перемещений

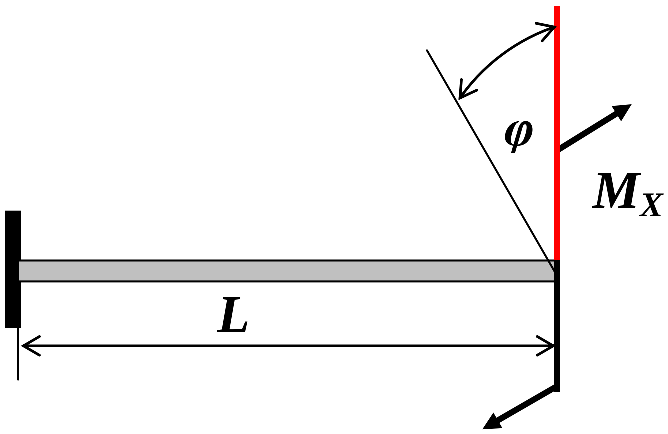
Работа внешних сил

Растяжение-сжатие



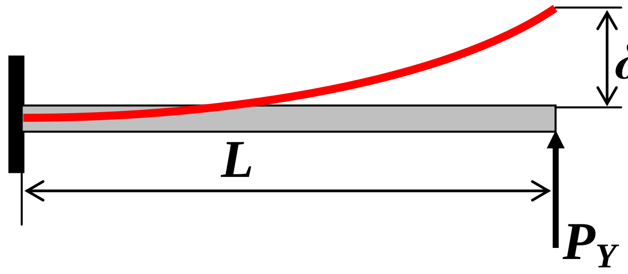
$$A_{P_X} = \frac{1}{2} P_X \Delta L \qquad (11.1)$$

Кручение

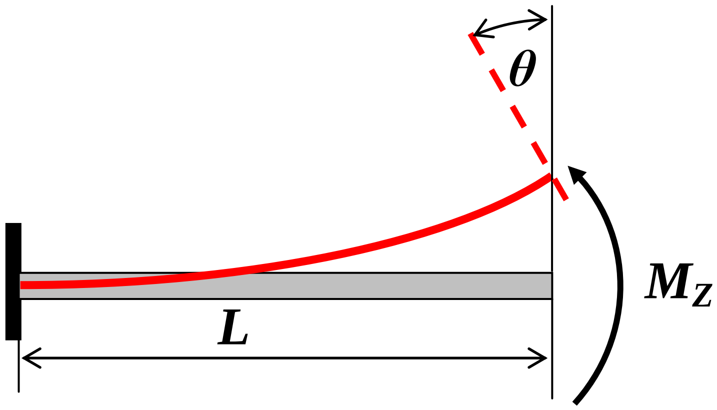


$$A_{M_X} = \frac{1}{2} M_X \varphi \qquad (11.2)$$

Изгиб



$$A_{P_Y} = \frac{1}{2} P_Y \delta \qquad (11.3)$$



$$A_{M_Z} = \frac{1}{2} M_X \theta \qquad (11.4), \qquad (11.5)$$

Формулы можно обобщить

$$A_{P_{ОБ}} = \frac{1}{2} P_{ОБ} \delta_{ОБ}$$

где $P_{ОБ}$ **– обобщенная сила, т.е. любое силовое воздействие, любой силовой фактор;**

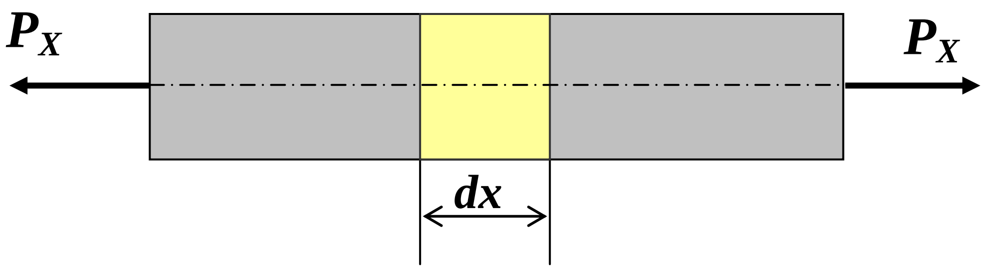
$\delta_{ОБ}$ **- обобщенное перемещение, т.е. тот вид перемещения, на котором** $P_{ОБ}$ **совершает работу.**

Каждый из шести известных силовых факторов совершает работу на своем перемещении.

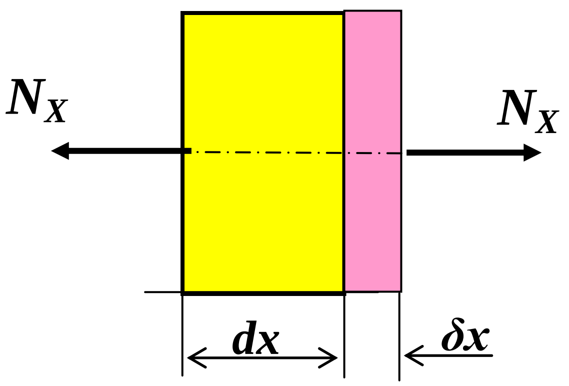
Потенциальная энергия бруса

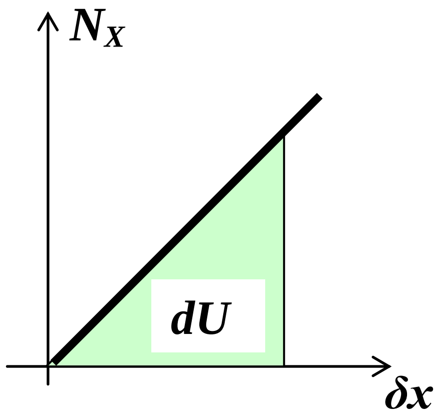
Растяжение-сжатие

Рассмотрим стержень, нагруженный продольными силами $\boldsymbol{P_X}$ **.** Выделим малый участок стержня длиной $\boldsymbol{dx}$ **.**



Под действием внутренних сил этот участок удлинится на $\boldsymbol{\delta x}$**.**





Энергия деформации выделенного участка

$$dU = \frac{1}{2} N_X \delta x.$$

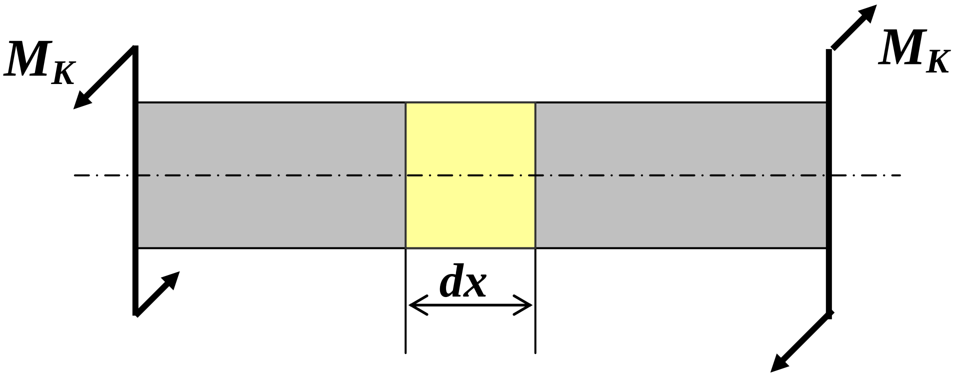
$$\delta x = \frac{N_X dx}{EF}$$

Энергия деформации всего бруса

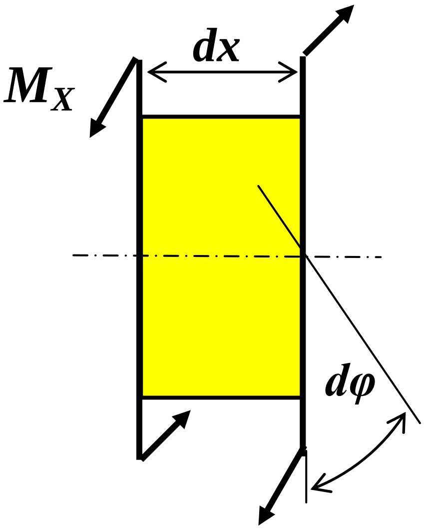
$$U_{N_X} = \int_L \frac{N_X^2(x) dx}{2EF} \qquad (11.6)$$

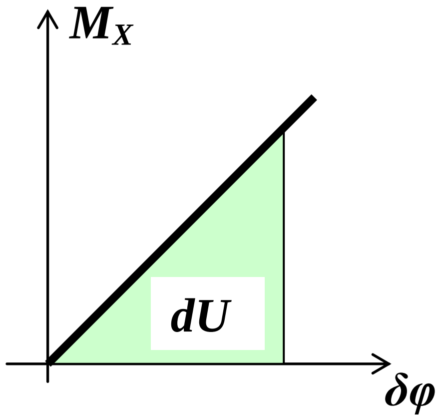
Кручение

Рассмотрим вал, нагруженный крутящими моментами M_K . Выделим малый участок вала длиной dx .



Под действием внутренних сил M_X этот участок получит угловую деформацию $\delta\varphi$.





Энергия деформации выделенного участка вала

$$dU = \frac{1}{2} M_X \delta\varphi$$

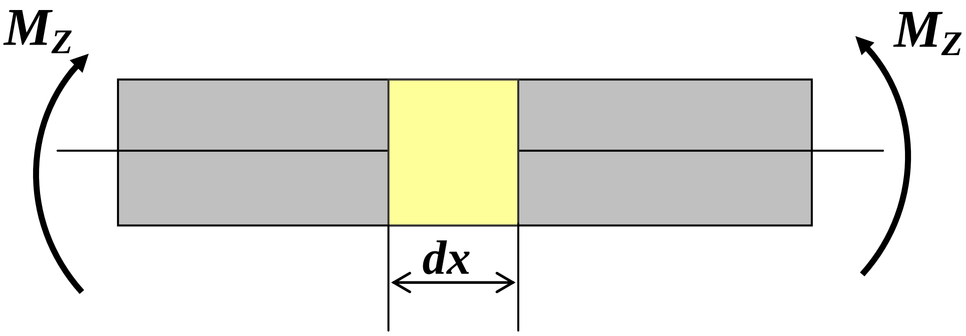
$$\delta\varphi = \frac{M_X dx}{GI_p}$$

Энергия деформации всего вала

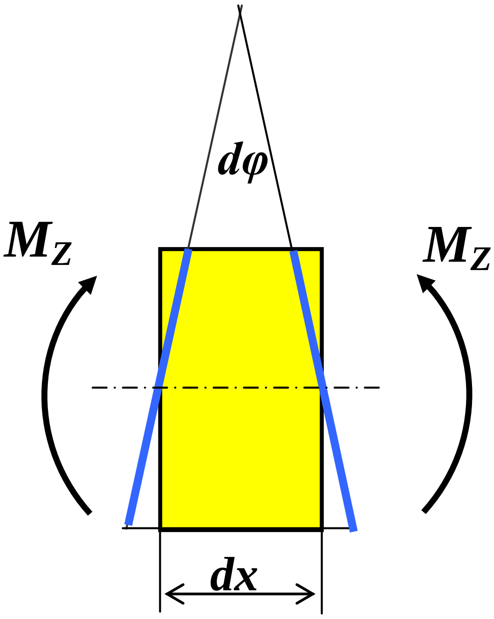
$$U_{M_X} = \int_L \frac{M_X^2(x)dx}{2GI_p} \qquad (11.7)$$

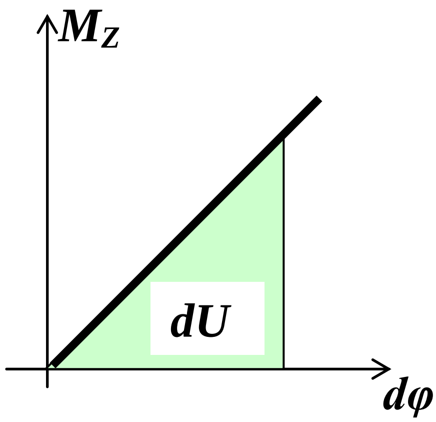
Чистый изгиб балки

Рассмотрим балку, нагруженный изгибающими моментами $\boldsymbol{M_Z}$ **.** Выделим малый участок вала длиной $\boldsymbol{dx}$ **.**



Под действием внутренних сил $\boldsymbol{M_Z}$ этот участок получит угловую деформацию $\boldsymbol{\delta\varphi}$**.**





Энергия деформации выделенного участка балки

$$dU = \frac{1}{2} M_Z \delta\varphi$$

$$\delta\varphi = \frac{M_Z dx}{EI_Z}$$

Энергия деформации всей балки

$$U_{M_Z} = \int_L \frac{M_Z^2(x) dx}{2EI_Z} \qquad (11.8)$$

По аналогии, энергия деформации всей балки при нагружении изгибающим моментом M_Y равна

$$U_{M_Y} = \int_L \frac{M_Y^2(x)dx}{2EI_Y} \qquad (11.9)$$

Потенциальная энергия при сложном нагружении

Каждому силовому фактору соответствуют перемещения, на которых остальные силовые факторы не совершают работу. Поэтому потенциальная энергия деформации при сложном нагружении равна сумме потенциальных энергий шести отдельных факторов. Пренебрегая энергией деформации, связанной с поперечными силами, получаем для полной энергии деформации

$$U = U_{N_X} + U_{M_X} + U_{M_Y} + U_{M_Z}, \quad (14.10)$$

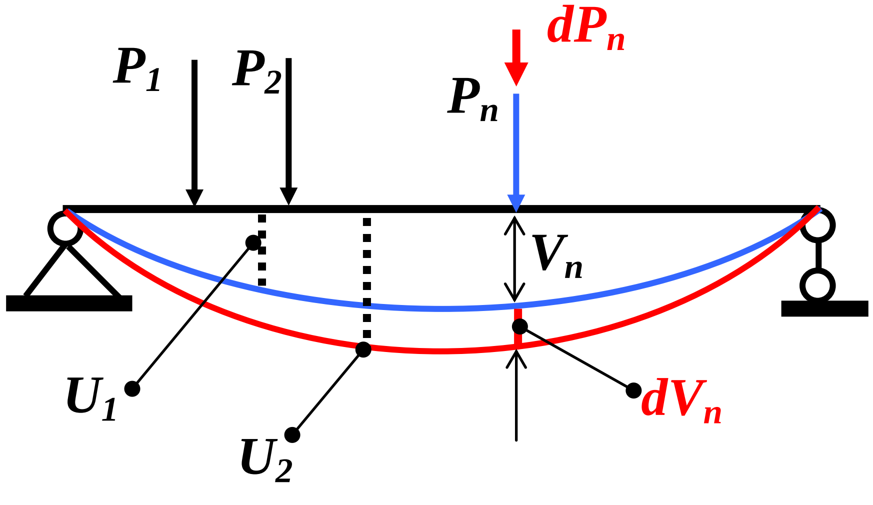
$$U = \int_L \frac{N_X^2(x)dx}{2EF} + \int_L \frac{M_X^2(x)dx}{2GI_p} + \int_L \frac{M_Y^2(x)dx}{2EI_Y} + \int_L \frac{M_Z^2(x)dx}{2EI_Z}.$$

Теорема Кастилиано

Рассмотрим балку, нагруженную силами $P_1, P_2, \ldots, P_n$.

В положении равновесия энергия деформации равна U_1.

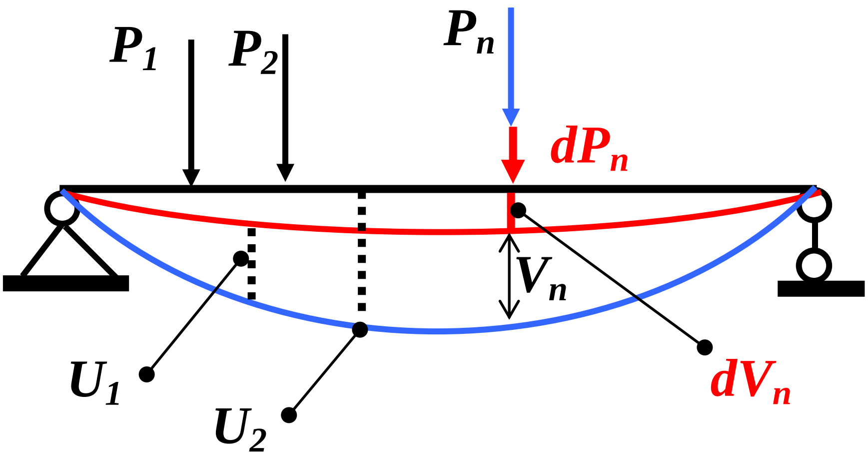
Увеличим силу P_n на dP_n.



Энергия балки достигнет значения U_2, равного

$$U_2 = U_1 + \frac{\partial U}{\partial P_n} dP_n \qquad (11.11)$$

Изменим порядок приложения сил. Сначала приложим силу $\boldsymbol{dP_n}$



Эта сила совершит работу

$$dU = \frac{1}{2} dP_n dV_n$$

Приложим остальные силы $\boldsymbol{P_1}$, $\boldsymbol{P_2}$ **, …,** $\boldsymbol{P_n}$. Они совершат работу $\boldsymbol{U_1}$ на перемещении $\boldsymbol{V_n}$ и энергия деформации балки опять достигнет значения $\boldsymbol{U_2}$.

При этом сила $\boldsymbol{dP_n}$ совершит работу на этом же перемещении, равную

$$\Delta U = dP_n V_n$$

Множитель 1/2 отсутствует, так как сила $\boldsymbol{dP_n}$ на перемещении $\boldsymbol{V_n}$, вызванном другими силами, не изменяется.

В итоге энергия $\boldsymbol{U_2}$ может быть записана в виде

$$U_2 = \frac{1}{2} dP_n dV_n + U_1 + dP_n V_n \qquad (11.12)$$

Приравняем выражения (14.11) и (14.12)

$$U_1 + \frac{\partial U}{\partial P_n} dP_n = \frac{1}{2} dP_n dV_n + U_1 + dP_n V_n .$$

Пренебрегая членом второго порядка малости $\frac{1}{2} dP_n dV_n$, получаем аналитическую формулировку теоремы Кастилиано

$$V_n = \frac{\partial U}{\partial P_n} \qquad \text{или} \qquad V_{ОБ} = \frac{\partial U}{\partial P_{ОБ}} \qquad (11.13)$$

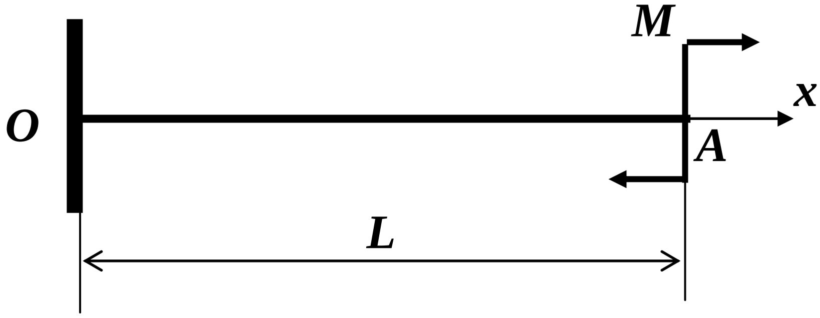
<u>Частная производная от потенциальной энергии системы по силе равна перемещению точки приложения силы вдоль направления действия этой силы.</u>

При этом в качестве силы может выступать как сосредоточенная сила, так и сосредоточенный изгибающий или крутящий момент. Силам соответствуют линейные перемещения, моментам – угловые.

Пример.

Дана консольная балка известной жесткости, нагруженная на конце $\boldsymbol{A}$ изгибающим моментом $\boldsymbol{M}$.

Требуется найти угол поворота сечения $\boldsymbol{\theta_A}$ и прогиб конца балки $\boldsymbol{\delta_A}$.



Для этой балки $\quad \boldsymbol{M_Z (x) = M = const.}$

Энергия деформации всей балки

$$U = \int_L \frac{M_Z^2(x)dx}{2EI_Z} = \frac{1}{2}\frac{M^2 L}{EI_Z}$$

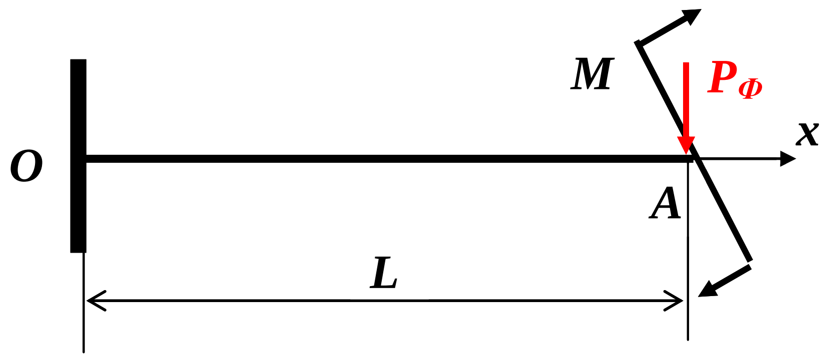
Угол поворота сечения на конце балки в соответствии с (11.13) будет равен

$$\theta_A = \frac{\partial U}{\partial M} = \frac{ML}{EI_Z}$$

Но как найти прогиб конца балки $\boldsymbol{\delta_A}$? Теорема Кастилиано дает возможность вычислять перемещения точек приложения внешних сил и только в направлении их действия.

У нас силы, действующей в вертикальном направлении на конце балки нет.

Выход есть. Нужно в интересующей нас точке приложить фиктивную силу $\boldsymbol{P_{\Phi}}$ в нужном направлении. Затем записать выражение для потенциальной энергии деформации, взять частную производную по фиктивной силе $\boldsymbol{P_{\Phi}}$, а затем положить фиктивную силу $\boldsymbol{P_{\Phi}}$ равной нулю.



Теперь изгибающий будет переменный по оси балки

$$M_Z = -\left(M + P_{\Phi} x\right)$$

$$U = \int\limits_L \frac{\left(M + P_{\Phi} x\right)^2 dx}{2EI_Z} = \frac{1}{2}\frac{M^2 L}{EI_Z} + \frac{MP_{\Phi} L^2}{2EI_Z} + \frac{P_{\Phi}^2 L^3}{6EI_Z}$$

$$\delta_A = \left(\frac{\partial U}{\partial P_{\Phi}}\right)_{P_{\Phi}=0} = \frac{ML^2}{2EI_Z}$$

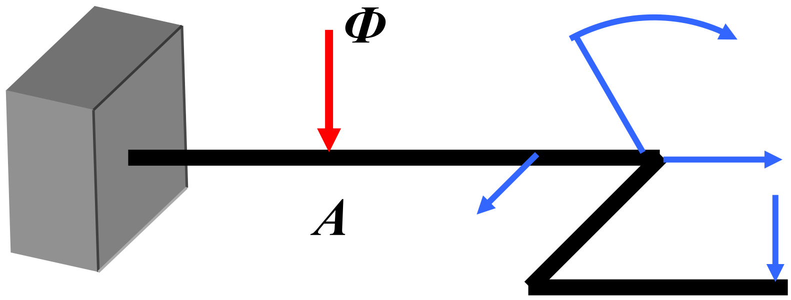
Отмерим, что можно дифференцировать и под знаком интеграла.

Интеграл Мора

Следствием теоремы Кастилиано и метода фиктивной силы является общий метод определения перемещений с помощью интегралов, известных как интегралы Мора.

Рассмотрим некоторую систему. Требуется найти вертикальное перемещение точки $\boldsymbol{A}$. Приложим в этой точке фиктивную силу $\boldsymbol{\Phi}$.

Если нужно найти угловое перемещение сечения, то фиктивной силой будет изгибающий момент, если нужно найти закручивания, то прикладывается фиктивный крутящий момент.



Силовые факторы в сечениях данной пространственной системы будут суммой факторов от всех реальных внешних и от фиктивной силы.

$$N_X^{\Sigma} = N_X + N_X^{\Phi};$$

$$M_X^{\Sigma} = M_X + M_X^{\Phi};$$

$$M_Y^{\Sigma} = M_Y + M_Y^{\Phi};$$

$$M_Z^{\Sigma} = M_Z + M_Z^{\Phi};$$

Очевидно, что дополнительные силовые факторы пропорциональны значению фиктивной силы. Их значения удвоятся, если, например, увеличить фиктивную силу в два раза. Поэтому можно записать, что

$$N_X^{\Phi} = N_{X1}\Phi;$$

$$M_X^{\Phi} = M_{X1}\Phi;$$

$$M_Y^{\Phi} = M_{Y1}\Phi;$$

$$M_Z^{\Phi} = M_{Z1}\Phi,$$

где $\boldsymbol{N_{X1}}$, $\boldsymbol{M_{X1}}$, $\boldsymbol{M_{Y1}}$ и $\boldsymbol{M_{Z1}}$ - внутренние силовые факторы от безразмерной единичной силы $\boldsymbol{\Phi = 1}$.

$$U=\int_L \frac{(N_X+N_{1X}\Phi)^2 dx}{2EF}+\int_L \frac{(M_X+M_{X1}\Phi)^2 dx}{2GI_p}+\ldots$$

$$+\int_L \frac{(M_Y+M_{1Y}\Phi)^2 dx}{2EI_Y}+\int_L \frac{(M_Z+M_{Z1}\Phi)^2 dx}{2EI_Z}$$

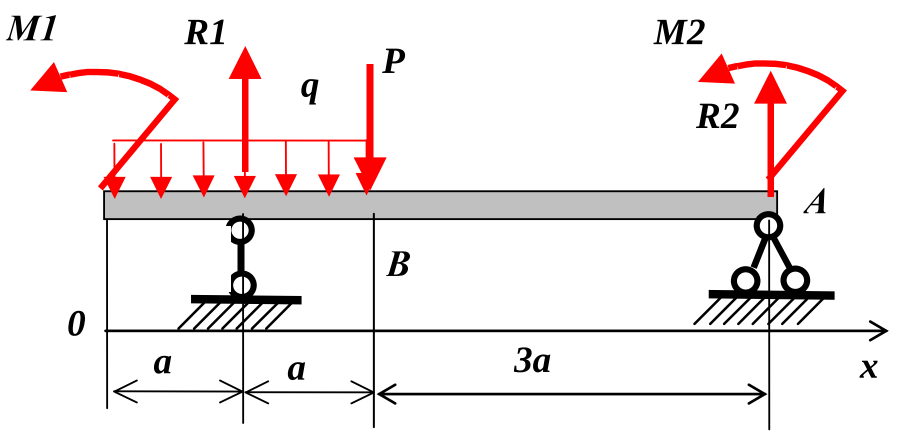
Продифференцируем под знаком интеграла и положим $\boldsymbol{\Phi = 0}$:

$$\delta_A=\left(\frac{\partial U}{\partial \Phi}\right)_{\Phi=0}=\int_L \frac{N_X N_{1X} dx}{2EF}+\int_L \frac{M_X M_{1X} dx}{2GI_p}+\ldots$$

$$+\int_L \frac{M_Y M_{1Y} dx}{2EI_Y}+\int_L \frac{M_Z M_{1Z} dx}{2EI_Z}$$

Интегралы берутся по всей длине системы, по всем участкам.
Вклад поперечных сил Q_Y и Q_Z обычно не учитывают, поскольку он, как правило, незначителен.

Задача. Найти угол поворота сечения в точке A и прогиб в точке B



$a := 1 \cdot m$

$P := 100 \cdot kN$

$M1 := 100 \cdot kN \cdot m$

$E := 2 \cdot 10^5 \cdot MPa$

$q := 100 \cdot kN \cdot m^{-1}$

$M2 := 2 \cdot M1$

Найдем опорные реакции

Given

Сумма проекций всех сил на вертикальную ось равна нулю:

$$R1 + R2 - P - q \cdot 2 \cdot a = 0$$

Сумма моментов относительно опоры А равна нулю:

$$M1 + q \cdot 2 \cdot a \cdot 4 \cdot a - R1 \cdot 4 \cdot a + P \cdot 3 \cdot a + M2 = 0$$

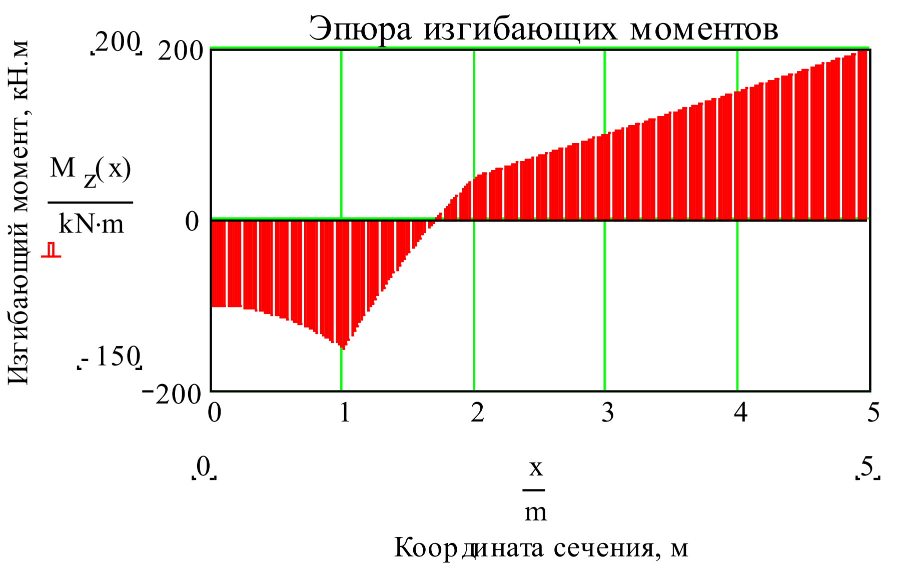
$$\begin{bmatrix} R1 \\ R2 \end{bmatrix} := \mathrm{Find}(R1, R2)$$

Таким образом, опорные реакции равны

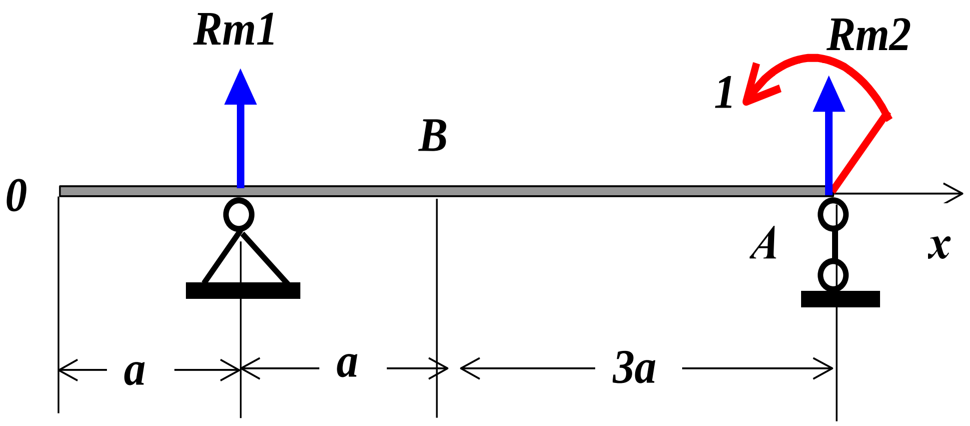
$R1 = 350 \cdot kN$ $\qquad$ $R2 = -50 \cdot kN$

Запишем функцию изгибающих моментов от внешних сил

$$M_z(x) := \begin{cases} -M1 - q \cdot \dfrac{x^2}{2} & \text{if } 0 \le x < a \\ -M1 - q \cdot \dfrac{x^2}{2} + R1 \cdot (x - a) & \text{if } a \le x < 2 \cdot a \\ -M1 - q \cdot 2 \cdot a \cdot (x - a) + R1 \cdot (x - a) - P \cdot (x - 2 \cdot a) & \text{if } 2 \cdot a \le x \le 5 \cdot a \end{cases}$$



Найдем угол поворота сечения в точке А, приложив в этой точке единичный изгибающий момент



Определим опорные реакции

Given

$$Rm1 + Rm2 = 0$$

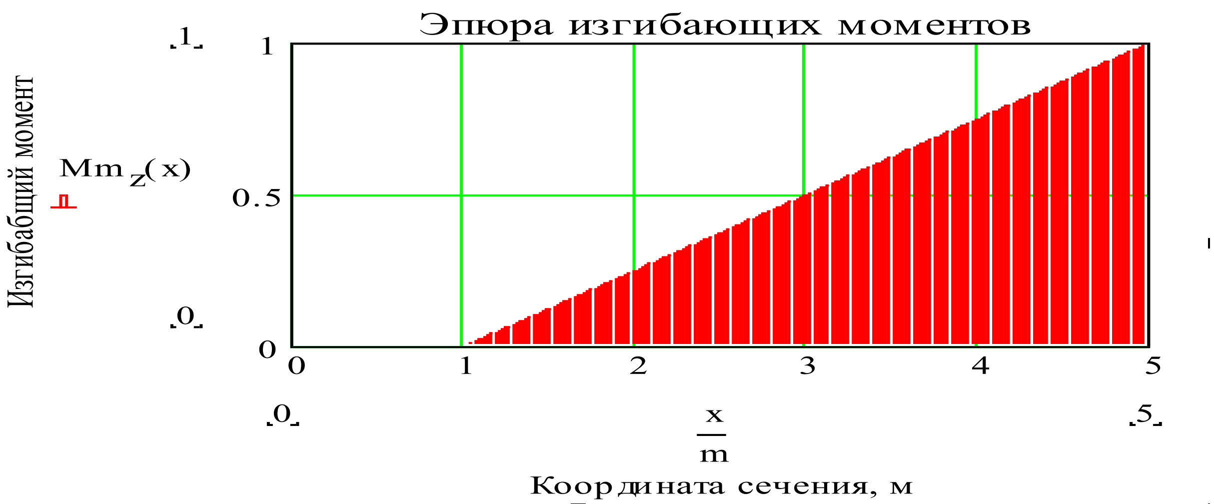
$$Rm1 \cdot 4 \cdot a - 1 = 0$$

$$\begin{bmatrix} Rm1 \\ Rm2 \end{bmatrix} := Find(Rm1, Rm2)$$

$$Rm1 = 0.25 \, \frac{1}{m} \qquad Rm2 = -0.25 \, \frac{1}{m}$$

Запишем функцию изгибающих моментов и построим соответствующую эпюру

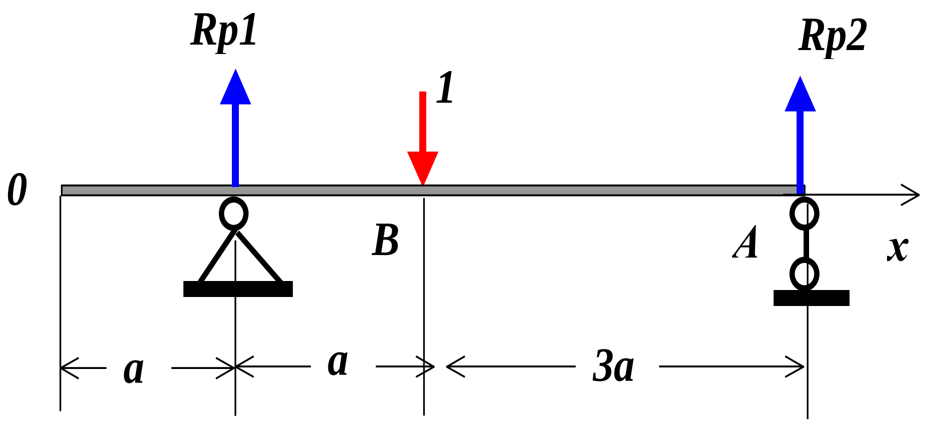
$$Mm_z(x) := \begin{cases} 0 & \text{if } 0 \le x < a \\ Rm1 \cdot (x - a) & \text{if } a \le x \le 5 \cdot a \end{cases}$$



Угол поворота сечения в точке А равен

$$\theta_A := \int_0^{5\cdot a} \frac{M_z(x)\cdot Mm_z(x)}{E\cdot I_z}\,dx \qquad \theta_A = 0.273\cdot deg$$

Найдем прогиб в точке В, приложив в этой точке единичную силу



Определим опорные реакции

Given

$$Rp1 + Rp2 - 1 = 0$$

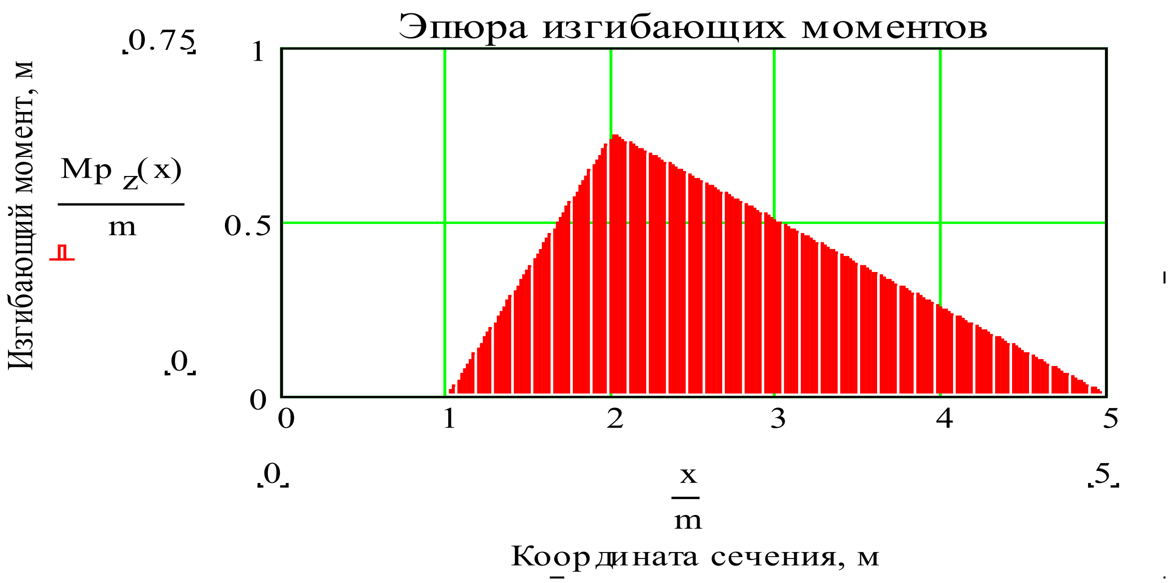
$$Rp1\cdot 4\cdot a - 1\cdot 3\cdot a = 0$$

$$\begin{bmatrix} Rp1 \\ Rp2 \end{bmatrix} := \mathrm{Find}(Rp1, Rp2)$$

$$Rp1 = 0.75 \qquad Rp2 = 0.25$$

Запишем функцию изгибающих моментов и построим соответствующую эпюру

$$Mp_z(x) := \begin{cases} 0 & \text{if } 0 \le x < a \\ Rp1\cdot(x - a) & \text{if } a \le x < 2\cdot a \\ Rp1\cdot(x - a) - 1\cdot(x - 2\cdot a) & \text{if } 2\cdot a \le x \le 5\cdot a \end{cases}$$



Прогиб в точке В равен

$$\delta_B := \int_0^{5 \cdot a} \frac{M_z(x) \cdot Mp_z(x)}{E \cdot I_z}\, dx \qquad \delta_B = 1.992 \cdot mm$$